MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO
Unidad 1. Divisibilidad

Unidad 1. Divisibilidad

SOLUCIONES PÁG. 21

1 Indica si estos números son múltiplos o divisores de 15:

a. 15

Múltiplo y divisor.

15 · 1 = 15; 15 : 1 = 15

b. 1

Divisor.

15 : 15 = 1

c. 5

Divisor.

15 : 3 = 5

d. 30

Múltiplo.

15 · 2 = 30

e. 135

Múltiplo.

15 · 9 = 135

f. 3

Divisor.

15 : 5 = 3

g. 75

Múltiplo.

15 · 5 = 75

h. 600

Múltiplo.

15 · 40 = 600

2 Escribe los múltiplos de los siguientes números que estén comprendidos entre 100 y 200:

a. 14

112, 126, 140, 154, 168, 182, 196

b. 23

115, 138, 161, 184

c. 30

120, 150, 180

d. 75

150

3 Halla todos los divisores de los números propuestos.

a. 27

D (27) = {1, 3, 9, 27}

b. 150

D (150) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150}

c. 40

D (40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}

d. 17

D (17) = {1, 17}

e. 200

D (200) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200}

f. 30

D (30) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}

g. 75

D (75) = {1, 3, 5, 15, 25, 75}

h. 225

D (225) = {1, 3, 5, 9, 15, 25, 45, 75, 225}

4 Copia y completa en tu cuaderno con las palabras *múltiplo* o *divisor.*

a. 145 es múltiplo **de 29.**

$29 \cdot 5 = 145$

b. Todo número es múltiplo **de 1.**

$N \cdot 1 = N$

c. 5 es divisor **de 85.**

$85 : 5 = 17$

d. 8 es múltiplo **de 2.**

$2 \cdot 4 = 8$

5 Los múltiplos sinceros de un número son aquellos múltiplos cuyas cifras, sumadas, dan como resultado ese mismo número. Por ejemplo, 24 es múltiplo sincero de 6 porque 2 + 4 = 6. Entre tu compañero y tú buscad cuatro múltiplos sinceros de los siguientes números:

a. 5

50, 140, 230, 320

b. 6

42, 60, 114, 132

c. 7

70, 133, 322, 511

d. 8

80, 152, 224, 440

e. 9

18, 27, 36, 45

f. 10

190, 280, 370, 460

g. 11

209, 308, 407, 506

h. 12

48, 84, 156, 192

6 Busca la siguiente página web y realiza las actividades que allí aparecen sobre divisibilidad y múltiplos y divisores:

http://conteni2.educarex.es/mats/11901/contenido/

Respuesta abierta.

7 Utilizando el concepto de divisor de un número, escribe todas las parejas de números cuyo producto sea:

a. 60

$1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$

b. 350

$1 \cdot 350 = 2 \cdot 175 = 5 \cdot 70 = 7 \cdot 50 = 10 \cdot 35 = 14 \cdot 25$

c. 48

$1 \cdot 48 = 2 \cdot 24 = 3 \cdot 16 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$

d. 110

$1 \cdot 110 = 2 \cdot 55 = 5 \cdot 22 = 10 \cdot 11$

8 Carlos quiere introducir peces en su pecera, pero esta solo tiene capacidad para un máximo de 40 ejemplares.

a. ¿Cuántos podría meter en su pecera si la especie forma grupos de 7 peces?

Son los múltiplos de 7 hasta 40. Como $7 \cdot 5 = 35$ y $7 \cdot 6 = 42$, entonces el número mayor es 35.

Por tanto, podría meter en la pecera 7, 14, 21, 28 o 35 peces.

b. ¿Y si la especie se une en grupos de 8?

Son los múltiplos de 8 hasta 40.

Por tanto, podría meter en la pecera 8, 16, 24, 32 o 40 peces.

c. ¿Y si lo hace en grupos de 6?

Son los múltiplos de 6 hasta 40. Como $6 \cdot 6 = 36$ y $6 \cdot 7 = 42$, entonces el número mayor es 36.

Por tanto, podría meter en la pecera 6, 12, 18, 24, 30 o 36 peces.

9 Daniel quiere colocar todos sus soldaditos de plomo en filas, de modo que haya el mismo número de figuras en cada una. Si tiene 200 soldaditos:

a. ¿De cuántas formas puede colocarlos si quiere que cada fila incluya más de 10 soldados?

Filas	1	2	4	5	8
Soldados	200	100	50	40	25

b. ¿Cuántas filas y figuritas hay en cada una de las distintas formaciones?

Filas	1	2	4	5	8	10	25	40	50	100	200
Soldados	200	100	50	40	25	20	8	5	4	2	1

10 Contesta de forma razonada las siguientes preguntas:

a. ¿Pueden los divisores de un número ser mayores que dicho número?

Los divisores de un número no pueden ser mayores a él, porque si no, la división no sería un número natural, al ser menor el dividendo que el divisor.

b. ¿Y pueden los múltiplos de un número ser menores que ese número?

Los múltiplos de un número no pueden ser menores que él porque se obtienen multiplicando dicho número por otro número natural y se obtienen número mayores o igual a él.

c. El producto de dos múltiplos de un número ¿es también múltiplo de dicho número?

Sí. Por ejemplo, 6 y 9 son múltiplos de 3 y, $6 \cdot 9 = 54 = 3 \cdot 18$

d. La división de dos múltiplos de un número ¿es también múltiplo de dicho número?

No siempre. Por ejemplo, 18 y 9 son múltiplos de 3 y, 18 : 9 = 2, que no es múltiplo de 3

e. Si un número es múltiplo de otro, y este lo es de un tercero, ¿el primero es múltiplo del tercero?

Sí. Si *a* es múltiplo de *b,* entonces a = b · *x.* Si *b* es múltiplo de *c,* entonces b = c · *y;* con lo que, a = b · *x* = c · *x* · *y,* de modo que *a* es múltiplo de *c.*

f. Si un número es divisor de otro, ¿lo es también de cualquier múltiplo del primero?

Sí.

Si *a* es divisor de *b,* entonces b = a · *x.*

Si *c* es un múltiplo de *b,* entonces c = b · *y;* con lo que c = b · *y* = a · *x* · *y,* de modo que *a* es divisor de *c.*

SOLUCIONES PÁG. 23

11 Copia la siguiente tabla en tu cuaderno para realizar la criba de Eratóstenes y después escribe los números primos entre el 100 y el 200:

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Los números primos entre 100 y 200 son: 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199

12 Indica si estos números son compuestos o primos:

a. 113

Primo, ya que no tiene divisores propios. D (113) = {1, 13}

b. 900

Compuesto, pues 900 tiene 27 divisores D (900) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75, 90, 100, 150, 180, 225, 300, 450, 900}

c. 315

Compuesto, pues tiene 12 divisores D (315) = {1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, 315}

d. 251

Primo, ya que no tiene divisores propios. D (251) = {1, 251}

e. 409

Primo, ya que no tiene divisores propios. D (409) = {1, 409}

f. 317

Primo, ya que no tiene divisores propios. D (317) = {1, 317}

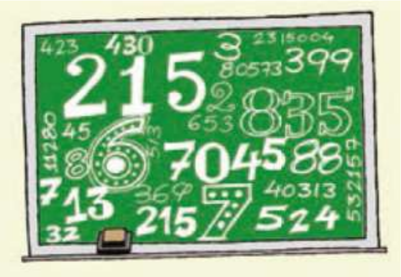
d. 242

Compuesto, pues tiene 6 divisores. D (242) = {1, 2, 11, 22, 121, 242}

h. 12

Compuesto, pues tiene 6 divisores D (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

13 Entre tu compañero y tú haced una tabla con dos columnas, donde situéis los números primos y los números compuestos que identifiquéis en la siguiente imagen:



- Números primos: 2, 3, 7, 13, 653
- Números compuestos: 6, 8, 32, 45, 88, 215, 369, 399, 423, 430, 513, 524, 835, 7 045, 11 280, 40 313, 80 573, 2 315 004, 532 157

14 Dos números son gemelos cuando son primos impares consecutivos, como, por ejemplo, el 3 y el 5. Entre tu compañero y tú buscad cuatro parejas de números gemelos.

Son parejas de números gemelos 5 y 7; 11 y 13; 17 y 19; 29 y 31

15 En la siguiente página web de Educarex se proponen varias actividades con números primos y compuestos. Accede a dicha página y realiza las actividades propuestas.

http://conteni2.educarex.es/mats/11903/contenido/

Respuesta abierta.

16 La conjetura de Goldbach es uno de los problemas matemáticos abiertos más antiguos. Dicha conjetura afirma lo siguiente:

Todo número par mayor que 2 puede escribirse como suma de dos números primos. Por ejemplo: 4 = 2 + 2 y 8 = 3 + 5

En la actualidad aún no se ha podido demostrar dicha conjetura para todos los números pares, aunque sí para un nutrido grupo de ellos.

Entre tu compañero y tú comprueba dicha conjetura para los siguientes números pares:

a. 8 = 3 + 5

b. 22 = 3 + 19

c. 44 = 7 + 37

d. 64 = 5 + 59

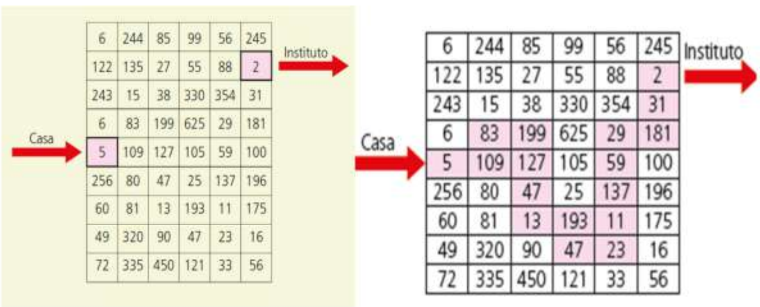
e. 110 = 13 + 97

f. 136 = 5 + 131

g. 170 = 7 + 163

h. 196 = 3 + 193

17 Cynthia quiere llegar al instituto lo antes posible. Para ello, tiene que atravesar el siguiente laberinto de números, con la condición de no pisar ningún número compuesto. ¿Puedes ayudarla a trazar el camino que va de su casa al instituto pasando solo por números primos?



6	244	85	99	56	245
122	135	27	55	88	2
243	15	38	330	354	31
6	83	199	625	29	181
5	109	127	105	59	100
256	80	47	25	137	196
60	81	13	193	11	175
49	320	90	47	23	16
72	335	450	121	33	56

Números primos: 5, 109, 83, 199, 127, 47, 13, 193, 47, 23, 11, 137, 59, 29, 181, 31, 2

SOLUCIONES PÁG. 25

18 Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla, aplicando los criterios de divisibilidad estudiados:

Divisible entre...	35	100	22	80
2	No	Sí	Sí	Sí
5	Sí	Sí	No	Sí
10	No	Sí	No	Sí

Entre tu compañero y tú explicad qué es lo que veis en común en los criterios de divisibilidad entre 2, 5 y 10.

Los números divisibles entre 10 lo son a la vez entre 2 y entre 5.

19 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla, utilizando los criterios de divisibilidad estudiados:

Divisible entre...	200	184	218	450
2	Sí	Sí	Sí	Sí
4	Sí	Sí	No	No

a. Todos los números divisibles entre 2 ¿lo son también entre 4?

No todos los números divisibles entre 2 lo son entre 4.

b. Todos los números divisibles entre 4 ¿lo son también entre 2?

Todos los números divisibles entre 4, lo son también entre 2.

20 Indica en tu cuaderno el valor de R para que los siguientes números sean divisibles entre 11:

Un número es divisible entre 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan el lugar par y la suma de las cifras que ocupan el lugar impar el 0 o múltiplo de 11.

a. 1 R14

(1 + 1) – (R + 4) = 11

2 – R – 4 = –2 – R = 11 ⇒ R = 9

El número es el 1 **9**14

b. 6 8R1

(6 + R) – (8 + 1) = 0 ⇒ R = 3

El número es el 6 8**3**1

6 831 : 11 = 621

c. R 268

(R + 6) – (2 + 8) = 0 ⇒ R = 4

4 268

4 268 : 11 = 388

d. 8 36R

(8 + 6) – (3 + R) = 11 ⇒ R = 0

8 360

8 360 : 11 = 760

e. 6R 823

(6 + 8 + 3) – (R + 2) = 11 ⇒ R = 4

6**4** 823

64 823 : 11 = 5 893

f. R0 393

(R + 3 + 3) – (0 + 9) = 0 ⇒ R = 3

30 393

30 393 : 11 = 2 763

g. 7 6R8

(7 + R) – (6 + 8) = 0 ⇒ R = 7

7 6**7**8

7 678 : 11 = 698

h. 9 07R

(9 + 7) – (R) = 11 ⇒ R = 5

9 07**5**

9 075 : 11 = 825

21 Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de R para que los siguientes números sean divisibles entre 15:

Un número es divisible entre 15 cuando la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3 y además, acaba en 0 o en 5.

a. 21 R45

R + 12 = 12; R + 12 = 15;
R + 12 = 18; R + 12 = 21

R = 0, 3, 6, 9

b. 6R 210

R + 9 = 9; R + 9 = 12;
R + 9 = 15; R + 9 = 18

R = 0, 3, 6, 9

c. 6 R25

R + 13 = 15; R + 13 = 18

R + 13 = 21

R = 2, 5, 8

d. 3 57R

R + 15 = 15

R = 0

e. 9 R50

R + 14 = 15; R + 14 = 18

R + 14 = 21

R = 1, 4, 7

f. 4 06R

R + 10 = 15

R = 5

g. R 310

R + 4 = 6; R + 4 = 9;
R + 4 = 12

R = 2, 5, 8

h. 7 R75

R + 19 = 21; R + 19 = 24;

R + 19 = 27

R = 2, 5, 8

22 Indica cuáles de los siguientes números son divisibles entre 7:

Un número es divisible entre 7 si la diferencia entre el número sin la cifra de las unidades y el doble de la cifra de las unidades es 0 o múltiplo de 7.

a. 41 272

Es divisible entre 7 porque 4 127 – 4 = 4 123 ⇒ 4 123 : 7 = 589

b. 15 281

Es divisible entre 7 porque 1 528 – 2 = 1 526 ⇒ 1 526 : 7 = 218

c. 7 712

No es divisible entre 7 porque 771 – 4 = 767 ⇒ 767 : 7 = 109,57

d. 6 517

Es divisible entre 7 porque 651 – 14 = 637 ⇒ 637 : 7 = 91

e. 4 820

No es divisible entre 7 porque 482 – 0 = 482 ⇒ 482 : 7 = 68,85

f. 4 067

Es divisible entre 7 porque 406 – 14 = 392 ⇒ 392 : 7 = 56

g. 1 623

No es divisible entre 7 porque 162 – 6 = 156 ⇒ 156 : 7 = 22,28

h. 2 324

Es divisible entre 7 porque 232 – 8 = 224 ⇒ 224 : 7 = 32

23 Busca entre los siguientes números cuáles son divisibles entre 25:

4 450 3 290 2 275 9 000

Un número es divisible entre 25 si sus dos últimas cifras son ceros o múltiplos de 25.

Son divisibles entre 25: 4 450, 2 275, 9 000

a. Los números que son divisibles entre 25 ¿lo son también entre 5?

Sí, los números que son divisibles entre 25 lo son también entre 5.

b. ¿Y al revés? Pon ejemplos para demostrarlo.

No, hay números divisibles entre 5 que no lo son entre 25. Por ejemplo 135 es divisible entre 5 pero no es divisible entre 25.

24 Reproduce y completa en tu cuaderno la siguiente tabla, utilizando los criterios de divisibilidad:

Divisible entre...	924	65	175	594	200
2	Sí	No	No	Sí	Sí
3	Sí	No	No	Sí	No
4	Sí	No	No	No	Sí
5	No	Sí	Sí	No	Sí
7	Sí	No	Sí	No	No
10	No	No	No	No	Sí
11	Sí	No	No	Sí	No
25	No	No	Sí	No	Sí

25 Lucía tiene una caja llena de rotuladores. Julián le pregunta si sabe cuántos rotuladores contiene, a lo que Lucía contesta: «El número de rotuladores se encuentra entre 300 y 400. Además, dicho número es divisible entre 7 y 3». Julián replica: «Me faltan datos», y Lucía concluye: «Es verdad, también es divisible entre 4». ¿Podéis ayudar tu compañero y tú a Julián a encontrar el número de rotuladores buscado?

El número buscado debe ser múltiplo de 84, ya que $7 \cdot 3 \cdot 4 = 84$.

El primer múltiplo de 84 mayor de 300 es 336.

336 : 7 = 48; 336 : 3 = 112; 336 : 4 = 84

Lucía tiene 336 rotuladores.

26 Además de los criterios de divisibilidad enunciados en esta unidad, existen otros muchos. Investiga en Internet cuáles son los criterios de divisibilidad de los siguientes números. Ilustra la explicación de dichos criterios de divisibilidad con ejemplos.

a. 8 → Un número es divisible entre 8 si las 3 últimas cifras del número son ceros o múltiplos de 8.

b. 13 → Un número es divisible entre 13 si separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 9, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 13.

c. 17 → Un número es divisible entre 17 si separando la primera cifra de la derecha, multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da cero o múltiplo de 17.

27 Visita la siguiente página web para realizar las actividades propuestas sobre criterios de divisibilidad:

http://conteni2.educarex.es/mats/11902/contenido/

Respuesta abierta.

28 ¿Cómo serán los números que sean múltiplos de 4 y de 25 simultáneamente?

Acabarán en 00, ya que es la única manera de ser a la vez múltiplos de 4 y 25.

29 Entre tu compañero y tú enunciad los criterios de divisibilidad de los números 18, 20 y 12.

- Criterio de divisibilidad entre 18. Un número es divisible entre 18 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9 y acaba en 0 o cifra par.
- Criterio de divisibilidad entre 20. Un número es divisible entre 20 si sus dos últimas cifras forman un número múltiplo de 4 que acabe en 0.
- Criterio de divisibilidad entre 12. Un número es divisible entre 12 si sus dos últimas cifras forman un número múltiplo de 4 y al sumar las cifras se obtiene un múltiplo de 3.

30 Comprueba si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. El número 2 555 es múltiplo de 7.

Verdadero, pues 2 555 : 7 = 365

b. El número 274 es múltiplo de 11.

Falso, pues 274 : 11 = 24,90

c. El número 9 440 es múltiplo de 4 y de 25.

Falso, es múltiplo de 4 (9 440 : 4 = 2 360) pero no de 25 (9 440 : 25 = 377,6).

d. El número 170 es múltiplo de 7 y de 10.

Falso, pues es múltiplo de 10 (170 : 10 = 17) pero no es múltiplo de 7 (170 : 7 = 24,28).

SOLUCIONES PÁG. 27

31 Descompón mentalmente los siguientes números en producto de factores primos:

a. 250 = $2 \cdot 5^3$

b. 42 = $2 \cdot 3 \cdot 7$

c. 800 = $2^5 \cdot 5^2$

d. 180 = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

e. 240 = $2^4 \cdot 3 \cdot 5$

f. 230 = $2 \cdot 5 \cdot 23$

g. 3 200 = $2^7 \cdot 5^2$

h. 33 000 = $2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 11$

32 Realiza la descomposición factorial de estos números:

a. 1 720 = $2^3 \cdot 5 \cdot 43$

b. 5 370 = $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 179$

c. 8 525 = $5^2 \cdot 11 \cdot 31$

d. 4 416 = $2^6 \cdot 3 \cdot 23$

e. 7 480 = $2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$

f. 1 512 = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$

g. 26 208 = $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$

h. 11 880 = $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$

i. 24 150 = $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 23$

33 Indica a qué números corresponden las descomposiciones factoriales propuestas.

a. $\mathbf{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^5}$ = 900 000

b. $\mathbf{3^2 \cdot 7^2}$ = 441

c. $\mathbf{3^2 \cdot 11}$ = 99

d. $\mathbf{5^2 \cdot 11^2}$ = 3 025

e. $\mathbf{3^4 \cdot 5^2}$ = 2 025

f. $\mathbf{2^4 \cdot 17}$ = 272

g. $\mathbf{2^2 \cdot 3 \cdot 13}$ = 156

h. $\mathbf{3 \cdot 5^2 \cdot 7^3}$ = 25 725

34 Copia y completa en tu cuaderno estas descomposiciones en producto de factores primos para que sean correctas:

a. $2 \cdot A^B \cdot 5 \cdot C = 630$

$A = 3;\ B = 2;\ C = 7$

b. $5^A \cdot B = 725$

$A = 2;\ B = 29$

c. $2^A \cdot B \cdot C = 1\,040$

$A = 4;\ B = 5;\ C = 13$

d. $A^B \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot C = 5\,580$

$A = 2;\ B = 2;\ C = 31$

e. $A^B \cdot C \cdot 167 = 7\,515$

$A = 3;\ B = 2;\ C = 5$

f. $2^A \cdot B^2 \cdot C = 700$

$A = 2;\ B = 5;\ C = 7$

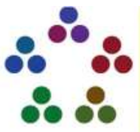
35 Entre tu compañero y tú realizad los diagramas de números factorizados de los siguientes números:

a. 7

7 es primo

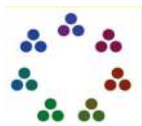
b. 15

$15 = 3 \cdot 5$



c. 21

$21 = 3 \cdot 7$



d. 42

$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

36 Calcula el número de divisores de los siguientes números:

a. 180

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \Rightarrow$ Exponentes 2, 2 y 1 $\Rightarrow (2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 18$

Tiene 18 divisores.

b. 75

$75 = 3 \cdot 5^2 \Rightarrow$ Exponentes 1 y 2 $\Rightarrow (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 6$

Tiene 6 divisores.

c. 128

$128 = 2^7 \Rightarrow$ Exponente 7 $\Rightarrow (7 + 1) = 8$

Tiene 8 divisores.

d. 80

$80 = 2^4 \cdot 5 \Rightarrow$ Exponentes 4 y 1 $\Rightarrow (4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$

Tiene 10 divisores.

37 Indica a qué descomposiciones y, por tanto, a qué números corresponden estos diagramas:

a.

$2^3 \cdot 3 = 2$

b.

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

c.

11

d.

$3^3 = 27$

¿Qué tipo de número es el del apartado c?

La descomposición del número c. corresponde a un número primo.

SOLUCIONES PÁG. 29

38 Realiza la descomposición factorial de los siguientes números y calcula su m.c.m. y su m.c.d.:

a. 36 y 27

$36 = 2^2 \cdot 3^2$; $27 = 3^3$

m.c.m. $(36, 27) = 2^2 \cdot 3^3 = 108$, m.c.d. $(36, 27) = 3^2 = 9$

b. 64 y 25

$64 = 2^6$; $25 = 5^2$

m.c.m. $(64, 25) = 2^6 \cdot 5^2 = 1\,600$, m.c.d. $(64, 25) = 1$

c. 156 y 624

$156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$; $624 = 2^4 \cdot 3 \cdot 13$

m.c.m. $(156, 624) = 2^4 \cdot 3 \cdot 13 = 624$, m.c.d. $(156, 624) = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 = 156$

d. 700 y 350

$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$; $350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

m.c.m. $(700, 350) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 700$, m.c.d. $(700, 350) = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 350$

e. 918 y 612

$918 = 2 \cdot 3^3 \cdot 17$; $612 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$

m.c.m. $(918, 612) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 17 = 1\,836$, m.c.d. $(918, 612) = 2 \cdot 3^2 \cdot 17 = 306$

f. 390 y 832

$390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$; $832 = 2^6 \cdot 13$

m.c.m. $(390, 832) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 12\,480$, m.c.d. $(390, 832) = 2 \cdot 13 = 26$

39 Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes números:

a. 180, 240 y 320

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$; $320 = 2^6 \cdot 5$

m.c.d. (180, 240, 320) = $2^2 \cdot 5 = 20$

m.c.m. (180, 240, 320) = $2^6 \cdot 5 \cdot 3^2 = 2\,880$

b. 525, 175 y 105

$525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$; $175 = 5^2 \cdot 7$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.d. (525, 175, 105) = $7 \cdot 5 = 35$

m.c.m. (525, 175, 105) = $5^2 \cdot 3 \cdot 7 = 525$

c. 625, 150 y 75

$625 = 5^4$; $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $75 = 3 \cdot 5^2$

m.c.d. (625, 150, 75) = $5^2 = 25$

m.c.m. (625, 150, 75) = $5^4 \cdot 2 \cdot 3 = 3\,750$

d. 324, 300 y 225

$324 = 3^4 \cdot 2^2$; $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $225 = 3^2 \cdot 5^2$

m.c.d. (324, 300, 225) = 3

m.c.m. (324, 300, 225) = $3^4 \cdot 5^2 \cdot 2^2 = 8\,100$

40 Comprueba si los números de los pares propuestos son primos entre sí.

Si m.c.m. (a, b) = 1, se dice que a y b son primos entre sí.

a. 64 y 81

m.c.d. (64, 81) = 1.
Son primos entre sí.

b. 220 y 165

m.c.d. (220, 165) = 55.
No son primos entre sí.

c. 80 y 33

m.c.d. (80, 33) = 1.
Son primos entre sí.

41 Calcula el m.c.d. de los siguientes pares de números mediante el algoritmo de Euclides:

a. 674 y 546

m.c.d. (674, 546) = m.c.d. (546, 128) = m.c.d. (128, 34) = m.c.d. (34, 26) = m.c.d. (26, 8) = m.c.d. (8, 2) = m.c.d. (2, 0) = 2

b. 240 y 570

m.c.d. (240, 570) = m.c.d. (240, 90) = m.c.d. (90, 60) = m.c.d. (60, 30) =

= m.c.d. (30, 0) = 30

c. 808 y 132

m.c.d. (808, 132) = m.c.d. (132, 16) = m.c.d. (16, 4) = m.c.d. (4, 0) = 4

d. 550 y 600

m.c.d. (550, 600) m.c.d. (550, 50) = m.c.d. (50, 0) = 50

e. 176 y 66

m.c.d. (176, 66) = m.c.d. (66, 44) = m.c.d. (44, 22) = m.c.d. (22, 0) = 22

f. 315 y 182

m.c.d. (315, 182) = m.c.d. (182, 133) = m.c.d. (133, 49) = m.c.d. (49, 35) =

= m.c.d. (35, 14) = m.c.d. (14, 7) = m.c.d. (7, 0) = 7

42 Halla el m.c.m. de las parejas de la actividad anterior mediante la propiedad siguiente:

A · B = m.c.m. (A, B) · m.c.d. (A, B)

a. m.c.m. (674, 546)

674 · 546 = m.c.m. (674, 546) · 2

m.c.m. (674, 546) = (674 · 546) : 2

m.c.m. (674, 546) = 184 002

b. m.c.m. (240, 570)

240 · 570 = m.c.m. (240, 570) · 30

m.c.m. (240, 570) = (240 · 570) : 30

m.c.m. (240, 570) = 4 560

c. m.c.m. (808, 132)

808 · 132 = m.c.m. (808, 132) · 4

m.c.m. (808, 132) = (808 · 132) : 4

m.c.m. (808, 132) = 26 664

d. m.c.m. (550, 600)

550 · 600 = m.c.m. (550, 600) · 50

m.c.m. (550, 600) = (550 · 600) : 50

m.c.m. (550, 600) = 6 600

e. m.c.m. (176, 66)

176 · 66 = m.c.m. (176, 66) · 22

m.c.m. (176, 66) = (176 · 66) : 22

m.c.m. (176, 66) = 528

f. m.c.m. (315, 182)

315 · 182 = m.c.m. (315, 182) · 7

m.c.m. (315, 182) = (315 · 182) : 7

m.c.m. (315, 182) = 8 190

43 Copia y completa en tu cuaderno estas descomposiciones para que el m.c.m. y el m.c.d. sean correctos:

a. $\left.\begin{aligned} a &= A^2 \cdot 2^5 \\ b &= 5 \cdot B^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{m.c.d. } (a,\ b) = 1$

A puede ser cualquier número excepto el 5 y distinto de B.

B puede ser cualquier número excepto el 2 y que sea distinto de A.

b. $\left.\begin{aligned} a &= 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5 \\ b &= 2^A \cdot 3^2 \cdot B^C \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{m.c.m. } (a,\ b) = 2^3 \cdot 3^D \cdot E^2$

A = 3; B = E = 5; C = D = 2

44 En una relojería hay 3 relojes de cuco. El cuco amarillo toca cada 60 minutos; el rojo, cada 45 minutos, y el azul, cada 90 minutos. Si han coincidido los tres relojes a las 12:00 h:

a. ¿A qué hora volverán a coincidir?

m.c.m. (60, 45, 90) = 180; $\dfrac{180\,\text{min} \cdot 1\text{ h}}{60\text{ min}} = 3\text{ h}$

Volverán a coincidir a los 180 min, que son tres horas, es decir, a las 15:00 h.

b. ¿Cuántas veces tocará cada cuco hasta que coincidan de nuevo los tres?

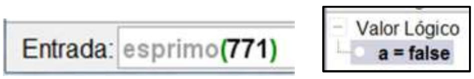
180 : 60 = 3; 180 : 45 = 4; 180 : 90 = 2

El cuco amarillo tocará tres veces, el rojo cuatro veces y el azul dos veces.

SOLUCIONES PÁG. 30

Utiliza GeoGebra para realizar las siguientes actividades:

1 Indica si los siguientes números son primos: 4 567, 1 759, 6 542 y 771.



Son números primos: 4 567 y 1 759

Son números compuestos: 6 542 y 771

2 Halla los divisores de los números 280, 130, 689 y 245.

Entrada: listadivisores(280) | Lista: lista1 = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 140, 280}

D (280) = {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 140, 280}

Entrada: listadivisores(130) | Lista: lista1 = {1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130}

D (130) = {1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130}

Entrada: listadivisores(689) | Lista: lista1 = {1, 13, 53, 689}

D (689) = {1, 13, 53, 689}

Entrada: listadivisores(245) | Lista: lista1 = {1, 5, 7, 35, 49, 245}

D (245) = {1, 5, 7, 35, 49, 245}

3 Realiza la descomposición factorial de los siguientes números:

170, 650, 855 y 1 564.

Entrada: factoresprimos(170) | Lista: lista1 = {2, 5, 17}

$170 = 2 \cdot 5 \cdot 17$

Entrada: factoresprimos(650) | Lista: lista1 = {2, 5, 5, 13}

$650 = 2 \cdot 5^2 \cdot 13$

Entrada: factoresprimos(855) | Lista: lista1 = {3, 3, 5, 19}

$855 = 3^2 \cdot 5 \cdot 19$

Entrada: factoresprimos(1564) | Lista: lista1 = {2, 2, 17, 23}

$1\,564 = 2^2 \cdot 17 \cdot 23$

4 Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de:

a. 35, 72 y 50

Entrada: MCD({35,72,50}) | Número: a = 1

Entrada: MCM({35,72,50}) | Número: a = 12600

b. 140, 220 y 410

Entrada: MCD({140,220,410}) | Número: a = 10

Entrada: MCM({140,220,410}) | Número: a = 63140

SOLUCIONES PÁG. 31

1 **¿Qué significa la existencia de una relación de divisibilidad entre dos números? Explícalo con un ejemplo.**

Si entre dos números existe una relación de divisibilidad, significa que si dividimos el mayor entre el menor, la división es exacta. Por ejemplo, entre 16 y 2 hay una relación de divisibilidad porque 16 : 2 = 8 resto 0.

2 **Si tenemos el producto a · b = c:**

a. ¿Qué número divide a *c?*

El número que divide a *c* es *a* y *b*.

b. ¿Cuál es el resultado de esa división?

Si es c : a = b, y si es c : b = a.

c. ¿Es el número *c* múltiplo o divisor del número *a?*

El número *c* es múltiplo del número *a.*

d. ¿Es el número *b* múltiplo o divisor del número *c?*

El número *b* es divisor del número *c.*

3 **¿En qué se diferencia un número primo de un número compuesto?**

Un número compuesto tiene más de dos divisores, un número primo sólo tiene dos divisores, el 1 y él mismo.

4 **¿Es posible calcular todos los múltiplos de un número? ¿Y sus divisores? Ilústralo con ejemplos.**

Los múltiplos de un número son infinitos, por lo que es imposible escribir todos. Sin embargo, los divisores de un número son finitos, por lo que sí podremos escribirlos. Por ejemplo:

Divisores (8) = {1, 2, 4, 8}

Múltiplos (8) = {8, 16, 24, 32, …}

5 **Explica con ejemplos el cálculo del m.c.d. y del m.c.m. a partir de la descomposición factorial de dos o más números.**

El m.c.d. es el producto de los factores comunes de las descomposiciones factoriales elevados al menor exponente. El m.c.m. es el producto de los factores comunes y no comunes de las descomposiciones factoriales elevados al mayor exponente. Por ejemplo:

$45 = 3^2 \cdot 5$ $\qquad$ $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

m.c.d. $(45, 60) = 3 \cdot 5 = 15$

m.c.m. $(45, 60) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$

6 Ilustra con ejemplos cómo se calcula el m.c.d. utilizando el algoritmo de Euclides.

Para calcular el m.c.d. utilizando el algoritmo de Euclides, comenzamos dividiendo el número mayor entre el menor. El divisor pasa a ser ahora el dividendo y el resto obtenido al realizar la división pasa a ser el divisor y se vuelve a realizar la división. Se continúa realizando las divisiones hasta que el resto de la división sea 0, con lo cual, el último divisor sería el m.c.d. Por ejemplo: m.c.d. (60, 45) = 15

60	45		45	15
15	1	$\rightarrow$	0	3

7 ¿Qué propiedad relaciona el m.c.d. con el m.c.m.? Explícalo con ejemplos.

A · B = m.c.d. (A, B) · m.c.m. (A, B)

Por ejemplo:

60 · 45 = m.c.d. (60, 45) · m.c.m. (60, 45)

60 · 45 = 15 · 180

2 700 = 2 700

8 Busca la siguiente página web de Educarex para repasar lo aprendido en la unidad:

http://conteni2.educarex.es/mats/11906/contenido/

Respuesta abierta.

9 Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 32 – REPASO FINAL

MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO

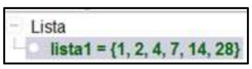
1 Calcula los divisores de los siguientes números y comprueba los resultados con GeoGebra:

a. 36

D (36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}

b. 28

D (28) = {1, 2, 4, 7, 14, 28}

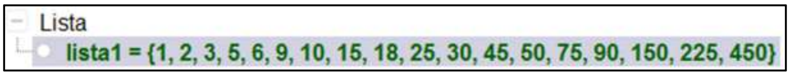


c. 110

D (110) = {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110}

d. 450

D (450) = {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 30, 45, 50, 75, 90, 150, 225, 450}



2 Verifica si en los siguientes pares de números existe relación de divisibilidad e indica, en caso afirmativo, cuáles serían los múltiplos y cuáles los divisores:

a. 340 y 27

No existe relación de divisibilidad entre 340 y 27, ya que 340 : 27 = 12 resto 16.

b. 40 y 120

Existe relación de divisibilidad entre 120 y 40, ya que 120 : 40 = 3 resto 0, siendo 120 múltiplo de 40 y de 3, y 40 y 3, divisores de 120.

c. 66 y 3

Existe relación de divisibilidad entre 66 y 3, ya que 66 : 3 = 22 resto 0, siendo 66 múltiplo de 22 y de 3, y 22 y 3, divisores de 66.

3 Patricia tiene 250 lápices de colores y quiere repartirlos en estuches de modo que cada uno tenga la misma cantidad, pero al menos 10 lápices.

a. ¿De cuántas maneras puede guardar los lápices de colores en los estuches?

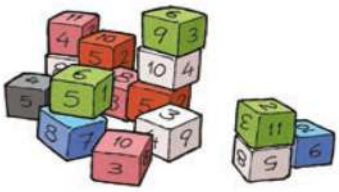
Lápices	10	25	50	125	250
Estuches	25	10	5	2	1

b. ¿Qué combinaciones de lápices y estuches podrá realizar?

Lápices	1	2	5	10	25	50	125	250
Estuches	250	125	50	25	10	5	2	1

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

4 Indica cuáles de los siguientes números son primos y cuáles son compuestos:



Son números primos: 2, 3, 5, 7, 11. Son números compuestos: 4, 6, 8, 9, 10

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

5 Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de las letras para que los siguientes números sean divisibles entre los números que se indican:

a. 34 A5B, divisible entre 3 y 5.

Si B = 0 ⇒ A = 0, 3, 6 o 9

Si B = 5 ⇒A = 1, 4 o 7

b. A3 47B, divisible entre 3 y 10.

B = 0 y A = 1, 4 o 7

c. 1 A8B, divisible entre 11 y 9.

Cualquier número tal que A + B = 9

d. 1 8AB, divisible entre 2 y 25.

B = 0 y A = 0 o 5

e. 5AB, divisible entre 4 y 9.

A = 0 y B = 4

6 Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla, utilizando los criterios de divisibilidad:

Divisible entre…	1800	288	1001	275
2	Sí	Sí	No	No
3	Sí	Sí	No	No
4	Sí	Sí	No	No
5	Sí	No	No	Sí
7	No	No	Sí	No
9	Sí	Sí	No	No
10	Sí	No	No	No
11	No	No	Sí	Sí
25	Sí	No	No	Sí

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO

7 Descompón mentalmente en factores de números primos los siguientes números:

a. 490 $= 2 \cdot 5 \cdot 7^2$

b. 630 $= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

c. 310 $= 2 \cdot 5 \cdot 31$

d. 190 $= 2 \cdot 5 \cdot 19$

e. 1 280 $= 2^8 \cdot 5$

f. 2 700 $= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$

g. 280 $= 2^3 \cdot 5 \cdot 7$

h. 1 440 $= 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$

i. 6 250 $= 2 \cdot 5^5$

8 Realiza la descomposición factorial de los números indicados a continuación. Comprueba tus resultados con GeoGebra.

a.1 065

$1\,065 = 3 \cdot 5 \cdot 71$

b. 860

$860 = 2^2 \cdot 5 \cdot 43$

c. 543

$543 = 3 \cdot 181$

d. 9 234

$9\,234 = 2 \cdot 3^5 \cdot 19$

e. 378

$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$

f. 339

$339 = 3 \cdot 113$

g. 902

$902 = 2 \cdot 11 \cdot 41$

h. 7 812

$7\,812 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$

i. 4 500

$4\,500 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

9 Calcula el número de divisores que tienen estos números:

a. 70 $= 2 \cdot 5 \cdot 7$; $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$

Tiene 8 divisores. D (70) = {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70}

b. 81 $= 3^4$; $(4 + 1) = 5$

Tiene 5 divisores. D (81) = {1, 3, 9, 27, 81}

c. 110 = $2 \cdot 5 \cdot 11$; $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$

Tiene 8 divisores. D (110) = {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110}

d. 215 = $5 \cdot 43$; $(1 + 1) \cdot (1 + 1) = 4$

Tiene 4 divisores. D (215) = {1, 5, 43, 215}

e. 246 = $2 \cdot 3 \cdot 41$; $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$

Tiene 8 divisores. D (246) = {1, 2, 3, 6, 41, 82, 123, 246}

f. 89

Tiene 2 divisores. D (89) = {1, 89}

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

10 Calcula el m.c.d. de las siguientes parejas de números, utilizando la descomposición factorial:

a. 56 y 68

$56 = 2^3 \cdot 7$; $68 = 2^2 \cdot 17$

m.c.d. $(56, 68) = 2 \cdot 2 = 4$

b. 889 y 756

$889 = 7 \cdot 127$; $756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$

m.c.d. $(889, 756) = 7$

c. 130 y 70

$130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$; $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$

m.c.d. $(130, 70) = 2 \cdot 5 = 10$

d. 748 y 638

$748 = 2^2 \cdot 11 \cdot 17$; $638 = 2 \cdot 11 \cdot 29$

m.c.d. $(748, 638) = 2 \cdot 11 = 22$

e. 450 y 320

$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$; $320 = 2^6 \cdot 5$

m.c.d. $(450, 320) = 2 \cdot 5 = 10$

f. 646 y 513

$646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$; $513 = 3^3 \cdot 19$

m.c.d. $(646, 513) = 19$

11 Calcula el m.c.d. de los números de la actividad anterior por el algoritmo de Euclides para comprobar que se obtiene el mismo resultado.

a. m.c.d. (56, 68) = m.c.d. (56, 12) = m.c.d. (12, 8) = m.c.d. (8, 4) = m.c.d. (4, 0) = 4

b. m.c.d. (889, 756) = m.c.d. (756, 133) = m.c.d. (133, 91) = m.c.d. (91, 42) =
= m.c.d. (42, 7) = m.c.d. (7, 0) = 7

c. m.c.d. (130, 70) = m.c.d. (70, 60) m.c.d. (60, 10) = m.c.d. (10, 0) = 10

d. m.c.d. (748, 638) = m.c.d. (638, 110) = m.c.d. (110, 88) = m.c.d. (88, 22) =
= m.c.d. (22, 0) = 22

e. m.c.d. (450, 320) = m.c.d. (320, 130) m.c.d. (130, 60) = m.c.d. (60, 10) =
= m.c.d. (10, 0) = 10

f. m.c.d. (646, 513) = m.c.d. (513, 133) m.c.d. (133, 114) = m.c.d. (114, 19) =
= m.c.d. (19, 0) = 19

SOLUCIONES PÁG. 33

12 Halla el m.c.m. de los siguientes números, realizando la descomposición factorial:

a. 34, 78 y 26

$34 = 2 \cdot 17$; $78 = 2 \cdot 3 \cdot 17$; $26 = 2 \cdot 13$

m.c.m. $(34, 78, 26) = 2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 = 1\,326$

b. 12, 80 y 62

$12 = 2^2 \cdot 3$; $80 = 2^4 \cdot 5$; $62 = 2 \cdot 31$

m.c.m. $(12, 80, 62) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 = 7\,440$

c. 483 y 294

$483 = 3 \cdot 7 \cdot 23$; $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$

m.c.m. $(483, 294) = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 23 = 6\,762$

d. 715 y 363

$715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$; $363 = 3 \cdot 11^2$

m.c.m. $(715, 363) = 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 11^2 = 23\,595$

e. 585 y 845

$585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$; $845 = 5 \cdot 13^2$

m.c.m. $(585, 845) = 3^2 \cdot 5 \cdot 13^2 = 7\,605$

f. 470 y 620

$470 = 2 \cdot 5 \cdot 47$; $620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 31$

m.c.m. $(470, 620) = 2^2 \cdot 5 \cdot 47 \cdot 31 = 29\,140$

13 Copia y completa en tu cuaderno las siguientes descomposiciones para que el m.c.m. de los números a los que corresponden sea correcto:

a. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{a = 2^2 \cdot 5} \\ \mathbf{b = 3^2 \cdot A} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{m.c.m.\ (a, b) = 2^2 \cdot B^2 \cdot C \cdot 7}$

A = 7; B = 3; C = 5

b. $\left.\begin{array}{l} \mathbf{a = A^2 \cdot B \cdot 11^2} \\ \mathbf{b = 11^3 \cdot 13} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{m.c.m.\ (a, b) = 5^2 \cdot 7 \cdot 11^C \cdot D}$

A = 5; B = 7; C = 3; D = 13

14 Alicia libra en el trabajo cada ocho días, y Juan, cada nueve. ¿Cada cuántos días coinciden los dos amigos? ¿Cuántas veces libran los dos a la vez durante un mes?

m.c.m. $(8, 9) = 2^3 \cdot 3^3 = 72$

Coinciden cada 72 días. Durante un mes no libran los dos a la vez.

15 Ángel tiene 3 560 cromos de fútbol y 6 420 de animales y quiere repartirlos en sobres iguales lo más grandes posible.

a. ¿Cuántos cromos meterá en cada sobre?

m.c.d. $(3\,560, 6\,420) = 2^2 \cdot 5 = 20$

En cada sobre meterá 20 cromos.

b. ¿Cuántos sobres necesitará de cada tipo?

3 560 : 20 = 178; 6 420 : 20 = 321

Necesitará 178 sobres para los cromos de fútbol y 321 sobres para los cromos de animales.

16 Cristina tarda 5 minutos en dar la vuelta a un circuito corriendo, y María, 7 minutos. Si las dos amigas empiezan a correr a la vez, ¿cuánto tardarán en coincidir en la salida? ¿Cuántas veces coincidirán en dos horas?

m.c.m. (5, 7) = 35

En 35 min coinciden 1 vez; en 70 min coinciden 2 veces y en 115 min coinciden 3 veces.

Tardan en coincidir 35 minutos. Coincidirán 3 veces en 2 horas.

17 Mercedes quiere hacer bolsitas con gominolas de colores para invitar a sus amigos de clase en su cumpleaños. Tiene 120 gominolas amarillas, 200 rojas y 350 verdes. Si quiere que todas las bolsas sean iguales y lo más grandes posible, ¿cuántas bolsas de cada tipo necesitará? ¿Cuántas gominolas habrá en cada bolsa?

m.c.d. (120, 200, 350) = 2 · 5 = 10

120 : 10 = 12; 200 : 10 = 20; 350 : 10 = 35

Cada bolsa tendrá 10 gominolas. Habrá 12 bolsas de gominolas amarillas, 20 bolsas de gominolas rojas y 35 bolsas de gominolas verdes.

18 En las siguientes páginas web puedes practicar los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Visítalas y realiza las actividades propuestas.

http://conteni2.educarex.es/mats/11904/contenido/

http://conteni2.educarex.es/mats/11905/contenido/

Respuesta abierta.

19 El huerto del instituto de Inés tiene unas dimensiones de 560 cm de largo por 420 cm de ancho. Se quieren hacer parcelas cuadradas iguales lo más grandes posible para cultivar diferentes hortalizas.

a. ¿Qué medidas tendrán dichas parcelas?

m.c.d (560, 420) = $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$

Cada parcela tendrá 140 cm de lado.

b. ¿Cuántas parcelas resultarán?

Superficie de 1 parcela = 140 · 140 = 19 600 cm^2

Superficie total del huerto = 560 · 420 = 235 200 cm^2

235 200 : 19 600 = 12. Resultarán 12 parcelas.

EVALUACIÓN

1 **Indica cuál de estas parejas está integrada por números que no mantienen una relación de divisibilidad:**

a. 36 y 6 **b. 4 y 28** **c. 24 y 3** d. 15 y 7

36 : 6 = 6 28 : 4 = 7 24 : 3 = 8 15 : 7 = 2,14

Por tanto, la única pareja que no mantiene una relación de divisibilidad es 15 y 7, pues la división 15 : 7 no es exacta.

2 **De los siguientes números, señala cuál no es compuesto:**

a. 35 **b. 42** **c. 36** d. 71

Es el número 71 porque es primo.

3 **El número de divisores que tiene 130 es:**

a. 3 **b. 6** c. 8 **d. 10**

$130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$; $(1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 8$

4 **La descomposición factorial $2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$ corresponde al número:**

a. 264 **b. 198** **c. 66** d. 792

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 = 8 \cdot 9 \cdot 11 = 792$

5 **El máximo común divisor de 240 y 450 es:**

a. 3 600 **b. 240** c. 30 **d. 1 200**

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$; $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; m.c.d. $(240, 450) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

6 **El mínimo común múltiplo de 350 y 120 es:**

a. 4 200 **b. 2 100** **c. 10** **d. 30**

$350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; m.c.m. $(350, 120) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 4\,200$

7 **En la pastelería de Julio quieren repartir las magdalenas que han hecho en cajas lo más grandes posible y con el mismo número de dulces. Si hay 560 magdalenas de limón, 220 magdalenas de naranja y 640 magdalenas de chocolate, ¿cuántas cajas se necesitarán?**

a. 20 **b. 28** **c. 71** **d. 48**

m.c.d. $(560, 220, 640) = 2^2 \cdot 5 = 20$

8 Antonio sale a caminar por el parque todos los sábados durante media hora, mientras que a Juan Carlos le gusta pasear por ese parque cada dos semanas y Ana prefiere darse una vuelta cada diez días. Si hoy han ido los tres al parque, ¿cuántos días pasarán hasta que vuelvan a coincidir?

a. 14 b. 70 **c. 28** **d. 30**

Antonio pasea 1 vez a la semana, es decir 7 días. Juan Carlos pasea 1 vez cada 2 semanas, es decir 14 días. Ana pasea cada 10 días.

m.c.m. (7, 14, 10) = $7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$

9 La descomposición factorial del número $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, si lo multiplicamos por 12 es:

a. $\mathbf{2^6 \cdot 3^2 \cdot 7}$ **b.** $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$ **c.** $\mathbf{2^6 \cdot 3^3 \cdot 7}$ **d.** $\mathbf{2^5 \cdot 3^2 \cdot 7}$

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$; $504 \cdot 12 = 6\,048$

$6\,048 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$

10 Si m.c.m. (a, 56) = 280 y m.c.d. (a, 56) = 4, ¿cuánto vale a?

a. 8 **b. 5** c. 20 **d. 3 920**

8 no puede ser porque es divisor de 56.

5 no puede ser porque no es múltiplo de 4.

3 920 no puede ser porque es mayor que 280.

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO
Unidad 2. Números enteros

Unidad 2. Números enteros

SOLUCIONES PÁG. 37

1 Expresa las siguientes situaciones como números enteros:

a. La pasada noche hubo 4 °C bajo cero. → –4

b. La longitud del meridiano de Greenwich es de 0°. → 0

c. Albert Einstein nació en el año 1879. → +1 879

d. La fosa de las Marianas tiene una profundidad aproximada de 11 000 m. → –11 000

e. El Mulhacén tiene una altura de 3 479 m. → +3 479

f. Platón nació en el año 427 a. C. → –427

2 Escribe los números enteros cuyos valores absolutos sean los siguientes:

a. 7 → 7 y –7

b. 18 → 18 y –18

c. 29 → 29 y –29

d. 0 → 0

3 Ana afirma que un número que tiene mayor valor absoluto que otro es mayor que este. Luis asegura que no tiene razón, ya que eso no siempre ocurre. ¿Puedes explicar por qué Ana está equivocada?

Para que un número con mayor valor absoluto que otro sea el mayor, ambos han de ser positivos, ya que si dos números son negativos, será mayor el que tenga menor valor absoluto.

4 ¿Qué número es igual que su opuesto? ¿Por qué?

El único número que es igual que su opuesto es el 0, al no ser ni positivo ni negativo.

5 Halla el opuesto de los siguientes números:

a. +6 → –6

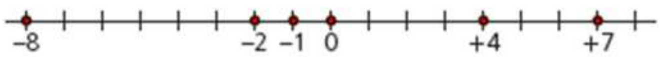
b. –28 →+28

c. +9 → –9

d. – 4 →+4

6 Representa los siguientes números propuestos en la recta numérica.

+7 –8 –2 +4 0 –1



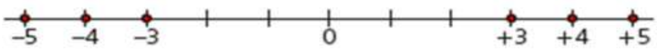
7 Escribe todos los números enteros comprendidos entre estos pares de números enteros:

a. –7 y –2 –6, –5, –4, –3

b. +1 y –6 –5, –4, –3, –2, –1, 0

c. 0 y +4 +1, +2, +3

8 Representa en la recta numérica todos los números enteros cuyo valor absoluto sea mayor o igual que 3 y menor que 6.



9 Indica qué números enteros se representan en la siguiente recta numérica:

A = –127; B = –126; C = –125; D = –123

10 Ordena de mayor a menor los siguientes números:

a. –7 328 985, 8 692 638, 8 693 532, –7 238 408

8 693 532 > 8 692 638 > –7 238 408 > –7 328 985

b. –67 753, +98 643, –76 842, +98 432, –67 609

+98 643 > +98 432 > –67 609 > –67 753 > –76 842

11 Angélica tiene 5 primos: Juan tiene 2 años menos que ella, Eva tiene 3 años menos que Iván, que es 4 años mayor que Angélica, Marina tiene 4 años menos que Evangélica, y Raúl está entre Marina y Juan.

Nota: en la primera edición del libro del alumno dice «Marina tiene 4 años menos que Eva…» y debe decir « Marina tiene 4 años menos que Evangélica…»

a. Indica sus edades mediante variaciones de números enteros, considerando que Angélica es el cero u origen.

Angélica = 0, Juan = 0 – 2 = –2, Iván = 0 + 4 = 4, Eva = 4 – 3 = 1, Marina = 0 – 4 = –4, Raúl = –3

b. Si Angélica tiene 10 años, ¿qué edad tendrían cada uno de sus primos?

Angélica = 10 años, Juan = 10 – 2 = 8 años, Iván = 10 + 4 = 14 años, Eva = 14 – 3 = 11 años, Marina = 10 – 4 = 6 años, Raúl = 7 años.

12 La Tierra tiene una temperatura media de unos 15 °C. Esto se debe a las grandes diferencias térmicas existentes en las distintas regiones de nuestro planeta a lo largo de las estaciones.

Dividid la clase en cuatro grupos para buscar lugares con una determinada temperatura media:

- **Por debajo de los 15 °C.**
- **Entre 0 °C y 15 °C.**
- **Entre − 15 °C y 0 °C.**
- **Por encima de los 15 °C.**

Recopilad toda la información en un mural e incluid en él fotografías de dichos lugares.

Respuesta abierta.

13 Investiga en Internet junto a tu compañero cuál fue el origen de los números enteros y su evolución a lo largo de la historia. Organizad la información y realizad con ella una presentación para exponerla luego ante el resto de compañeros de la clase.

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 38

14 Realiza las siguientes sumas y restas de números enteros, eliminando previamente los paréntesis:

a. (+8) + (–15) = 8 – 15 = –7

b. (–56) – (–78) = –56 + 78 = +22

c. (+99) – (–51) = 99 + 51 = +150

d. –(+46) – (+77) = –46 – 77 = –123

e. (+29) + (–32) = 29 – 32 = –3

f. –(–120) + (+9) = 120 + 9 = +129

15 Comprueba la primera igualdad y tu compañero la segunda.

a. (+4) + [(–7) + (–2)] = [(+4) + (–7)] + (–2)

b. (+4) – [(–7) – (–2)] = [(+4) – (–7)] – (–2)

¿Qué conclusiones obtenéis sobre la propiedad asociativa de sumas y restas de números enteros?

Se comprueba que la propiedad asociativa se cumple para la suma de números enteros pero no para la resta.

16 Efectúa estas operaciones con sumas y restas, como en el ejemplo:

–(–6) + (–3) – (+9) + (+5) =

1. Se eliminan los paréntesis. 2. Se opera de dos en dos.

= +6 – 3 – 9 + 5 = +3 – 4 = –1

a. (–12) + (+20) + (–33) + (– 4) + (+14) – (–19) = –12 + 20 – 33 – 4 + 14 + 19 = 4

b. (+9) + (+673) + (–65) + (–89) + (–32) + (+7) = 9 + 673 – 65 – 89 – 32 + 7 = 503

c. (–764) + (+78) + (–274) + (–2 563) – (–123) = –764 + 78 – 274 – 2 563 + 123 = –3 400

d. (–63) + (–21) + (+85) – (+95) = –63 – 21 + 85 – 95 = –94

SOLUCIONES PÁG. 39

17 Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de números enteros:

a. (–5) · (+7) · (–2) = 70

b. –(–3) · 9 · (+2) = 54

c. (–75) : (+5) = –15

d. –(–30) : (+2) = 15

e. –(+2) · (+28) · 8 = –448

f. 50 · (+3) · (–21) = –3 150

g. –(+42) : (+7) = –6

h. 50 : (+10) = 5

18 Realiza la primera operación mientras tu compañero se encarga de la segunda y explicad vuestras conclusiones.

a. (+12) : (– 4) =–3

b. (–4) : (+12) $= -\dfrac{4}{12} = -\dfrac{1}{3}$, que no es un número entero, ni coincide con el apartado a.

La división de números enteros no cumple la propiedad conmutativa.

19 Efectúa las siguientes operaciones combinadas de multiplicaciones y divisiones de números enteros.

a. (–255) : (–3) · (+46) · (– 6) : (–12) = 85 · (–276) : (–12) = 1 955

b. –(–18) · 9 : (+2) · (– 60) : (+15) = 18 · 9 : 2 · (–60) : 15 = 162 : 2 · (–4) = –324

c. (–891) · (+48) : (+11) : (–27) · (–3) = –3 888 : 27 · 3 = –432

20 Extrae factor común y opera como en el ejemplo.

–15 + 20 = –3 · 5 + 4 · 5 = 5 · (–3 + 4) = +5

a. 18 – 27 – 36 + 12 = (3 · 6) – (9 · 3) – (3 · 2 · 3 · 2) + (2 · 3 · 2) =

= 3 · (6 – 9 – 12 + 4) = –33

b. 64 + 32 + 40 – 88 = (8 · 8) + (8 · 4) + (8 · 5) – (8 · 11) = 8 · (8 + 4 + 5 – 11) = 48

c. –75 – 35 + 55 – 5 = (–15 · 5) – (7 · 5) + (5 · 11) – 5 = 5 · (–15 – 7 + 11 – 1) = –60

d. –242 + 726 – 66 = (–22 · 11) + (22 · 33) – (22 · 3) = 22 · (–11 + 33 – 3) = 418

SOLUCIONES PÁG. 41

21 Indica, sin realizar cálculo alguno, el signo de las siguientes potencias, atendiendo a la paridad de su exponente:

a. $\mathbf{(-345)^{13} \cdot (-820)^{76}} \rightarrow (-) \cdot (+) = (-)$

Negativo.

b. $\mathbf{(-472)^{99} \cdot (-9\,527)^{67}} \rightarrow (-) \cdot (-) = (+)$

Positivo.

22 Calcula las siguientes operaciones con potencias de números enteros, expresándolas previamente en forma de potencia única:

a. $\mathbf{(-3)^2 \cdot (-3)^3} = (-3)^5 = -243$

b. $\mathbf{(+12)^{30} : (+12)^{30}} = (+12)^0 = 1$

c. $\mathbf{(+3)^{14} : (+3)^{10}} = (+3)^4 = 81$

d. $\mathbf{(+10)^4 \cdot (+10)^3} = (+10)^7 = 10\,000\,000$

e. $\mathbf{(-5)^{30} : (-5)^{27} \cdot (-5)^2} = (-5)^5 = -3\,125$

f. $\mathbf{(+4)^8 : (+4)^7 \cdot (+4)^2} = (+4)^3 = 64$

g. $\mathbf{(-7)^{15} \cdot (-7)^3 : (-7)^{16}} = (-7)^2 = 49$

h. $\mathbf{(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)} = (-2)^6 = 64$

23 Expresa, como potencia única, el resultado de las siguientes operaciones con potencias de números enteros:

a. $\mathbf{(+8)^5 \cdot (-7)^5} = (-56)^5 = -56^5$

b. $\mathbf{(+27)^6 : (-3)^6} = (-9)^6 = 9^6$

c. $\mathbf{(+84)^2 : (-12)^2} = (-7)^2 = 7^2$

d. $\mathbf{(-10)^3 \cdot (-50)^3} = 500^3$

e. $\mathbf{(-4)^2 \cdot (-5)^2 \cdot (+3)^2} = 20^2 \cdot (+3)^2 = 60^2$

f. $\mathbf{(+14)^8 : (+7)^8 \cdot (+2)^8} = 2^8 \cdot 2^8 = 4^8 = 2^{16}$

g. $\mathbf{(-8)^9 \cdot (+9)^9 : (+6)^9} = (-72)^9 : 6^9 = (-12)^9 = -12^9$

h. $\mathbf{(-18)^7 : (-9)^7 \cdot (-6)^7} = 2^7 \cdot (-6)^7 = (-12)^7 = -12^7$

24 Escribe estas potencias de potencia como potencia única y halla su valor con la ayuda de la calculadora:

a. $\mathbf{[(-5)^2]^3} = (-5)^6 = 5^6 = 15\,625$

b. $\mathbf{[(+8)^2]^2} = (+8)^4 = 8^4 = 4\,096$

c. $\mathbf{[(-10)^4]^3} = (-10)^{12} = 10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$

d. $\mathbf{[(+3)^2]^4} = (+3)^8 = 3^8 = 6\,561$

e. $\mathbf{[(-2)^3]^3} = (-2)^9 = -2^9 = -512$

f. $\mathbf{[(+100)^2]^2} = (+100)^4 = 100\,000\,000$

25 Efectúa las siguientes operaciones con potencias en las que aparecen exponentes enteros:

a. $(-5)^{-2} \cdot (-5)^{3} = (-5)^{1} = -5$

b. $(-2)^{2} : (-2)^{-3} = (-2)^{5} = -32$

c. $[(-3)^{-2}]^{-2} = (-3)^{4} = 81$

d. $[(+17)^{-1}]^{-2} = 17^{2} = 289$

e. $(+60)^{-2} : (+10)^{-2} \cdot 6^{4} = 6^{-2} \cdot 6^{4} = 6^{2} = 36$

f. $(-8)^{-3} : (-8)^{-3} = (-8)^{0} = 1$

g. $(-4)^{-6} \cdot (-4)^{10} : (-4)^{3} = (-4)^{4} : (-4)^{3} = -4$

h. $(-2)^{6} \cdot (-2)^{6} \cdot (+4)^{-2} = 4^{6} \cdot 4^{-2} = 4^{4} = 256$

26 Una casa tiene 3 dormitorios en cada una de sus 3 plantas; cada dormitorio dispone de 3 camas, y en cada cama hay 3 cojines. ¿Cuántos cojines hay en toda la casa? Indícalo mediante una potencia.

En toda la casa hay: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{4} = 81$ cojines.

27 Realiza las siguientes operaciones combinadas con potencias de números enteros, estableciendo el resultado con ayuda de la calculadora:

a. $(-3)^{9} : (-3)^{7} + (+8)^{5} : (-2)^{5} - (2^{2})^{4} = (-3)^{2} + (-4)^{5} - 2^{8} = 9 - 1\,024 - 256 = -1\,271$

b. $(-45)^{4} : (+9)^{4} : (-5)^{2} + [(-3)^{2}]^{3} : (-3)^{4} = (-5)^{4} : (-5)^{2} + (-3)^{6} : (-3)^{4} = (-5)^{2} + (-3)^{2} =$
$= 25 + 9 = 34$

c. $[(-10)^{2}]^{3} : [(-2)^{3} \cdot (-2)^{2} \cdot (-2)] : (+5)^{3} = (-10)^{6} : (-2)^{6} : (+5)^{3} = 5^{6} : 5^{3} = 5^{3} = 125$

28 Actividad resuelta.

29 Actividad resuelta.

30 Escribe las siguientes unidades de medida astronómicas usando potencias de 10:

a. 1 año luz ≈ 9 461 000 000 000 km

1 año luz ≈ $9\,461 \cdot 10^{9}$ km

b. 1 unidad astronómica ≈ 150 000 000 km

1 UA ≈ $15 \cdot 10^{7}$ km

31 Descompón los siguientes números de forma polinómica:

a. $-837\,284 = -(8 \cdot 10^{5} + 3 \cdot 10^{4} + 7 \cdot 10^{3} + 2 \cdot 10^{2} + 8 \cdot 10 + 4)$

b. $10\,382\,037 = 10^{7} + 3 \cdot 10^{5} + 8 \cdot 10^{4} + 2 \cdot 10^{3} + 3 \cdot 10 + 7$

c. $29\,247\,927 = 2 \cdot 10^{7} + 9 \cdot 10^{6} + 2 \cdot 10^{5} + 4 \cdot 10^{4} + 7 \cdot 10^{3} + 9 \cdot 10^{2} + 2 \cdot 10 + 7$

SOLUCIONES PÁG. 43

32 Señala si las siguientes raíces cuadradas son exactas o enteras y calcula su valor, indicando el resto en el caso de que sean enteras:

a. $\sqrt{\mathbf{232}} \rightarrow (\pm 15)^2 = 225$; $232 - 225 = 7$; Raíz entera. $\sqrt{232} = 15$, resto 7

b. $\sqrt{\mathbf{400}} \rightarrow (\pm 20)^2 = 400$; Raíz exacta. $\sqrt{400} = 20$

c. $\sqrt{\mathbf{196}} \rightarrow (\pm 14)^2 = 196$; Raíz exacta. $\sqrt{196} = 14$

d. $\sqrt{\mathbf{121}} \rightarrow (\pm 11)^2 = 121$; Raíz exacta. $\sqrt{121} = 11$

e. $\sqrt{\mathbf{324}} \rightarrow (\pm 18)^2 = 324$; Raíz exacta. $\sqrt{324} = 18$

f. $\sqrt{\mathbf{674}} \rightarrow (\pm 25)^2 = 625$; $674 - 625 = 49$; Raíz entera. $\sqrt{674} = 25$, resto 49

g. $\sqrt{\mathbf{412}} \rightarrow (\pm 20)^2 = 400$; $412 - 400 = 12$; Raíz entera. $\sqrt{412} = 20$, resto 12

h. $\sqrt{\mathbf{933}} \rightarrow (\pm 30)^2 = 900$; $933 - 900 = 33$; Raíz entera. $\sqrt{933} = 30$, resto 33

i. $\sqrt{\mathbf{457}} \rightarrow (\pm 21)^2 = 441$; $457 - 441 = 16$; Raíz entera. $\sqrt{457} = 21$, resto 16

j. $\sqrt{\mathbf{763}} \rightarrow (\pm 27)^2 = 729$; $763 - 729 = 34$; Raíz entera. $\sqrt{763} = 27$, resto 34

k. $\sqrt{\mathbf{199}} \rightarrow (\pm 14)^2 = 196$; $199 - 196 = 3$; Raíz entera. $\sqrt{199} = 14$, resto 3

l. $\sqrt{\mathbf{900}} \rightarrow (\pm 30)^2 = 900$; Raíz exacta. $\sqrt{900} = 30$

m. $\sqrt{\mathbf{169}} \rightarrow (\pm 13)^2 = 169$; Raíz exacta. $\sqrt{169} = 13$

n. $\sqrt{\mathbf{371}} \rightarrow (\pm 19)^2 = 361$; $371 - 361 = 10$; Raíz entera. $\sqrt{371} = 19$, resto 10

ñ. $\sqrt{\mathbf{64}} \rightarrow (\pm 8)^2 = 64$; Raíz exacta. $\sqrt{64} = 8$

33 Calcula la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen es de 1 331 cm³.

$V_{cubo} = a \cdot a \cdot a = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1331} = 11$ cm

La arista del cubo mide 11 cm.

34 Actividad resuelta.

35 Opera con las siguientes raíces cuadradas exactas utilizando la descomposición factorial, como en la actividad resuelta anterior:

a. $\sqrt{\mathbf{1296}} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt{\left(2^2\right)^2 \cdot \left(3^2\right)^2} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

b. $\sqrt{\mathbf{1600}} = \sqrt{2^6 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 5^2 = 40$

c. $\sqrt{\mathbf{9801}} = \sqrt{11^2 \cdot 3^4} = 11 \cdot 3^2 = 99$

d. $\sqrt{\mathbf{5625}} = \sqrt{3^2 \cdot 5^4} = 3 \cdot 5^2 = 75$

e. $\sqrt{\mathbf{676}} = \sqrt{2^2 \cdot 13^2} = 2 \cdot 13 = 26$

f. $\sqrt{\mathbf{1225}} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2} = 5 \cdot 7 = 35$

36 Efectúa las siguientes operaciones con raíces cuadradas:

a. $\left(\sqrt{\mathbf{5^3}}\right)^{\mathbf{4}} = \sqrt{5^{12}} = 15\,625$

b. $\left(\sqrt{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{4}} = \sqrt{2^4} = 2^2 = 4$

c. $\sqrt{\mathbf{6}} \cdot \sqrt{\mathbf{8}} \cdot \sqrt{\mathbf{3}} = \sqrt{6 \cdot 8 \cdot 3} = \sqrt{144} = 12$

d. $\sqrt{\mathbf{75}} : \sqrt{\mathbf{3}} \cdot \sqrt{\mathbf{16}} = \sqrt{75 : 3} \cdot 4 = \sqrt{25} \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$

e. $\sqrt{\mathbf{15}} \cdot \sqrt{\mathbf{45}} \cdot \sqrt{\mathbf{3}} = \sqrt{15 \cdot 45 \cdot 3} = \sqrt{2025} = 45$

f. $\left(\sqrt{\mathbf{3024}} : \sqrt{\mathbf{21}}\right) \cdot \left(\sqrt{\mathbf{18}} : \sqrt{\mathbf{2}}\right) = \sqrt{144} \cdot \sqrt{9} = 12 \cdot 3 = 36$

37 Realiza estas raíces con ayuda de la descomposición factorial:

a. $\sqrt[3]{\mathbf{-125}} = \sqrt[3]{-5^3} = -5$

b. $\sqrt[4]{\mathbf{256}} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

c. $\sqrt[4]{\mathbf{-64}} \rightarrow$ No existe

d. $\sqrt[5]{\mathbf{243}} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

e. $\sqrt[3]{\mathbf{216}} = \sqrt[3]{6^3} = 6$

f. $\sqrt[4]{\mathbf{2401}} = \sqrt[4]{7^4} = 7$

g. $\sqrt[3]{\mathbf{-1331}} = \sqrt[3]{-11^3} = -11$

h. $\sqrt[4]{\mathbf{10000}} = \sqrt[4]{10^4} = 10$

i. $\sqrt[5]{\mathbf{-7776}} = \sqrt[5]{-6^5} = -6$

Nota: en la primera edición del libro del alumno, en el apartado b. pone $\sqrt[4]{64}$. Debe poner $\sqrt[4]{256}$.

38 Efectúa las siguientes operaciones con raíces utilizando la descomposición factorial:

a. $\dfrac{\sqrt{\mathbf{49}} + \sqrt{\mathbf{25}}}{\sqrt{\mathbf{16}} - \sqrt{\mathbf{225}}} = \dfrac{7+5}{4-15} = -\dfrac{12}{11}$

b. $\dfrac{\sqrt[3]{\mathbf{-125}} + \sqrt{\mathbf{81}}}{\sqrt[5]{\mathbf{32}}} = \dfrac{-5+9}{2} = 2$

c. $\dfrac{\sqrt[3]{\mathbf{125}}}{\sqrt{\mathbf{16}} \cdot \sqrt[3]{\mathbf{-8}}} = \dfrac{5}{4 \cdot (-2)} = -\dfrac{5}{8}$

d. $\dfrac{\sqrt{\mathbf{169}}\cdot\sqrt[3]{\mathbf{343}}}{\sqrt{\mathbf{64}}}+\sqrt{\mathbf{64}}\ =\ \dfrac{13\cdot 7}{8}+8=\dfrac{155}{8}$

Nota: en la primera edición del libro del alumno, en el apartado c. pone $\sqrt{\mathbf{125}}$ ***.***
Debe poner $\sqrt[3]{\mathbf{125}}$ ***.***

SOLUCIONES PÁG. 44

39 Resuelve las siguientes operaciones combinadas con números enteros:

a. 18 : (–6) + 9 · (–4) + 47 – 5 · (–3) = –3 – 36 + 47 + 15 = 23

b. (–33) : 11 + (–27) : 3 – (–5) · 4 = –3 – 9 + 20 = 8

c. (39 – 9 · 6) + (–30) : (–15) · (–43) = 39 – 54 + 2 · (–43) = 39 – 54 – 86 = –101

d. 4 – (93 – 194) – 105 : (–15) – (–3) = 4 + 101 + 7 + 3 = 115

e. $\mathbf{4^2 : (-2)^2 + 5^3 : 5 - \sqrt{18}\cdot\sqrt{2}}$ $= (-2)^2 + 5^2 - \sqrt{36} = 4 + 25 - 6 = 23$

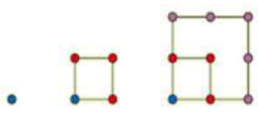
40 Una línea de autobús hace un trayecto con cinco paradas. En el último viaje se subieron 5 personas en la primera parada. En la segunda montaron 10 y bajaron 3. En la tercera parada subieron el doble de los viajeros que se apearon en la parada anterior y bajaron 5. En la cuarta parada se montaron 12 personas y se apearon la mitad de este número. ¿Con cuántos viajeros llegará el autobús a la quinta parada, que es el final del trayecto? Exprésalo en forma de operación combinada y calcula el resultado.

Se bajaron 19 personas:

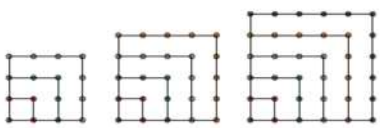
+5 + 10 – 3 + 2 · 3 – 5 + 12 – 12 : 2 = 12 + 6 – 5 + 12 – 6 = 19

SOLUCIONES PÁG. 45

41 Construye los 6 primeros números cuadrados en tu cuaderno del mismo modo que hemos construido los triangulares. Utiliza las siguientes representaciones como ayuda:



Las tres siguientes figuras son:



Los 6 primeros números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25, 36

42 Para formar los números triangulares, se suman números naturales consecutivos:

$$1 = 1;\ 3 = 1 + 2;\ 6 = 1 + 2 + 3;\ \ldots$$

¿De qué números están compuestas las sumas de los números cuadrados?

1 = 1

1 + 3 = 4

1 + 3 + 5 = 9

1 + 3 + 5 + 7 = 16

Son la suma de los números impares, o lo que es lo mismo, se comienza con el número 1 y luego se va sumando los siguientes números que difieran en 2 unidades.

43 Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno con los 10 primeros números cuadrados (C_n) y los 10 primeros números triangulares (T_n), donde n es el lugar que ocupan:

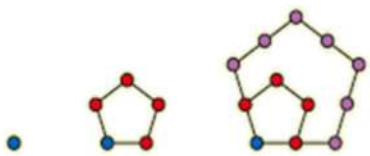
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
T_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Entre tu compañero y tú averiguad qué ocurre al sumar dos números triangulares consecutivos.

Da como resultado un número cuadrado.

44 Con ayuda de las siguientes figuras construye los 5 primeros números pentagonales y los 5 primeros hexagonales.

Números pentagonales



Los 5 primeros números pentagonales son los siguientes: 1, 5, 12, 22, 35.

Las sumas que lo forman son:

1 = 1

1 + 4 = 5

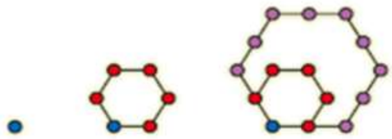
1 + 4 + 7 = 12

1 + 4 + 7 + 10 = 22

1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35

Es decir, se comienza con el 1 y se va sumando los siguientes números que difieran en 3 unidades.

Números hexagonales



Los 5 primeros números hexagonales son los siguientes: 1, 6, 15, 28, 45. Las sumas que lo forman son:

1 = 1

1 + 5 = 6

1 + 5 + 9 = 15

1 + 5 + 9 + 13 = 28

1 + 5 + 9 + 13 + 17 = 45

Es decir, se comienza con el 1 y se va sumando los siguientes números que difieran en 4 unidades.

45 Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno con los 8 primeros números pentagonales (P_n) y hexagonales (H_n), donde *n* es el lugar que ocupan.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
P_n	1	5	12	22	35	51	70	92
H_n	1	6	15	28	45	66	91	120

46 Entre tu compañero y tú comparad los números triangulares con los hexagonales y determinad qué relación existe entre ellos.

Los números triangulares son:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, …

Y los números hexagonales son:

1, 6, 15, 28, 45, …

Se comprueba que todos los números hexagonales son números triangulares, y que los números triangulares que ocupan posición impar son todos hexagonales.

SOLUCIONES PÁG. 46

Organizad grupos en clase y reunid diferentes tipos de calculadoras. Con ellas realizad las siguientes operaciones, anotando en el cuaderno la secuencia de teclas que utilizáis.

a. –3 – 5 = –8

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{3}\ \boxed{^+\!/\!_-}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{(-)}\ \boxed{3}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

b. 5 · (–15) = –75

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{15}\ \boxed{^+\!/\!_-}\ \boxed{=}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{5}\ \boxed{\times}\ \boxed{(-)}\ \boxed{15}\ \boxed{=}$

c. (–27) : (–3) = 9

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{27}\ \boxed{^+\!/\!_-}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{^+\!/\!_-}\ \boxed{=}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{(-)}\ \boxed{27}\ \boxed{\div}\ \boxed{(-)}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

d. (–12) · (+3) : 9 = –4

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{12}\ \boxed{^+\!/\!_-}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{9}\ \boxed{=}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{(-)}\ \boxed{12}\ \boxed{\times}\ \boxed{3}\ \boxed{\div}\ \boxed{9}\ \boxed{=}$

e. $(-35)^2$ = 1 225

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{35}\ \boxed{^+\!/\!_-}\ \boxed{x^2}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{(}\ \boxed{(-)}\ \boxed{35}\ \boxed{)}\ \boxed{x^2}\ \boxed{=}$

f. $(-8)^5 = -32\ 768$

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{8}\ \boxed{+/-}\ \boxed{x^y}\ \boxed{5}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{(}\ \boxed{(-)}\ \boxed{8}\ \boxed{)}\ \boxed{x^y}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$, o $\boxed{(}\ \boxed{(-)}\ \boxed{8}\ \boxed{)}\ \boxed{\wedge}\ \boxed{5}\ \boxed{=}$

g. $\sqrt{\mathbf{225}} = 15$

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{225}\ \boxed{\sqrt{\ }}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{225}\ \boxed{=}$

h. $\sqrt{\mathbf{3844}} = 62$

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{3\,844}\ \boxed{\sqrt{\ }}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{3\,844}\ \boxed{=}$

i. $\sqrt[3]{\mathbf{4913}} = 17$

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{4\,913}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[3]{\ }}\ \boxed{4\,913}\ \boxed{=}$

j. $\sqrt[6]{\mathbf{-729}}$ Error

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{729}\ \boxed{+/-}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{6}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{6}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{(-)}\ \boxed{729}\ \boxed{=}$

k. $\sqrt[4]{\mathbf{625}} = 5$

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{625}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{4}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{4}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\sqrt[x]{\ }}\ \boxed{625}\ \boxed{=}$

I. $\sqrt[7]{-2187} = -3$

Teclas con calculadora de pantalla sencilla:

$\boxed{2\,187}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{7}$

Teclas con calculadora de pantalla descriptiva:

$\boxed{7}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{(-)}$ $\boxed{2\,187}$ $\boxed{=}$

SOLUCIONES PÁG. 47

1 Ilustra con ejemplos diferentes situaciones en las que se utilicen los números enteros, tanto positivos como negativos.

Ejemplos de situaciones en las que aparecen los números enteros:

- Dinero: positivo, cuando se tiene, negativo cuando se debe.
- Plantas de un edificio: los sótanos son negativos y las plantas por encima de la planta baja son positivos.
- Grados centígrados de un termómetro: bajo cero serían negativas y sobre cero positivas.

2 Explica qué relación existe entre el opuesto de un número y su valor absoluto. Pon un ejemplo.

El opuesto de un número entero es otro número entero de igual valor absoluto pero con distinto signo. Por ejemplo, op $(+9) = -9$, y $|+9| = |-9|$

3 Indica qué propiedades se cumplen en la suma y la multiplicación de números enteros, pero no en la resta o la división de números enteros.

Las propiedades conmutativa y asociativa se cumplen para la suma y multiplicación de números enteros, pero no para la resta y la división.

4 ¿Qué diferencia hay entre calcular potencias con base negativa y potencias de base positiva? Explícalo con ejemplos.

En las potencias con base positiva, el resultado siempre será positivo. Por ejemplo: $3^2 = 9$; $2^5 = 32$

Si la base de la potencia es negativa, el resultado será positivo si el exponente es par, y negativo, si es impar. Por ejemplo: $(-3)^2 = 9$; $(-2)^5 = -32$

5 **¿Qué ocurre cuando tenemos una raíz de índice par y el radicando es negativo? ¿Y si la raíz es de índice impar? Ilústralo con ejemplos.**

Una raíz de índice par con el radicando negativo, no es posible calcularla, debido a la imposibilidad de que una potencia elevada a índice par resulte negativa. Sin embargo, si la raíz tiene índice impar, sí se puede calcular la raíz con radicando negativo, siendo el resultado negativo. Por ejemplo:

$\sqrt[4]{-16}$ no existe ya que $(+2)^4 = (-2)^4 = 16$ y nunca podrá ser negativa.

Sin embargo, $\sqrt[5]{-32} = -2$, ya que $(-2)^5 = -32$

6 **Una operación combinada con multiplicaciones y divisiones hay que efectuarla siempre de izquierda a derecha Demuestra con un ejemplo que el resultado es distinto en otro orden.**

Consideramos la siguiente operación: 20 : 5 · 2

En el orden correcto, es decir, de izquierda a derecha, la operación se resolvería de la siguiente forma: 20 : 5 · 2 = 4 · 2 = 8

Pero si realizáramos, erróneamente, primero la multiplicación, el resultado sería distinto: 20 : 5 · 2 = 20 : 10 = 2

7 **Explica qué es un número poligonal.**

Un número poligonal es aquel que puede representarse por puntos equidistantes formando un polígono regular.

8 **Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…**

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 48 – REPASO FINAL

NÚMEROS ENTEROS

1 **Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros:**

a. +8 827, –2 893, –2 372, +8 264, –2 921

–2 921 < –2 893 < –2 372 < +8 264 < +8 827

b. +9 284, +9 237, –3 203, +9 258, –3 111

–3 203 < –3 111 < +9 237 < +9 258 < +9 284

2 **Sustituye la letra R por el signo adecuado (>, < o =) según proceda.**

a. op (–3) R |–3| → op (–3) = |–3|

b. |–7| R op [op (–5)] → |–7| > op [op (–5)]

c. |+8| R |–10| → |+8| < |–10|

d. |+3| R |op (|–1|)| → |+3| > |op (|–1|)|

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

3 **Efectúa las siguientes operaciones combinadas de sumas y restas con números enteros:**

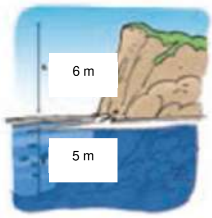
a. –[(–32) + (–49)] + [(+78) – (–28) – (–83)] = 32 + 49 + 78 + 28 + 83 = 270

b. –(–23 + 28 – 183) – (29 – 284 + 274 – 32) = 23 – 28 + 183 – 29 + 284 – 274 + + 32 = 191

c. |928 – (+294) + 2| + (+123) + (–864) = |928 – 294 + 2| + 123 – 864 = –105

d. +(–937) – (–524) – (+233) + op (+280) = –937 + 524 – 233 – 280 = –926

4 **Halla la distancia representada en el dibujo. Indícala como operación de números enteros y resuélvela.**



6 – (–5) = 11 m

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

5 **En la antigüedad, los chinos no utilizaban el signo «–» para representar los números negativos, sino que escribían estos en color rojo para diferenciarlos de los positivos, que se escribían en negro. De este hecho viene la expresión «números rojos», que se utiliza cuando una persona, empresa o institución deben dinero, es decir, cuando su saldo es un número negativo.**

Sin efectuar las operaciones, escribe de color rojo las que vayan a tener signo negativo y en negro aquellas que vayan a ser positivas.

a. (–4) · 3 · (+15) → Rojo

b. –(–5) · (+6) · (–3) → Rojo

c. (+5) · (–7) · (–3) → Negro

d. (+50) : (+2) · (– 4) → Rojo

e. –150 : 3 : (–5) → Negro

f. –(+8) : (–2) · (+6) → Negro

6 **Realiza las operaciones de la actividad anterior y comprueba los signos que indicaste en dicha actividad.**

a. (–4) · 3 · (+15) = –12 · 15 = –180

b. –(–5) · (+6) · (–3) = 5 · 6 · (–3) = –90

c. (+5) · (–7) · (–3) = –35 · (–3) = 105

d. (+50) : (+2) · (–4) = 50 : 2 · (–4) = –100

e. –150 : 3 : (–5) = –50 : (–5) = 10

f. –(+8) : (–2) · (+6) = –8 : (–2) · 6 = 4 · 6 = 24

7 Calcula el resultado de las siguientes operaciones con multiplicaciones y divisiones de números enteros:

a. op [op (–12)] : |–3| = –12 : 3 = –4

b. +(–93) : (–3) · (–5) = 31 · (–5) = –155

c. |(–7) · (– 4) : (+2)| = 28 : 2 = 14

d. op (+3) · op (–15) = –3 · 15 = –45

e. –(–10) : (–5) · (+9) = 10 : (–5) · 9 = –18

f. (–150) : 30 · (+16) = –5 · 16 = –80

8 Efectúa estas operaciones extrayendo factor común:

a. (–8) · 3 – 8 · (– 6) + 5 · (–8) + 8 · (+6) = (–8) · (3 – 6 + 5 + 6) = (–8) · (+8) = –64

b. –(–7) · (+12) + (–3) · 8 – (–24) · 15 = 12 · (7 – 2 + 30) = 12 · (+35) = 420

c. (+16) · (–30) + 20 · 12 + (–24) · (–6) = 24 · (–20 + 10 + 6) = 24 · (–4) = –96

d. (–25) · (–4) + 20 · (–9) – 15 · 26 = 10 · (10 – 18 – 39) = 10 · (–47) = –470

9 Una tienda tuvo 30 000 € de pérdidas el primer año de funcionamiento. El segundo año registró la mitad de estas pérdidas. Finalmente, el tercer año obtuvo un beneficio que ascendió al triple de la suma de las pérdidas de los dos años anteriores. Indica con números enteros las situaciones financieras por las que ha pasado la tienda a lo largo de estos tres años.

Primer año: –30 000 €

Segundo año: –30 000 : 2 = –15 000 €

Tercer año: (30 000 + 15 000) · 3 = 135 000 €

POTENCIAS DE NÚMEROS ENTEROS. OPERACIONES

10 Reduce a potencia única las siguientes expresiones y halla su valor con ayuda de la calculadora:

a. $\mathbf{(-2)^3 \cdot [(-2)^4]^3}$ $= (-2)^3 \cdot (-2)^{12} = (-2)^{15} = -32\ 768$

b. $\mathbf{8^3 \cdot (-15)^3 : 6^3}$ $= -120^3 : 6^3 = -20^3 = -8\ 000$

c. $\mathbf{5^8 : 5^2 \cdot (-6)^6}$ $= 5^6 \cdot (-6)^6 = (-30)^6 = 729\ 000\ 000$

d. $\mathbf{(3^3)^5 : (3^2 \cdot 3^4 \cdot 3)}$ $= 3^{15} : 3^7 = 3^8 = 6\ 561$

e. $\mathbf{(12^3)^2 : (6^{13} : 6^7)}$ $= 12^6 : 6^6 = 2^6 = 64$

f. $\mathbf{10^6 : (2^2)^3 \cdot 5^{-3}}$ $= 10^6 : 2^6 \cdot 5^{-3} = (10 : 2)^6 \cdot 5^{-3} = 5^6 \cdot 5^{-3} = 5^3 = 125$

11 Escribe en forma de potencia única utilizando las propiedades de las potencias.

a. $$\frac{\mathbf{5^2 \cdot 3^7 \cdot \left(5^2\right)^3 \cdot 3^{-2}}}{\mathbf{5 \cdot 3^2}} = = \frac{5^2 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 3^{-2}}{5 \cdot 3^2} = \frac{5^8 \cdot 3^5}{5 \cdot 3^2} = 5^7 \cdot 3^3$$

b. $\dfrac{\mathbf{10^3 \cdot 18^3 \cdot 40^2}}{\mathbf{20^2 \cdot 30^3 \cdot 2^3}} = \dfrac{(2\cdot5)^3 \cdot (2\cdot3^2)^3 \cdot (2^3\cdot5)^2}{(2^2\cdot5)^2 \cdot (2\cdot3\cdot5)^3 \cdot 2^3} = \dfrac{2^3\cdot5^3\cdot 2^3\cdot3^6\cdot2^6\cdot5^2}{2^4\cdot5^2\cdot2^3\cdot3^3\cdot5^3\cdot2^3} = \dfrac{2^{12}\cdot3^6\cdot5^5}{2^{10}\cdot3^3\cdot5^5} = 2^2\cdot3^3$

RAÍCES CUADRADAS EXACTAS Y ENTERAS

12 Calcula las siguientes raíces e indica el resto en el caso de que sean enteras:

a. $\sqrt{\mathbf{456}} \rightarrow (\pm21)^2 = 441;\ 456 - 441 = 15;\ 21$, resto 15

b. $\sqrt{\mathbf{729}} \rightarrow (\pm27)^2 = 729$; Raíz exacta. $\sqrt{729} = 27$

c. $\sqrt{\mathbf{961}} \rightarrow (\pm31)^2 = 961$; Raíz exacta. $\sqrt{961} = 31$

d. $\sqrt{\mathbf{628}} \rightarrow (\pm25)^2 = 625;\ 628 - 625 = 3;\ 25$, resto 3

SOLUCIONES PÁG. 49

13 Efectúa estas raíces utilizando la descomposición factorial si fuera necesario:

a. $\sqrt[3]{\mathbf{-2744}} = \sqrt[3]{-2^3\cdot7^3} = -2\cdot7 = -14$

b. $\sqrt[4]{\mathbf{1296}} = \sqrt[4]{2^4\cdot3^4} = 2\cdot3 = 6$

c. $\sqrt[5]{\mathbf{1024}} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

d. $\sqrt[3]{\mathbf{2197}} = \sqrt[3]{13^3} = 13$

e. $\sqrt[3]{\mathbf{-5832}} = \sqrt[3]{-2^3\cdot3^6} = -2\cdot3^2 = -18$

f. $\sqrt[4]{\mathbf{-625}} \rightarrow$ No existe porque tiene índice par y radicando negativo.

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS

14 Efectúa las siguientes operaciones combinadas de números enteros:

a. $\mathbf{2^3 \cdot 5^3 + \sqrt{196} - (-4) \cdot (-5) + (-34 + 12)} = 2^3 \cdot 5^3 + 14 - 20 - 22 = 972$

b. $\mathbf{8 : (-2) \cdot (-3)^2 - (-7) \cdot (-12) : 6 - 3} = -4 \cdot 9 + 7 \cdot (-12) : 6 - 3 = -36 - 14 - 3 =$
$= -53$

c. $\mathbf{(3^2)^3 : 3^2 \cdot (-4) + (-19 - 7 + 53) \cdot (-2)} = 81 \cdot (-4) + 27 \cdot (-2) = -378$

15 Escribe paréntesis, si es necesario, para que las siguientes igualdades sean ciertas:

a. $\mathbf{(-6) \cdot 3 - (-9) = -72} \rightarrow (-6) \cdot [3 - (-9)] = (-6) \cdot 12 = -72$

b. $\mathbf{(+20) : (-5) + 1 = -5} \rightarrow (+20) : [(-5) + 1] = (+20) : (-4) = -5$

c. 3 · 4 – 6 · 5 = –30 → 3 · (4 – 6) · 5 = 3 · (–2) · 5 = –30

d. (–4) + 3 · (–6) – 12 : (–4) – 2 = 5 → (–4) + 3 · [(–6) – 12] : [(–4) – 2] =
= –4 + 3 · (–18) : (–6) = –4 – 54 : (–6) = –4 + 9 = 5

e. 17 – 3 : (–7) · 2 – 12^2 : 3^2 · 2^2 = –8 → (17 – 3) : (–7) · 2 – 12^2 : (3^2 · 2^2) =

= 14 : (–7) · 2 – 12^2 : 6^2 = –2 · 2 – 2^2 = –4 – 4 = –8

16 En un concurso de televisión, los participantes ganan 100 € por cada respuesta acertada y pierden 30 € por cada respuesta incorrecta. Carmen ha acertado 12 preguntas y fallado 8, Laura se ha equivocado en 15 y ha contestado bien 5, e Inés ha fallado 6 y acertado 14. ¿Cuánto dinero ganará cada una de las concursantes? Escríbelo mediante operaciones combinadas.

Carmen: 12 · 100 – 30 · 8 = 960 €

Laura: 5 · 100 – 30 · 15 = 50 €

Inés: 14 · 100 – 30 · 6 = 1 220 €

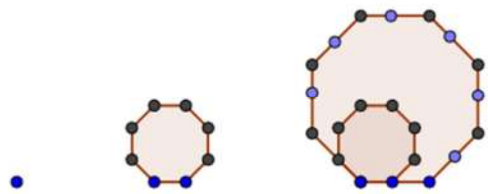
17 Amelia es propietaria de una tienda de electrodomésticos. Esta semana ha vendido una lavadora por 347 €, un frigorífico por 529 € y una televisión de 359 €. Pero también ha tenido que hacer frente a ciertos gastos, como 823 € de impuestos y 560 € por el transporte de los artículos. Al final de la semana, ¿el balance ha sido positivo o negativo?

347 + 529 + 359 – (823 + 560) = 1 235 – 1 383 = –148

El balance ha sido negativo: –148 €

NÚMEROS FIGURADOS. NÚMEROS POLIGONALES

18 Dibuja los tres primeros números octogonales y halla las sumas de los seis primeros.



1 = 1

1 + 7 = 8

1 + 7 + 13 = 21

1 + 7 + 13 + 19 = 40

1 + 7 + 13 + 19 + 25 = 65

1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 = 96

Los primeros 6 números octogonales son: 1, 8, 21, 40, 65, 96

EVALUACIÓN

1 **Indica qué situación no está representada por el número –4.**

a. Nos han marcado 4 goles.

b. He gastado en comida 4 €.

c. Estoy en el cuarto sótano.

d. Debía 6 € y he pagado 10.

2 **Realiza la siguiente operación:**

op (–3 + 7 – 9) + |+5| – op (|– 6 + 8|)

a. 12 **b. –2** **c. +2** **d. –12**

op (–5) + 5 – op 2 = 5 + 5 – (–2) = 5 + 5 + 2 = 12

3 **Efectúa la siguiente operación con potencias:**

$$\mathbf{8^{-3} : 8^{-7} : (2^3)^3 - 4^3 : 2^3}$$

a. 512 b. 0 **c. 80** **d. 64**

$8^{-3} : 8^{-7} : (2^3)^3 - 4^3 : 2^3 = 8^1 - 2^3 = 8 - 8 = 0$

4 **Indica cuál de estas operaciones no es correcta:**

a. $\sqrt{+64} = \pm 8$ **b.** $\sqrt{+36} = \pm 6$ c. $\sqrt{-25} = -5$ **d.** $\sqrt[3]{-125} = -5$

5 **Indica de qué operación es resultado +4:**

a. (–5) · (+7) – (–3) · (+10) c. (+4) – (–8) : 2 – (–9 + 13)

b. – 6 + 2 · [9 + 2 · (–3)] **d. 15 – (–3) · [– 6 : (–2)]**

4 + 4 + 9 – 13 = 4

6 **Jaime tiene 234 € de gastos al mes, y su hermana Luisa, 482 €. Su padre quiere ayudarlos dándoles a cada uno la cuarta parte de los 1 324 € que cobra. El dinero que reparte a cada hijo y el que les sobra o falta a estos es, respectivamente:**

a. Reparte 331 € a cada uno y a Jaime le faltan 97 € y a Luisa le sobran 151 €.

b. Reparte 331 € a cada uno y a Jaime le sobran **97 € y a Luisa le faltan 151 €.**

c. Reparte 331 € a cada uno y a ambos les faltan 97 €.

d. Reparte 331 € a cada uno y a ambos les sobran 97 €.

Reparte: $\frac{1324}{4} = 331$ €

Jaime: –234 + 331 = 97; Luisa: –482 +331 = –151

7 Escribe el siguiente número en la sucesión de números heptagonales:1, 7, …

a. 18 **b. 13** **c. 14** **d. 8**

1 = 1

1 + 6 = 7

1 + 6 + 11 = 18

1 + 6 + 11 + 16 = 34

1 + 6 + 11 + 16 + 21 = 55

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 3. Números fraccionarios

Unidad 3. Números fraccionarios

SOLUCIONES PÁG. 53

1 Indica si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:

a. $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ No, ya que $1 \cdot 5 \neq 3 \cdot 2$

b. $\frac{4}{5}$ y $\frac{12}{15}$ Sí, ya que $4 \cdot 15 = 12 \cdot 5$

c. $\frac{3}{7}$ y $\frac{9}{21}$ Sí, ya que $3 \cdot 21 = 7 \cdot 9$

d. $\frac{11}{132}$ y $\frac{12}{144}$ Sí, ya que $11 \cdot 144 = 132 \cdot 12$

e. $\frac{6}{9}$ y $\frac{3}{2}$ No, ya que $6 \cdot 2 \neq 9 \cdot 3$

f. $\frac{6}{13}$ y $\frac{2}{4}$ No, ya que $6 \cdot 4 \neq 13 \cdot 2$

2 Averigua el valor de R para que las siguientes fracciones sean equivalentes:

a. $\frac{3}{6} = \frac{R}{8}$ $R = \frac{3 \cdot 8}{6} = 4$

b. $\frac{42}{28} = \frac{18}{R}$ $R = \frac{18 \cdot 28}{42} = 12$

c. $\frac{R}{16} = \frac{7}{4}$ $R = \frac{16 \cdot 7}{4} = 28$

d. $\frac{120}{R} = \frac{72}{60}$ $R = \frac{120 \cdot 60}{72} = 100$

e. $\frac{3}{13} = \frac{R}{26}$ $R = \frac{3 \cdot 26}{13} = 6$

f. $\frac{19}{21} = \frac{76}{R}$ $R = \frac{21 \cdot 76}{19} = 84$

3 Copia en tu cuaderno y completa con números estas fracciones para que sean equivalentes:

a. $\mathbf{\frac{12}{8} = \frac{A}{18} = \frac{9}{B} = \frac{C}{2} = \frac{15}{D} = \frac{E}{16} = \frac{F}{108}}$

$\frac{12}{8} = \frac{A}{18} \Rightarrow A = \frac{12 \cdot 18}{8} = 27$

$\frac{12}{8} = \frac{9}{B} \Rightarrow B = \frac{8 \cdot 9}{12} = 6$

$\frac{12}{8} = \frac{C}{2} \Rightarrow C = \frac{12 \cdot 2}{8} = 3$

$\frac{12}{8} = \frac{15}{D} \Rightarrow D = \frac{8 \cdot 15}{12} = 10$

$\frac{12}{8} = \frac{E}{16} \Rightarrow E = \frac{12 \cdot 16}{8} = 24$

$\frac{12}{8} = \frac{F}{108} \Rightarrow F = \frac{12 \cdot 108}{8} = 162$

A = 27; B = 6; C = 3; D = 10; E = 24; F = 162

b. $\mathbf{\frac{A}{9} = \frac{B}{2} = \frac{85}{17} = \frac{15}{C} = \frac{225}{D} = \frac{E}{12} = \frac{40}{F}}$

$\frac{A}{9} = \frac{85}{17} \Rightarrow A = \frac{9 \cdot 85}{17} = 45$

$\frac{B}{2} = \frac{85}{17} \Rightarrow B = \frac{2 \cdot 85}{17} = 10$

$\frac{85}{17} = \frac{15}{C} \Rightarrow C = \frac{17 \cdot 15}{85} = 3$

$\frac{85}{17} = \frac{225}{D} \Rightarrow D = \frac{225 \cdot 17}{85} = 45$

$\frac{85}{17} = \frac{E}{12} \Rightarrow E = \frac{85 \cdot 12}{17} = 60$

$\frac{85}{17} = \frac{40}{F} \Rightarrow F = \frac{17 \cdot 40}{85} = 8$

A = 45; B = 10; C = 3; D = 45; E = 60; F = 8

c. $\mathbf{\frac{A}{4} = \frac{B}{6} = \frac{77}{C} = \frac{D}{50} = \frac{35}{E} = \frac{21}{6} = \frac{F}{2}}$

$\frac{A}{4} = \frac{21}{6} \Rightarrow A = \frac{4 \cdot 21}{6} = 14$

$$\frac{B}{6} = \frac{21}{6} \Rightarrow B = \frac{21 \cdot 6}{6} = 21$$

$$\frac{77}{C} = \frac{21}{6} \Rightarrow C = \frac{77 \cdot 6}{21} = 22$$

$$\frac{D}{50} = \frac{21}{6} \Rightarrow D = \frac{50 \cdot 21}{6} = 175$$

$$\frac{35}{E} = \frac{21}{6} \Rightarrow E = \frac{35 \cdot 6}{21} = 10$$

$$\frac{21}{6} = \frac{F}{2} \Rightarrow F = \frac{21 \cdot 2}{6} = 7$$

A = 14; B = 21; C = 22; D = 175; E = 10; F = 7

4 Escribe dos fracciones ampliadas de las siguientes fracciones: $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{5}$ y $\frac{7}{10}$.

Respuesta abierta. Por ejemplo, multiplicando por 2, 3 y 4 al numerador y al denominador:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{18}{10} = \frac{27}{15} = \frac{36}{20}$$

$$\frac{7}{10} = \frac{14}{20} = \frac{21}{30} = \frac{28}{40}$$

5 Actividad resuelta.

6 Simplifica las siguientes fracciones hasta llegar a la fracción irreducible:

a. $\mathbf{\frac{125}{350}} \Rightarrow \frac{125 : 5}{350 : 5} = \frac{25 : 5}{70 : 5} = \frac{5}{14}$

b. $\mathbf{\frac{728}{1092}} \Rightarrow \frac{728 : 2}{1092 : 2} = \frac{364 : 2}{546 : 2} = \frac{182 : 7}{273 : 7} = \frac{26 : 13}{39 : 13} = \frac{2}{3}$

c. $\mathbf{\frac{744}{1128}} \Rightarrow \frac{744 : 2}{1128 : 2} = \frac{372 : 2}{564 : 2} = \frac{186 : 2}{282 : 2} = \frac{93 : 3}{141 : 3} = \frac{31}{47}$

d. $\mathbf{\frac{130}{600}} \Rightarrow \frac{130 : 2}{600 : 2} = \frac{65 : 5}{300 : 5} = \frac{13}{60}$

e. $\mathbf{\frac{645}{810}} \Rightarrow \frac{645 : 5}{810 : 5} = \frac{129 : 3}{162 : 3} = \frac{43}{54}$

f. $\mathbf{\frac{121}{242}} \Rightarrow \frac{121\ :11}{242\ :11} = \frac{11:11}{22:11} = \frac{1}{2}$

g. $\mathbf{\frac{1980}{9504}} \Rightarrow \frac{1980\ :\ 2}{9504\ :\ 2} = \frac{990:2}{4752:2} = \frac{495\ :3}{2376\ :3} = \frac{165\ :3}{792\ :3} = \frac{55:11}{264:11} = \frac{5}{24}$

h. $\mathbf{\frac{520}{3900}} \Rightarrow \frac{520\ :\ 2}{3900\ :\ 2} = \frac{260:5}{1950:5} = \frac{52\ :2}{390\ :2} = \frac{26:13}{195:13} = \frac{2}{15}$

i. $\mathbf{\frac{1728}{6912}} \Rightarrow \frac{1728:2}{6912:2} = \frac{864:2}{3456:2} = \frac{432:2}{1728:2} = \frac{216:3}{864:3} = \frac{72:3}{288:3} = \frac{24:3}{96:3} = \frac{8:2}{32:2} =$

$= \frac{4:2}{16:2} = \frac{2:2}{8:2} = \frac{1}{4}$

7 Halla directamente la fracción irreducible de estas fracciones:

a. $\mathbf{\frac{850}{833}}$ m.c.d. (850, 833) = 17 $\Rightarrow \frac{850\ :17}{833\ :17} = \frac{50}{49}$

b. $\mathbf{\frac{900}{675}}$ m.c.d. (900, 675) = 225 $\Rightarrow \frac{900\ :225}{675\ :225} = \frac{4}{3}$

c. $\mathbf{\frac{561}{594}}$ m.c.d. (561, 594) = 33 $\Rightarrow \frac{561\ :33}{594\ :33} = \frac{17}{18}$

d. $\mathbf{\frac{240}{300}}$ m.c.d. (240, 300) = 60 $\Rightarrow \frac{240\ :60}{300\ :60} = \frac{4}{5}$

e. $\mathbf{\frac{378}{567}}$ m.c.d. (378, 567) = 189 $\Rightarrow \frac{378\ :189}{567\ :189} = \frac{2}{3}$

f. $\mathbf{\frac{490}{588}}$ m.c.d. (490, 588) = 98 $\Rightarrow \frac{490\ :98}{588\ :98} = \frac{5}{6}$

g. $\mathbf{\frac{5040}{4375}}$ m.c.d. (5040, 4375) = 35 $\Rightarrow \frac{5040\ :35}{4375\ :35} = \frac{144}{125}$

h. $\mathbf{\frac{1800}{2925}}$ m.c.d. (1800, 2925) = 225 $\Rightarrow \frac{1800\ :225}{2925\ :225} = \frac{8}{13}$

i. $\mathbf{\frac{1716}{1320}}$ m.c.d. (1716, 1320) = 132 $\Rightarrow \frac{1716\ :132}{1320\ :132} = \frac{13}{10}$

8 Julián tiene que realizar diferentes pruebas tipo test con distinto número de preguntas. En Matemáticas respondió de forma correcta a 4 preguntas de 10 y en Lengua acertó 6 de 15.

a. ¿Ha tenido el mismo porcentaje de aciertos en ambas asignaturas? ¿Por qué? Utiliza fracciones para explicarlo.

$\frac{4}{10}=\frac{6}{15} \Rightarrow 4 \cdot 15 = 10 \cdot 6$. Sí, ha tenido el mismo porcentaje de aciertos en ambas asignaturas, ya que equivalen a la misma fracción.

b. Si en el examen de Sociales ha tenido el mismo porcentaje de aciertos y la prueba constaba de 35 preguntas, ¿a cuántas de ellas ha contestado de forma correcta?

$\frac{4}{10}=\frac{x}{35} \Rightarrow 4 \cdot 35 = 10 \cdot x \Rightarrow x = 14$.Contestó bien a 14 preguntas.

c. ¿Cuántas preguntas tenía el test que hizo a continuación para Inglés si contestó bien a 12 preguntas y tuvo el mismo porcentaje de error que en los exámenes anteriores?

$\frac{4}{10}=\frac{12}{x} \Rightarrow 4 \cdot x = 10 \cdot 12 \Rightarrow x = 30$. El test de Inglés tenía 30 preguntas.

9 Las fracciones también eran conocidas antes como quebrados. Busca en Internet el origen de las fracciones y, en concreto, el origen de las palabras fracción y quebrado. Expón tus conclusiones en clase.

Respuesta abierta.

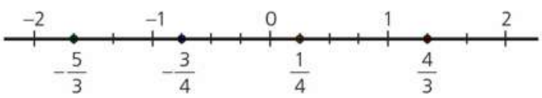
10 ¿Una botella medio llena es igual que una botella medio vacía? Explícalo mediante números fraccionarios.

Para indicar que una botella está medio llena utilizamos la fracción, que equivale también a que esté medio vacía.

SOLUCIONES PÁG. 55

11 Representa las siguientes fracciones en la misma recta numérica. Escríbelas posteriormente de mayor a menor.

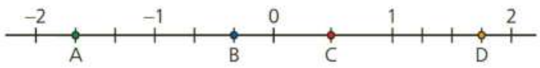
a. $\frac{4}{3}$ **b.** $-\frac{3}{4}$ **c.** $-\frac{5}{3}$ **d.** $\frac{1}{4}$



$\frac{4}{3} > \frac{1}{4} > -\frac{3}{4} > -\frac{5}{3}$

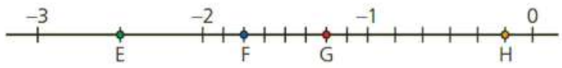
12 Identifica los números fraccionarios que están representados en las siguientes rectas numéricas:

a.



$A = -\frac{5}{3}$; $B = -\frac{1}{3}$; $C = \frac{1}{2}$; $D = \frac{7}{4}$

b.



$E = -\frac{5}{2}$; $F = -\frac{14}{8}$; $G = -\frac{10}{8}$; $H = -\frac{1}{6}$

13 Copia y sustituye en tu cuaderno la letra R por los signos < o >, según corresponda.

a. $\mathbf{-\frac{3}{7}\ R\ -\frac{2}{3}}$

Se reducen a común denominador y se comparan:

$$-\frac{3}{7}, -\frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{9}{21}, -\frac{14}{21} \Rightarrow -\frac{9}{21} > -\frac{14}{21} \Rightarrow -\frac{3}{7} > -\frac{2}{3}$$

b. $\mathbf{\frac{8}{15}\ R\ \frac{33}{45}}$

Se reducen a común denominador y se comparan:

$$\frac{8}{15}, \frac{33}{45} \Rightarrow \frac{24}{45}, \frac{33}{45} \Rightarrow \frac{24}{45} < \frac{33}{45} \Rightarrow \frac{8}{15} < \frac{33}{45}$$

c. $\mathbf{\frac{6}{18}\ R\ \frac{9}{20}}$

Se reducen a común denominador: y se comparan:

$$\frac{6}{18}, \frac{9}{20} \Rightarrow \frac{60}{180}, \frac{81}{180} \Rightarrow \frac{60}{180} < \frac{81}{180} \Rightarrow \frac{6}{18} < \frac{9}{20}$$

14 Ordena las siguientes fracciones de mayor a menor:

a. $-\frac{2}{3}, -\frac{14}{9}, -\frac{8}{15}, -\frac{7}{5}$

$$-\frac{2}{3}, -\frac{14}{9}, -\frac{8}{15}, -\frac{7}{5} \Rightarrow -\frac{30}{45}, -\frac{70}{45}, -\frac{24}{45}, -\frac{63}{45} \Rightarrow -\frac{24}{45} > -\frac{30}{45} > -\frac{63}{45} > -\frac{70}{45} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{8}{15} > -\frac{2}{3} > -\frac{7}{5} > -\frac{14}{9}$$

b. $-\frac{11}{10}, -\frac{3}{5}, -\frac{13}{25}, -\frac{9}{5}$

$$-\frac{11}{10}, -\frac{3}{5}, -\frac{13}{25}, -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{55}{50}, -\frac{30}{50}, -\frac{26}{50}, -\frac{90}{50} \Rightarrow -\frac{26}{50} > -\frac{30}{50} > -\frac{55}{50} > -\frac{90}{50} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\frac{13}{25} > -\frac{3}{5} > -\frac{11}{10} > -\frac{9}{5}$$

c. $\frac{27}{18}, \frac{31}{36}, \frac{5}{3}, \frac{13}{9}$

$$\frac{27}{18}, \frac{31}{36}, \frac{5}{3}, \frac{13}{9} \Rightarrow \frac{54}{36}, \frac{31}{36}, \frac{60}{36}, \frac{52}{36} \Rightarrow \frac{60}{36} > \frac{54}{36} > \frac{52}{36} > \frac{31}{36} \Rightarrow \frac{5}{3} > \frac{27}{18} > \frac{13}{9} > \frac{31}{36}$$

d. $\frac{6}{11}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{8}{15}$

$$\frac{6}{11}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{180}{330}, \frac{132}{330}, \frac{495}{330}, \frac{176}{330} \Rightarrow \frac{495}{330} > \frac{180}{330} > \frac{176}{330} > \frac{132}{330} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2} > \frac{6}{11} > \frac{8}{15} > \frac{2}{5}$$

15 Juli ha repartido parte de sus ahorros entre sus cuatro nietos. A Patricia le han correspondido $\frac{1}{18}$; a Daniel, $\frac{1}{5}$; a Cintia, $\frac{4}{11}$, y Álex se ha quedado con $\frac{3}{25}$.

a. Ordena las fracciones de mayor a menor.

m.c.d. (18, 5, 11, 25) = 4 950

$$\frac{1}{18}, \frac{1}{5}, \frac{4}{11}, \frac{3}{25} \Rightarrow \frac{275}{4950}, \frac{990}{4950}, \frac{1800}{4950}, \frac{594}{4950} \Rightarrow \frac{4}{11} > \frac{1}{5} > \frac{3}{25} > \frac{1}{18}$$

b. ¿Quién es el que ha recibido más dinero? ¿Y el que menos?

Cintia es la que ha recibido más dinero y Patricia la que menos.

16 Ana quiere ir de su casa al cine. Para ello, solo puede pisar baldosas que estén en orden creciente. Copia el siguiente laberinto en tu cuaderno e indica el camino que tiene que seguir nuestra amiga de modo que la baldosa sobre la que se vaya a posar contenga una fracción mayor que aquella en la que se encontraba.

	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{14}{12}$	Cine →
	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{11}{33}$	$\frac{12}{55}$
Casa →	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{9}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{13}{29}$	$\frac{23}{3}$	$\frac{17}{36}$

Vamos comparando las fracciones que están contiguas a la primera, y así sucesivamente:

- $\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{1}{12},\frac{3}{13} \Rightarrow \frac{78}{468},\frac{52}{468},\frac{39}{468},\frac{108}{468}$
- $\frac{3}{13},\frac{2}{24},\frac{5}{15},\frac{3}{15} \Rightarrow \frac{3}{13},\frac{1}{12},\frac{1}{3},\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{180}{780},\frac{65}{780},\frac{260}{780},\frac{156}{780}$
- $\frac{5}{15},\frac{6}{30},\frac{1}{9},\frac{7}{14} \Rightarrow \frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{9},\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{9}<\frac{6}{30}<\frac{5}{15}<\frac{7}{14}$
- $\frac{7}{14},\frac{2}{3},\frac{2}{24},\frac{11}{33} \Rightarrow \frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{12},\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{24}<\frac{11}{33}<\frac{7}{14}<\frac{2}{3}$
- $\frac{2}{3},\frac{6}{30},\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{20}{30},\frac{6}{30},\frac{25}{30} \Rightarrow \frac{6}{30}<\frac{2}{3}<\frac{5}{6}$
- $\frac{5}{6},\frac{11}{33},\frac{14}{12} \Rightarrow \frac{5}{6},\frac{1}{3},\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{5}{6},\frac{2}{6},\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{11}{33}<\frac{5}{6}<\frac{14}{12}$

	$\frac{4}{9}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{14}{12}$	Cine →
	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{11}{33}$	$\frac{12}{55}$
Casa →	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{9}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{13}{29}$	$\frac{23}{3}$	$\frac{17}{36}$

SOLUCIONES PÁG. 56

17. Realiza las siguientes sumas y restas de números fraccionarios, simplificando el resultado:

a. $\frac{7}{18}-\left(\frac{21}{5}+\frac{8}{9}\right)+\frac{17}{15}$

$$\frac{7}{18}-\left(\frac{21}{5}+\frac{8}{9}\right)+\frac{17}{15}=\frac{7}{18}-\left(\frac{189}{45}+\frac{40}{45}\right)+\frac{17}{15}=\frac{7}{18}-\frac{229}{45}+\frac{17}{15}=$$
$$=\frac{35}{90}-\frac{458}{90}+\frac{102}{90}=-\frac{321}{90}=-\frac{107}{30}$$

b. $\frac{26}{75}-\frac{76}{30}-\left(+\frac{7}{6}\right)-2$

$$\frac{26}{75}-\frac{76}{30}-\left(+\frac{7}{6}\right)-2=\frac{26}{75}-\frac{38}{15}-\frac{7}{6}-2=\frac{52}{150}-\frac{380}{150}-\frac{175}{150}-\frac{300}{150}=-\frac{803}{150}$$

c. $\left(\frac{9}{10}-\frac{13}{32}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)$

$$\left(\frac{9}{10}-\frac{13}{32}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{144}{160}-\frac{65}{160}\right)-\left(\frac{18}{30}-\frac{5}{30}\right)=\frac{79}{160}-\frac{13}{30}=\frac{237}{480}-\frac{208}{480}=\frac{29}{480}$$

d. $\frac{6}{7}-\frac{4}{2}+\frac{21}{5}-\left(-\frac{3}{8}\right)$

$$\frac{6}{7}-\frac{4}{2}+\frac{21}{5}-\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{6}{7}-\frac{4}{2}+\frac{21}{5}+\frac{3}{8}=\frac{240}{280}-\frac{560}{280}+\frac{1176}{280}+\frac{105}{280}=\frac{961}{280}$$

e. $-\frac{3}{7}-\left(-\frac{2}{8}\right)+\frac{7}{4}$

$$-\frac{3}{7}-\left(-\frac{2}{8}\right)+\frac{7}{4}=-\frac{3}{7}+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=-\frac{3}{7}+\frac{8}{4}=-\frac{3}{7}+2=-\frac{3}{7}+\frac{14}{7}=\frac{11}{7}$$

f. $-3-\left(\frac{11}{10}-\frac{5}{12}\right)$

$$-3-\left(\frac{11}{10}-\frac{5}{12}\right)=-3-\left(\frac{66}{60}-\frac{25}{60}\right)=-3-\frac{41}{60}=-\frac{180}{60}-\frac{41}{60}=-\frac{221}{60}$$

g. $-\left(\frac{5}{6}+\frac{21}{8}-\frac{19}{12}\right)$

$$-\left(\frac{5}{6}+\frac{21}{8}-\frac{19}{12}\right)=-\left(\frac{20}{24}+\frac{63}{24}-\frac{38}{24}\right)=-\frac{45}{24}=-\frac{15}{8}$$

h. $-\left(-\dfrac{3}{20}\right)-\left(\dfrac{12}{15}-\dfrac{3}{8}\right)$

$$-\left(-\frac{3}{20}\right)-\left(\frac{12}{15}-\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{20}-\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{20}-\left(\frac{32}{40}-\frac{15}{40}\right)=\frac{3}{20}-\frac{17}{40}=\frac{6}{40}-\frac{17}{40}=\frac{-11}{40}$$

18 Entre tu compañero y tú demostrad con ejemplos si se cumple la propiedad conmutativa para la resta de fracciones.

No se cumple la propiedad conmutativa para la resta de fracciones.

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10}{15}-\frac{9}{15}=\frac{1}{15}\\ \frac{3}{5}-\frac{2}{3}=\frac{9}{15}-\frac{10}{15}=-\frac{1}{15}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\neq\frac{3}{5}-\frac{2}{3}$$

19 Tres amigos se han repartido un trabajo de Matemáticas de la siguiente forma: José se encargará de $\frac{2}{5}$; Sara, de $\frac{3}{7}$, y Luis hará el resto. ¿Qué fracción le toca realizar a Luis? ¿Y si Sara hiciera los $\frac{3}{8}$?

Se suman las partes de José y de Sara y se resta de la unidad para obtener la parte de Luis:

$$1-\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\right)=1-\left(\frac{14}{35}+\frac{15}{35}\right)=1-\frac{29}{35}=\frac{35}{35}-\frac{29}{35}=\frac{6}{35}$$

A Luis le corresponden $\frac{6}{35}$ del trabajo.

Se realiza el mismo cálculo para el caso de que Sara hiciera $\frac{3}{8}$:

$$1-\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\right)=1-\left(\frac{16}{40}+\frac{15}{40}\right)=1-\frac{31}{40}=\frac{40}{40}-\frac{31}{40}=\frac{9}{40}$$

A Luis le corresponden $\frac{9}{40}$ del trabajo.

20 Ana planifica los deberes del fin de semana. El sábado hará $\frac{1}{3}$ por la mañana y solo $\frac{1}{6}$ por la tarde, pues luego tiene previsto salir con sus amigos. El domingo por la mañana, tras ayudar a sus padres a recoger la casa, se encargará de realizar $\frac{2}{9}$ de los deberes que aún le faltan. ¿Qué fracción se ha reservado Ana para la tarde del domingo?

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{2}{9}\right)=1-\left(\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{4}{18}\right)=1-\frac{13}{18}=\frac{18}{18}-\frac{13}{18}=\frac{5}{18}$$

Ha reservado los $\frac{5}{18}$ de los deberes para la tarde del domingo.

SOLUCIONES PÁG. 57

21 Halla la fracción inversa de las siguientes fracciones:

a. $-\frac{7}{3} \Rightarrow -\frac{3}{7}$ **b.** $\frac{1}{4} \Rightarrow 4$ **c.** $-5 \Rightarrow -\frac{1}{5}$ **d.** $\frac{2}{11} \Rightarrow \frac{11}{2}$

22 Halla la fracción irreducible resultante de estas operaciones con números fraccionarios:

a. $-\frac{12}{7}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{6\cdot\cancel{2}\cdot 9}{7\cdot\cancel{2}} = \frac{54}{7}$

b. $\frac{20}{45}:\left(-\frac{24}{75}\right) = \frac{20}{45}\cdot\left(-\frac{75}{24}\right) = -\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot 25}{\cancel{5}\cdot 9\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot 2} = -\frac{25}{18}$

c. $\frac{8}{12}:\frac{10}{3} = \frac{8}{12}\cdot\frac{3}{10} = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{2}\cdot 5} = \frac{1}{5}$

23 Realiza las siguientes operaciones, simplificando el resultado:

a. $\left(\frac{30}{7}\cdot\frac{5}{24}\right):\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{21}{6}\right) = \left(\frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 5}{7\cdot 4\cdot\cancel{6}}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{2}\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot 7}{\cancel{3}\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot 3}\right) = \frac{5\cdot 5}{\cancel{7}\cdot\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}\cdot\cancel{7}}{3\cdot 3} = \frac{25}{9}$

b. $-\left(+\frac{3}{24}\right):\left(-\frac{18}{15}\right)\cdot\frac{10}{9} = \frac{\cancel{3}}{3\cdot 8}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot 5}{9} = \frac{25}{216}$

c. $\left(\frac{9}{10}:\frac{36}{40}\right)\cdot\left(\frac{85}{7}:\frac{15}{21}\right) = \left(\frac{\cancel{9}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{4}}\right)\cdot\left(\frac{17\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{7}}{\cancel{7}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{3}}\right) = 17$

d. $\frac{4}{5}:\left[\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{10}{6}\right)\right] = \frac{4}{5}:\left(-\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 5}{7\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}\right) = \frac{4}{5}:\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{28}{25}$

e. $\left(\frac{72}{39}\cdot\frac{26}{12}\right):(-3)=\frac{\cancel{9}\cdot\cancel{4}\cdot 2\cdot 2\cdot\cancel{13}}{\cancel{3}\cdot\cancel{13}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

f. $-\left(\frac{16}{6}:\frac{2}{14}:\frac{49}{20}\right)=-\left(\frac{\cancel{4}\cdot 4}{\cancel{2}\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot\cancel{7}}{\cancel{2}}\cdot\frac{4\cdot 5}{\cancel{7}\cdot 7}\right)=-\frac{160}{21}$

SOLUCIONES PÁG. 58

24 Expresa en forma de potencia única las siguientes operaciones con potencias y halla su valor con ayuda de la calculadora:

a. $\left(-\frac{3}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2:\left(-\frac{3}{2}\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^{5+2-3}=\left(-\frac{3}{2}\right)^4=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$

b. $-\left(\frac{2}{9}\right)^3:\left[\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\right]=-\left(\frac{2}{9}\right)^3:\left(\frac{1}{6}\right)^3=-\left(\frac{2}{9}:\frac{1}{6}\right)^3=-\left(\frac{2}{9}\cdot 6\right)^3=-\left(\frac{4}{3}\right)^3=-\frac{64}{27}$

c. $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^3:\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^4=\left(\frac{4}{5}\right)^6:\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{10}{3}\right)^4=\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{3}\right)^4=\left(\frac{8}{3}\right)^4=\frac{4\,096}{81}$

d. $\left(\frac{8}{9}\right)^3:\left(\frac{8}{9}\right)^5:\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

e. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right]:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=1$

f. $\left(\frac{4}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^4:\left(\frac{4}{3}\right)^7=\left(\frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{3}\right)^4:\left(\frac{4}{3}\right)^7=\left(\frac{4}{3}\right)^4:\left(\frac{4}{3}\right)^7=\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

g. $\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^5:\left(\frac{4}{9}\right)^9=\left(\frac{4}{9}\right)^7:\left(\frac{4}{9}\right)^9=\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}=\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$

h. $\left[\left(\frac{8}{9}\right)^2\right]^{-3}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^4=\left(\frac{8}{9}\right)^{-6}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^4=\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}=\left(\frac{9}{8}\right)^2=\frac{81}{64}$

i. $\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{7}{5}\right)^{-1}\right]^{-2}\ \left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^2=\left(\frac{5}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}=1$

j. $\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}\cdot\left[\left(\frac{5}{6}\right)^3\right]^0=\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}:\left(\frac{6}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\cdot 1=\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296}$

25 Copia en tu cuaderno y sustituye las letras por el valor correspondiente para que las siguientes expresiones sean correctas:

a. $\left(\frac{10}{35}\right)^3 \cdot \left(\frac{10}{35}\right)^2 : \left(\frac{A}{B}\right)^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5$

$$\left(\frac{10}{35}\right)^5 : \left(\frac{A}{B}\right)^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 \Rightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^5 : \left(\frac{A}{B}\right)^5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 \Rightarrow \frac{2}{7} : \frac{A}{B} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2}{7} \cdot \frac{B}{A} = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{14}{5} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{5}{14}$$

b. $\left[\left(\frac{36}{90}\right)^2\right]^3 : \left(\frac{36}{90}\right)^8 = \left(\frac{C}{2}\right)^D$

$$\left(\frac{36}{90}\right)^6 : \left(\frac{36}{90}\right)^8 = \left(\frac{C}{2}\right)^D \Rightarrow \left(\frac{36}{90}\right)^{-2} = \left(\frac{C}{2}\right)^D \Rightarrow \left(\frac{90}{36}\right)^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{C}{2}\right)^D \Rightarrow C = 5; D = 2$$

c. $\left(-\frac{7}{16}\right)^{-3} : \left(\frac{E}{F}\right)^{-3} : \left(\frac{20}{35}\right)^{-3} = \left(\frac{8}{5}\right)^3$

$$\left(-\frac{7}{16} \cdot \frac{F}{E} \cdot \frac{20}{35}\right)^{-3} = \left(\frac{8}{5}\right)^3 \Rightarrow \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{F}{E}\right)^{-3} = \left(\frac{8}{5}\right)^3 \Rightarrow \left(-\frac{4 \cdot E}{F}\right)^3 = \left(\frac{8}{5}\right)^3 \Rightarrow \frac{E}{F} = -\frac{2}{5}$$

d. $\left(\frac{10}{7}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^5 \cdot \left(\frac{G}{H}\right)^2 = 5^2$

$$\left(\frac{10}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{G}{H}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow \left(\frac{10}{7} \cdot \frac{G}{H}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow \frac{10}{7} \cdot \frac{G}{H} = 5 \Rightarrow \frac{G}{H} = \frac{35}{10} \Rightarrow \frac{G}{H} = \frac{7}{2}$$

e. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{16}{25}\right)^{-2} : \left(\frac{I}{J}\right)^5 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-4} : \left(\frac{I}{J}\right)^5 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{-7} : \left(\frac{I}{J}\right)^5 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^7 : \left(\frac{I}{J}\right)^5 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^7 : \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{I}{J}\right)^5 \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^5 = \left(\frac{I}{J}\right)^5 \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{I}{J}$$

SOLUCIONES PÁG. 59

26 Efectúa las siguientes raíces de números fraccionarios utilizando la definición de raíz de fracciones. Recuerda indicar el resultado como fracción irreducible.

a. $\sqrt{\frac{169}{676}} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$

b. $\sqrt{\frac{484}{784}} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$

c. $\sqrt{\frac{625}{100}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

d. $\sqrt{\frac{324}{400}} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

e. $\sqrt[3]{-\frac{729}{216}} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$

f. $\sqrt[3]{\frac{512}{1000}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

27 Calcula las expresiones planteadas aplicando las operaciones con raíces estudiadas, e indica el resultado como una fracción irreducible.

a. $\sqrt{\frac{18}{125}} \cdot \sqrt{\frac{10}{9}} = \sqrt{\frac{18}{125} \cdot \frac{10}{9}} = \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$

b. $\sqrt{\frac{26}{105}} : \sqrt{\frac{39}{70}} = \sqrt{\frac{26}{105} : \frac{39}{70}} = \sqrt{\frac{26}{105} \cdot \frac{70}{39}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

c. $\sqrt{\frac{255}{20}} : \left(\sqrt{\frac{10}{9}} : \sqrt{\frac{40}{51}}\right) = \sqrt{\frac{255}{20}} : \sqrt{\frac{10}{9} \cdot \frac{51}{40}} = \sqrt{\frac{255}{20}} : \sqrt{\frac{17}{12}} = \sqrt{\frac{255}{20} \cdot \frac{12}{17}} =$

$= \sqrt{\frac{3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{17}}{\cancel{4} \cdot \cancel{5}} \cdot \frac{3 \cdot \cancel{4}}{\cancel{17}}} = \sqrt{9} = 3$

d. $\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{14}}\right)^5 \cdot \sqrt{\frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{7^3}{5^3} \cdot \frac{1}{14^5} \cdot \frac{9}{10}} = \sqrt{\frac{7^3 \cdot 3^2}{5^4 \cdot 2^6 \cdot 7^5}} = \frac{3}{5^2 \cdot 2^3 \cdot 7} = \frac{3}{1400}$

SOLUCIONES PÁG. 61

28 Halla la fracción irreducible resultante de las siguientes operaciones con números fraccionarios:

a. $\frac{3}{8} - \frac{15}{16} : \frac{3}{4} + \frac{7}{20} = \frac{3}{8} - \frac{15}{16} \cdot \frac{4}{3} + \frac{7}{20} = \frac{3}{8} - \frac{5}{4} + \frac{7}{20} = \frac{15}{40} - \frac{50}{40} + \frac{14}{40} = -\frac{21}{40}$

b. $\frac{3}{8} - \frac{4}{7} + \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{7} = \frac{3}{8} - \frac{4}{7} + \frac{20}{7} = \frac{21}{56} - \frac{32}{56} + \frac{160}{56} = \frac{149}{56}$

c. $-\frac{5}{9} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 3 = -\frac{5}{9} - \frac{4}{25} + 3 = -\frac{125}{225} - \frac{36}{225} + \frac{675}{225} = \frac{514}{225}$

d. $\left(\frac{90}{35} + \frac{54}{28}\right) : \left(\frac{16}{20} - 3\right) = \left(\frac{18}{7} + \frac{27}{14}\right) : \left(\frac{4}{5} - 3\right) = \left(\frac{36}{14} + \frac{27}{14}\right) : \left(\frac{4}{5} - \frac{15}{5}\right) = \frac{63}{14} : \left(-\frac{11}{5}\right) =$

$= \frac{63}{14} \cdot \left(-\frac{5}{11}\right) = -\frac{45}{22}$

e. $-\left(-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{12}}+\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{18}}\right)=-\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=-\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\right)=-\left(-\frac{8}{5}\right)\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{5}$

f. $\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{10}}\cdot\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{24}}:\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}:\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)=\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{8}{3}\cdot(-2)=-\frac{12}{5}$

29 Realiza estas operaciones combinadas con fracciones y simplifica el resultado obtenido si es posible:

a. $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\cdot\left(\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{20}}-\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{30}}\right)-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}:\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}+\mathbf{12}\right)-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$

$$\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{11}{20}-\frac{12}{30}\right)-\frac{7}{8}:\left(\frac{4}{3}+12\right)-\frac{4}{5}=\frac{5}{6}\cdot\left(\frac{33}{60}-\frac{24}{60}\right)-\frac{7}{8}:\left(\frac{4}{3}+\frac{36}{3}\right)-\frac{4}{5}=$$

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{60}-\frac{7}{8}:\frac{40}{3}-\frac{4}{5}=\frac{1}{8}-\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{40}-\frac{4}{5}=\frac{1}{8}-\frac{21}{320}-\frac{4}{5}=\frac{40}{320}-\frac{21}{320}-\frac{256}{320}=-\frac{237}{320}$$

b. $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}}-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{15}}:\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{30}}+\left(\frac{\mathbf{35}}{\mathbf{55}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{11}}\right)-\mathbf{4}:\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

$$\frac{9}{12}-\frac{2}{15}:\frac{6}{30}+\left(\frac{35}{55}-\frac{1}{11}\right)-4:\frac{2}{3}=\frac{3}{4}-\frac{2}{15}\cdot\frac{30}{6}+\left(\frac{7}{11}-\frac{1}{11}\right)-4\cdot\frac{3}{2}=$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{6}{11}-6=\frac{99}{132}-\frac{88}{132}+\frac{72}{132}-\frac{792}{132}=-\frac{709}{132}$$

c. $\left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\right)^{5}:\left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}\right)^{3}-\sqrt{\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{6}}}\cdot\sqrt{\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{40}}}+\left[\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}\right)^{2}\right]^{-1}$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{5}:\left(\frac{6}{5}\right)^{3}-\sqrt{\frac{15}{6}}\cdot\sqrt{\frac{49}{40}}+\left[\left(\frac{5}{4}\right)^{2}\right]^{-1}=\left(\frac{6}{5}\right)^{2}-\sqrt{\frac{15}{6}\cdot\frac{49}{40}}+\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}=$$

$$=\frac{36}{25}-\sqrt{\frac{49}{16}}+\left(\frac{4}{5}\right)^{2}=\frac{36}{25}-\frac{7}{4}+\frac{16}{25}=\frac{52}{25}-\frac{7}{4}=\frac{208}{100}-\frac{175}{100}=\frac{33}{100}$$

d. $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}:\mathbf{5}+\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}\right)^{3}:\left(\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{6}}\right)^{3}-\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^{-3}$

$$\frac{3}{4}:5+\left(\frac{7}{2}\right)^{3}:\left(\frac{14}{6}\right)^{3}-\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{3}{2}\right)^{3}-\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=\frac{3}{20}+\frac{27}{8}-5=$$

$$=\frac{6}{40}+\frac{135}{40}-\frac{200}{40}=-\frac{59}{40}$$

e. $\sqrt{\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{121}}}+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}\cdot\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{25}}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}:\left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\right)$

$$\sqrt{\frac{9}{121}}+\frac{5}{12}\cdot\frac{24}{25}-\frac{1}{2}:\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{11}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}:\left(-\frac{8}{12}+\frac{3}{12}\right)=$$

$$=\frac{3}{11}+\frac{2}{5}-\frac{1}{2}:\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{3}{11}+\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3}{11}+\frac{8}{5}=\frac{15}{55}+\frac{88}{55}=\frac{103}{55}$$

30 Simplifica las siguientes expresiones hasta hallar la fracción irreducible:

a. $$\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}-\frac{10}{3}:\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)}{\frac{19}{2}-\left(\frac{25}{6}-\frac{33}{9}\right)+3}$$

$$\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}-\frac{10}{3}:\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)}{\frac{19}{2}-\left(\frac{25}{6}-\frac{33}{9}\right)+3}=\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{1}{6}-\frac{10}{3}:\left(\frac{3}{15}-\frac{5}{15}\right)}{\frac{19}{2}-\left(\frac{25}{6}-\frac{11}{3}\right)+3}=$$

$$=\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{1}{6}-\frac{10}{3}:\left(-\frac{2}{15}\right)}{\frac{19}{2}-\left(\frac{25}{6}-\frac{22}{6}\right)+3}=\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{1}{6}-\frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{15}{2}\right)}{\frac{19}{2}-\frac{3}{6}+3}=\dfrac{\frac{4}{7}+\frac{1}{6}+25}{\frac{19}{2}-\frac{1}{2}+3}=$$

$$=\dfrac{\frac{24}{42}+\frac{7}{42}+\frac{1050}{42}}{9+3}=\dfrac{\frac{1081}{42}}{12}=\frac{1081}{504}$$

b. $$\dfrac{-\frac{3}{7}:\left(\frac{7}{9}:\frac{35}{9}\right)\cdot\frac{1}{5}}{\left(-\frac{45}{30}+\frac{6}{12}\right):\left(\frac{6}{15}-\frac{7}{30}\right)}$$

$$\dfrac{-\frac{3}{7}:\left(\frac{7}{9}:\frac{35}{9}\right)\cdot\frac{1}{5}}{\left(-\frac{45}{30}+\frac{6}{12}\right):\left(\frac{6}{15}-\frac{7}{30}\right)}=\dfrac{-\frac{3}{7}:\left(\frac{7}{9}\cdot\frac{9}{35}\right)\cdot\frac{1}{5}}{\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{2}{5}-\frac{7}{30}\right)}=\dfrac{-\frac{3}{7}:\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}}{(-1):\left(\frac{12}{30}-\frac{7}{30}\right)}=$$

$$=\dfrac{-\frac{3}{7}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}}{(-1):\frac{5}{30}}=\dfrac{-\frac{3}{7}}{-6}=\frac{3}{42}=\frac{1}{14}$$

31 En las elecciones a delegado de clase, Daniel ha conseguido $\frac{2}{5}$ de los votos, Saray $\frac{1}{3}$, Nerea $\frac{1}{15}$, y Luisa el resto. En total ha habido 30 votos.

a. ¿Qué fracción de votos ha obtenido Luisa?

Se los votos conseguidos por Daniel, Saray y Nerea y se resta de la unidad para obtener los que ha obtenido Luisa:

$$1-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)=1-\left(\frac{6}{15}+\frac{5}{15}+\frac{1}{15}\right)=1-\frac{12}{15}=\frac{15}{15}-\frac{12}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$$

Luisa ha obtenido $\frac{1}{5}$ de los votos.

b. ¿Cuántos votos ha recibido cada uno?

$\frac{2}{5} \cdot 30 = 12 \Rightarrow$ Daniel ha recibido 12 votos.

$\frac{1}{3} \cdot 30 = 10 \Rightarrow$ Saray ha recibido 10 votos.

$\frac{1}{15} \cdot 30 = 2 \Rightarrow$ Nerea ha recibido 2 votos.

$\frac{1}{5} \cdot 30 = 6 \Rightarrow$ Luisa ha recibido 6 votos.

32 Si Alba sigue en el gimnasio durante 2 h la rutina de Enrique expuesta en la actividad resuelta de la página anterior, ¿cuántos minutos empleará en cada ejercicio?

2 h = 120 min

$\frac{1}{12} \cdot 120 = 10 \Rightarrow$ Dedicará 10 min a calentar en la cinta de correr.

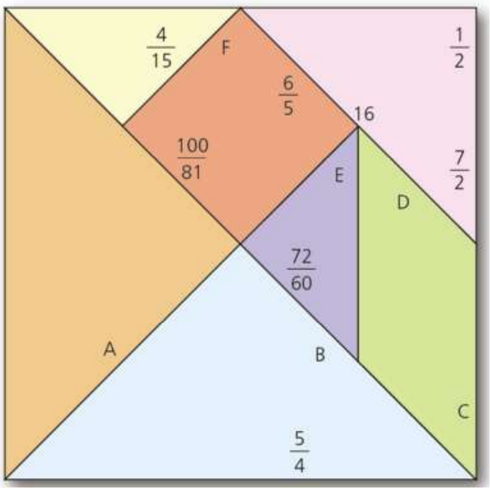
$\frac{1}{3} \cdot 120 = 40 \Rightarrow$ Dedicará 40 min a hacer musculación en la sala de pesas.

$\frac{2}{5} \cdot 120 = 48 \Rightarrow$ Dedicará 48 min a ejercicios de cardio en la sala de *spinning.*

$\frac{1}{10} \cdot 120 = 12 \Rightarrow$ Dedicará 12 min en el desplazamiento de una sala a otra.

$\frac{1}{12} \cdot 120 = 10 \Rightarrow$ Dedicará 10 min a los estiramientos.

33 La profesora de matemáticas ha propuesto el siguiente tangram a sus alumnos:



Resuelve en tu cuaderno estas operaciones con números fraccionarios del tangram:

A = $\left(\frac{3}{8}+\frac{9}{6}\right):\frac{3}{2}=\left(\frac{3}{8}+\frac{9}{6}\right):\frac{3}{2}=\left(\frac{9}{24}+\frac{36}{24}\right):\frac{3}{2}=\frac{45}{24}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{4}$

B = $\left(-\frac{8}{15}-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{40}{3}\right)=\left(-\frac{8}{15}-\frac{10}{15}\right)\cdot\left(-\frac{40}{3}\right)=-\frac{18}{15}\cdot\left(-\frac{40}{3}\right)=\frac{6}{5}\cdot\frac{40}{3}=16$

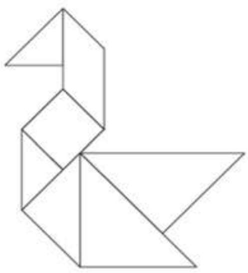
C = $\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=\frac{5}{15}-\frac{1}{15}=\frac{4}{15}$

D = $\left(\frac{2}{15}\right)^2:\left(\frac{3}{25}\right)^2=\left(\frac{2}{15}:\frac{3}{25}\right)^2=\left(\frac{2}{15}\cdot\frac{25}{3}\right)^2=\left(\frac{10}{9}\right)^2=\frac{100}{81}$

E = $\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{3}{12}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

F = $\frac{35}{2}:5=\frac{35}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{7}{2}$

A continuación, copia el tangram en una hoja, une las distintas operaciones con sus resultados y obtendrás una figura. Una de las parejas que tienes que unir son dos fracciones irreducibles. Pega dicha figura en tu cuaderno.



34 Entre tu compañero y tú confeccionad un tangram con operaciones con fracciones similar al de la actividad anterior, de modo que, una vez unidas las piezas por el lado de cada operación con su resultado, formen una figura. Intercambiad el tangram con los realizados por vuestros compañeros para que todos los alumnos de la clase realicen las distintas figuras.

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 63

1 Explica qué significa que dos fracciones sean equivalentes y cómo saber si dos fracciones lo son. Indica también mediante ejemplos cómo obtener una fracción equivalente a otra dada.

Dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad. Cumplen la siguiente propiedad: $\Leftrightarrow$ $a \cdot d = b \cdot c$

Para obtener una fracción equivalente, o se amplía (multiplicando numerador y denominador por el mismo número), o se simplifica (dividiendo numerador y denominador por el mismo número).

Ampliar: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ Simplificar: $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

2 Expón qué es una fracción irreducible y dos métodos distintos para hallarla. Ilustra la exposición mediante ejemplos.

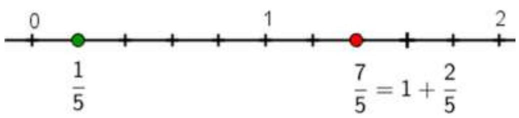
Una fracción irreducible es aquella que no se puede simplificar más.

Se puede hallar la fracción irreducible:

- Simplificando hasta que no se pueda más: $\frac{180}{600} = \frac{90}{300} = \frac{45}{150} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$
- Dividiendo numerador y denominador entre el máximo común divisor de dichos números: $\frac{180}{600} = \frac{3}{10}$ m.c.d. $(600,180) = 60$

3 ¿Qué diferencia existe entre una fracción propia y una fracción impropia? Representa en la recta numérica una de cada tipo para completar la explicación.

Una fracción propia es menor que la unidad, mientras que una fracción impropia es mayor que la unidad. Una fracción impropia se puede expresar como un número entero más una fracción propia, llamado número mixto.



En la representación anterior, $\frac{1}{5}$ es una fracción propia, y $\frac{7}{5}$ es una fracción impropia.

4 Ilustra con ejemplos la suma y resta de fracciones con distinto denominador.

Para sumar o restar fracciones con distinto denominador hay que reducir dichas fracciones a común denominador.

Para ello, hallamos fracciones equivalentes con el mínimo común múltiplo como nuevo denominador. Por ejemplo:

$$\frac{1}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{12}{60}-\frac{45}{60}+\frac{10}{60}=-\frac{23}{60}$$

$\text{m.c.m. }(5,4,6)=60$

5 Indica qué tienen en común la multiplicación y la división de fracciones. Acompaña con ejemplos dichas operaciones.

La multiplicación y la división de fracciones tienen en común que cuando se dividen dos fracciones es igual que multiplicar por la inversa de la segunda. Es decir: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

Con lo cual, si tenemos operaciones combinadas de multiplicaciones y divisiones, podemos indicarlas todas como multiplicaciones y así poder simplificar el resultado con mayor facilidad.

$$\frac{4}{15}:\frac{12}{25}\cdot\frac{16}{30}:\frac{20}{18}=\frac{4}{15}\cdot\frac{25}{12}\cdot\frac{16}{30}\cdot\frac{18}{20}=\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{5}}{3\cdot\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}\cdot 4}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{6}}{\cancel{4}\cdot 5}=\frac{4}{15}$$

6 Explica qué tiene en común el cálculo de potencias con fracciones y el de raíces cuadradas con fracciones. Ilustra tu explicación con ejemplos.

El cálculo de la potencia de una fracción como el de la raíz cuadrada coinciden en que son equivalentes al pasar la potencia o la raíz al numerador y al denominador:

$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$ y $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Por ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^3}{3^3}$$

$$\sqrt{\frac{64}{16}}=\sqrt{4}=2=\frac{8}{4}=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}$$

7 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. Toda fracción tienen infinitas fracciones ampliadas.

Verdadero, porque se puede multiplicar indefinidamente numerador y denominador por el mismo número.

b. Toda fracción tiene infinitas fracciones simplificadas.

Falso, cuando se llega a la fracción irreducible, ya no se puede simplificar más.

c. Toda fracción propia positiva es mayor que cualquier fracción impropia positiva.

Falso, las fracciones impropias son mayores que la unidad, mientras que las propias son menores que 1, por lo tanto, toda fracción impropia es mayor que cualquier fracción propia.

d. La potencia de una fracción negativa es siempre negativa.

Falso, la potencia de una fracción negativa será positiva si el exponente es par:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

e. La inversa de una fracción nunca es un número entero.

Falso, por ejemplo, la inversa de $\frac{1}{3}$ es 3, que es un número entero.

f. La multiplicación de una fracción por su fracción inversa es la unidad.

Verdadero, $\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}}{\cancel{a}} = 1$

g. Si dos fracciones son equivalentes, su fracción irreducible coincide.

Verdadero. Al ser equivalentes, representan la misma cantidad, por lo que la fracción equivalente ha de ser la misma.

8 Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 64 – REPASO FINAL

NÚMEROS FRACCIONARIOS. FRACCIONES EQUIVALENTES

1 Copia y completa en tu cuaderno las siguientes fracciones para que sean equivalentes:

a. $\mathbf{\frac{35}{6} = \frac{R}{18}}$ $\quad R = \frac{35 \cdot 18}{6} = 105$

b. $\mathbf{\frac{24}{13} = \frac{72}{R}}$ $\quad R = \frac{72 \cdot 13}{24} = 39$

c. $\mathbf{\frac{R}{18} = \frac{25}{45}}$ $\quad R = \frac{25 \cdot 18}{45} = 10$

d. $\mathbf{\frac{120}{R} = \frac{40}{24}}$ $\quad R = \frac{120 \cdot 24}{40} = 72$

e. $\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{32}}=\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{6}}$ $\qquad R=\frac{80\cdot 6}{32}=15$

f. $\frac{\mathbf{143}}{\mathbf{121}}=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{R}}$ $\qquad R=\frac{13\cdot 121}{143}=11$

2 Simplifica las fracciones propuestas hasta llegar a su fracción irreducible. Comprueba el resultado final con la calculadora.

a. $\frac{\mathbf{456}}{\mathbf{600}}\Rightarrow\frac{456:2}{600:2}=\frac{228:2}{300:2}=\frac{114:2}{150:2}=\frac{57:3}{75:3}=\frac{19}{25}$

b. $\frac{\mathbf{945}}{\mathbf{405}}\Rightarrow\frac{945:3}{405:3}=\frac{315:3}{135:3}=\frac{105:3}{45:3}=\frac{35:5}{15:5}=\frac{7}{3}$

c. $\frac{\mathbf{620}}{\mathbf{840}}\Rightarrow\frac{620:2}{840:2}=\frac{310:2}{420:2}=\frac{155:5}{210:5}=\frac{31}{42}$

d. $\frac{\mathbf{180}}{\mathbf{260}}\Rightarrow\frac{180:2}{260:2}=\frac{90:2}{130:2}=\frac{45:5}{65:5}=\frac{9}{13}$

e. $\frac{\mathbf{672}}{\mathbf{360}}\Rightarrow\frac{672:2}{360:2}=\frac{336:2}{180:2}=\frac{168:2}{90:2}=\frac{84:3}{45:3}=\frac{28}{15}$

f. $\frac{\mathbf{2\,535}}{\mathbf{4\,290}}\Rightarrow\frac{2535:5}{4290:5}=\frac{507:3}{858:3}=\frac{169:13}{286:13}=\frac{13}{22}$

3 Halla fracciones equivalentes a la fracción $\frac{3}{7}$ y que cumplan las siguientes condiciones:

a. Su denominador es un múltiplo de 6. $\rightarrow \frac{18}{42}$

b. Su numerador es divisor de 84. $\rightarrow$ Un divisor de 84 es, por ejemplo, 2. $\frac{6}{14}$

c. Su numerador es mayor que el denominador. $\rightarrow$ No es posible.

d. Su numerador es menor que el denominador. Respuesta abierta. Cualquier fracción equivalente a $\frac{3}{7}$ siempre tendrá el numerador menor que el denominador.

4 Halla directamente la fracción irreducible de estas otras:

a. $\frac{\mathbf{345}}{\mathbf{270}}$ $\qquad$ m.c.d. (345, 270) = 15 $\Rightarrow\frac{345:15}{270:15}=\frac{23}{18}$

b. $\frac{\mathbf{130}}{\mathbf{390}}$ $\qquad$ m.c.d. (130, 390) = 130 $\Rightarrow\frac{130:130}{390:130}=\frac{1}{3}$

c. $\frac{\mathbf{990}}{\mathbf{242}}$ $\qquad$ m.c.d. (990, 242) = 22 $\Rightarrow\frac{990:22}{242:22}=\frac{45}{11}$

d. $\mathbf{\frac{475}{985}}$ m.c.d. (475, 985) = 5 $\Rightarrow \frac{475:5}{985:5}=\frac{95}{197}$

e. $\mathbf{\frac{2\,480}{4\,280}}$ m.c.d. (2 480, 4 280) = 40 $\Rightarrow \frac{2\,480:40}{4\,280:40}=\frac{62}{107}$

f. $\mathbf{\frac{7\,420}{3\,200}}$ m.c.d. (7 420, 3 200) = 20 $\Rightarrow \frac{7\,420:20}{3\,200:20}=\frac{71}{160}$

5 Ana ha gastado $\frac{9}{12}$ de su paga en el cine, su amigo Ernesto ha utilizado el $\frac{15}{25}$ para comprarse un libro, y Alberto ha conseguido una entrada para un concierto con $\frac{21}{28}$ de sus ahorros. ¿Quiénes se han gastado el mismo dinero?

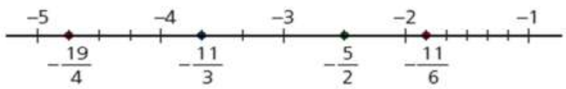
Ana: $\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$, Ernesto: $\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$, Alberto: $\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$

Ana y Alberto, que han gastado $\frac{3}{4}$.

REPRESENTACIÓN, ORDENACIÓN Y COMPARACIÓN DE FRACCIONES

6 Representa las siguientes fracciones en la recta numérica:

a. $-\frac{11}{3}$ **b.** $-\frac{5}{2}$ **c.** $-\frac{11}{6}$ **d.** $-\frac{19}{4}$



7 Ordena estas fracciones de menor a mayor:

a. $-\frac{6}{21}, -\frac{2}{35}, -\frac{11}{15}, -\frac{3}{10}$

$$-\frac{6}{21}, -\frac{2}{35}, -\frac{11}{15}, -\frac{3}{10} \Rightarrow -\frac{60}{210}, -\frac{12}{210}, -\frac{154}{210}, -\frac{63}{210} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{154}{15} < -\frac{63}{10} < -\frac{60}{210} < -\frac{12}{210} \Rightarrow -\frac{11}{15} < -\frac{3}{10} < -\frac{6}{21} < -\frac{2}{35}$$

b. $\mathbf{\frac{5}{18},-\frac{2}{15},-\frac{1}{9},\frac{5}{36}}$

$$\frac{5}{18},-\frac{2}{15},-\frac{1}{9},\frac{5}{36}\Rightarrow\frac{50}{180},-\frac{24}{180},-\frac{20}{180},\frac{25}{180}\Rightarrow-\frac{24}{180}<-\frac{20}{180}<\frac{25}{180}<\frac{50}{180}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{2}{15}<-\frac{1}{9}<\frac{5}{36}<\frac{5}{18}$$

c. $\mathbf{\frac{7}{18},\frac{7}{4},\frac{23}{15},\frac{17}{8}}$

$$\frac{7}{18},\frac{7}{4},\frac{23}{15},\frac{17}{8}\Rightarrow\frac{140}{360},\frac{630}{360},\frac{552}{360},\frac{765}{360}\Rightarrow\frac{140}{360}<\frac{552}{360}<\frac{630}{360}<\frac{765}{360}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{7}{18}<\frac{23}{15}<\frac{7}{4}<\frac{17}{8}$$

d. $\mathbf{\frac{18}{5},\frac{21}{4},\frac{25}{6},\frac{7}{2}}$

$$\frac{18}{5},\frac{21}{4},\frac{25}{6},\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{216}{60},\frac{315}{60},\frac{250}{60},\frac{210}{60}\Rightarrow\frac{210}{60}<\frac{216}{60}<\frac{250}{60}<\frac{315}{60}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{7}{2}<\frac{18}{5}<\frac{25}{6}<\frac{21}{4}$$

8 Copia y completa en tu cuaderno las siguientes fracciones para que su orden sea el correcto:

a. $\mathbf{-\frac{6}{15}>-\frac{A}{35}>-\frac{4}{B}>-\frac{C}{2}>-\frac{3}{5}}$

$$-\frac{6}{15}=-\frac{2}{5}=-\frac{14}{35}>-\frac{15}{35}\Rightarrow A=15$$

$$-\frac{15}{35}>-\frac{20}{35}=-\frac{4}{7}\Rightarrow B=7$$

$$-\frac{3}{5}=-\frac{21}{35}=-\frac{42}{70}<-\frac{35}{70}=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=1$$

b. $\mathbf{\frac{1}{4}<\frac{D}{15}<\frac{10}{E}<\frac{F}{18}<\frac{G}{10}<\frac{42}{35}}$

$$\frac{1}{4}=\frac{15}{60}<\frac{20}{60}=\frac{6}{15}\Rightarrow D=6$$

$$\frac{6}{15}=\frac{1}{3}=\frac{10}{30}<\frac{10}{9}\Rightarrow E=9$$

$$\frac{10}{9}=\frac{20}{18}<\frac{9}{18}\Rightarrow F=9$$

$$\frac{42}{35}=\frac{6}{5}=\frac{12}{10}>\frac{G}{10}\Rightarrow G=11$$

9 Elisa, Félix y Eva han encargado tres *pizzas.* Elisa se comió $\frac{2}{3}$ del total; Félix, $\frac{1}{2}$, y Eva, $\frac{5}{6}$.

a. Ordena la cantidad de *pizza* que han tomado los tres amigos de mayor a menor.

$$\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{4}{6},\frac{3}{6},\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{5}{6}>\frac{2}{3}>\frac{1}{2}$$

b. ¿Quién ha tomado más pizza? ¿Y quién menos?

Eva ha tomado más pizza y Félix el que menos.

10 Cuatro mensajeros se han repartido un cierto número de paquetes para entregar. David se ha encargado de $\frac{1}{3}$ de los paquetes, Ángela de $\frac{5}{25}$, Lucía de $\frac{3}{10}$ y Miguel de $\frac{2}{12}$.

a. Ordena de mayor a menor la cantidad de paquetes entregados.

$$\frac{1}{3},\frac{5}{25},\frac{3}{10},\frac{2}{12}\Rightarrow\frac{100}{300},\frac{60}{300},\frac{90}{300},\frac{50}{300}\Rightarrow\frac{100}{300}>\frac{90}{300}>\frac{60}{300}>\frac{50}{300}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{1}{3}>\frac{3}{10}>\frac{5}{25}>\frac{2}{12}$$

b. ¿Quién ha repartido más paquetes? ¿Y quién menos?

David es el que ha repartido más paquetes y Miguel es el que menos.

11 Demuestra las siguientes expresiones con ejemplos:

a. Si $\frac{a}{b}<\frac{a}{c}<\frac{a}{d}$, ¿podemos afirmar que $\frac{b}{a}>\frac{c}{a}>\frac{d}{a}$?

Sí, es cierto. Por ejemplo:

$$\frac{2}{3}<\frac{4}{3}<\frac{8}{3}\text{ y }\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{12}{8},\frac{6}{8},\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{12}{8}>\frac{6}{8}>\frac{3}{8}\Rightarrow\frac{3}{2}>\frac{3}{4}>\frac{3}{8}$$

b. Si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}<\frac{e}{f}$, ¿ocurriría que $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}>\frac{f}{e}$?

Sí, es cierto. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}\text{ y }2,\frac{3}{2},\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{12}{6},\frac{9}{6},\frac{8}{6}\Rightarrow\frac{12}{6}>\frac{9}{6}>\frac{8}{6}\Rightarrow 2>\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$$

SOLUCIONES PÁG. 65

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

12 Realiza las siguientes operaciones, indicando el resultado como fracción irreducible:

a. $\mathbf{\frac{3}{18}+\frac{4}{15}+\frac{10}{3}}=\frac{1}{6}+\frac{4}{15}+\frac{10}{3}=\frac{5}{30}+\frac{8}{30}+\frac{100}{30}=\frac{113}{30}$

b. $\mathbf{-\frac{45}{20}-\frac{90}{50}-\frac{39}{9}}=-\frac{9}{4}-\frac{9}{5}-\frac{13}{3}=-\frac{135}{60}-\frac{108}{60}-\frac{260}{60}=-\frac{503}{60}$

c. $\mathbf{\frac{2}{18}+\frac{6}{12}-\frac{4}{15}}=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}-\frac{4}{15}=\frac{10}{90}+\frac{45}{90}-\frac{24}{90}=\frac{31}{90}$

d. $\mathbf{-\frac{10}{35}-\frac{20}{50}+\frac{15}{140}}=-\frac{2}{7}-\frac{2}{5}+\frac{3}{28}=-\frac{280}{980}-\frac{392}{980}+\frac{105}{980}=-\frac{567}{980}=-\frac{81}{140}$

e. $\mathbf{\frac{240}{135}+\frac{630}{585}+\frac{120}{25}}=\frac{16}{9}+\frac{14}{13}+\frac{24}{5}=\frac{1040}{585}+\frac{630}{585}+\frac{2\,808}{585}=\frac{4\,478}{585}$

f. $\mathbf{\frac{19}{4}-\frac{5}{12}-\frac{9}{20}}=\frac{285}{60}-\frac{25}{60}-\frac{27}{60}=\frac{233}{60}$

13 Efectúa las siguientes sumas y restas de fracciones y simplifica el resultado:

a. $\mathbf{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}-\left(\frac{15}{22}+\frac{12}{33}\right)}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}-\left(\frac{45}{66}+\frac{24}{66}\right)=\frac{1}{12}-\frac{69}{66}=\frac{1}{12}-\frac{23}{22}=\frac{11}{132}-\frac{138}{132}=-\frac{127}{132}$

b. $\mathbf{-\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{4}{5}-\frac{6}{18}\right)}=\frac{7}{8}+\left(-\frac{4}{5}-\frac{2}{6}\right)=\frac{7}{8}+\left(-\frac{24}{30}-\frac{10}{30}\right)=\frac{7}{8}+\left(-\frac{34}{30}\right)=\frac{7}{8}-\frac{17}{15}=$

$=\frac{105}{120}-\frac{136}{120}=-\frac{31}{120}$

c. $\mathbf{\frac{6}{7}-\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{7}{5}\right)}=\frac{6}{7}-\left(\frac{9}{12}+\frac{10}{12}\right)+\frac{7}{5}=\frac{6}{7}-\frac{19}{12}+\frac{7}{5}=\frac{360}{420}-\frac{665}{420}+\frac{588}{420}=\frac{283}{420}$

d. $\mathbf{\left(5-\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{8}{5}-\frac{3}{20}\right)}=\left(\frac{40}{8}-\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{32}{20}-\frac{3}{20}\right)=\frac{37}{8}-\left(-\frac{35}{20}\right)=\frac{37}{8}+\frac{35}{20}=$

$=\frac{185}{40}+\frac{70}{40}=\frac{255}{40}=\frac{51}{8}$

e. $\mathbf{\frac{16}{3}-4+\left(-\frac{5}{2}\right)}\frac{16}{3}-4-\frac{5}{2}=\frac{32}{6}-\frac{24}{6}-\frac{15}{6}=-\frac{7}{6}$

f. $\mathbf{5-\frac{4}{9}-3+\frac{12}{30}}=2-\frac{4}{9}+\frac{2}{5}=\frac{90}{45}-\frac{20}{45}+\frac{18}{45}=\frac{88}{45}$

g. $\mathbf{\frac{9}{12}-\frac{12}{20}-\frac{18}{15}+3}=\frac{3}{4}-\frac{3}{5}-\frac{6}{5}+3=\frac{3}{4}-\frac{9}{5}+3=\frac{15}{20}-\frac{36}{20}+\frac{60}{20}=\frac{39}{20}$

h. $\mathbf{-\left(\frac{2}{9}-\frac{4}{5}\right)-9}=-\frac{2}{9}+\frac{4}{5}-9=-\frac{10}{45}+\frac{36}{45}-\frac{405}{45}=-\frac{379}{45}$

14 Verónica quiere repartir 300 € entre sus tres hijas, de modo que Esther recibe $\frac{2}{5}$ del total, Ana $\frac{2}{3}$ del total y a María le corresponde $\frac{1}{4}$ del total.

a. ¿Podría hacerse el reparto como quiere Verónica?

$\frac{2}{5}\cdot 300 = 120 \qquad \frac{2}{3}\cdot 300 = 200 \qquad \frac{1}{4}\cdot 300 = 75$

Esther recibiría 120 €, Ana 200 € y María 75 €. No es posible ese reparto porque no tiene 395 €.

b. ¿Y si Esther obtiene $\frac{2}{5}$, Ana $\frac{1}{2}$, y María $\frac{1}{10}$?

$\frac{2}{5}\cdot 300 = 120 \qquad \frac{1}{2}\cdot 300 = 150 \qquad \frac{1}{10}\cdot 300 = 30$

Esther recibiría 120 €, Ana 150 € y María 30 €. Este reparto sí es posible.

c. Si finalmente se lo piensa mejor y reparte $\frac{2}{9}$ a Esther, $\frac{2}{7}$ a Ana y $\frac{1}{7}$ a María, ¿cuánto dinero recibe cada hija?

$\frac{2}{9}\cdot 300 = 66{,}66 \qquad \frac{2}{7}\cdot 300 = 85{,}7 \qquad \frac{1}{7}\cdot 300 = 42{,}85$

Esther recibiría aproximadamente 66,66 €, Ana 85,7 € y María 42,85 €.

d. ¿En cuál de las tres situaciones sobra o falta dinero?

En la primera situación falta dinero, en la segunda se reparte todo el dinero y en la tercera sobra dinero.

15 Pedro necesita comprar $\frac{3}{4}$ de kilo de judías verdes para hacer la comida. El dependiente le dice que solo le queda $\frac{1}{3}$, ya que es el final de jornada.

a. ¿Cuánto le falta para tener la cantidad que necesita?

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{9}{12}-\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$$

Le falta $\frac{5}{12}$ de kilo.

b. Luisa, que acaba de comprar también judías verdes, le dice que ella le puede dar $\frac{2}{5}$ de kilo. ¿Será suficiente con esto para que Pedro llegue a casa con sus $\frac{3}{4}$ de kilo de judías verdes? ¿Cuánto le falta o le sobra?

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}$$

$$\frac{3}{4},\frac{11}{15}\Rightarrow\frac{45}{60},\frac{44}{60}$$

No es suficiente, le sigue faltando $\frac{1}{60}$ de kilo.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

16 Escribe como fracción e indica el valor de las siguientes expresiones en las unidades que se indican:

a. Un cuarto de hora en minutos. $\frac{1}{4}$ de hora = $\frac{1}{4}\cdot 60 = 15$ min

b. Medio día en horas. $\frac{1}{2}$ de día = $\frac{1}{2}\cdot 24 = 12$ h

c. Un sexto de año en meses. $\frac{1}{6}$ de año = $\frac{1}{6}\cdot 12 = 2$ meses

d. Un quinto de litro en centilitros. $\frac{1}{5}$ de litro = $\frac{1}{5}\cdot 100 = 20$ cL

17 Realiza las siguientes operaciones en las que las fracciones aparecen como operador:

a. $\mathbf{\frac{5}{15}}$ **de 450** $=\frac{5}{15}\cdot 450=\frac{1}{3}\cdot 450=150$

b. $\mathbf{\frac{8}{42}}$ **de 945** $=\frac{8}{42}\cdot 945=\frac{4}{21}\cdot 945=180$

c. $\mathbf{\frac{12}{20}}$ **de 820** $=\frac{12}{20}\cdot 820=6\cdot 82=492$

d. $\mathbf{\frac{3}{23}}$ **de 966** $=\frac{3}{23}\cdot 966=3\cdot 42=126$

e. $\mathbf{\frac{1}{4}}$ **de 64** $=\frac{1}{4}\cdot 64=16$

f. $\mathbf{\frac{5}{7}}$ **de 84** $=\frac{5}{7}\cdot 84=5\cdot 12=60$

18 Efectúa las operaciones propuestas como en el ejemplo, resolviendo las divisiones como multiplicaciones por la inversa y simplificando el resultado.

a. $\frac{69}{88}\cdot\frac{16}{3}:\left(-\frac{4}{121}\right)=\frac{\cancel{3}\cdot 23}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{11}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{\cancel{11}\cdot 11}{\cancel{2}\cdot 2}\right)=\frac{-23\cdot 11}{2}=-\frac{253}{2}$

b. $\frac{55}{90}:(-33)\cdot\left(-\frac{18}{10}\right)=\frac{\cancel{5}\cdot\cancel{11}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}}\cdot\left(-\frac{1}{3\cdot\cancel{11}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}{2\cdot 5}\right)=\frac{1}{30}$

c. $\frac{98}{72}:\frac{48}{66}:\left(-\frac{30}{45}\right)=\frac{\cancel{2}\cdot 7\cdot 7}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 11}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}}{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}}\right)=-\frac{539}{192}$

d. $-\frac{300}{75}:\frac{115}{95}:\frac{6}{10}=-\frac{2\cdot 2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}\cdot 19}{\cancel{5}\cdot 23}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot 5}{\cancel{2}\cdot 3}=-\frac{380}{69}$

e. $-\frac{147}{20}:\frac{70}{9}\cdot\frac{10}{7}=-\frac{3\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{7}}{\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 5\cdot\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{5}}{\cancel{7}}=-\frac{27}{20}$

f. $\frac{72}{75}\cdot\frac{15}{20}:\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3}{\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot\cancel{5}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 5}\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{2}\cdot 2}\right)=-\frac{27}{50}$

19 Simplifica hasta la fracción irreducible el resultado de las siguientes multiplicaciones y divisiones de fracciones:

a. $\left(\frac{19}{3}\cdot\frac{27}{25}:\frac{5}{6}\right):\left(-\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{19}{3}\cdot\frac{27}{25}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{3\,078}{375}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=-\frac{9\,234}{1\,500}=$

$=-\frac{4\,617}{750}=-\frac{1\,539}{250}$

b. $\frac{58}{32}:(-6):\frac{7}{8}:(-4)=\frac{29}{16}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{8}{7}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{232}{2\,688}=\frac{58}{672}=\frac{29}{336}$

c. $-\frac{88}{30}:\left(-\frac{16}{15}\right)\cdot\frac{5}{132}=-\frac{44}{15}\cdot\left(-\frac{15}{16}\right)\cdot\frac{5}{132}=\frac{220}{2112}=\frac{5}{48}$

d. $\frac{100}{250}:\frac{45}{75}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{5}:\frac{75}{45}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{20}{45}=-\frac{4}{9}$

e. $\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{9}{12}\right):\left(-\frac{35}{60}\right)=\frac{9}{60}\cdot\left(-\frac{60}{35}\right)=-\frac{9}{35}$

f. $-\frac{75}{40}:\left(\frac{35}{60}\cdot\frac{38}{28}\right)=-\frac{15}{8}:\left(\frac{7}{12}\cdot\frac{19}{14}\right)=-\frac{15}{8}\cdot\frac{24}{19}=-\frac{45}{19}$

20 Claudia tiene ahorrados 180 €. Se ha gastado $\frac{1}{20}$ en una entrada para el cine, $\frac{1}{3}$ en un juego para la videoconsola, $\frac{4}{45}$ en un libro de aventuras y $\frac{2}{15}$ en una mochila. Si luego se fue a comprar una blusa y unos pantalones y le han sobrado 21 €:

a. ¿Qué fracción se ha gastado en ropa?

$\frac{1}{20} \cdot 180 = 9$ € en la entrada para el cine.

$\frac{1}{3} \cdot 180 = 60$ € en el juego para la videoconsola.

$\frac{4}{45} \cdot 180 = 16$ € en el libro de aventuras.

$\frac{2}{15} \cdot 180 = 24$ € en la mochila.

En total se ha gastado: 9 + 60 + 16 + 24 = 109

Al dinero que tenía horrado le restamos lo que se ha gastado y lo que le ha sobrado para obtener lo que se ha gastado en ropa:

180 – (109 + 21) = 50 €

$\frac{50}{180} = \frac{5}{18}$ es la fracción que se ha gastado en ropa.

b. ¿Cuánto dinero le ha valido cada compra?

La entrada de cine le ha costado 9 €, el juego para la videoconsola 60 €, el libro 16 €, la mochila 24 € y la ropa 50 €.

SOLUCIONES PÁG. 66

21 Una empresa emplea los $\frac{2}{7}$ de sus beneficios para pagar a sus empleados, $\frac{3}{8}$ para adquirir maquinaria y $\frac{1}{6}$ para emprender nuevos proyectos. Si sus beneficios ascienden a 21 000 000 €:

a. ¿Qué fracción de los beneficios quedaría?

$\frac{2}{7} \cdot 21\,000\,000 = 6\,000\,000$ € emplea para pagar a sus empleados.

$\frac{3}{8} \cdot 21\,000\,000 = 7\,875\,000$ € para adquirir maquinaria.

$\frac{1}{6} \cdot 21\,000\,000 = 3\,500\,000$ € para emprender nuevos proyectos.

El gasto total es: 6 000 000 + 7 875 000 + 3 500 000 = 17 375 000

El dinero que queda como beneficio es: 21 000 000 – 7 375 000 = 3 625 000 €, que corresponde a la fracción $\frac{3\,625\,000}{21\,000\,000} = \frac{29}{168}$.

b. ¿Cuánto dinero se ha empleado para el pago a los empleados, para la adquisición de maquinaria y para los nuevos proyectos?

Para pagar a los empleados 6 000 000 €, para la adquisición de maquinaria 7 875 000 € y para emprender nuevos proyectos 3 500 000 €.

22 De la comida que hay en la nevera, $\frac{1}{3}$ son alimentos sólidos. De estos, $\frac{1}{2}$ son vegetales, de los cuales $\frac{3}{5}$ son frutas, y de ellas $\frac{2}{5}$ son manzanas.

a. ¿Qué fracción del total son manzanas?

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{25}$ del total son manzanas.

b. Si en la nevera hay 150 alimentos, indica cuántos son sólidos, cuántos vegetales, cuántas frutas y cuántas manzanas.

$\frac{1}{3} \cdot 150 = 50$ son alimentos sólidos.

$\frac{1}{2} \cdot 50 = 25$ son vegetales.

$\frac{3}{5} \cdot 25 = 15$ son frutas.

Hay 50 alimentos; 25 son vegetales; 15 son frutas y 6 son manzanas.

POTENCIAS Y RAÍCES DE FRACCIONES

23 Calcula estas potencias de fracciones:

a. $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

b. $\left(-\frac{6}{5}\right)^4 = \frac{1\,296}{625}$

c. $-\left(\frac{7}{11}\right)^3 = -\frac{343}{1331}$

24 Calcula y simplifica las siguientes expresiones con potencias y raíces:

a. $\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{11}}\right)^{\mathbf{3}}\cdot\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{11}}\right)^{\mathbf{2}}:\left(\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{11}}\right)^{\mathbf{7}}=\left(\frac{8}{11}\right)^{3+2-7}=\left(\frac{8}{11}\right)^{-2}=\left(\frac{11}{8}\right)^{2}=\frac{121}{64}$

b. $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}}:\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}\right)^{\mathbf{3}}:\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{5}}=\left(\frac{1}{3}:\frac{5}{12}\right)^{3}:\left(\frac{4}{5}\right)^{5}=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{5}\right)^{3}:\left(\frac{4}{5}\right)^{5}=\left(\frac{4}{5}\right)^{3}:\left(\frac{4}{5}\right)^{5}=$

$=\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{4}\right)^{2}=\frac{25}{16}$

c. $\sqrt{\frac{\mathbf{45}}{\mathbf{26}}}\cdot\sqrt{\frac{\mathbf{70}}{\mathbf{39}}}:\sqrt{\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{42}}}=\sqrt{\frac{45}{26}\cdot\frac{70}{39}\cdot\frac{42}{8}}=\sqrt{\frac{5\cdot3\cdot3}{\cancel{2}\cdot13}\cdot\frac{7\cdot\cancel{2}\cdot5}{\cancel{3}\cdot13}\cdot\frac{7\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{2}\cdot4}}=\sqrt{\frac{5^2\cdot3^2\cdot7^2}{13^2\cdot2^2}}=$

$=\frac{5\cdot3\cdot7}{13\cdot2}=\frac{105}{26}$

d. $\sqrt{\frac{\mathbf{38}}{\mathbf{33}}}\cdot\sqrt{\frac{\mathbf{66}}{\mathbf{8}}}:\sqrt{\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{15}}}=\sqrt{\frac{38}{33}\cdot\frac{66}{8}\cdot\frac{15}{22}}=\sqrt{\frac{\cancel{2}\cdot19}{\cancel{3}\cdot\cancel{11}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{11}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot2}\cdot\frac{3\cdot5}{2\cdot11}}=\sqrt{\frac{285}{44}}$

e. $\left(-\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{56}}\right)^{\mathbf{2}}:\left(-\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{56}}\right)^{\mathbf{3}}=\left(-\frac{21}{56}\right)^{-1}=-\frac{56}{21}=-\frac{8}{3}$

f. $\left[\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}\right]^{\mathbf{-3}}:\left(\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{-6}}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-6}:\left(\frac{10}{9}\right)^{-6}=\left(\frac{5}{3}:\frac{10}{9}\right)^{-6}=\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{10}\right)^{-6}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-6}=\left(\frac{2}{3}\right)^{6}=\frac{64}{729}$

g. $\sqrt{\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{30}}}\cdot\sqrt{\frac{\mathbf{45}}{\mathbf{363}}}=\sqrt{\frac{18}{30}\cdot\frac{45}{363}}=\sqrt{\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{5}}\cdot\frac{3\cdot3\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot11\cdot11}}=\frac{3}{11}$

h. $\left(\sqrt{\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{243}}}\right)^{\mathbf{2}}=\frac{8}{243}$

25 Copia y completa en tu cuaderno las siguientes expresiones para que sean correctas:

a. $\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{3}}\cdot\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{9}}:\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right)^{\mathbf{4}}=\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{4}}$

$\left(\frac{2}{9}\right)^{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{9}:\left(\frac{A}{B}\right)^{4}=\left(\frac{2}{9}\right)^{4}\Rightarrow\left(\frac{2}{9}\right)^{12}:\left(\frac{A}{B}\right)^{4}=\left(\frac{2}{9}\right)^{4}\Rightarrow\left(\frac{2}{9}\right)^{12}:\left(\frac{2}{9}\right)^{4}=\left(\frac{A}{B}\right)^{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\frac{2}{9}\right)^{8}=\left(\frac{A}{B}\right)^{4}\Rightarrow\left[\left(\frac{2}{9}\right)^{2}\right]^{4}=\left(\frac{A}{B}\right)^{4}\Rightarrow\left(\frac{4}{81}\right)^{4}=\left(\frac{A}{B}\right)^{4}$

A = 4, B = 81

b. $\left(\frac{6}{5}\right)^5 : \left(\frac{36}{75}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^C = \frac{125}{D}$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^5 : \left(\frac{36}{75}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^C = \frac{125}{D} \Rightarrow \left(\frac{6}{5}\cdot\frac{75}{36}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^C = \frac{125}{D} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^C = \frac{125}{D} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{5+C} = \left(\frac{5}{D}\right)^3 \Rightarrow \{5 + C = 3 \Rightarrow C = -2$$

C = –2, D = 2

c. $\left[\left(\frac{5}{6}\right)^4\right]^{10} : \left[\left(\frac{E}{F}\right)^5\right]^8 = \left[\left(\frac{6}{21}\cdot\frac{15}{4}\right)^{20}\right]^2$

$$\left[\left(\frac{5}{6}\right)^4\right]^{10} : \left[\left(\frac{E}{F}\right)^5\right]^8 = \left[\left(\frac{6}{21}\cdot\frac{15}{4}\right)^{20}\right]^2 \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^{40} : \left(\frac{E}{F}\right)^{40} = \left(\frac{15}{14}\right)^{40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}:\frac{E}{F}\right)^{40} = \left(\frac{15}{14}\right)^{40} \Rightarrow \frac{5}{6}:\frac{E}{F} = \frac{15}{14} \Rightarrow \frac{5}{6}:\frac{15}{14} = \frac{E}{F} \Rightarrow \frac{5}{6}\cdot\frac{14}{15} = \frac{E}{F} \Rightarrow \frac{7}{9} = \frac{E}{F}$$

E = 7, F = 9

OPERACIONES COMBINADAS CON FRACCIONES

26 Realiza con la calculadora las operaciones propuestas, anotando en el cuaderno la secuencia de teclas que utilizas. Indica el resultado final en forma de fracción (en el caso de que aparezca en pantalla un número mixto, pásalo a fracción impropia).

a. $\frac{3}{5} - \frac{17}{21} + \frac{4}{7} = \frac{63}{105} - \frac{85}{105} + \frac{60}{105} = \frac{38}{105}$

3 $\boxed{a\,b/c}$ 5 $\boxed{-}$ 17 $\boxed{a\,b/c}$ 21 $\boxed{+}$ 4 $\boxed{a\,b/c}$ 7 $\boxed{=}$

b. $\frac{12}{7} + \frac{6}{11} - \frac{3}{2} = \frac{264}{154} + \frac{84}{154} - \frac{231}{154} = \frac{117}{154}$

12 $\boxed{a\,b/c}$ 7 $\boxed{+}$ 6 $\boxed{a\,b/c}$ 11 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{a\,b/c}$ 2 $\boxed{=}$

c. $\left(\frac{12}{15} - \frac{6}{45}\right) : \frac{2}{7}$ $\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{15}\right) : \frac{2}{7} = \left(\frac{12}{15} - \frac{2}{15}\right) : \frac{2}{7} = \frac{2}{3} : \frac{2}{7} = \frac{7}{3}$

$\boxed{(}$ 12 $\boxed{a\,b/c}$ 15 $\boxed{-}$ 6 $\boxed{a\,b/c}$ 45 $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{a\,b/c}$ 7 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{d/c}$

d. $\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{10}{3}\right)$ $\left(\frac{32}{40} - \frac{15}{40}\right) \cdot \left(\frac{3}{18} + \frac{60}{18}\right) = \frac{17}{40} \cdot \frac{63}{18} = \frac{119}{80}$

$\boxed{(}$ 4 $\boxed{a\,b/c}$ 5 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{a\,b/c}$ 8 $\boxed{)}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{(}$ 1 $\boxed{a\,b/c}$ 6 $\boxed{+}$ 10 $\boxed{a\,b/c}$ 3 $\boxed{=}$

27 Halla la fracción irreducible que resulta de calcular las siguientes expresiones. Comprueba los resultados con ayuda de la calculadora.

a. $\frac{6}{45}:\left(\frac{5}{25}+\frac{7}{75}\right)=\frac{2}{15}:\left(\frac{15}{75}+\frac{7}{75}\right)=\frac{2}{15}:\frac{22}{75}=\frac{2}{15}\cdot\frac{75}{22}=\frac{5}{11}$

b. $-\frac{63}{6}\cdot\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{7}\right)=-\frac{21}{2}\cdot\left(\frac{35}{21}+\frac{9}{21}\right)=-\frac{21}{2}\cdot\frac{44}{21}=-22$

c. $\frac{6}{32}:\frac{5}{8}-\frac{5}{4}:\left(\frac{8}{7}-\frac{10}{8}\right)=\frac{3}{16}\cdot\frac{8}{5}-\frac{5}{4}:\left(\frac{64}{56}-\frac{70}{56}\right)=\frac{3}{10}-\frac{5}{4}:\left(-\frac{6}{56}\right)=\frac{3}{10}-\frac{5}{4}\cdot\left(-\frac{28}{3}\right)=$

$=\frac{3}{10}+\frac{35}{3}=\frac{9}{30}+\frac{350}{30}=\frac{359}{30}$

d. $-\frac{3}{20}-\left(\frac{12}{9}:\frac{5}{12}-\frac{40}{18}\right)-\frac{3}{20}-\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{5}-\frac{20}{9}\right)=-\frac{3}{20}-\left(\frac{16}{5}-\frac{20}{9}\right)=$

$-\frac{3}{20}-\left(\frac{144}{45}-\frac{100}{45}\right)=-\frac{3}{20}-\frac{44}{45}=-\frac{27}{180}-\frac{176}{180}=-\frac{203}{180}$

e. $\frac{5}{72}-\frac{2}{60}\cdot(-6)=\frac{5}{72}-\frac{1}{30}\cdot(-6)=\frac{5}{72}+\frac{1}{5}=\frac{25}{360}+\frac{72}{360}=\frac{97}{360}$

f. $\left(\frac{7}{75}-\frac{3}{45}\right):\frac{8}{12}=\left(\frac{21}{225}-\frac{15}{225}\right):\frac{8}{12}=\frac{6}{225}\cdot\frac{12}{8}=\frac{1}{25}$

g. $5\cdot\left(\frac{6}{7}-\frac{9}{8}:\frac{1}{12}\right)=5\cdot\left(\frac{6}{5}-\frac{9}{8}\cdot 12\right)=5\cdot\left(\frac{6}{5}-\frac{27}{2}\right)=5\cdot\left(\frac{12}{10}-\frac{135}{10}\right)=$

$=5\cdot\left(-\frac{123}{10}\right)=-\frac{123}{2}$

h. $\frac{20}{15}-\frac{45}{65}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{9}{13}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}+\frac{6}{13}=\frac{52}{39}+\frac{18}{39}=\frac{70}{39}$

28 Realiza las siguientes operaciones combinadas con fracciones. Comprueba los resultados con ayuda de la calculadora.

a. $\frac{5}{6}-\left[\frac{1}{6}:\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)-\frac{12}{5}\right]-\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{3}:2\right)$

$\frac{5}{6}-\left[\frac{1}{6}:\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)-\frac{12}{5}\right]-\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{3}:2\right)=\frac{5}{6}-\left[\frac{1}{6}:\left(\frac{6}{30}-\frac{5}{30}\right)-\frac{12}{5}\right]-\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=$

$=\frac{5}{6}-\left[\frac{1}{6}:\frac{1}{30}-\frac{12}{5}\right]-\left(\frac{9}{8}-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{6}-\left(5-\frac{12}{5}\right)-\left(\frac{27}{24}-\frac{4}{24}\right)=$

$=\frac{5}{6}-\left(\frac{25}{5}-\frac{12}{5}\right)-\frac{23}{24}=\frac{5}{6}-\frac{13}{5}-\frac{23}{24}=\frac{100}{120}-\frac{312}{120}-\frac{115}{120}=-\frac{327}{120}=-\frac{109}{40}$

b. $\mathbf{\frac{5}{2}-\frac{11}{6}+4:\frac{7}{2}-\frac{5}{14}+(-3)^2}$

$$\frac{5}{2}-\frac{11}{6}+4:\frac{7}{2}-\frac{5}{14}+(-3)^2=\frac{15}{6}-\frac{11}{6}+4\cdot\frac{2}{7}-\frac{5}{14}+9=\frac{4}{6}+\frac{8}{7}-\frac{5}{14}+9=$$
$$=\frac{28}{42}+\frac{48}{42}-\frac{15}{42}+\frac{378}{42}=\frac{439}{42}$$

c. $\mathbf{\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}-3-\frac{2}{8}\right):\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{15}\right):\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}$

$$\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}-3-\frac{2}{8}\right):\left(\frac{5}{6}+\frac{2}{15}\right):\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\left(\frac{56}{40}+\frac{30}{40}-\frac{120}{40}-\frac{10}{40}\right):\left(\frac{25}{30}+\frac{4}{30}\right):\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=$$
$$=-\frac{44}{40}:\frac{29}{30}:\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=-\frac{11}{10}\cdot\frac{30}{29}\cdot\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=-\frac{165}{116}-\frac{2}{3}=-\frac{495}{348}-\frac{232}{348}=-\frac{727}{348}$$

d. $\mathbf{\left(-\frac{5}{2}\right)^3-\left[\frac{7}{4}-\frac{8}{9}:\frac{18}{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{4}{6}-\frac{6}{4}\right)}$

$$\left(-\frac{5}{2}\right)^3-\left[\frac{7}{4}-\frac{8}{9}:\frac{18}{12}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{4}{6}-\frac{6}{4}\right)=-\frac{125}{8}-\left[\frac{7}{4}-\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right]\cdot\left(\frac{8}{12}-\frac{18}{12}\right)=$$
$$=-\frac{125}{8}-\left[\frac{7}{4}-\frac{16}{27}+\frac{1}{4}\right]\cdot\left(-\frac{10}{12}\right)=-\frac{125}{8}-\left(\frac{8}{4}-\frac{16}{27}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=$$
$$=-\frac{125}{8}-\left(\frac{216}{108}-\frac{64}{108}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{125}{8}-\frac{152}{108}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{125}{8}-\frac{38}{27}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=$$
$$=-\frac{125}{8}+\frac{95}{81}=-\frac{10125}{648}+\frac{760}{648}=-\frac{9365}{648}$$

SOLUCIONES PÁG. 67

29 Efectúa las siguientes operaciones combinadas y simplifica el resultado.

a. $\mathbf{\left(\frac{6}{7}\right)^3:\left(\frac{6}{7}\right)^2-\frac{65}{18}\cdot\frac{12}{39}+\left(-\frac{9}{5}\right)^3\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)^{-5}}$

$$\left(\frac{6}{7}\right)^3:\left(\frac{6}{7}\right)^2-\frac{65}{18}\cdot\frac{12}{39}+\left(-\frac{9}{5}\right)^3\cdot\left(-\frac{9}{5}\right)^{-5}=\frac{6}{7}-\frac{10}{9}+\left(-\frac{9}{5}\right)^{-2}=$$
$$=\frac{54}{63}-\frac{70}{63}+\left(-\frac{5}{9}\right)^2=-\frac{16}{63}+\frac{25}{81}=-\frac{144}{567}+\frac{175}{567}=\frac{31}{567}$$

b. $\mathbf{\frac{28}{60}-\frac{5}{36}\cdot\left(-\frac{27}{75}\right)+\sqrt{\frac{256}{625}}+20:(-8)}$

$$\frac{28}{60}-\frac{5}{36}\cdot\left(-\frac{27}{75}\right)+\sqrt{\frac{256}{625}}+20:(-8)=\frac{7}{15}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\frac{16}{25}+\left[20\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)\right]=$$
$$=\frac{7}{15}+\frac{1}{20}+\frac{16}{25}-\frac{5}{2}=\frac{140}{300}+\frac{15}{300}+\frac{192}{300}-\frac{750}{300}=-\frac{403}{300}$$

c. $\dfrac{\left(\dfrac{36}{56}-\dfrac{5}{75}\right):\dfrac{11}{5}-\dfrac{4}{3}}{\dfrac{11}{9}\cdot\dfrac{18}{33}-\dfrac{3}{36}+\left(\dfrac{6}{18}-\dfrac{4}{20}\right)}\cdot\left(\dfrac{7}{25}-\dfrac{3}{5}\right)$

$$\frac{\left(\frac{36}{56}-\frac{5}{75}\right):\frac{11}{5}-\frac{4}{3}}{\frac{11}{9}\cdot\frac{18}{22}-\frac{3}{36}+\left(\frac{6}{18}-\frac{4}{20}\right)}\cdot\left(\frac{7}{25}-\frac{3}{5}\right)=\frac{\left(\frac{9}{14}-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{5}{11}-\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)}\cdot\left(\frac{7}{25}-\frac{15}{25}\right)=$$

$$=\frac{\left(\frac{135}{210}-\frac{14}{210}\right)\cdot\frac{5}{11}-\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{12}+\left(\frac{5}{15}-\frac{3}{15}\right)}\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)=\frac{\frac{121}{210}\cdot\frac{5}{11}-\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{12}+\frac{2}{15}}\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)=$$

$$=\frac{\frac{11}{42}-\frac{4}{3}}{\frac{60}{60}-\frac{5}{60}+\frac{8}{60}}\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)=\frac{\frac{11}{42}-\frac{56}{42}}{\frac{63}{60}}\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)=\frac{-\frac{45}{42}}{\frac{21}{20}}\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)=$$

$$=\frac{-\frac{15}{14}}{\frac{21}{20}}\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)=-\frac{15}{14}:\frac{21}{20}\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{5}}{\cancel{2}\cdot 7}\cdot\frac{4\cdot\cancel{5}}{\cancel{3}\cdot 7}\cdot\frac{4\cdot\cancel{2}}{\cancel{5}\cdot\cancel{5}}=\frac{16}{49}$$

30 Elena ha invertido $\frac{2}{9}$ de sus ahorros en la compra de un libro, $\frac{1}{8}$ en ir al cine y $\frac{1}{4}$ en salir a cenar.

a. ¿Qué fracción del total le sobró?

$$1-\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)=1-\left(\frac{16}{72}+\frac{9}{72}+\frac{18}{72}\right)=1-\frac{43}{72}=\frac{72}{72}-\frac{43}{72}=\frac{29}{72}$$

Le sobró $\frac{29}{72}$ del total.

b. Si tenía ahorrado 72 €, ¿qué dinero se gastó en cada una de las acciones?

$\frac{2}{9}\cdot 72=16$ € Se gastó 16 € en el libro.

$\frac{1}{8}\cdot 72=9$ € en ir al cine.

$\frac{1}{4}\cdot 72=18$ € en salir a cenar.

72 – (16 + 9 + 18) = 72 – 43 = 29 € que le sobran.

31 Antonio reparte entre sus amigos su colección de 5 280 cómics de humor. A su amigo Pedro le ha regalado la cuarta parte; a María, de la colección; a Elsa, , y el resto se lo ha dejado a Raúl.

a. ¿Qué parte de la colección le ha correspondido a Raúl?

$$1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}\right)=1-\left(\frac{10}{40}+\frac{8}{40}+\frac{15}{40}\right)=\frac{40}{40}-\frac{33}{40}=\frac{7}{40}$$

A Raúl le corresponde $\frac{7}{40}$ de la colección.

b. ¿Cuántos ejemplares ha recibido cada amigo?

$\frac{1}{4}\cdot 5\,280=1\,320$ cómics para Pedro

$\frac{1}{5}\cdot 5\,280=1\,056$ cómics para María

$\frac{3}{8}\cdot 5\,280=1\,980$ cómics para Elsa

$\frac{7}{40}\cdot 5\,280=924$ cómics para Raúl

32 Teresa quiere repartir las hojas de su archivador entre las siguientes materias: a Matemáticas le ha asignado $\frac{1}{3}$, a Lengua $\frac{5}{12}$, y el resto es para Inglés.

a. ¿Qué parte de las hojas le ha correspondido a la asignatura de Inglés?

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{12}\right)=1-\left(\frac{4}{12}+\frac{5}{12}\right)=\frac{12}{12}-\frac{9}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

Para Inglés le ha correspondido $\frac{1}{4}$ de las hojas.

b. ¿Cuántas hojas había en total si 100 de ellas estaban destinadas a Lengua?

Si $\frac{5}{12}$ de las hojas $=100 \Rightarrow$ Hojas totales $=100\cdot\frac{12}{5}=240$

En total había 240 hojas.

EVALUACIÓN

1 ¿Cuál de las siguientes fracciones no es equivalente a $\frac{10}{12}$?

a. $\frac{5}{6}$ b. $\frac{6}{5}$ **c.** $\frac{15}{18}$ **d.** $\frac{25}{30}$

$\frac{10}{12}=\frac{5}{6}=\frac{15}{18}=\frac{25}{30}$

$5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$ $6 \cdot 12 \neq 5 \cdot 10$ $15 \cdot 12 = 18 \cdot 10$ $25 \cdot 12 = 30 \cdot 10$

2 La fracción equivalente a $\frac{945}{1188}$ es:

a. $\frac{63}{198}$ b. $\frac{70}{80}$ **c.** $\frac{70}{88}$ **d.** $\frac{315}{396}$

$\frac{945}{1188}=\frac{945:3}{1188:3}=\frac{315:3}{396:3}=\frac{105:3}{132:3}=\frac{35}{44}$

3 Efectúa esta operación y simplifica el resultado: $\frac{8}{12}:\frac{13}{5}\cdot\left(\frac{7}{2}+\frac{57}{6}\right)$

a. $\frac{10}{3}$ **b.** $\frac{10}{507}$ **c.** $\frac{338}{15}$ **d.** $\frac{12}{13}$

$\frac{8}{12}:\frac{13}{5}\cdot\left(\frac{7}{2}+\frac{57}{6}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{13}\cdot\left(\frac{21}{6}+\frac{57}{6}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{78}{6}=\frac{10}{3}$

4 Considera la siguiente expresión: $\left[\left(-\frac{12}{9}\right)^{-6}\cdot\left(-\frac{12}{9}\right)^{5}\right]:\left[\left(\frac{10}{7}\right)^{4}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^{-5}\right]$. El resultado es una fracción equivalente a una de las propuestas a continuación:

a. $-\frac{14}{15}$ **b.** $-\frac{40}{21}$ **c.** $-\frac{15}{14}$ d. $-\frac{45}{42}$

$\left[\left(-\frac{12}{9}\right)^{-6}\cdot\left(-\frac{12}{9}\right)^{5}\right]:\left[\left(\frac{10}{7}\right)^{4}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^{-5}\right]=\left(-\frac{12}{9}\right)^{-1}:\left(\frac{10}{7}\right)^{-1}=-\frac{9}{12}:\frac{7}{10}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{7}=-\frac{15}{14}$

De las fracciones que se indican, la única que es equivalente es $-\frac{45}{42}$. La fracción $-\frac{15}{14}$ no sería solución porque es la misma fracción y no una equivalente.

5 **Elena, Carlos, Juan y Ana han realizado una prueba tipo test para comprobar sus conocimientos de Matemáticas. Elena ha respondido bien a $\frac{3}{5}$ de las preguntas; Carlos, a $\frac{4}{7}$; Juan, a $\frac{5}{6}$, y Ana, a $\frac{1}{3}$. ¿Quién ha tenido más respuestas acertadas?**

a. Elena. **b. Carlos.** c. Juan. **d. Ana.**

$$\frac{3}{5},\frac{4}{7},\frac{1}{3},\frac{5}{6} \Rightarrow \frac{126}{210},\frac{120}{210},\frac{70}{210},\frac{175}{210} \Rightarrow \frac{70}{210} < \frac{120}{210} < \frac{126}{210} < \frac{175}{210} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{4}{7} < \frac{3}{5} < \frac{5}{6}$$

6 **Reparte 300 € entre 3 personas de modo que a una le correspondan $\frac{2}{5}$ del dinero, a otra $\frac{2}{3}$, y a otra $\frac{1}{4}$.**

a. 120 €, 100 € y 75 €, respectivamente.

b. No es posible repartir el dinero.

c. 120 €, 200 € y 75 €, respectivamente.

d. 100 €, 200 € y 120 €, respectivamente.

$$\frac{2}{5}\cdot 300 = 120$$

$$\frac{2}{3}\cdot 300 = 200$$

$$\frac{1}{4}\cdot 300 = 75$$

120 + 200 + 75 = 395. Por lo tanto no es posible.

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 4. Números decimales

Unidad 4. Números decimales

SOLUCIONES PÁG. 71

1 **Expresa los siguientes números en forma decimal:**

a. 82 milésimas

0,082

b. 67 centésimas

0,67

c. 214 décimas

21,4

d. 23 294 milésimas

23,294

e. 99 242 diezmilésimas

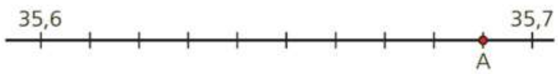
9,924 2

f. 8 679 millonésimas

0,008 679

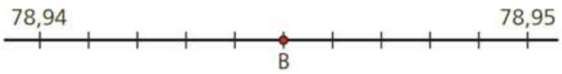
2 **Indica qué números decimales están representados en las siguientes rectas numéricas:**

a.



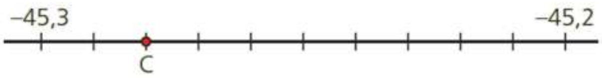
A = 35,69

b.



B = 78,945

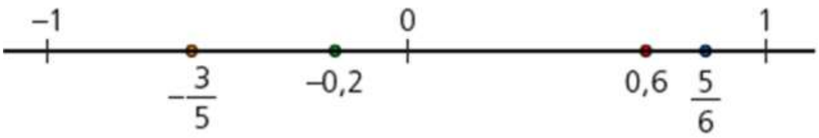
c.



C = –45,28

3 **Representa en la misma recta numérica los siguientes números y ordénalos de mayor a menor:**

$$-0,2;\ 0,6;\ -\frac{3}{5};\ \frac{5}{6}$$



$$\frac{5}{6} > 0,6 > -0,2 > -\frac{3}{5}$$

4 **Ordena estos números decimales de mayor a menor:**

a. 786,532; 783,64; 786,6; 783,543

786,6 > 786,532 > 783,64 > 783,543

b. –65,897; –65,88; –64,986; –64,89

–64,89 > –64,986 > –65,88 > –65,897

c. –2 382,242; 232,242¸–2 381,134 1; 232,9

232,9 > 232,242 > –2 381,134 1 > –2 382,242

5 **Los tiempos realizados por los siguientes nadadores se pueden ver en la ilustración:**

Ordena los tiempos de menor a mayor e indica qué tres nadadores van a subir al podio.

51,44 < 51,86 < 52,57 < 52,93 < 53,37 < 53,82

Con lo que los que van a estar en el podio serán:

Posición	**Oro**	**Plata**	**Bronce**
Nadador	3	5	2
Tiempo	51,44	51,86	52,57

SOLUCIONES PÁG. 73

6 **Halla la expresión decimal de las siguientes fracciones ¿Qué tipos de decimales son?**

a. $\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{6}} = 2{,}1\widehat{6}$; periódico mixto.

b. $\frac{\mathbf{98}}{\mathbf{6}} = 16{,}\widehat{3}$; periódico puro.

c. $\frac{\mathbf{101}}{\mathbf{4}} = 25{,}25$; decimal exacto.

d. $\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{27}} = 0{,}\widehat{703}$; periódico puro.

e. $\frac{\mathbf{75}}{\mathbf{8}} = 9{,}375$; decimal exacto.

f. $-\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} = -1{,}2$; decimal exacto.

g. $\frac{\mathbf{109}}{\mathbf{15}} = 7{,}2\widehat{6}$; periódico mixto.

h. $\frac{\mathbf{323}}{\mathbf{25}} = 12{,}92$; decimal exacto.

7 **Indica qué tipo de decimal representan los números propuestos y escribe las cuatro cifras decimales siguientes.**

a. 56,435 353 5…

56,435 353 535 35…, periódico mixto.

b. 89,656 565 65

89,656 565 650 000, decimal exacto.

c. 0,989 898 98…

0,989 898 989 898…, periódico puro.

d. –986,868 6

–986,868 600 00, decimal exacto.

e. 90,900 900 09…

Irracional.

f. –34,345 345…

–34,345 345 345 3…, periódico puro.

g. 8,182 838 4…

Irracional.

h. 0,647 878 78…

0,647 878 787 878…, periódico mixto.

8 Ordena estos números de menor a mayor, convirtiendo previamente los números decimales en fracciones:

$$\mathbf{\frac{10}{3};\ 0{,}2\widehat{7};\frac{11}{6};2{,}\widehat{4}\ ;\frac{15}{2};\ 0{,}58\widehat{3}}$$

$$0{,}2\widehat{7} = \frac{27-2}{90} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$$

$$2{,}\widehat{4} = \frac{24-2}{9} = \frac{22}{9}$$

$$0{,}58\widehat{3} = \frac{583-58}{900} = \frac{525}{900} = \frac{7}{12}$$

El orden de las fracciones de menor a mayor es:

$$\frac{10}{3};\ \frac{5}{18};\ \frac{11}{6};\ \frac{22}{9};\ \frac{15}{2};\frac{7}{12} \Rightarrow \frac{120}{36};\ \frac{10}{36};\ \frac{66}{36};\ \frac{88}{36};\ \frac{270}{36};\frac{21}{36} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{18} < \frac{7}{12} < \frac{11}{6} < \frac{22}{9} < \frac{10}{3} < \frac{15}{2}$$

9 Ordena los siguientes números decimales de menor a mayor.

a. 8,989 8…; 8,9; 8,933…; 8,967 67…

8,9 < 8,933… < 8,967 67… < 8,989 8…

b. $\mathbf{35{,}6;\quad 35{,}\widehat{6};\quad 35{,}5\widehat{6};\quad 35{,}\widehat{56}}$

$$35{,}\widehat{56} < 35{,}5\widehat{6} < 35{,}6 < 35{,}\widehat{6}$$

c. $\mathbf{-0{,}9\widehat{87};\quad -0{,}\widehat{9};\quad -0{,}9\widehat{8};\quad -0{,}\widehat{98}}$

$$-0{,}\widehat{9} < -0{,}\widehat{98} < -0{,}9\widehat{8} < -0{,}9\widehat{87}$$

10 Calcula la fracción generatriz correspondiente a los siguientes números decimales e indica qué tipo de número decimal es:

a. 12,345 $= \frac{12345}{1000} = \frac{2469}{200} \rightarrow$ Decimal exacto.

b. 0,333… $= 0{,}\widehat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \rightarrow$ Decimal periódico puro.

c. 34,2555… $= 34{,}2\widehat{5} = \frac{3\,425-342}{90} = \frac{3\,083}{90} \rightarrow$ Decimal periódico mixto.

d. 127,34 $= \frac{12\,734}{100} = \frac{6\,367}{50} \rightarrow$ Decimal exacto.

e. 9,213 13… $= 9,2\overset{\frown}{13} = \frac{9213-92}{990} = \frac{9121}{990}$ $\rightarrow$ Decimal periódico mixto.

f. 0,214 214… $= 0,\overset{\frown}{214} = \frac{214}{999}$ $\rightarrow$ Decimal periódico puro.

g. 0,898 989… $= 0,\overset{\frown}{89} = \frac{89}{99}$ $\rightarrow$ Decimal periódico puro.

h. 123,456… $\rightarrow$ No se puede escribir como fracción al ser un número irracional.

11 Dividid a la clase en grupos de 4 o5 alumnos y preparad un mural en el que expongáis cómo han ido evolucionando los números decimales a través de la historia.

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 75

12 Aproxima los siguientes números decimales por redondeo a las décimas, las centésimas y las milésimas:

a. 94,683 777… **b. 84,622 222…**

Número	Décimas	Centésimas	Milésimas
94,683777…	94,7	94,68	94,684
84,622222…	84,6	84,62	84,622

13 Las aproximaciones se utilizan en numerosas situaciones en las que los números deben expresarse con unas determinadas cifras decimales. Aproxima el resultado de las siguientes situaciones al número decimal que consideres correcto, analizando cada situación y explicando por qué eliges dicha aproximación:

a. Luis se ha gastado 45,678 € en la compra de hoy. ¿Cuánto ha pagado realmente?

Los euros tienen céntimos de euro, por lo que la unidad más pequeña que podemos utilizar son las centésimas.

Cuando se realiza una operación de dinero, siempre se redondea. Así, redondeamos a las centésimas, con lo que Luis habría pagado 45,68 €.

b. El profesor de lengua ha repartido algunos libros entre sus alumnos, que han tocado a 1,5 libros cada uno. ¿Cuántos ejemplares ha recibido cada uno?

Los libros no pueden dividirse, por lo que los alumnos recibirían 1 libro, y sobrarían libros sin repartir. De este modo, truncamos a las unidades.

c. Para pintar una casa, se necesitan 7,5 botes de pintura. ¿Cuántos botes de pintura tiene que comprar el pintor?

El pintor no puede comprar 7,5 botes, porque los botes no se pueden dividir. Deberíamos redondear porque si truncáramos, con 7 botes no podría pintar toda la casa. De este modo, redondeamos a 8, aunque le sobre pintura.

14 Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno, realizando las aproximaciones indicadas a las centésimas, tanto por truncamiento como por redondeo.

Número	Aproximación por truncamiento	Aproximación por redondeo
54,246	54,24	54,25
829,869	829,86	829,87
1 284,183	1 284,18	1 284,18

15 Actividad resuelta.

16 Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno. Entre tu compañero y tú realizad las distintas aproximaciones del número 42,425 913 9 por redondeo, calculando los errores absolutos correspondientes.

Redondeo a las...		Error absoluto
Décimas	42,4	0,025 913 9
Centésimas	42,43	0,004 086 1
Milésimas	42,426	0,000 086 1
Diezmilésimas	42,4259	0,000 013 9
Millonésimas	42,425 914	0,000 000 1

¿Qué conclusiones obtenéis?

Cuantas más cifras tengan las aproximaciones, menos error se comete, pues dicha aproximación está más cercana al número.

17 Realiza los ejercicios de aproximación con números decimales que encontrarás en la siguiente página web:

http://conteni2.educarex.es/mats/11862/contenido/

Respuesta abierta.

18 Expresa con notación científica estos números:

a. 28 000 000 = $2,8 \cdot 10^{7}$

b. 173 000 000 = $1,73 \cdot 10^{8}$

c. 9 000 000 000 = $9 \cdot 10^{9}$

d. 0,003 446 = $3,446 \cdot 10^{-3}$

e. 0,000 000 07 = $7 \cdot 10^{-8}$

f. 0,000 056 4 = $5,64 \cdot 10^{-5}$

SOLUCIONES PÁG. 76

19 Realiza estas sumas y restas de números decimales:

a. 2 848,274 – 742,26 = 2 106,014

b. 947,242 + 24,259 = 971,501

c. –82,93 – 2,922 = – 85,852

d. 833,739 – 28,299 = 805,44

e. –893,2 – 2 392,3 = – 3 285,5

f. 827,27 – 9 983,6 = – 9 156,33

20 Efectúa las siguientes operaciones con números decimales:

a. 482,375 – 264 + 274,27 – 274,266 = 756,645 – 538,266 = 218,379

b. 4 294,274 – (2 746,27 – 787,882) = 4 294,274 – 2 746,27 + 787,882 =

= 5 082,156 – 2 746,27 = 2 335,886

c. (2 958,284 – 927) – (–438,28) = 2 958,284 – 927 + 438,28 = 3 396,564 – 927 =
= 2 469,564

d. –(184,849 + 847,99 – 284,29) = –184,849 – 847,99 + 284,29 = –1 032,839 +
+ 284,29 = –748,549

e. 184,284 – 284,82 – (284,92 + 83,29) = 184,284 – 284,82 – 284,92 – 83,29 =
= 184,284 – 653,03 = –468,746

21 Averigua el valor de R para que las siguientes expresiones sean correctas:

a. 832,23 + R = 6 324,24

R = 6 324,24 – 832,23 = 5 492,01

b. 674,23 – R = 28,424

–R = 28,424 – 674,23; R = 674,23 – 28,424 = 645,806

c. R – 5,52 = 76,276

R = 76,276 + 5,52 = 81,796

d. R + 85,64 = –5,56

R = –5,56 – 85,64 = –91,2

22 Tres amigos han realizado una carrera de relevos: Juan ha relevado a María cuando esta había recorrido 424,23 m y Ana ha recogido el testigo de Juan cuando este llevaba 398,54 m.

a. Si la longitud de la carrera tenía un kilómetro, ¿cuánto ha recorrido Ana?

424,23 + 398,54 = 822,77 ⇒ 822,77 m

1 000 – 822,77 = 177,23 ⇒ 177,23 m

Ana ha recorrido 177,23 m.

b. ¿Qué metros de diferencia hay entre el que ha hecho un recorrido más largo y le que ha realizado un recorrido más corto?

424,23 – 177,23 = 247 ⇒ 247 m

La diferencia es de 247 m.

SOLUCIONES PÁG. 77

23 Calcula las siguientes multiplicaciones:

a. 87,23 · 9,03 = 787,686 9

b. 45,8 · 1,04 = 47,632

c. 8,1 · 0,12 = 0,972

d. 11,03 · 23,8 = 262,514

e. 89,309 · 29,02 = 2 591,747 18

f. 829,741 · 3,48 = 2 887,498 68

24 Averigua el valor de las multiplicaciones propuestas.

a. 0,032 · 100 = 3,2

b. 29,232 · 10 = 292,32

c. 2,8 · 1 000 = 2 800

d. 90,22 · 1 000 = 90 220

e. 8,52 · 10 000 = 85 200

f. 928,031 · 100 = 92 803,1

25 ¿Cuántos metros cuadrados tiene una cocina cuyas dimensiones son 2,2 m de ancho y 5,6 m de largo?

2,2 · 5,6 = 12,32. La cocina tiene una dimensión de 12,32 m^2.

26 Halla el valor de las siguientes potencias de números decimales:

a. $\mathbf{0{,}027^3}$ = 0,000 019 683

b. $\mathbf{7{,}28^4}$ = 2 808,830 402 56

c. $\mathbf{(-0{,}83)^3}$ = –0,571 787

d. $\mathbf{(-1{,}002)^3}$ = –1,006 012 008

e. $\mathbf{(-2{,}28)^2}$ = 5,198 4

f. $\mathbf{1{,}382^2}$ = 1,909 924

27 Calcula el volumen de un cubo cuya arista tiene un valor de a = 0,7 cm.

$V_{cubo} = l^3 \Rightarrow V_{cubo} = 0{,}7^3 = 0{,}343 \Rightarrow V_{cubo} = 0{,}343\ cm^3$

SOLUCIONES PÁG. 79

28 Realiza las siguientes divisiones de números decimales entre números enteros de modo que obtengas 3 cifras decimales:

a. 832,2 : 9 = 92,466

b. 385,218 : 43 = 8,958

c. 827,89 : 12 = 68,990

d. 274,24 : 213 = 1,287

e. 23,028 : 9 = 2,558

f. 58,098 : 28 = 2,074

g. 959,43 : 20 = 47,971

h. 0,086 : 31 = 0,002

i. 0,832 : 91 = 0,009

j. 48,209 : 89 = 0,541

29 Efectúa estas divisiones de números decimales hasta obtener dos cifras decimales:

a. 7,45 : 4,1 = 1,81

b. 456 : 21,1 = 21,61

c. 284,99 : 0,14 = 2 035,64

d. 928,22 : 3,5 = 265,20

e. 28,424 : 1,2 = 23,68

f. 0,273 : 3,6 = 0,07

g. 94,2 : 0,3 = 314

h. 8,213 : 0,59 = 13,92

i. 0,024 3 : 0,04 = 0,60

j. 848,2 : 9,2 = 92,19

k. 229,2 : 0,24 = 955

l. 2,987 2 : 1,73 = 1,72

30 Opera con las potencias de diez y los números decimales:

a. 975,23 : 100 = 9,752 3

b. 7 365,5 : 1 000 = 7,365 5

c. 92,482 : 100 = 0,924 82

d. 0,8 : 1 000 = 0,000 8

e. 97,004 : 10 = 9,700 4

f. 6,437 59 : 1 000 = 0,006 437 59

g. 39,2 : 100 000 = 0,000 392

h. 92,4 : 10 000 = 0,009 24

31 Calcula las siguientes expresiones con números decimales sin hacer las operaciones; limítate a desplazar la coma de lugar.

a. 92,47 : 0,01 = 9 247

b.197,42 · 0,001 = 0,197 420

c. 294,9 : 0,000 1 = 2 949 000

d. 9,804 : 0,000 01 = 980 400

e. 53,028 · 0,1 = 5,302 8

f. 0,827 : 0,000 1 = 8 270

g. 0,009 1 · 0,001 = 0,000 009 1

h. 85,97 : 0,01 = 8 597

32 Realiza las siguientes operaciones:

a. 72,213 44 : 100 = 0,722 134 4 **b. 2,7 : 1 000** = 0,002 7

Mientras, tu compañero efectuará estas otras:

c. 72,213 44 : 0,01 = 7 221,344 **d. 2,7 : 0,001** = 2 700

Comparad los resultados ¿Qué conclusiones obtenéis?

Dividir entre potencias de 10 con exponente positivo es igual que multiplicar por dicha potencia de 10, pero con exponente negativo. Dividir entre potencias de 10 con exponente negativo es igual que multiplicar por dicha potencia de 10 pero con exponente positivo.

33 Averigua el valor de R para que las siguientes expresiones sean correctas:

a. 132,98 · R = 8 449,549 2

R = 8 449,549 2 : 132,98 = 63,54

b. 0,710 5 : R = 28,42

R = 0,710 5 : 28,42 = 0,025

c. R : 7,092 = 16,125

R = 7,092 · 16,125 = 114,358 5

d. R · 28,202 = 45,123 2

R = 45,123 2 : 28,202 = 1,6

e. R : 0,009 = 49,027

R = 0,009 · 49,027 = 0,441 243

34 Elena tiene que repartir entre ella y cuatro compañeras de clase 12,57 m de papel continuo para realizar un trabajo de plástica.

a. ¿Cuántos metros le corresponde a cada una de las alumnas?

12,57 : 5 = 2,514

A cada alumna le corresponden 2,514 m.

b. Si la décima parte del papel se ha roto ¿Cuánto le corresponderá finalmente a cada amiga?

12,57 – 1,257 = 11,313 → Papel que se puede utilizar.

11,313 : 5 = 2,262 6

Le correspondería a cada alumna 2,262 6 m.

35 Arturo paga 690,24 € al mes por alquiler de su piso y quiere compartirlo con unos amigos para repartirse el gasto.

a. ¿Si quiere vivir con dos amigos más pero él aporta el doble que los demás, ¿cuánto pagará cada uno?

690,24 : 4 = 172,56

172,56 · 2 = 345,12

Cada uno de sus amigos pagaría 172,56 € y él pagaría 345,12 €.

b. Si un mes uno de sus amigos solo puede pagar la mitad que le corresponde, ¿a cuánto toca el resto?

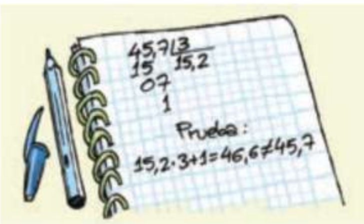
172,56 : 2 = 86,28 → El que solo puede pagar la mitad pagaría 86,28 €.

86,28 : 3 = 28,76 → Lo que aumenta cada parte son 28,76 €.

172,56 + 28,76 = 201,32 → El otro amigo pagará 201,32 €.

201,32 · 2 = 402,64 → Arturo pagará 402,64 €.

36 Carlos ha hecho una división con decimales; sin embargo, cuando realiza la prueba para comprobar si la ha efectuado de forma correcta, no obtiene el dividendo de la división. ¿Puedes ayudarlo a encontrar el fallo que está cometiendo?



El fallo está en que el resto no es 1, sino 0,1. Cuando realizamos una división con decimales, el resto tendrá tantas cifras decimales como tenga el cociente.

La prueba de la división correcta es:

15,2 · 3 + 0,1 = 45,7

37 Indica, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Multiplicar por 0,5 es igual que multiplicar por 2.

Falso. Multiplicar por 0,5 es dividir entre 2.

b. Dividir entre 0,1, es igual que multiplicar por 10.

Verdadero.

SOLUCIONES PÁG. 81

38 Realiza las siguientes operaciones combinadas con números decimales:

a. 827,24 + 284,2 · 3,6 – 581,7 : 2,1 = 827,24 + 1 023,12 – 277 = 1 850,36 – 277 = = 1 573,36

b. (13,4 – 4,67 + 32,5) · 3,12 = (45,9 – 4,67) · 3,12 = 41,23 · 3,12 = 128,637 6

c. (92,9 + 22,56 – 12,32) : 5,4 = (115,46 – 12,32) : 5,4 = 103,14 : 5,4 = 19,1

d. $3{,}366^2 : 3{,}3^2$ – 7,093 + 1,01 · 9,32 = 1,040 4 – 7,093 + 9,413 2 = 3,360 6

e. 0,09 · (3,27 + 4,9 – 0,001 3) – $9{,}3^2$ = 0,09 · (8,17 – 0,001 3) – 86,49 =

= 0,09 · 8,168 7 – 86,49 = 0,735 183 – 86,49 = –85,754 817

f. 9,818 5 : 3,65 – 37,337 5 : 1,03 = 2,69 – 36,25 = –33,56

g. 8,98 – 4,012 · 0,43 + 7,65 : 2,4 – (–8,97) = 8,98 – 1,725 16 + 3,187 5 + 8,97 = = 19,412 34

39 Efectúa las siguientes operaciones combinadas con números decimales y fracciones, convirtiendo dichos decimales en una fracción cuando sea necesario.

a. $\mathbf{\frac{7}{5}+9{,}86-3{,}\overset{\frown}{6}\cdot 1{,}0\overset{\frown}{3}-14{,}03:2{,}3}$

$$\frac{7}{5}+9{,}86-3{,}\overset{\frown}{6}\cdot 1{,}0\overset{\frown}{3}-14{,}03:2{,}3=1{,}4+9{,}86-\frac{36-3}{9}\cdot\frac{103-10}{90}-6{,}1=$$

$$=5{,}16-\frac{33}{9}\cdot\frac{93}{90}=\frac{516}{100}-\frac{11}{3}\cdot\frac{31}{30}=\frac{516}{100}-\frac{341}{90}=\frac{4\,644}{900}-\frac{3\,410}{900}=\frac{1234}{900}=\frac{617}{450}$$

b. $\mathbf{(1{,}\overset{\frown}{8}-2{,}1\overset{\frown}{2})-(3{,}4+9{,}02)+1{,}2:\frac{1}{5}}$

$$(1{,}\overset{\frown}{8}-2{,}1\overset{\frown}{2})-(3{,}4+9{,}02)+1{,}2:\frac{1}{5}=\left(\frac{18-1}{9}-\frac{212-21}{90}\right)-12{,}42+1{,}2\cdot 5=$$

$$=\frac{17}{9}-\frac{191}{90}-12{,}42+6=\frac{170}{90}-\frac{191}{90}-6{,}42=-\frac{21}{90}-\frac{642}{100}=-\frac{7}{30}-\frac{321}{50}=$$

$$=-\frac{35}{150}-\frac{963}{150}=-\frac{998}{150}=-\frac{499}{75}$$

c. $\mathbf{0{,}\overset{\frown}{7}-(0{,}8-3{,}2+0{,}8)^2-\frac{1}{2}+0{,}3\overset{\frown}{21}}$

$$0{,}\overset{\frown}{7}-(0{,}8-3{,}2+0{,}8)^2-\frac{1}{2}+0{,}3\overset{\frown}{21}=\frac{7}{9}-1{,}6^2-0{,}5+\frac{321-3}{990}=$$

$$=\frac{7}{9}-2{,}56-0{,}5+\frac{318}{990}=\frac{7}{9}-3{,}06+\frac{318}{990}=\frac{7}{9}-\frac{306}{100}+\frac{53}{165}=\frac{7}{9}-\frac{153}{50}+\frac{53}{165}=$$

$$=\frac{3\,850}{4\,950}-\frac{15147}{4\,950}+\frac{1590}{4\,950}=-\frac{9\,707}{4\,950}$$

d. $\left(0,\widehat{4}^2 : 2,2\right)^2 \cdot 5,2 - 1,102 : 5 \cdot 3,\widehat{7}$

$$\left(0,\widehat{4}^2 : 2,2\right)^2 \cdot 5,2 - 1,102 : 5 \cdot 3,\widehat{7} = \left[\left(\frac{4-0}{9}\right)^2 : \frac{22}{10}\right]^2 \cdot 5,2 - \frac{1102}{1000} : 5 \cdot \frac{37-3}{9} =$$

$$= \left(\frac{16}{81} : \frac{11}{5}\right)^2 \cdot 5,2 - \frac{551}{500} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{34}{9} = \left(\frac{80}{891}\right)^2 \cdot 5,2 - \frac{9\,367}{11\,250} =$$

$$= \frac{6\,400}{793\,881} \cdot 5,2 - \frac{9\,367}{11\,250} = \frac{33\,280}{793\,881} - \frac{9\,367}{11\,250} = -0,790\,7$$

40 Elías tiene un carro de la compra que soporta un máximo de 20 kg. Ha comprado 2 bolsas de naranjas de 0,750 kg cada una, 4,265 kg de pescado, 3 pollos que han pesado 1,893 kg, 2,104 kg y 1,978 kg, respectivamente; 3 paquetes de harina de 1 kg y 5 paquetes de pasta de 0,5 kg. ¿Cuánto peso le sobra en el carro?

20 – (2 · 0,750 + 4,265 + 1,893 + 2,104 + 1,978 + 3 · 1 + 5 · 0,5) =

= 20 – (1,5 + 4,265 + 1,893 + 2,104 + 1,978 + 3 + 2,5) = 20 – 17,24 = 2,76

Quedan disponibles 2,76 kg en el carro de la compra.

41 El metro es la medida de longitud en el Sistema Internacional de medidas. Sin embargo, otros países utilizan medidas como son;

1 pie = 0,304 8 m   1 yarda = 0,914 4 m

Convierte las siguientes medias en metros y redondea a las centésimas el resultado.

a. 2,5 pies

2,5 pies = 2,5 · 0,304 8 = 0,762 m ≈ 0,76 m

b. 4,6 yardas

4,6 yardas = 4,6 · 0,914 4 = 4,206 24 m ≈ 4,21 m

c. 4 pies + 2 yardas

4 pies + 2 yardas = 4 · 0,304 8 + 2 · 0,914 4 = 1,219 2 + 1,828 8 = 3,048 m ≈
≈ 3,05 m

d. 100 pies + 1 000 yardas

100 pies + 1 000 yardas = 100· 0,304 8 + 1 000 · 0,914 4 = 30,48 + 914,4 =
= 944,88 m

42 Cuatro amigos que comparten piso han realizado la compra del mes. Se han gastado 456,78 € entre los cuatro.

a. ¿Cuánto tiene que pagar cada uno?

456,78 : 4 = 114,195 ≈ 114,20 €

b. ¿Y si en vez de cuatro fueran tres amigos?

456,78 : 3 = 152,26 €

c. ¿Y si se uniera al grupo un amigo más?

91,356 ≈ 91,36 €

43 Adrián ha comprado en el mercado 4,69 kg de pollo a 2,95 €/kg, 2,38 kg de merluza a 18,59 €/kg y 2,56 kg de tomates a 0,67 €/kg.

a. ¿Cuánto ha pagado en total? Redondea el resultado al final a dos cifras decimales.

4,69 · 2,95 + 2,38 · 18,59 + 2,56 · 0,67 = 59,794 9

59,794 9 € ≈ 59,79 €

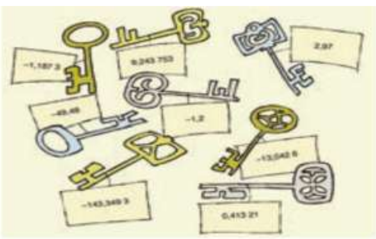
b. Realiza el apartado anterior, pero ahora redondea primero por separado el precio de cada artículo a dos cifras decimales en lugar de hacerlo al final ¿Qué diferencia hay?

4,69 · 2,95 = 13,835 5 ≈ 13,84 €; 2,38 · 18,59 = 44,244 2 ≈ 44,24 €

2,56 · 0,67 = 1,715 2 ≈ 1,72 €; 13,84 + 44,24 + 1,72 = 59,80 €

Hay una diferencia de un céntimo de euro.

44 Elisa tiene ocho llaves de ocho cajones de un escritorio. Cada llave dispone de una etiqueta con un número decimal y en cada cajón hay una operación combinada distinta. Entre tu compañero y tú haced una competición para comprobar quién de los dos logra asociar más llaves a su cajón en el menor tiempo posible.



0,45 + 7,8 – 6,7 · 3,178 = –13,042 6

(8,92 – 10,938) + 4,3 · 1,16 = 2,97

4,077 : 1,35 – 5,3 + 1,092 7 = –1,187 3

2,051 6 : (–8,92) + 0,643 21 = 0,413 21

9,236 4 + 0,009 · 0,817 = 9,243 753

9,7 – 53,08 + 19,52 : (–3,2) = –49,48

(3,5 + 9,208) : (9,17 – 19,76) = –1,2

8,3 · (9,301 – 7,302 – 19,27) = –143,349 3

SOLUCIONES PÁG. 82

1 **Realiza las siguientes operaciones con decimales ayudándote de la calculadora:**

a. 3 274,284 · 284,245 7 – 242,384 23 = 930 458,763 348 8

b. 1 635,875 : 2,5 + 65,7 · 32,8 = 2 809,31

c. (6 498,866 5 – 5 542,986 5) · 0,2 = 191,176

2 **Efectúa las siguientes operaciones utilizando la calculadora y expresa el resultado en notación científica:**

a. $\mathbf{2{,}2323 \cdot 10^{6} + 1{,}34 \cdot 10^{5} + 2{,}23 \cdot 10^{4}}$ = $2{,}388\,6 \cdot 10^{6}$

b. $\mathbf{123{,}242 \cdot 10^{-2} + 0{,}482 \cdot 10^{-5}}$ = $1{,}232\,424\,82$

c. $\mathbf{0{,}000\,002 \cdot 10^{9} - 2\,194{,}48 \cdot 10^{2}}$ = $-2{,}174\,48 \cdot 10^{5}$

SOLUCIONES PÁG. 83

1 **Escribe cinco números decimales que estén comprendidos entre 3,4 y 3,5. ¿Cuántos números decimales distintos podrías escribir entre dos números decimales cualesquiera?**

Entre dos números decimales existen infinitos números decimales.

Por ejemplo, entre 3,4 y 3,5 podemos situar los siguientes números decimales:

3,45; 3,468; 3,4097; 3,421; 3,486

2 **Indica mediante ejemplos cómo expresar en notación científica:**

a. Números muy grandes.

Para números grandes, se mueve la coma hacia la derecha hasta obtener una única cifra entera distinta de cero. El número de lugares desplazado indica el exponente de la potencia de 10. Por ejemplo: 459 000 000 = $4{,}59 \cdot 10^{8}$

b. Números muy pequeños.

Para números pequeños, se realiza de la misma forma, pero moviendo la coma hacia la izquierda y teniendo en cuenta que el exponente de la potencia de 10 tiene signo negativo. Por ejemplo: 0,000 067= $6{,}7 \cdot 10^{-5}$

3 **Explica con ejemplos la diferencia entre redondear o truncar números decimales.**

La diferencia es que si la aproximación es por exceso, es más preciso el redondeo que el truncamiento, mientras que si es por defecto, la precisión es la misma.

4 Las siguientes fracciones dan lugar a números decimales exactos:

$$\frac{13}{8}, \frac{8}{25}, \frac{127}{20}$$

¿Qué tienen en común? Enuncia una ley que explique cómo saber si una fracción equivale a un decimal exacto con solo observar su denominador.

Si descomponemos los denominadores: $8 = 2^3$ $\quad 25 = 5^2$ $\quad 20 = 2^2 \cdot 5$

Se observa que todos tienen como divisores potencias de 2 y/o potencias de 5. Esto quiere decir que se puede obtener fracciones equivalentes a las anteriores que tengan como denominador potencias de 10, por lo que se trata de decimales exactos.

$$\frac{13}{8} = \frac{13}{2^3} = \frac{13 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{1\,625}{1\,000} = 1{,}625 \qquad \frac{8}{25} = \frac{8 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{32}{100} = 0{,}32$$

$$\frac{127}{20} = \frac{127 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{635}{100} = 6{,}35$$

5 Enuncia leyes como en la actividad anterior que indiquen cómo reconocer si una fracción equivale a un decimal periódico puro o mixto teniendo en cuenta que:

• Las siguientes fracciones dan lugar a números decimales periódicos puros:

$$\frac{58}{3}, \frac{23}{9}, \frac{17}{11}$$

• Con estas otras se obtienen números decimales periódicos mixtos:

$$\frac{89}{6}, \frac{47}{15}, \frac{977}{60}$$

Al descomponer los denominadores en factores se observa que:

• Para el caso de los decimales periódicos puros, los denominadores tienen en su descomposición cualquier cifra que no sea 2 o 5.

$$\frac{58}{3} = 19{,}\widehat{3} \qquad \frac{23}{9} = 2{,}\widehat{5} \qquad \frac{17}{11} = 1{,}\widehat{54}$$

• Para el caso de los decimales periódicos mixtos, los denominadores tienen en su descomposición cualquier cifra además de tener potencias de 2 y/o de 5. De este modo, completamos estas potencias de 2 y/o 5 para que sean potencias de 10 y así se desplaza la coma, dando lugar a un periódico mixto en lugar de un periódico puro.

$$\frac{89}{6} = \frac{89}{3 \cdot 2} = \frac{89 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{445}{3} : 10 = 148{,}\widehat{3} : 10 = 14{,}8\widehat{3}$$

$$\frac{47}{15} = \frac{47}{3 \cdot 5} = \frac{47 \cdot 2}{3 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{94}{3} : 10 = 31{,}\widehat{3} : 10 = 3{,}1\widehat{3}$$

$$\frac{977}{60} = \frac{977}{6 \cdot 10} = \frac{977}{6} : 10 = 162{,}8\widehat{3} : 10 = 16{,}28\widehat{3}$$

6 Ilustra con ejemplos cómo hallar la fracción generatriz de los distintos números decimales.

Para hallar la fracción generatriz de un número decimal consideramos los distintos tipos de decimales:

- Decimal exacto: en el numerador escribimos el número sin la coma y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga.

$$87,52 = \frac{8752}{100} = \frac{2188}{25}$$

- Decimal periódico puro: en el numerador escribimos el número sin la coma menos la parte entera y en el denominador tantos 9 como cifras tenga el período.

$$13,\widehat{7} = \frac{137 - 13}{9} = \frac{124}{9}$$

- Decimal periódico mixto: en el numerador escribimos el número sin la coma menos la parte entera y el anteperíodo y en el denominador tantos 9 como cifras tenga el período y tantos 0 como cifras tenga el anteperíodo.

$$8,6\widehat{54} = \frac{8654 - 86}{990} = \frac{8568}{990} = \frac{1428}{165} = \frac{476}{55}$$

7 Realiza una presentación digital para tus compañeros sobre la aplicación de los números decimales en distintas situaciones de la vida cotidiana. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…

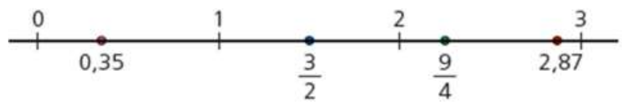
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 84 – REPASO FINAL

REPRESENTACIÓN Y ORDENACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

1 Representa en una misma recta numérica los siguientes números decimales:

$$\mathbf{0,35;\ 2,87;\ \frac{3}{2};\ \frac{9}{4}}$$



2 **Ordena de mayor a menor estos números decimales:**

a. $\mathbf{5{,}6 \quad 5{,}\overset{\frown}{6} \quad 5{,}5\overset{\frown}{6} \quad 5{,}\overset{\frown}{56}}$

$5{,}\overset{\frown}{6} > 5{,}6 > 5{,}5\overset{\frown}{6} > 5{,}\overset{\frown}{56}$

b. 0,033 4   0,033…   0,034 34…   0,034 4…

0,034 4… > 0,034 34… > 0,033 4 > 0,033…

c. –6,77…   –6,752   –6,872   –6,744…

–6,744… > –6,752 > –6,77… > –6,872

d. $\mathbf{-6{,}\overset{\frown}{8} \quad -6{,}\overset{\frown}{89} \quad -6{,}\overset{\frown}{9} \quad -6{,}8\overset{\frown}{9}}$

$-6{,}\overset{\frown}{8} > -6{,}\overset{\frown}{89} > -6{,}8\overset{\frown}{9} > -6{,}\overset{\frown}{9}$

EXPRESIÓN DECIMAL DE UNA FRACCIÓN. FRACCIÓN GENERATRIZ

3 **Atendiendo a las leyes deducidas en las actividades 4 y 5 de *Aprendo a aprender,* indica, sin hacer la división, qué tipo de decimal corresponde a cada una de las siguientes fracciones:**

a. $\mathbf{\frac{87}{22}}$ → Periódico mixto.

b. $\mathbf{\frac{781}{75}}$ → Periódico mixto.

c. $\mathbf{\frac{128}{9}}$ → Periódico puro.

d. $\mathbf{\frac{99}{20}}$ →Decimal exacto.

4 **Halla la expresión decimal de las fracciones de la actividad anterior para comprobar que el resultado obtenido es el correcto.**

a. $\frac{87}{22} = 3{,}9\overset{\frown}{54}$

b. $\frac{781}{75} = 10{,}41\overset{\frown}{3}$

c. $\frac{128}{9} = 14{,}\overset{\frown}{2}$

d. $\frac{99}{20} = 4{,}95$

5 **Expresa mediante una fracción irreducible los siguientes números decimales:**

a. $\mathbf{89{,}\overset{\frown}{21}} = \frac{8\,921-89}{99} = \frac{8\,832}{99} = \frac{2\,944}{33}$

b. $\mathbf{0{,}\overset{\frown}{879}} = \frac{879}{999} = \frac{293}{333}$

c. $\mathbf{0{,}67\overset{\frown}{34}} = \frac{6\,734-67}{9\,900} = \frac{6\,667}{9\,900}$

d. $\mathbf{5{,}422\,2} = \frac{54\,222}{10\,000} = \frac{27\,111}{5\,000}$

e. $1{,}23\widehat{456} = \frac{123\,456 - 123}{99\,900} = \frac{123\,333}{99\,900} = \frac{41\,111}{33\,300}$

f. $65{,}87\widehat{5} = \frac{65\,875 - 6\,587}{900} = \frac{59\,288}{900} = \frac{14\,822}{225}$

g. $38{,}\widehat{8} = \frac{388 - 38}{9} = \frac{350}{9}$

h. $7{,}98 = \frac{798}{100} = \frac{399}{50}$

APROXIMACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES. NOTACIÓN CIENTÍFICA

6 Redondea los siguientes números a las unidades que se indican:

	$9{,}7\widehat{6}$	$18{,}23\widehat{54}$	$9{,}06\widehat{5}$
Décimas	9,8	18,2	9,1
Centésimas	9,77	18,24	9,07
Milésimas	9,767	18,235	9,066

7 Jaime quiere comprar tomates a 1,29 €/kg. Pide un kilo al dependiente, pero en la báscula pone 1,036 kg.

a. ¿Cuánto tiene que pagar Jaime si el dependiente aproxima el redondeo?

1,29 · 1,036 = 1,336 44 €. Redondeando Jaime paga 1,34 €.

b. ¿Pagaría lo mismo si truncara el resultado?

Truncando Jaime paga 1,33 €.

c. ¿En qué casos daría igual que el dependiente redondeara o truncara?

El truncamiento y el redondeo sería el mismo en el caso de que la cifra de las milésimas fuera menor que 5.

8 Utilizando la notación científica, escribe los diámetros de los siguientes tipos de células en metros. Recuerda que una micra es la millonésima parte de un metro.

a. Bacteria de 1 micra.

1 micra = 0,000 001 = 10^{-6} m

b. Espermatozoide de 50 micras.

50 micras = 0,000 050 = $5 \cdot 10^{-5}$ m

c. Óvulo de 150 micras.

150 micras = 0,000 150 = $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ m

d. Grano de polen de 300 micras.

300 micras = 0,000 300 = $3 \cdot 10^{-4}$ m

9 **Indica las siguientes distancias en metros mediante la notación científica:**

a. Diámetro de la Tierra: 12 742 km

12 742 000 m = $1{,}274\,2 \cdot 10^{7}$ m

b. Diámetro del Sol: 1 392 000 km

1 392 000 000 m = $1{,}392 \cdot 10^{9}$ m

c. Distancia media de la Tierra al Sol: 149 600 000 km

149 600 000 000 m = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m

d. Distancia de la Tierra a la Luna: 384 400 km

384 400 000 m = $3{,}844 \cdot 10^{8}$ m

OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

10 **Efectúa las siguientes operaciones con decimales:**

a. –(223,294 + 1 841,14 – 4) + (33,13 – 98) = –2 060,434 – 64,87 = –2 125,304

b. 426,385 · (–5,32) + 38,385 · (–10,42) = – 2 268,368 2 – 399,971 7 =
= –2 668,339 9

c. –710,747 2 : (–12,64) + 372,38 – 628,29 = 56,23 + 372,38 – 628,29 = –199,68

d. 284,92 – 274,2 · (224,92 – 242,47) = 284,92 – 274,2 · (–17,55) = 5 097,13

e. (313,096 5 – 364,691) : 1,25 – 2 284,928 = (–51,594 5) : 1,25 – 2 284,978 =
= –41,275 6 – 2 284,928 = –2 326,203 6

f. $\mathbf{30{,}05 + 0{,}564 \cdot 100 - (-2{,}35 + 7{,}4)^2}$ = 30,05 + 56,4 – 25,502 5 = 60,947 5

g. $\mathbf{2\,477 : 10^{-5} - 24{,}77 \cdot (10^{-8} \cdot 40^{4})^{2}}$ = $2{,}477 \cdot 10^{8} - 24{,}77 \cdot (0{,}0256)^{2} = 2{,}477 \cdot 10^{8} -$
$- 1{,}62332672 \cdot 10^{-2}$ = 247 700 000

11 **Realiza estas multiplicaciones y divisiones limitándote a mover de lugar la coma:**

a. 3 824,284 : 0,01 = 382 428,4

b. 0,284 7 · 100 000 = 28 470

c. 972,247 : 10 000 = 0,097 224 7

d. 284,284 · 0,001 = 0,284 284

e. 0,23 : 100 = 0,002 3

f. 294,24 : 0,000 1 = 2 942 400

g. 390,274 · 0,01 = 3,902 74

h. 0,002 4 · 1 000 = 2,4

SOLUCIONES PÁG. 85

12 Realiza las siguientes operaciones con decimales, ayudándote de la calculadora:

a. 4 456,378 · 236,257 7 – 242,356 27 = 10 528 536,617 – 242,356 27 =

= 1 052 611,26

b. 2 445,848 : 2,4 + 38,7 · 39,2 = 1 019,103 3 + 1 517,04 = 2 536,143 333

c. (6 562,225 5 – 5 128,927 9) · 0,25 = 1 433,297 6 · 0,25 = 358,324 4

d. $\mathbf{5{,}28 \cdot 10^{3} + 2\,847 \cdot 10^{-2} - 0{,}281 \cdot 10^{5}}$ = 5 280 + 28,47 – 28 100 = –22 791,53

13 Efectúa las siguientes operaciones utilizando la calculadora y expresa el resultado en notación científica:

a. $\mathbf{2{,}334\,3 \cdot 10^{-6} + 1{,}76 \cdot 10^{5} + 2{,}34 \cdot 10^{-8}}$ $= 1{,}76 \cdot 10^{5}$

b. $\mathbf{225{,}947 \cdot 10^{-3} + 0{,}014 \cdot 10^{-5}}$ = 0,225 947 14

c. $\mathbf{0{,}254\,002 \cdot 10^{9} - 2\,254{,}48 \cdot 10^{-5}}$ $= 2{,}540\,02 \cdot 10^{8}$

d. $\mathbf{158{,}56 \cdot 10^{-4} \cdot 114{,}87 \cdot 10^{-2} \cdot 72{,}741 \cdot 10^{3}}$ $= 1{,}324\,889\,095 \cdot 10^{3}$

14 La peseta fue la unidad monetaria en España desde 1868 hasta el 1 de enero de 1999, cuando se introdujo el euro. La equivalencia entre euros y pesetas es la siguiente: 1 € = 166,386 pesetas

Convierte las pesetas a euros en las siguientes situaciones:

a. Al tío de Juan le daban 2 000 pesetas de paga cuando tenía 16 años.

2 000 : 166,386 = 12,020 24… ≈ 12,02 €

b. La abuela de Francisco pagaba 25 pesetas por una barra de pan.

25 : 166,386 = 0,150 25… ≈ 0,15 €

c. A los padres de Elisa su piso les costó 20 millones de pesetas.

20 000 000 : 166,386 = 120 202,420 8… ≈ 120 202,42 €

15 Para medir la temperatura, no siempre se utilizan los grados Celsius; en los países anglosajones se suelen emplear los grados Fahrenheit. Para pasar de una escala a otra, se hace uso de las siguientes expresiones:

1 ºF = 1,8 ºC + 32 **1 ºC = (ºF – 32) : 1,8**

Donde ºC indica que la temperatura está expresada en grados Celsius, y ºF, que lo está en grados Fahrenheit. Convierte estas temperaturas de una escala a otra:

a. 36,5 ºC

1,8 · 36,5 ºC + 32 = 97,7 ºF

b. 20,4 ºC

1,8 · 20,4 ºC + 32 = 68,72 ºF

c. –14,7 ºC

1,8 · (–14,7) ºC + 32 = 5,54 ºF

d. –30,6 ºC

1,8 · (–30,6) ºC + 32 = –23,08 ºF

e. 99,6 ºF

$37,\widehat{5}$ °C

f. 32,1 ºF

$0,0\widehat{5}$ °C

g. 274,8 ºF

$134,\widehat{8}$ °C

h. 20,9 ºF

$-6,1\widehat{6}$ °C

EVALUACIÓN

1 Indica cuál de los siguientes números decimales no se encuentra entre los números 3,555 5... y 3,656 56…

a. 3,666… **b. 3,566 6…** **c. 3,655 5…** **d. 3,65**

2 La fracción irreducible del número decimal 8,1666… es:

a. $\frac{49}{6}$ **b.** $\mathbf{\frac{136}{15}}$ **c.** $\mathbf{\frac{816}{90}}$ **d.** $\mathbf{\frac{3}{2}}$

$$8,1666... = 8,1\widehat{6} = \frac{816-81}{90} = \frac{735}{90} = \frac{49}{6}$$

3 Efectúa la siguiente operación y expresa el resultado en notación científica:

6,158 : 1 000 – 0,003 5 · 0,012

a. 0,006 116 b. $6,116 \cdot 10^{-3}$ **c.** $\mathbf{6,162\ 2 \cdot 10^{-3}}$ **d.** $\mathbf{6,162\ 2 \cdot 10^{-2}}$

6,158 : 1 000 – 0,003 5 · 0,012 = $6,158 \cdot 10^{-3} - 4,2 \cdot 10^{-5} = 6,116 \cdot 10^{-3}$

4 Realiza esta operación expresando los decimales como fracciones y simplifica el resultado:

0,333… + 1,833… + 7,5

a. $\frac{12663}{1000}$ **b.** $\frac{870}{90}$ **c.** $\frac{887}{90}$ d. $\frac{29}{3}$

$$0,333...+1,833...+7,5=0,\widehat{3}+1,8\widehat{3}+7,5=\frac{3}{9}+\frac{183-18}{90}+\frac{75}{10}=\frac{1}{3}+\frac{165}{90}+\frac{15}{2}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{11}{6}+\frac{15}{2}=\frac{2}{6}+\frac{11}{6}+\frac{45}{6}=\frac{58}{6}=\frac{29}{3}$$

5 Expresa el resultado de operación anterior en forma decimal y redondea a las centésimas:

a. 9,67 **b. 12,66** **c. 9,66** **d. 9,86**

$$\frac{29}{3}=9,666...\approx 9,67$$

6 Elena quiere repartir a partes iguales una finca de 471,48 ha entre sus nietos, de modo que cada uno reciba una parcela de 5 893,5 dam^2 ¿Cuántos nietos tiene Elena?

a. 4 **b. 6** c. 8 **d. 3**

1 ha = 100 dam^2

47 148 dam^2 : 5 893,5 dam^2 = 8

7 Daniel ha comprado 30 kg de café a 5,67 €/kg. Si por su comercialización posterior ha obtenido unos beneficios de 104,4 €, ¿a cuánto ha vendido el kilo de café?

a. A 3,48 €/kg **b. A 18,41 €/kg** **c. A 2,19 €/kg** d. A 9,15 €/kg

30 kg · 5,67 €/kg = 170,1 €

170,1 € + 104,4 € = 274,5 €

274,5 € : 30 kg = 9,15 €/kg

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 5. Proporcionalidad

Unidad 5. Proporcionalidad

SOLUCIONES PÁG. 89

1 Juan trabaja en una empresa de coches. Si pinta 42 coches por semana, ¿cuántos coches pintará al mes?

Nota: considera que un mes tiene 4 semanas.

$$42\frac{\text{coches}}{\cancel{\text{semana}}}\cdot 4\ \cancel{\text{semana}} = 168\ \text{coches}$$

En un mes pintará 168 coches.

2 Realiza el siguiente problema con una regla de tres mientras tu compañero lo resuelve mediante factores de conversión. Comprobad que el resultado es el mismo:

Un grifo abierto gasta unos 12 L de agua por minuto. ¿Cuántos litros se derrocharán si se deja el grifo abierto durante 2 h?

Regla de tres:

$12\ \text{L} \rightarrow 1\ \text{min}$

$x\ \text{L} \rightarrow 120\ \text{min}$

$$\frac{12}{x} = \frac{1}{120} \Rightarrow x = 1\,440\ \text{L}$$

Factores de conversión:

$$12\frac{\text{litros}}{\cancel{\text{minuto}}}\cdot 2\ \cancel{\text{horas}}\cdot\frac{60\ \cancel{\text{minutos}}}{1\cancel{\text{hora}}} = 1\,440\ \text{L}$$

Se derrocharán 1 440 L.

3 Iván ha ido al mercado y ha comprado 3 kg de naranjas a 2,30 €/kg. ¿Cuánto le han costado las naranjas? ¿Y si hubiera comprado 2 kg más?

$$2{,}3\frac{€}{\cancel{\text{kg}}}\cdot 3\ \cancel{\text{kg}} = 6{,}9\ €$$

$$2{,}3\frac{€}{\cancel{\text{kg}}}\cdot 5\ \cancel{\text{kg}} = 11{,}5\ €$$

Le han costado 6,9 €. Si hubiera comprado 2 kg más, le costaría 11,5 €.

4 Realiza las siguientes conversiones de unidades de medida utilizando factores de conversión:

a. 54 hm a m

$$54\ \cancel{\text{hm}}\ \frac{100\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{hm}}} = 5\,400\ \text{m}$$

b. 294 cL a dL

$$294\ \cancel{\text{cL}}\ \frac{1\ \text{dL}}{10\ \cancel{\text{cL}}} = 29{,}4\ \text{dL}$$

c. 383 kg a cg

$$383\ \cancel{\text{kg}}\ \frac{100\,000\ \text{cg}}{1\ \cancel{\text{kg}}} = 38\,300\,000\ \text{cg}$$

d. 46 km^2 a hm^2

$$46\ \cancel{\text{km}^2}\ \frac{100\ \text{hm}^2}{1\ \cancel{\text{km}^2}} = 4\,600\ \text{hm}^2$$

e. 3 482 mm^3 a cm^3

$$3\,482\ \cancel{\text{mm}^3}\ \frac{1\ \text{cm}^3}{1000\ \cancel{\text{mm}^3}} = 3{,}482\ \text{cm}^3$$

f. 32 hL a cm^3

$$32\ \cancel{\text{hL}}\ \frac{100\ \cancel{\text{L}}}{1\ \cancel{\text{hL}}}\ \frac{1\ \cancel{\text{dm}^3}}{1\ \cancel{\text{L}}}\ \frac{1\,000\ \text{cm}^3}{1\ \cancel{\text{dm}^3}} = 3\,200\,000\ \text{cm}^3$$

SOLUCIONES PÁG. 90

5 Elena quiere realizar en moto un trayecto de 120 km. Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla en la que se calcula el tiempo que tardaría en hacer dicho trayecto dependiendo de la velocidad a la que vaya:

$$\frac{100\ \text{km}}{1\ \text{h}} = \frac{120\ \text{km}}{x\ \text{h}} \Rightarrow x = \frac{120\ \text{km} \cdot 1\ \text{h}}{100\ \text{km}} = 1{,}2\ \text{h}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{1}{1{,}2} \Rightarrow x = 100 \cdot 1{,}2 = 120\ \text{km/h}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{3}{1{,}2} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 1{,}2}{3} = 40\ \text{km/h}$$

$$\frac{1{,}2}{x} = \frac{80}{100} \Rightarrow x = \frac{1{,}2 \cdot 100}{80} = 1{,}5\ \text{h}$$

$$\frac{100}{x} = \frac{4}{1{,}2} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 1{,}2}{4} = 30\ \text{km/h}$$

Velocidad (km/h)	100	120	40	80	30
Tiempo (h)	1,2	1	3	1,5	4

a. ¿Qué tipo de proporcionalidad es?

Proporcionalidad inversa.

b. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

k = 100 · 1,2 = 120

6 Joaquín, Eva y Federico pagan entre los tres 1 260 € de alquiler por su piso.

a. Si María se va a vivir con ellos compartiendo gastos, ¿cuánto tendrán que pagar cada uno?

$$\frac{4 \text{ personas}}{1 \text{ persona}} = \frac{1\,260 \text{ €}}{x \text{ €}} \Rightarrow x = \frac{1\,260 \cdot 1}{4} = 315$$

Cada uno tendrá que pagar 315 €.

b. ¿Y si se quedaran en el piso solo Joaquín y Eva?

$$\frac{2 \text{ personas}}{1 \text{ persona}} = \frac{1\,260 \text{ €}}{x \text{ €}} \Rightarrow x = \frac{1260 \cdot 1}{2} = 630$$

Si se quedaran Joaquín y Eva pagarían 630 € cada uno.

c. Elabora una tabla de proporcionalidad en la que aparezca lo que pagarían de alquiler si fueran en total 5, 6 o 7 inquilinos.

1 260 : 5 = 252; 1 260 : 6 = 210; 1 260 : 7 = 180

N.° de inquilinos	5	6	7
Alquiler por persona	252	210	180

SOLUCIONES PÁG. 91

7 Un teatro de cierta ciudad tiene tres pases diarios, con lo que pueden disfrutar de la obra 24 750 espectadores en 15 días. ¿Cuántos espectadores podrán asistir a la obra durante 45 días si solo se representara 2 veces al día?

Sesiones	Personas	Días
3	24 750	15
2	x	45

Tanto las magnitudes personas y días como las magnitudes sesiones y personas, son directamente proporcionales.

$$\frac{24750}{x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{15}{45}\Rightarrow x=\frac{24750\cdot 90}{45}=49\,500$$

Podrán asistir 49 500 personas.

8 Alba y Teresa quedan para realizar 8 ejercicios de Matemáticas y tardan 2 h en hacerlos. ¿Cuánto tiempo emplearían en terminar 15 ejercicios si Iván se une a ellas para ayudarlas?

Amigos	Ejercicios	Minutos
2	8	120
3	15	x

Las magnitudes amigos y horas son inversamente proporcionales, y las magnitudes ejercicios y horas, son directamente proporcionales.

$$\frac{8}{15}\cdot\frac{3}{2}=\frac{120}{x}\Rightarrow x=\frac{120\cdot 30}{24}=150$$

$$\frac{150\,\cancel{\text{min}}\cdot 1\text{ h}}{60\,\cancel{\text{min}}}=2{,}5\text{ h}$$

Tardarían 2,5 h, es decir, 2 horas y 30 min.

9 En una granja se almacenan 35 000 kg de pienso para alimentar a 35 caballos durante 8 meses.

a. ¿Cuántos meses durarían 100 000 kg de pienso si se compraran 20 caballos más?

kg pienso	Caballos	Meses
35 000	35	8
100 000	55	x

Las magnitudes kilogramo de pienso y meses son directamente proporcionales, y las magnitudes caballos y meses, son inversamente proporcionales.

$$\frac{8}{x}=\frac{35000}{100000}\cdot\frac{55}{35}\Rightarrow\frac{8}{x}=\frac{11}{20}\Rightarrow x=14{,}54$$

Durarían 14,54 meses.

b. Si la granja vendiera algunos caballos y se quedara solo con 18, ¿cuánto pienso necesitaría para 5 meses?

kg pienso	Caballos	Meses
35 000	35	8
x	18	5

Las magnitudes pienso y meses son directamente proporcionales, al igual que las magnitudes pienso y caballos.

$$\frac{35000}{x} = \frac{35}{18} \cdot \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{35000}{x} = \frac{28}{9} \Rightarrow x = 11\,250$$

Necesitaría 11 250 kg de pienso.

10 Para calcular la velocidad que lleva un móvil, se utiliza la siguiente expresión, donde *v* = velocidad, *e* = espacio y *t* = tiempo:

$$v = \frac{e}{t}$$

Observando la expresión, indica, justificando tu respuesta, qué magnitudes son directamente proporcionales entre sí y cuáles son inversamente proporcionales.

La velocidad y el tiempo son inversamente proporcionales, ya que al aumentar el tiempo, la velocidad disminuye. La velocidad y el espacio son directamente proporcionales, pues al aumentar el espacio, la velocidad aumenta. El tiempo y el espacio son directamente proporcionales.

11 Tres operarios tardan 3 h en embotellar 2 000 L de vino.

a. ¿Cuánto tiempo tardarían en embotellar 10 000 L de vino 5 operarios?

Operarios	Horas	Litros vino
3	3	2 000
5	x	10 000

Las magnitudes operarios y horas son inversamente proporcionales y las magnitudes horas y litros son directamente proporcionales.

$$\frac{3}{x} = \frac{2000}{10000} \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{10000}{30000} \Rightarrow x = 9$$

Tardarán 9 h.

b. ¿Cuántos operarios se necesitarían para embotellar 20 000 L de vino en18 h?

Operarios	Horas	Litros vino
3	3	2 000
x	18	20 000

Las magnitudes operarios y horas son inversamente proporcionales y las magnitudes operarios y litros son directamente proporcionales.

$$\frac{3}{x} = \frac{18}{3} \cdot \frac{2000}{20000} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{36000}{60000} \Rightarrow x = 5$$

Necesitarían 5 operarios.

c. ¿Cuántos litros habrán embotellado 6 operarios en 12 h?

Operarios	Horas	Litros vino
3	3	2 000
6	12	*x*

Tanto las magnitudes operarios y litros, como las magnitudes horas y litros son directamente proporcionales.

$$\frac{2000}{x} = \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{2000}{x} = \frac{9}{72} \Rightarrow x = 16\,000$$

Habrán embotellado 16 000 L.

SOLUCIONES PÁG. 93

12 Efectúa los siguientes porcentajes:

a. 46 % de 382

$$\frac{382 \cdot 46}{100} = 175{,}72$$

b. 78 % de 1 908

$$\frac{1908 \cdot 78}{100} = 1\,488{,}24$$

c. 21 % de 5 676

$$\frac{5676 \cdot 21}{100} = 1\,191{,}96$$

d. 12 % de 9 387

$$\frac{9387 \cdot 12}{100} = 1\,126{,}44$$

e. 35 % de 819

$$\frac{819 \cdot 35}{100} = 286{,}65$$

f. 90 % de 1 450

$$\frac{1450 \cdot 90}{100} = 1\,305$$

13 Calcula el porcentaje que representan las siguientes cantidades, redondeando a las décimas si fuera necesario:

a. 33 con respecto a 264

$$\frac{264}{33} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 12{,}5\ \%$$

b. 284 con respecto a 9 289

$$\frac{9289}{284} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 3{,}1\ \%$$

c. 8 975 con respecto a 28 429

$$\frac{28429}{8975} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 31{,}6\ \%$$

d. 78 con respecto a 741

$$\frac{741}{78} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 10{,}5\ \%$$

e. 12 con respecto a 689

$$\frac{689}{12} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 1{,}7\ \%$$

f. 9 con respecto a 180

$$\frac{180}{9} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 5\ \%$$

14 El 35 % de los alumnos de un instituto juega al fútbol, el 15 % prefiere el baloncesto, el 23 % practica natación, y el 8 % hace karate.

a. ¿Qué porcentaje representan los alumnos que no realizan ningún deporte?

35 % + 15 % + 23 % + 8 % = 81 %; 100 % – 81 % = 19 %

El 19 % no realiza ningún deporte.

b. Si en el instituto hay 700 alumnos, calcula cuántos de ellos practican cada disciplina deportiva.

$$\frac{35}{100} = \frac{x}{700} \Rightarrow x = 245$$

$$\frac{15}{100} = \frac{x}{700} \Rightarrow x = 105$$

$$\frac{23}{100} = \frac{x}{700} \Rightarrow x = 161$$

$$\frac{8}{100} = \frac{x}{700} \Rightarrow x = 56$$

$$\frac{19}{100} = \frac{x}{700} \Rightarrow x = 133$$

245 juegan al fútbol, 105 juegan al baloncesto, 161 practican natación, 56 hacen karate y 133 no practican ningún deporte.

15 Calcula el total sabiendo que los porcentajes propuestos equivalen a las cantidades que se indican.

a. El 57 % es 456

$$\frac{57}{100} = \frac{456}{x} \Rightarrow x = 800$$

b. El 8 % es 183

$$\frac{8}{100} = \frac{183}{x} \Rightarrow x = 2\,287{,}5$$

c. El 52 % es 468

$$\frac{52}{100} = \frac{468}{x} \Rightarrow x = 900$$

d. El 13 % es 923

$$\frac{13}{100} = \frac{923}{x} \Rightarrow x = 7\,100$$

16 Si a una cantidad se le aplica un aumento del 20 % y luego otro del 35 %, ¿se obtendría un resultado equivalente a aplicarle un incremento del 55 %? Justifica tu respuesta mediante un ejemplo.

Si aplicamos un aumento del 20 % y otro aumento del 35 %, el índice de variación final sería:

1,2 · 1,35 = 1,62, por lo que los dos aumentos consecutivos equivalen a un aumento del 62 %, no a un 55 %.

Por ejemplo, lo aplicamos a la cantidad 24.

Aumento del 20 % de 24 = 28,8
Aumento del 35 % de 28,8 = 38,88

Y aumento del 62 % de 24 = 38,88
Que no es igual que 55 % de 24 = 37,2

17 Javier ha visto una televisión de 980 € con un 30 % de descuento, a la que hay que aplicarle el 21 % de IVA. ¿Cuánto le costaría la televisión?

Resuelve el problema aplicando primero el descuento y luego el IVA. Mientras, tu compañero lo realizará aplicando primero el IVA y, a continuación, el descuento. ¿Es el resultado el mismo? Explicad por qué utilizando el índice de variación.

Buscad en Internet información sobre el significado del IVA y los sucesivos valores que ha ido teniendo.

Un descuento del 30 % equivale a un índice de variación de 0,70. Un aumento del 21 % de IVA equivale a un índice de variación de 1,21.

980 · 0,7 · 1,21 = 980 · 1,21 · 0,7 = 830,06 € le costaría la televisión.

Debido a la propiedad conmutativa del producto, el resultado es el mismo aunque aplique primero el descuento y luego el aumento o viceversa.

SOLUCIONES PÁG. 95

18 Efectúa los siguientes repartos directamente proporcionales a las cantidades que se indican:

a. 54 600 a 50, 70 y 10

$$\frac{a}{50}=\frac{b}{70}=\frac{c}{10}=\frac{a+b+c}{50+70+10}=\frac{54600}{130}=420$$

Se reparte 420 a cada una:

$$\frac{a}{50}=420 \Rightarrow a = 420 \cdot 50 = 21\,000$$

$$\frac{b}{70}=420 \Rightarrow b = 420 \cdot 70 = 29\,400$$

$$\frac{c}{10}=420 \Rightarrow c = 10 \cdot 420 = 4\,200$$

b. 1 218 a 12, 30 y 45

$$\frac{a}{12}=\frac{b}{30}=\frac{c}{45}=\frac{a+b+c}{12+30+45}=\frac{1218}{87}=14$$

Se reparte 14 a cada una:

$a = 12 \cdot 14 = 168$, $b = 30 \cdot 14 = 420$; $c = 45 \cdot 14 = 630$

c. 300 a 4, 3 y 5

$$\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=\frac{a+b+c}{4+3+5}=\frac{300}{12}=25$$

Se reparte 25 a cada una:

$a = 4 \cdot 25 = 100$; $b = 3 \cdot 25 = 75$; $c = 5 \cdot 25 = 125$

d. 3 908 a 10, 4 y 6

$$\frac{a}{10}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}=\frac{a+b+c}{10+4+6}=\frac{3908}{20}=195{,}4$$

Se reparte 195,4 a cada una:

$a = 10 \cdot 195{,}4 = 1\,954$; $b = 4 \cdot 195{,}4 = 781{,}6$; $c = 6 \cdot 195{,}4 = 1\,172{,}5$

19 Realiza los siguientes repartos inversamente proporcionales a las cantidades que se indican:

a. 4 810 a 4, 5 y 6

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}=\frac{a+b+c}{\frac{37}{60}}=\frac{4810}{\frac{37}{60}}=7800$$

Se reparte 4 810 entre $\frac{37}{60}$ partes, con lo que resulta 7 800 por la inversa de cada parte:

$a = \frac{1}{4} \cdot 7\,800 = 1\,950$; $b = \frac{1}{5} \cdot 7\,800 = 1\,560$; $c = \frac{1}{6} \cdot 7\,800 = 1\,300$

b. 7 260 a 10, 20 y 8

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{8}} = \frac{a+b+c}{\frac{11}{40}} = \frac{7\,260}{\frac{11}{40}} = 26\,400$$

Se reparte 7 260 entre $\frac{11}{40}$ partes, con lo que resulta 26 400 por la inversa de cada parte:

$a = \frac{1}{10} \cdot 26\,400 = 2\,640$; $b = \frac{1}{20} \cdot 26\,400 = 1\,320$; $c = \frac{1}{8} \cdot 26\,400 = 3\,300$

c. 330 a 2, 4 y 6

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{a+b+c}{\frac{11}{12}} = \frac{330}{\frac{11}{12}} = 360$$

Se reparte 330 entre $\frac{11}{12}$ partes, con lo que resulta 360 por la inversa de cada parte:

$a = \frac{1}{2} \cdot 360 = 180$; $b = \frac{1}{4} \cdot 360 = 90$; $c = \frac{1}{6} \cdot 360 = 60$

d. 700 a 7, 14 y 28

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{4}} = \frac{700}{\frac{1}{4}} = 2\,800$$

Se reparte 700 entre $\frac{1}{4}$ partes, con lo que resulta 2 800 por la inversa de cada parte:

$a = \frac{1}{7} \cdot 2\,800 = 400$; $b = \frac{1}{14} \cdot 2\,800 = 200$; $c = \frac{1}{28} \cdot 2\,800 = 100$

20 Sara quiere repartir 22 puntos entre tres de sus alumnos para que suban nota. Lo piensa hacer de forma inversamente proporcional a las faltas de asistencia que han tenido en este mes. Guille ha faltado 3 días; Nerea, 6, y Sandra, 9. ¿Cuántos puntos le corresponderán a cada uno?

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}}=\frac{a+b+c}{\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{2}{18}}=\frac{22}{\frac{11}{18}}=36$$

Guille: $\frac{a}{\frac{1}{3}}=36 \Rightarrow a=12$

Nerea: $\frac{b}{\frac{1}{6}}=36 \Rightarrow b=6$

Sandra: $\frac{c}{\frac{1}{9}}=36 \Rightarrow c=4$

A Guille le dará 12 puntos, a Nerea 6 puntos y a Sandra 4 puntos.

21 Ramón quiere repartir parte de los beneficios de su empresa entre sus empleados de forma directamente proporcional a las horas diarias que trabajan. Encarna trabaja 8 h diarias; Mercedes, 7 h; Azucena, 5 h, y Blanca, 6 h. Si dichos beneficios ascienden a 78 000 €, ¿cuánto le corresponderá a cada una?

$$\frac{a}{8}=\frac{b}{7}=\frac{c}{5}=\frac{d}{6}=\frac{a+b+c+d}{8+7+5+6}=\frac{78000}{26}=3000$$

Encarna: $\frac{a}{8}=3\,000 \Rightarrow a=24\,000$

Azucena: $\frac{c}{5}=3\,000 \Rightarrow c=15\,000$

Mercedes: $\frac{b}{7}=3\,000 \Rightarrow b=21\,000$

Blanca: $\frac{d}{6}=3\,000 \Rightarrow d=18\,000$

A Encarna le corresponderá 24 000 €, a Mercedes 21 000 €, a Azucena 15 000 € y a Blanca 18 000 €.

22 En un concurso de cálculo mental se reparte un premio de 4 230 € para material escolar entre los tres mejores alumnos de forma inversamente proporcional al número de fallos realizados.

De las 10 operaciones efectuadas, Patricia ha fallado 4; Marta, 3, y Pedro, 5. ¿Cuánto dinero recibirá cada uno de los alumnos?

$$\frac{a+b+c}{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=\frac{4230}{\frac{47}{60}}=5400$$

Patricia: $\frac{a}{\frac{1}{4}} = 5400 \Rightarrow a = 1\,350$ Marta $\frac{b}{\frac{1}{3}} = 5400 \Rightarrow b = 1\,800$

Pedro $\frac{c}{\frac{1}{5}} = 5400 \Rightarrow c = 1\,080$

A Patricia le corresponde 1 350 €, a Marta 1 800 €, y a Pedro 1 080 €.

23 Realiza la actividad anterior considerando que el premio se concede de forma directamente proporcional a los aciertos obtenidos.

$$\frac{a+b+c}{6+7+5} = \frac{4230}{18} = 235$$

Patricia: $\frac{a}{6} = 235 \Rightarrow a = 6 \cdot 235 = 1410$ Marta: $\frac{b}{7} = 235 \Rightarrow b = 7 \cdot 235 = 1\,645$

Pedro: $\frac{c}{5} = 235 \Rightarrow c = 5 \cdot 235 = 1\,175$

A Patricia le corresponde 1 410 €, a Marta 1 645 € y a Pedro 1 175 €.

SOLUCIONES PÁG. 97

1 Explica la diferencia que hay en el modo de saber si dos magnitudes son directa o inversamente proporcionales. Ilústralo con ejemplos.

Cuando dos magnitudes son directamente proporcionales, ambas crecen o disminuyen en la misma proporción.

Sin embargo, si son inversamente proporcionales, cuando una aumenta, la otra disminuye en la misma proporción, y viceversa.

Ejemplo de magnitudes directamente: kilos de naranjas y precio. Cuantos más kilos de naranjas se compren, más alto será el precio.

Ejemplo de magnitudes inversamente proporcionales: velocidad y tiempo. Cuanto más veloz va un coche, menos tiempo tarda en realizar un recorrido.

2 ¿Qué es un factor de conversión? Cita ejemplos que ilustren el uso más común de los factores de conversión, realizando uno de ellos.

Un factor de conversión es una fracción de valor la unidad que nos permite convertir unas magnitudes en otras al mantener entre ellas una relación de proporcionalidad.

El uso más común de los factores de conversión es el del cambio de unidades. Por ejemplo, para pasar 68 dg a dag:

$$68 \text{ dg} = 68 \cancel{\text{dg}} \cdot \frac{1 \text{ dag}}{100 \cancel{\text{dg}}} = 0{,}68 \text{ dag}$$

3 Indica la principal diferencia que existe en el cálculo con reglas de tres directas o inversas. Pon ejemplos.

En una regla de tres directa, la proporción se forma tomando los datos en la forma que están escritas las razones correspondientes, sin embargo, en la regla de tres inversa, hay que invertir una de las razones.

Ejemplo de proporcionalidad directa:

kg naranjas		Precio (€)
2	$\rightarrow$	3,5
3	$\rightarrow$	x

Formamos la proporción: $\frac{2}{3}=\frac{3,5}{x}$

Con lo que, despejando: $x=\frac{3\cdot 3,5}{2}=5,25$ €

Ejemplo de proporcionalidad inversa:

Velocidad (km/h)		Tiempo (h)
120	$\rightarrow$	4
x	$\rightarrow$	6

Formamos la proporción, invirtiendo una de las razones: $\frac{120}{x}=\frac{6}{4}$

Con lo que, despejando: $x=\frac{120\cdot 4}{6}=80$ km/h

4 Contesta a las siguientes preguntas:

a. ¿Cómo se calculan aumentos o disminuciones porcentuales con el índice de variación?

Para aumentos porcentuales, el índice de variación se calcula:

iv = 1 + porcentaje en decimal

Para disminuciones porcentuales, el índice de variación se calcula:

iv = 1 – porcentaje en decimal

Una vez calculado el índice de variación, se multiplica dicho índice por la cantidad inicial.

b. ¿Cómo se puede obtener la cantidad inicial a partir de la cantidad final y el porcentaje de aumento o disminución aplicado?

Para obtener la cantidad inicial se divide la cantidad final entre el índice de variación. Para obtener el porcentaje de aumento o disminución se divide la cantidad final entre la cantidad inicial.

5 **Explica para qué sirven los repartos proporcionales.**

Los repartos proporcionales sirven para repartir una cantidad entre una serie de partes que se hacen de dicha cantidad. Pueden ser:

— Directamente proporcionales, cuando a mayor parte implicada, mayor cantidad obtenida.

— Inversamente proporcionales, cuando a mayor parte implicada, menor cantidad obtenida.

6 **¿Es lo mismo repartir una cantidad de forma directamente proporcional a los números *a, b* y *c* que repartir la misma cantidad de forma inversamente proporcional a los números $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ y $\frac{1}{c}$? Al fin de realizar la demostración, toma 9 000 como la cantidad que hay que repartir y 5, 10 y 30 como los números entre los que se realiza el reparto de forma directamente proporcional. Con esas mismas cantidades realiza un reparto inversamente proporcional.**

Sí, es lo mismo.

Un reparto directamente proporcional a 5, 10 y 30 sería:

$5 \cdot 200 = 1\ 000$, $10 \cdot 200 = 2\ 000$, $30 \cdot 200 = 6\ 000$

Un reparto inversamente proporcional a $\frac{1}{5}$, y sería:

$$\frac{1}{\frac{1}{5}} \cdot 200 = 1\ 000, \quad \frac{1}{\frac{1}{10}} \cdot 200 = 2\ 000, \quad \frac{1}{\frac{1}{30}} \cdot 200 = 6\ 000$$

7 **Busca en diversos medios de comunicación (como televisión, radio, Internet, prensa escrita, etc.), noticias en las que aparezcan datos con porcentajes. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster… con los datos encontrados.**

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 98 – REPASO FINAL

MAGNITUDES PROPORCIONALES

1 **Copia y completa en tu cuaderno las siguientes tablas de proporcionalidad, indicando si se trata de una proporcionalidad directa o inversa y calcula su constante de proporcionalidad:**

Magnitud A	3	10	7	9	12
Magnitud B	1,5	5	3,5	4,5	6

Proporcionalidad directa k = 0,5

Magnitud A	75	25	150	6	3
Magnitud B	4	12	2	50	100

Proporcionalidad inversa k = 300

2 **Realiza los siguientes cambios de unidades mediante factores de conversión:**

a. 675 mL a daL

$$675\ \cancel{mL}\ \frac{1\ daL}{10\,000\ \cancel{mL}} = 0{,}0675\ daL$$

b. 97 kg a cg

$$97\ \cancel{kg}\ \frac{100\,000\ cg}{1\ \cancel{kg}} = 9\,700\,000\ cg$$

c. 82 304 dm² a dam²

$$82\,304\ \cancel{dm^2}\ \frac{1\ dam^2}{10\,000\ \cancel{dm^2}} = 8{,}2304\ dm^2$$

d. 180 km/h a m/s

$$180\ \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3\,600\ s} = 50\ \frac{m}{s}$$

e. 45 m/s a km/h

$$45\ \frac{\cancel{m}}{\cancel{s}} \cdot \frac{1\ km}{1000\ \cancel{m}} \cdot \frac{3\,600\ \cancel{s}}{1\ h} = 162\ \frac{km}{h}$$

3 **Julián va al mercado a comprar patatas. Si el kilogramo de patatas cuesta 0,62 €, ¿cuántos kilos podrá comprar si solo se ha traído 5,63 € y necesita 0,40 € para llevarse también una barra de pan?**

5,63 € – 0,40 € = 5,23 €

$$5{,}23\ \cancel{€}\ \frac{1\ kg}{0{,}62\ \cancel{€}} = 8{,}43548...\ kg$$

Puede comprar 8,4 kg de patatas.

4 **Eva gana 210 € a la semana por trabajar 7 h.**

a. ¿Cuánto recibiría si trabajara 8 h?

210 € $\rightarrow$ 7 h

x € $\rightarrow$ 8 h

$$\frac{210\ €}{7\ \cancel{h}} \cdot 8\ \cancel{h} = 240\ €$$

Recibiría 240 €.

b. Si se coge la jornada reducida de 4 h, ¿a cuánto ascendería su sueldo?

210 € $\rightarrow$ 7 h

x € $\rightarrow$ 4 h

$$\frac{210\ €}{7\ \cancel{h}} \cdot 4\ \cancel{h} = 120\ €$$

Ascendería a 120 €.

5 Alicia y Juan ponen 12 € cada uno para comprar un regalo a su amiga Pilar. Cuando Elena y Raúl se enteran del cumpleaños, les piden participar en el regalo.

a. ¿Cuánto tendrá que poner ahora cada uno?

Proporcionalidad inversa:

2 personas $\rightarrow$ 4 personas
12 € $\rightarrow$ x €

$$2 \cdot 12 = 4 \cdot x \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6$$

Cada uno pondría 6 €.

b. ¿Cuántos amigos tendrían que participar en la compra del regalo para que cada uno tuviera que poner 2,40 €?

2 personas $\rightarrow$ x personas
12 € $\rightarrow$ 2,4 €

$$2 \cdot 12 = 2{,}4 \cdot x \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 12}{2{,}4} = 10$$

Se necesitan 10 amigos para que cada uno pague 2,4 €.

c. ¿Cuánto cuesta dicho regalo?

El regalo cuesta 24 €, que es la constante de proporcionalidad inversa.

6 Para vaciar una piscina, se utilizan dos bombas que realizan esta operación en 12 h. ¿Cuántas bombas serían necesarias si se quisiera vaciar en 6 h?

Proporcionalidad inversa:

Bombas	Horas
2	12
x	6

$\frac{2}{x} = \frac{6}{12} \Rightarrow x = 4$. Serían necesarias 4 bombas.

7 El engranaje de una máquina tiene dos ruedas. Una de ellas dispone de 18 dientes, y otra, de 24. Si la rueda menor da 5 vueltas, ¿cuántas dará la mayor?

Proporcionalidad inversa:

Dientes	Vueltas
18	5
24	x

$$\frac{5}{x}=\frac{24}{18}\Rightarrow x=3{,}75$$

La mayor dará 3,75 vueltas.

8 Dos ciudades, A y B, están a 42 km. Si en un mapa están separadas 30 cm:

a. ¿Cuántos centímetros de separación habrá entre otras dos ciudades que en la realidad distan 56 km?

Proporcionalidad directa

Mapa (cm)	Realidad (km)
30	42
x	56

$$\frac{30}{x}=\frac{42}{56}\Rightarrow x=40$$

Estarán separadas 40 cm.

b. ¿Cuántos kilómetros de distancia habrá entre dos poblaciones que en el mapa están a 12 cm?

Mapa (cm)	Realidad (km)
30	42
12	x

$$\frac{30}{12}=\frac{42}{x}\Rightarrow x=16{,}8$$

Habrá 16,8 km de distancia.

c. ¿A qué escala está hecho el mapa de esta actividad? (La escala 1 : x quiere decir que 1 cm del mapa equivale a x cm de la realidad).

Mapa (cm)	Realidad (cm)
30	4 200 000
1	x

$$\frac{30}{1}=\frac{4\,200\,000}{x}\Rightarrow x=140\,000$$

Está a escala 1:140 000

9 En una carrera de fórmula 1, un piloto, A, ha llevado una velocidad media de 95 m/s, mientras que otro piloto, B, ha tenido una velocidad media de 55 hm/min.

a. Expresa la velocidad de cada piloto en km/h.

$$\text{Piloto A: } 95\frac{\cancel{m}}{\cancel{s}}\cdot\frac{1\text{ km}}{1000\ \cancel{m}}\cdot\frac{3\,600\ \cancel{s}}{1\text{ h}}=342\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\text{Piloto B: } 55\frac{\cancel{hm}}{\cancel{min}}\cdot\frac{1\text{ km}}{10\ \cancel{hm}}\cdot\frac{60\ \cancel{min}}{1\text{ h}}=330\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

b. ¿Cuánto tiempo ha tardado cada piloto en recorrer los 5,643 km del circuito?

$$\text{Piloto A: } 5{,}643\ \cancel{km}\cdot\frac{1\text{ h}}{342\ \cancel{km}}=0{,}016\,5\text{ h}=59{,}4\text{ s}$$

$$\text{Piloto B: } 5{,}643\ \cancel{km}\cdot\frac{1\text{ h}}{330\ \cancel{km}}=0{,}017\,1\text{ h}=61{,}56\text{ s}$$

El piloto A ha tardado 59,4 s, y el piloto B ha tardado 61,56 s.

c. Como la carrera consistía en 55 vueltas al circuito, ¿cuánto tiempo necesitó cada piloto para completarla sin contar las paradas en *boxes?*

$$\text{Piloto A: } 59{,}4\ \frac{\text{s}}{\cancel{vuelta}}\cdot 55\ \cancel{vueltas}=3\,267\text{ s}=54\text{ min }27\ s$$

$$\text{Piloto B: } 61{,}56\ \frac{\text{s}}{\cancel{vuelta}}\cdot 55\ \cancel{vueltas}=3\,385{,}8\text{ s}=56\text{ min }25{,}8\text{ s}$$

El piloto A en 54 min y 27 s, y el piloto B en 56 min y 25,8 s.

d. Comparando los resultados de los dos pilotos, ¿quién quedó en mejor posición en la competición?

El piloto A.

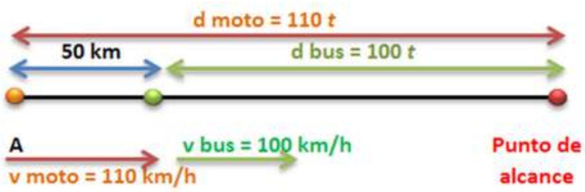
10 Actividad resuelta

SOLUCIONES PÁG. 99

11 Actividad resuelta

12 Un autobús circula a 100 km/h, y una moto, a 110 km/h.

a. Si la moto sigue al autobús a 50 km de distancia, ¿cuánto tardará en alcanzarlo? ¿A qué distancia lo alcanzará?



$$110\ t = 50 + 100\ t \Rightarrow\ t = \frac{50}{110-100} = \frac{50}{10} = 5$$

Con lo que la moto alcanzaría al autobús en 5 horas, encontrándose el punto de alcance a:

$110\ t = 110 \cdot 5 = 550$ km del punto A

Tarda 5 h en alcanzarlo, a una distancia de 550 km del punto en que se encuentra la moto.

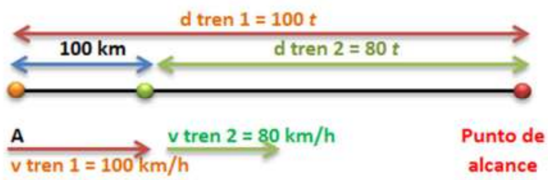
b. Si los dos vehículos se hallasen a 630 km y se dirigiesen el uno hacia el otro, ¿cuánto tardarían en encontrarse? ¿Qué distancia habría recorrido

$$630 = 100t + 110t \Rightarrow\ t = \frac{630}{100+110} = \frac{630}{210} = 3$$

Con lo que se encontrarían en 3 horas.

El autobús recorrería $100t = 100 \cdot 3 = 300$ km
La moto recorrería $110t = 110 \cdot 3 = 330$ km

13 Un tren que circula a una velocidad de 80 km/h lleva una ventaja de 100 km a otro que va a 100 km/h. ¿Cuánto tardará el segundo en alcanzar al primero? ¿Qué distancia habrá recorrido en ese momento?



$$100\ t = 100 + 80\ t \Rightarrow\ t = \frac{100}{100-80} = \frac{100}{20} = 5$$

Con lo que el tren 1 alcanzaría al tren 2 en 5 horas, encontrándose el punto de alcance a: $100\ t = 100 \cdot 5 = 500$ km del punto A.

14 Dos grifos vierten agua en un depósito de 450 L de capacidad. Si el caudal del primero es de 60 L/min, y el del segundo, de 40 L/min, ¿cuánto tardarán en llenar el depósito juntos?

Entre los dos grifos, vierten 60 + 40 = 100 L por minuto, con lo que:

$$450\ \cancel{L}\ \frac{1\ \text{min}}{100\ \cancel{L}} = 4{,}5\ \text{min}$$

Tardarán en llenar el depósito 4,5 min.

15 En una piscina que tiene 500 000 L de capacidad, se introducen 50 L/min con una manguera, mientras que el desagüe de la piscina la vacía a razón de 150 L/min. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse la piscina?

En cada minuto entran 50 L en la piscina y salen 150 L, con lo que en total salen:
150 – 50 = 100 litros por minuto:

$$500\,000\ \cancel{L}\ \frac{1\ \text{min}}{100\ \cancel{L}} = 5\,000\ \text{min}$$

De modo que tardarán 3 días 11 horas y 20 minutos.

16 Un coche que circulaba a una velocidad de 110 km/h tardó 45 min en recorrer una cierta distancia. ¿Cuánto tiempo hubiera empleado en recorrer esa distancia a una velocidad de 120 km/h? ¿Y si hubiera ido a 100 km/h?

Velocidad (km/h)	Tiempo (min)
110	45
120	*x*

$$110 \cdot 45 = 120\ x \Rightarrow\ x = \frac{110 \cdot 45}{120} = 41{,}25$$

A una velocidad de 120 km/h habría tardado 41 min 15 s.

Velocidad (km/h)	Tiempo (min)
110	45
100	*x*

$$110 \cdot 45 = 100\ x \Rightarrow\ x = \frac{110 \cdot 45}{100} = 49{,}5$$

A una velocidad de 100 km/h habría tardado 49 min 30 s.

17 Actividad resuelta.

18 Ana mezcla 20 kg de té que tiene un coste de 15 €/kg con 30 kg de otra variedad de 25 €/kg. ¿Cuál será el precio de la mezcla?

	Masa	**Coste**	**Coste total**
Té 1	20 kg	15 €/kg	20 · 15 = 300 €
Té 2	30 kg	25 €/kg	30 · 25 = 750 €
Mezcla	50 kg	*x*	300 + 750 = 1 050 €

$$x = \frac{1050}{50} = 21$$

El precio de la mezcla es de 21 €/kg.

19 Un anillo que pesa 3,5 g contiene 85 % de oro, mientras que un colgante de 16,9 g contiene 75 % de oro. Si se funden ambas joyas, ¿qué porcentaje de oro tendrá la mezcla?

	Masa	Porcentaje	Masa pura de oro
Anillo	3,5 g	85%	$3{,}5 \cdot 0{,}85 = 2{,}975$ g
Colgante	16,9 g	75%	$16{,}9 \cdot 0{,}75 = 12{,}675$ g
Mezcla	20,4 g	x	15,65 g

$$x = \frac{15{,}65}{20{,}5} = 0{,}767$$

El porcentaje será de 76,7 %.

20 Una barrica contiene 300 L de vino que cuesta 8,9 €/L. Si el bodeguero lo mezcla con 200 L de vino de otra barrica cuyo precio es de 14,95 €/L, ¿cuál será el coste de la mezcla?

	Capacidad	Coste	Coste total
Vino 1	300 L	8,9 €/L	$300 \cdot 8{,}9 = 2\,670$ €
Vino 2	200 L	14,95 €/L	$200 \cdot 14{,}95 = 2\,990$ €
Mezcla	500 L	x	5 660 €

$$x = \frac{5\,660}{500} = 11{,}32$$

El coste de la mezcla será de 11,32 €/L.

21 Juli tiene tres tipos de café de distintas calidades: el primer tipo tiene un coste de 6 €/kg; el segundo tipo, de 9,50 €/kg, y el tercero, de 12,50 €/kg. Si mezcla las tres variedades a razón de 40 kg de la primera por 20 kg de la segunda y 10 kg de la tercera, ¿qué coste tendrá la mezcla?

	Masa	Coste	Coste total
Café 1	40 kg	6 €/kg	$40 \cdot 6 = 240$ €
Café 2	20 kg	9,5 €/kg	$20 \cdot 9{,}5 = 190$ €
Café 3	10 kg	12,5 €/kg	$10 \cdot 12{,}5 = 125$ €
Mezcla	70 kg	x	$240 + 190 + 125 = 555$ €

$$x = \frac{555}{70} = 7{,}93$$

La mezcla de café será de 7,93 €/kg.

PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

22 Una empresa de paquetería cobra 30 € por enviar un paquete de 75 kg a una población que está a 350 km de distancia.

a. ¿Cuánto costará enviar 30 kg a 210 km?

Euros	kg	km
30	75	350
x	30	210

Tanto las magnitudes kilogramos y euros como las magnitudes euros y kilómetros son directamente proporcionales.

$$\frac{30}{x}=\frac{75}{30}\cdot\frac{350}{210}\Rightarrow\frac{30}{x}=\frac{25}{6}\Rightarrow x=\frac{30\cdot 6}{25}=7{,}2$$

Costará 7,2 €.

b. ¿Qué masa tiene un paquete si ha costado 68 € enviarlo a 160 km?

Euros	kg	km
30	75	350
68	x	160

Las magnitudes kilogramos y euros son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes kilogramos y kilómetros son inversamente proporcionales.

$$\frac{75}{x}=\frac{30}{68}\cdot\frac{160}{350}\Rightarrow\frac{75}{x}=\frac{24}{119}\Rightarrow x=\frac{75\cdot 119}{24}=371{,}875$$

Tiene una masa de 371,875 kg.

c. ¿A cuántos kilómetros se ha enviado un paquete de 100 kg si ha costado 130 €?

Euros	kg	km
30	75	350
130	100	x

Las magnitudes kilómetros y euros son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes kilogramos y kilómetros son inversamente proporcionales.

$$\frac{350}{x}=\frac{30}{130}\cdot\frac{100}{75}\Rightarrow\frac{350}{x}=\frac{4}{13}\Rightarrow x=\frac{350\cdot 13}{4}=1137{,}5$$

Se ha enviado a 1 137,5 km.

SOLUCIONES PÁG. 100

23 En una pastelería empaquetan 20 pasteles en cajas de 20 cm de ancho por 30 cm de largo. ¿Cuántos pasteles se podrán empaquetar en cajas de 30 cm de ancho por 45 cm de largo? ¿Y en cajas de 60 cm de ancho por 90 cm de largo?

Pasteles	Ancho (cm)	Largo (cm)
20	20	30
x	30	45

Tanto las magnitudes pasteles y centímetros de ancho como las magnitudes pasteles y centímetros de largo son directamente proporcionales.

$$\frac{20}{x}=\frac{20}{30}\cdot\frac{30}{45}\Rightarrow\frac{20}{x}=\frac{4}{9}\Rightarrow x=\frac{20\cdot 9}{4}=45$$

Pasteles	Ancho (cm)	Largo (cm)
20	20	30
x	60	90

$$\frac{20}{x}=\frac{20}{60}\cdot\frac{30}{90}\Rightarrow\frac{20}{x}=\frac{1}{9}\Rightarrow x=\frac{20\cdot 9}{1}=180$$

En el primer caso 45 pasteles. En el segundo caso 180 pasteles.

24 Con 300 kg de carne se alimentan 200 comensales en un mes.

a. ¿Para cuántos comensales habrá con 600 kg de carne durante 5 meses?

kg	Comensales	Meses
300	200	1
600	*x*	5

Las magnitudes kilogramos y comensales son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes comensales y meses son inversamente proporcionales.

$$\frac{200}{x} = \frac{300}{600} \cdot \frac{5}{1} \Rightarrow \frac{200}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{200 \cdot 2}{5} = 80$$

Habrá 80 comensales.

b. ¿Cuántos kilos de carne serán necesarios para alimentar a 150 personas durante 2 meses?

kg	Comensales	Meses
300	200	1
x	150	2

Tanto las magnitudes kilogramos y comensales, como las magnitudes kilogramos y meses son directamente proporcionales.

$$\frac{300}{x} = \frac{200}{150} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{300}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{300 \cdot 3}{2} = 450$$

Serán necesarios 450 kg.

c. ¿Para cuánto tiempo tendrán 75 personas con 900 kg de carne?

kg	Comensales	Meses
300	200	1
900	75	*x*

Las magnitudes kilogramos y meses son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes comensales y meses son inversamente proporcionales.

$$\frac{1}{x} = \frac{300}{900} \cdot \frac{75}{200} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1 \cdot 8}{1} = 8$$

Tendrán para 8 meses.

25 Julia tiene 750 kg de arena para llenar 10 cubos de 0,5 m^3 de volumen.

a. ¿Cuántos kilos de arena se necesitan para llenar 15 cubos de 1 m^3 de volumen?

kg	Cubos	m^3
750	10	0,5
x	15	1

Tanto las magnitudes kilogramos y cubos, como las magnitudes kilogramos y m^3 son directamente proporcionales.

$$\frac{750}{x}=\frac{10}{15}\cdot\frac{0,5}{1}\Rightarrow\frac{750}{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{750\cdot 3}{1}=2\,250$$

Se necesitan 2 250 kg.

b. ¿Cuántos cubos de 0,75 m^3 de volumen se podrían llenar con 1 800 kg de arena?

kg	Cubos	m^3
750	10	0,5
1 800	x	0,75

Las magnitudes kilogramos y cubos son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes cubos y m^3 son inversamente proporcionales.

$$\frac{10}{x}=\frac{750}{1800}\cdot\frac{0,75}{0,5}\Rightarrow\frac{10}{x}=\frac{5}{8}\Rightarrow x=\frac{10\cdot 8}{5}=16$$

Se pueden llenar 16 cubos.

c. ¿Qué volumen han de tener 20 cubos para rellenarlos con 500 kg de arena?

kg	Cubos	m^3
750	10	0,5
500	20	x

Las magnitudes kilogramos y m^3 son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes cubos y m^3 son inversamente proporcionales.

$$\frac{0,5}{x}=\frac{750}{510}\cdot\frac{20}{10}\Rightarrow\frac{10}{x}=\frac{50}{17}\Rightarrow x=\frac{10\cdot 17}{50}=3,4$$

Han de tener 3,4 m^3.

26 Félix, Lupe e Iván pagan 200 € cada uno por un mes de alquiler.

a. Si se une a ellos Laura, ¿cuánto deberá pagar cada uno por 6 meses?

Personas	€/persona	Meses
3	200	1
4	x	6

Las magnitudes euros por persona y meses son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes personas y euros por persona son inversamente proporcionales.

$$\frac{200}{x}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{200}{x}=\frac{2}{9}\Rightarrow x=\frac{200\cdot 9}{2}=900$$

Deberá pagar cada uno 900 € por los 6 meses.

b. Durante julio y agosto, solo viven Félix y Lupe en el piso, por lo que son ellos los que corren con los gastos; ¿a cuánto les saldrá el alquiler?

Personas	€/persona	Meses
3	200	1
2	x	2

Las magnitudes euros por persona y meses son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes personas y euros por persona son inversamente proporcionales.

$$\frac{200}{x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{200}{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{200\cdot 3}{1}=600$$

Deberá pagar cada uno 600 € por los 2 meses.

c. ¿Cuántos inquilinos deberán alojarse en el piso para que cada uno pague 600 € por 5 meses de alquiler?

Personas	€/persona	Meses
3	200	1
x	600	5

Las magnitudes personas y meses son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes personas y euros por persona son inversamente proporcionales.

$$\frac{3}{x}=\frac{600}{200}\cdot\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{3}{x}=\frac{3}{5}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 5}{3}=5$$

Deberán alojarse 5 personas.

27 Andrea hace un trayecto de 360 km a 120 km/h en 3 h.

a. ¿Cuántas horas tardará si recorre 220 km yendo a 110 km/h?

Distancia (km)	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
360	3	120
220	x	110

Las magnitudes distancia y tiempo son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes distancia y velocidad son inversamente proporcionales.

$$\frac{3}{x}=\frac{360}{220}\cdot\frac{110}{120}\Rightarrow\frac{3}{x}=\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 2}{3}=2$$

b. ¿A qué velocidad iría si recorre 450 km en 5 h?

Distancia (km)	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
360	3	120
450	5	x

Las magnitudes distancia y velocidad son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes distancia y velocidad son inversamente proporcionales.

$$\frac{120}{x}=\frac{360}{450}\cdot\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{120}{x}=\frac{4}{3}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 120}{4}=90$$

c. ¿Cuántos kilómetros recorrerá en 2 h y 27 min si circula a 100 km/h?

2 horas 27 minutos es igual a 2,45 horas, ya que $\frac{27}{60}=0,45$.

Distancia (km)	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
360	3	120
x	2,45	100

Tanto las magnitudes distancia y velocidad como las magnitudes distancia y tiempo, son directamente proporcionales.

$$\frac{360}{x}=\frac{3}{2,45}\cdot\frac{120}{100}\Rightarrow\frac{360}{x}=\frac{72}{49}\Rightarrow x=\frac{360\cdot 49}{72}=245$$

Recorrerá 245 km.

PORCENTAJES. AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES: ÍNDICE DE VARIACIÓN

28 Calcula mentalmente los siguientes porcentajes:

a. El 25 % de 600 = 150

b. El 20 % de 2 800 = 560

c. El 75 % de 10 000 = 7 500

d. El 30 % de 6 300 = 1 890

29 Utiliza la calculadora para calcular los siguientes porcentajes:

a. El 45 % de 846 = 380,7

b. El 19 % de 274 = 52,06

c. El 89 % de 4 456 = 3 965,84

d. El 77 % de 92 274 = 71 050,98

30 Indica:

a. El 67 % de 183

183 · 0,67 = 122,61

b. El total del que 207 es el 45 %

$$207\cdot\frac{100}{45}=460$$

c. **El porcentaje que representa 16 con respecto a 128**

$$\frac{16}{128} \cdot 100 = 12{,}5\%$$

31 Realiza las siguientes cuestiones con la calculadora:

a. **Si un producto costaba 538 € y tiene un 62 % de descuento, ¿cuál es su precio actual?**

$538 \cdot 0{,}38 = 204{,}44$

El precio actual es de 204,44 €.

b. **Si se le añade el 21 % de IVA a un móvil de 235 €, ¿cuál es su precio final?**

$235 \cdot 1{,}21 = 284{,}35$

El precio final será de 284,35 €.

c. **¿Qué porcentaje se le aplica a un producto si pasa de 80 € a 120 €? ¿Y si pasara de 364 € a 273 €? Indica en cada caso si es un aumento o una disminución.**

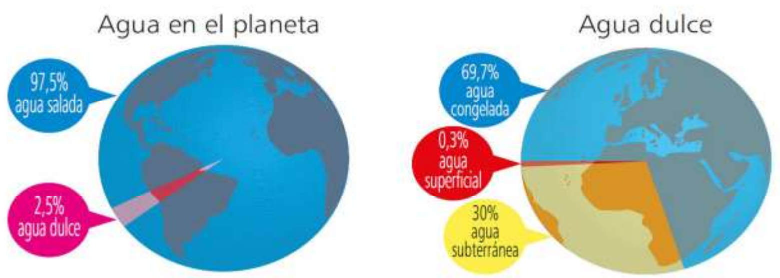
$80 \cdot x = 120 \Rightarrow x = 1{,}5 \Rightarrow 50\ \%$

Se le aplica un aumento, 50 %.

$364 \cdot x = 273 \Rightarrow x = 0{,}75 \Rightarrow 25\ \%$

Una disminución, 25 %.

32 Aproximadamente el 97,5 % del agua total de la Tierra es salada. El resto, que es el 2,5 %, es agua dulce. De esta agua dulce, el 69,7 % es hielo, el 30 % es agua subterránea, y el 0,3 % fluye por la superficie. ¿Qué porcentaje representa el agua helada frente a la totalidad del agua terrestre? ¿Y las aguas superficiales? ¿Y las subterráneas?



69,7% de 2,5% = $0{,}697 \cdot 0{,}025 = 0{,}017\,425 = 1{,}742\,5\%$ del agua total es agua helada.

0,3% de 2,5% = $0{,}003 \cdot 0{,}025 = 0{,}000\,075 = 0{,}007\,5\%$ del agua total es agua superficial.

30% de 2,5% = $0{,}3 \cdot 0{,}025 = 0{,}007\,5 = 0{,}75\%$ del agua total es agua subterránea.

33 Una bicicleta de unos grandes almacenes ha experimentado diversas variaciones de precio. En septiembre costaba 236 €. Durante la campaña de Navidad, se incrementó en un 45 %, pero tras las rebajas de enero se redujo un 30 %. Indica el precio de la bicicleta en los meses de diciembre y febrero.

Diciembre: 236 · 1,45 = 342,20 €
Febrero: 342,20 · 0,7 = 239,54 €
En diciembre el precio era de 342,20 € y en febrero de 239,54 €.

34 En los últimos cinco años, la población de una ciudad se ha incrementado un 20 %. Actualmente cuenta con 245 826 habitantes.

a. ¿Cuál era la población de la ciudad hace 5 años?

245 826 : 1,2 = 204 855 personas hace cinco años. Hace 5 años la población era de 204 855 habitantes.

b. ¿Qué población tendrá al cabo de 5 años si aumenta un 50 %?

245 826 · 1,5 = 368 739

Dentro de 5 años será de 368 739 habitantes.

SOLUCIONES PÁG. 101

35 Una lavadora cuesta 356 € tras aplicarle un 30 % de descuento y añadirle el 21 % de IVA. ¿Cuánto costaba antes del descuento y de que se le aplicase el IVA?

356 : (0,7 · 1,21) = 420,31
Costaba 420,31 €.

36 El padre de Alicia cobra 2 060 € al mes. De dicho sueldo, el 17 % se destina a pagar impuestos y el 2 % se emplea para el pago del seguro médico.

a. ¿Cuánto paga de impuestos?

17% de 2 060 = 350,20
Paga 350,20 € de impuestos.

b. ¿A cuánto asciende el seguro médico?

2% de 2 060 = 41,20

El seguro médico asciende a 41,20 €.

c. ¿Qué dinero cobra realmente?

2 060 € – 350,20 – 41,20 = 1 668,60

Realmente cobra 1 668,60 €.

d. Si en el siguiente mes destina un 4,5 % al pago de un crédito, ¿cuánto le quedará?

4,5% de 2 060 = 92,70 € de crédito, por lo que cobra 1 668,60 – 92,70 = 1 575,9 €.

Le quedará 1 575,90 €.

37 Expresa si el resultado final de la aplicación de los siguientes porcentajes corresponde a un aumento o a una disminución e indica el porcentaje final:

a. Un aumento del 15 % y una disminución del 20 %.

iv = (1 + 0,15) · (1 – 0,20) = 0,92; 1 – 0,92 = 0,08 = 8 %

Una disminución del 8 %

b. Una disminución del 35 %, un aumento del 60 % y otra disminución del 15 %.

iv = (1 – 0,35) · (1 + 0,60) · (1 – 0,15) = 0,884; 1 – 0,884 = 0,116 = 11,6 %

Una disminución del 11,6 %

c. Dos aumentos, uno del 70 % y otro del 12 %.

iv = (1 + 0,70) · (1 + 0,12) = 1,904; 1,904 – 1 = 0,904 = 90,4 %

Un aumento del 90,4 %

REPARTOS PROPORCIONALES

38 Ángel, Lara y Emilio se asocian para formar una empresa.

Con este propósito, cada uno de ellos entrega una cantidad de dinero. Ángel invierte 3 000 €, Lara, 2 100 €, y Emilio, 3 600 €. Si la empresa consigue en un año unos beneficios de 2 001 000 €, ¿qué parte le corresponderá a cada socio?

Es un reparto directamente proporcional.

$$\frac{a}{3000}=\frac{b}{2100}=\frac{c}{3600}=\frac{a+b+c}{3000+2100+3600}=\frac{2\,001\,000}{8\,700}=230$$

$$\left.\begin{array}{l}230\cdot 3\,000=690\,000\\230\cdot 2\,100=483\,000\\230\cdot 3\,600=828\,000\end{array}\right\}690\,000+483\,000+828\,000=2\,001\,000$$

A Ángel le corresponderá 690 000 €, a Lara 483 000 € y a Emilio 828 000 €.

39 Raquel ha comprado 900 cromos para repartir entre sus hijos de forma inversamente proporcional a sus edades. Si Patricia tiene 4 años, Álex, 6, Daniel, 10, y Cintia, 12, ¿cuántos cromos le corresponden a cada uno?

$$\frac{a}{\frac{1}{4}}=\frac{b}{\frac{1}{6}}=\frac{c}{\frac{1}{10}}=\frac{d}{\frac{1}{12}}=\frac{a+b+c+d}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}}=\frac{900}{\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}}=\frac{900}{\frac{72}{120}}=1\,500$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{4}\cdot 1\,500=375\\ \frac{1}{6}\cdot 1\,500=250\\ \frac{1}{10}\cdot 1\,500=150\\ \frac{1}{12}\cdot 1\,500=125\end{array}\right\}375+250+150+125=900$$

A Patricia le corresponden 375 cromos, a Álex 250, a Daniel 150 y a Cintia 125 cromos.

40 En una tienda, para incentivar las ventas, reparten 600 € al mes entre los empleados, de forma directamente proporcional al dinero recaudado por cada uno de ellos. Si Elena ha recaudado 900 €, Pedro, 1 050 €, Eva, 1 700 €, y Enrique, 1 350 €, ¿qué parte del incentivo le corresponde a cada uno de ellos?

$$\frac{a}{900}=\frac{b}{1050}=\frac{c}{1700}=\frac{d}{1350}=\frac{a+b+c+d}{900+1050+1700+1350}=\frac{600}{5\,000}=0{,}12$$

$$\left.\begin{array}{l}0{,}12\cdot 900=108 \text{ € para Elena}\\ 0{,}12\cdot 1\,050=126 \text{ € para Pedro}\\ 0{,}12\cdot 1\,700=204 \text{ € para Eva}\\ 0{,}12\cdot 1\,350=162 \text{ € para Enrique}\end{array}\right\}108+126+204+162=600$$

A Elena le corresponde 108 €, a Pedro 126 €, a Eva 204 € y a Enrique 162 €.

41 Tres empleados de una empresa tienen que pagar 3 100 € de impuestos entre todos de forma inversamente proporcional a su sueldo mensual. Si Javier cobra 1 500 €, Antonio, 2 000 €, y Elvira, 1 800 €, ¿cuánto tiene que pagar cada uno?

$$\frac{a}{\frac{1}{1500}}=\frac{b}{\frac{1}{2000}}=\frac{c}{\frac{1}{1800}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{1500}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{1800}}=\frac{3\,100}{\frac{120}{180\,000}+\frac{90}{180\,000}+\frac{100}{180\,000}}=$$

$$=\frac{3\,100}{\frac{310}{180\,000}}=1\,800\,000$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1\,500}\cdot 1\,800\,000=1\,200 \text{ €}\\ \frac{1}{2\,000}\cdot 1\,800\,000=900\\ \frac{1}{1\,800}\cdot 1\,800\,000=1\,000\end{array}\right\}1\,200+900+1\,000=3\,100$$

Javier pagará 1 200 €, Antonio 900 € y Elvira 1 000 €.

EVALUACIÓN

1 Rebeca compra pienso para alimentar a sus dos perros durante 15 días. ¿Para cuántos días tendría pienso si adopta 3 perros más?

a. 37,5 b. 6 **c. 3,5** **d. 5**

Perros		Días
2	$\rightarrow$	15
5	$\rightarrow$	x

Proporcionalidad inversa: $\frac{15}{x}=\frac{5}{2}\Rightarrow x=6$

2 Carlos quiere comprar peces disco para su pecera. Sabe que en un acuario de 200 L puede mantener a 5 ejemplares. Si su pecera es de 250 L, ¿cuántos peces disco puede tener como máximo?

a. 6,25 **b. 7** c. 6 **d. 5**

$250\,\cancel{L}\cdot\frac{5\text{ discos}}{200\,\cancel{L}}=6{,}25$

Con lo que podría tener 6 discos.

3 Ocho pintores han trabajado durante 10 días para pintar dos casas. ¿Cuántos días tardarán en terminar cuatro casas cinco pintores?

a. 8 **b. 3,125** **c. 12,5** d. 32

Pintores	Días	Casas
8	10	2
5	x	4

Las magnitudes día y casas son directamente proporcionales, mientras que las magnitudes pintores y días son inversamente proporcionales.

$\frac{10}{x}=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{4}\Rightarrow\frac{10}{x}=\frac{5}{16}\Rightarrow x=\frac{10\cdot16}{5}=32\rightarrow$ Tardan 32 días.

4 Un producto sufre, primero, un incremento del precio del 35 %; posteriormente experimenta otra subida, esta vez del 15 %, seguida de un descuento del 20 % y, finalmente, de otra reducción del 30 %. ¿Cuál es el porcentaje final aplicado?

a. No ha habido variación.

b. Se ha producido una disminución del 9,28 %.

c. Se ha producido un aumento del 55,25 %.

d. Se ha producido una disminución del 13,06 %.

$1{,}35\cdot1{,}15\cdot0{,}8\cdot0{,}7=0{,}869\,4\Rightarrow1-0{,}869\,4=0{,}130\,6\Rightarrow13{,}06\ \%$

5 **Si se reparten 1 274 € de forma directamente proporcional a los números 12, 15, 25, a la cantidad 25 le corresponden…**

a. 1,02 € **b. 50,96 €** c. 612,5 € **d. 24,5 €**

$$\frac{a}{12}=\frac{b}{15}=\frac{c}{25}=\frac{a+b+c}{12+15+25}=\frac{1274}{52}=24{,}5 \Rightarrow 24{,}5\cdot 25=612{,}5$$

6 **Si se reparten 9 630 unidades de forma inversamente proporcional a 3, 9, 18, a la cantidad 9 le corresponden…**

a. 2 889 uds. b. 2 140 uds. **c. 1 070 uds.** **d. 3 456 uds.**

$$\frac{a}{\frac{1}{3}}=\frac{b}{\frac{1}{9}}=\frac{c}{\frac{1}{18}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}}=\frac{9\,630}{\frac{6}{18}+\frac{2}{18}+\frac{1}{18}}=\frac{9\,630}{\frac{9}{18}}=19\,260 \Rightarrow \frac{1}{9}\cdot 19\,260=2\,140$$

7 **Luis recibe de su empresa 850 € por proyecto realizado. Si el número de proyectos se ha incrementado en un 20 % a lo largo de los últimos 5 años y este año ha cobrado 25 500 €, ¿cuántos proyectos realizó hace 5 años?**

a. 36 b. 25 **c. 150** **d. 30**

$\frac{25\,500}{850}=30 \Rightarrow$ Este año ha realizado 30 proyectos.

Como en los últimos años ha aumentado un 20 %, se calcula los proyectos iniciales:

30 : 1,2 = 25 proyectos había hace cinco años.

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 6. Expresiones algebraicas

Unidad 6. Expresiones algebraicas

SOLUCIONES PÁG. 115

1. **Escribe una expresión algebraica para cada uno de los siguientes enunciados:**

   a. **El triple de un número.** $\rightarrow 3x$
   b. **Un número disminuido en dos unidades.** $\rightarrow x - 2$
   c. **El cubo de la mitad de un número.** $\rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3$
   d. **La quinta parte de un número más su quíntuple.** $\rightarrow \frac{x}{5} + 5x$
   e. **La diferencia de los cuadrados de dos números.** $\rightarrow x^2 - y^2$
   f. **La tercera parte de la suma de tres números.** $\rightarrow \frac{x + y + z}{3}$

2. **Expresa en lenguaje algebraico cada uno de los siguientes enunciados:**

   a. **Tres números naturales consecutivos.** $\rightarrow n,\ n + 1,\ n + 2$
   b. **Dos números pares consecutivos.** $\rightarrow 2n,\ 2n + 2$
   c. **Un número impar.** $\rightarrow 2n - 1$
   d. **Dos números impares consecutivos.** $\rightarrow 2n - 1,\ 2n + 1$

3. **Expresa en lenguaje cotidiano las siguientes expresiones algebraicas:**

   a. $\boldsymbol{3x - y^2}$
   El triple de un número menos el cuadrado de otro número.
   b. $\frac{x + y}{2}$
   La semisuma de dos números.
   c. $\left(x + x^3\right)^2$
   El cuadrado de la suma de un número y su cubo.

4. **Indica cuál es el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes monomios:**

   a. $\boldsymbol{7x}$ **b.** $\boldsymbol{ab^2}$ **c. –4** **d.** $\frac{2}{5}x^2y^3$

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$\boldsymbol{7x}$	7	x	1
$\boldsymbol{ab^2}$	1	ab^2	3
–4	–4		0
$\frac{2}{5}x^2y^3$	$\frac{2}{5}$	x^2y^3	5

5. **Indica cuáles de los siguientes monomios son semejantes a** $\boldsymbol{2x^3yz^2}$**:**
   a. **a.** $\boldsymbol{2x^3y}$ $\rightarrow$ No es semejante.
   b. **b.** $\boldsymbol{x^3yz^2}$ $\rightarrow$ Sí es semejante.
   c. $\sqrt{5}\,yx^3z^2$ $\rightarrow$ Sí es semejante.
   d. $\boldsymbol{-4x^3zy^2}$ $\rightarrow$ No es semejante.

6. **Clasifica las expresiones propuestas en monomios, binomios o polinomios y calcula, en cada caso, su grado y el valor numérico para los valores indicados.**

   a. $-6x^4 + 2x^2 + x - 1$ **para** $x = -2$
   Polinomio; grado 4; valor numérico –91

   b. $\frac{5}{3}x - \frac{3}{4}y$ **para** $x = -8$ **e** $y = 5$
   Binomio; grado 1; valor numérico $\frac{-205}{12}$

   c. $\frac{-1}{3}x^2y^3z$ **para** $x = 1$, $y = -2$ **y** $z = -3$
   Monomio; grado 6 valor numérico –8

7. **Escribe un polinomio de grado 3 completo, ordenado y con coeficiente principal 2.**

   Respuesta abierta. Por ejemplo: $2x^3 - 7x^2 + 5x - 3$

8. **Investiga en Internet sobre el origen del álgebra y su evolución a lo largo de la historia.**

   Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 117

9. **Efectúa las siguientes sumas y restas de monomios:**

   a. $5x^3 + 3x^3 = 8x^3$
   b. $7x - 2x = 5x$
   c. $-12x^2y - 7x^2y = -19x^2y$
   d. $-5x^4 + x^4 = -4x^4$
   e. $2xy^2 + 4xy^2 - 9xy^2 = -3xy^2$
   f. $-3y^5 + 2y^5 + y^5 = 0$
   g. $-6xy - 2xy - 8xy + 5xy = -11xy$
   h. $-x^2 + 5x^2 - 3x^2 + x^2 - 7x^2 = -5x^2$

10. **Realiza las siguientes sumas y restas y simplifica siempre que sea posible:**

   a. $\frac{2}{5}x^4 + \frac{3}{5}x^4 = x^4$
   b. $\frac{1}{4}x^3y^2 - \frac{9}{4}y^2x^3 = -2x^3y^2$
   c. $\frac{1}{6}xy + \frac{7}{3}xy - \frac{3}{2}yx = \frac{1}{6}xy + \frac{14}{6}xy - \frac{9}{6}yx = \frac{6}{6}xy = xy$
   d. $\frac{2}{3}y^2 - \frac{5}{2}y^2 - 5y^2 = \frac{4}{6}y^2 - \frac{15}{6}y^2 - \frac{30}{6}y^2 = -\frac{41}{6}y^2$

11. **Reduce las siguientes expresiones:**

   a. $6x^2 - 5x - 4x^2 - x = 2x^2 - 6x$
   b. $-7 + 2x^3 + 3x^3 + 1 - 5x^3 = (2 + 3 - 5)x^3 + (-7 + 1) = 0x^3 - 6 = -6$

c. $\mathbf{8xy + 2xy^2 - 3y^2x - 5yx + x^2y} = (8-5)xy + (2-3)xy^2 + (1)x^2y = 3xy - xy^2 + x^2y$
d. $\mathbf{2y^2 + 6y^2 - 5 - 4y + 11 - 9y} = (2+6)y^2 + (-4-9)y + (-5+11) = 8y^2 - 13y + 6$

12. Actividad resuelta.

13. Suprime los paréntesis y reduce las siguientes expresiones:

a. $\mathbf{8x^2 - (2x^2 + 9x^2 - x^2)} = 8x^2 - (2+9-1)x^2 = 8x^2 - 10\,x^2 = -2x^2$
b. $\mathbf{(4xy^2 - 2y^2x) + (5y^2x - 3xy^2)} = (4-2)xy^2 + (5-3)y^2x = 2xy^2 + 2y^2x = 4xy^2$
c. $\mathbf{(7x^2 - 12y^3) - (x^2 + 5y^3) + (7y^3 - 10x^2)} = 7x^2 - 12y^3 - x^2 - 5y^3 + 7y^3 - 10x^2 =$
$= (7-1-10)x^2 + (-12-5+7) = -4x^2 - 10y^3$

14. Realiza estas multiplicaciones:

a. $\mathbf{4x^3 \cdot 5x^2} = (4 \cdot 5)x^{3+2} = 20x^5$
b. $\mathbf{-2y^7 \cdot (-3y^7)} = (-2) \cdot (-3)y^{7+7} = 6y^{14}$
c. $\mathbf{6xy^4 \cdot 8x^3y^5} = (6 \cdot 8)x^{1+3}\,y^{4+5} = 48x^4y^9$
d. $\mathbf{2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{6}a\right)} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)a^{2+1} = -\frac{1}{3}a^3$
e. $\mathbf{ab^2c \cdot 4a^3b^2c \cdot (-5a^3bc^3)} = 1 \cdot 4 \cdot (-5)a^{1+3+3}\,b^{2+2+1}\,c^{1+1+3} = -20a^7b^5c^5$
f. $\mathbf{6x^4 \cdot (-3x^4) \cdot 7x^4} = 6 \cdot (-3) \cdot 7 \cdot x^{4+4+4} = -126x^{12}$
g. $\mathbf{8m^3n \cdot (-2mn) \cdot (-m^2n^2)} = 8 \cdot (-2) \cdot (-1)m^{3+1+2}n^{1+1+2} = 16m^6n^4$

h. $\mathbf{\frac{2}{5}x^3z^4 \cdot \frac{3}{4}x^2z^2} = \left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\right)x^{3+2}z^{4+2} = \frac{6}{20}x^5z^6 = \frac{3}{10}\,x^5z^6$

15. Resuelve las siguientes divisiones de monomios:

a. $\mathbf{14x^5 : 2x^3} = 7x^2$
b. $\mathbf{-8y^6 : 4y^5} = -2y$
c. $\mathbf{6x^3y^2 : 2x^3y^2} = 3$
d. $\mathbf{\frac{3a^2}{9a^2}} = \frac{1}{3}$
e. $\mathbf{\frac{12x^2y^3}{-3xy}} = -4xy^2$
f. $\mathbf{\frac{2x^2y^5}{10x^2y^4}} = \frac{1}{5}y$

16. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\mathbf{\frac{15x^4}{3x^6}} = \frac{5}{x^2}$
b $\mathbf{\frac{-6xy^4}{2y^5}} = \frac{-3x}{y}$
c. $\mathbf{\frac{-14y^2}{-21x^3y^2}} = \frac{2}{3x^3}$

d. $\mathbf{\frac{4a^5b}{a^3b^2}} = \frac{4a^2}{b}$

e. $\dfrac{\mathbf{9a^5b^3c^2}}{\mathbf{12a^5b^2c^3}} = \dfrac{3b}{4c}$

f. $\dfrac{\mathbf{5ab^2c^4}}{\mathbf{10a^3b^5c^6}} = \dfrac{1}{2c^2b^3c^2}$

17. Calcula las potencias propuestas a continuación:

a. $\mathbf{(2x^3)^4} = 16x^{12}$

b. $\mathbf{(-3x^2y)^3} = -27x^6y^3$

c. $\left(-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\mathbf{a^2bc^4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}a^4b^2c^8$

18. Efectúa estas operaciones combinadas con monomios:

a. $\mathbf{6x^4 : (-3x^2) \cdot 5x} = -2x^2 \cdot 5x = -10x^3$

b. $\mathbf{3y^4 : (-3y^2) + 5y \cdot 2y - (4x)^2} = (-y^2) + 10y^2 - 16x^2 = 9y^2 - 16x^2$

SOLUCIONES PÁG. 119

19. Dados los polinomios A (x) = $-3x^2 + 5x - 1$, B (x) = $4x^2 - 5x - 2$ y C(x) = $5x^2 - 2x + 1$, calcula:

a. Los polinomios opuestos de A (x), B (x) y C(x).

$-$A (x) = $3x^2 - 5x + 1$
$-$B (x) = $-4x^2 + 5x + 2$
$-$C (x) = $-5x^2 + 2x - 1$

b. A (x) + B (x) y B (x) + A (x). ¿Se cumple la propiedad conmutativa?

A (x) + B (x) = $x^2 - 3$
B (x) + A (x) = $x^2 - 3$
Sí se cumple la propiedad conmutativa.

c. A (x) – B (x) y B (x) – A(x).

A (x) – B (x) = $-7x^2 + 10x + 1$
B (x) – A (x) = $7x^2 - 10x - 1$

Comprueba que se cumple, para la suma, la propiedad asociativa para los polinomios A (x), B (x) y C (x).

Sí se cumple la propiedad asociativa para la suma:
A (x) + [B (x) + C (x)] = $(-3x^2 + 5x - 1) + (9x^2 - 7x - 1) = 6x^2 - 2x - 2$
[A (x) + B (x)] + C (x) = $(x^2 - 3) + (5x^2 - 2x + 1) = 6x^2 - 2x - 2$

20. Realiza la suma y la resta de los siguientes polinomios e indica el grado de los polinomios suma y resta:

a. $\mathbf{P\ (x) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 3x + 1,\ Q\ (x) = 5x^2 - 4x + 2}$

$P\ (x) + Q\ (x) = x^4 + 3x^2 - x + 3$; grado 4

$P\ (x) - Q\ (x) = x^4 - 7x^2 + 7x - 1$; grado 4

b. $\mathbf{P\ (x) = 2x^3 + 9x^2 - 5x + 3,\ Q\ (x) = -2x^3 + x^2 - x - 3}$

$P\ (x) + Q\ (x) = 10x^2 - 6x$; grado 2

$P\ (x) - Q\ (x) = 4x^3 + 8x^2 - 4x + 6$; grado 3

c. $\mathbf{P\ (x) = 6x^5 + 4x^3 - 2x,\ Q\ (x) = 3x^4 - 8x^2 - 4}$

$P\ (x) + Q\ (x) = 6x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 2x - 4$; grado 5

$P\ (x) - Q\ (x) = 6x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 2x + 4$; grado 5

21. Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de las letras para que las siguientes sumas de polinomios sean correctas:

a.

$$\begin{array}{r}
2x^3 + 7x^2 + \quad A - 4 \\
+\ x^3 - \ B \quad + 3x + C \\
\hline
D \ + 5x^2 + 4x - 5
\end{array}$$

$A = x$, $B = 2x^2$, $C = -1$, $D = 3x^3$

b.

$$\begin{array}{lr}
 & 2x^5 + \quad A \ - 3x^2 - x + B \\
+ & -3x^4 - 3x^2 - C - 1 \\
\hline
 & D - 6x^4 + \quad E \ - 5x + 3
\end{array}$$

$A = -3x^4$, $B = 4$, $C = 4x$, $D = 2x^5$, $E = -6x^2$

22. Realiza estas sumas de polinomios:

a. $\mathbf{(4x^5 - 5x^4 + x^2 - 2x + 3) + (x^4 - 2x^3 - x^2 + 4x - 1)} = 4x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 2x + 2$

b. $\mathbf{(-3x^3 + 2x^2 - 5x + 9) + (-x^3 + 2x^2 - 5x - 6)} = -4x^3 + 4x^2 - 10x + 3$

c. $\mathbf{(2x^4 - 7x^2 + x - 5) + (-2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x)} = -3x^3 - 9x^2 - 2x - 5$

23. Efectúa las siguientes restas de polinomios:

a. $\mathbf{(-x^6 + 2x^4 - 5x + 1) - (x^6 - 3x^5 + 7x^3 + 6x - 5)} = -2x^6 + 3x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 11x + 6$

b. $\mathbf{(5x^4 - x^3 + x^2 + 4) - (4x^4 + 9x^3 - 3x^2 - x + 4)} = x^4 - 10x^3 + 4x^2 + x$

c. $\mathbf{(4x^3 + 2x^2 + 3x) - (-x^3 + 2x^2 - 3x + 9)} = 5x^3 + 6x - 9$

24. Lleva a cabo las operaciones indicadas a partir de estos polinomios:

$\mathbf{A\ (x) = 4x^5 + 5x^4 - x^3 + 4x^2 - 7x + 2}$

$\mathbf{B\ (x) = 2x^4 - 11x^2 + 6x - 1}$

$\mathbf{C\ (x) = -2x^5 - 6x^3 + 7x^2 - x + 8}$

a. $\mathbf{A\ (x) + B\ (x)} = 4x^5 + 7x^4 - x^3 - 7x^2 - x + 1$

b. $\mathbf{A\ (x) - B\ (x)} = 4x^5 + 3x^4 - x^3 + 15x^2 - 13x + 3$

c. **A** (***x***) **+ C** (***x***) = $2x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 8x + 10$
d. **A** (***x***) **– C** (***x***) = $6x^5 + 5x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 6x - 6$
e. **B** (***x***) **+ C** (***x***) = $-2x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 5x + 7$
f. **B** (***x***) **– C** (***x***) = $2x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 18x^2 + 7x - 9$
g. **A** (***x***) **+ B** (***x***) **+ C** (***x***) = $2x^5 + 7x^4 - 7x^3 - 2x + 9$
h. **A** (***x***) **– B** (***x***) **– C** (***x***) = $6x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 - 12x - 5$

25. Actividad resuelta.

26. Resuelve las siguientes sumas eliminando los paréntesis:

a. $\mathbf{(4x^3 - 6x^2 + 3x - 1) + (3x^3 - 2x^2 - 7x + 4)}$
$4x^3 - 6x^2 + 3x - 1 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 4 = 7x^3 - 8x^2 - 4x + 3$
b. $\mathbf{(-2x^4 + 5x^2 - 6x + 7) + (5x^4 - 2x^3 - 3x - 2)}$
$-2x^4 + 5x^2 - 6x + 7 + 5x^4 - 2x^3 - 3x - 2 = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 9x + 5$
c. $\mathbf{(9x^3 + 8x^2 - 5x - 2) + (-4x^2 + 3x - 3)}$
$9x^3 + 8x^2 - 5x - 2 - 4x^2 + 3x - 3 = 9x^3 + 4x^2 - 2x - 5$
d. $\mathbf{(5x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x + 4) + (4x^4 - 5x^3 + 8x - 1)}$
$5x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x + 4 + 4x^4 - 5x^3 + 8x - 1 = 5x^5 + x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 3$

27. Efectúa las siguientes restas eliminando los paréntesis:

a. $\mathbf{(5x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 3) - (4x^4 + 2x^3 - 5x - 1)}$
$5x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 3 - 4x^4 - 2x^3 + 5x + 1 = x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 5x + 4$
b. $\mathbf{(6x^3 - 5x^2 + 4x - 4) - (-5x^2 - 3x + 4)}$
$6x^3 - 5x^2 + 4x - 4 + 5x^2 + 3x - 4 = 6x^3 + 7x - 8$
c. $\mathbf{(x^5 - 3x^2 + 7x + 6) - (4x^5 - 5x^3 + 2x^2 - 3)}$
$x^5 - 3x^2 + 7x + 6 - 4x^5 + 5x^3 - 2x^2 + 3 = -3x^5 + 5x^3 - 5x^2 + 7x + 9$
d. $\mathbf{(-3x^6 + 4x^5 + 2x^3 - x^2 + 9) - (3x^6 - 5x^3 + x^2 + 5x - 3)}$
$-3x^6 + 4x^5 + 2x^3 - x^2 + 9 - 3x^6 + 5x^3 - x^2 - 5x + 3 = -6x^6 + 4x^5 + 7x^3 - 2x^2 - 5x + 12$

28. Realiza las siguientes operaciones eliminando los paréntesis:

a. $\mathbf{(2x^3 + 5x) + (-8x^3 + 4x^2 + x) + (3x^3 - 2x)}$
$2x^3 + 5x - 8x^3 + 4x^2 + x + 3x^3 - 2x = -3x^3 + 4x^2 + 4x$
b. $\mathbf{(-3x^2 - 2) - (4x + 7) + (2x^2 - 6x + 5)}$
$-3x^2 - 2 - 4x - 7 + 2x^2 - 6x + 5 = -x^2 - 10x - 4$
c. $\mathbf{(-5x + 1) - (x^2 + 2x - 3) - (-3x^2 - 5x)}$
$-5x + 1 - x^2 - 2x + 3 + 3x^2 + 5x = 2x^2 - 2x + 4$
d. $\mathbf{\left(\frac{3}{2}x^2 + 5x\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 3\right) - \left(\frac{5}{2}x^2 - 1\right)}$

$$\frac{3}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{2}x^2 - x + 3 - \frac{5}{2}x^2 + 1 = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + 4$$

e. $\mathbf{\left(\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)}$

$$\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{4} + \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{2}$$

SOLUCIONES PÁG. 121

29. Calcula las siguientes multiplicaciones y divisiones:

a. $\mathbf{4a \cdot (a^2 - 7a + 2)} = 4a^3 - 28a^2 + 8a$
b. $\mathbf{-7x^3 \cdot (-x^3 - 3x + 5)} = 7x^6 + 21x^4 - 35x^3$
c. $\mathbf{(10y^4 + 6y^2 - 4y) : (-2y)} = -5y^3 - 3y + 2$
d. $\mathbf{(6a^7 + a^6 - 2a^5 + a^3) : a^3} = 6a^4 + a^3 - 2a^2 + 1$

30. Realiza estas multiplicaciones:

a. $\mathbf{(x + 2) \cdot (x + 3)} = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$
b. $\mathbf{(a - 1) \cdot (3a + 5)} = 3a^2 + 5a - 3a - 5 = 3a^2 + 2a - 5$
c. $\mathbf{(4y^2 + 3) \cdot (-2y - 6)} = -8y^3 - 24y^2 - 6y - 18$
d. $\mathbf{(5x^2 - 2x) \cdot (x^2 + 1)} = 5x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x$

31. Multiplica los siguientes polinomios y halla el grado del polinomio producto:

a. $\mathbf{(3x^2 - 5x + 2) \cdot (x - 2)} = 3x^3 - 6x^2 - 5x^2 + 10x + 2x - 4 = 3x^3 - 11x^2 + 12x - 4$; grado 3

b. $\mathbf{(2x^2 + 8x) \cdot (x^2 + 3x - 1)} = 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 8x^3 + 24x^2 - 8x = 2x^4 + 14x^3 + 22x^2 - 8x$ grado 4

32. Opera y reduce al máximo.

a. $\mathbf{2 \cdot (x^2 - 4x) + 5 \cdot (3x + 1)} = 2x^2 - 8x + 15x + 5 = 2x^2 + 7x + 5$
b. $\mathbf{3x \cdot (-7x^2 + 2x) - (4x^2 - 2x + 6)} = -21x^3 + 6x^2 - 4x^2 + 2x - 6 = -21x^3 + 2x^2 + 2x - 6$
c. $\mathbf{x^2 \cdot (5x - 4) + 2x^2 \cdot (3x + 2)} = 5x^3 - 4x^2 + 6x^3 + 4x^2 = 11x^3$

33. Extrae factor común de estas expresiones:

a. $\mathbf{2x + 4y} = 2 \cdot (x + 2y)$
b. $\mathbf{5x^2 - 6x} = x \cdot (5x - 6)$
c. $\mathbf{4a^4 + 5a^3 - 2a^2} = a^2 \cdot (4a^2 + 5a - 2)$
d. $\mathbf{3y^5 - 6y^4 - 9y^3 + 15y^2} = 3y^2 \cdot (y^3 - 2y^2 - 3y + 5)$
e. $\mathbf{a^2b + ab - ab^2} = ab \cdot (a + 1 - b)$
f. $\mathbf{-8xy^2 + 4y^2 - 12x^2y^3} = 4y^2 \cdot (-2x + 1 - 3x^2y)$
g. $\mathbf{5x^2yz^3 - 2x^3y^2z^2 + xyz^2} = xyz^2 \cdot (5xz - 2x^2y + 1)$
h. $\mathbf{\frac{2}{3}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x} = \frac{2}{3}x \cdot (x^4 - 2x^2 + 4)$

SOLUCIONES PÁG. 123

34. Calcula las siguientes potencias:

a. $\mathbf{(x + 5)^3}$
$(x + 5) \cdot (x + 5) \cdot (x + 5) = (x^2 + 5x + 5x + 25) \cdot (x + 5) =$
$= x^3 + 5x^2 + 5x^2 + 25x + 5x^2 + 25x + 25x + 125 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

b. $\mathbf{(x^2 - 3x + 1)^2}$
$(x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 1) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x^3 + 9x^2 - 3x + x^2 - 3x + 1 =$
$= x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$

c. $\mathbf{(2x^4 + 5x^2 - 3)}^2$
$(2x^4 + 5x^2 - 3) \cdot (2x^4 + 5x^2 - 3) =$
$= 4x^8 + 10x^6 - 6x^4 + 10x^6 + 25x^4 - 15x^2 - 6x^4 - 15x^2 + 9 =$
$= 4x^8 + 20x^6 + 13x^4 - 30x^2 + 9$

35. Sin realizar la multiplicación, y utilizando la expresión de la identidad notable del cuadrado de la suma, calcula:

a. $(\boldsymbol{x} + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
b. $(3\boldsymbol{a} + 1)^2 = 9a^2 + 6a + 1$
c. $(6 + \boldsymbol{b})^2 = b^2 + 12b + 36$
d. $(4\boldsymbol{y}^2 + 5)^2 = 16y^4 + 40y^2 + 25$
e. $(\boldsymbol{x}^3 + 3)^2 = x^6 + 6x^3 + 9$
f. $(2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y})^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$
g. $(7\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{x}^2)^2 = 9x^4 + 42x^3 + 49x^2$
h. $(\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}^3)^2 = a^2 + 10ab^3 + 25b^6$
i. $(\boldsymbol{xy} + 3\boldsymbol{y})^2 = x^2y^2 + 6xy^2 + 9y^2$

36. Sin hacer la multiplicación, y utilizando la expresión de la identidad notable del cuadrado de la diferencia, halla:

a. $(\boldsymbol{a} - 3)^2 = a^2 - 6a + 9$
b. $(2\boldsymbol{x} - 5)^2 = 4x^2 - 20x + 25$
c. $(7\boldsymbol{x}^3 - 1)^2 = 49x^6 - 14x^3 + 1$
d. $(4 - \boldsymbol{y})^2 = y^2 - 8y + 16$
e. $(\boldsymbol{x}^2 - 3\boldsymbol{x})^2 = x^4 - 6x^3 + 9x^2$
f. $(1 - \boldsymbol{a}^2)^2 = a^4 - 2a^2 + 1$
g. $(\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{y}^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
h. $(5\boldsymbol{a}^4 - 2\boldsymbol{a}^3)^2 = 25a^8 - 20a^7 + 4a^6$
i. $(9 - \boldsymbol{b}^5)^2 = b^{10} - 18b^5 + 81$

37. Realiza las siguientes sumas por diferencias:

a. $(\boldsymbol{x} + 5) \cdot (\boldsymbol{x} - 5) = x^2 - 5x + 5x - 25 = x^2 - 25$
b. $(\boldsymbol{y} - 1) \cdot (\boldsymbol{y} + 1) = y^2 + y - y - 1 = y^2 - 1$
c. $(4\boldsymbol{a} + 3) \cdot (4\boldsymbol{a} - 3) = 16a^2 - 12a + 12a - 9 = 16a^2 - 9$
d. $(5\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}) \cdot (5\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y}) = 25x^2 - 10xy + 10xy - 4y^2 = 25x^2 - 4y^2$
e. $(\boldsymbol{x}^2 - 4\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x}) = x^4 + 4x^3 - 4x^3 - 16x^2 = x^4 - 16x^2$
f. $(2\boldsymbol{a}^3 + 3\boldsymbol{a}^2) \cdot (2\boldsymbol{a}^3 - 3\boldsymbol{a}^2) = 4a^6 - 6a^5 + 6a^5 - 9a^4 = 4a^6 - 9a^4$

38. Aplica las expresiones de las identidades notables para calcular estas operaciones:

a. $\left(\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

b. $\left(\boldsymbol{x} + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\boldsymbol{x} - \frac{2}{3}\right) = x^2 - \frac{4}{9}$

c. $\left(\boldsymbol{x}^3 + \frac{4}{7}\right)^2 = x^6 + \frac{8}{7}x^3 + \frac{16}{49}$

d. $\left(\boldsymbol{x} + \sqrt{5}\right) \cdot \left(\boldsymbol{x} - \sqrt{5}\right) = x^2 - 5$

e. $\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x}^2 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\right)^2 = \frac{9}{16}x^4 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{25}$

f. $\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{4}} - \frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{9}}\right)^2 = \frac{x^2}{16} - \frac{xy}{18} + \frac{y^2}{81}$

39. Actividad resuelta.

40. Expresa los polinomios propuestos a continuación como una identidad notable:

a. $\boldsymbol{x^2 - 10x + 25} = (x - 5)^2$
b. $\boldsymbol{t^2 - 36} = (t + 6) \cdot (t - 6)$
c. $\boldsymbol{9x^2 + 24x + 16} = (3x + 4)^2$
d. $\boldsymbol{a^2 + 1 + 2a} = (a + 1)^2$
e. $\boldsymbol{4x^2 - 28x + 49} = (2x - 7)^2$
f. $\boldsymbol{4y^2 - 9} = (2y + 3) \cdot (2y - 3)$

41. Corrige los errores cometidos en las siguientes identidades algebraicas notables:

a. $\boldsymbol{x^2 - 8x + 16 = (x + 4)^2}$
$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$
b. $\boldsymbol{25x^2 + 4 = (5x + 2) \cdot (5x - 2)}$
$25x^2 - 4 = (5x + 2) \cdot (5x - 2)$
c. $\boldsymbol{(4x - 2)^2 = 4x^2 - 16x + 4}$
$(4x - 2)^2 = 16x^2 - 16x + 4$
d. $\boldsymbol{(x + 9)^2 = x^2 + 81}$
$(x + 9)^2 = x^2 + 18x + 81$
e. $\boldsymbol{9x^2 - 1 = (3x - 1)^2}$
$9x^2 - 1 = (3x + 1) \cdot (3x - 1)$

42. Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de R para que las siguientes igualdades sean ciertas.

a. $\boldsymbol{(x - 5)^2 = \mathrm{R} - 10x + 25}$
$x^2 - 10x + 25 = \mathrm{R} - 10x + 25 \Rightarrow \mathrm{R} = x^2$
b. $\boldsymbol{4x^2 - \mathrm{R} = (2x + 3) \cdot (2x - 3)}$
$4x^2 - \mathrm{R} = 4x^2 - 9 \Rightarrow \mathrm{R} = 9$
c. $\boldsymbol{(\mathrm{R} + 7x)^2 = 16x^6 + 56x^4 + 49x^2}$
$\mathrm{R}^2 + 14\mathrm{R}x + 49x^2 = 16x^6 + 56x^4 + 49x^2 \Rightarrow \mathrm{R} = 4x^3$
d. $\boldsymbol{(8x^2 + 6)^2 = 64x^4 + \mathrm{R} + 36}$
$64x^2 + 96x^2 + 36 = 64x^4 + \mathrm{R} + 36 \Rightarrow \mathrm{R} = 96x^2$

43. Reduce todo lo posible estas expresiones:

a. $\boldsymbol{(x + 3)^2 + (x - 3)^2} = x^2 + 9 + 6x + x^2 + 9 - 6x = 2x^2 + 18$
b. $\boldsymbol{(x - 1)^2 + (x + 1) \cdot (x - 1)} = x^2 + 1 - 2x + x^2 - 1 = 2x^2 - 2x$
c. $\boldsymbol{(2x + 5)^2 - 2 \cdot (2x + 5)} = 4x^2 + 25 + 20x - 4x - 10 = 4x^2 + 16x + 15$
d. $\boldsymbol{(x^2 - 4)^2 - (x^2 + 4) \cdot (x^2 - 4)} = x^4 + 16 - 8x^2 - x^4 + 16 = -8x^2 + 32$
e. $\boldsymbol{(x + 1)^2 + (x - 1)^2 - (x + 1) \cdot (x - 1)} = x^2 + 1 + 2x + x^2 + 1 - 2x - x^2 + 1 = x^2 + 3$

44. Resuelve, sin calcular, la siguiente operación: $121^2 - 120^2$
$121^2 - 120^2 = (121 + 120) \cdot (121 - 120) = 241 \cdot 1 = 241$

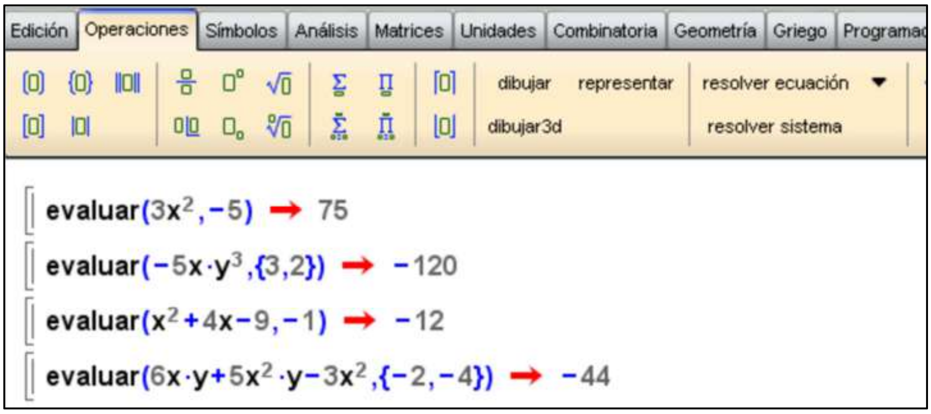
45. En grupos, hallad las potencias sucesivas del binomio $x + 1$: $(x + 1)^0$, $(x + 1)^1$, $(x + 1)^2$, $(x + 1)^3$, $(x + 1)^4$… Posteriormente, sin realizar el cálculo de la potencia $(x + 1)^{12}$, contestad a las siguientes preguntas:
$(x + 1)^0 = 1$
$(x + 1)^1 = x + 1$
$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

a. ¿Cuál es el grado de la potencia?
Grado 12.
b. ¿Cuántos términos tendrá?
13 términos.
c. ¿Cuáles serán su coeficiente principal y su término independiente?
Coeficiente principal 1; término independiente 1.

SOLUCIONES PÁG. 124

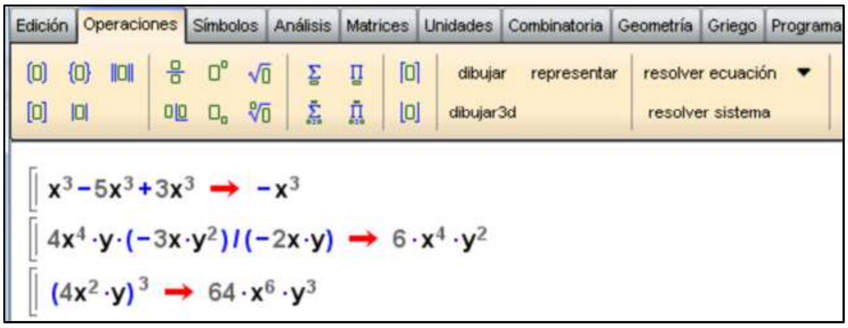
1. Halla el valor numérico de los siguientes monomios y polinomios y comprueba tus soluciones con Wiris:

a. $3x^2$ para $x = -5$
75
b. $-5xy^3$ para $x = 3$ e $y = 2$
-120
c. $x^2 + 4x - 9$ para $x = -1$
-12
d. $6xy + 5x^2y - 3x^2$ para $x = -2$ e $y = -4$
-44



2. Realiza las siguientes operaciones con monomios y comprueba los resultados con Wiris:

a. $x^3 - 5x^3 + 3x^3$ $= -x^3$
b. $4x^4y \cdot (-3xy^2) : (-2xy)$ $= (-12\ x^5\ y^3) : (-2xy) = 6x^4y^2$
c. $(4x^2y)^3$ $= 64x^6y^3$



3. **Resuelve estas operaciones con polinomios y comprueba los resultados con Wiris:**

a. $\boldsymbol{(4x^2 - 2x + 3) - (2x^4 - 5x^2 + 7x - 3)} =$

$= 4x^2 - 2x + 3 - 2x^4 + 5x^2 - 7x + 3 = -2x^4 + 9x^2 - 9x + 6$

b. $\boldsymbol{(-6x^3 - 3x^2 + 4x + 5) + (5x^3 + 3x^2 - 2)} =$

$= -6x^3 - 3x^2 + 4x + 5 + 5x^3 + 3x^2 - 2 = -x^3 + 4x + 3$

c. $\boldsymbol{(-2x^3 + 3x^2 - 5x + 1) \cdot (4x^2 + x - 2)} =$

$= -8x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 12x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 20x^3 - 5x^2 + 10x + 4x^2 + x - 2 =$

$= -8x^5 + 10x^4 - 13x^3 - 7x^2 + 11x - 2$

d. $\boldsymbol{(5x + 7) \cdot (5x - 7)} = 25x^2 - 49$

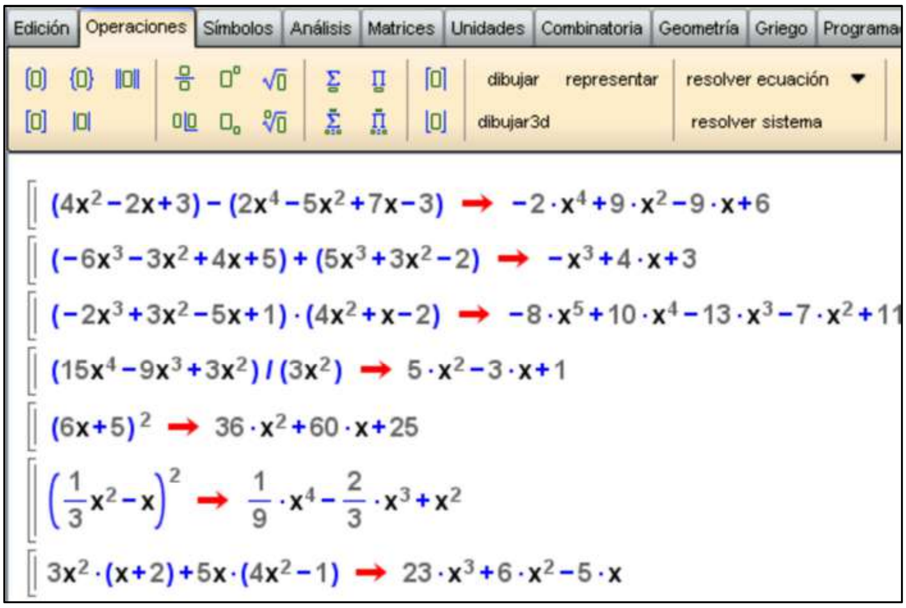
e. $\boldsymbol{(15x^4 - 9x^3 + 3x^2) : 3x^2} = 5x^2 - 3x + 1$

f. $\boldsymbol{(6x + 5)^2} = 36x^2 + 60x + 25$

g. $\boldsymbol{\left(\frac{1}{3}x^2 - x\right)^2} = x^4 - x^3 + x^2$

h. $\boldsymbol{3x^2 \cdot (x + 2) + 5x \cdot (4x^2 - 1)} =$

$3x^3 + 6x^2 + 20x^3 - 5x = +23x^3 + 6x^2 - 5x$



SOLUCIONES PÁG. 125

1. **¿Cuántos valores numéricos tiene una expresión algebraica?**
Infinitos, tantos como valores tomen sus variables.

2. **¿Puede tener un monomio dos valores numéricos iguales para distintos valores de sus variables?**
Sí, puede tener dos valores numéricos iguales para distintos valores de sus variables.

3. **Define monomio y polinomio. ¿Qué diferencias hay?**
Un monomio es el producto de un número por una o varias letras elevadas a sus correspondientes exponentes naturales. Un polinomio es la suma o resta de varios monomios.

4. **¿Es un número un monomio? En caso afirmativo, indica cuáles son su parte literal y su grado.**
Sí, sin parte literal y de grado 0.

5. **¿Puede un monomio de grado 1 tener dos variables? Justifica tu respuesta.**
No, pues al menos debería tener grado 2, ya que el exponente menor al que puede estar elevada una variable es 1.

6. **¿Qué condición han de cumplir dos monomios para poder sumarse o restarse?**
Deben ser semejantes.

7. **Al dividir dos monomios, ¿qué tipo de expresión algebraica se puede obtener?**
Se puede obtener un número, un monomio o una fracción algebraica.

8. **Define grado de un monomio y de un polinomio.**
El grado de un monomio es el número que resulta de sumar los exponentes de sus letras. El grado de un polinomio es el máximo grado de los monomios que lo componen.

9. **¿Cómo se llama el polinomio que tiene dos términos? ¿Y el que tiene tres? Por un ejemplo de cada tipo.**
De dos monomios se llama binomio: $25x^2 - 49$
De tres monomios se llama trinomio: $36x^2 + 60x + 25$

10. **Define polinomio completo y ordenado y pon un ejemplo de cada tipo, ambos de grado tres.**
Un polinomio es completo si tiene todos los términos desde el término de grado mayor hasta el menor grado, por ejemplo, $60x^2 + 36x^3 + 60x + 25$
Un polinomio está ordenado si sus términos van de grado mayor a menor, por ejemplo: $36x^3 + 60x + 25$

11. **¿Puede un polinomio no tener término independiente? ¿Y coeficiente principal?**
Sí, puede no tener término independiente. No, un polinomio siempre tiene coeficiente principal.

12. ¿Se cumplen las propiedades conmutativa y asociativa para la suma de polinomios? ¿Y para la multiplicación? Por un ejemplo que lo demuestre.
Sí se cumplen ambas propiedades para la suma y la multiplicación de polinomios.

Sean, por ejemplo, los polinomios A $(x) = 3x + 5$; B $(x) = x^2 - 2x$; C $(x) = 4x^2 + 6$

Suma: conmutativa
$A(x) + B(x) = (3x + 5) + (x^2 - 2x) = x^2 + x + 5$
$B(x) + A(x) = (x^2 - 2x) + (3x + 5) = x^2 + x + 5$

Asociativa:
$A(x) + [B(x) + C(x)] = (3x + 5) + (x^2 - 2x + 4x^2 + 6) = (3x + 5) + (5x^2 - 2x + 6) =$
$= 5x^2 + x + 11$
$[A(x) + B(x)] + C(x) = (3x + 5 + x^2 - 2x) + (4x^2 + 6) = (x^2 + x + 5) + (4x^2 + 6) =$
$= 5x^2 + x + 11$

Multiplicación: conmutativa
$A(x) \cdot B(x) = (3x + 5) \cdot (x^2 - 2x) = 3x^3 - x^2 - 10x$
$B(x) \cdot A(x) = (x^2 - 2x) \cdot (3x + 5) = 3x^3 - x^2 - 10x$

Asociativa:
$A(x) \cdot [B(x) \cdot C(x)] = (3x + 5) \cdot [(x^2 - 2x) \cdot (4x^2 + 6)] =$
$= (3x + 5) \cdot (4x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 12x) =$
$= 12x^5 - 4x^4 - 22x^3 - 6x^2 - 60x$
$[A(x) \cdot B(x)] \cdot C(x) = [(3x + 5) \cdot (x^2 - 2x)] \cdot (4x^2 + 6) =$
$= (3x^3 - x^2 - 10x) \cdot (4x^2 + 6) =$
$= 12x^5 - 4x^4 - 22x^3 - 6x^2 - 60x$

13. Define el opuesto de un polinomio. ¿Se puede calcular el opuesto de cualquier polinomio?
El opuesto del polinomio A (x) es el polinomio cuyos coeficientes son los opuestos de los coeficientes de A (x), es decir, los coeficientes cambiados de signo; y se le designa por –A (x). Para todos los polinomios se puede calcular su opuesto.

14. ¿Existe algún polinomio que, sumado con cualquier otro polinomio, deje a este invariable?
Sí, el polinomio nulo.

15. El resultado de dividir un polinomio entre un monomio, ¿qué tipo de expresión algebraica es?
Es un polinomio.

16. ¿Cuántos tipos de identidades algebraicas notables hay? Enúncialas y escribe su expresión.
Hay tres:
- Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Cuadrado de una diferencia: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Suma por diferencia: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

17. Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Gloster…
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 126 – REPASO FINAL

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. **Escoge la expresión adecuada en cada caso:**

   a. **El doble de un número, menos cinco.**
   I. $2(x - 5)$ **II. $x^2 - 5$** III. $2x - 5$
   b. **La tercera parte de la suma de tres números.**
   I. $3(x + y + z)$ II. $\frac{x+y+z}{3}$ **III. $\frac{x}{3} + y + z$**
   c. **El cuadrado de la diferencia de un número y su mitad.**
   I. $\left(x - \frac{x}{2}\right)^2$ **II. $2x - \frac{x}{2}$** **III. $x^2 - \frac{x}{2}$**
   d. **El producto de un número y el que le sigue.**
   I. $\frac{x}{x+1}$ **II. $x \cdot y$** III. $x \cdot (x + 1)$

2. **Si x es el número de amigos de Juan, escribe una expresión algebraica para cada uno de estos enunciados:**

   a. **Rosa tiene el triple de amigos que Juan.** $\rightarrow 3x$
   b. **José tiene dos amigos menos que Juan.** $\rightarrow x - 2$
   c. **David presume de tener el cubo de la mitad de los amigos que tiene Juan.**
   $\rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3$
   d. **Ana tiene un 30 % de los amigos que tiene Juan.** $\rightarrow 0{,}3x$

3. **Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios:**
   a. **$-2xy^4$** $\rightarrow$ Sí
   b. **$7 + 3a + 4a^2$** $\rightarrow$ No
   c. **$\frac{8z^3}{5}$** $\rightarrow$ Sí
   d. **$\frac{1}{b^2}$** $\rightarrow$ No
   e. **$6x - 5$** $\rightarrow$ No
   f. **x^3** $\rightarrow$ Sí

4. **Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla:**

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$-8x^3$	-8	x^3	3
$-m^3n$	-1	m^3n	4
$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}$	x	1
$2a^3b^5$	2	a^3b^5	8
3	3		0

5. **Indica cuáles de los siguientes monomios son semejantes:**

x^2y^3 $-6x^3y^2$ $5a^2b^3$ $1{,}2y^2x^3$ $\frac{3}{4}y^3x^2$ x^3y^2

Son semejantes: x^2y^3, $\frac{3}{4}y^3x^2$.

Son semejantes: $-6x^3y^2$, $1{,}2y^2x^3$, x^3y^2

6. **Dado un monomio, ¿cuántos monomios semejantes a él hay?**
Hay infinitos.

7. **Escribe dos monomios no semejantes que tengan dos variables y sean de grado cinco. ¿Cuántos monomios cumplen estas condiciones?**
Respuesta abierta. Por ejemplo:
$6y^4x$ $-9x^2y^3$ $7z^2y^3$ z^3y^2 $-9z^2y^3$

Hay infinitos.

8. **Indica, para los siguientes polinomios, su número de términos y de variables, el término independiente y el grado:**

a. **$4x^3 + 5x - 2$**
Tres términos y una variable. Término independiente: –2. Grado: 3

b. **$3x - 2y^2 + 4y + 1$**
Cuatro términos y dos variables. Término independiente: 1. Grado: 2

c. **$-2a^4 - 5a + 3a^2$**
Tres términos y una variable. Término independiente: no tiene. Grado: 4

d. **$xy^4 + 2x^2y^3 - 5xy + 2xz + 3$**
Cinco términos y tres variables. Término independiente: 3. Grado: 5

9. **Escribe un polinomio de una variable que tenga:**

a. **Como coeficiente principal 3 y como término independiente –1.**
Respuesta abierta. Por ejemplo: $3x^2 - 4x - 1$

b. **Tres términos y sea de grado 4.**
Respuesta abierta. Por ejemplo: $7x^2y^2 - 4xy - 2x$

c. **Grado 3 y esté ordenado y completo.**
Respuesta abierta. Por ejemplo: $-5x^3 + x^2 + 6x - 3$

10. **Halla el valor de a, b y c para que el polinomio $P(x) = 4x + (a - 5)x^2 + bx^3 - 2 + x^3 + c$ sea de grado 2, tenga como coeficiente principal 3 y carezca de término independiente.**
Para que tenga grado 2, los términos de grado 3 deben ser nulos:
$bx^3 + x^3 = 0 \Rightarrow b + 1 = 0 \Rightarrow b = -1$
Para que el coeficiente principal sea 3, la suma de los coeficientes de los monomios de grado 2 deben sumar 3:
$a - 5 = 3 \Rightarrow a = 3 + 5 \Rightarrow a = 8$
Para que carezca de término independiente, la suma de los coeficientes debe ser nulo:
$-2 + c = 0 \Rightarrow c = 2$

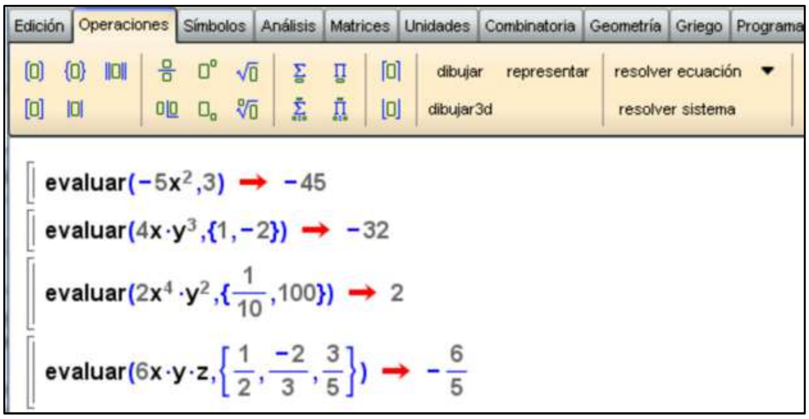
11. Halla el valor numérico de los siguientes monomios en los valores indicados. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. $-5x^2$ **para** $x = 3$
-45

b. $4xy^3$ **para** $x = 1$ **e** $y = -2$
-32

c. $2x^4y^2$ **para** $x = \frac{1}{10}$ **e** $y = 100$
2

d. $6xyz$ **para** $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-2}{3}$ **y** $z = \frac{3}{5}$
$-\frac{6}{5}$



12. Sabiendo que $x = 4$ e $y = -2$, calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a. $xy + 5x \to 12$

b. $\frac{-4x + y^2}{2} \to -6$

c. $7 \cdot (x + y)^2 \sqrt{2} \to 56$

d. $3y^2 + 2 \to 14$

13. Si $2x^2 + 5y = -1$, calcula el valor numérico de las estas expresiones:

a. $4 \cdot (2x^2 + 5y)^3 \to -4$

b. $-3 \cdot (2x^2 + 5y)^2 + 1 \to -2$

c. $\frac{7}{2x^2 + 5y - 6} \to -1$

d. $(2x^2 + 5y) : (-2) \to \frac{1}{2}$

14. Visita esta página de Internet, en la que encontrarás actividades para repasar el cálculo del valor numérico de una expresión algebraica:

conteni2.educarex.es/mats/101121/contenido/

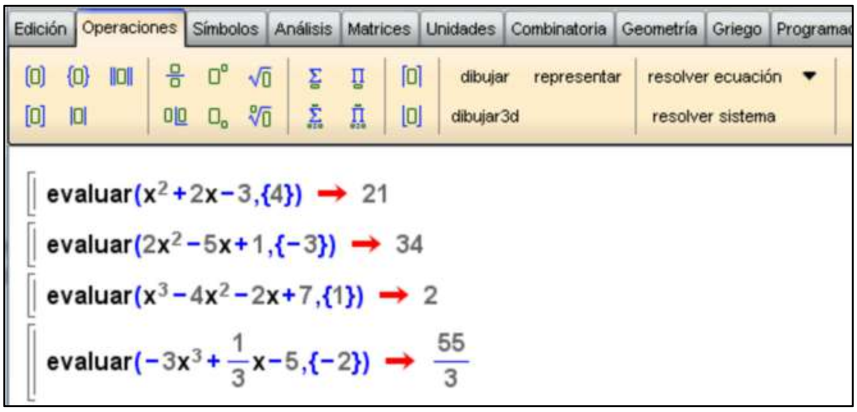
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 127

15. Halla el valor numérico de los polinomios propuestos en los valores indicados. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. $x^2 + 2x - 3$ **en** $x = 4$
   21
b. $2x^2 - 5x + 1$ **en** $x = -3$
   34
c. $x^3 - 4x^2 - 2x + 7$ **en** $x = 1$
   2
d. $-3x^3 + \frac{1}{3}x - 5$ **en** $x = -2$

$\frac{55}{3}$



16. Dado el polinomio P (x) = x^2 – kx + 3, halla el valor de k para que el valor numérico del polinomio en x = 2 sea 1.

$2^2 - k \cdot 2 + 3 = 1 \Rightarrow 7 - k \cdot 2 = 1 \Rightarrow 7 - 1 = k \cdot 2 \Rightarrow k = 3$

17. Una compañía de telefonía móvil cobra 0,25 € por establecimiento de llamada más 0,10 € por minuto hablado.

a. **Escribe la expresión algebraica que relaciona el número de minutos hablados y el precio pagado.**
   Si x es el número de minutos: $0{,}10x + 0{,}25$
b. **Si se hace una llamada de 7 min, ¿cuánto se pagará por ella?**
   $0{,}10 \cdot 7 + 0{,}25 = 0{,}95$ €

OPERACIONES CON MONOMIOS

18. Efectúa las siguientes sumas y restas con monomios:

a. $x^2 + x^2 = 2x^2$
b. $4a^5 - 7a^5 = -3a^5$
c. $-2x^2y^4 + 6x^2y^4 = 4x^2y^4$

d. $\boldsymbol{-x^3 - 2x^3} = -3x^3$
e. $\boldsymbol{1{,}5x^3y - 0{,}4x^3y + 2{,}3x^3y} = 3{,}4x^3y$
f. $\boldsymbol{-9y^4 + 5y^4 + 3y^4} = -y^4$
g. $\boldsymbol{-6ab + 7ab - ab} = 0$
h. $\boldsymbol{8x + 2x - 3x + x - 7x} = x$

19. Realiza estas sumas y restas y simplifica siempre que sea posible:

a. $\boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{4}x^4} = -x^4$

b. $\boldsymbol{\frac{2}{3}y^2 + \frac{7}{3}y^2} = 3y^2$

c. $\boldsymbol{3x^2y - \frac{1}{2}x^2y + \frac{3}{5}x^2y} = \frac{30}{10}x^2y - \frac{5}{10}x^2y + \frac{6}{10}x^2y = \frac{31}{10}x^2y$

d. $\boldsymbol{\frac{2}{5}ab^3 - \frac{1}{3}ab^3 - \frac{3}{10}ab^3} = \frac{12}{30}ab^3 - \frac{10}{30}ab^3 - \frac{9}{30}ab^3 = -\frac{7}{30}ab^3$

20. Reduce las expresiones propuestas.

a. $\boldsymbol{3x^4 + 2x^3 - 5x^4 + 7x^3} = -2x^4 + 9x^3$
b. $\boldsymbol{5a^2 - 8a - 2a + 3 - 6a^2 + 1} = -a^2 - 10a + 4$
c. $\boldsymbol{-4ab^3 + a^3b - 3a^3b - 2ab^3 + 3ab^3} = -3ab^3 - 2a^3b$
d. $\boldsymbol{2x^2 - y^2 + x^2 - 5y^2 - 4x^2 + 6y^2 - 3x^2} = -4x^2$

21. Realiza las siguientes multiplicaciones e indica el grado del monomio resultado:

a. $\boldsymbol{2x \cdot 3x} = 6x^2$, grado 2
b. $\boldsymbol{5y^3 \cdot (-4y)} = -20y^4$, grado 4
c. $\boldsymbol{-3{,}2x^4 \cdot (-0{,}7x^3)} = 2{,}24x^7$, grado 7
d. $\boldsymbol{4a \cdot 2b} = 8ab$, grado 2
e. $\boldsymbol{a^5 \cdot a^3 \cdot a^2} = a^{10}$, grado 10
f. $\boldsymbol{4x^4y \cdot (-2x^4y^2) \cdot 5x^4y^3} = -40x^{12}y^6$, grado 18

22. Suprime los paréntesis y reduce estas expresiones:

a. $\boldsymbol{3x^3 + (2x^3 - x^3)} = 3x^3 + 2x^3 - x^3 = 4x^3$
b. $\boldsymbol{8y^4 - (-5y^4 + 9y^4)} = 8y^4 + 5y^4 - 9y^4 = 4y^4$
c. $\boldsymbol{(4x - 6x) + (-x - 2x)} = 4x - 6x - x - 2x = -5x$
d. $\boldsymbol{-(2xy^2 - xy^2) - (-3xy^2 - 5xy^2)} = -2xy^2 + xy^2 + 3xy^2 + 5xy^2 = 7xy^2$
e. $\boldsymbol{(5x^4 + 3y^2) + (-4x^4 + y^2) - (-2y^2 + x^4)} = 5x^4 + 3y^2 - 4x^4 + y^2 + 2y^2 - x^4 = 6y^2$

23. Resuelve estas divisiones de monomios:

a. $\boldsymbol{6x^4 : 3x} = 2x^3$

b. $\boldsymbol{10a^2 : (-4a^2)} = -\frac{5}{2}$

c. $\boldsymbol{(-4y^3) : (-y^2)} = 4y$
d. $\boldsymbol{14x^7 : 2x^5} = 7x^2$
e. $\boldsymbol{15a^2b^3 : 5ab^2} = 3ab$

f. $\boldsymbol{a^4b^2c^2 : 2ab^2c} = \frac{1}{2}a^3c$

24. Simplifica las fracciones algebraicas y comprueba tus resultados con Wiris.

a. $\mathbf{\dfrac{12x^2}{4x^3}} = \dfrac{3}{x}$

b. $\mathbf{\dfrac{-8y}{4x^4y^3}} = \dfrac{-2}{x^4y^2}$

c. $\mathbf{\dfrac{x^2y^2}{x^5}} = \dfrac{y^2}{x^3}$

d. $\mathbf{\dfrac{a^4b^2}{2a^4b^6}} = \dfrac{1}{2b^4}$

e. $\mathbf{\dfrac{16a^3b^4c}{4a^2b^5c}} = \dfrac{4a}{b}$

f. $\mathbf{\dfrac{18x^2yz^3}{12x^3y^4z^5}} = \dfrac{3}{2xy^3z^2}$

25. Efectúa las siguientes operaciones:

a. $\mathbf{3x \cdot (-5x^2) \cdot \dfrac{2}{3}x^3} = -10x^6$

b. $\mathbf{4x^5 : 2x^3 \cdot (-7x^2)} = 2x^2 \cdot (-7x^2) = -14x^4$

c. $\mathbf{\dfrac{2}{3}x^6 \cdot \dfrac{1}{2}x^2} = \dfrac{1}{3}x^8$

d. $\mathbf{-\dfrac{3}{4}y^6 : \dfrac{2}{5}y^2} \; -\dfrac{15}{8}y^4$

26. Calcula estas potencias con monomios:

a. $\mathbf{(x^2)^3} = x^6$

b. $\mathbf{(2x^4)^5} = 32x^{20}$

c. $\mathbf{\left(-\dfrac{1}{3}xy^4\right)^2} = \dfrac{1}{9}x^2y^8$

d. $\mathbf{\left(\dfrac{3}{5}x^3y^2\right)^3} \; \dfrac{27}{125}x^9y^6$

27. Copia en tu cuaderno y sustituye la letra R por el monomio que falta en cada caso:

a. $\mathbf{5x^4 \cdot R = -15x^7}$

$R = \dfrac{-15x^7}{5x^4} \Rightarrow R = -3x^3$

b. $\mathbf{R : 2x^2y^3 = 4x^3}$

$R = (2x^2y^3)\cdot(4x^3) \Rightarrow R = 8x^5y^3$

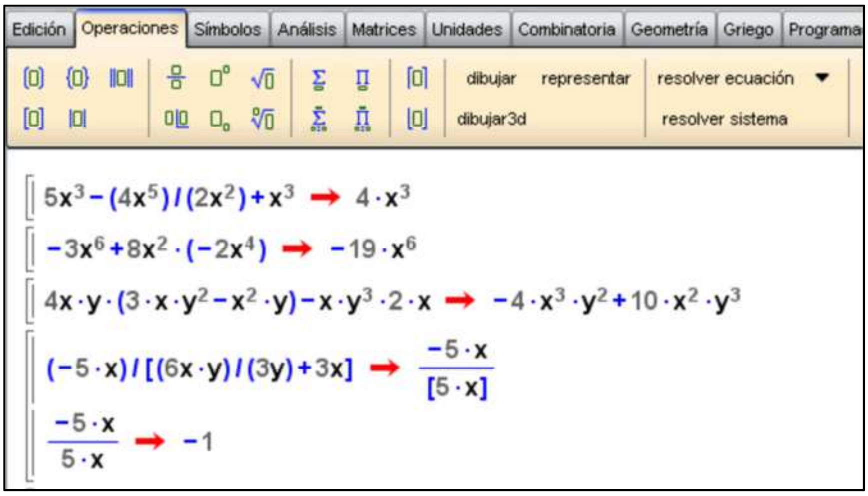
c. **$R^3 = -64x^3y^6$**
$R^3 = (-4xy^2)^3 \Rightarrow R = -4xy^2$
d. **$R \cdot (-3x^2) + 7x^5 = x^5$**
$$R \cdot (-3x^2) = x^5 - 7x^5 \Rightarrow R \cdot (-3x^2) = -6x^5 \Rightarrow R = \frac{-6x^5}{-3x^2} \Rightarrow R = 2x^3$$

28. Indica si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas y corrige los errores.

a. **$x + x = x^2$**
Falsa: $x + x = 2x$
b. **$3y + y = 4y$**
Verdadera
c. **$a + b = ab$**
Falsa: $a + b = a + b$
d. **$(3x)^2 = 3x^2$**
Falsa: $(3x)^2 = 9x^2$
e. **$5x - 3 = 2x$**
Falsa: $5x - 3 = 5x - 3$
f. **$2 \cdot (a - b) = 2a - b$**
Falsa: $2(a - b) = 2a - 2b$

29. Efectúa las operaciones combinadas con monomios. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. **$5x^3 - 4x^5 : 2x^2 + x^3$**
$5x^3 - 2x^3 + x^3 = 4x^3$
b. **$-3x^6 + 8x^2 \cdot (-2x^4)$**
$-3x^6 - 16x^6 = -19x^6$
c. **$4xy \cdot (3xy^2 - x^2y) - xy^3 \cdot 2x$**
$12x^2y^3 - 4x^3y^2 - 2x^2y^3 = 10x^2y^3 - 4x^3y^2$
d. **$-5x : (6xy : 3y + 3x)$**
$-5x : (2x + 3x) = -5x : 5x = -1$



SOLUCIONES PÁG. 128

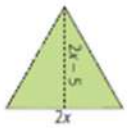
30. Expresa el perímetro y el área de los siguientes polígonos. Calcula, a partir de su fórmula, el perímetro y el área cuando $x = 3$.

a.

$P = 4x$; $A = x^2$

Si $x = 3 \Rightarrow P = 12$ u, $A = 9$ u^2

b.



$P = 6x$; $A = \dfrac{(2x-5)\cdot 2x}{2} = 2x^2 - 5x$

Si $x = 3 \Rightarrow P = 18$ u, $A = 3$ u^2

OPERACIONES CON POLINOMIOS

31. Realiza la suma y la resta de los polinomios A (x) y B (x) en cada uno de los casos propuestos. Indica el grado de los polinomios suma y resta.

a. A (x) = $5x^2 - 8x + 3$, B (x) = $-4x^2 + 6x + 2$
A (x) + B (x) = $x^2 - 2x + 5$, grado 2
A (x) – B (x) = $9x^2 - 14x + 1$, grado 2

b. A (x) = $-3x^4 + 5x^3 - 2x + 1$, B (x) = $3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x$
A (x) + B (x) = $3x^3 + 5x^2 - 6x + 1$, grado 3
A (x) – B (x) = $-6x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 2x + 1$, grado 4

c. A (x) = $2x^3 + x^2 - 9x - 3$, B (x) = $-x^3 - 4x^2 + 6x - 3$
A (x) + B (x) = $x^3 - 3x^2 - 3x - 6$, grado 3
A (x) – B (x) = $3x^3 + 5x^2 - 15x$, grado 3

d. A (x) = $-3x^4 + x^3 - 6x - 3$, B (x) = $-x^5 + 3x^3 + 6x - 5$
A (x) + B (x) = $-x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 8$, grado 5
A (x) – B (x) = $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - 12x + 2$, grado 5

32. Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de las letras para que las siguientes sumas de polinomios sean correctas:

a.
$$\begin{array}{r} 5x^3 + \mathrm{A} - 2x + 3 \\ + \quad \mathrm{B} - x^2 + 4x + \mathrm{C} \\ \hline 7x^3 + 3x^2 + \mathrm{D} - 4 \end{array}$$

A = $4x^2$, B = $2x^3$, C = –7, D = $2x$

b.
$$\begin{array}{r} 2x^4 - 6x^3 + \mathrm{A} - 3x + \mathrm{B} \\ + -3x^4 + \mathrm{C} - 3x^2 - \mathrm{D} - 1 \\ \hline \mathrm{E} + 4x^3 \qquad - 5x - 2 \end{array}$$

A = $3x^2$, B = –1, C = $10x^3$, D = $2x$, E = $-x^4$

33. Efectúa estas sumas de polinomios:

a. $\mathbf{(3x^4 - x^3 - 5x^2 - 1) + (x^4 - x^3 + 8x^2 + 3x + 1)} = 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 3x$
b. $\mathbf{(6x^3 + 4x^2 - x + 3) + (-2x^3 + 5x^2 - x - 4)} = 4x^3 + 9x^2 - 2x - 1$
c. $\mathbf{(-x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 9x - 2) + (-5x^3 - 2x^2 - 7)} = -x^4 - 8x^3 + 9x - 9$
d. $\left(\frac{1}{3}x^2 + 5x - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}\right) = x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{13}{15}$

34. Realiza las siguientes restas de polinomios:

a. $\mathbf{(-2x^3 + 3x^2 - x + 5) - (x^3 - x^2 + 7x + 3)} =$
$= -2x^3 + 3x^2 - x + 5 - x^3 + x^2 - 7x - 3 = -3x^3 + 4x^2 - 8x + 2$
b. $\mathbf{(x^5 - 4x^3 + 3x - 2) - (4x^4 - 2x^3 - x^2 + 4)} =$
$= x^5 - 4x^3 + 3x - 2 - 4x^4 + 2x^3 + x^2 - 4 = x^5 - 4x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x - 6$
c. $\mathbf{(7x^4 - 2x^2 + 3) - (x^3 + 5x - 3)} =$
$= 7x^4 - 2x^2 + 3 - x^3 - 5x + 3 = 7x^4 - x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
d. $\left(5x^2 + \frac{1}{4}x - 2\right) - \left(3x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{3}{2}\right) =$

$5x^2 + \frac{1}{4}x - 2 - 3x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{2} = 2x^2 + \frac{1}{20}x - \frac{1}{2}$

35. Resuelve las sumas y restas eliminando los paréntesis.

a. $\mathbf{(-2x^3 + 3x^2 - x + 4) + (5x^3 + 3x^2 - 2x - 1)} =$
$= -2x^3 + 3x^2 - x + 4 + 5x^3 + 3x^2 - 2x - 1 = 3x^3 + 6x^2 - 3x + 3$
b. $\mathbf{(7x^2 - 2x + 5) - (x^3 - 7x^2 + x - 5)} =$
$= 7x^2 - 2x + 5 - x^3 + 7x^2 - x + 5 = -x^3 + 14x^2 - 3x + 10$
c. $\mathbf{(-x^5 + 9x^4 + x^2 - 4) + (x^5 - 5x^4 + 8x^2 - 3)} =$
$= -x^5 + 9x^4 + x^2 - 4 + x^5 - 5x^4 + 8x^2 - 3 = 4x^4 + 9x^2 - 7$
d. $\mathbf{(2x + 3) - (4x^2 - 1) - (-x^2 + 3x)} =$
$= 2x + 3 - 4x^2 + 1 + x^2 - 3x = -3x^2 - x + 4$

36. Multiplica y halla el grado del polinomio producto.

a. $\mathbf{-4 \cdot (x - 3)} = -4x + 12$, grado 1
b. $\mathbf{(-2x^3 + x^2 - 7x) \cdot 5} = -10x^3 + 5x^2 - 35x$, grado 3
c. $\mathbf{(2x^2 + 5x) \cdot x^2} = 2x^4 + 5x^3$, grado 4
d. $\mathbf{-3x^4 \cdot (x^3 - 3x + 5)} = -3x^7 + 9x^5 - 15x^4$, grado 4
e. $\mathbf{(6x - 3) \cdot (x + 1)} = 6x^2 + 3x - 3$, grado 2
f. $\mathbf{(-x^2 + 3x) \cdot (x^3 - x)} = -x^5 + 3x^4 + x^3 - 3x^2$, grado 5
g. $\mathbf{(x - 2) \cdot (2x^2 - 4x + 5)} = 2x^3 - 8x^2 + 13x - 10$, grado 3
h. $\mathbf{(2x^2 + 3x) \cdot (-x^2 - 7x - 3)} = -2x^4 - 17x^3 - 27x^2 - 9x$, grado 4
i. $\mathbf{(-4x^3 - x + 3) \cdot (x^3 + 3x^2 - 2)} = -4x^6 - 12x^5 - x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 2x - 6$, grado 6
j. $\mathbf{(2x^2 - 3x - 1) \cdot (5x^2 - 4x + 6)} = 10x^4 - 23x^3 + 19x^2 - 14x - 6$, grado 4

37. Divide estas expresiones:

a. $\mathbf{(-21x^3 + 7x^2 - 14x + 28) : (-7)} = 3x^3 - x^2 + 2x - 4$
b. $\mathbf{(9a^3 - 15a^2 - 3a) : 3a} = 3a^2 - 5a - 1$
c. $\mathbf{(4b^9 + 2b^7 + b^4 - 3b^3) : b^2} = 4b^7 + 2b^5 + b^2 - 3b$
d. $\mathbf{(-8x^5y^4 - 4x^4y^4 + 6x^3y^4 + 2xy^3) : 2xy^3} = -4x^4y - 2x^3y + 3x^2y + 1$

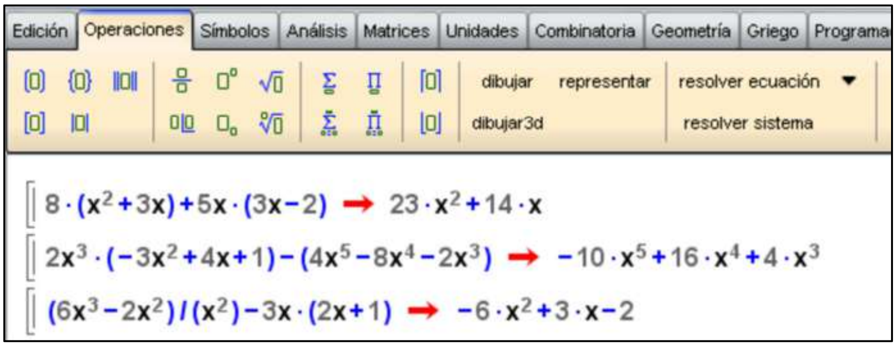
38. Realiza las operaciones propuestas a partir de los siguientes polinomios:

A (x) = $3x^2 + 6x - 9$
B (x) = $x^2 - 1$
C (x) = $-2x^2 + x + 3$

a. **A (x) + B (x)** $= 4x^2 + 6x - 10$
b. **A (x) – C (x)** $= 5x^2 + 5x - 12$
c. **B (x) · C (x)** $= -2x^4 + x^3 + 5x^2 - x - 3$
d. **A (x) · B (x)** $= 3x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 6x + 9$
e. **3 · A (x)** $= 9x^2 + 18x - 27$
f. **–4 · B (x)** $= -4x^2 + 4$
g. **A (x) : 3** $= x^2 + 2x - 3$
h. **3 · A (x) – 4 · B (x)** $= 9x^2 + 18x - 27 - 4x^2 + 4 = 5x^2 + 18x - 23$
i. **2 · B (x) · A (x) · C (x)** =
$= (2x^2 - 2) \cdot (3x^2 + 6x - 9) \cdot (-2x^2 + x + 3) =$
$= (6x^4 + 12x^3 - 18x^2 - 6x^2 - 12x + 18) \cdot (-2x^2 + x + 3) =$
$= -12x^6 + 6x^5 + 18x^4 - 24x^5 + 12x^4 + 36x^3 + 36x^4 - 18x^3 - 54x^2 + 12x^4 - 6x^3 -$
$- 18x^2 + 242x^3 + 12x^2 + 36x - 36x^2 + 18x + 54 =$
$= -12x^6 - 18x^5 + 78x^4 + 36x^3 - 96x^2 - 18x + 54$

39. Opera y reduce al máximo. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. **$8 \cdot (x^2 + 3x) + 5x \cdot (3x - 2)$**
$8x^2 + 24x + 15x^2 - 10x = 23x^2 + 14x$
b. **$2x^3 \cdot (-3x^2 + 4x + 1) - (4x^5 - 8x^4 - 2x^3)$**
$-6x^5 + 8x^4 + 2x^3 - 4x^5 + 8x^4 + 2x^3 = -10x^5 + 16x^4 + 4x^3$
c. **$(6x^3 - 2x^2) : x^2 - 3x \cdot (2x + 1)$**
$6x - 2 - 6x^2 - 3x = -6x^2 + 3x - 2$



40. Extrae factor común de estas expresiones:

a. **$3a - 6b$** $= 3 \cdot (a - 2b)$
b. **$2x^3 + 3x^2$** $= x^2 \cdot (2x + 3)$
c. **$4b^3 - 8b^2 + 12b$** $= 4b \cdot (b^2 - 2b + 3)$
d. **$y^6 - 2y^5 - 6y^4 + 4y^3$** $= y^3 \cdot (y^3 - 2y^2 - 6y + 4)$
e. **$3x^2b + x^3b^2 - 5x^4b^4$** $= x^2b \cdot (3 + xb - 5x^2b^3)$
f. **$-6ab^2 + 18a^3b^2 - 12a^2b$** $= 6ab \cdot (-b + 3a^2b - 2a)$
g. **$5x^2yz^3 - 2x^3y^2z^2 + xyz^2$** $= xyz^2 \cdot (5xz - 2x^2y + 1)$
h. **$5x^2y^2z^2 - 10x^3z^2 + 30xyz^2$** $= 5xz^2 \cdot (xy^2 - 2x^2 + 6y)$

SOLUCIONES PÁG. 129

41. Actividad resuelta.

42. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a. $\dfrac{\mathbf{4x-8}}{\mathbf{4x-12}}=\dfrac{\cancel{4}\cdot(x-2)}{\cancel{4}\cdot(x-3)}=\dfrac{x-2}{x-3}$

b. $\dfrac{\mathbf{2x^2-10x}}{\mathbf{7x-35}}=\dfrac{2x\cdot\cancel{(x-5)}}{7\cdot\cancel{(x-5)}}=\dfrac{2x}{7}$

c. $\dfrac{\mathbf{2x^3+2x^2}}{\mathbf{2x^3-4x^2}}=\dfrac{\cancel{2x^2}\cdot(x+1)}{\cancel{2x^2}\cdot(x-2)}=\dfrac{x+1}{x-2}$

43. Calcula utilizando las expresiones del cuadrado de la suma y de la diferencia.

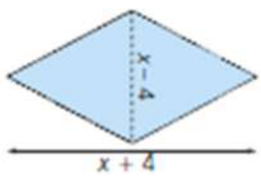
a. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{5})^2=x^2+10x+25$
b. $(\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^2=x^2-6x+9$
c. $(\boldsymbol{x}^2-\mathbf{1})^2=x^4-2x^2+1$
d. $\left(\boldsymbol{x}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^2=x^2+x+\dfrac{1}{4}$
e. $(\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{y})^2=25x^2+30xy+9y^2$
f. $\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)^2=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3x}{2}+\dfrac{9}{16}$

44. Realiza los siguientes productos utilizando las identidades notables:

a. $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})\cdot(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})=x^2-4$
b. $(\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{1})\cdot(\mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{1})=9x^2-1$
c. $\left(\boldsymbol{x}+\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)\cdot\left(\boldsymbol{x}-\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)=x^2-\dfrac{9}{25}$
d. $(\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{3}\boldsymbol{y})\cdot(\mathbf{5}\boldsymbol{x}-\mathbf{3}\boldsymbol{y})=25x^2-9y^2$
e. $(\mathbf{2}\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x})\cdot(\mathbf{2}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x})=4x^4-x^2$
f. $\left(\boldsymbol{x}+\sqrt{\mathbf{2}}\right)\cdot\left(\boldsymbol{x}-\sqrt{\mathbf{2}}\right)=x^2-2$

45. Expresa el área de estas figuras:

a.



$$A=\frac{(x-4)\cdot(x+4)}{2}=\frac{x^2-16}{2}$$

b.

$A = \pi \cdot (x + 1)^2 = \pi \cdot (x^2 + 2x + 1)$

46. Expresa los siguientes polinomios en forma de identidad notable:

a. $\mathbf{x^2 - 14x + 49} = (x - 7)^2$
b. $\mathbf{9x^2 - 25} = (3x + 5) \cdot (3x - 5)$
c. $\mathbf{4x^2 + 12x + 9} = (2x + 3)^2$

47. Reduce todo lo posible estas expresiones:

a. $\mathbf{(x - 5)^2 + (x + 5)^2} = x^2 + 25 - 10x + x^2 + 25 + 10x = 2x^2 + 50$
b. $\mathbf{(x - 1)^2 - (x + 1) \cdot (x - 1)} = x^2 + 1 - 2x - x^2 + 1 = -2x + 2$

48. Simplifica las siguientes fracciones aplicando las identidades algebraicas notables:

a. $\dfrac{\mathbf{x^2 - 4}}{\mathbf{x^2 + 4x + 4}} = \dfrac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x+2)^2} = \dfrac{x-2}{x+2}$

b. $\dfrac{\mathbf{x - 3}}{\mathbf{x^2 - 6x + 9}} = \dfrac{x-3}{(x-3)^2} = \dfrac{1}{x-3}$

EVALUACIÓN

1. El resultado de la operación $\mathbf{3x^3 + 5x \cdot 2x^2 - 8x^5 : 4x^2}$ es:
a. $\mathbf{30x^6 - 2x^3}$ **b.** $\mathbf{x^3 + 10x^2}$ c. $11x^3$ **d. 2**
$3x^3 + 5x \cdot 2x^2 - 8x^5 : 4x^2 = 3x^3 + 10x^3 - 2x^3 = 11x^3$

2. El valor numérico del polinomio P ($\mathbf{x}$) = $\mathbf{4x^2 - 3x + 5}$, en $\mathbf{x = 2}$, es:
a. 8 b. 15 **c. 5** **d. –3**
$P(2) = 4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 16 - 6 + 5 = 15$

3. Indica cuál de las siguientes afirmaciones sobre el polinomio A ($\mathbf{x}$) = $\mathbf{7x^3 - 5x^2 + 4}$ es falsa:
a. Su término independiente es 4.
b. Su coeficiente principal es 7.
c. Tiene grado 3.
d. Es completo.

4. La suma de los polinomios A ($\mathbf{x}$) = $\mathbf{4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 2}$ y B ($\mathbf{x}$) = $\mathbf{-2x^4 + 5x^3 - x^2 + 6x - 7}$ es:
a. $\mathbf{2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6x - 9}$
b. $2x^4 + 2x^2 + 6x - 9$
c. $\mathbf{6x^4 - 10x^3 + 4x^2 - 6x + 5}$
d. $\mathbf{2x^4 + 3x^2 + 6x - 9}$

5. El resultado de la resta A (x) – B (x) para los polinomios de la actividad anterior es:

a. $2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6x - 9$

b. $2x^4 + 2x^2 + 6x - 9$

c. $6x^4 - 10x^3 + 4x^2 - 6x + 5$

d. $2x^4 + 3x^2 + 6x - 9$

6. La multiplicación de los polinomios A (x) = ($5x^2 - 3x + 4$) y B (x) = ($2x^2 - 7x - 1$) da como resultado:

a. $10x^4 + 21x^2 - 4$

b. $10x^4 - 21x^2 + 4$

c. $10x^4 - 41x^3 + 24x^2 - 25x - 4$

d. $10x^4 + 41x^3 - 24x^2 + 25x - 4$

7. La división del polinomio P (x) = $6x^4 - 8x^3 + 4x^2$ entre el monomio Q (x) = $2x^2$ tiene como cociente:

a. $3x^6 - 4x^5 + 2x^4$

b. $3x^2 + 4x + 2$

c. $3x^4 - 4x^3 + 2x^2$

d. $3x^2 - 4x + 2$

8. Si extraemos factor común al siguiente polinomio P(x) = $4x^5 - 6x^3 + 2x^2$, obtenemos la expresión:

a. $x^2 \cdot (2x^3 - 3x)$

b. $2x^2 \cdot (2x^3 - 3x)$

c. $2x^2 \cdot (2x^3 - 3x + 1)$

d. $2x \cdot (2x^3 - 3x + 1)$

9. La potencia $(3x - 5)^2$ es igual a:

a. $9x^2 - 30x + 25$

b. $3x^2 - 30x + 25$

c. $9x^2 - 25$

d. $9x^2 + 25$

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 7. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Unidad 7. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

SOLUCIONES PÁG. 133

1. Expresa como ecuaciones los siguientes enunciados:

- **a. La diferencia de un número y su doble es 27.** → $x - 2x = 27$
- **b. La mitad de la suma de dos números es 16.** → $\frac{x+y}{2} = 16$
- **c. El área de un cuadrado es 50 cm^2.** → $l^2 = 50$
- **d. Dos bolígrafos y cinco lápices cuestan 8 €.** → $2x + 5y = 8$

2. Determina para las siguientes ecuaciones sus miembros, sus términos, sus incógnitas y su grado:

a. $4x + 3 = -1 + 2x$

Primer miembro: $4x + 3$
Segundo miembro: $-1 + 2x$
Términos: $4x$, 3, -1, $2x$
Incógnitas: x
Grado: 1

b. $x^2 + 5x = 9$

Primer miembro: $x^2 + 5x$
Segundo miembro: 9
Términos: x^2, $5x$, 9
Incógnitas: x
Grado: 2

c. $6x - 2y = 3$

Primer miembro: $6x - 2y$
Segundo miembro: 3
Términos: $6x$, $-2y$, 3
Incógnitas: x, y
Grado: 1

d. $x + 3y^2 = 2 + 5y$

Primer miembro: $x + 3y^2$
Segundo miembro: $2 + 5y$
Términos: x, $3y^2$, 2, $5y$
Incógnitas: x, y
Grado: 2

e. $-2xyz + 3x - y = 0$

Primer miembro: $-2xyz + 3x - y$
Segundo miembro: 0
Términos: $-2xyz$, $3x$, $-y$, 0
Incógnitas: x, y, z
Grado: 3

f. **$8 = xy^4 - 4$**
Primer miembro: 8
Segundo miembro: $xy^4 - 4$
Términos: 8, xy^4, –4
Incógnitas: x, y
Grado: 5

3. **De los siguientes valores, ¿cuáles son solución de la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$?**
   a. $\boldsymbol{x = 2} \Rightarrow 2^2 + 2 \cdot 2 - 3 \neq 0 \Rightarrow 4 + 4 - 3 \neq 0 \Rightarrow 5 \neq 0 \rightarrow$ No es solución.
   b. $\boldsymbol{x = 3} \Rightarrow 3^2 + 2 \cdot 3 - 3 \neq 0 \Rightarrow 9 + 6 - 3 \neq 0 \Rightarrow 12 \neq 0 \rightarrow$ No es solución.
   c. $\boldsymbol{x = -3} \Rightarrow (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 \neq 0 \Rightarrow 9 - 6 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Sí es solución.
   d. $\boldsymbol{x = -1} \Rightarrow (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 \neq 0 \Rightarrow 1 - 2 - 3 \neq 0 \Rightarrow -4 \neq 0 \rightarrow$ No es solución.
   e. $\boldsymbol{x = 1} \Rightarrow 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 \neq 0 \Rightarrow 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Sí es solución.
   f. $\boldsymbol{x = -4} \Rightarrow (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 3 \neq 0 \Rightarrow 16 - 8 - 3 \neq 0 \Rightarrow 5 \neq 0 \rightarrow$ No es solución.
   g. $\boldsymbol{x = 0} \Rightarrow 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 \neq 0 \Rightarrow 0 + 0 - 3 \neq 0 \Rightarrow -3 \neq 0 \rightarrow$ No es solución.
   h. $\boldsymbol{x = -2} \Rightarrow (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 3 \neq 0 \Rightarrow 4 - 4 - 3 \neq 0 \Rightarrow -3 \neq 0 \rightarrow$ No es solución.

4. **Calcula mentalmente las soluciones de las siguientes ecuaciones:**
   a. $\boldsymbol{x + 3 = 7} \Rightarrow x = 4$
   b. $\boldsymbol{x^2 = 4} \Rightarrow x = -2;\ x = 2$
   c. $\boldsymbol{(x + 1)^2 = 25} \Rightarrow x = 4$
   d. $\boldsymbol{\sqrt{x} = 5} \Rightarrow x = 25$
   e. $\boldsymbol{\frac{x-3}{7} = -2} \Rightarrow x = -11$
   f. $\boldsymbol{x^x = 27} \Rightarrow x = 3$
   g. $\boldsymbol{x \cdot (x + 2) = 15} \Rightarrow x = 3$
   h. $\boldsymbol{2^x = 32} \Rightarrow x = 5$
   i. $\boldsymbol{\sqrt{x-5} = 2} \Rightarrow x = 9$

5. **Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones transponiendo términos:**
   a. $\boldsymbol{x - 1 = 5} \Rightarrow x = 5 + 1 \Rightarrow x = 6$
   b. $\boldsymbol{\frac{x}{3} = -2} \Rightarrow x = -2 \cdot 3 \Rightarrow x = -6$
   c. $\boldsymbol{3 = x + 6} \Rightarrow 3 - 6 = x \Rightarrow x = -3$
   d. $\boldsymbol{12 = -4x} \Rightarrow x = \frac{12}{-4} \Rightarrow x = -3$
   e. $\boldsymbol{-8 + x = -2} \Rightarrow x = -2 + 8 \Rightarrow x = 6$
   f. $\boldsymbol{0{,}5x = 3} \Rightarrow x = \frac{3}{0{,}5} \Rightarrow x = 6$
   g. $\boldsymbol{3x = 2x + 7} \Rightarrow 3x - 2x = 7 \Rightarrow x = 7$
   h. $\boldsymbol{\frac{x}{2} = \frac{3}{5}} \Rightarrow x = \frac{3}{5} \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$
   i. $\boldsymbol{-4x + 1 = -3x} \Rightarrow 1 = -3x + 4x \Rightarrow x = 1$

6. **Investiga en Internet acerca del papiro de Rhind. Enuncia y plantea alguna de las ecuaciones que aparecen en ese documento histórico.**

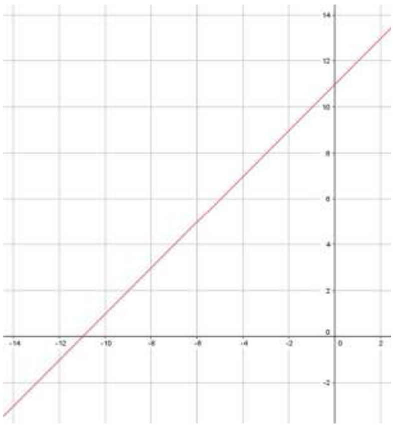
   Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 135

7. **Halla la solución de las siguientes ecuaciones y comprueba tus resultados mediante el método gráfico:**

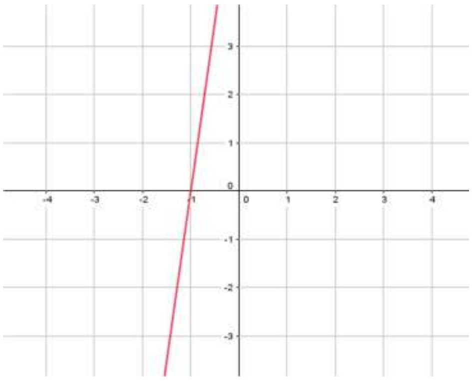
a. $\mathbf{4x + 5 = 3x - 6}$

$4x - 3x = -6 - 5 \Rightarrow x = -11$



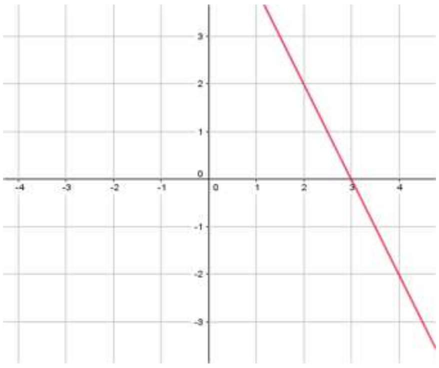
b. $\mathbf{-2x + 1 + x = 8 + 6x}$

$-2x + x - 6x = 8 - 1 \Rightarrow -7x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{-7}\,;\, x = -1$



c. $\mathbf{x + 4x - 1 + 8 - 5x = 7 - 2x + 6}$

$x + 4x - 5x + 2x = 7 + 6 + 1 - 8 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$



d. $\mathbf{-x + 4 - 5x + 3 - 7 = 2 - 6x + 1}$

$-x - 5x + 6x = 2 + 1 - 4 - 3 + 7$

$0x = 3$. No tiene solución.

e. $8 + 7x - 2 - 3x - x = 5 + 2x - 9 + x + 10$
$7x - 3x - x - 2x - x = 5 - 9 + 10 - 8 + 2$
$0x = 0$ Tiene infinitas soluciones.

8. Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis:

a. $2x - 10 = 4 \cdot (x - 3)$

$2x - 10 = 4x - 12 \Rightarrow 2x - 4x = -12 + 10 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-2} \Rightarrow x = 1$

b. $7 \cdot (2x - 3) = 5 \cdot (x + 3)$

$14x - 21 = 5x + 15 \Rightarrow 14x - 5x = 15 + 21 \Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{9} \Rightarrow x = 4$

c. $2 + 3 \cdot (x - 6) = 8 - (4 - 5x)$
$2 + 3x - 18 = 8 - 4 + 5x \Rightarrow 3x - 5x = 8 - 4 + 18 - 2 \Rightarrow -2x = 20 \Rightarrow x = -10$

d. $-4 \cdot (2x - 1) + 5 = 3x - 6 \cdot (x - 2)$

$-8x + 4 + 5 = 3x - 6x + 12 \Rightarrow -8x - 3x + 6x = 12 - 4 - 5 \Rightarrow -5x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{-5}$

e. $6 - x + 3 \cdot (4 + 5x) = x - (7x + 2)$
$6 - x + 12 + 15x = x - 7x - 2 \Rightarrow -x + 15x - x + 7x = -2 - 12 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20x = -20 \Rightarrow x = \frac{-20}{20} \Rightarrow x = -1$

f. $-(3 - 4x) + 2 \cdot (x - 1) = 6 \cdot (x + 8)$
$-3 + 4x + 2x - 2 = 6x + 48 \Rightarrow 4x + 2x - 6x = 48 + 3 + 2 \Rightarrow 0x = 53 \Rightarrow$ No tiene solución.

9. Resuelve estas ecuaciones con denominadores:

a. $4 - \frac{5x}{2} = x - 3$

$\frac{8}{2} - \frac{5x}{2} = \frac{2x}{2} - \frac{6}{2} \Rightarrow 8 - 5x = 2x - 6 \Rightarrow -5x - 2x = -6 - 8 \Rightarrow -7x = -14 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-14}{-7} \Rightarrow x = 2$

b. $\frac{x}{3} + 5 = \frac{2x}{3} - 1$

$\frac{x}{3} - \frac{15}{3} = \frac{2x}{3} - \frac{3}{3} \Rightarrow x - 15 = 2x - 3 \Rightarrow x - 2x = -3 + 15 \Rightarrow -x = 12 \Rightarrow x = -12$

c. $x - \frac{5}{3} = \frac{2x}{4} + 1$

$\frac{12x}{12} - \frac{20}{12} = \frac{6x}{12} + \frac{12}{12} \Rightarrow 12x - 20 = 6x + 12 \Rightarrow 12x - 6x = 12 + 20 \Rightarrow 6x = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{32}{6} \Rightarrow x = \frac{16}{3}$

d. $\frac{2x}{9} + 4 = \frac{x}{3} - 1 - \frac{x}{9}$

$\frac{2x}{9} - \frac{36}{9} = \frac{3x}{9} - \frac{9}{9} - \frac{x}{9} \Rightarrow 2x - 36 = 3x - 9 - x \Rightarrow 2x - 3x + x = -9 + 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0x = 27 \Rightarrow$ No tiene solución.

e. $\mathbf{10 - x = \frac{7x}{6} + \frac{1}{4}}$

$$\frac{120}{12} - \frac{12x}{12} = \frac{14x}{12} + \frac{3}{12} \Rightarrow 120 - 12x = 14x + 3 \Rightarrow -12x - 14x = 3 - 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -26x = -117 \Rightarrow x = \frac{-117}{-26} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

f. $\mathbf{\frac{3x}{2} - \frac{4x}{5} + \frac{x}{6} = 0}$

$$\frac{45x}{30} - \frac{24x}{30} + \frac{5x}{30} = 0 \Rightarrow 45x - 24x + 5x = 0 \Rightarrow 25x = 0 \Rightarrow x = 0$$

10. Calcula la solución de las ecuaciones siguientes:

a. $\mathbf{\frac{x-6}{4} + 3 = \frac{x}{10}}$

$$\frac{5\cdot(x-6)}{20} + \frac{60}{20} = \frac{2x}{20} \Rightarrow 5\cdot(x-6) + 60 = 2x \Rightarrow 5x - 30 + 60 = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x - 2x = 30 - 60 \Rightarrow 3x = -30 \Rightarrow x = \frac{-30}{3} \Rightarrow x = -10$$

b. $\mathbf{2 + \frac{3x-6}{6} = \frac{5x}{8} - 1}$

$$\frac{48}{24} + \frac{4\cdot(3x-6)}{24} = \frac{15x}{24} - \frac{24}{24} \Rightarrow 48 + 4\cdot(3x-6) = 15x - 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48 + 12x - 24 = 15x - 24 \Rightarrow 12x - 15x = -24 + 24 - 48 \Rightarrow \quad 12x - 15x = -24 + 24$$

$$\Rightarrow -3x = -48 \Rightarrow x = 16$$

c. $\mathbf{\frac{4x+5}{9} = 3 - \frac{x+11}{6}}$

$$\frac{2\cdot(4x+5)}{18} = \frac{54}{18} - \frac{3\cdot(x+11)}{18} \Rightarrow 2\cdot(4x+5) = 54 - 3\cdot(x+11) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 10 = 54 - 3x - 33 \Rightarrow 8x + 3x = 54 - 33 - 10 \Rightarrow 11x = 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{11} \Rightarrow x = 1$$

d. $\mathbf{\frac{2x}{3} - \frac{x+1}{2} = 1}$

$$\frac{4x}{6} - \frac{3\cdot(x+1)}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow 4x - 3\cdot(x+1) = 6 \Rightarrow 4x - 3x - 3 = 6 \Rightarrow x = 9$$

e. $\mathbf{\frac{-3x+2}{8} = \frac{-x-5}{14}}$

$$\frac{7\cdot(-3x+2)}{56} = \frac{4\cdot(-x-5)}{56} \Rightarrow 7\cdot(-3x+2) = 4\cdot(-x-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -21x + 14 = -4x - 20 \Rightarrow -21x + 4x = -20 - 14 \Rightarrow -17x = -34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-34}{-17} \Rightarrow x = 2$$

f. $\mathbf{1-\frac{2x+5}{7}=-x+\frac{3-x}{2}}$

$$\frac{14}{14}-\frac{2\cdot(2x+5)}{14}=\frac{-14x}{14}+\frac{7\cdot(3-x)}{14}\Rightarrow 14-2\cdot(2x+5)=-14x+7\cdot(3-x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14-4x-10=-14x+21-7x\Rightarrow -4x+14x+7x=21-14+10\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 17x=17\Rightarrow x=\frac{17}{17}\Rightarrow x=1$$

g. $\mathbf{\frac{x+4}{6}+\frac{3-5x}{5}=\frac{x-1}{4}}$

$$\frac{10\cdot(x+4)}{60}+\frac{12\cdot(3-5x)}{60}=\frac{15\cdot(x-1)}{60}\Rightarrow 10\cdot(x+4)+12\cdot(3-5x)=15\cdot(x-1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x+40+36-60x=15x-15\Rightarrow 10x-60x-15x=-15-40-36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -65x=-91\Rightarrow x=\frac{-91}{-65}\Rightarrow x=\frac{7}{5}$$

h. $\mathbf{\frac{4x-3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{x+2}{4}}$

$$\frac{4\cdot(4x-3)}{20}+\frac{10}{20}=\frac{5\cdot(x+2)}{20}\Rightarrow 4\cdot(4x-3)+10=5\cdot(x+2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16x-12+10=5x+10\Rightarrow 16x-5x=10+12-10\Rightarrow 11x=12\Rightarrow x=\frac{12}{11}$$

SOLUCIONES PÁG. 137

11. Calcula un número que, sumado a su tercera parte menos su doble, sea 30.

Número desconocido: *x;* tercera parte del número $\frac{x}{3}$; doble del número: 2*x*

Ecuación: Número desconocido + tercera parte – su doble = 30

$$x+\frac{x}{3}-2x=30\Rightarrow\frac{3x+x-6x}{3}=\frac{90}{3}\Rightarrow 3x+x-6x=90\Leftarrow -2x=90\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{90}{-2}\Rightarrow x=-45$$

Comprobación

Número desconocido: –45; sumado a su tercera parte menos su doble:

$$\frac{-45}{3}-2\cdot(-45)=75$$

$$-45+75=30\Rightarrow 30=30$$

12. La suma de tres números naturales consecutivos es 228. Halla dichos números.

Primer número: x
Segundo número consecutivo: $x + 1$
Tercer número consecutivo: $x + 2$

Ecuación: Primer número + Segundo número consecutivo + Tercer número consecutivo

$x + x + 1 + x + 2 = 228 \Rightarrow 3x + 3 = 228 \Rightarrow 3x = 228 - 3 \Rightarrow 3x = 225 \Rightarrow x = \frac{225}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 75$

Comprobación

Primer número: 75
Segundo número consecutivo: 76
Tercer número consecutivo: 77

75 + 76 + 77 = 228

13. Tres amigos reparten propaganda. El primero se encarga de 4 paquetes; el segundo, de 5 paquetes, y el tercero, de 6. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno si en total han cobrado 300 €?

Dinero que corresponde a cada uno: x

A= $4x$; B = $5x$; C = $6x$

Ecuación: A + B + C = 300 €;

$4x + 5x + 6x = 300 \text{ €} \Rightarrow 15x = 300 \Rightarrow x = \frac{300}{15} \Rightarrow x = 20$

Comprobación

Persona A: 4 · 20 = 80 €
Persona B: 5 · 20 = 100 €
Persona C: 6 · 20 = 120 €

80 € + 100 € + 120 € = 300 € total.

14. Ana ha comprado 3 kg de naranjas, 2 kg de manzanas y 1 kg de peras por 6 €. Si el kilo de manzanas cuesta 0,20 € más que el kilo de naranjas, y el kilo de peras, 0,60 € más que el kilo de manzanas, ¿cuál es el precio del kilo de cada tipo de fruta?

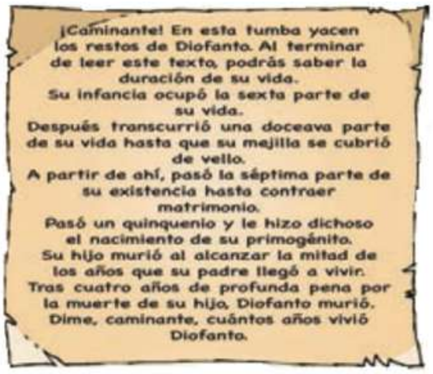
Precio del kilo de naranjas: x
Precio del kilo de manzanas: 0,20 € + kilo de naranjas = 0,20 + x
Precio del kilo de peras: 0,60 € + kilo de manzanas = 0,60 + (0,20 + x)

Ecuación:
3 kg de naranjas + 2 kg de manzanas + 1 kg de peras = 6 €
$3 \cdot x + 2 \cdot (0{,}20 + x) + 0{,}60 + (0{,}20 + x) = 6\ € \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x + 0{,}40 + 2x + 0{,}60 + 0{,}20 + x = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x + 2x + x = 6 - 0{,}40 - 0{,}60 - 0{,}20 \Rightarrow 6x = 4{,}80 \Rightarrow x = \dfrac{4{,}80}{6} \Rightarrow x = 0{,}80$
Precio del kilo de naranjas: $x = 0{,}80$ €
Precio del kilo de manzanas: $= 0{,}20 + x = 0{,}20 + 0{,}80 = 1$ €
Precio del kilo de peras: $0{,}60 + (0{,}20 + x) = 0{,}60 + (0{,}20 + 0{,}80) = 1{,}60$ €

Comprobación

3 kg de naranjas + 2 kg de manzanas + 1 kg de peras
$3 \cdot 0{,}80 + 2 \cdot 1 + 1{,}60 = 2{,}40 + 2 + 1{,}60 = 6$ € que ha pagado Ana.

15. **El matemático griego Diofanto de Alejandría dedicó parte de su vida a la resolución de problemas algebraicos. Del epitafio de su tumba se puede deducir a qué edad murió. ¿Cuántos años vivió?**



Años que vivió: x

Infancia: sexta parte de su vida: $\dfrac{x}{6}$

Su mejilla se cubrió de vello: doceava parte de su vida $\dfrac{x}{12}$

Contrajo matrimonio: séptima parte de su vida $\dfrac{x}{7}$

Pasó un quinquenio: 5 años

Su hijo murió al alcanzar la mitad de años que vivió su padre: $\dfrac{x}{2}$

Pasados cuatro años de la muerte del hijo, el padre murió: 4 años

Ecuación:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x \Rightarrow \frac{14x+7x+12x+420+336+42x}{84}=\frac{84x}{84} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14x+7x+12x+420+336+42x=84x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14x+7x+12x+42x-84x=-420-336 \Rightarrow -9x=-756 \Rightarrow x=84$$

Comprobación

$$\frac{84}{6}+\frac{84}{12}+\frac{84}{7}+5+\frac{84}{2}+4=14+7+12+5+42+4=84$$

16. Pablo escribió ayer la quinta parte de las líneas de una redacción para la clase de Lengua y hoy la tercera parte. Si aún le faltan por completar 28 líneas, ¿de cuántas líneas constará su redacción?

Número de líneas: x

Escribió ayer: la quinta parte de las líneas: $\frac{1}{5}x$

Escribió hoy: la tercera parte: $\frac{1}{3}x$

Le quedan para completar: 28 líneas

Ecuación:
Líneas escritas ayer + líneas escritas hoy + las líneas que le quedan = Número de líneas total

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{3}x+28=x \Rightarrow \frac{3x+5x+420}{15}=\frac{15x}{15} \Rightarrow 3x+5x+420=15x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 420=15x-8x \Rightarrow x=\frac{420}{7} \Rightarrow x=60$$

Número de líneas: 60

Escribió ayer: la quinta parte de las líneas: $\frac{1}{5}x=\frac{1}{5}\cdot 60=12$

Escribió hoy: la tercera parte: $\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}\cdot 60=20$

Comprobación

Líneas escritas ayer + líneas escritas hoy + las líneas que le quedan
12 + 20 + 28 = 60 líneas en total.

17. En un examen de Matemáticas, la mitad de los alumnos sacaron una nota superior a 8, y las dos quintas partes del resto sacó entre 5 y 8. Si suspendieron 9 alumnos, ¿cuántos hicieron el examen?

Alumnos que hicieron el examen: x

Alumnos con nota superior a 8: la mitad de los alumnos: $\frac{x}{2}$

Alumnos con nota entre 5 y 8: dos quintas partes del resto: $\frac{2}{5}$ de $\frac{x}{2}=\frac{2x}{10}$

Alumnos que suspendieron: 9

Ecuación

Alumnos con nota superior a 8 + Alumnos con nota entre 5 y 8 + Alumnos que suspendieron = Alumnos que hicieron el examen

$$\frac{x}{2}+\frac{2x}{10}+9=x\Rightarrow\frac{5x+2x+90}{10}=\frac{10x}{10}\Rightarrow 5x+2x+90=10x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90=10x-5x-2x\Rightarrow 90=3x\Rightarrow x=\frac{90}{3}\Rightarrow x=30$$

Hicieron el examen 30 alumnos.

Comprobación

Alumnos con nota superior a 8 + Alumnos con nota entre 5 y 8 + Alumnos que suspendieron:

$$\frac{30}{2}+\frac{60}{10}+9=15+6+9=30$$

18. Un hotel dispone de 90 habitaciones, entre dobles y sencillas, con un total de 130 camas. ¿Cuántas habitaciones de cada tipo tiene?

Habitaciones dobles: x
Habitaciones sencillas: $90 - x$

Ecuación
Habitaciones dobles · 2 + habitaciones sencillas · 1 = 130 camas
$x \cdot 2 + (90 - x) \cdot 1 = 130 \Rightarrow 2x + 90 - x = 130 \Rightarrow 2x - x = 130 - 90 \Rightarrow x = 40$.
Habitaciones dobles: 40
Habitaciones simples: $90 - x \Rightarrow 90 - 40 = 50$

Comprobación

Habitaciones dobles · 2 + habitaciones sencillas · 1 = 130
$40 \cdot 2 + 50 \cdot 1 = 80 + 50 = 130$ camas en total

19. Halla los lados de un triángulo isósceles de 33 cm de perímetro, cuyo lado desigual excede en 5 cm al doble de cada uno de los otros lados.

Lados idénticos de un triángulo isósceles: x
Lado desigual: 5 cm más del doble de cada uno de los otros lados: $2x + 5$

Ecuación
Perímetro = suma de los tres lados

$$33 = x + x + 2x + 5 \Rightarrow 33 - 5 = x + x + 2x \Rightarrow 28 = 4x \Rightarrow x = \frac{28}{4} = 7$$

Cada uno de los lados iguales mide 7 cm.
Lado desigual: $2x + 5 = 2 \cdot 7 + 5 = 19$

Comprobación
Suma de los tres lados
$7 + 7 + 19 = 33$

20. Si Estela llenase el depósito de gasolina de su coche con 10 L más, tendría el triple que si le extrajera 30 L. ¿Cuál es la capacidad del depósito?

Capacidad del depósito: x

Ecuación

$10 + x = 3 \cdot (x - 30) \Rightarrow 10 + x = 3x - 90 \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50$

La capacidad del depósito es de 50 L.

Comprobación

Llenar el depósito con 10 L más, triple que si se le extrae 30 L

10 + 50 = 60 litros. Triple de 50 – 30 = 20 litros.

21. Actividad resuelta.

22. La edad de Juan es el doble que la de su prima Inés. Hace 5 años, la suma de sus edades era 23. ¿Cuántos años tienen actualmente?

Edades	**Juan**	**Inés**
Hoy	$2x$	x
Hace 5 años	$2x - 5$	$x - 5$

Planteamiento de la ecuación:

Hace 5 años la suma de sus edades era 23 años

$2x - 5 + x - 5 = 23 \Rightarrow 2x + x = 23 + 5 + 5 \Rightarrow 3x = 33 \Rightarrow x = 11$

Inés tiene 11 años, y Juan: $2 \cdot 11 = 22$

Comprobación

Hace 5 años su suma era 23

22 – 5 +11 – 5 = 33 – 10 = 23

23. Ana tiene 10 € más que su hermano Sergio. Hoy su padre les ha dado 5 € a cada uno de ellos, por lo que Ana tiene el doble de dinero que su hermano. ¿De cuánto dinero disponían los dos hermanos ayer?

Dinero que tiene Sergio: x

Dinero que tiene Ana: 10 € más que Sergio: $x + 10$

Su padre les da 5 € a cada uno

Dinero que tiene Sergio ahora: $x + 5$

Dinero que tiene Ana ahora: $x + 10 + 5$

Ecuación

Ana tiene el doble de dinero que su hermano

Dinero que tiene Ana = 2. Dinero que tiene su hermano

$x + 10 + 5 = 2 \cdot (x + 5) \Rightarrow x + 10 + 5 = 2x + 10 \Rightarrow 10 + 5 - 10 = 2x - x \Rightarrow 5 = x$

Sergio tiene 5 € y Ana: $x + 10 = 5 + 10 = 15$

Comprobación

Cuando su padre les da 5 €, Ana tiene el doble que Sergio

Dinero que tiene Sergio: 5 + 5 = 10 €

Dinero que tiene su hermana: 5 + 10 + 5 = 20 € que es el doble que su hermano.

24. Halla el valor de ♣, ♦, ♥ y ♠, sabiendo que:

♣ + ♦ + ♥ = 16
♣ − ♦ = ♥ − ♠
♣ + ♠ = 10
♦ − ♥ = 0

- De la 4.ª ecuación se deduce que: ♦ = ♥
- De la 2.ª ecuación, transponiendo términos se tiene que:
  ♣ + ♠ = ♦ + ♥
- De la 3.ª ecuación: ♦ + ♥ = 10
- Sustituyendo en la 1.ª ecuación ♦ + ♥ por 10, tenemos:
  ♣ + ♦ + ♥ =16
  ♣ + 10 = 16 ⇒ ♣ = 6
- Sustituyendo en la 3.ª ecuación, se obtiene que ♠ = 4
- Como ♦ + ♥ = 10 y ♦ = ♥, entonces ♦ = 5 y ♥= 5.

Resumiendo: ♣ = 6, ♦ = 5, ♥ = 5, ♠ = 4

SOLUCIONES PÁG. 139

25. Halla la solución de estas ecuaciones:

a. $\boldsymbol{x^2 - 1 = 0}$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$

b. $\boldsymbol{2x^2 + 3x = 0}$

$$x \cdot (2x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{3}{2} \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

c. $\boldsymbol{5x^2 + 20 = 0}$

$$5x^2 = -20 \Rightarrow x^2 = \frac{-20}{5} \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \sqrt{-4} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

d. $\boldsymbol{-3x^2 - 6x = 0}$

$$-3x \cdot (x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x_1 = -2 \\ -3x = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases}$$

e. $\boldsymbol{4x^2 = 100}$

$$x^2 = \frac{100}{4} \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = +5 \end{cases}$$

f. $\boldsymbol{0 = 4 - 9x^2}$

$$9x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3} \\ x_2 = +\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

g. $\boldsymbol{x^2 = -5x}$

$$x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x \cdot (x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+5=0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

h. $x \cdot (2x - 7) = 0$

$$x \cdot (2x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x-7=0 \Rightarrow x=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

26. Averigua el número de soluciones de las siguientes ecuaciones, sin resolverlas:

a. $x^2 + 5x + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9$

Como el discriminante es mayor que 0, tiene dos soluciones distintas.

b. $2x^2 - x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 24 = -23$

Como el discriminante es menor que 0, no tiene solución.

c. $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$

Como el discriminante es igual a 0, tiene una solución doble.

d. $-3x^2 + 2x - 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-6) = 4 - 72 = -68$

Como el discriminante es menor que 0, no tiene solución.

27. Obtén las soluciones de las ecuaciones.

a. $x^2 + x - 6 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

b. $3x^2 + 7x + 5 = 0$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-60}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{-11}}{6} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

c. $3x^2 + 8x - 3 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+36}}{6} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-8+10}{6} = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-8-10}{6} = -3 \end{cases}$$

d. $x^2 + 8x + 16 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2} = -4 \Rightarrow x = -4 \ \text{(doble)}$$

e. $\mathbf{10x^2 - 9x + 2 = 0}$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2}}{2 \cdot 10} = \frac{+9 \pm \sqrt{81 - 80}}{20} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{20} = \frac{9 \pm 1}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{9+1}{20} = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{9-1}{20} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

f. $\mathbf{-x^2 + 4x - 4 = 0}$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2} = 2 \Rightarrow x = 2 \text{ (doble)}$$

g. $\mathbf{-4x^2 + 13x - 3 = 0}$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 48}}{-8} = \frac{-13 \pm \sqrt{121}}{-8} = \frac{-13 \pm 11}{-8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-13+11}{-8} = \dfrac{1}{4} \\ x_2 = \dfrac{-13-11}{-8} = 3 \end{cases}$$

h. $\mathbf{25x^2 - 20x + 4 = 0}$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4}}{2 \cdot 25} = \frac{+20 \pm \sqrt{400 - 400}}{50} = \frac{20 \pm \sqrt{0}}{50} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ (doble)}$$

28. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{x \cdot (x + 1) = 5x}$

$x^2 + x = 5x \Rightarrow x^2 + x - 5x = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 4) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

b. $\mathbf{(x - 3)^2 = 5 - 2x}$

$x^2 + 9 - 6x = 5 - 2x \Rightarrow x^2 + 9 - 6x - 5 + 2x = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2 \text{ (doble)}$$

c. $\mathbf{x \cdot (4x + 5) = 2x \cdot (x - 3)}$

$4x^2 + 5x = 2x^2 - 6x \Rightarrow 4x^2 + 5x - 2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 2x^2 + 11x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \quad (2x + 11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x + 11 = 0 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

d. $\dfrac{x}{3} - 2 = \dfrac{x^2 - x}{4}$

$$\frac{4x-24}{12} = \frac{3\cdot\left(x^2 - x\right)}{12} \Rightarrow 4x - 24 = 3\cdot\left(x^2 - x\right) \Rightarrow 4x - 24 = 3x^2 - 3x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x - 24 - 3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow -3x^2 + 7x - 24 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-24)}}{2\cdot(-3)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 288}}{-6} =$$
$$= \frac{-7 \pm \sqrt{-239}}{-6} \rightarrow \text{No tiene solución.}$$

SOLUCIONES PÁG. 141

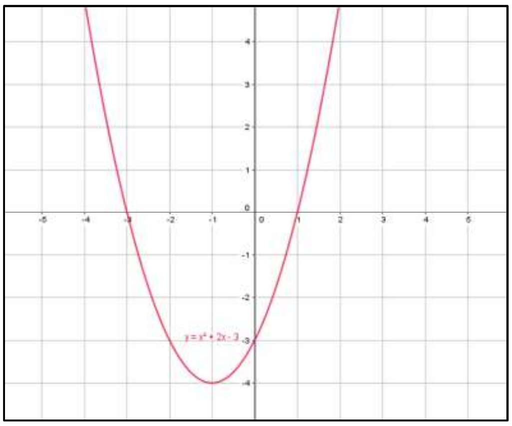
29. Resuelve gráficamente las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 + 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Estos son los valores de *x* de los puntos de corte de la parábola con el eje *X*.
Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{-2}{2\cdot 1} = -1 \\ y_v = (-1)^2 + 2\cdot(-1) - 3 = 1 - 2 - 3 = -4 \end{array}\right\} V = (-1, -4)$$



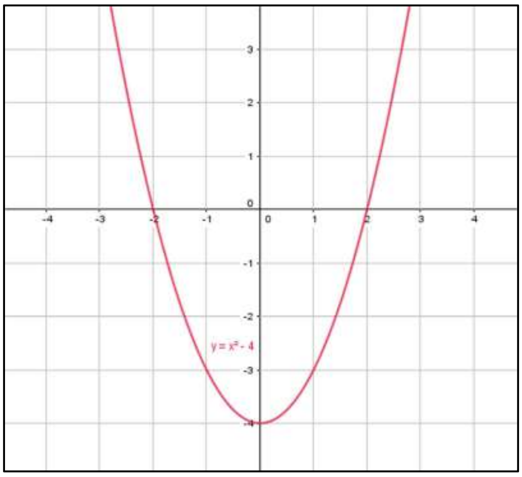
b. $\boldsymbol{x^2 - 4 = 0}$

$$x^2 = 4;\ x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Estos son los valores de x de los puntos de corte de la parábola con el eje X.

Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{0}{2\cdot 1} = 0 \\ y_v = 0^2 - 4 = -4 \end{array}\right\} V = (0, -4)$$



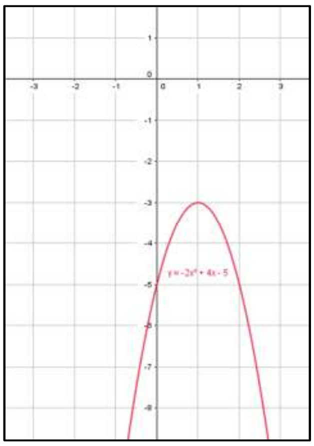
c. $\boldsymbol{-2x^2 + 4x - 5 = 0}$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-5)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-40}}{-4} = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{-4}$$

La ecuación no tiene solución, lo que significa que la parábola no corta al eje X.

Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{-4}{2\cdot(-2)} = 1 \\ y_v = -2\cdot 1^2 + 4\cdot 1 - 5 = -3 \end{array}\right\} V = (1, -3)$$

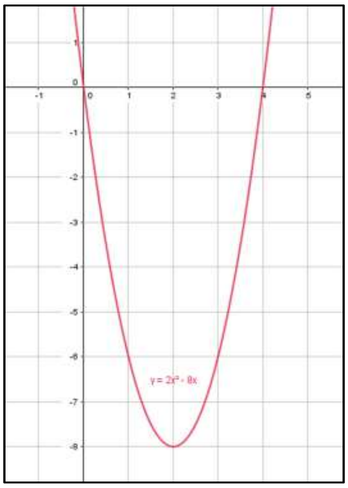


d. $2x^2 - 8x = 0$

$$x \cdot (2x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x-8=0 \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

Estos son los valores de *x* de los puntos de corte de la parábola con el eje *X*.
Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{-(-8)}{2\cdot 2} = 2 \\ y_v = 2\cdot 2^2 - 8\cdot 2 = -8 \end{array}\right\} V = (2,-8)$$



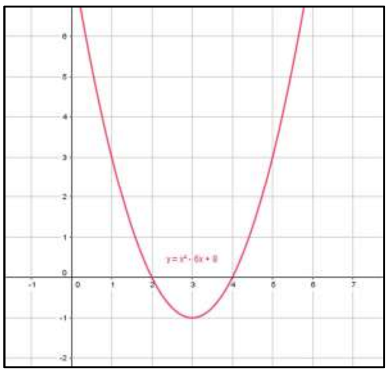
e. $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1} = \frac{+6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

Estos son los valores de *x* de los puntos de corte de la parábola con el eje *X*.
Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{-(-6)}{2\cdot 1} = 3 \\ y_v = 3^2 - 6\cdot 3 + 8 = -1 \end{array}\right\} V = (3,-1)$$

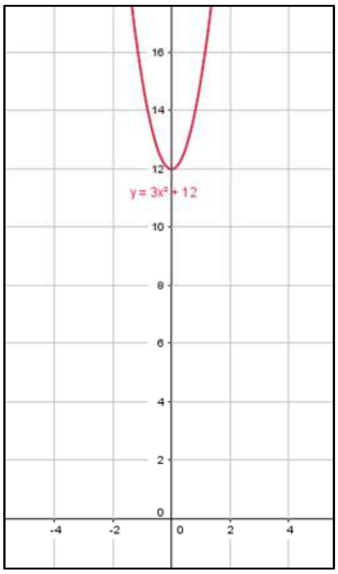


f. $3x^2 + 12 = 0$

$3x^2 = -12 \Rightarrow x^2 = \dfrac{-12}{3} \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \sqrt{-4}$

La ecuación no tiene solución, lo que significa que la parábola no corta al eje *X*.
Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{0}{2\cdot 3} = 0 \\ y_v = 3\cdot 0^2 + 12 = 12 \end{array}\right\} V = (0,12)$$



30. La suma del cuadrado de dos números positivos consecutivos es 113. ¿Cuáles son dichos números?

Primer número: x
Segundo número consecutivo: $x + 1$
Cuadrado de ambos números: x^2 y $(x + 1)^2$

$x^2 + (x + 1)^2 = 113 \Rightarrow x^2 + x^2 + 1 + 2x = 113 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 - 113 = 0 \Rightarrow$
$2x^2 + 2x - 112 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 2\cdot(-112)}}{2\cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 896}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{900}}{4} = \frac{-2 \pm 30}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+30}{4} = 7 \\ x_2 = \dfrac{-2-30}{4} = -8 \end{cases}$$

Al ser positivos los números, la solución es $x_1 = 7$
Primer número: 7 y segundo número consecutivo: $x + 1 = 7 + 1 = 8$

Comprobación
Suma del cuadrado de los dos números consecutivos es 113:
$7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113$

31. El producto de la cuarta parte de un número por sus dos quintas partes es 40. ¿De qué número se trata?

Número: x
Su cuarta parte: $\frac{x}{4}$
Sus dos quintas partes: $\frac{2x}{5}$

$$\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\left(\frac{2x}{5}\right)=40 \Rightarrow \frac{2x^2}{20}=40 \Rightarrow 2x^2=800 \Rightarrow x^2=\frac{800}{2} \Rightarrow x^2=400 \Rightarrow x=\pm 20$$

Tiene dos soluciones: el número 20 y el –20

Comprobación
Producto de la cuarta parte por sus dos quintas partes es 40

$$\frac{20}{4}\cdot\frac{2\cdot 20}{5}=5\cdot 8=40$$

$$\frac{-20}{4}\cdot\frac{2\cdot(-20)}{5}=(-5)\cdot(-8)=40$$

32. El área de un triángulo equilátero de (x – 3) de lado y (x + 3) de altura es 8 cm^2. ¿Cuánto mide el lado y la altura?

Lado: $(x-3)$
Altura: $(x+3)$

$$A=\frac{b\cdot h}{2} \Rightarrow 8=\frac{(x-3)\cdot(x+3)}{2} \Rightarrow 8=\frac{x^2-9}{2} \Rightarrow 16=x^2-9 \Rightarrow 16+9=x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25=x^2 \Rightarrow \sqrt{25}=x \Rightarrow \pm 5=x$$

La solución negativa no tiene sentido.
Lado: $(x-3)=(x-3)=5-3=2$ cm
Altura: $(x+3)=(x+3)=5+3=8$ cm

Comprobación
$$A=\frac{b\cdot h}{2} \Rightarrow A=\frac{2\cdot 8}{2}=8$$

33. Halla las dimensiones de un rectángulo que tiene un área de 21 cm^2 y cuya base mide 4 cm más que su altura.

Altura: x
Base: $x+4$

$$A=b\cdot h \Rightarrow 21=(x+4)\cdot x \Rightarrow 21=x^2+4x \Rightarrow x^2+4x-21=0$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-21)}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-4\pm10}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-4+10}{2}=3\\ x_2=\dfrac{-4-10}{2}=-7\end{cases}$$

La solución negativa no tiene sentido.
Altura: $x = 3$
Base: $x + 4 = 3 + 4 = 7$

Comprobación
$A = b \cdot h \Rightarrow A = 3 \cdot 7 = 21$

34. Formad grupos de cuatro alumnos. Comprobad que, para cualquier número, si se suma 16 al producto de dicho número disminuido en 4 unidades por el número aumentado en 4 unidades, se obtiene el cuadrado del número. Intentad dar una justificación.

Número: x
Número disminuido en 4 unidades: $x - 4$
Número aumentado en 4 unidades: $x + 4$

$$(x-4)\cdot(x+4)+16=x^2\Rightarrow x^2-16+16=x^2\Rightarrow x^2=x^2$$

Esto siempre es cierto. Por tanto, todos los números son solución de la ecuación

SOLUCIONES PÁG. 145

35. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases}\boldsymbol{x+y=3}\\ \boldsymbol{2x+y=4}\end{cases}$

Se despeja la incógnita y en las dos ecuaciones:

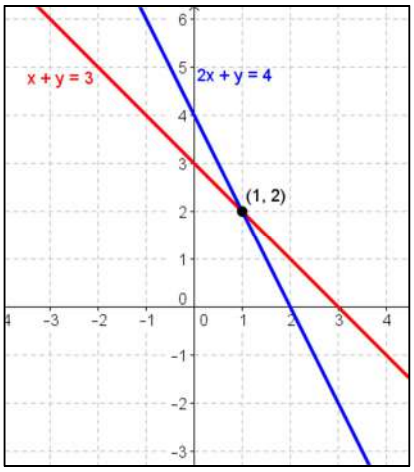
$$\begin{cases}x+y=3\Rightarrow y=3-x\\ 2x+y=4\Rightarrow y=4-2x\end{cases}$$

Para cada ecuación se elabora una tabla de valores:

x	–1	0	1
$y = 3 - x$	4	3	2

x	–1	0	1
$y = 4 - 2x$	6	4	2

Rectas secantes, solución: $x = 1$, $y = 2$



b. $\begin{cases} \mathbf{-3x + y = 1} \\ \mathbf{-6x + 2y = 2} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* en las dos ecuaciones:

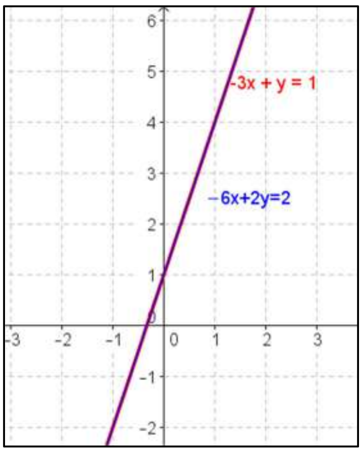
$$\begin{cases} -3x + y = 1 \Rightarrow y = 1 + 3x \\ -6x + 2y = 2 \Rightarrow 2y = 2 + 6x \Rightarrow y = \dfrac{2+6x}{2} \end{cases}$$

Para cada ecuación se elabora una tabla de valores:

x	–1	0	1
$y = 1 + 3x$	–2	1	4

x	–1	0	1
$y = \dfrac{2+6x}{2}$	–2	1	4

Rectas coincidentes, tiene infinitas soluciones.



c. $\begin{cases} \mathbf{2x - y = -1} \\ \mathbf{-4x + 2y = -2} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* en las dos ecuaciones:

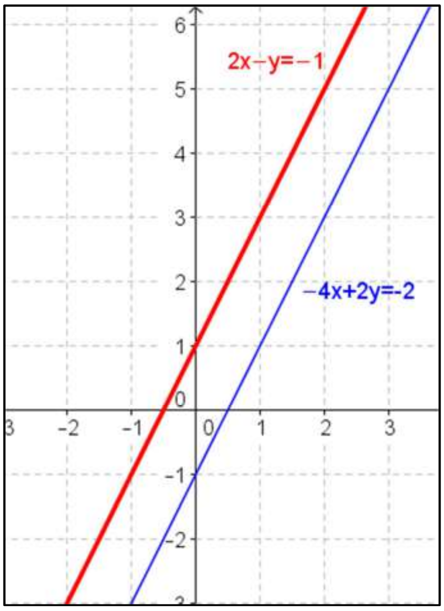
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \Rightarrow y = 2x + 1 \\ -4x + 2y = -2 \Rightarrow 2y = -2 + 4x \Rightarrow y = \dfrac{-2 + 4x}{2} \end{cases}$$

Para cada ecuación se elabora una tabla de valores:

x	–1	0	1
$y = 2x + 1$	–1	1	3

x	–1	0	1
$y = \dfrac{-2 + 4x}{2}$	–3	–1	1

Rectas paralelas, no tiene solución.



d. $\begin{cases} \mathbf{3x = y + 1} \\ \mathbf{4x + y = 6} \end{cases}$

Se despeja la incógnita *y* en las dos ecuaciones:

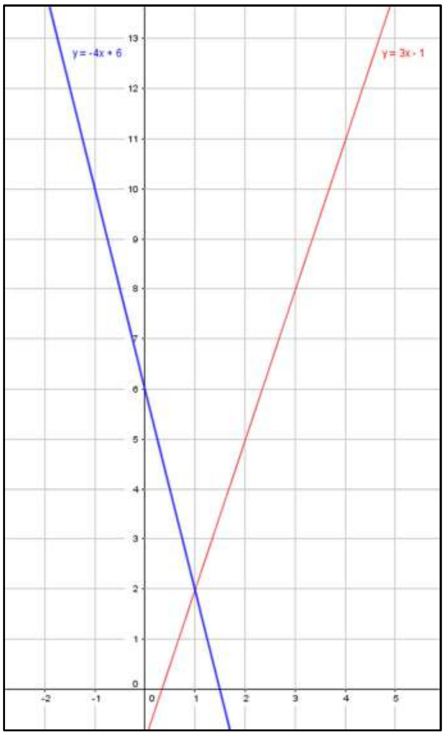
$$\begin{cases} 3x = y + 1 \Rightarrow y = 3x - 1 \\ 4x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - 4x \end{cases}$$

Para cada ecuación se elabora una tabla de valores:

x	–1	0	1
$y = 3x - 1$	–4	–1	2

x	–1	0	1
$y = 6 - 4x$	10	6	2

Rectas secantes, solución: $x = 1$, $y = 2$



36. Calcula la solución por el método de sustitución.

a. $\begin{cases} \mathbf{4x - 3y = -2} \\ \mathbf{x + 5y = 11} \end{cases}$

1. Se despeja la incógnita x de la segunda ecuación: $x = 11 - 5y$
2. Se sustituye la x en la primera ecuación. $4 \cdot (11 - 5y) - 3y = -2$
3. Se resuelve la ecuación resultante:

$$4 \cdot (11 - 5y) - 3y = -2 \Rightarrow 44 - 20y - 3y = -2 \Rightarrow -23y = -46 \Rightarrow y = 2$$

4. Se halla el valor de la otra incógnita: $x = 11 - 5 \cdot 2 \Rightarrow x = 1$

Comprobación

$$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \Rightarrow 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2 \Rightarrow 4 - 6 = -2 \\ x + 5y = 11 \Rightarrow 1 + 5 \cdot 2 = 11 \Rightarrow 1 + 10 = 11 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} \mathbf{-2x - y = 3} \\ \mathbf{4x + 2y = 1} \end{cases}$

1. Se despeja la incógnita *y* de la primera ecuación: $y = -2x - 3$
2. Se sustituye la *y* en la segunda ecuación: $4x + 2 \cdot (-2x - 3) = 1$
3. Se resuelve la ecuación resultante:
   $4x + 2 \cdot (-2x - 3) = 1 \Rightarrow 4x - 4x - 6 = 1 \Rightarrow 0x = 7$
   No tiene solución.

c. $\begin{cases} \mathbf{3x - y = -10} \\ \mathbf{2x + 7y = 1} \end{cases}$

1. Se despeja la incógnita *y* de la primera ecuación: $3x + 10 = y$
2. Se sustituye la *y* en la segunda ecuación: $2x + 7 \cdot (3x + 10) = 1$
3. Se resuelve la ecuación resultante:
   $2x + 7 \cdot (3x + 10) = 1 \Rightarrow 2x + 21x + 70 = 1 \Rightarrow 23x = -69 \Rightarrow x = -3$
4. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $3x + 10 = y \Rightarrow 3 \cdot (-3) + 10 = y \Rightarrow -9 + 10 = y \Rightarrow y = 1$

Comprobación

$$\begin{cases} 3x - y = -10 \Rightarrow 3 \cdot (-3) - 1 = -10 \Rightarrow -9 - 1 = -10 \Rightarrow -10 = -10 \\ 2x + 7y = 1 \Rightarrow 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 1 = 1 \Rightarrow -6 + 7 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$$

d. $\begin{cases} \mathbf{5x + 2y = 7} \\ \mathbf{-3x + 4y = 1} \end{cases}$

1. Se despeja la incógnita *y* de la primera ecuación: $2y = 7 - 5x \Rightarrow y = \dfrac{7 - 5x}{2}$
2. Se sustituye la *y* en la segunda ecuación: $-3x + 4 \cdot \left(\dfrac{7 - 5x}{2}\right) = 1$
3. Se resuelve la ecuación resultante:
   $-3x + 4 \cdot \left(\dfrac{7 - 5x}{2}\right) = 1 \Rightarrow -3x + 2 \cdot (7 - 5x) = 1 \Rightarrow -3x + 14 - 10x = 1 \Rightarrow$
   $\Rightarrow -13x = -13 \Rightarrow x = 1$
4. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $y = \dfrac{7 - 5 \cdot 1}{2} = 1$

Comprobación

$$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \Rightarrow 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 7 \Rightarrow 5 + 2 = 7 \Rightarrow 7 = 7 \\ -3x + 4y = 1 \Rightarrow -3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 1 \Rightarrow -3 + 4 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$$

37. Resuelve por el método de igualación.

a. $\begin{cases} \mathbf{x - 2y = -1} \\ \mathbf{x + 3y = 14} \end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = -1 + 2y \\ x = 14 - 3y \end{cases}$$

2. Se igualan las dos expresiones despejadas:
   $-1 + 2y = 14 - 3y$
3. Se resuelve la ecuación resultante:
   $-1 + 2y = 14 - 3y \Rightarrow 2y + 3y = 14 + 1 \Rightarrow 5y = 15 \Rightarrow y = 3$
4. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $x = -1 + 2y \Rightarrow x = -1 + 2 \cdot 3 \Rightarrow x = 5$

Comprobación

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \Rightarrow 5 - 2 \cdot 3 = -1 \Rightarrow 5 - 6 = -1 \Rightarrow -1 = -1 \\ x + 3y = 14 \Rightarrow 5 + 3 \cdot 3 = 14 \Rightarrow 5 + 9 = 14 \Rightarrow 14 = 14 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} \mathbf{-6x + 5y = 10} \\ \mathbf{-3x + y = 2} \end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 5y = 10 + 6x \Rightarrow y = \dfrac{10 + 6x}{5} \\ y = 2 + 3x \end{cases}$$

2. Se igualan las dos expresiones despejadas:
   $\dfrac{10 + 6x}{5} = 2 + 3x$
3. Se resuelve la ecuación resultante:
   $\dfrac{10 + 6x}{5} = 2 + 3x \Rightarrow 10 + 6x = 5 \cdot (2 + 3x) \Rightarrow 10 + 6x = 10 + 15x \Rightarrow$
   $\Rightarrow 6x - 15x = 10 - 10 \Rightarrow -9x = 0 \Rightarrow x = 0$
4. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $y = 2 + 3x \Rightarrow y = 2 + 3 \cdot 0 \Rightarrow y = 2$

Comprobación

$$\begin{cases} -6x + 5y = 10 \Rightarrow -6 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10 \Rightarrow 0 + 10 = 10 \Rightarrow 10 = 10 \\ -3x + y = 2 \Rightarrow -3 \cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow 0 + 2 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \end{cases}$$

c. $\begin{cases} \mathbf{3x - 2y = 4} \\ \mathbf{9x - 6y = 12} \end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x = 4 + 2y \Rightarrow x = \dfrac{4 + 2y}{3} \\ 9x = 12 + 6y \Rightarrow x = \dfrac{12 + 6y}{9} \end{cases}$$

2. Se igualan las dos expresiones despejadas:

$$\frac{4+2y}{3}=\frac{12+6y}{9}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante:

$$\frac{3\cdot(4+2y)}{9}=\frac{12+6y}{9}\Rightarrow 12+6y=12+6y\Rightarrow 0y=0$$

Tiene infinitas soluciones.

d. $\begin{cases}\boldsymbol{-3x+5y=-1}\\ \boldsymbol{4x-9y=-1}\end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases}+5y=-1+3x\Rightarrow y=\dfrac{-1+3x}{5}\\ 4x+1=9y\Rightarrow y=\dfrac{4x+1}{9}\end{cases}$$

2. Se igualan las dos expresiones despejadas:

$$\frac{-1+3x}{5}=\frac{4x+1}{9}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante:

$$\frac{9\cdot(-1+3x)}{45}=\frac{5\cdot(4x+1)}{45}\Rightarrow 9\cdot(-1+3x)=5\cdot(4x+1)\Rightarrow -9+27x=20x+5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 27x-20x=5+9\Rightarrow 7x=14\Rightarrow x=2$$

4. Se halla el valor de la otra incógnita:

$$y=\frac{4x+1}{9}\Rightarrow y=\frac{4\cdot2+1}{9}=1$$

Comprobación

$$\begin{cases}-3x+5y=-1\Rightarrow -3\cdot2+5\cdot1=-1\Rightarrow -6+5=-1\Rightarrow -1=-1\\ 4x-9y=-1\Rightarrow 4\cdot2-9\cdot1=-1\Rightarrow 8-9=-1\Rightarrow -1=-1\end{cases}$$

38. Halla la solución por el método de reducción.

a. $\begin{cases}\boldsymbol{3x-4y=4}\\ \boldsymbol{2x+4y=16}\end{cases}$

1. Se suman las dos ecuaciones para reducir el término en *y*:

$$+\begin{cases} 3x \cancel{-4y} = 4 \\ 2x \cancel{+4y} = 16 \end{cases}$$
$$5x \quad = 20 \Rightarrow x = 4$$

2. Se calcula el valor de la otra incógnita:

$$3x - 4y = 4 \Rightarrow 3 \cdot 4 - 4y = 4 \Rightarrow 12 - 4y = 4 \Rightarrow 12 - 4 = 4y \Rightarrow 8 = 4y \Rightarrow y = 2$$

Comprobación

$$\begin{cases} 3x - 4y = 4 \Rightarrow 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 12 - 8 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \\ 2x + 4y = 16 \Rightarrow 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 16 \Rightarrow 8 + 8 = 16 \Rightarrow 16 = 16 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y = -4} \\ \boldsymbol{-3x + 6y = 12} \end{cases}$

1. Se multiplica las dos ecuaciones por los números necesarios para conseguir que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales, pero de signo contrario:

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{Se multiplica por 3}} \begin{cases} 3x - 6y = -12 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$$

2. Se suman las dos ecuaciones:

$$+\begin{cases} 3x - 6y = -12 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$$
$$0x \ + 0y = 12 \Rightarrow \text{Tiene infinitas soluciones.}$$

c. $\begin{cases} \boldsymbol{2x + 9y = -1} \\ \boldsymbol{5x - 3y = -28} \end{cases}$

1. Se multiplica las dos ecuaciones por los números necesarios para conseguir que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales, pero de signo contrario:

$$\begin{cases} 2x + 9y = -1 \\ 5x - 3y = -28 \end{cases} \xrightarrow[\text{Se multiplica por 3}]{} \begin{cases} 2x + 9y = -1 \\ 15x - 9y = -84 \end{cases}$$

2. Se suman las dos ecuaciones y se despeja la incógnita:

$$+\begin{cases} 2x \cancel{+9y} = -1 \\ 15x \cancel{-9y} = -84 \end{cases}$$
$$17x \quad = -85 \Rightarrow x = -5$$

3. Se calcula la otra incógnita:

$$2x + 9y = -1 \Rightarrow 2 \cdot (-5) + 9y = -1 \Rightarrow 9y = -1 + 10 \Rightarrow y = 1$$

Comprobación

$$\begin{cases} 2x + 9y = -1 \Rightarrow 2 \cdot (-5) + 9 \cdot 1 = -1 \Rightarrow -10 + 9 = -1 \Rightarrow -1 = -1 \\ 5x - 3y = -28 \Rightarrow 5 \cdot (-5) - 3 \cdot 1 = -28 \Rightarrow -25 - 3 = -28 \Rightarrow -28 = -28 \end{cases}$$

d. $\begin{cases} \mathbf{8x + 2y = -7} \\ \mathbf{3x + 4y = -1} \end{cases}$

1. Se multiplica las dos ecuaciones por los números necesarios para conseguir que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales, pero de signo contrario:

$$\begin{cases} 8x + 2y = -7 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{Se multiplica por } (-2)} \begin{cases} -16x - 4y = 14 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$$

2. Se suman las dos ecuaciones:

$$+\begin{cases} -16x \cancel{-4y} = 14 \\ 3x \cancel{+4y} = -1 \end{cases}$$
$$\overline{-13x \qquad = 13 \Rightarrow x = -1}$$

3.Se calcula el valor de la otra incógnita:

$$3x + 4y = -1 \Rightarrow 3\cdot(-1) + 4y = -1 \Rightarrow -3 + 4y = -1 \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Comprobación

$$\begin{cases} 8x + 2y = -7 \Rightarrow 8\cdot(-1) + 2\cdot\frac{1}{2} = -7 \Rightarrow -8 + 1 = -7 \Rightarrow -7 = -7 \\ 3x + 4y = -1 \Rightarrow 3\cdot(-1) + 4\cdot\frac{1}{2} = -1 \Rightarrow -3 + 2 = -1 \Rightarrow -1 = -1 \end{cases}$$

39. Resuelve por el método más adecuado.

a. $\begin{cases} \mathbf{5x - 4y = 5} \\ \mathbf{x = 2y + 1} \end{cases}$

Se resuelve por el método de sustitución.

1. Se sustituye la segunda ecuación en la primera:

$$5\cdot(2y + 1) - 4y = 5 \Rightarrow 10y + 5 - 4y = 5 \Rightarrow 6y = 0 \Rightarrow y = 0$$

2. Se calcula el valor de la otra incógnita:

$$x = 2y + 1 \Rightarrow x = 0 + 1 \Rightarrow x = 1$$

Comprobación

$$\begin{cases} 5x - 4y = 5 \Rightarrow 5\cdot 1 - 4\cdot 0 = 5 \Rightarrow 5 - 0 = 5 \Rightarrow 5 = 5 \\ x = 2y + 1 \Rightarrow 1 = 2\cdot 0 + 1 \Rightarrow 1 = 0 + 1 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} \mathbf{y = 3x - 4} \\ \mathbf{y = -2x + 7} \end{cases}$

Se resuelve por el método de igualación.

$$3x - 4 = -2x + 7 \Rightarrow 3x + 2x = 7 + 4 \Rightarrow 5x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{5}$$

$$y = 3x - 4 \Rightarrow y = 3\cdot\frac{11}{5} - 4 = \frac{33}{5} - 4 = \frac{33}{5} - \frac{20}{5} = \frac{13}{5}$$

Comprobación

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \Rightarrow y = 3\cdot\frac{11}{5} - 4 = \frac{13}{5} \\ y = -2x + 7 \Rightarrow y = -2\cdot\frac{11}{5} + 7 = \frac{13}{5} \end{cases}$$

c. $\begin{cases} \mathbf{-4x = 1 - 3y} \\ \mathbf{2y = 3x - 9} \end{cases}$

Se resuelve por el método de reducción.

$$\begin{cases} -4x = 1 - 3y \\ 2y = 3x - 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 3y = 1 \xrightarrow{\text{Se multiplica por 3}} \\ -3x + 2y = -9 \xrightarrow[\text{Se multiplica por } (-4)]{} \end{cases} + \begin{cases} \cancel{-12x} + 9y = 3 \\ \cancel{12x} - 8y = 36 \end{cases}$$
$$y = 39$$

$$-4x = 1 - 3y \Rightarrow -4x = 1 - 3\cdot 39 \Rightarrow -4x = 1 - 117 \Rightarrow -4x = -116 \Rightarrow x = 29$$

Comprobación

$$\begin{cases} -4x = 1 - 3y \Rightarrow -4\cdot 29 = 1 - 3\cdot 39 \Rightarrow -116 = 1 - 117 \Rightarrow -116 = -116 \\ 2y = 3x - 9 \Rightarrow 2\cdot 39 = 3\cdot 29 - 9 \Rightarrow 78 = 87 - 9 \Rightarrow 78 = 78 \end{cases}$$

d. $\begin{cases} \mathbf{0{,}5x + 1{,}5y = 5} \\ \mathbf{2x + 3y = 8} \end{cases}$

Se resuelve por el método de reducción.

$$\begin{cases} 0{,}5x + 1{,}5y = 5 \xrightarrow{\text{Se multiplica por } (-2)} \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} -x \cancel{-3y} = -10 \\ 2x \cancel{+3y} = 8 \end{cases}$$
$$x = -2$$

$$2x + 3y = 8 \Rightarrow 2\cdot(-2) + 3y = 8 \Rightarrow -4 + 3y = 8 \Rightarrow 3y = 8 + 4 \Rightarrow y = 4$$

Comprobación

$$\begin{cases} 0{,}5x + 1{,}5y = 5 \Rightarrow 0{,}5\cdot(-2) + 1{,}5\cdot 4 = 5 \Rightarrow -1 + 6 = 5 \Rightarrow 5 = 5 \\ 2x + 3y = 8 \Rightarrow 2\cdot(-2) + 3\cdot 4 = 8 \Rightarrow -4 + 12 = 8 \Rightarrow 8 = 8 \end{cases}$$

40. Aplica el método más adecuado para resolver los siguientes sistemas:

a. $\begin{cases} \mathbf{3\cdot(x+2)=2\cdot(3y-1)} \\ \mathbf{x+5y=4\cdot(x+y)-2} \end{cases}$

Se aplica el método de reducción

$$\begin{cases} 3x+6=6y-2 \\ x+5y=4x+4y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-6y=-8 \\ -3x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} \cancel{3x}-6y=-8 \\ \cancel{-3x}+y=-2 \end{cases}$$

$$-5y=-10 \Rightarrow y=2$$

$$3x-6y=-8 \Rightarrow 3x-6\cdot 2=-8 \Rightarrow 3x-12=-8 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

Comprobación

$$\begin{cases} 3x=6y-8 \Rightarrow 3\cdot\frac{4}{3}=6\cdot 2-8 \Rightarrow 4=12-8 \Rightarrow 4=4 \\ y=3x-2 \Rightarrow 2=3\cdot\frac{4}{3}-2 \Rightarrow 2=4-2 \Rightarrow 2=2 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} \mathbf{\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1} \\ \mathbf{\frac{5x-3}{3}=y+2} \end{cases}$

Se aplica el método de reducción.

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1 \\ \frac{5x-3}{3}=y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-2y}{6}=\frac{6}{6} \\ \frac{5x-3}{3}=\frac{3\cdot(y+2)}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x-3=3y+6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=6 \xrightarrow{\text{Se multiplica por 3}} \\ 5x-3y=9 \xrightarrow[\text{Se multiplica por } (-2)]{} \end{cases} + \begin{cases} 9x\cancel{-6y}=18 \\ -10x\cancel{+6y}=-18 \end{cases}$$

$$-x \qquad =0 \Rightarrow x=0$$

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1 \Rightarrow 0-\frac{y}{3}=1 \Rightarrow -y=3 \Rightarrow y=-3$$

Comprobación

$$\begin{cases} 3x=6+2y \Rightarrow 3\cdot 0=6+2\cdot(-3) \Rightarrow 0=6-6 \Rightarrow 0=0 \\ 5x=9+3y \Rightarrow 5\cdot 0=9+3\cdot(-3) \Rightarrow 0=9-9 \Rightarrow 0=0 \end{cases}$$

41. La suma de dos números es 12. Si la diferencia del triple de uno y el doble del otro es 1, ¿cuáles son dichos números?

Primer número: x

Segundo número: y

$$\begin{cases} x+y=12 \xrightarrow{\text{Se multiplica por 2}} \\ 3x-2y=1 \end{cases} + \begin{cases} 2x\cancel{+2y}=24 \\ 3x\cancel{-2y}=1 \end{cases}$$

$$5x \quad =25 \Rightarrow x=5$$

$x + y = 12 \Rightarrow 5 + y = 12 \Rightarrow y = 7$
Primer número: $x = 5$
Segundo número: $y = 7$
Comprobación

$$\begin{cases} x+y=12 \Rightarrow 5+7=12 \Rightarrow 12=12 \\ 3x-2y=1 \Rightarrow 3\cdot 5-2\cdot 7=1 \Rightarrow 15-14=1 \Rightarrow 1=1 \end{cases}$$

42. Marta tiene 15 años más que su vecino Alberto. Dentro de 2 años, la edad de Marta será el cuádruple que la de Alberto; ¿qué edades tienen actualmente ambos?

Edades	Alberto	Marta
Edad actual	x	$y = x + 15$ Marta tiene 15 años más que Alberto
Edad dentro de dos años	$x + 2$	$y + 2 = 4 \cdot (x + 2)$ Marta tendrá el cuádruple de la edad de Alberto

$$\begin{cases} y=x+15 \\ y+2=4\cdot(x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=15 \\ y+2=4x+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=15 \\ -4x+y=6 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} x-y=-15 \\ -4x+y=6 \end{cases}$$

$$-3x \quad =-9 \Rightarrow x=3$$

$y = x + 15 \Rightarrow y = 3 + 15 \Rightarrow y = 18$
Edad de Alberto: 3
Edad Marta:18
Comprobación

$$\begin{cases} y=x+15 \Rightarrow 18=3+15 \Rightarrow 18=18 \\ y+2=4x+8 \Rightarrow 18+2=4\cdot 3+8 \Rightarrow 20=12+8 \Rightarrow 20=20 \end{cases}$$

43. Para reformar la cocina de su casa, Berta compró la semana pasada 3 cajas de plaquetas para el suelo y 4 de azulejos para la pared por 200 €. Hoy ha comprado 2 cajas más de plaquetas y otras 2 de azulejos por 130 €. ¿Cuánto cuesta la caja de plaquetas para el suelo y la de azulejos para la pared?

Precio caja de plaquetas: x
Precio caja de azulejos: y

$$\begin{cases} 3x+4y=200 \xrightarrow{\text{Se multiplica por } (-1)} \\ 2x+2y=130 \xrightarrow[\text{Se multiplica por 2}]{} \end{cases} + \begin{cases} -3x\cancel{-4y}=-200 \\ 4x\cancel{+4y}=260 \end{cases}$$

$$x \quad =60$$

$$3x+4y=200 \Rightarrow 3\cdot 60+4y=200 \Rightarrow 4y=200-180 \Rightarrow y=5$$

Precio caja de plaquetas: 60
Precio caja de azulejos: 5

Comprobación

$$\begin{cases} 3x+4y=200 \Rightarrow 3\cdot 60+4\cdot 5=200 \Rightarrow 180+20=200 \Rightarrow 200=200 \\ 2x+2y=130 \Rightarrow 2\cdot 60+2\cdot 5=130 \Rightarrow 120+10=130 \Rightarrow 130=130 \end{cases}$$

44. Borja lleva 7 monedas de 10 y 20 cts. para comprar el pan. Si la barra le ha costado 1,20 € y ha pagado con todo lo que llevaba encima, ¿cuántas monedas de cada tipo tenía?

Número de monedas de 10 cts: x
Número de monedas de 20 cts: y

$$\begin{cases} x+y=7 \xrightarrow{\text{Se multiplica por } (-10)} \\ 10x+20y=120 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} \cancel{-10x}-10y=-70 \\ \cancel{10x}+20y=120 \end{cases}$$

$$10y=50 \Rightarrow y=5$$

$x + y = 7 \Rightarrow x + 5 = 7 \Rightarrow x = 2$

Número de monedas de 10 cts: $x = 2$
Número de monedas de 20 cts: $y = 5$

Comprobación

$$\begin{cases} x+y=7 \Rightarrow 2+5=7 \Rightarrow 7=7 \\ 10x+20y=120 \Rightarrow 10\cdot 2+20\cdot 5=120 \Rightarrow 20+100=120 \Rightarrow 120=120 \end{cases}$$

45. En una granja australiana hay 250 animales entre canguros y avestruces. Si en total suman 700 patas, ¿cuántos canguros y avestruces hay?

Número de canguros: x
Número de avestruces: y

$$\begin{cases} x+y=250 \xrightarrow{\text{Se multiplica por } (-2)} \\ 4x+2y=700 \end{cases} + \begin{cases} -2x\cancel{-2y}=-500 \\ 4x\cancel{+2y}=700 \end{cases}$$

$$2x \quad =200 \Rightarrow x=100$$

$x + y = 250 \Rightarrow 100 + y = 250 \Rightarrow y = 150$
Número de canguros: $x = 100$
Número de avestruces: $y = 150$

Comprobación

$$\begin{cases} x+y=250 \Rightarrow 100+150=250 \Rightarrow 250=250 \\ 4x+2y=700 \Rightarrow 4\cdot 100+2\cdot 150=700 \Rightarrow 400+300=700 \Rightarrow 700=700 \end{cases}$$

46. Se quiere vallar una finca rectangular cuyas dimensiones difieren entre sí por 20 m. Si el perímetro de la finca es 1 000 m, ¿cuáles son sus dimensiones?

Un lado: x
Otro lado: $y = x - 20$

$$\begin{cases} y = x - 20 \\ 1000 = 2\cdot(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 20 \\ 1000 = 2x + 2y \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} x \cancel{-y} = 20 \\ x \cancel{+y} = 500 \end{cases}$$

$$2x \quad = 520 \Rightarrow x = 260$$

$y = x - 20 \Rightarrow y = 260 - 20 \Rightarrow y = = 240$
Un lado: $x = 260$
Otro lado: $y = x - 20 = 240$

Comprobación

$$\begin{cases} y = x - 20 \Rightarrow 240 = 260 - 20 \Rightarrow 240 = 240 \\ 1000 = 2\cdot(x+y) \Rightarrow 1000 = 2\cdot(260+240) \Rightarrow 1000 = 2\cdot 500 \Rightarrow 1000 = 1000 \end{cases}$$

47. Se quiere hacer una mezcla de aceite de oliva a 2,80 €/L con aceite de girasol a 1,20 €/L. Si en total se desea elaborar una mezcla de 80 L a un precio de 2,20 €/L, ¿cuántos litros de cada tipo de aceite han de mezclarse?

Litros de aceite de oliva: x
Litros de aceite de girasol: y

$$\begin{cases} x + y = 80 \\ 2{,}80x + 1{,}20y = 80\cdot 2{,}20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 80 - x \\ 2{,}80x + 1{,}20\cdot(80 - x) = 176 \end{cases}$$

$$2{,}80x + 96 - 1{,}2x = 176 \Rightarrow 1{,}6x = 80 \Rightarrow x = 50$$

$$y = 80 - x \Rightarrow y = 80 - 50 = 30 \Rightarrow y = 30$$

Litros de aceite de oliva: $x = 50$
Litros de aceite de girasol: $y = 30$

Comprobación

$$\begin{cases} x + y = 80 \Rightarrow 50 + 30 = 80 \Rightarrow 80 = 80 \\ 2{,}80x + 1{,}20y = 80\cdot 2{,}20 \Rightarrow 2{,}80\cdot 50 + 1{,}20\cdot 30 = 176 \Rightarrow 176 = 176 \end{cases}$$

48. Carlos tiene el triple de primos que su amiga Eva. Si Carlos tuviera 5 primos menos y Eva 5 más, ambos tendrían el mismo número de primos. Determina el número de primos de Carlos y Eva.

Primos de Carlos: x
Primos de Eva: y

$$\begin{cases} x = 3y \\ x - 5 = 5 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = 10 + y \end{cases} \Rightarrow 3y = 10 + y \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5$$

$x = 3y \Rightarrow x = 3 \cdot 5 \Rightarrow x = 15$
Primos de Carlos: $x = 15$
Primos de Eva: $y = 5$

Comprobación

$$\begin{cases} x = 3y \\ x - 5 = 5 + y \end{cases}$$

49. Sergio y sus amigos han ido a una hamburguesería. Por 3 hamburguesas y 5 perritos les han cobrado 13,50 €; sin embargo, si hubieran pedido 5 hamburguesas y 3 perritos, habrían tenido que pagar 14,50 €. ¿Cuánto cuesta una hamburguesa y un perrito?

Precio de la hamburguesa: x
Precio del perrito: y

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13{,}50 \xrightarrow{\text{Se multiplica por } (-5)} \\ 5x + 3y = 14{,}50 \xrightarrow[\text{Se multiplica por 3}]{} \end{cases} + \begin{cases} \cancel{-15x} - 25y = -67{,}5 \\ \cancel{15x} + 9y = 43{,}5 \end{cases}$$
$$-16y = -24 \Rightarrow y = 1{,}5$$

$3x + 5y = 13{,}50 \Rightarrow 3x + 5 \cdot 1{,}5 = 13{,}50 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$
Precio de la hamburguesa: $x = 2$
Precio del perrito: $y = 1{,}5$

Comprobación

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13{,}50 \Rightarrow 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1{,}5 = 13{,}50 \Rightarrow 6 + 7{,}5 = 13{,}5 \Rightarrow 13{,}5 = 13{,}5 \\ 5x + 3y = 14{,}50 \Rightarrow 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1{,}5 = 14{,}50 \Rightarrow 10 + 4{,}5 = 14{,}50 \Rightarrow 14{,}5 = 14{,}5 \end{cases}$$

50. Un agricultor dispone de 60 m^2 de terreno para plantar tomates y pepinos. Si planta el doble de tomates que de pepinos menos 6 m^2, ¿cuántos metros cuadrados ha plantado de cada uno?

Metros cuadrados de tomates: x
Metros cuadrados de pepinos: y

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x = 2y - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60 - y \\ x = 2y - 6 \end{cases} \Rightarrow 60 - y = 2y - 6 \Rightarrow 3y = 66 \Rightarrow y = 22$$

$x + y = 60 \Rightarrow x + 22 = 60 \Rightarrow x = 60 - 22 = 38$

Metros cuadrados de tomates: $x = 38$
Metros cuadrados de pepinos: $y = 22$

Comprobación

$$\begin{cases} x+y=60 \Rightarrow 38+22=60 \Rightarrow 60=60 \\ x=2y-6 \Rightarrow 38=2\cdot 22-6 \Rightarrow 38=44-6 \Rightarrow 38=38 \end{cases}$$

51. Halla dos números sabiendo que uno de ellos es la tercera parte del otro y que la diferencia del mayor menos el menor es 16.

Número mayor: y
Número menor: x

$$\begin{cases} x=\dfrac{y}{3} \\ y-x=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=y \\ y=16+x \end{cases} \Rightarrow 3x=16+x \Rightarrow 2x=16 \Rightarrow x=8$$

$y-x=16 \Rightarrow y-8=16 \Rightarrow y=24$

Número mayor: $y = 24$
Número menor: $x = 8$

Comprobación

$$\begin{cases} x=\dfrac{y}{3} \Rightarrow 8=\dfrac{24}{3} \Rightarrow 8=8 \\ y-x=16 \Rightarrow 24-8=16 \Rightarrow 16=16 \end{cases}$$

52. Para pintar un cuadro, Lisa ha adquirido 2 pinceles y 3 témperas por 12 €. Para poder acabarlo, ha tenido que comprar en la misma tienda 4 pinceles y 2 témperas más por 16 €. ¿Cuánto cuesta cada pincel y cada témpera?

Precio de cada pincel: x
Precio de cada témpera: y

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 4x+2y=16 \end{cases} \xrightarrow{\text{Se multiplica por}(-2)} + \begin{cases} \cancel{-4x}-6y=-24 \\ \cancel{4x}+2y=16 \end{cases}$$
$$-4y=-8 \Rightarrow y=2$$

$2x+3y=12 \Rightarrow 2x+3\cdot 2=12 \Rightarrow 2x=12-6 \Rightarrow x=3$

Precio del pincel: $x = 3$
Precio de las témperas: $y = 2$

Comprobación

$$\begin{cases} 2x+3y=12 \Rightarrow 2\cdot 3+3\cdot 2=12 \Rightarrow 6+6=12 \Rightarrow 12=12 \\ 4x+2y=16 \Rightarrow 4\cdot 3+2\cdot 2=16 \Rightarrow 12+4=16 \Rightarrow 16=16 \end{cases}$$

SOLUCIONES PÁG. 146

1. **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer y segundo grado y comprueba tus resultados con Wiris:**

   a. $\boldsymbol{3x - 8 + 4x = 1 - 2x + 9x - 9}$

   $3x + 4x + 2x - 9x = 1 - 9 + 8 \Rightarrow 0x = 0 \rightarrow$ Tiene infinitas soluciones.

   b. $\boldsymbol{5 \cdot (2x - 5) + 1 = 6 - 3 \cdot (x - 3)}$

   $10x - 25 + 1 = 6 - 3x + 9 \Rightarrow 10x + 3x = 6 + 9 + 25 - 1 \Rightarrow 13x = 39 \Rightarrow x = 3$

   c. $\boldsymbol{\frac{3x}{4} - 2 = x - \frac{1}{6}}$

   $$\frac{9x-24}{12} = \frac{12x-2}{12} \Rightarrow 9x - 24 = 12x - 2 \Rightarrow 9x - 12x = -2 + 24 \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow -3x = 22 \Rightarrow x = \frac{-22}{3}$$

   d. $\boldsymbol{\frac{x+5}{3} + 4x = 7 - \frac{3x-1}{2}}$

   $$\frac{2\cdot(x+5)+24x}{6} = \frac{42-3\cdot(3x-1)}{6} \Rightarrow 2\cdot(x+5)+24x = 42-3\cdot(3x-1) \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow 2x+10+24x = 42-9x+3 \Rightarrow 2x+24x+9x = 42+3-10 \Rightarrow 35x = 35 \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow x = \frac{35}{35} = 1$$

   e. $\boldsymbol{x^2 - 6x + 8 = 0}$

   $$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6+2}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

   f. $\boldsymbol{3x^2 + 27 = 0}$

   $3x^2 = -27 \Rightarrow x^2 = \frac{-27}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9} \rightarrow$ No tiene solución.

   g. $\boldsymbol{-2x^2 + 7x = 0}$

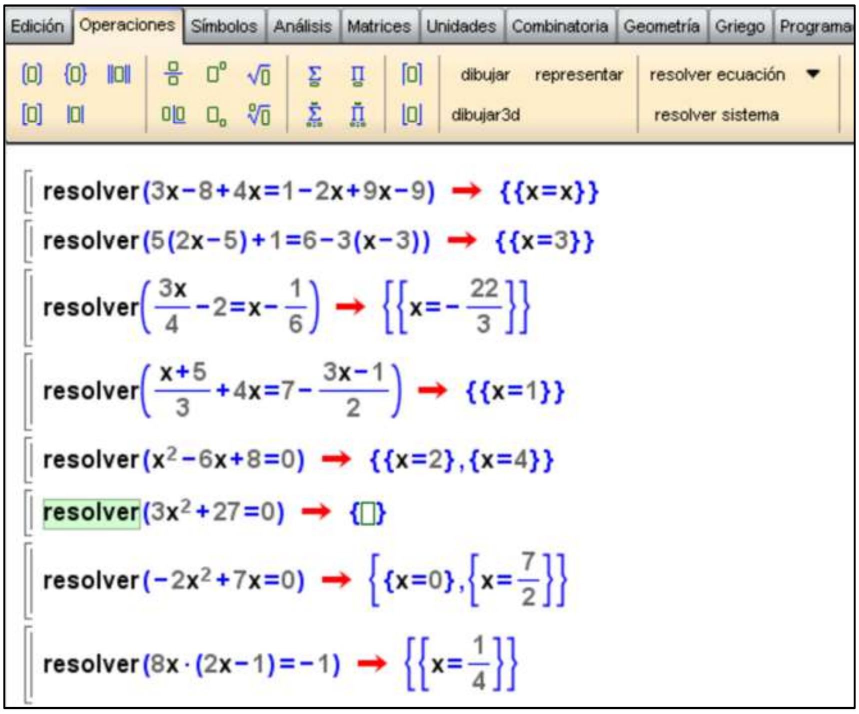
   $$x \cdot (-2x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \end{cases}$$

   h. $\boldsymbol{8x \cdot (2x - 1) = -1}$

   $16x^2 - 8x + 1 = 0$

$$x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 16\cdot 1}}{2\cdot 16}=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{32}=\frac{8\pm\sqrt{0}}{32}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

Solución doble.



2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y comprueba los resultados con Wiris:

a. $\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -2x+y=5 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x+4y=-2 \\ -2x+y=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{Se multiplica por }(-4)} + \begin{cases} 3x\cancel{+4y}=-2 \\ 8x\cancel{-4y}=-20 \end{cases}$$

$$11x \quad =-22 \Rightarrow x=-2$$

$$-2\cdot(-2)+y=5\Rightarrow 4+y=5\Rightarrow y=1$$

b. $\begin{cases} x-2y=5 \\ -2x+4y=-10 \end{cases}$

Se despeja la incógnita x en la 1.ª ecuación: $x=5+2y$

Se sustituye en la 2.ª ecuación:

$$-2\cdot(5+2y)+4y=-10\Rightarrow -10-4y+4y=-10\Rightarrow -4y+4y=-10+10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0y=0$$

Infinitas soluciones.

c. $\begin{cases} \mathbf{5x - 3y = -6} \\ \mathbf{4x + 2y = -18} \end{cases}$

Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x - 3y = -6 \Rightarrow x = \dfrac{-6+3y}{5} \\ 4x + 2y = -18 \Rightarrow x = \dfrac{-18-2y}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \frac{-6+3y}{5} = \frac{-18-2y}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4\cdot(-6+3y)}{20} = \frac{5\cdot(-18-2y)}{20} \Rightarrow -24+12y = -90-10y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12y + 10y = -90 + 24 \Rightarrow 22y = -66 \Rightarrow y = -3$$

$$x = \frac{-6+3y}{5} = \frac{-6+3\cdot(-3)}{5} = -3$$

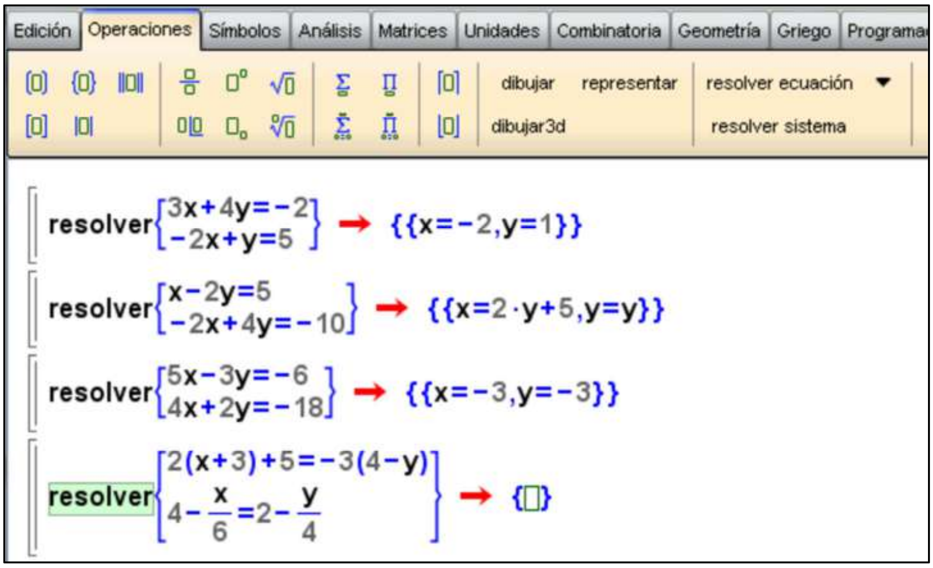
d. $\begin{cases} \mathbf{2\cdot(x+3)+5 = -3\cdot(4-y))} \\ \mathbf{4 - \dfrac{x}{6} = 2 - \dfrac{y}{4}} \end{cases}$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+6+5 = -12+3y \Rightarrow 2x - 3y = -12-6-5 \Rightarrow 2x - 3y = -23 \\ \dfrac{48-2x}{12} = \dfrac{24-3y}{12} \Rightarrow 48-2x = 24-3y \Rightarrow -2x+3y = -24 \end{array}\right.$$

$$+\begin{cases} 2x - 3y = -23 \\ -2x + 3y = -24 \end{cases}$$

$$0x + 0y = -47$$

No tiene solución.



SOLUCIONES PÁG. 147

1. **Define grado de una ecuación. Pon un ejemplo de una ecuación que cumpla estas condiciones:**

   El grado de una ecuación es el mayor grado de los términos.

   a. **Es de grado 1.** Respuesta abierta.
      Por ejemplo: $3x - 5 = 8 \cdot (x + 3)$

   b. **Es de grado 2 y tiene dos incógnitas.** Respuesta abierta.
      Por ejemplo: $4x^2 + 2x = 3y$

   c. **Es de grado 3 y tiene una incógnita.** Respuesta abierta.
      Por ejemplo: $-5x^3 + 8x^2 + x - 1 = 0$

2. **¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de segundo grado sin término independiente?**

   Puede tener dos soluciones distintas o una solución doble.

3. **¿Es cero, solución de todas las ecuaciones de segundo grado incompletas? Si no es así, indica de cuál de los tipos sí lo es.**

   No. Solo de las ecuaciones incompletas del tipo $ax^2 = 0$ y $ax^2 + bx = 0$

4. **¿Qué es el discriminante de una ecuación de segundo grado completa? ¿Qué indica su signo?**

   Si la ecuación de segundo grado es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, el discriminante es la expresión: $\Delta = b^2 - 4ac$, e indica el número de soluciones de la ecuación:

   - Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones distintas.
   - Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución (doble).
   - Si $\Delta < 0$, ecuación no tiene solución.

5. **¿Cuántas soluciones tienen las ecuaciones lineales? Pon un ejemplo de ecuación lineal y busca, al menos, dos soluciones distintas.**

   Infinitas. Respuesta abierta. Por ejemplo: La ecuación $3x - 2y = 1$ tiene al menos como soluciones los pares $(1 , 1)$ y $(3 , 4)$.

6. **¿Cuál es la representación gráfica de un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones? ¿Y de uno sin solución?**

   Un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones tiene una representación gráfica de dos rectas coincidentes. Un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones tiene una representación gráfica de dos rectas paralelas.

7. **Un sistema de dos ecuaciones tiene como única solución $x = 0$ e $y = 0$. ¿Cómo son los términos independientes de ambas ecuaciones?**

   Ambos cero.

8. **¿Puede un sistema de ecuaciones de variables *x* e *y* tener como solución el mismo valor para la *x* y para la *y*?**

   Sí

9. **Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster...**

   Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 148 – REPASO FINAL

ECUACIONES

1. Expresa en lenguaje algebraico las siguientes ecuaciones:

a. La suma de dos números consecutivos es 24. → $x + (x + 1) = 24$

b. La tercera parte de un número más su triple es 40. → $\frac{x}{3} + 3x = 40$

c. El producto de dos números es 16. → $x \cdot y = 16$

d. El cuadrado de un número es igual al triple de otro número. → $x^2 = 3y$

e. El área de un rectángulo es 18 cm². → $b \cdot h = 18$

f. Dos kilos de fresas y cuatro kilos de cerezas cuestan 12,25 €. →
→ $2x + 4y = 12{,}25$

2. Determina los miembros, los términos, las incógnitas y el grado de las siguientes ecuaciones:

a. $\boldsymbol{4x^2 + 3 = -1 + 2x}$
Primer miembro: $4x^2 + 3$
Segundo miembro: $-1 + 2x$
Términos: $4x^2$, 3, –1, $2x$
Incógnitas: x
Grado: 2

b. $\boldsymbol{xy + 5x = 9y}$
Primer miembro: $xy + 5x$
Segundo miembro: $9y$
Términos: xy, $5x$, $9y$
Incógnitas: x, y
Grado: 2

c. $\boldsymbol{6x - 2 = 3x}$
Primer miembro: $6x - 2$
Segundo miembro: $3x$
Términos: $6x$, –2, $3x$
Incógnitas: x
Grado: 1

d. $\boldsymbol{7x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x + 1 = 0}$
Primer miembro: $7x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x + 1$
Segundo miembro: 0
Términos: $7x^4$, $3x^3$, $-x^2$, $5x$, 1, 0
Incógnitas: x
Grado: 4

e. $\boldsymbol{-2x^2y^3z - 3xy = 4xy^2}$
Primer miembro: $-2x^2y^3z - 3xy$
Segundo miembro: $4xy^2$
Términos: $-2x^2y^3z$, $-3xy$, $4xy^2$
Incógnitas: x, y, z
Grado: 6

f. $3x^3 = x - 2$
Primer miembro: $3x^3$
Segundo miembro: $x - 2$
Términos: $3x^3$, x, -2
Incógnitas: x
Grado: 3

3. Indica si $x = 2$ es solución de estas ecuaciones:

a. $3x^2 - 4x = 4$
$3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 12 - 8 = 4 \Rightarrow 4 = 4 \rightarrow$ Sí es solución.

b. $6 \cdot (x + 3) - 20 = 0$
$6 \cdot (2 + 3) - 20 \neq 0 \Rightarrow 6 \cdot 5 - 20 \neq 0 \Rightarrow 30 - 20 \neq 0 \Rightarrow 10 \neq 0 \rightarrow$ No es solución.

c. $\sqrt{5x - 1} = 3$
$\sqrt{5 \cdot 2 - 1} = 3 \Rightarrow \sqrt{9} = 3 \Rightarrow 3 = 3 \rightarrow$ Sí es solución.

d. $\frac{x + 5}{7} = 1 + 3x$
$\frac{2 + 5}{7} \neq 1 + 3 \cdot 2 \Rightarrow 1 \neq 7 \rightarrow$ No es solución.

4. De los siguientes valores ¿cuáles son solución de la ecuación $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$?

a. $x = -3$ $\Rightarrow (-3)^3 - (-3)^2 - 9 \cdot (-3) + 9 = -27 - 9 + 27 + 9 = 0 \rightarrow$ Sí es solución.
b. $x = -1$ $\Rightarrow (-1)^3 - (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 9 = -1 - 1 + 10 + 9 = 17 \rightarrow$ No es solución.
c. $x = 1$ $\Rightarrow 1^3 - 1^2 - 9 \cdot 1 + 9 = 1 - 9 - 1 + 9 = 0 \rightarrow$ Sí es solución.
d. $x = 3$ $\Rightarrow 3^3 - 3^2 - 9 \cdot 3 + 9 = 27 - 9 - 27 + 9 = 0 \rightarrow$ Sí es solución.

5. Escribe una ecuación equivalente a cada una de las siguientes ecuaciones:
Las ecuaciones equivalentes son las que tienen la misma solución.
a. $3x - 2 = 5x + 4$ $\rightarrow$ Respuesta abierta. Tiene que tener como solución $x = -3$.
b. $2 \cdot (x - 1) = 8$ $\rightarrow$ Respuesta abierta. Tiene que tener como solución $x = 5$.

6. Calcula mentalmente las soluciones de las siguientes ecuaciones y di cuáles de ellas son equivalentes:

a. $x - 2 = 1$	$x = 3$
b. $x^2 = 9$	$x_1 = 3$, $x_2 = -3$
c. $\frac{-x + 13}{2} = 2$	$x = 9$
d. $x \cdot (x - 1) = 6$	$x_1 = 3$, $x_2 = -2$
e. $x = x^2$	$x_1 = 0$, $x_2 = 1$
f. $5^x = 125$	$x = 3$

Son equivalentes las ecuaciones a. y f.

7. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones transponiendo términos:

a. $x + 3 = 7$
$x = 7 - 3 \Rightarrow x = 4$

b. $\frac{x}{2} = 4$
$x = 4 \cdot 2 \Rightarrow x = 8$

c. –9 = 3*x*

$$\frac{-9}{3} = x \Rightarrow x = -3$$

d. –1 = *x* – 3

$-1 + 3 = x \Rightarrow x = 2$

e. –1 + *x* = –1

$x = -1 + 1 \Rightarrow x = 0$

f. –0,2*x* = –1,2

$$x = \frac{-1{,}2}{-0{,}2} = 6$$

g. 5*x* = –3*x* – 16

$$5x + 3x = -16 \Rightarrow 8x = -16 \Rightarrow x = \frac{-16}{8} = -2$$

h. $\mathbf{\frac{3x}{4} = -9}$

$$3x = -9 \cdot 4 \Rightarrow 3x = -36 \Rightarrow x = \frac{-36}{3} = -12$$

i. 7*x* + 5 = 6*x*

$7x - 6x = -5 \Rightarrow x = -5$

8. **Escribe una ecuación de primer grado con una incógnita que cumpla estas condiciones:**
   a. **Es compatible determinada.** Respuesta abierta.
   b. **Tiene infinitas soluciones.** Respuesta abierta.
   c. **Es incompatible.** Respuesta abierta.

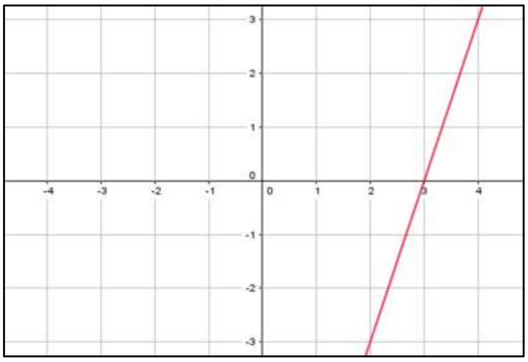
ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

9. **Resuelve gráficamente las siguientes ecuaciones:**

a. 2*x* + 3 = 5*x* – 6

$y = -2x + 5x - 6 - 3 \Rightarrow y = 3x - 9 \Rightarrow 0 = 3x - 9 \Rightarrow x = 3$

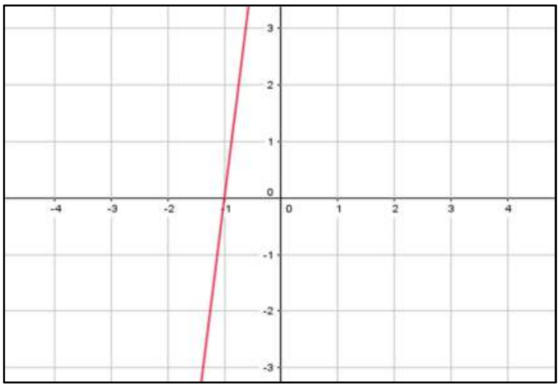
x	–1	0	1	3
$y = 3x - 9$	–12	–9	–6	0



b. *x* – 3 – 4*x* = 5*x* + 6 – 1

$y = -x + 3 + 4x + 5x + 6 - 1 \Rightarrow y = 8x + 8 \Rightarrow 0 = 8x + 8 \Rightarrow x = -1$

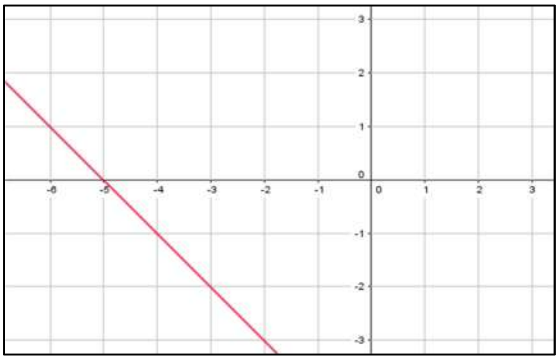
x	–1	0	1	2
$y = 8x + 8$	0	8	16	24



c. 3*x* + 7 – *x* = 2 + *x*

$y = –3x – 7 + x + 2 + x \Rightarrow y = –x – 5 \Rightarrow 0 = –x – 5 \Rightarrow x = –5$

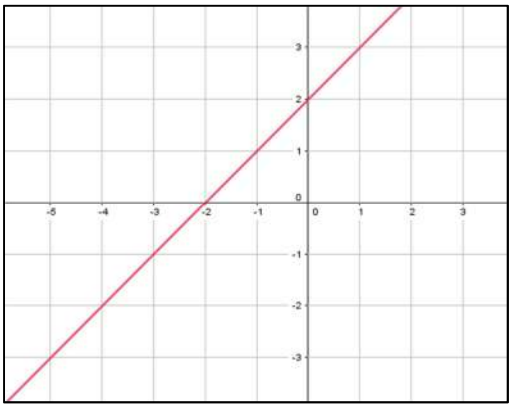
x	–1	0	1	– 5
$y = –x –5$	– 4	– 5	– 6	0



d. 2 · (–3*x* – 4) = –6 – 5*x*

$–6x – 8 = –6 – 5x \Rightarrow y = 6x + 8 – 6 – 5x \Rightarrow y = x + 2 \Rightarrow 0 = x + 2 \Rightarrow x = – 2$

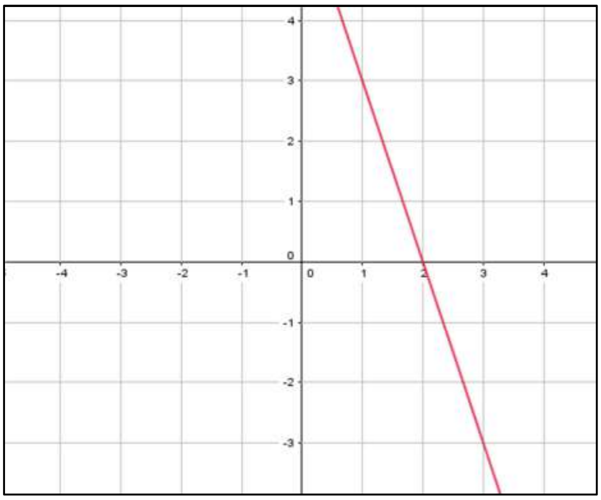
x	–1	0	1	– 2
$y = x + 2$	1	2	3	0



e. 3 + (*x* – 1) = –(2*x* – 8)

$3 + x - 1 = -2x + 8 \Rightarrow y = -3 - x + 1 - 2x + 8 \Rightarrow y = -3x + 6 \Rightarrow 0 = -3x + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2$

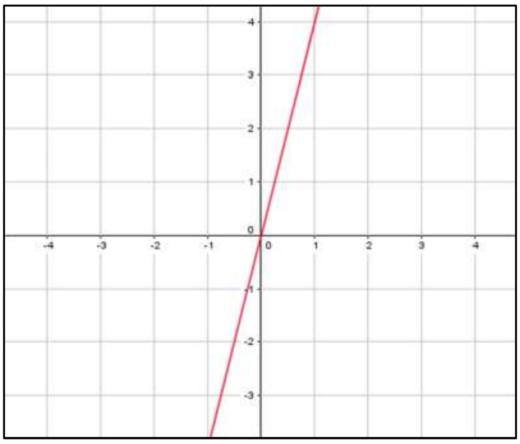
x	–1	0	1	2
$y = -3x + 6$	9	6	3	0



f. –4 · (2 + *x*) = –8

$-8 - 4x = -8 \Rightarrow y = 8 + 4x - 8 \Rightarrow y = 4x \Rightarrow 0 = 4x \Rightarrow x = 0$

x	–1	1	2
$y = 4x$	–4	4	8



10. Halla la solución de las ecuaciones propuestas.

a. –5 + 2*x* – 4*x* + 6 = 3*x* – 4

$2x - 4x - 3x = -4 + 5 - 6 \Rightarrow -5x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{-5} = 1$

b. –*x* – 4 + 8 + 2*x* = 5*x* + 4

$-x + 2x - 5x = 4 + 4 - 8 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$

c. 3*x* – 1 + 5*x* – 2 + 7 = 0

$8x + 4 = 0 \Rightarrow 8x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$

d. 7 + 4*x* – 2 + *x* = –3 + 2*x* + 3*x*

$4x + x - 2x - 3x = -3 - 7 + 2 \Rightarrow 0x = -8 \rightarrow$ No tiene solución.

11. Resuelve las siguientes ecuaciones con paréntesis:

a. 7 + (3*x* – 1) – 4*x* = 5*x* – (1 – *x*)

$7 + 3x - 1 - 4x = 5x - 1 + x \Rightarrow 3x - 4x - 5x - x = -1 - 7 + 1 \Rightarrow -7x = -7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-7}{-7} = 1$

b. –2 · (3 + 4*x*) = 2 · (*x* – 8)

$-6 - 8x = 2x - 16 \Rightarrow -8x - 2x = -16 + 6 \Rightarrow -10x = -10 \Rightarrow x = \frac{-10}{-10} = 1$

c. 6*x* + 3 · (2 + *x*) – 1 = 5*x* – 2 + 9

$6x + 6 + 3x - 1 = 5x - 2 + 9 \Rightarrow 6x + 3x - 5x = -2 + 9 - 6 + 1 \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

d. –(–3*x* + 5) + 2*x* + 3 · (4 – 3*x*) = 0

$3x - 5 + 2x + 12 - 9x = 0 \Rightarrow 3x + 2x - 9x = 5 - 12 \Rightarrow -4x = -7 \Rightarrow x = \frac{7}{4}$

12. Determina la solución de estas ecuaciones con denominadores y comprueba tus resultados con Wiris:

a. $\mathbf{3 + \frac{x}{2} = 5x - 3}$

$\frac{6+x}{2} = \frac{2\cdot(5x-3)}{2} \Rightarrow 6 + x = 2\cdot(5x-3) \Rightarrow 6 + x = 10x - 6 \Rightarrow x - 10x = -6 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -9x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}$

b. $\mathbf{\frac{4x}{3} + 1 = \frac{5x}{3} - 2}$

$\frac{4x+3}{3} = \frac{5x-6}{3} \Rightarrow 4x + 3 = 5x - 6 \Rightarrow 4x - 5x = -6 - 3 \Rightarrow -x = -9 \Rightarrow x = 9$

c. $\mathbf{\frac{-2x}{5} = 3 - \frac{x}{2}}$

$\frac{-4x}{10} = \frac{30-5x}{10} \Rightarrow -4x = 30 - 5x \Rightarrow -4x + 5x = 30 \Rightarrow x = 30$

d. $\frac{4x}{3}+\frac{5x}{6}-\frac{x}{4}=0$

$$\frac{16x+10x-3x}{12}=0 \Rightarrow 16x+10x-3x=0 \Rightarrow 23x=0 \Rightarrow x=0$$

e. $3+2x=\frac{-5x}{2}+\frac{3}{4}$

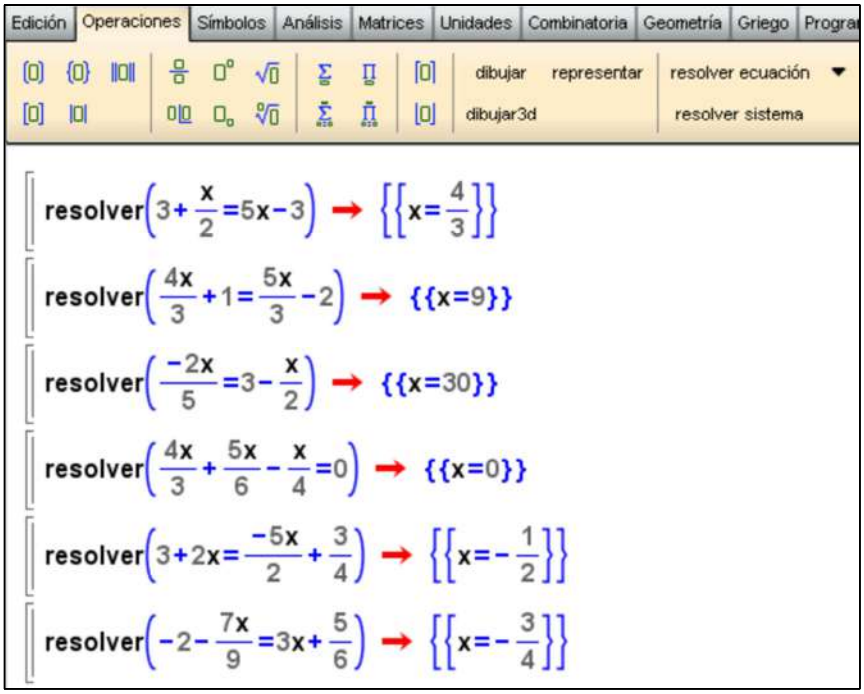
$$\frac{12+8x}{4}=\frac{-10x+3}{4} \Rightarrow 12+8x=-10x+3 \Rightarrow 8x+10x=3-12 \Rightarrow 18x=-9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-9}{18}=\frac{-1}{2}$$

f. $-2-\frac{7x}{9}=3x+\frac{5}{6}$

$$\frac{-36-14x}{18}=\frac{54x+15}{18} \Rightarrow -36-14x=54x+15 \Rightarrow -14x-54x=15+36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -68x=51 \Rightarrow x=\frac{51}{-68}=\frac{-3}{4}$$



13. Resuelve las ecuaciones siguientes y comprueba tus resultados con Wiris:

a. $\frac{4x-1}{3}=2x+5$

$$\frac{4x-1}{3}=\frac{3\cdot(2x+5)}{3} \Rightarrow 4x-1=3\cdot(2x+5) \Rightarrow 4x-1=6x+15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-6x=15+1 \Rightarrow -2x=16 \Rightarrow x=\frac{16}{-2}=-8$$

b. $\boldsymbol{\dfrac{x+3}{4}=3+\dfrac{2x}{5}}$

$$\frac{5\cdot(x+3)}{20}=\frac{60+8x}{20}\Rightarrow 5\cdot(x+3)=60+8x\Rightarrow 5x+15=60+8x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x-8x=60-15\Rightarrow -3x=45\Rightarrow x=\frac{45}{-3}=-15$$

c. $\boldsymbol{\dfrac{2x+3}{6}+1=\dfrac{x-2}{3}}$

$$\frac{2x+3+6}{6}=\frac{2\cdot(x-2)}{6}\Rightarrow 2x+3+6=2\cdot(x-2)\Rightarrow 2x+9=2x-4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x-2x=-4-9\Rightarrow 0x=-13$$

No tiene solución.

d. $\boldsymbol{3-\dfrac{1-x}{2}=\dfrac{4x+5}{3}-2}$

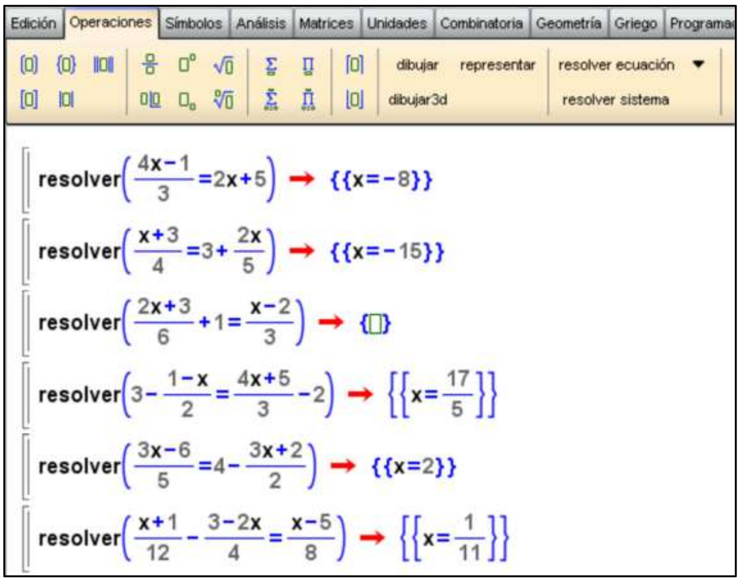
$$\frac{18-3\cdot(1-x)}{6}=\frac{2\cdot(4x+5)-12}{6}\Rightarrow 18-3\cdot(1-x)=2\cdot(4x+5)-12\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 18-3+3x=8x+10-12\Rightarrow 3x-8x=10-12-18+3\Rightarrow \qquad ;=$$
$$\Rightarrow -5x=-17\Rightarrow x=\frac{17}{5}$$

e. $\boldsymbol{\dfrac{3x-6}{5}=4-\dfrac{3x+2}{2}}$

$$\frac{2\cdot(3x-6)}{10}=\frac{40-5\cdot(3x+2)}{10}\Rightarrow 2\cdot(3x-6)=40-5\cdot(3x+2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x-12=40-15x-10\Rightarrow 6x+15x=40-10+12\Rightarrow 21x=42\Rightarrow x=\frac{42}{21}=2$$

f. $\boldsymbol{\dfrac{x+1}{12}-\dfrac{3-2x}{4}=\dfrac{x-5}{8}}$

$$\frac{2\cdot(x+1)}{24}-\frac{6\cdot(3-2x)}{24}=\frac{3\cdot(x-5)}{24}\Rightarrow 2\cdot(x+1)-6\cdot(3-2x)=3\cdot(x-5)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+2-18+12x=3x-15\Rightarrow 2x+12x-3x=-15-2+18\Rightarrow 11x=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{11}$$



SOLUCIONES PÁG. 149

14. Actividad resuelta

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{5x-3}{7}$

$7\cdot(x+3)=2\cdot(5x-3)\Rightarrow 7x+21=10x-6\Rightarrow 7x-10x=-6-21\Rightarrow$

$\Rightarrow -3x=-27\Rightarrow x=\dfrac{-27}{-3}=9$

b. $\dfrac{2-x}{6}=\dfrac{1-3x}{4}$

$4\cdot(2-x)=6\cdot(1-3x)\Rightarrow 8-4x=6-18x\Rightarrow -4x+18x=6-8\Rightarrow 14x=-2\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{-2}{14}=\dfrac{-1}{7}$

c. $\dfrac{4x+1}{3}=\dfrac{3x-8}{2}$

$2\cdot(4x+1)=3\cdot(3x-8)\Rightarrow 8x+2=9x-24\Rightarrow 8x-9x=-24-2\Rightarrow$

$\Rightarrow -x=-26\Rightarrow x=26$

d. $\dfrac{-2x}{7}=\dfrac{-x+3}{5}$

$5\cdot(-2x)=7\cdot(-x+3)\Rightarrow -10x=-7x+21\Rightarrow -10x+7x=21\Rightarrow$

$\Rightarrow -3x=21\Rightarrow x=\dfrac{21}{-3}=-7$

16. Encuentra la solución de estas ecuaciones:

a. $\mathbf{2\cdot\left(x-\frac{1}{5}\right)-4x-1=\frac{x}{3}}$

$$2x-\frac{2}{5}-4x-1=\frac{x}{3}\Rightarrow\frac{30x-6-60x-15}{15}=\frac{5x}{15}\Rightarrow 30x-6-60x-15=5x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30x-60x-5x=6+15\Rightarrow -35x=21\Rightarrow x=\frac{21}{-35}=\frac{-3}{5}$$

b. $\mathbf{\frac{2\cdot(4x+3)}{5}=\frac{3x}{2}-\frac{2x+1}{3}}$

$$\frac{6\cdot2\cdot(4x+3)}{30}=\frac{45x}{30}-\frac{10\cdot(2x+1)}{30}\Rightarrow 6\cdot2\cdot(4x+3)=45x-10\cdot(2x+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48x+36=45x-20x-10\Rightarrow 48x-45x+20x=-10-36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 23x=-46\Rightarrow x=\frac{-46}{23}=-2$$

c. $\mathbf{\frac{-1}{2}\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)=4x+\frac{1-x}{3}}$

$$\frac{-1x}{2}+\frac{2}{6}=4x+\frac{1-x}{3}\Rightarrow\frac{-3x+2}{6}=\frac{24x+2\cdot(1-x)}{6}\Rightarrow -3x+2=24x+2-x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x-24x+x=2-2\Rightarrow -26x=0\Rightarrow x=0$$

d. $\mathbf{-3\cdot(x-5)=\frac{3\cdot(x-2)}{2}}$

$$-3x+15=\frac{3\cdot(x-2)}{2}\Rightarrow 2\cdot(-3x+15)=3\cdot(x-2)\Rightarrow -6x+30=3x-6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x-3x=-6-30\Rightarrow -9x=-36\Rightarrow x=\frac{-36}{-9}=4$$

e. $\mathbf{\frac{2\cdot(x-3)}{9}=\frac{5\cdot(x+1)}{6}}$

$$6\cdot[2\cdot(x-3)]=9\cdot[5\cdot(x+1)]\Rightarrow 12x-36=45x+45\Rightarrow 12x-45x=45+36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -33x=81\Rightarrow x=\frac{81}{-33}=\frac{-27}{11}$$

f. $\mathbf{4\cdot\left(\frac{2x}{3}+\frac{5}{2}\right)-3=\frac{7x}{6}}$

$$\frac{8x}{3}+\frac{20}{2}-3=\frac{7x}{6}\Rightarrow\frac{16x+60-18}{6}=\frac{7x}{6}\Rightarrow 16x+60-18=7x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x-7x=-60+18\Rightarrow 9x=-42\Rightarrow x=\frac{-42}{9}=\frac{-14}{3}$$

17. La suma de un número más su mitad más su doble es 175. Halla dicho número.

Número: x

$$x+\frac{x}{2}+2x=175\Rightarrow\frac{2x+x+4x}{2}=\frac{350}{2}\Rightarrow 7x=350\Rightarrow x=\frac{350}{7}=50$$

El número es 50.
Comprobación

$$50+\frac{50}{2}+2\cdot 50=175\Rightarrow 50+25+100=175\Rightarrow 175=175$$

18. Tres amigos, Lucas, Diego y Natalia, quieren comprar un videojuego. Para ello van a juntar sus ahorros. Diego tiene 5 € más que Lucas, y Natalia, 8 € más que Lucas. Si entre los tres suman 58 €, ¿cuánto dinero tiene ahorrado cada uno?

Dinero que tiene Lucas: x
Dinero que tiene Diego: $x + 5$
Dinero que tiene Natalia: $x + 8$

$$x + x + 5 + x + 8 = 58 \Rightarrow 3x = 58 - 5 - 8 \Rightarrow 3x = 45 \Rightarrow x=\frac{45}{3}=15$$

Dinero que tiene Lucas: $x = 15$
Dinero que tiene Diego: $x + 5 = 15 + 5 = 20$
Dinero que tiene Natalia: $x + 8 = 15 + 8 = 23$

Comprobación
$x + x + 5 + x + 8 = 58 \Rightarrow 15 + 20 + 23 = 58 \Rightarrow 58 = 58$

19. En un supermercado, el precio de un flan es 0,30 € más caro que el de unas natillas, mientras que estas son 0,40 € más cara que un yogur. Si Carmen ha comprado un yogur, un flan y unas natillas y ha pagado 1,70 €, ¿cuánto cuesta cada producto?

Dinero que cuestan las natillas: x
Dinero que cuesta el flan: $0{,}30 + x$
Dinero que cuesta el yogur: $x - 0{,}40$

$$x + 0{,}30 + x + x - 0{,}40 = 1{,}70 \Rightarrow 3x = 1{,}70 - 0{,}30 + 0{,}40 \Rightarrow 3x = 1{,}80 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{1{,}80}{3}=0{,}6$$

Dinero que cuestan las natillas: $x = 0{,}6$
Dinero que cuesta el flan: $0{,}30 + x = 0{,}30 + 0{,}6 = 0{,}9$
Dinero que cuesta el yogur: $x - 0{,}40 = 0{,}6 - 0{,}40 = 0{,}20$

Comprobación
$x + 0{,}30 + x + x - 0{,}40 = 1{,}70 \Rightarrow 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}6 + 0{,}6 - 0{,}4 = 1{,}7 \Rightarrow 1{,}7 = 1{,}7$

20. La suma de tres números pares consecutivos es 108. ¿Cuáles son dichos números?

Primer número par: $2x$; segundo número: $2x + 2$; tercer número: $2x + 4$

$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 108 \Rightarrow 6x = 108 - 2 - 4 \Rightarrow 6x = 102 \Rightarrow x = \frac{102}{6} = 17$

Primer número par: $2x = 2 \cdot 17 = 34$; segundo: $2x + 2 = 34 + 2 = 36$; tercer número: $2x + 4 = 34 + 4 = 38$

Comprobación

$2x + 2x + 2 + 2x + 4 = 108 \Rightarrow 34 + 36 + 38 = 108 \Rightarrow 108 = 108$

21. El precio de la barra de pan ha subido 0,10 €. Cinco barras costaban ayer lo mismo que cuatro hoy. ¿Cuál es el precio actual de la barra de pan?

Precio de la barra: $x + 0{,}10$

$5x = 4 \cdot (0{,}10 + x) \Rightarrow 5x = 0{,}4 + 4x \Rightarrow 5x - 4x = 0{,}4 \Rightarrow x = 0{,}4$

Precio de la barra: $x + 0{,}10 = 0{,}4 + 0{,}10 = 0{,}50$

Comprobación

$5x = 4 \cdot (0{,}10 + x) \Rightarrow 5 \cdot 0{,}4 = 4 \cdot (0{,}10 + 0{,}40) \Rightarrow 2 = 4 \cdot 0{,}50 \Rightarrow 2 = 2$

22. En una bolsa tenemos 25 bolas entre blancas y negras. Si el número de bolas blancas es dos tercios del de bolas negras, ¿cuántas hay de cada color?

Bolas negras: x; bolas blancas: $\frac{2x}{3}$

$$x + \frac{2x}{3} = 25 \Rightarrow \frac{3x + 2x}{3} = \frac{75}{3} \Rightarrow 3x + 2x = 75 \Rightarrow 5x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{5} = 15$$

Bolas negras: $x = 15$

Bolas blancas: $\frac{2x}{3} = \frac{2 \cdot 15}{3} = 10$

Comprobación

$15 + 10 = 25 \Rightarrow 25 = 25$

23. Paula leyó el primer día $\frac{1}{3}$ de las páginas de cierto libro, el segundo día $\frac{2}{5}$ y el tercer día $\frac{1}{2}$ de lo que le quedaba por leer. Si aún le faltan 30 páginas para terminarlo, ¿cuántas páginas tiene el libro?

Páginas del libro: x

	Primer día	Segundo día	Tercer día
Páginas leídas	$\frac{x}{3}$	$\frac{2x}{5}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{15}=\frac{2x}{15}$
Páginas por leer	$\frac{2x}{3}$	$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)=1-\left(\frac{5+6}{15}\right)=1-\frac{11}{15}=\frac{15-11}{15}=\frac{4}{15}$	

$$\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+\frac{2x}{15}+30=x\Rightarrow\frac{5x+6x+2x+450}{15}=\frac{15x}{15}\Rightarrow 13x+450=15x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 450=15x-13x\Rightarrow 450=2x\Rightarrow x=\frac{450}{2}=225$$

Comprobación

$$\frac{x}{3}+\frac{2x}{5}+\frac{2x}{15}+30=x\Rightarrow\frac{225}{3}+\frac{2\cdot 225}{5}+\frac{2\cdot 225}{15}+30=225\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 75+90+30+30=225\Rightarrow 225=225$$

24. Halla los lados de un rectángulo de 60 dm de perímetro, cuya base mide 8 dm más que la altura.

Altura: x

Base: $x + 8$

$$60 = 2\cdot (x + x + 8) \Rightarrow 60 = 4x + 16 \Rightarrow 60 - 16 = 4x \Rightarrow 44 = 4x \Rightarrow x=\frac{44}{4}=11$$

Altura: $x = 11$

Base: $x + 8 = 11 + 8 = 19$

Comprobación

$(11 + 19) \cdot 2 = 60 \Rightarrow 30 \cdot 2 = 60 \Rightarrow 60 = 60$

25. Actividad resuelta.

26. Se dispone de dos clases de trigo para hacer harina: la clase A, que cuesta 18 cts. el kilo, y la clase B, que cuesta 24 cts. Si se desean fabricar 300 kg de harina a 22 cts. el kilo, ¿cuántos kilos de cada variedad se necesitan?

Kilos clase A: x
Kilos clase B: $300 - x$

$18 \cdot x + 24 \cdot (300 - x) = 300 \cdot 22 \Rightarrow 18x + 7200 - 24x = 6\,600 \Rightarrow$

$\Rightarrow 18x - 24x = 6\,600 - 7\,200 \Rightarrow -6x = -600 \Rightarrow x = \dfrac{-600}{-6} = 100$

Kilos clase A: $x = 100$
Kilos clase B: $300 - x = 300 - 100 = 200$

Comprobación
$18 \cdot x + 24 \cdot (300 - x) = 300 \cdot 22 \Rightarrow 18 \cdot 100 + 24 \cdot 200 = 6\,600 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1\,800 + 4\,800 = 6\,600 \Rightarrow 6\,600 = 6\,000$

27. La suma de las edades de dos hermanos es 18. Si el mayor tiene 3 años menos que el doble de su hermano, ¿cuáles son sus edades?

Edad de un hermano: x
Edad de otro hermano: $18 - x$

$x - 3 = 2 \cdot (18 - x) \Rightarrow x - 3 = 36 - 2x \Rightarrow x + 2x = 36 + 3 \Rightarrow 3x = 39 \Rightarrow x = \dfrac{39}{3} = 13$

Edad de un hermano: $x = 13$
Edad de otro hermano: $18 - x = 18 - 13$

Comprobación
$x - 3 = 2 \cdot (18 - x) \Rightarrow 13 - 3 = 2 \cdot (18 - 13) \Rightarrow 10 = 2 \cdot 5 \Rightarrow 10 = 10$

SOLUCIONES PÁG. 150

28. Visita esta página de Internet y realiza las actividades propuestas:

http://conteni2.educarex.es/mats/11803/contenido/

Respuesta abierta.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

29. Halla la solución de las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 - 5x = 0$

$$x \cdot (x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5 \end{cases}$$

b. $2x^2 - 18 = 0$

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = \frac{18}{2} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = +3 \end{cases}$$

c. $-x^2 + 64 = 0$

$$x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = +8 \end{cases}$$

d. $-4x^2 + 3x = 0$

$$x \cdot (-4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -4x + 3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

e. $0 = 2x + 4x^2$

$$x \cdot (4x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

f. $3x^2 = -27$

$$x^2 = \frac{-27}{3} \Rightarrow x = \sqrt{-9}$$ → No tiene solución.

30. Obtén el número de soluciones de las siguientes ecuaciones, sin resolverlas. Comprueba tus resultados con Wiris.

a. $x^2 - 5x + 7 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 25 - 28 = -3$

El discriminante es menor que 0, por lo tanto, no tiene solución.

b. $2x^2 + x - 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$

El discriminante es mayor que 0. Tiene dos soluciones distintas.

c. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

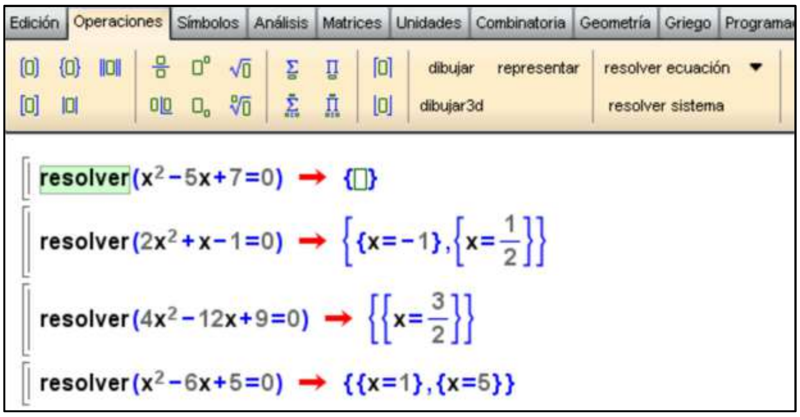
$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$

El discriminante es igual a 0, por lo tanto tiene una solución doble.

d. $x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

El discriminante es mayor que 0. Tiene dos soluciones distintas.



31. Obtén las soluciones de las ecuaciones.

a. $x^2 - 10x + 25 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{+10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} =$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{10 \pm 0}{2} = 5 \rightarrow \text{ Solución doble.}$$

b. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} =$$

$$= \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{-5-7}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2 \end{cases}$$

c. $x^2 = 7x - 12$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{+7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7+1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{7-1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

d. $25x^2 = -20x - 4$

$25x^2 + 20x + 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4}}{2 \cdot 25} = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 400}}{50} =$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{0}}{50} = \frac{-20 \pm 0}{50} = \frac{-2}{5} \rightarrow \text{ Solución doble.}$$

e. $12x^2 + 17x + 6 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 12 \cdot 6}}{2 \cdot 12} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 288}}{24} =$$

$$= \frac{-17 \pm \sqrt{1}}{24} = \frac{-17 \pm 1}{24} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-17 + 1}{24} = \dfrac{-16}{24} = \dfrac{-2}{3} \\ x_2 = \dfrac{-17 - 1}{24} = \dfrac{-18}{24} = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

f. $-4x + 4 = -x^2$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2 \rightarrow \text{ Solución doble.}$$

32. Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba tus resultados con Wiris:

a. $x \cdot (x + 5) = -7$

$x^2 + 5x + 7=0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 28}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

No tiene solución.

b. $3 \cdot (x + 2)^2 = 0$

$3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x + 12= 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{6} =$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{6} = \frac{-12 \pm 0}{6} = -2 \rightarrow \text{Solución doble.}$$

c. $\dfrac{x^2-1}{2}=\dfrac{4x}{3}$

$$3\cdot\left(x^2-1\right)=2\cdot 4x\Rightarrow 3x^2-3=8x\Rightarrow 3x^2-8x-3=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 3\cdot(-3)}}{2\cdot 3}=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{6}=$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{100}}{6}=\frac{8\pm 10}{6}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{8+10}{6}=\dfrac{18}{6}=3\\[2ex] x_2=\dfrac{8-10}{6}=\dfrac{-2}{6}=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$$

d. $\boldsymbol{5x\cdot(x+3)=4x\cdot(x-1)}$

$$5x^2+15x=4x^2-4x\Rightarrow 5x^2+15x-4x^2+4x=0\Rightarrow x^2+19x=0\Rightarrow$$

$$x\cdot(x+19)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x+19=0\Rightarrow x_2=-19\end{cases}$$

e. $\boldsymbol{(x+2)\cdot(x-1)=4}$

$$x^2-x+2x-2-4=0\Rightarrow x^2+x-6=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=$$

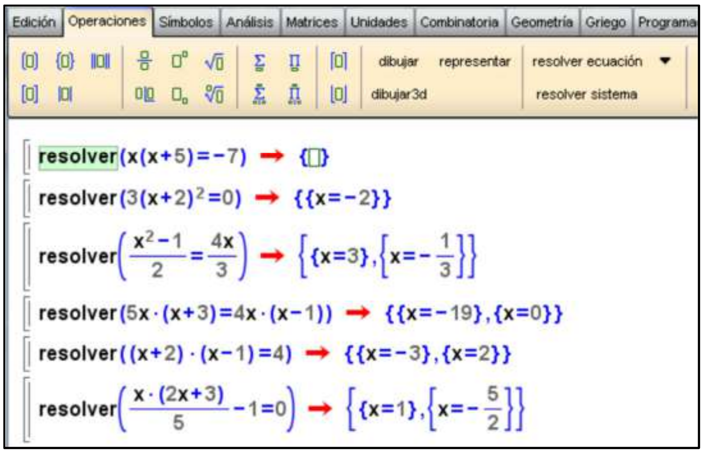
$$=\frac{-1\pm 5}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-1+5}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2ex] x_2=\dfrac{-1-5}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3\end{cases}$$

f. $\dfrac{x\cdot(2x+3)}{5}-1=0$

$$\frac{2x^2+3x-5}{5}=0\Rightarrow 2x^2+3x-5=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{4}=$$

$$=\frac{-3\pm 7}{4}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-3+7}{4}=\dfrac{4}{4}=\\[2ex] x_2=\dfrac{-3-7}{4}=\dfrac{-10}{4}=\dfrac{-5}{2}\end{cases}$$



33. Halla gráficamente la solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

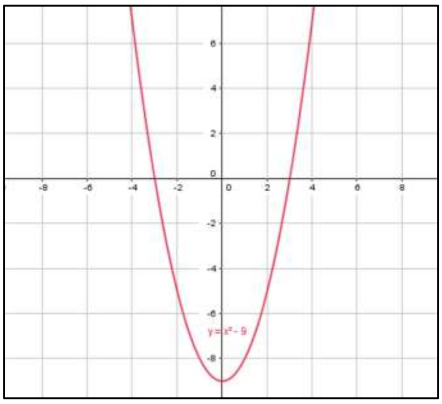
a. $x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$

Estos son los valores de *x* de los puntos de corte de la parábola con el eje *X*.

Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{0}{2\cdot 1} = 0 \\ y_v &= 0^2 - 9 = -9 \end{aligned}\right\} V = (0, -9)$$



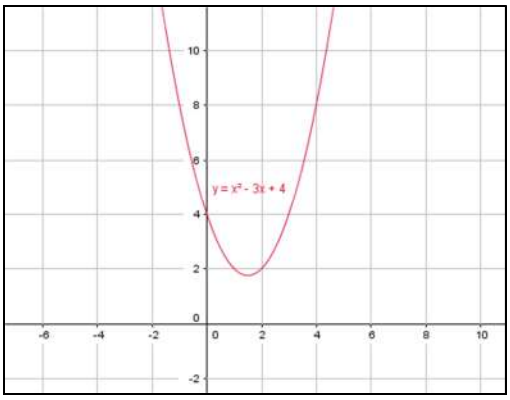
b. $x^2 - 3x + 4 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

La ecuación no tiene solución, por lo tanto, no corta al eje *X*.

Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{aligned} x_v &= \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-3)}{2\cdot 1} = \frac{3}{2} \\ y_v &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{4} \end{aligned}\right\} V = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

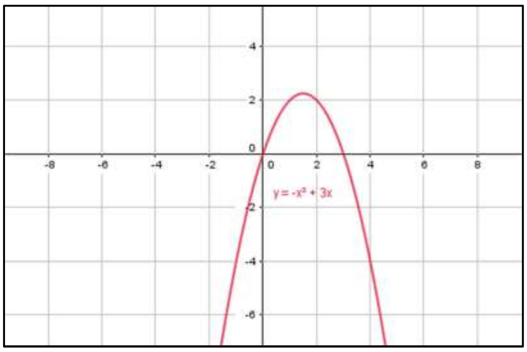


c. $-x^2 + 3x = 0$

$$x \cdot (-x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x+3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

Estos son los valores de *x* de los puntos de corte de la parábola con el eje *X*.
Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{-3}{2\cdot(-1)} = \dfrac{3}{2} \\ y_v = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{4} \end{array}\right\} V = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{9}{4}\right)$$

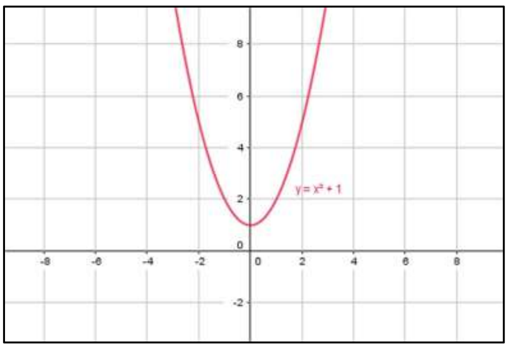


d. $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1;\ x = \sqrt{-1}$

La ecuación no tiene solución, por lo tanto, no corta al eje *X*.
Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{0}{2\cdot 1} = 0 \\ y_v = 0^2 + 1 = 1 \end{array}\right\} V = (0,1)$$

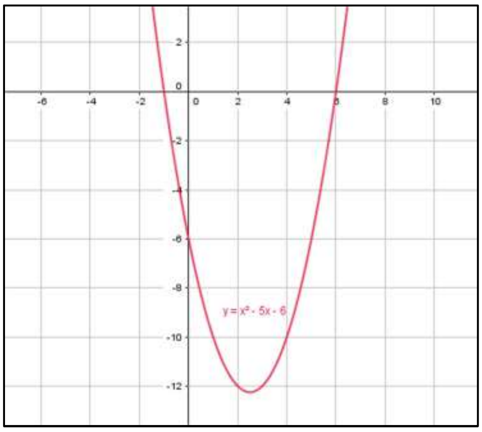


e. $\boldsymbol{x^2 - 5x - 6 = 0}$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 1\cdot (-6)}}{2\cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+7}{2} = 6 \\ x_2 = \dfrac{5-7}{2} = -1 \end{cases}$$

Estos son los valores de x de los puntos de corte de la parábola con el eje X.
Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{-(-5)}{2\cdot 1} = \dfrac{5}{2} \\ y_v = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 5\cdot\dfrac{5}{2} - 6 = \dfrac{-49}{4} \end{array}\right\} V = \left(\frac{5}{2}, \frac{-49}{4}\right)$$

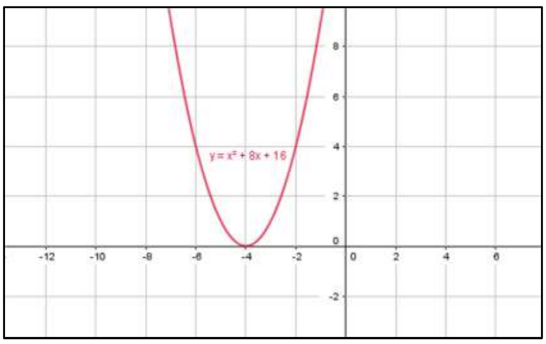


f. $\boldsymbol{x^2 + 8x + 16 = 0}$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 1\cdot 16}}{2\cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \frac{-8 \pm 0}{2} = -4$$

Este es el valor de x del punto de corte de la parábola con el eje X.
Se calcula el vértice de la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \dfrac{-8}{2\cdot 1} = -4 \\ y_v = (-4)^2 + 8\cdot(-4) + 16 = 0 \end{array}\right\} V = (-4, 0)$$



34. Actividad resuelta.

35. Obtén las soluciones de estas ecuaciones:

a. $\mathbf{(x+1)\cdot(x-3)=0}$

$(x+1)=0 \Rightarrow x_1=-1$

$(x-3)=0 \Rightarrow x_2=3$

b. $\mathbf{(x-5)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right)=0}$

$x-5=0 \Rightarrow x_1=5$

$x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x_2=\frac{-1}{3}$

c. $\mathbf{(2x-4)\cdot(3x+5)=0}$

$(2x-4)=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x_1=\frac{4}{2}=2$

$(3x+5)=0 \Rightarrow 3x=-5 \Rightarrow x_2=\frac{-5}{3}$

d. $\mathbf{(-3x+2)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)=0}$

$-3x+2=0 \Rightarrow -3x=-2 \Rightarrow x_1=\frac{2}{3}$

$x-\frac{2}{3}=0 \Rightarrow x_2=\frac{2}{3}$

36. El producto de dos números consecutivos es 210. ¿Cuáles son dichos números?

Primer número: x

Número consecutivo: $x+1$

$x\cdot(x+1)=210 \Rightarrow x^2+x=210 \Rightarrow x^2+x-210=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-210)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{1+840}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{841}}{2}=\frac{-1\pm29}{2}=$$

$$=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+29}{2}=\dfrac{28}{2}=14 \\ x_2=\dfrac{-1-29}{2}=\dfrac{-30}{2}=-15 \end{cases}$$

Hay dos soluciones: los números 14 y 15 y los números –15 y –14.

Comprobación

$14\cdot15=210 \Rightarrow 210=210$

$(-14)\cdot(-15)=210 \Rightarrow 210=210$

37. ¿Existe algún número tal que el doble de su cuadrado sea igual al triple del número que lo antecede? Justifica tu respuesta.

Número: x

$2x^2 = 3 \cdot (x-1) \Rightarrow 2x^2 - 3x + 3 = 0$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-24}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{4}$$

La ecuación no tiene solución. Por tanto, no existe un número que cumpla esas condiciones.

38. La diagonal de un rectángulo mide 10 dm. Halla sus dimensiones, sabiendo que la base mide 2 dm más que la altura.
Nota: utiliza el teorema de Pitágoras.

Altura: x
Base: $x + 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10^2 = x^2 + (x+2)^2 \Rightarrow 100 = x^2 + x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-96)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+768}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{784}}{4} = \frac{-4 \pm 28}{4} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+28}{4} = \dfrac{24}{4} = 6 \\ x_2 = \dfrac{-4-28}{4} = \dfrac{-32}{4} = -8 \end{cases}$$

La solución negativa no tiene validez al tratarse de dimensiones.
Altura: $x = 6$
Base: $x + 2 = 6 + 2 = 8$

Comprobación

$10^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow 100 = 36 + 64 \Rightarrow 100 = 100$

39. El área de un rombo es 25 cm². Halla la medida de las diagonales, sabiendo que la diagonal mayor mide 5 cm más que la menor.

Diagonal menor (d): x
Diagonal mayor (D): $x + 5$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow 25 = \frac{(x+5) \cdot x}{2} \Rightarrow 50 = x^2 + 5x \Rightarrow x^2 + 5x - 50 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-50)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+200}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{-5 \pm 15}{2} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+15}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{-5-15}{2} = \dfrac{-20}{2} = -10 \end{cases}$$

La solución negativa no tiene validez al tratarse de dimensiones.

Diagonal menor (*d*): $x = 5$
Diagonal mayor (*D*): $x + 5 = 5 + 5 = 10$

Comprobación

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow 25 = \frac{10 \cdot 5}{2} \Rightarrow 25 = \frac{50}{2} \Rightarrow 25 = 25$$

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

40. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

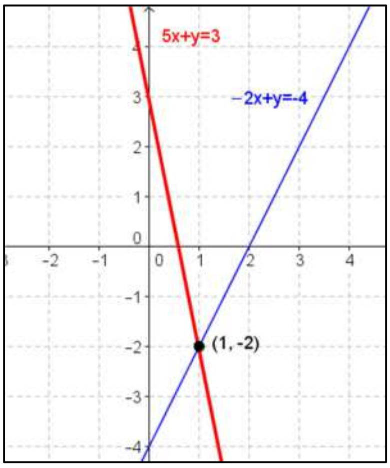
a. $\begin{cases} \mathbf{5x + y = 3} \\ \mathbf{-2x + y = -4} \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 3 - 5x \\ y = -4 + 2x \end{cases}$$

x	–1	0	1
$y = 3 - 5x$	8	3	–2

x	–1	0	1
$y = -4 + 2$	–6	–4	–2

Rectas secantes, solución: $x = 1$, $y = -2$



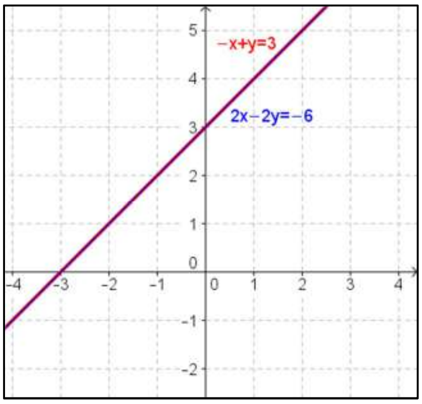
b. $\begin{cases} \mathbf{-x + y = 3} \\ \mathbf{2x - 2y = -6} \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 3 + x \\ -2y = -6 - 2x \Rightarrow y = \dfrac{6 + 2x}{2} \end{cases}$$

x	–1	0	1
$y = 3 + x$	2	3	4

x	–1	0	1
$y = \dfrac{6+2x}{2}$	2	3	4

Rectas coincidentes, tiene infinitas soluciones.



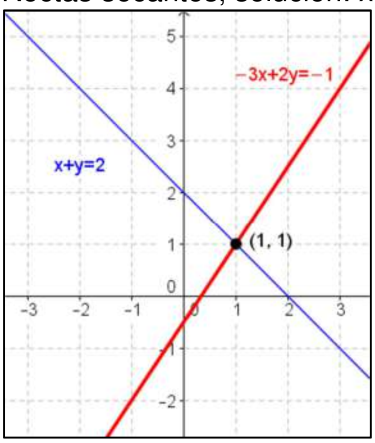
c. $\begin{cases} -3x + 2y = -1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2y = -1 + 3x \Rightarrow y = \dfrac{-1+3x}{2} \\ y = 2 - x \end{cases}$$

x	–1	0	1
$y = \dfrac{-1+3x}{2}$	–2	$\dfrac{-1}{2}$	1

x	–1	0	1
$y = 2 - x$	3	2	1

Rectas secantes, solución: $x = 1$, $y = 1$



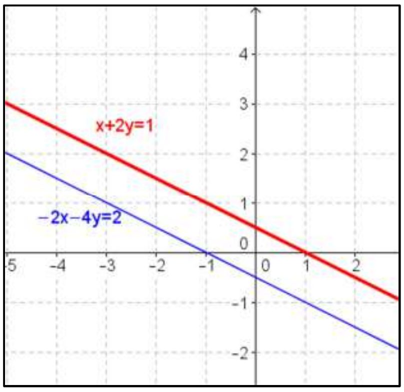
d. $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y = 1} \\ \boldsymbol{-2x - 4y = 2} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2y = 1 - x \Rightarrow y = \dfrac{1-x}{2} \\ -4y = 2 + 2x \Rightarrow y = \dfrac{-2-2x}{4} \end{cases}$$

x	–1	0	1
$y = \dfrac{1-x}{2}$	1	$\dfrac{1}{2}$	0

x	–1	0	1
$y = \dfrac{-2-2x}{4}$	0	$\dfrac{-1}{2}$	–1

Rectas paralelas, no tiene solución.



41. Resuelve por el método de sustitución y comprueba tus resultados con Wiris.

a. $\begin{cases} \boldsymbol{-3x + 2y = -3} \\ \boldsymbol{x + 5y = 1} \end{cases}$

1. Se despeja la incógnita x de la segunda ecuación: $x = 1 - 5y$
2. Se sustituye la x en la primera ecuación: $-3 \cdot (1 - 5y) + 2y = -3$
3. Se resuelve la ecuación resultante:
   $-3 + 15y + 2y = -3 \Rightarrow 17y = -3 + 3 \Rightarrow y = 0$
4. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $x = 1 - 5y \Rightarrow x = 1 - 5 \cdot 0 \Rightarrow x = 1$

b. $\begin{cases} 2x + 3y = 10 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$

1. Se despeja la incógnita y de la segunda ecuación: $y = 4x - 6$
2. Se sustituye la y en la primera ecuación: $2x + 3 \cdot (4x - 6) = 10$
3. Se resuelve la ecuación resultante:
   $2x + 3 \cdot (4x - 6) = 10 \Rightarrow 2x + 12x - 18 = 10 \Rightarrow 14x = 28 \Rightarrow x = 2$
4. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $y = 4x - 6 \Rightarrow y = 4 \cdot 2 - 6 \Rightarrow y = 2$

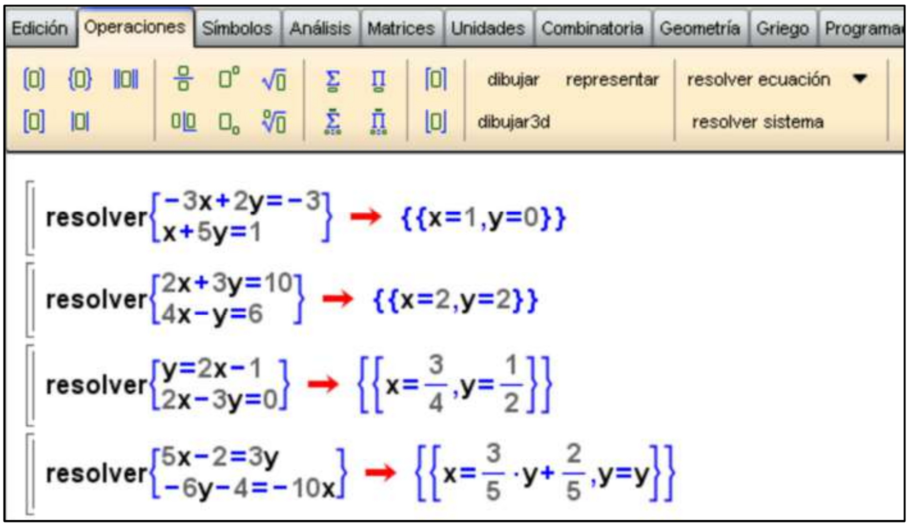
c. $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

1. Se sustituye la y de la primera ecuación en la segunda y se resuelve la ecuación resultante:
   $2x - 3 \cdot (2x - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 6x + 3 = 0 \Rightarrow -4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$
2. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $y = 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 \Rightarrow y = \frac{6}{4} - 1 \Rightarrow y = \frac{6-4}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

d. $\begin{cases} 5x - 2 = 3y \\ -6y - 4 = -10x \end{cases}$

1. Se despeja la incógnita x de la primea ecuación $5x = 3y + 2 \Rightarrow x = \frac{3y+2}{5}$
2. Se sustituye la x en la segunda ecuación: $-6y - 4 = -10 \cdot \frac{3y+2}{5}$
3. Se resuelve la ecuación obtenida:
   $5 \cdot (-6y - 4) = -30y - 20 \Rightarrow -30y - 20 = -30y - 20 \Rightarrow$
   $\Rightarrow -30y + 30y = -20 + 20 \Rightarrow 0y = 0$

La ecuación tiene infinitas soluciones.



42. Halla la solución por el método de igualación y comprueba tus resultados con Wiris.

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x+3y=6} \\ \boldsymbol{x-2y=1} \end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x+3y=6 \Rightarrow x=6-3y \\ x-2y=1 \Rightarrow x=1+2y \end{cases}$$

2. Se igualan las dos expresiones despejadas:
   $6 - 3y = 1 + 2y$
3. Se resuelve la ecuación resultante:
   $6 - 1 = 2y + 3y \Rightarrow 5 = 5y \Rightarrow y = 1$
4. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $x = 6 - 3y \Rightarrow x = 6 - 3 \cdot 1 = 3$

b. $\begin{cases} \boldsymbol{2x+5y=-1} \\ \boldsymbol{7x-y=15} \end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 5y=-1-2x \Rightarrow y=\dfrac{-1-2x}{5} \\ y=7x-15 \end{cases}$$

2. Se igualan las dos expresiones despejadas:

$$\frac{-1-2x}{5}=7x-15$$

3. Se resuelve la ecuación resultante:

$$\frac{-1-2x}{5}=7x-15 \Rightarrow -1-2x=5\cdot(7x-15) \Rightarrow -1-2x=35x-75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+75=35x+2x \Rightarrow 74=37x \Rightarrow x=\frac{74}{37}=2$$

4. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $y = 7x - 15 \Rightarrow y = 7 \cdot 2 - 15 \Rightarrow y = 14 - 15 = -1$

c. $\begin{cases} \boldsymbol{3x+2y=1} \\ \boldsymbol{x-4y=5} \end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x=1-2y \Rightarrow x=\dfrac{1-2y}{3} \\ x=5+4y \end{cases}$$

2. Se igualan las dos expresiones despejadas:

$$\frac{1-2y}{3}=5+4y$$

3. Se resuelve la ecuación resultante:

$$\frac{1-2y}{3}=5+4y \Rightarrow 1-2y=3\cdot(5+4y) \Rightarrow 1-2y=15+12y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1-15=12y+2y \Rightarrow -14=14y \Rightarrow y=-1$$

4. Se halla el valor de la otra incógnita:

$x = 5 + 4y \Rightarrow x = 5 + 4 \cdot (-1) \Rightarrow x = 1$

d. $\begin{cases} \mathbf{3x = 4y + 1} \\ \mathbf{-8y = -6x} \end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x = 4y+1 \Rightarrow x = \dfrac{4y+1}{3} \\ -8y = -6x \Rightarrow x = \dfrac{8y}{6} \end{cases}$$

2. Se igualan las dos expresiones despejadas:

$$\frac{4y+1}{3}=\frac{8y}{6}$$

3. Se resuelve la ecuación resultante:

$$\frac{4y+1}{3}=\frac{8y}{6} \Rightarrow 6\cdot(4y+1)=3\cdot 8y \Rightarrow 24y+6=24y \Rightarrow 24y-24y=-6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0y=-6$$

No tiene solución.

e. $\begin{cases} \mathbf{y = 4x - 2} \\ \mathbf{y = -x + 3} \end{cases}$

1. Se igualan las dos ecuaciones, pues ambas tienen la incógnita *y* despejada y se resuelve la ecuación resultante:
   $4x - 2 = -x + 3 \Rightarrow 4x + x = 3 + 2 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$
2. Se halla el valor de la otra incógnita:
   $y = 4x - 2 \Rightarrow y = 4 \cdot 1 - 2 \Rightarrow y = 2$

f. $\begin{cases} \mathbf{2x - 5y = 3} \\ \mathbf{3x + 3y = -6} \end{cases}$

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x = 3+5y \Rightarrow x = \dfrac{3+5y}{2} \\ 3x = -6-3y \Rightarrow x = \dfrac{-6-3y}{3} \end{cases}$$

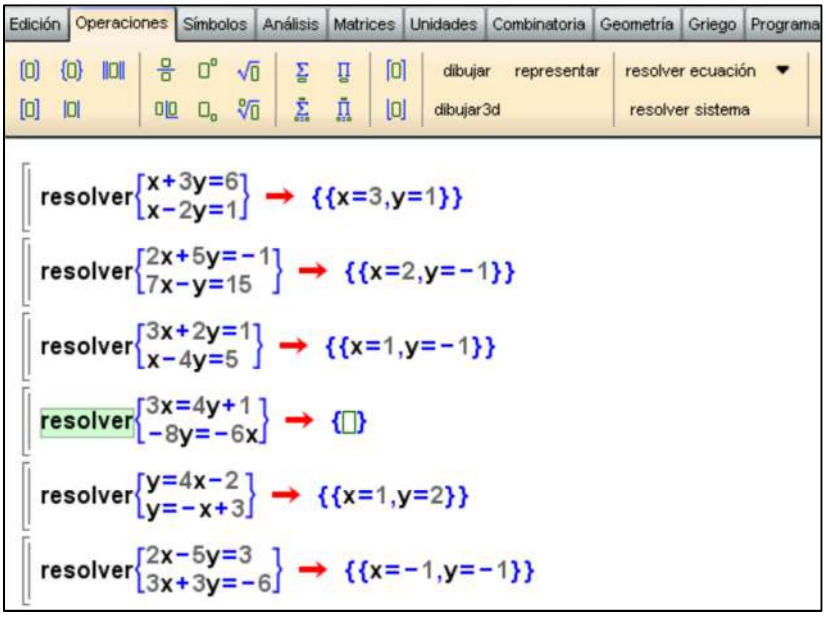
2. Se igualan las dos expresiones despejadas: $\dfrac{3+5y}{2}=\dfrac{-6-3y}{3}$

3. Se resuelve la ecuación resultante:

$$\frac{3+5y}{2}=\frac{-6-3y}{3}\Rightarrow 3\cdot(3+5y)=2\cdot(-6-3y)\Rightarrow 9+15y=-12-6y\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 15y+6y=-12-9\Rightarrow 21y=-21\Rightarrow y=\frac{-21}{21}=-1$$

4. Se halla el valor de la otra incógnita:

$$x=\frac{3+5\cdot(-1)}{2}=\frac{3-5}{2}=-1$$



SOLUCIONES PÁG. 151

43. Resuelve por el método de reducción.

a. $\begin{cases} \mathbf{6x-4y=4} \\ \mathbf{-2x+4y=0} \end{cases}$

Se suman las dos ecuaciones:

$$+\begin{cases} 6x\cancel{-4y}=4 \\ -2x\cancel{+4y}=0 \end{cases}$$
$$\overline{4x\qquad =4\Rightarrow x=1}$$

Se sustituye en la primera ecuación para hallar el valor de la otra incógnita:

$$6\cdot1-4y=4\Rightarrow 6-4=4y\Rightarrow y=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Comprobación

$$\begin{cases} 6\cdot1-4\cdot\frac{1}{2}=4\Rightarrow 6-\frac{4}{2}=4\Rightarrow 6-2=4\Rightarrow 4=4 \\ -2\cdot1+4\cdot\frac{1}{2}=0\Rightarrow -2+\frac{4}{2}=0\Rightarrow -2+2=0\Rightarrow 0=0 \end{cases}$$

b. $\begin{cases} \mathbf{3x+5y=-6} \\ \mathbf{3x+7y=-12} \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x+5y=-6 \xrightarrow{\text{Se multiplica por }(-1)} \\ 3x+7y=-12 \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} \cancel{-3x}-5y=6 \\ \cancel{3x}+7y=-12 \end{cases}$$

$$2y=-6 \Rightarrow y=\frac{-6}{2}=-3$$

Se sustituye en la primera ecuación para hallar el valor de la otra incógnita:

$$3x+5\cdot(-3)=-6 \Rightarrow 3x+5\cdot(-3)=-6 \Rightarrow 3x-15=-6 \Rightarrow 3x=-6+15 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{3}=3$$

Comprobación

$$\begin{cases} 3\cdot3+5\cdot(-3)=-6 \Rightarrow 9-15=-6 \Rightarrow -6=-6 \\ 3\cdot3+7\cdot(-3)=-12 \Rightarrow 9-21=-12 \Rightarrow -12=-12 \end{cases}$$

c. $\begin{cases} \mathbf{-5x+3y=6} \\ \mathbf{2x-4y=-8} \end{cases}$

$$\begin{cases} -5x+3y=6 \xrightarrow{\text{Se multiplica por 2}} \\ 2x-4y=-8 \xrightarrow[\text{Se multiplica por 5}]{} \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} \cancel{-10x}+6y=12 \\ \cancel{10x}-20y=-40 \end{cases}$$

$$-14y=-28 \Rightarrow y=\frac{-28}{-14}=2$$

Se sustituye en la primera ecuación para hallar el valor de la otra incógnita:

$$-5x+3\cdot2=6 \Rightarrow -5x+6=6 \Rightarrow -5x=6-6 \Rightarrow -5x=0 \Rightarrow x=0$$

Comprobación

$$\begin{cases} -5\cdot0+3\cdot2=6 \Rightarrow 0+6=6 \Rightarrow 6=6 \\ 2\cdot0-4\cdot2=-8 \Rightarrow 0-8=-8 \Rightarrow -8=-8 \end{cases}$$

d. $\begin{cases} \mathbf{9x+4y=1} \\ \mathbf{4x+8y=-12} \end{cases}$

$$\begin{cases} 9x+4y=1 \xrightarrow{\text{Se multiplica por }(-4)} \\ 4x+8y=-12 \xrightarrow[\text{Se multiplica por 9}]{} \end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} \cancel{-36x}-16y=-4 \\ \cancel{36x}+72y=-108 \end{cases}$$

$$56y=-112 \Rightarrow y=\frac{-112}{56}=-2$$

Se sustituye en la primera ecuación para hallar el valor de la otra incógnita:

$$9x+4\cdot(-2)=1 \Rightarrow 9x-8=1 \Rightarrow 9x=1+8 \Rightarrow 9x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{9}=1$$

Comprobación

$$\begin{cases} 9\cdot1+4\cdot(-2)=1 \Rightarrow 9-8=1 \Rightarrow 1=1 \\ 4\cdot1+8\cdot(-2)=-12 \Rightarrow 4-16=-12 \Rightarrow -12=-12 \end{cases}$$

44. Aplica el método más adecuado para resolver los siguientes sistemas y comprueba los resultados con Wiris:

a. $\begin{cases} \mathbf{3\cdot(x-1)+2\cdot(y-4)=0} \\ \mathbf{2x-4y=2} \end{cases}$

Se resuelve por el método de reducción.

$$\begin{cases} 3x-3+2y-8=0 \\ 2x-4y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+2y=11 \xrightarrow{\text{Se multiplica por 2}} \\ 2x-4y=2 \end{cases} \Rightarrow +\begin{cases} 6x+\cancel{4y}=22 \\ 2x-\cancel{4y}=2 \end{cases}$$

$$8x\qquad=24 \Rightarrow x=3$$

Se sustituye en la segunda ecuación para hallar el valor de la otra incógnita:
$2x-4y=2 \Rightarrow 2\cdot3-4y=2 \Rightarrow 6-4y=2 \Rightarrow -4y=-4 \Rightarrow y=1$

b. $\begin{cases} \mathbf{-4\cdot(2x+1)=2\cdot(1-y)} \\ \mathbf{5\cdot(x-3)=-(y+3)} \end{cases}$

$$\begin{cases} -4\cdot(2x+1)=2\cdot(1-y) \\ 5\cdot(x-3)=-(y+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x-4=2-2y \\ 5x-15=-y-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x+2y=6 \\ 5x+y=12 \end{cases}$$

Se resuelve por el método de reducción:

$$\begin{cases} -8x+2y=6 \\ 5x+y=12 \xrightarrow[\text{Se multiplica por }(-2)]{} \end{cases} +\begin{cases} -8x+\cancel{2y}=6 \\ -10x-\cancel{2y}=-24 \end{cases}$$

$$-18x\qquad=-18 \Rightarrow x=1$$

Se sustituye en la segunda ecuación para hallar el valor de la otra incógnita:
$5x+y=12 \Rightarrow 5\cdot1+y=12 \Rightarrow y=7$

c. $\begin{cases} \mathbf{1{,}4x-2{,}8y=1} \\ \mathbf{0{,}2x-0{,}4y=3} \end{cases}$

Se resuelve por el método de reducción:

$$\begin{cases} 1{,}4x-2{,}8y=1 \\ 0{,}2x-0{,}4y=3 \xrightarrow[\text{Se multiplica por }(-7)]{} \end{cases} +\begin{cases} \cancel{1{,}4x}-\cancel{2{,}8y}=1 \\ \cancel{-1{,}4x}+\cancel{2{,}8y}=-21 \end{cases}$$

$$0x+0y=-20$$

No tiene solución.

d. $\begin{cases} \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{4} \\ \dfrac{2x-1}{4} = \dfrac{-y+3}{6} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{5} = \dfrac{y-1}{4} \\ \dfrac{2x-1}{4} = \dfrac{-y+3}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\cdot(x+2) = 5\cdot(y-1) \\ 6\cdot(2x-1) = 4\cdot(-y+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+8 = 5y-5 \\ 12x-6 = -4y+12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 5y-13 \\ 12x = -4y+18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5y-13}{4} \\ x = \dfrac{-4y+18}{12} \end{cases}$$

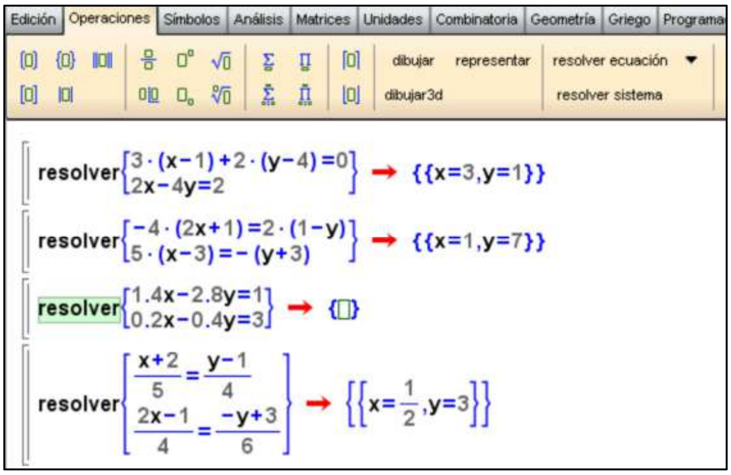
Se resuelve por el método de igualación:

$$\frac{5y-13}{4} = \frac{-4y+18}{12} \Rightarrow 12\cdot(5y-13) = 4\cdot(-4y+18) \Rightarrow 60y-156 = -16y+72 \Rightarrow$$

$$60y+16y = 72+156 \Rightarrow 76y = 228 \Rightarrow y = 3$$

Se sustituye en la primera ecuación para hallar el valor de la otra incógnita:

$$x = \frac{5\cdot 3-13}{4} \Rightarrow x = \frac{15-13}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



45. La suma de dos números es 75 y su diferencia 19. Averigua cuáles son dichos números.

Número 1: x

Número 2: y

$$+\begin{cases} x+\cancel{y} = 75 \\ x-\cancel{y} = 19 \end{cases}$$

$$2x = 94 \Rightarrow x = 47$$

$$x+y = 75 \Rightarrow y = 75-x \Rightarrow y = 75-47 = 28 \Rightarrow y = 28$$

Número 1: $x = 47$
Número 2: $y = 28$
Comprobación

$$\begin{cases} 47 + 28 = 75 \Rightarrow 75 = 75 \\ 47 - 28 = 19 \Rightarrow 19 = 19 \end{cases}$$

46. En cierto supermercado, un refresco cuesta 0,30 € más que una botella de agua. Si Miguel y sus amigos han pagado 3,70 € por 5 refrescos y 6 botellas de agua, ¿cuánto cuesta cada uno de estos artículos?

Precio botella de agua: x
Precio refresco: $y = 0{,}30 + x$

$$\begin{cases} y = 0{,}30 + x \\ 5y + 6x = 3{,}70 \end{cases}$$

$$5 \cdot (0{,}3 + x) + 6x = 3{,}7 \Rightarrow 1{,}5 + 5x + 6x = 3{,}7 \Rightarrow 11x = 2{,}2 \Rightarrow x = 0{,}2$$

Precio botella de agua: $x = 0{,}2$ €
Precio refresco: $y = 0{,}30 + x = 0{,}30 + 0{,}2 = 0{,}50$

Comprobación

$$\begin{cases} 0{,}50 = 0{,}30 + 0{,}2 \Rightarrow 0{,}5 = 0{,}5 \\ 5 \cdot 0{,}50 + 6 \cdot 0{,}2 = 3{,}70 \Rightarrow 2{,}5 + 1{,}2 = 3{,}70 \Rightarrow 3{,}70 = 3{,}70 \end{cases}$$

47. La suma de las edades de los padres de Chusa es 65. Si su madre es 5 años más joven que su padre, ¿cuántos años tiene cada uno?

Padre: x
Madre: y

$$\begin{cases} x + y = 65 \\ x - 5 = y \end{cases}$$

$$x + (x - 5) = 65 \Rightarrow 2x = 65 + 5 \Rightarrow x = \frac{70}{2} \Rightarrow x = 35$$

$x + y = 65 \Rightarrow 35 + y = 65 \Rightarrow y = 30$

Padre: $x = 35$
Madre: $y = 30$

Comprobación

$$\begin{cases} 35 + 30 = 65 \Rightarrow 65 = 65 \\ 35 - 5 = 30 \Rightarrow 30 = 30 \end{cases}$$

48. Para hacer una mezcla de cacao, se dispone de dos variedades, A y B, a 2,50 €/kg y 3 €/kg, respectivamente. Si en total se desea elaborar una mezcla de 250 kg a un precio de 2,82 €/kg, ¿cuántos kilos de cada tipo de cacao han de mezclarse?

Kilos variedad A: x
Kilos variedad B: y

$$\begin{cases} x+y=250 \Rightarrow x=250-y \\ 2{,}50x+3y=250\cdot 2{,}82 \end{cases}$$
$$2{,}5\cdot(250-y)+3y=705 \Rightarrow 625-2{,}5y+3y=705 \Rightarrow 0{,}5y=80 \Rightarrow y=160$$

$x + y = 250 \Rightarrow x = 250 - 160 \Rightarrow x = 90$

Kilos variedad A: $x = 90$
Kilos variedad B: $y = 160$

Comprobación
$$\begin{cases} 90+160=250 \Rightarrow 250=250 \\ 2{,}5\cdot 90+3\cdot 160=705 \Rightarrow 225+480=705 \Rightarrow 705=705 \end{cases}$$

49. En un concurso de triples, por cada acierto te dan 5 puntos, mientras que por cada fallo te quitan 3 puntos. Si un jugador lanzó 12 veces y obtuvo 28 puntos, ¿cuántos triples encestó?

Número triples encestados: x
Número triples fallados: y

$$\begin{cases} x+y=12 \Rightarrow x=12-y \\ 5x-3y=28 \end{cases}$$
$$5\cdot(12-y)-3y=28 \Rightarrow 60-5y-3y=28 \Rightarrow -8y=-32 \Rightarrow y=4$$

$x = 12 - y \Rightarrow x = 12 - 4 = 8$

Número triples encestados: $x = 8$
Número triples fallados: $y = 4$

Comprobación
$$\begin{cases} 8+4=12 \Rightarrow 12=12 \\ 5\cdot 8-3\cdot 4=28 \Rightarrow 40-12=28 \Rightarrow 28=28 \end{cases}$$

50. El perímetro de un triángulo isósceles es 40 m. Si el lado desigual mide la mitad que los lados iguales, ¿cuánto mide cada uno?

Lado a = x

Lado b = $y = \dfrac{x}{2}$

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 2y \\ 40 = 2x + y \end{cases}$$

$$40 = 2 \cdot 2y + y \Rightarrow 40 = 5y \Rightarrow y = 8$$

$$x = 2 \cdot 8 \Rightarrow x = 16$$

Lados a = x = 16

Lado b = $y = \dfrac{x}{2} = 8$

Comprobación

$$\begin{cases} 8 = \dfrac{16}{2} \Rightarrow 8 = 8 \\ 40 = 2 \cdot 16 + 8 \Rightarrow 40 = 32 + 8 \Rightarrow 40 = 40 \end{cases}$$

EVALUACIÓN

1. Di cuál de las siguientes afirmaciones acerca de la ecuación $3x^2 - 4x = 2x^2 + 5 + x^2$ es falsa:

a. Tiene cinco términos.
b. Es de grado 2.
c. Tiene una variable.
d. Es de grado 1.

2. ¿Cuál es la ecuación equivalente a $2x - 6 = 0$?

a. $4 \cdot (x + 3) - 1 = 2x$

b. $\dfrac{x}{3} + 2 = \dfrac{2x}{5}$

c. $-(5 + 3x) = 3 + (4x - 1)$

d. $\dfrac{x+1}{2} - 7 = 4 - 3x$

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

a. $4 \cdot (x + 3) - 1 = 2x \Rightarrow 4x + 12 - 1 = 2x \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = \dfrac{11}{2}$

b. $\dfrac{x}{3} + 2 = \dfrac{2x}{5} \Rightarrow \dfrac{5x}{15} + \dfrac{30}{15} = \dfrac{6x}{15} \Rightarrow 5x - 6x = -30 \Rightarrow -x = -30 \Rightarrow x = 30$

c. $-(5 + 3x) = 3 + (4x - 1) \Rightarrow -5 - 3x = 3 + 4x - 1 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$

d. $\dfrac{x+1}{2} - 7 = 4 - 3x \Rightarrow \dfrac{x + 1 - 14}{2} = \dfrac{8 - 6x}{2} \Rightarrow 7x = 21 \Rightarrow x = 3$

3. La ecuación $-4 \cdot (x + 1) - 5x = -1 - (3 + 9x)$ tiene por solución:

a. 15 **b. 1** **c. 0** d. Infinitas soluciones.

$$-4\cdot(x+1)-5x=-1-(3+9x)\Rightarrow -4x-4-5x=-1-3-9x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -9x+9x=-4+4\Rightarrow 0x=0$$

4. Las soluciones de la ecuación $2x^2 - 10x = 0$ son:

a. 5 y –5 **c. 0 y –5**
b. 0 y 5 **d. No tiene solución.**

$$2x^2-10x=0\Rightarrow x\cdot(2x-10)=0\begin{cases} x_1=0\\ 2x-10=0\Rightarrow 2x=10\Rightarrow x_2=5\end{cases}$$

5. El número de soluciones de la ecuación $x^2 - 5x + 9$ es:
a. Una.
b. Dos.
c. Infinitas.
d. Ninguna.

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-36}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{-11}}{2}$$

6. El sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \boldsymbol{x-3y=-1}\\ \boldsymbol{-2x+6y=2}\end{cases}$ es:

a. Compatible determinado.
b. Compatible indeterminado.
c. Incompatible.
d. Equivalente.

$$\begin{cases} x-6y=3 \xrightarrow{\text{Se multiplica por 2}}\\ -2x+6y=2\end{cases} \quad + \begin{cases} 2x-6y=6\\ -2x+6y=2\end{cases}$$
$$0x+0y=8$$

7. La solución del sistema $\begin{cases} \boldsymbol{5x-6y=3}\\ \boldsymbol{-2x+4y=10}\end{cases}$ es:

a. $x = 9$ e $y = 7$
b. $x = -9$ e $y = 7$
c. $x = 7$ e $y = -9$
d. $x = 7$ e $y = 9$

$$\begin{cases} 5x-6y=3 \xrightarrow{\text{Se multiplica por 2}}\\ -2x+4y=10 \xrightarrow[\text{Se multiplica por 5}]{}\end{cases} \quad + \begin{cases} \cancel{10x}-12y=6\\ \cancel{-10x}+20y=50\end{cases}$$
$$8y=56\Rightarrow y=7$$
$$5x-6y=3\Rightarrow 5x-6\cdot7=3\Rightarrow 5x=45\Rightarrow x=9$$

8. Elige el planteamiento adecuado al siguiente enunciado: Una fábrica elabora 5 000 kg entre chocolate puro y chocolate con leche. Si el puro se vende a 1,50 €/kg y el chocolate con leche a 1,20 €/kg, ¿cuántos kilos de cada tipo se han producido si se han vendido por valor de 6 900 €?

a. $\begin{cases} \mathbf{1{,}5x + 1{,}2y = 5000} \\ \mathbf{1{,}5x - 1{,}2y = 6900} \end{cases}$

b. $\begin{cases} \mathbf{x + y = 6900} \\ \mathbf{1{,}5x + 1{,}2y = 5000} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 5000 \\ 1{,}5x + 1{,}2y = 6900 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \mathbf{1{,}5x + y = 5000} \\ \mathbf{x + 1{,}2y = 6900} \end{cases}$

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 8. Funciones. Características

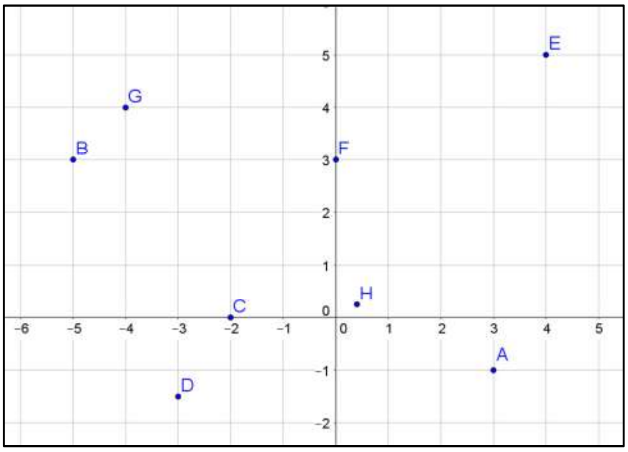
Unidad 8. Funciones. Características

SOLUCIONES PÁG. 155

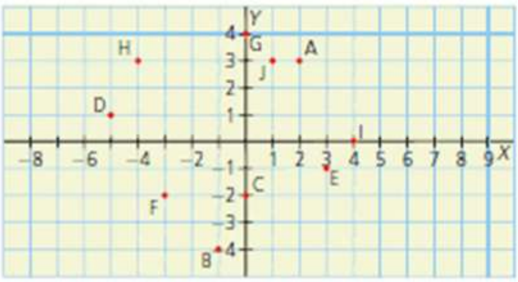
1. **Represente estos puntos en unos ejes de coordenadas:**

a. $(3 , -1)$ **c.** $(-2 , 0)$ **e.** $(4 , 5)$ **g.** $(-4 , 4)$

b. $(-5 , 3)$ **d.** $\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ **f.** $(0 , 3)$ **h.** $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}\right)$



2. **Determina las coordenadas de los puntos que aparecen en los siguientes ejes de coordenadas:**



A (2 , 3); B (–1 , –4); C (0 , –2); D (–5 , 1); E (3 , –1); F (–3 , –2); G (0 , 4); H (–4 , 3); I (4 , 0); J (1 , 3)

3. **Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones:**

a. La hora del día y la temperatura.
Sí es función porque a cada valor de la variable *x* le corresponde único valor de la variable *y*.

b. La edad de una persona y su estatura.
No es función porque a cada valor de la variable *x* le corresponde varios valores de la variable *y*.

c. La duración de una llamada y su precio.
Sí es función porque a cada valor de la variable *x* le corresponde único valor de la variable *y*.

4. El kilogramo de lentejas cuesta 1,25 €. ¿Es una función la relación entre el número de kilogramos de lentejas y el precio? En caso afirmativo, determina:

Sí es una función, porque a cada valor de la variable *x* le corresponde único valor de la variable *y*.

a. La variable dependiente e independiente.

La variable independiente, *x,* es el número de kilos de lentejas y la variable dependiente, *y,* es el precio.

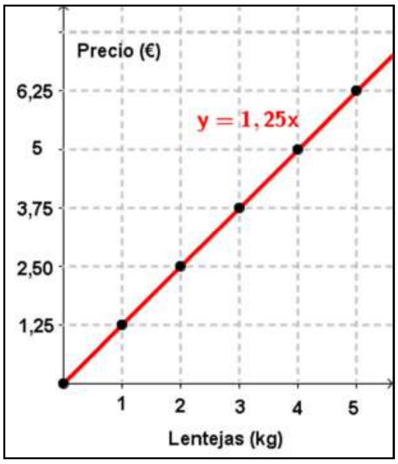
b. La expresión algebraica que representa la función.

$y = 1{,}25x$

c. Una tabla de valores.

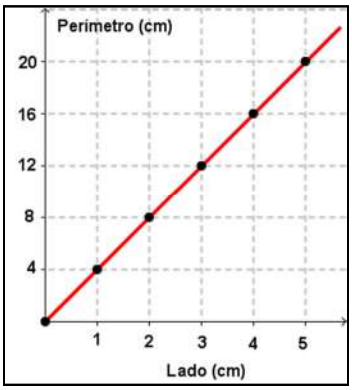
Lentejas (kg)	1	2	3	4	5
Precio (€)	1,25	2,50	3,75	5	6,25

d. Su gráfica.



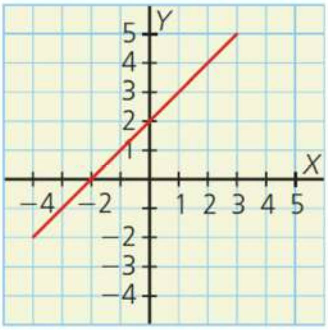
5. Haz una tabla de valores y la gráfica para la función que relaciona el lado de un cuadrado y su perímetro.

Lado (cm)	1	2	3	4	5
Perímetro (cm)	4	8	12	16	20



SOLUCIONES PÁG. 157

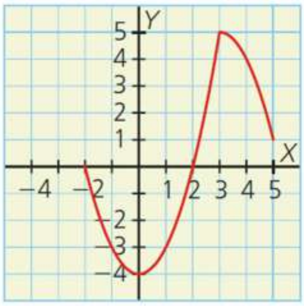
6. **Halla el dominio, el recorrido, los puntos de corte con los ejes y el signo de estas funciones:**
   a.



D = [–4 , 3] y R = [–2 , 5]
Puntos de corte con los ejes:
- Con el eje *X:* (–2 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , 2)

Signo:
- Positiva: (–2 , 3)
- Negativa: (–4 , –2)
- Nula en $x = -2$

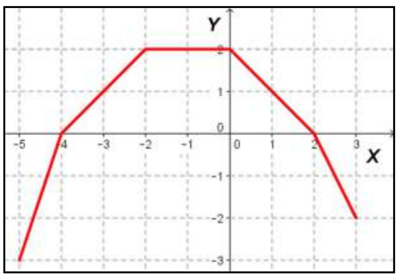
b.



D = [–2 , 5] y R = [–4 , 5]
Puntos de corte con los ejes:
- Con el eje *X:* (–2 , 0) y (2, 0)
- Con el eje *Y:* (0 , –4)

Signo:
- Positiva: (2 , 5)
- Negativa: (–2 , 2)
- Nula en $x = -2$ y en $x = 2$

7. **Dibuja una función con dominio [–5, 3], cuyos puntos de corte con los ejes sean (0 , 2), (– 4 , 0) y (2 , 0); y que sea positiva en (–4 , 2) y negativa en [–5 , –4) y (2 , 3].**
   Respuesta abierta. Por ejemplo:



8. **La función $y = x^2 + 4$ no tiene puntos de corte con el eje *X*. Explica por qué. ¿Qué signo tiene la función?**
   Los puntos de corte con el eje *X* son de la forma (x , 0). Al igualar la función a cero, $y = 0$, la ecuación $0 = x^2 + 4$ no tiene solución. La función es toda positiva.

9. **Actividad resuelta.**

10. Halla los puntos de corte con los ejes coordenados de las siguientes funciones:

a. $y = x - 4$

- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = x - 4 \Rightarrow x = 4$
  El punto de corte con el eje *X* es (4 , 0)

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = 0 - 4 = -4$
  El punto de corte con el eje *Y* es (0 , –4)

b. $y = 3x + 12$

- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = 3x + 12 \Rightarrow x = -4$
  El punto de corte con el eje *X* es (–4 , 0)

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = 0 + 12 = 12$
  El punto de corte con el eje *Y* es (0 , 12)

c. $y = x^2 - 5x + 6$

- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 5x + 6 \rightarrow$ Se resuelve la ecuación de 2.º grado:
  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \left\} \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{matrix} \right\}$$
  Los puntos de corte con el eje *X* son (2 , 0) y (3 , 0)

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = 0 - 0 + 6 = 6$
  El punto de corte con el eje *Y* es (0 , 6)

d. $y = x^2 - 1$

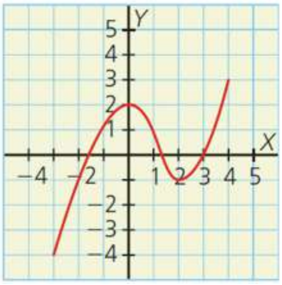
- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 6 \rightarrow$ Se resuelve la ecuación de 2.º grado:
  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm 2}{2} \left\} \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix} \right\}$$
  Los puntos de corte con el eje *X* son (–1 , 0) y (1 , 0)

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = 0 - 1 = -1$
  El punto de corte con el eje *Y* es (0 , –1)

SOLUCIONES PÁG. 159

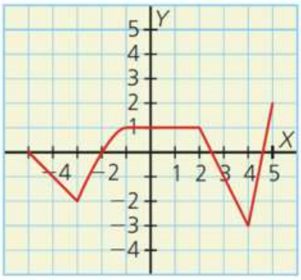
11. Estudia el crecimiento de las siguientes funciones:

a.



- Creciente en (–3 , 0) y (2 , 4)
- Decreciente en (0 , 2)

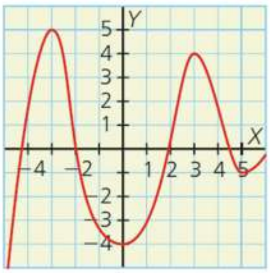
b.



- Creciente en (–3 , –1) y (4 , 5)
- Decreciente en (–5 , –3) y (2 , 4)
- Constante en (–1 , 2)

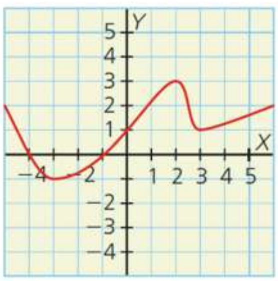
12. Indica los máximos y mínimos de estas funciones:

a.



- Máximos: (–3 , 5) y (3 , 4)
- Máximo absoluto: (–3 , 5),
- Mínimos: (0 , –4) y (5 , –1)

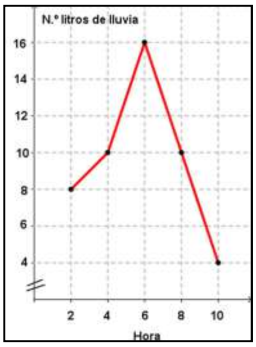
b.



- Máximo: (2 , 3)
- Mínimos: (–3 , –1) y (3 , 1)
- Mínimo absoluto: (–3 , –1)

13. Representa gráficamente los siguientes datos de la tabla de valores. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como sus máximos y sus mínimos. ¿En qué punto se alcanza el máximo absoluto?

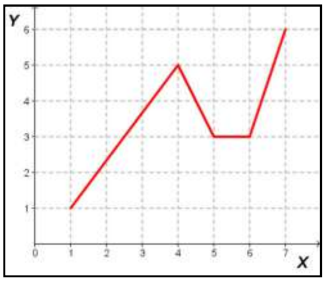
Hora del día	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
N.º de litros de lluvia	**8**	**10**	**16**	**10**	**4**



- Creciente: (2 , 6)
- Decreciente: (6 , 10)
- Máximo: (6 , 16)
- Máximo absoluto: (6 , 16)

14. Dibuja una función que sea creciente en (1 , 4) y (6 , 7), decreciente en (4 , 5) y constante en (5 , 6). ¿Tiene algún máximo? ¿Y algún mínimo?

Respuesta abierta. Por ejemplo:



Tiene un máximo en (4 , 5), pero no tiene mínimo.

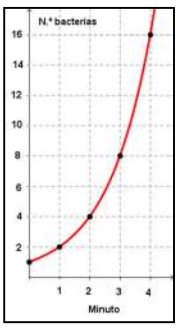
15. Las bacterias se reproducen por bipartición, es decir, dividiéndose en dos.

a. Si se dividen cada minuto, elabora una tabla de valores que relacione el número de bacterias y el tiempo, y, a partir de ella, determina su expresión algebraica.

Tiempo (min)	0	1	2	3	4
N.º bacterias	1	2	4	8	16

Su expresión algebraica es $y = 2^x$

b. Representa gráficamente los datos. ¿Es una función creciente o decreciente? ¿Tiene máximo absoluto?



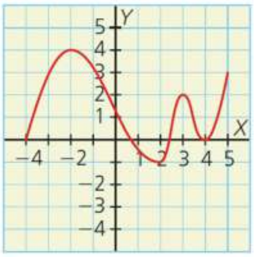
Es una función creciente, sin máximo absoluto.

16. ¿Existe alguna función continua que sea creciente en (–2 , 4) y decreciente en (4 , 6) y tenga su mínimo absoluto en *x* = 4? Justifica tu respuesta.

No existe ninguna función, pues en *x* = 4 debería tener un máximo y no un mínimo.

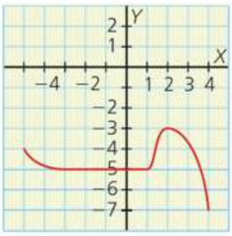
17. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos de las siguientes funciones:

a.



- Creciente en (–4 , –2), (2 , 3) y (4 , 5)
- Decreciente en (–2 , 2) y (3 , 4)
- Máximos en (–2 , 4) y en (3 , 2)
- Máximo absoluto en (–2 , 4)
- Mínimos en (2 , –1) y en (4 , 0)
- Mínimo absoluto en (2 , –1)

b.

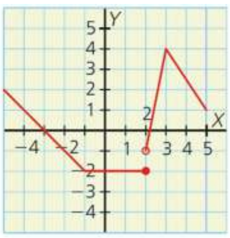


- Creciente en (1 , 2)
- Decreciente en (–5 ; –3,5) y (2 , 4)
- Constante en (–3,5 ; 1)
- Máximo absoluto en (2 , –3)

SOLUCIONES PÁG. 161

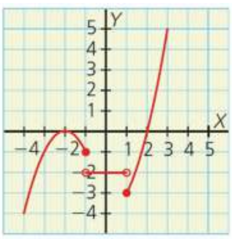
18. Indica si las siguientes funciones son continuas. En el caso de que no lo sean, di cuáles son sus puntos de discontinuidad.

a.



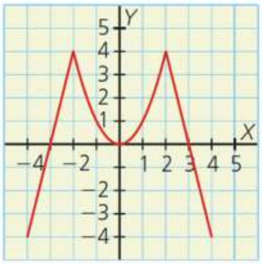
Función discontinua en *x* = 2

b.



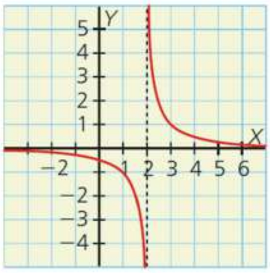
Función discontinua en *x* = –1 y en *x* = 1

c.



Función continua

d.

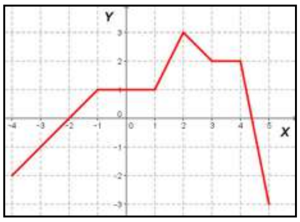


Función discontinua en $x = 2$

19. Dibuja una función que tenga estas características:

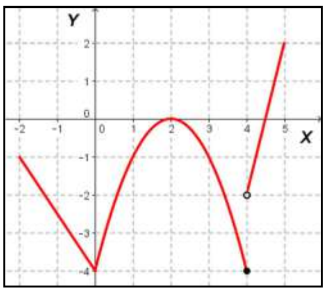
a. Su dominio es [–4 , 5] y es continua.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



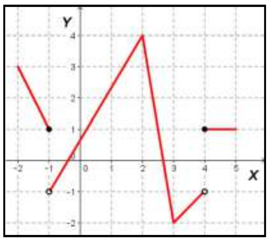
b. Su dominio es [–2 , 5] y es discontinua en *x* = 4.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

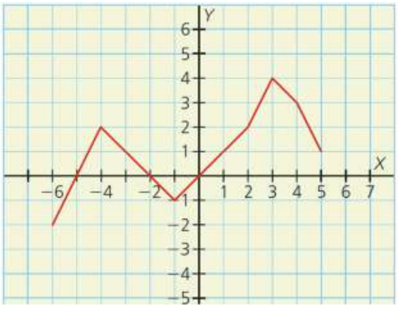


c. Es discontinua en $x = -1$ y en $x = 4$ y tiene el máximo absoluto en (2 , 4) y el mínimo absoluto en (3 , –2).

Respuesta abierta. Por ejemplo:



20. Halla para la función propuesta:



a. El dominio y el recorrido.

D = [–6 , 5] y R = [–2 , 4]

b. Los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje *X:* (–5 , 0), (–2 , 0) y (0 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , 0)

c. El signo.

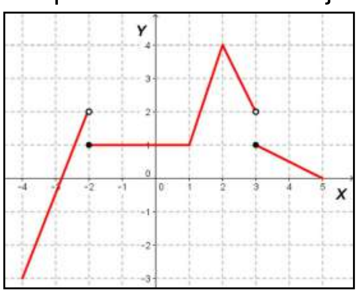
- Positiva: [–5 , –2) y (0 , 5]
- Negativa: [–6 , –5) y (–2 , 0)
- Nula en $x = -5$, $x = -2$ y en $x = 0$

d. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos.

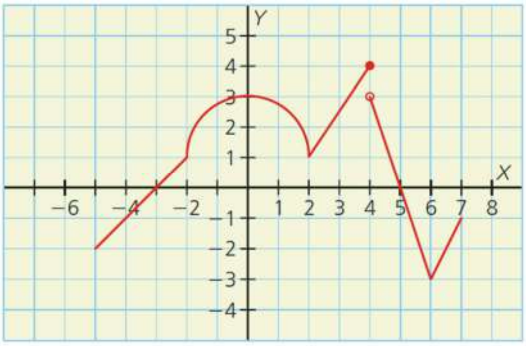
- Creciente: (–6 , –4) y (–1 , 3)
- Decreciente: (–4 , –1) y (3 , 5)

21. Representa gráficamente una función cuyo dominio sea [–4 , 5], que tenga por el recorrido [–3 , 4] y sea discontinua en $x = -2$ y en $x = 3$.

Respuesta abierta. Por ejemplo:



22. Determina para la función propuesta:



a. Los puntos de corte con los ejes.

- Con el eje *X:* (–3 , 0) y (5 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , 3)

b. El crecimiento de la función y sus extremos.

- Creciente: (–5 , 0), (2 , 4) y (6 , 7)
- Decreciente: (0 , 2) y (4 , 6)

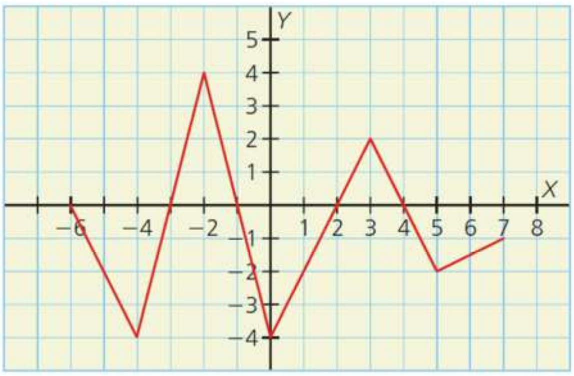
Extremos:

- Máximo: (0 , 3)
- Mínimos: (2 , 1) y (6 , –3)
- Mínimo absoluto: (6 , –3)

c. Sus puntos de discontinuidad.

Es discontinua en $x = 4$

23. Halla para la función propuesta:



a. El dominio y el recorrido.

D = [–6 , 7] y R = [–4 , 4]

b. Los puntos de corte con los ejes y el signo.

- Con el eje *X:* (–6 , 0), (–3 , 0), (–1 , 0), (2 , 0) y (4 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , –4)

c. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

- Creciente: (–4 , –2), (0 , 3) y (5 , 7)
- Decreciente: (–6 , –4), (–2 , 0) y (3 , 5)

d. **Los máximos y mínimos.**

- Máximos: (–2 , 4) y (3 , 2)
- Máximo absoluto: (–2 , 4)
- Mínimos: (–4 , –4), (0 , –4) y (5 , –2)
- Mínimos absolutos: (–4 , –4), (0 , –4)

24. Realizad en grupos un estudio sobre la longitud de la sombra que proyecta un edificio de la 10 de la mañana hasta las 8 de la tarde. Construid una tabla de valores y representad la función. A partir de la gráfica, determinad:

a. **El dominio y el recorrido.**

b. **Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

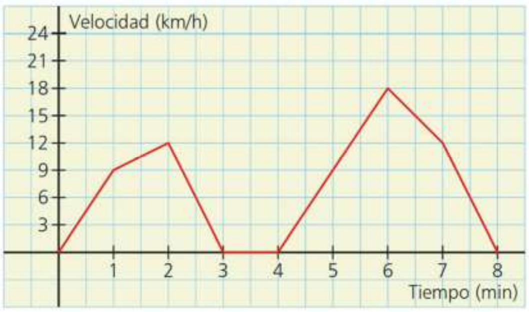
c. **El máximo y el mínimo absolutos.**

d. **El signo.**

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 163

25. Óscar ha ido hoy al instituto en bicicleta. La siguiente gráfica muestra la velocidad que llevó durante el trayecto.



a. **¿Cuánto tardó en llegar al instituto?**

Tardó 8 minutos.

b. **¿Cuántas veces circuló a 12 km/h?**

En tres ocasiones circuló a 12 km/h.

c. **¿Qué velocidad llevaba pasado 1 min? ¿Y a los 5 min?**

Circulaba a 9 km/h en ambos momentos.

d. **¿Cuál fue la velocidad máxima que alcanzó? ¿En qué momento del trayecto lo hizo?**

La velocidad máxima fue 18 km/h y se alcanzó a los 6 min.

e. **Durante el trayecto tuvo que parar en un semáforo. ¿Cuánto tiempo duró la parada? ¿Cuántos minutos llevaba circulando cuando paró?**

Paró 1 min en el semáforo. Llevaba 3 min circulando.

f. **Indica en qué intervalos de tiempo creció y decreció la velocidad.**

Crece: (0 , 2) y (4, 6), decrece: (2 , 3) y (6 , 8)

26. La evolución del precio medio del litro de gasóleo en España en los últimos seis años viene descrita en la siguiente gráfica:

a. ¿Qué precio tenía el gasóleo en el año 2013?

Tenía un precio de 1,30 €.

b. ¿Cuándo se pagó el litro de gasóleo a 1,25 €?

En 2011 y 2014.

c. ¿Qué año se alcanzó el precio más elevado? ¿Y el más bajo? ¿Cuáles fueron esos precios?

El precio más alto se alcanzó en 2012 y fue de 1,35 €. El precio más bajo se produjo en 2010 y fue de 1 €.

d. Señala los periodos de tiempo en los que se produjo una subida y una bajada del precio del gasóleo.

Subió en el periodo: (2010, 2012) y bajó en: (2012, 2015).

27. La siguiente gráfica muestra el número de ventas de dos de los modelos que comercializa una compañía de automóviles a lo largo de los últimos ocho años.

a. ¿De cuál de los dos modelos se vendió más unidades en el último año? Indica el número de vehículos vendidos.

El modelo A, del que se vendieron 45 000 coches.

b. ¿Cuántos coches se vendieron de ambos modelos en el año 2012?

Se vendieron 30 000 coches.

c. ¿En qué año se vendieron más vehículos de ambos modelos? Indica el número de coches que se vendieron ese año.

Modelo A: en 2008 y se vendieron 55 000 coches.

Modelo B: en 2008, 2010 y 2015 y se vendieron 40 000 coches.

d. ¿Cuál de los dos modelos mantuvo el mismo número de ventas durante dos años consecutivos?

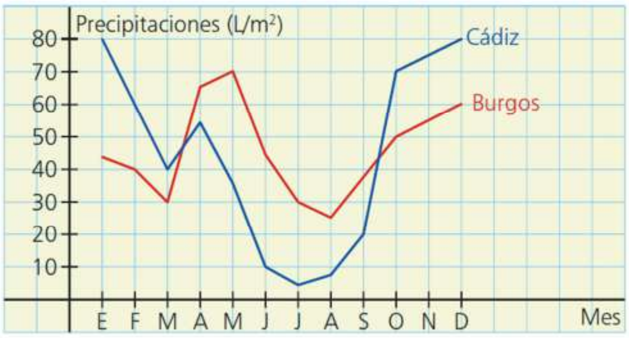
El modelo B.

e. Describe cómo han variado las ventas de los dos modelos a lo largo de los últimos ocho años.

Modelo A: en 2008 fue el año de más ventas y a partir de ahí, las ventas bajaron hasta alcanzar su mínimo en 2013, para volver a subir hasta el 2015.

Modelo B: entre 2008 y 2009 bajaron las ventas, de 2009 a 2010 subieron hasta alcanzar el máximo del 2010, para volver a bajar hasta 2011. De 2011 a 2012 se mantuvieron constantes las ventas y a partir de ahí, volvieron a subir.

28. La siguiente gráfica muestra las precipitaciones de las ciudades de Burgos y Cádiz a lo largo de un año.



a. ¿En qué mes llueve más en ambas localidades? ¿Y menos? ¿Cuántos litros caen durante esos meses?

En Cádiz: en enero y diciembre con 80 L/m^2. En burgos: en mayo con 70 L/m^2.

b. ¿Cuál de las dos ciudades alcanza las precipitaciones máximas? ¿Y las mínimas?

Las máximas y mínimas precipitaciones se alcanzan en Cádiz.

c. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las precipitaciones de ambas ciudades.

- En Cádiz:
  Crece: de marzo a abril y de julio a diciembre.
  Decrece: de enero a marzo y de abril a julio.
- En Burgos:
  Crece: de marzo a mayo y de agosto a diciembre.
  Decrece: de enero a marzo y de mayo a agosto.

d. ¿En qué mes es la diferencia de precipitaciones de las dos ciudades más amplia? ¿Cuál es esa diferencia?

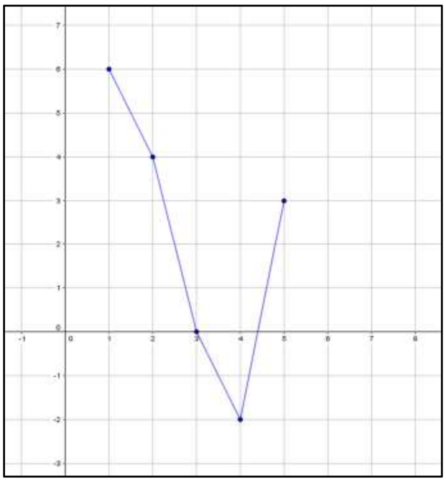
La máxima diferencia entre las precipitaciones de las dos ciudades se produjo en enero y fue de 45 L/m^2.

SOLUCIONES PÁGINA 164

1. Representa las funciones definidas a partir de las siguientes tablas de valores utilizando GeoGebra:

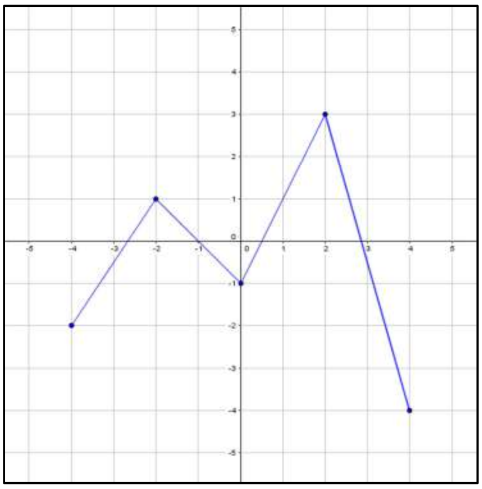
a.

x	1	2	3	4	5
y	6	4	0	–2	3



b.

x	–4	–2	0	2	4
y	–2	1	–1	3	–4



SOLUCIONES PÁG. 165

1. **¿Cómo se llaman las dos variables que están relacionas en una función?**

   Variable independiente y variable dependiente.

2. **¿Se pueden representar todas las funciones mediante una expresión algebraica?**

   No siempre.

3. **¿Es siempre posible unir los puntos de una gráfica? Justifica tu respuesta y pon un ejemplo.**

   No siempre. Por ejemplo, si la función relaciona el número de bolígrafos, *x*, y su precio, *y*, no se pueden unir los puntos pues la variable *x*, número de bolígrafos, no es continua ya que no se pueden comprar 1,5 bolígrafos.

4. **Define dominio y recorrido de una función.**

   El dominio de una función es el conjunto de valores que toma la variable independiente, *x,* y se representa por D. El recorrido de una función es el conjunto de valores que toma la variable dependiente, *y,* y se representa por R.

5. **Si A y B son dos puntos de corte con el eje *X* y el eje *Y*, respectivamente, ¿cuáles son sus coordenadas?**

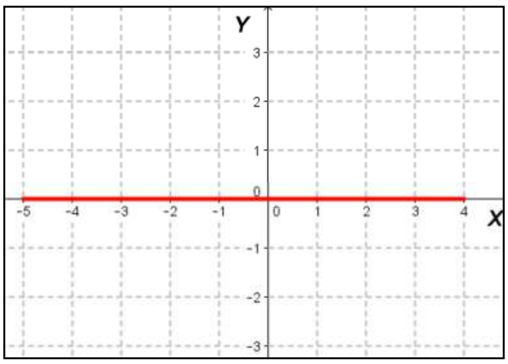
   A (x , 0), B (0 , y)

6. **¿Cuántos puntos de corte con el eje *X* puede tener una función? ¿Y con el eje *Y*?**

   Con el eje *X* puede tener cualquier número de puntos de corte, pero con el eje *Y* solo puede tener uno.

7. **¿Puede una función ser siempre nula? En caso afirmativo, dibuja su gráfica.**

   Sí, la recta que coincide con el eje *X*.



8. **¿Cómo se llaman los puntos donde la función pasa de ser creciente a decreciente? ¿Y de decreciente a creciente?**

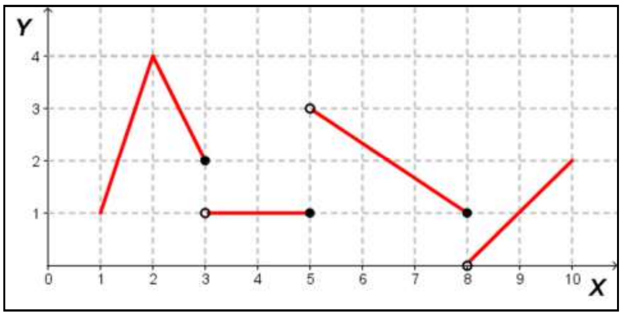
   Máximos y mínimos, respectivamente.

9. ¿Cuántos mínimos y máximos puede tener una función? ¿Y mínimos y máximos absolutos?

Una función puede tener cualquier número de máximos y mínimos. También de máximos y mínimos absolutos.

10. ¿Es posible que una función tenga tres puntos de discontinuidad? En caso afirmativo, dibuja una función que lo cumpla.

Sí. Respuesta abierta. Por ejemplo:

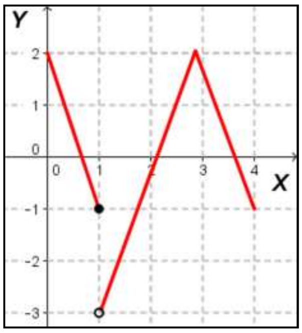


11. ¿Puede una función creciente no cortar al eje *X*? En caso afirmativo, ¿cuál es el signo de la función?

Sí puede. Será una función positiva.

12. ¿Existe alguna función que sea discontinua en $x = 1$ cuyo dominio sea [0 , 4]? Si la hay, represéntala.

Sí. Respuesta abierta. Por ejemplo:



13. ¿Puede pasar una función por los puntos (1 , 3) y (1 , –3)? Justifica tu respuesta, y, en caso afirmativo, represéntala.

No puede pasar por esos dos puntos, pues un valor de x, $x = 1$, tendría asociados dos valores de y, $y_1 = 3$ e $y_2 = -3$, y entonces no sería una función.

14. ¿Puede una función ser nula en $x = 2$ y tener un máximo en el punto (2 , 5)? Justifica tu respuesta.

No puede, pues si la función es nula en $x = 2$, es porque pasa por el punto (2 , 0), luego no puede pasar por el punto (2 , 5) pues no sería una función.

15. Prepara una presentación para tus compañeros. Puedes hacer un documento de PowerPoint, usar Glogster...

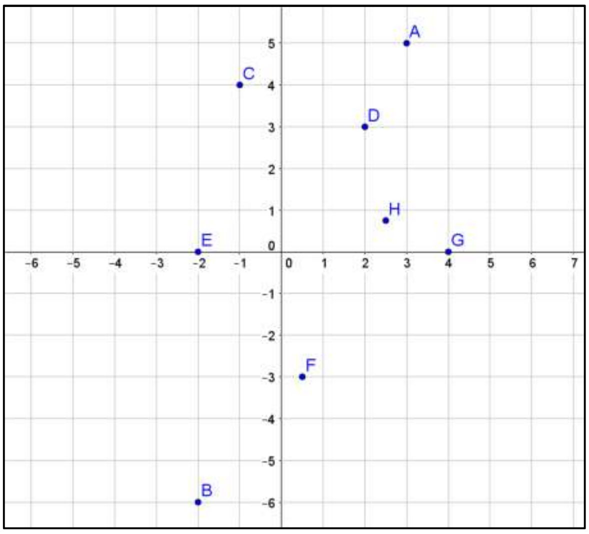
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 166 – REPASO FINAL

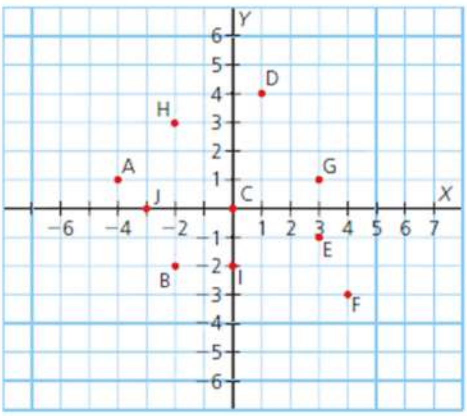
FUNCIÓN. VARIABLE DEPENDIENTE E INDEPENDIENTE

1. Representa en unos ejes de coordenadas cartesianas estos puntos. Compruébalo con GeoGebra.

A (3 , 5)	**C (–1 , 4)**	**E (–2 , 0)**	**G (4 , 0)**
B (–2 , –6)	**D (2 , 3)**	**F** $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$	**H** $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)$



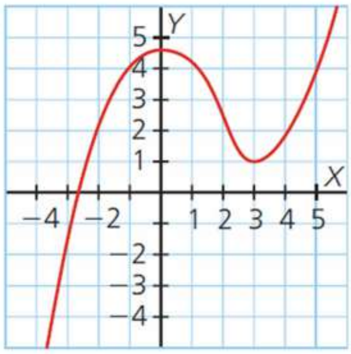
2. Determina los puntos que están representados en el siguiente sistema de coordenadas:



A (–4 , 1)	F (4 , –3)
B (–2 , –2)	G (3 , 1)
C (0 , 0)	H (–2 , 3)
D (1 , 4)	I (0 , –2)
E (3 , –1)	J (–3 , 0)

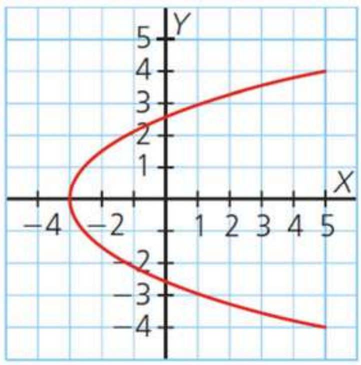
3. Indica si estas gráficas corresponden a funciones:

a.



Sí es función porque a cada valor de la variable x le corresponde único valor de la variable y.

b.



No es función porque hay valores de la variable x que le corresponde dos valores de la variable y.

4. Averigua si la siguiente tabla de valores se corresponde a una función. Justifica tu respuesta.

x	**–3**	**–1**	**1**	**1**	**3**
y	**4**	**–2**	**0**	**3**	**5**

No se corresponde con una función, pues para el valor $x = 1$, le corresponden dos valores de y, $y_1 = 0$ e $y_2 = 3$.

5. Una papelería vende cuadernos a 1,50 € la unidad. ¿Es una función la relación entre el número de cuadernos y el precio? En caso afirmativo, determina:

Sí es una función la relación entre el número de cuadernos y el precio.

a. Las variables dependiente e independiente.

La variable independiente es el número de cuadernos y la variable dependiente, el precio.

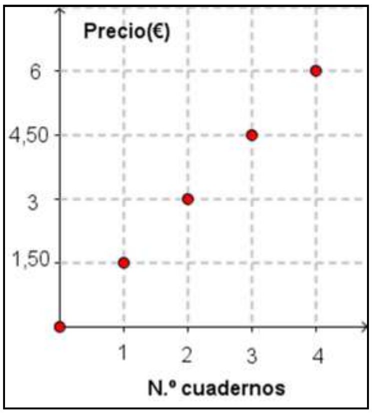
b. La expresión algebraica que representa la función.

$y = 1{,}50x$

c. Una tabla de valores.

N.º de cuadernos	1	2	3	4
Precio (€)	1,50	3	4,50	6

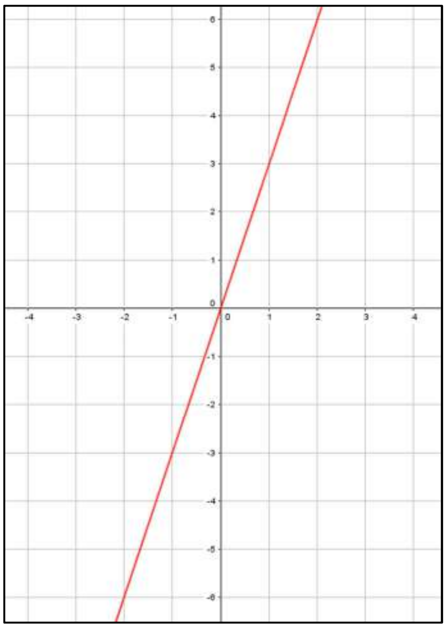
d. Su gráfica. ¿Se pueden unir los puntos? Justifícalo.



No se pueden unir los puntos, pues no se pueden comprar medios cuadernos.

6. Encuentra una expresión algebraica para la siguiente tabla de valores. Represéntala usando GeoGebra.

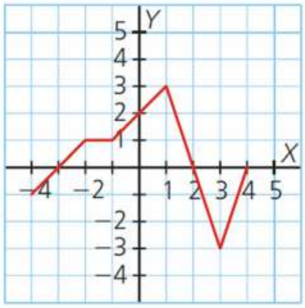
x	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**
y	**–6**	**–3**	**0**	**3**	**6**



CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES

7. Determina para las siguientes gráficas, su dominio y recorrido, sus puntos de corte con los ejes y su signo:

a.



D = [–4 , 4] y R = [–3 , 3]

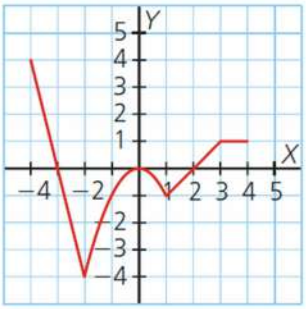
Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje *X:* (–3 , 0), (2, 0) y (4 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , 2)

Signo:

- Positiva: (–3 , 2)
- Negativa: [–4 , –3) y (2 , 4)
- Nula en $x = –3$, $x = 2$ y en $x = 4$

b.



D = [–4 , 4] y R = [–4 , 4]

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje *X:* (–3 , 0), (0 , 0) y (2 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , 0)

Signo:

- Positiva: [–4 , –3) y (2 , 4]
- Negativa: (–3 , 0) y (0 , 2)
- Nula en $x = –3$, $x = 0$ y en $x = 2$

8. Determina, sin representarlos, los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a. $\boldsymbol{y = 4x}$

- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = 4x \Rightarrow x = 0$
  El punto de corte con el eje *X* es (0 , 0)

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = 4 \cdot 0 = 0$
  El punto de corte con el eje *Y* es (0 , 0)

b. $\boldsymbol{y = \frac{2x}{3}}$

- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{2x}{3} \Rightarrow x = 0$
  El punto de corte con el eje *X* es (0 , 0)

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0}{3} \Rightarrow y = 0 \; y = 4 \cdot 0 = 0$
  El punto de corte con el eje *Y* es (0 , 0)

c. $\boldsymbol{y = -3x + 1}$

- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = -3 \cdot x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
  El punto de corte con el eje *X* es $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = -3 \cdot 0 + 1 = 1$
  El punto de corte con el eje *Y* es (0 , 1)

d. $\boldsymbol{y = \frac{x-1}{4}}$

- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x-1}{4} \Rightarrow x = 1$
  El punto de corte con el eje *X* es (1 , 0)

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0-1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} y = 4 \cdot 0 = 0$
  El punto de corte con el eje *Y* es $\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

e. $\boldsymbol{y = x^2 - 9}$

- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 9 \rightarrow$ Se resuelve la ecuación de 2.º grado:
  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm 6}{2} \left\} \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{array} \right\}$$
  Los puntos de corte con el eje *X* son (–3 , 0) y (3 , 0)

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = 0 - 9 = -9$
  El punto de corte con el eje *Y* es (0 , –9)

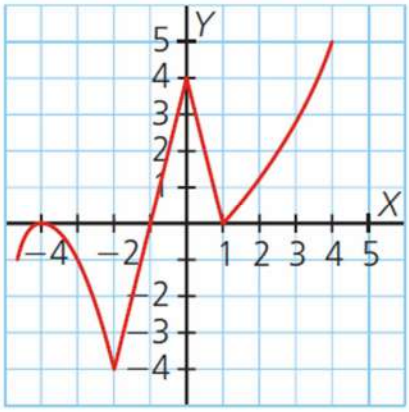
f. $\boldsymbol{y = x^2 + 2x + 1}$

- Con el eje *X:* se iguala a cero la variable *y*.
  $y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 + 2x + 1 \rightarrow$ Se resuelve la ecuación de 2.º grado:
  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 0}{2} \left. \vphantom{\frac{a}{b}} \right\} x = -1$$
  El punto de corte con el eje *X* es (–3 , 0)

- Con el eje *Y:* se iguala a cero la variable *x*.
  $x = 0 \Rightarrow y = 0 + 0 + 1 = 1$
  El punto de corte con el eje *Y* es (0 , 1)

9. Determina el dominio, el recorrido, los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos para estas funciones.

a.



D = [–4,5 ; 4] y R = [–4 , 5]

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje *X:* (–4 , 0), (–1 , 0) y (1 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , 4)

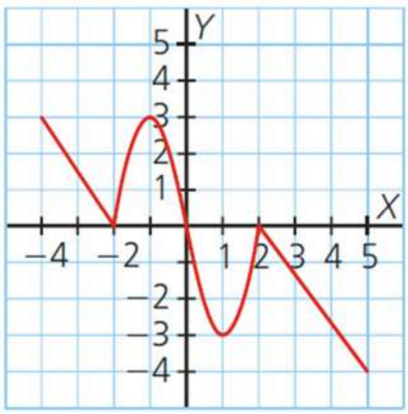
Crecimiento:

- Creciente: (–4,5 ; –4), (–2 , 0) y (1 , 4)
- Decreciente: (–4 , –2) y (0 , 1)

Extremos:

- Máximos: (–4 , 0) y (0 , 4)
- Mínimos: (–2 , –4) y (1 , 0)
- Mínimo absoluto: (–2 , –4)

b.



D = [–4 , 5] y R = [–4 , 3]

Puntos de corte con los ejes:

- Con el eje *X:* (–2 , 0), (0 , 0) y (2 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , 0)

Crecimiento:

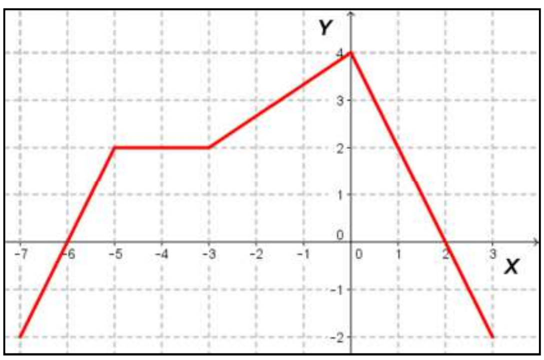
- Creciente: (–2 , –1) y (1 , 2)
- Decreciente: (–4 , –2), (–1 , 1) y (2 , 5)

Extremos:

- Máximos: (–1 , 3) y (2 , 0)
- Mínimos: (–2 , 0) y (1 , –3)

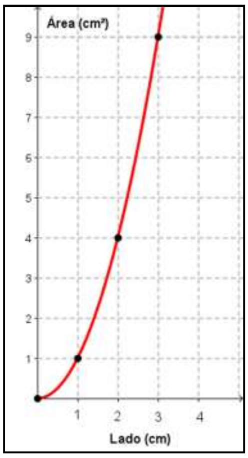
10. Representa la gráfica de una función cuyo dominio es [–7 , 3] y cuyo recorrido es [–2 , 4], que tiene como puntos de corte (–6 , 0), (0 , 4) y (2 , 0) y que es creciente en (–7 , –5) y (–3 , 0), decreciente en (0 , 3) y constante en (–5 , –3).

Respuesta abierta. Por ejemplo:



11. Construye una tabla de valores para la función que asocia el lado de un cuadrado con su área y, a partir de ella, dibuja la gráfica de la función. Determina el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Es continua? Justifica tu respuesta.

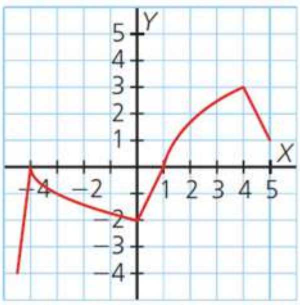
Lado (cm)	1	2	3	4
Área (cm^2)	1	4	9	16



- R = [0 , +∞)
- Es toda creciente.
- Sí es continua, pues el lado de un cuadrado puede tomar cualquier valor, incluidos los decimales.

SOLUCIONES PÁG. 167

12. Indica si las siguientes funciones son continuas. Si lo son, halla el dominio y el recorrido, los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos y el signo de la función. En caso de que sean discontinuas, indica sus puntos de discontinuidad.
a.



Es una función continua.

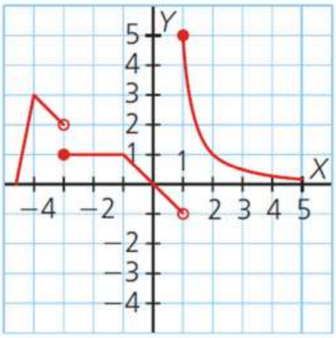
D = [–4,5 ; 5] y R = [–4 , 3]
Puntos de corte con los ejes:
- Con el eje *X:* (–4 , 0) y (1 , 0)
- Con el eje *Y:* (0 , –2)

Crecimiento:
- Creciente: (–4,5; –4) y (0 , 4)
- Decreciente: (–4 , 0) y (4 , 5)

Extremos:
- Máximos: (–4 , 0) y (4 , 3)
- Máximo absoluto: (4 , 3)
- Mínimo: (0 , –2)

Signo:
- Positiva: (1 , 5]
- Negativa: [–4,5; –4) y (–4 , 1)
- Nula en $x = –4$, y en $x = 1$

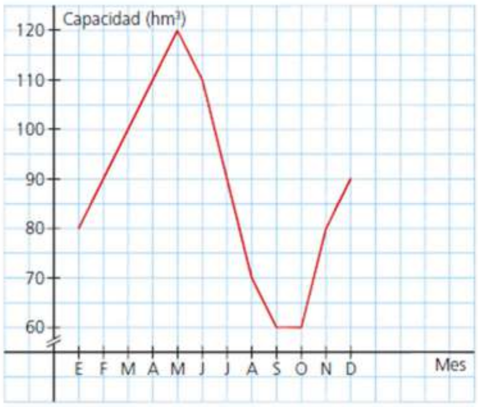
b.



Es discontinua en $x = –3$ y $x = 1$.

INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE GRÁFICAS

13. La siguiente gráfica muestra el agua embalsada en el pantano de San Juan a lo largo de un año:



a. ¿Cuántos hectómetros cúbicos había al principio del año?

Había 80 hm^3.

b. ¿En qué meses se alcanzaron los 110 hm^3 embalsados?

Se alcanzaron en abril y junio.

c. ¿Cuándo se alcanzó la mayor capacidad de agua embalsada? ¿Cuál fue?

Se alcanzó en mayo y fue de 120 hm^3.

d. ¿En qué meses el agua embalsada se mantuvo constante? ¿Cuántos hectómetros cúbicos había embalsados?

Entre septiembre y octubre con 60 hm^3 embalsados.

e. Indica en qué periodos de tiempo la capacidad de agua embalsada creció y decreció.

Creció entre enero y mayo, y entre octubre y diciembre. Decreció entre mayo y septiembre.

f. Describe brevemente la gráfica.

De enero a mayo al agua embalsada aumentó hasta alcanzar su valor máximo, para comenzar a descender hasta el mes de septiembre, donde se mantuvo hasta octubre en su valor mínimo, para empezar a aumentar hasta diciembre.

14. Visita esta página de Internet y realiza las actividades propuestas para repasar los conceptos de la unidad:

http://conteni2.educarex.es/mats/11807/contenido

Respuesta abierta.

EVALUACIÓN

1. Indica cuáles de las siguientes magnitudes no están relacionadas mediante una función:

a. La capacidad de una piscina y el tiempo de vaciado.

b. La distancia recorrida y la gasolina consumida.

c. La edad de una persona y el número de hijos que tiene.

d. El número de llamadas y el importe de la factura.

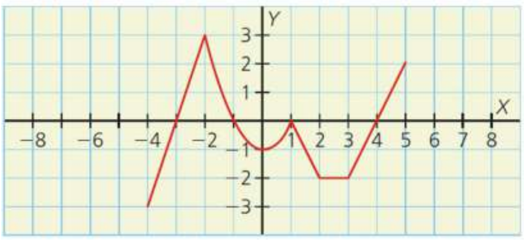
2. ¿Cuál es el punto de corte con el eje *X* de la función $y = 3x - 6$?

a. (2 , 0) **b. (0 , –6)** **c. (–6 , 0)** **d. (0 , 2)**

Se iguala la variable y a cero:

$y = 3x - 6 \Rightarrow 0 = 3x - 6 \Rightarrow 6 = 3x \Rightarrow x = 2$

3. Observa la siguiente gráfica. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?



a. Tiene D = [–3 , 3] y R = [–4 , 5].

b. Es discontinua.

c. Sus puntos de corte con los ejes son (–3 , 0), (–1 , 0), (1 , 0) y (4 , 0).

d. Es creciente en (–4 , –2), (0 , 1) y (3 , 5).

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el signo de la gráfica anterior no es cierta?

a. Es positiva en (–3 , –1) y (4 , 5).

b. Es negativa en (–4 , –3) y (–1 , 4).

c. Es negativa en (–4 , –3), (–1 , 1) y en (1 , 4).

d. Es nula en $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y en $x = 4$.

5. La gráfica de la actividad 3 tiene:

a. El mínimo absoluto en (–4 , –3).

b. Dos máximos en (–2 , 3) y (5 , 2).

c. Un mínimo en (2 , –2).

d. Un máximo absoluto en (–2 , 3).

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 9. Funciones elementales

Unidad 9. Funciones elementales

SOLUCIONES PÁG. 171

1. **Indica si la relación entre magnitudes es una función lineal:**
   a. **Los kilos de naranjas y el precio.** → Sí, porque la relación entre las magnitudes es directamente proporcional.
   b. **El número de obreros y el tiempo que emplean en realizar un trabajo.** → No, porque la relación entre las magnitudes no es directamente proporcional.
   c. **La velocidad de un coche y la distancia que recorre.** → Sí, porque la relación entre las magnitudes es directamente proporcional.
   d. **El tiempo que está abierto un grifo y los litros que arroja.** → Sí, porque la relación entre las magnitudes es directamente proporcional.

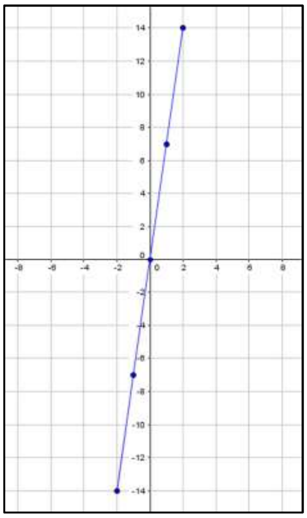
2. **Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla de valores para las funciones lineales $y = 7x$ e $y = -\frac{1}{2}x$ y represéntalas:**

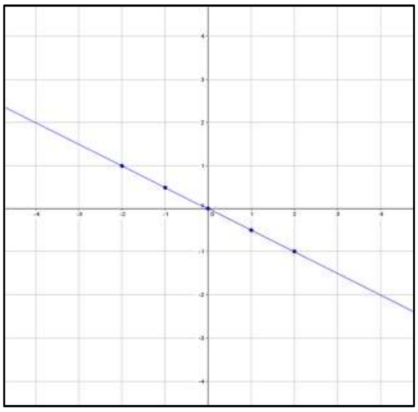
$y = 7x$

x	–2	–1	0	1	2
y	–14	–7	0	7	14

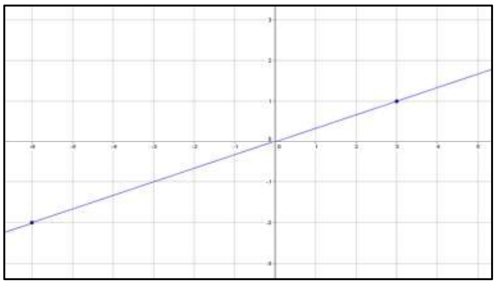
$y = -\frac{1}{2}x$

x	–2	–1	0	1	2
y	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	–1





3. Representa la recta que pasa por los puntos A (–6 , –2) y B (3 , 1). ¿Se corresponde con una función lineal? En caso afirmativo, ¿cuál es su pendiente?

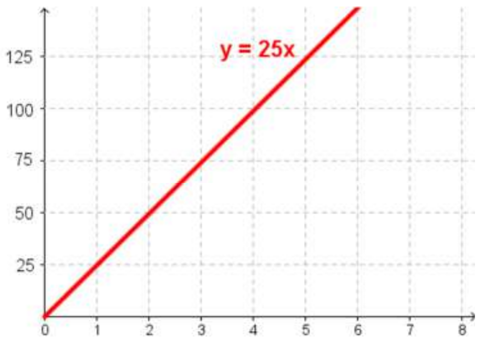


Sí es una función lineal

La pendiente se obtiene determinando el cociente de la variable *y* entre la variable *x* de un punto distinto del origen. Se coge, por ejemplo el punto B (3 , 1); la pendiente es m = $\frac{1}{3}$

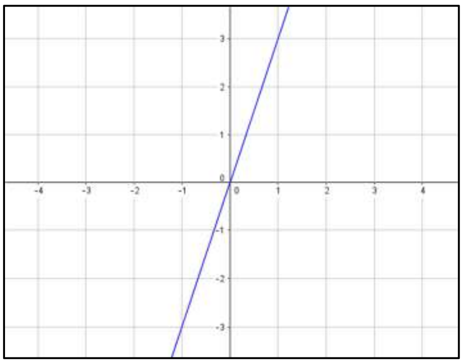
4. Un albañil alicata al día 25 m^2 de suelo. Halla la expresión algebraica de la función que relaciona el tiempo y los metros cuadrados de suelo. ¿Es una función lineal? Represéntala gráficamente.

$y = 25x \Rightarrow$ Sí es una función lineal porque es de la forma $y = mx$.

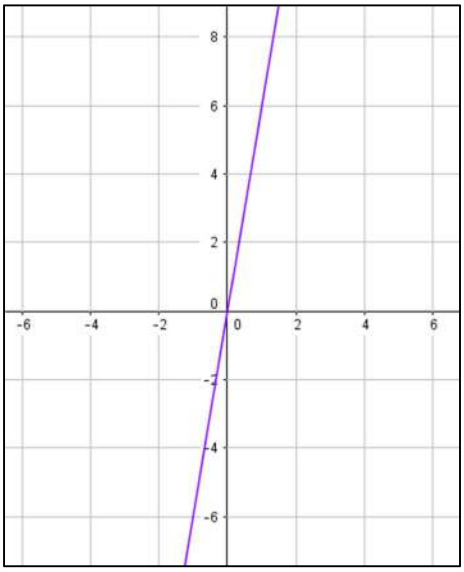


5. Indica, sin representarlas, si estas funciones son crecientes o decrecientes. Acto seguido, represéntalas gráficamente para comprobar tus respuestas.

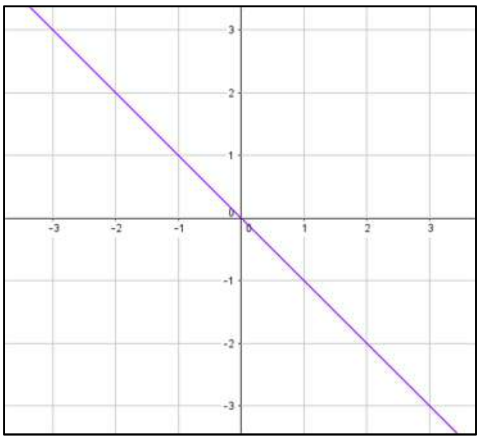
a. $y = 3x \Rightarrow$ Función creciente, porque m > 0.



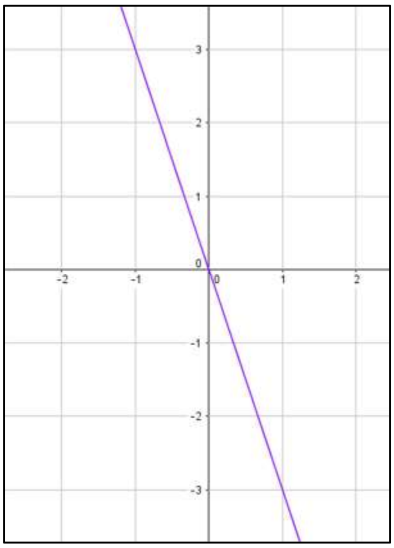
b. $y = 6x \Rightarrow$ Función creciente, porque m > 0.



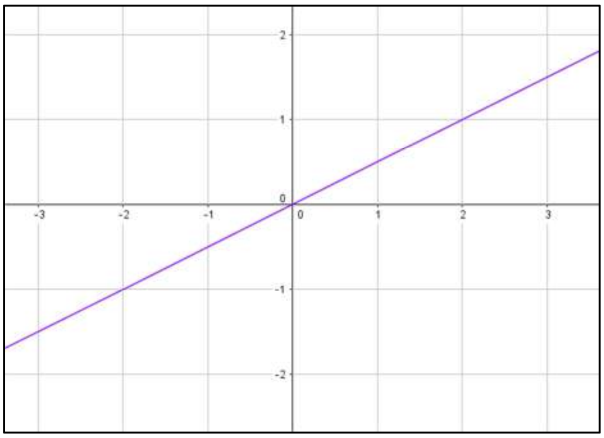
c. $y = -x \Rightarrow$ Función decreciente, porque m < 0.



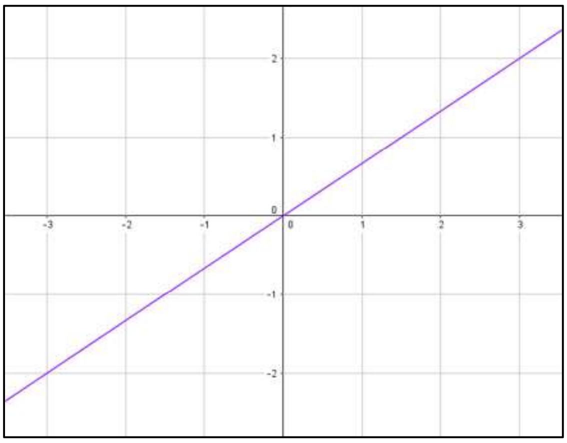
d. $\boldsymbol{y = -3x} \Rightarrow$ Función decreciente, porque m < 0.



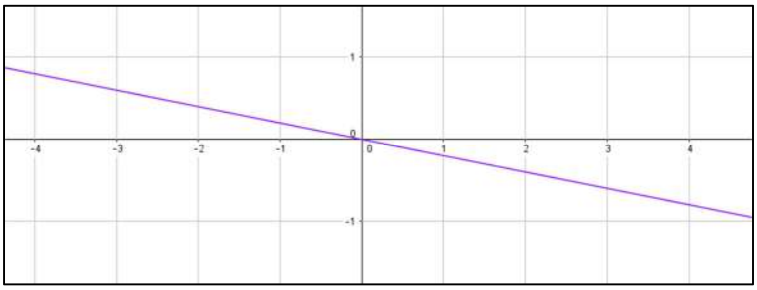
e. $\boldsymbol{y = 0{,}5x} \Rightarrow$ Función creciente, porque m > 0.



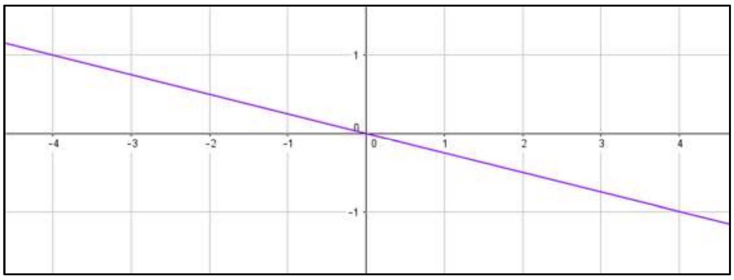
f. $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x} \Rightarrow$ Función creciente, porque m > 0.



g. ***y* = –0,2*x*** ⇒ Función decreciente, porque m < 0.



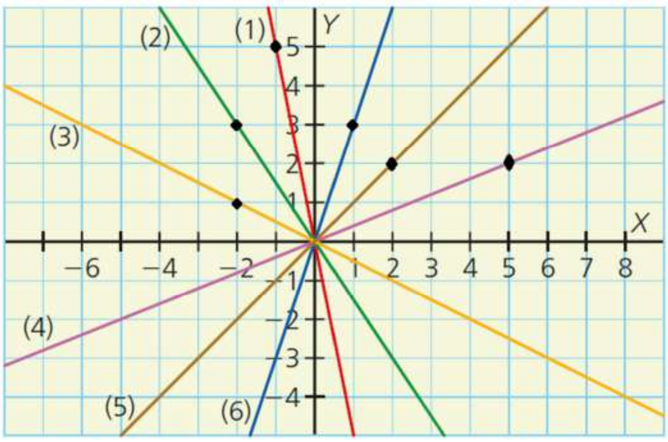
h. $\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x}$ ⇒ Función decreciente, porque m < 0.



6. **¿Pueden ser paralelas las rectas correspondientes a dos funciones lineales? Justifica tu respuesta.**
No, pues todas las rectas pasan por el punto (0 , 0). Luego son secantes.

7. **Halla la expresión algebraica de una función lineal que pasa por el punto (2, 5).**
La expresión algebraica de una función lineal es de la forma $y = mx$. Para calcular el valor de la pendiente, se sustituye en la expresión $m = \frac{y}{x} \Rightarrow m = \frac{5}{2}$. De esta forma, la expresión algebraica es: $y = \frac{5}{2}x$

8. **Determina las ecuaciones de estas funciones:**



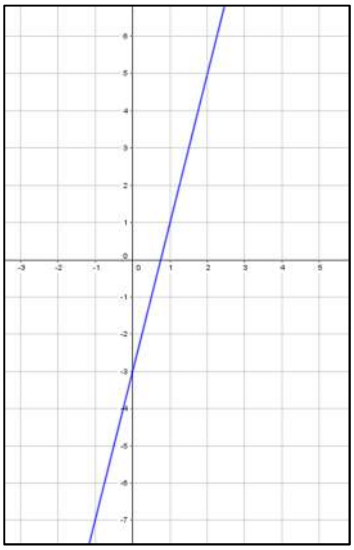
Para determinar la ecuación de una recta a partir de su representación, se elige un punto de dicha recta. Luego, para calcular el valor de la pendiente, se sustituye en la expresión $m = \frac{y}{x}$. De esta forma, la expresión algebraica de cada recta es:

- Recta (1). Se elige el punto (–1 , 5). Entonces, $m = \frac{5}{-1} = -5$, por lo que la expresión es: $y = -5x$
- Recta (2). Se elige el punto (–2 , 3). Entonces, $m = \frac{3}{-2}$, por lo que la expresión es: $y = -\frac{3}{2}x$
- Recta (3). Se elige el punto (–2 , 1). Entonces, $m = \frac{1}{-2}$, por lo que la expresión es: $y = -\frac{1}{2}x$
- Recta (4). Se elige el punto (5 , 2). Entonces, $m = \frac{2}{5}$, por lo que la expresión es: $y = \frac{2}{5}x$
- Recta (5). Se elige el punto (2 , 2). Entonces, $m = \frac{2}{2} = 1$, por lo que la expresión es: $y = x$
- Recta (6). Se elige el punto (1 , 3). Entonces, $m = \frac{3}{1} = 3$, por lo que la expresión es: $y = 3x$

SOLUCIONES PÁG. 173

9. Copia y completa en tu cuaderno las tablas de valores para estas funciones y represéntala:

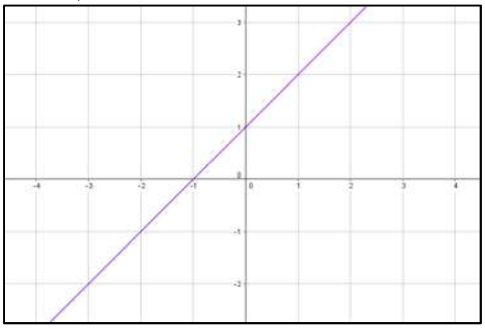
x	–2	–1	2	3
$y = 4x - 3$	–11	–7	5	9



10. Indica cuál es la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones y represéntalas:

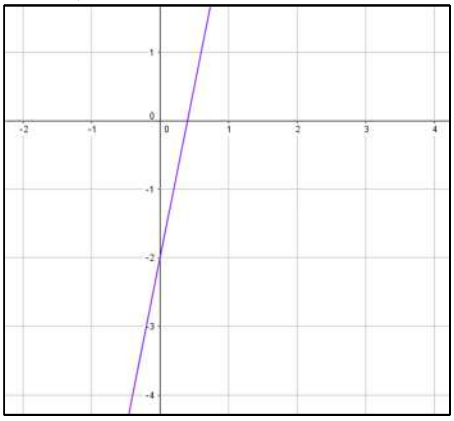
a. $y = x + 1$

m = 1, n = 1



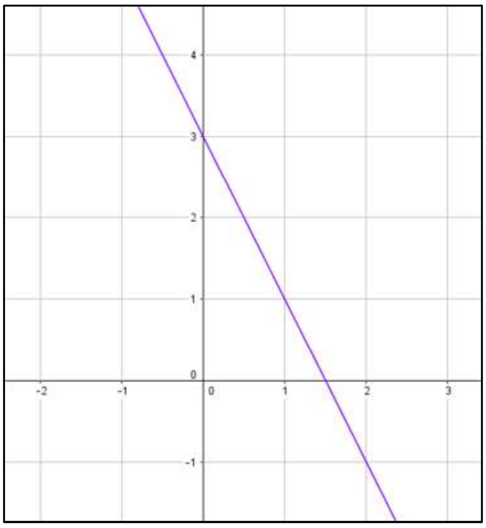
b. $y = 5x - 2$

m = 5, n = –2



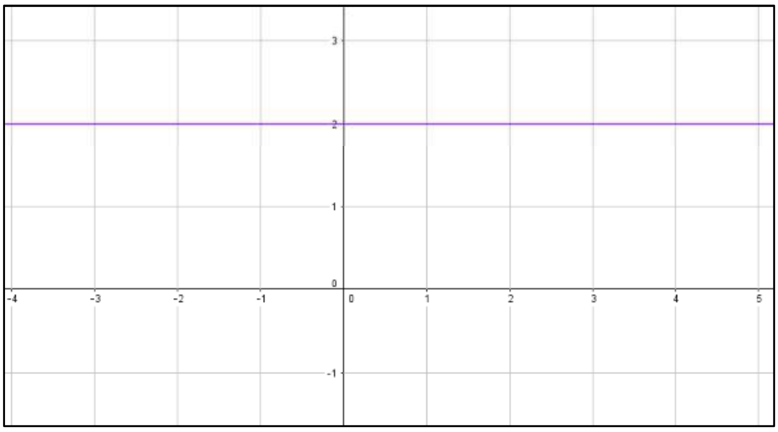
c. $y = -2x + 3$

m = –2, n = 3



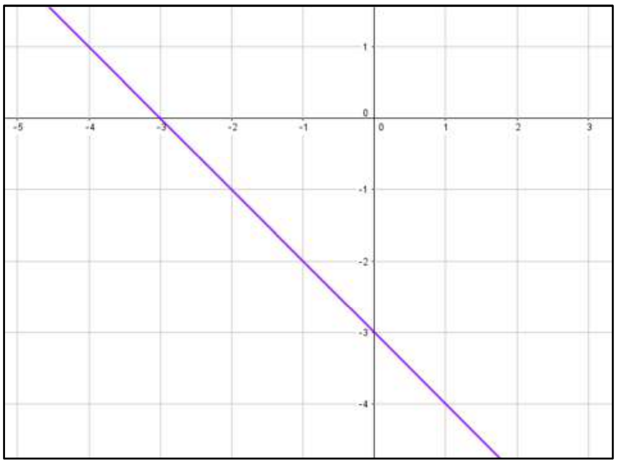
d. $\boldsymbol{y = 2}$

m = 0, n = 2



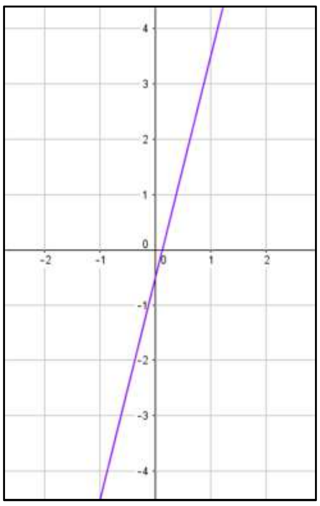
e. $\boldsymbol{y = -x - 3}$

m = –1, n = –3



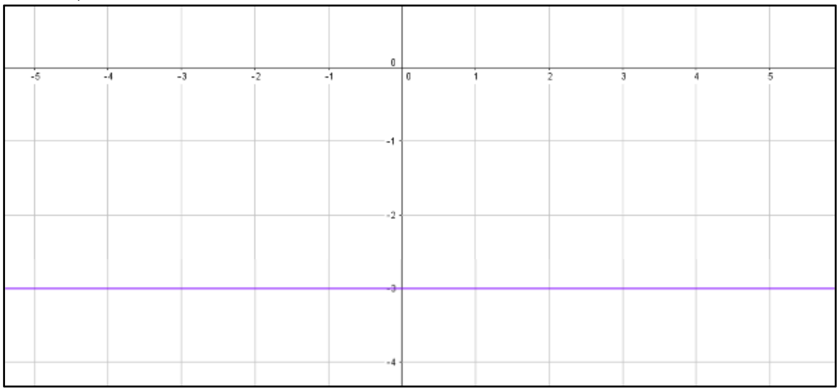
f. $\boldsymbol{y = 4x - \frac{1}{2}}$

$m = 4,\ n = -\frac{1}{2}$



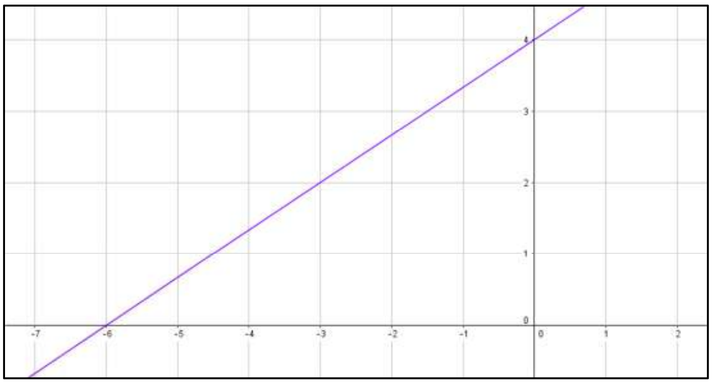
g. $\boldsymbol{y = -3}$

m = 0, n = –3



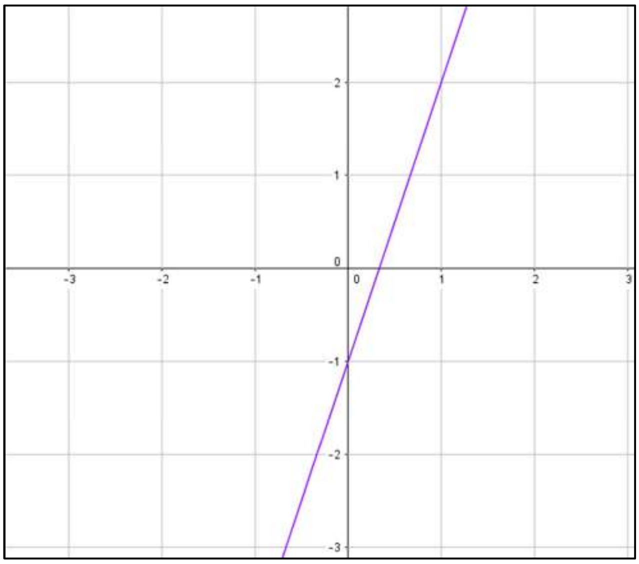
h. $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x + 4}$

m = $\frac{2}{3}$, n = 4

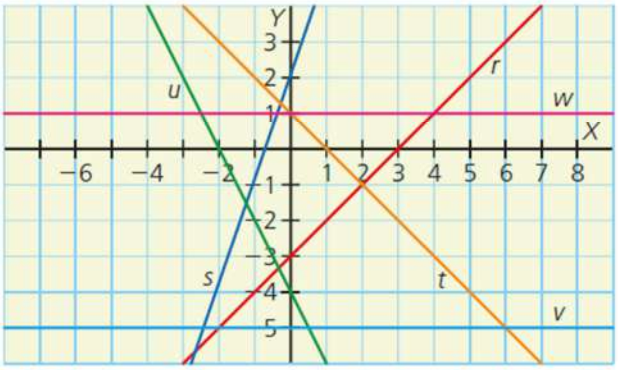


i. $\boldsymbol{y = -1 + 3x}$

m = 3, n = –1



11. Relaciona las siguientes funciones con sus correspondientes rectas:



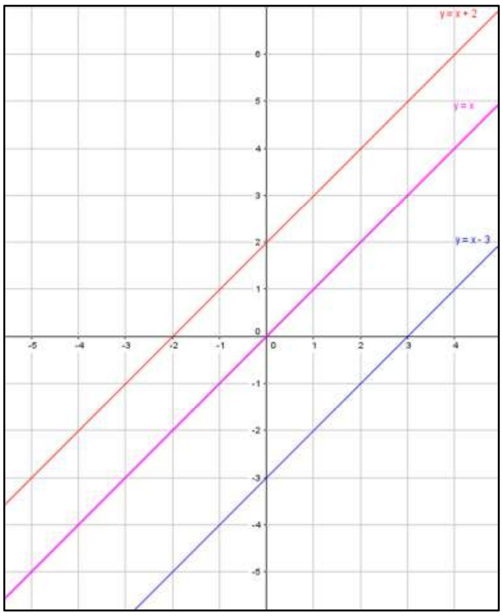
a. $y = 3x + 2$ → Como m = 3 y n = 2, es la recta *s.*
b. $y = -x + 1$ → Como m = –1 y n = 1, es la recta *t.*
c. $y = -2x - 4$ → Como m = –2 y n = –4, es la recta *u.*
d. $y = -5$ → Como n = –5, es la recta *v.*
e. $y = 1$ → Como n = 1, es la recta *w.*
f. $y = x - 3$ → Como m = 1 y n = –3, es la recta *r.*

12. Dibuja, en los mismos ejes de coordenadas, las funciones $y = x + 2$, $y = x - 3$ e $y = x$. ¿Cómo son las tres rectas?

x	–2	–1	2	3
$y = x + 2$	0	1	4	5

x	–2	–1	2	3
$y = x - 3$	–5	–4	–1	0

x	–2	–1	2	3
$y = x$	–2	–1	2	3



Las tres rectas son paralelas.

13. Encuentra la expresión algebraica de una función afín que pase por el punto (0 , 4) y es paralela a la recta de la función $y = 5x - 2$.

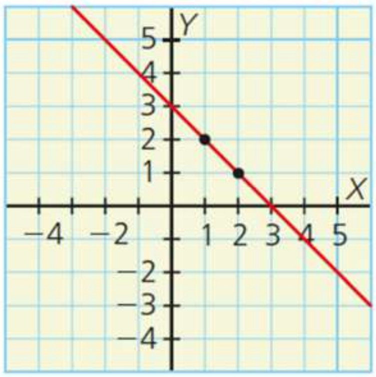
Como las rectas son paralelas, presentan la misma inclinación respecto al eje de abscisas, *X*. Por tanto, tienen la misma pendiente, m = 5.

Como el punto está sobre el eje de ordenadas, *Y*, es la ordenada en el origen, es decir, n = 4.

La expresión algebraica es: $y = 5x + 4$

14. Escribe la expresión de las siguientes funciones:

a.



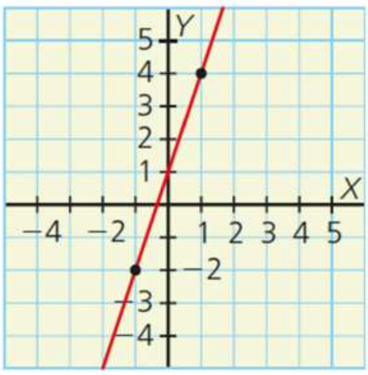
Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{1-2}{2-1} = -1 \Rightarrow m = -1$$

La recta corta al eje de ordenadas, *Y,* en 3. Por tanto, la ordenada en el origen es n = 3.

La expresión de la recta es: $y = -x + 3$

b.



Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{4-(-2)}{1-(-1)} = \frac{4+2}{1+1} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow m = 3$$

La recta corta al eje de ordenadas, *Y,* en 1. Por tanto, la ordenada en el origen es n = 1.

La expresión de la recta es: $y = 3x + 1$

15. Al apuntarse en el equipo de baloncesto de su barrio, Alfonso ha pagado 30 € en concepto de tasa de inscripción. Si la cuota mensual es de 40 €, ¿cuál es la expresión algebraica de la función que relaciona el número de meses y el dinero desembolsado? ¿Cuánto habrá pagado en total Alfonso cuando lleve 5 meses en el equipo?

Se construye una tabla de valores:

x = número de meses	y = precio total (€)
1	$1 \cdot 40 + 30 = 70$
2	$2 \cdot 40 + 30 = 110$
3	$3 \cdot 40 + 30 = 150$
4	$4 \cdot 40 + 30 = 190$
…	…
x	$x \cdot 40 + 30$

Luego, la expresión algebraica de la función que relaciona el número de meses y el dinero desembolsado es: $y = 40x + 30$

En 5 meses habrá pagado: $40 \cdot 5 + 30 = 230$ €

16. La temperatura se puede medir en Kelvin, grados Celsius o Fahrenheit. Averigua cuál es la expresión algebraica que relaciona la temperatura en grados Celsius y Kelvin y la que relaciona grados Celsius y Fahrenheit.

K = ºC + 273 $\qquad$ $ºF = \dfrac{9}{5}\,ºC + 32$

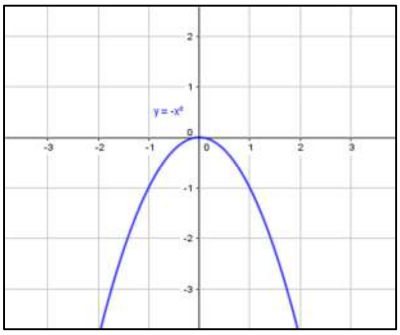
SOLUCIONES PÁG. 175

17. Dibuja las siguientes funciones cuadráticas:

a. $\boldsymbol{y = -x^2}$

Como a < 0, las ramas de la parábola apuntan hacia abajo.

- Punto de corte con el eje *Y:*
  $x = 0 \Rightarrow y = -0^2 = 0$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).
- Punto de corte con el eje *X:*
  $$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4\cdot(-1)\cdot 0}}{2\cdot(-1)} = \frac{0}{-2} = 0$$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).



b. $y = 3x^2$

Como a > 0, las ramas de la parábola apuntan hacia arriba.

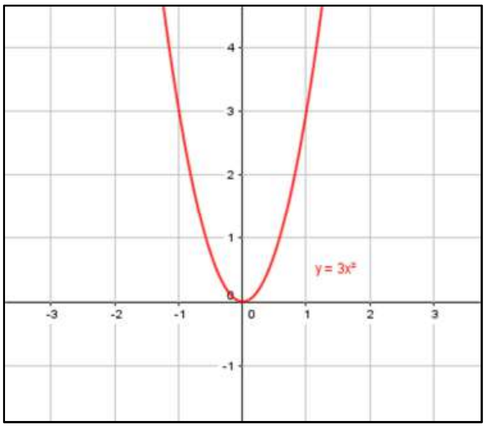
- Punto de corte con el eje *Y:*

  $x = 0 \Rightarrow y = 3 \cdot 0^2 = 0$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).
- Punto de corte con el eje *X:*

  $$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{0}{6} = 0$$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).



c. $y = -4x^2$

Como a < 0, las ramas de la parábola apuntan hacia abajo.

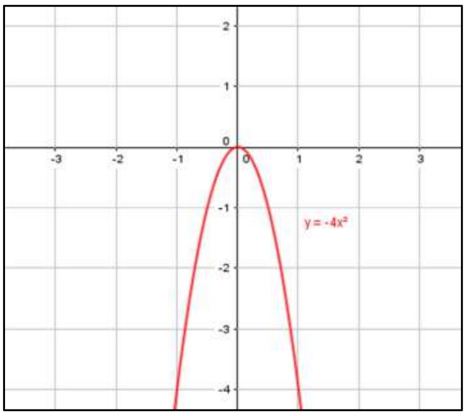
- Punto de corte con el eje *Y:*

  $x = 0 \Rightarrow y = -4 \cdot 0^2 = 0$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).
- Punto de corte con el eje *X:*

  $$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 0}}{2 \cdot (-4)} = \frac{0}{-8} = 0$$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).



d. $y = x^2$

Como a > 0, las ramas de la parábola apuntan hacia arriba.

- Punto de corte con el eje *Y:*

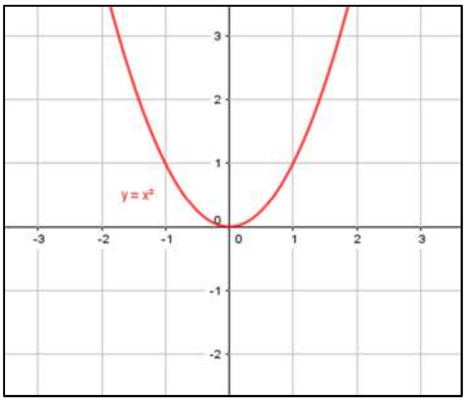
  $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 = 0$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).

- Punto de corte con el eje *X:*

  $y = 0 \Rightarrow \; x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \dfrac{0}{2} = 0$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).



e. $\boldsymbol{y = -x^2 + 4}$

Como a < 0, las ramas de la parábola apuntan hacia abajo.

- Punto de corte con el eje *Y:*

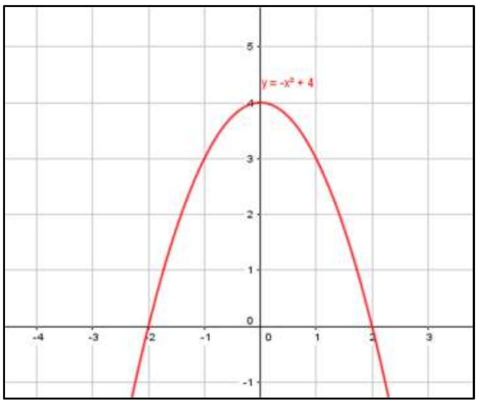
  $x = 0 \Rightarrow y = -0^2 + 4 = 4$

  Luego el punto de corte es (0 , 4).
- Puntos de corte con el eje *X:*

  $y = 0 \Rightarrow \; x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 4}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{0 \pm \sqrt{16}}{-2} = \dfrac{0 \pm 4}{-2} \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{-2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-4}{-2} = 2 \end{cases}$$

  Luego los puntos de corte son (–2 , 0) y (2 , 0).



f. $\boldsymbol{y = x^2 + 3x}$

Como a > 0, las ramas de la parábola apuntan hacia arriba.

- Punto de corte con el eje *Y:*

  $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 3 \cdot 0 = 0$

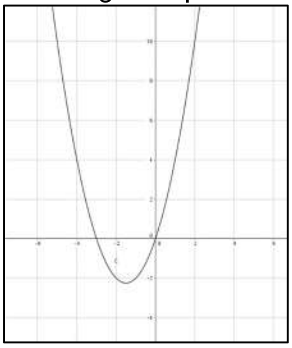
  Luego el punto de corte es (0 , 0).

- Puntos de corte con el eje *X:*

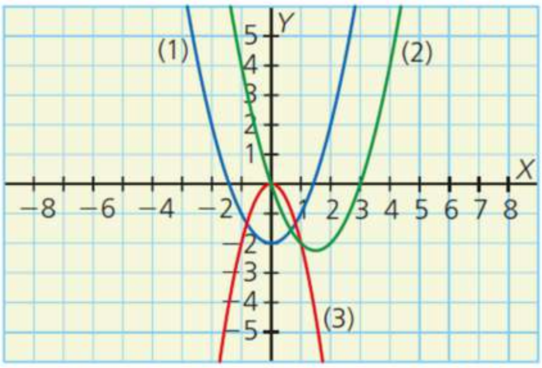
$$y = 0 \Rightarrow\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot 0}}{2\cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-3 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+3}{2} = 0 \\ x_2 = \dfrac{-3-3}{2} = -3 \end{cases}$$

Luego los puntos de corte son (–3 , 0) y (0 , 0).



18. Asocia cada función con su correspondiente gráfica:



a. $\boldsymbol{y = -2x^2}$ → El valor de a < 0, por tanto, las ramas de la parábola apuntan hacia abajo. Es la función (3).

b. $\boldsymbol{y = x^2 - 3x}$ → El valor de a > 0, por tanto las ramas de parábola apuntan hacia arriba. Como c = 0, corta al origen de coordenadas. Es la función (2).

c. $\boldsymbol{y = x^2 - 2}$ → El valor de a > 0, por tanto las ramas de parábola apuntan hacia arriba. Como b = 0, su vértice está sobre el eje de ordenadas. Es la función (1).

19. Observa las expresiones de las funciones $y = 4x^2$, $y = -2x^2 + 3$, $y = 5x^2 - 1$ e $y = x^2 + 3$ y determina:

a. ¿Qué parábolas tienen sus ramas apuntando hacia arriba? ¿Y más abiertas?

Las parábolas que tienen sus ramas apuntando hacia arriba son las que tienen a > 0. Por tanto son: $y = 4x^2$, $y = 5x^2 - 1$ e $y = x^2 + 3$. Las parábolas más abiertas son las que tienen el coeficiente a más pequeño en valor absoluto. Por tanto son: $y = -2x^2 + 3$ e $y = x^2 + 3$

b. ¿Cuáles tienen el mismo punto de corte con el eje *Y*?

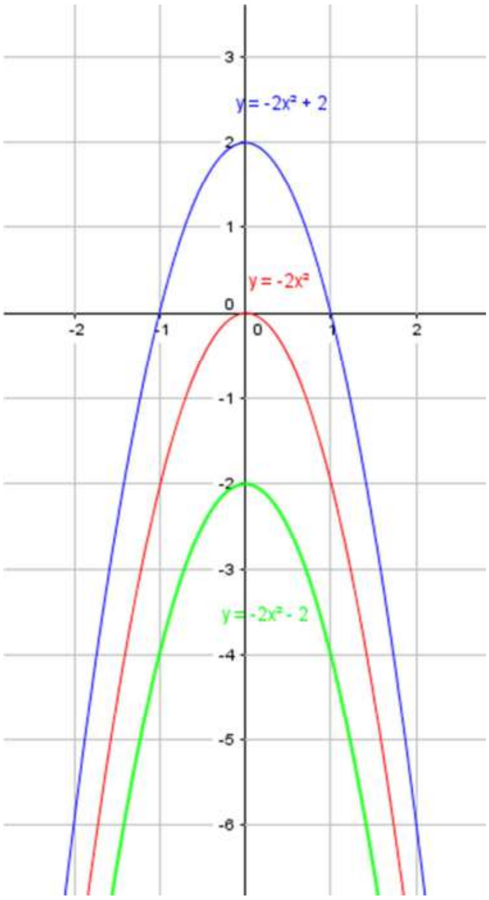
Tienen el mismo punto de corte con el eje *Y* las parábolas: $y = -2x^2 + 3$ e $y = x^2 + 3$

20. Representa, en los mismos ejes de coordenadas, las gráficas de las funciones $y = -2x^2$, $y = -2x^2 + 2$ e $y = -2x^2 - 2$. ¿En qué se parecen y se diferencian las gráficas? ¿Qué tienen que ver estas diferencias con sus expresiones?

x	–2	–1	2	3
$y = -2x^2$	–8	–2	–8	–18

x	–2	–1	2	3
$y = -2x^2 + 2$	–6	0	–6	–16

x	–2	–1	2	3
$y = -2x^2 - 2$	–10	–4	–10	–20



Todas las parábolas se parecen en que tienen la misma abertura de sus ramas y su vértice está sobre el eje *Y*. Las tres parábolas tienen la misma forma, pero están desplazadas. Se diferencian en lo desplazadas que están las parábolas respecto al eje *X*.

Estas diferencias tienen que ver con el valor *c* de la expresión. Si $c > 0$ la gráfica se desplaza *c* lugares hacia arriba con respecto a la parábola que tiene $c = 0$ y si $c < 0$ la gráfica se desplaza *c* lugares hacia abajo.

21. Indica, sin representar las siguientes funciones, en cuántos puntos cortan al eje *X* y hállalos.

a. $y = x^2 + 9$

Se resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 9 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

Como la raíz es negativa, la función no corta al eje *X*.

b. $y = x^2 - 5x$

Se resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 5x = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{5 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+5}{2} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{5-5}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Como la ecuación tiene dos soluciones, la función corta al eje *X* en los puntos (0 , 0) y (5 , 0).

c. $y = x^2 - 6x + 9$

Se resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

Como la ecuación tiene una solución, la función corta al eje *X* en el punto (3 , 0).

22. Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona el área de un círculo y su radio.

Si x es el radio de la circunferencia e y el área del círculo correspondiente: $y = \pi x^2$

SOLUCIONES PÁG. 177

23. Representa las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

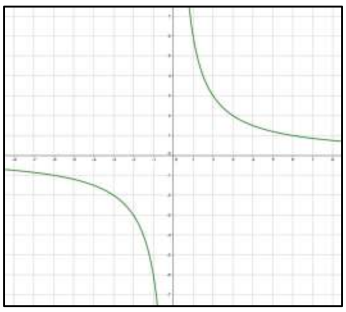
a. $y = \dfrac{6}{x}$

Como k > 0, la función es decreciente. Se encuentra en el primer y tercer cuadrante.

El producto de las coordenadas de un punto es el valor de la constante de proporcionalidad inversa: $x \cdot y = 6$.

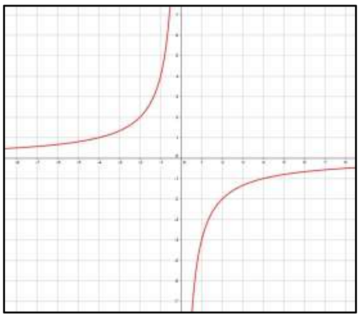
De esta forma, los puntos (1 , 6), (2 , 3), (3 , 2), (6 , 1) cumplen dicha igualdad.

La gráfica se completa representando en el tercer cuadrante.



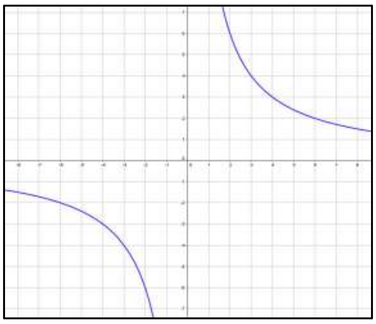
b. $\boldsymbol{y = \frac{-4}{x}}$

Como k < 0, la función es creciente. Se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante.
El producto de las coordenadas de un punto es el valor de la constante de proporcionalidad inversa: $x \cdot y = -4$.
De esta forma, los puntos (–1 , 4), (–2 , 2), (–4 , 1), cumplen dicha igualdad. La gráfica se completa representando en el cuarto cuadrante.



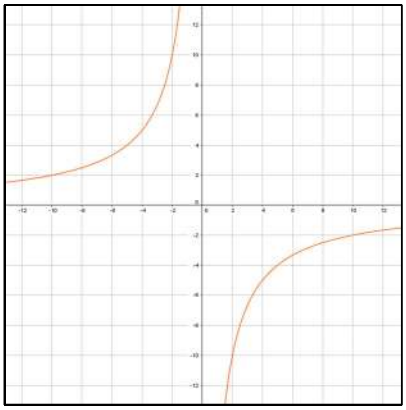
c. $\boldsymbol{y = \frac{12}{x}}$

Como k > 0, la función es decreciente. Se encuentra en el primer y tercer cuadrante.
El producto de las coordenadas de un punto es el valor de la constante de proporcionalidad inversa: $x \cdot y = 12$.
De esta forma, los puntos (1 , 12), (2 , 6), (3 , 4), (4 , 3), (6 , 2), (12 , 1) cumplen dicha igualdad. La gráfica se completa representando en el tercer cuadrante.



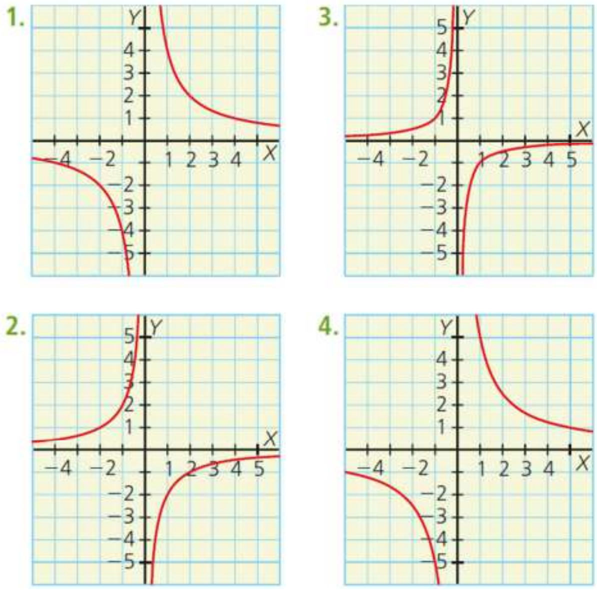
d. $\boldsymbol{y = \frac{-20}{x}}$

Como k < 0, la función es creciente. Se encuentra en el segundo y cuarto cuadrante.
El producto de las coordenadas de un punto es el valor de la constante de proporcionalidad inversa: $x \cdot y = -20$.
De esta forma, los puntos (–1 , 20), (–2 , 10), (–4 , 5), (–5 , 4), (–10 , 2), (–20, 1) cumplen dicha igualdad. La gráfica se completa representando en el cuarto cuadrante.



24. Asocia cada una de estas funciones con su correspondiente gráfica:

a. $y=\dfrac{5}{x}$ **b.** $y=\dfrac{-2}{x}$ **c.** $y=\dfrac{4}{x}$ **d.** $y=\dfrac{-1}{x}$



a. La función $y=\dfrac{5}{x}$ es la 4 porque el producto de las coordenadas de un punto, $x \cdot y = 5$. Así el producto de $1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = 5$

b. La función $y=\dfrac{-2}{x}$ es la 2 porque el producto de las coordenadas de un punto, $x \cdot y = -2$. Así el producto de $-1 \cdot 2 = -2 \cdot 1 = -2$

c. La función $y=\dfrac{4}{x}$ es la 1 porque el producto de las coordenadas de un punto, $x \cdot y = 4$. Así el producto de $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1 = 4$

d. La función $y=\dfrac{-1}{x}$ es la 3 porque el producto de las coordenadas de un punto, $x \cdot y = -1$. Así el producto de $1 \cdot -1 = -1 \cdot 1 = -1$

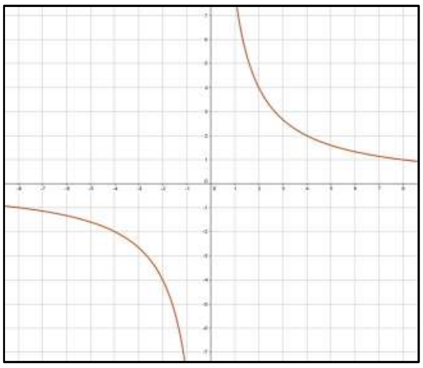
25. Dada la función $y = \frac{8}{x}$

a. Elabora una tabla de valores.

x	–4	–2	–1	1	2	4
$y = \frac{8}{x}$	–2	–4	–8	8	4	2

b. Indica, sin representarla, si es creciente o decreciente.
Es decreciente porque la constante de proporcionalidad, k, es positiva.

c. Represéntala y comprueba que se cumple tu respuesta del apartado b.

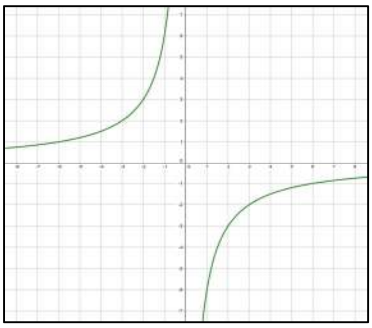


26. Copia y completa en tu cuaderno la siguiente tabla de valores, que corresponde a una función de proporcionalidad inversa:

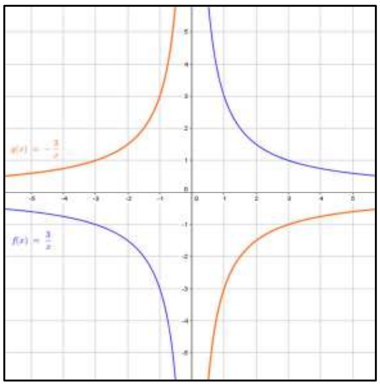
x	–6	–3	–2	1	2	6
y	1	2	3	–6	–3	–1

a. Halla la expresión algebraica de la función.
El producto de dos puntos cualesquiera tiene que ser igual a la constante de proporcionalidad, k. Por tanto:
$-6 \cdot 1 = -3 \cdot 2 = -2 \cdot 3 = 1 \cdot -6 = -6$
Así, la expresión algebraica es: $y = \frac{-6}{x}$

b. Representa gráficamente la función.



27. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones $y = \dfrac{3}{x}$ e $y = \dfrac{-3}{x}$. ¿Qué tienen en común?



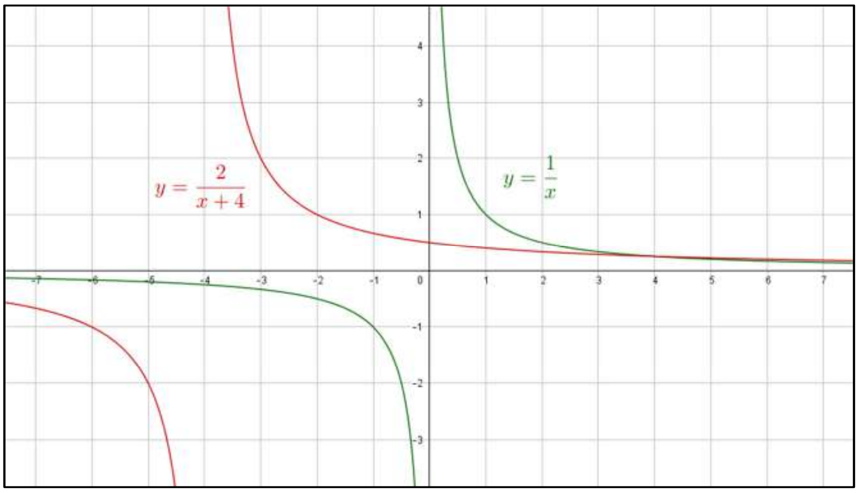
Tienen la misma forma y son simétricas respecto del eje *Y*.

28. Actividad resuelta.

29. Representa las funciones:

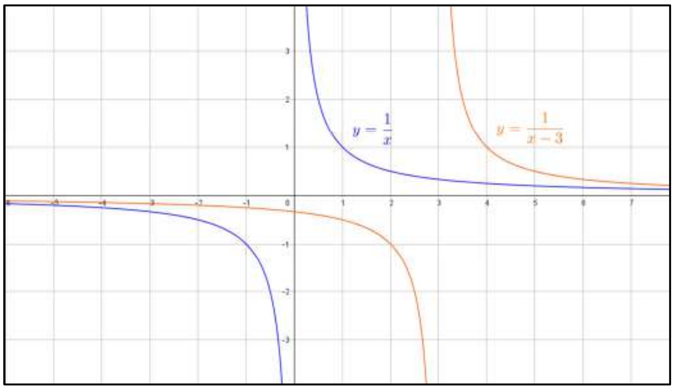
a. $y = \dfrac{2}{x+4}$

Se representa a partir de la función de proporcionalidad inversa $y = \dfrac{1}{x}$. La función $y = \dfrac{2}{x+4}$ es la función anterior trasladada cuatro unidades a la izquierda y dos unidades hacia arriba:



b. $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{x-3}}$

Se representa a partir de la función de proporcionalidad inversa $y = \dfrac{1}{x}$. La función $y = \dfrac{1}{x-3}$ es la función anterior trasladada tres unidades a la derecha.



30. Se quiere dibujar rectángulos que tengan un área de 18 cm^2.

a. Elabora una tabla de valores que relacione la base y la altura de los rectángulos.

x = base, y = altura

Como $A = b \cdot h \Rightarrow A = x \cdot y \Rightarrow 18 = x \cdot y \Rightarrow y = \dfrac{18}{x}$. Se sustituye en la función los valores de la base:

x	1	2	3	6	9	18
y	18	9	6	3	2	1

b. Expresa algebraicamente la función que relaciona la base y la altura de los rectángulos.

El producto de dos puntos cualesquiera tiene que ser igual a la constante de proporcionalidad, k. Por tanto:

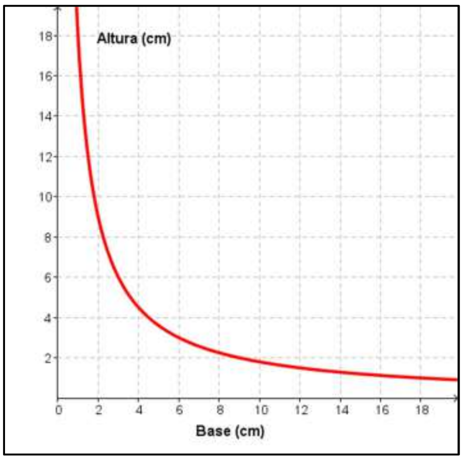
$1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6 = 6 \cdot 3 = 18$

Así, la expresión algebraica es: $y = \dfrac{18}{x}$

c. ¿En qué cuadrante estará la gráfica de la función? Justifica tu respuesta.

En el primer cuadrante, pues las variables x (base) e y (altura) deben ser positivas por ser longitudes.

d. Representa la función.



31. Un grupo de alumnos decide hacer un regalo valorado en 30 € a su profesor.

a. Elabora una tabla de valores que relacione el número de alumnos que participa en el regalo y el dinero que pone cada uno de ellos.

x = Número de alumnos
y = Dinero que pone cada alumno

x	1	2	3	5	6	10	15	30
y	30	15	10	6	5	3	2	1

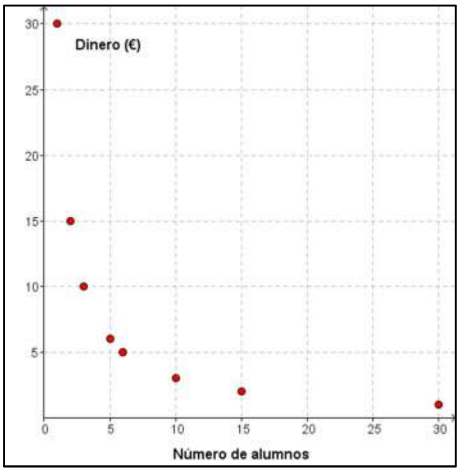
b. Halla la expresión algebraica de la función.

El producto de dos puntos cualesquiera tiene que ser igual a la constante de proporcionalidad, k. Por tanto:

$1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6 = 30$

Así, la expresión algebraica es: $y = \frac{30}{x}$

c. Representa la función. ¿Se pueden unir los puntos? Justifica tu respuesta.



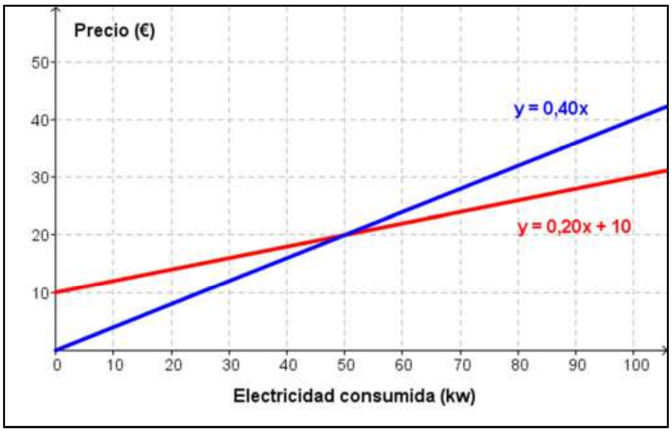
No se pueden unir los puntos pues el número de alumnos debe ser un número natural, sin decimales.

SOLUCIONES PÁG. 179

32. Una compañía eléctrica cobra a sus clientes 10 € de tarifa fija, más 0,20 € por kilovatio de electricidad consumido. Otra compañía, sin tarifa fija, cobra 0,40 € por kilovatio de electricidad consumida.

a. Representa gráficamente en un mismo eje de coordenadas las dos funciones que relacionan la electricidad consumida y el precio.

Las funciones son:
$y = 0{,}20x + 10$
$y = 0{,}40x$



b. Indica, según la electricidad consumida, cuándo es más conveniente contratar con una compañía u otra.

La segunda empresa, cuya función es $y = 0{,}40x$, es conveniente contratarla si se consumen como máximo 50 kw, y la primera, cuya función es $y = 0{,}20x + 10$, si se consumen al menos 50 kw.

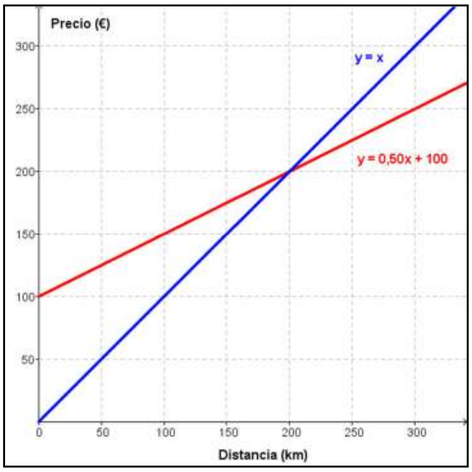
33. Para llevar unos muebles a su casa del pueblo, Sebas necesita alquilar una furgoneta; por ello, ha preguntado en dos empresas de transporte. La empresa A le cobra 100 € fijos más 50 céntimos por cada kilómetro recorrido, mientras que en la empresa B tiene que pagar 1 € por kilómetro recorrido.

a. Escribe las expresiones algebraicas de las dos funciones que relacionan el número de kilómetros recorridos y el precio. ¿Qué tipo de funciones son?

Si x = distancia recorrida (km) e y = precio (€):

Empresa A: $y = 0{,}50x + 100$, es una función afín.
Empresa B: $y = x$, es una función lineal.

b. Representa las funciones en una misma gráfica.



c. Si el pueblo de Sebas estuviera a 150 km, ¿cuál de las dos empresas sería más rentable?

Se sustituye el valor en ambas funciones:
Empresa A: $y = 0{,}50x + 100 \Rightarrow y = 0{,}50 \cdot 150 + 100 = 175$
Empresa B: $y = x \Rightarrow y = 150$

La empresa B, pues el precio de la empresa A sería 175 € y en la B, 150 €.

d. ¿En qué momento es igual el precio que hay que pagar en ambas?

Se igualan ambas funciones y se resuelve la ecuación resultante:

$$0{,}50x + 100 = x \Rightarrow 100 = 0{,}5x \Rightarrow x = \frac{100}{0{,}5} = 200$$

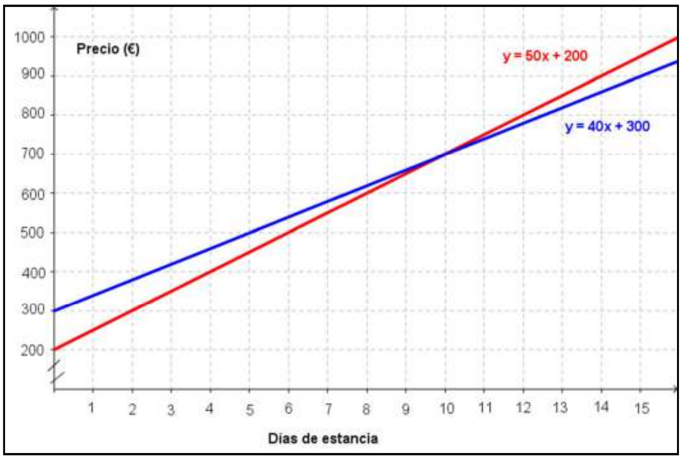
Cuando la distancia recorrida es 200 km.

34. Este verano, Sindy quiere ir a Londres. En una agencia de viajes, el vuelo le sale por 200 €, a lo que hay que sumar 50 € por día de estancia. En otra agencia, el vuelo le cuesta 300 €, y cada día de estancia vale 40 €.

a. Expresa algebraicamente las funciones que relacionan el precio y los días de estancia en Londres para las dos agencias de viajes y representa ambas funciones.

Si x = días de estancia e y = precio:
$y = 50x + 200$
$y = 40x + 300$

b. ¿Cuántos días tiene que pasar Sindy en Londres para que el precio del viaje le salga igual en las dos agencias?



Para que el precio sea igual, ambas funciones se deben de cruzar. Esto ocurre en $x = 10$. Por tanto, debe pasar 10 días.

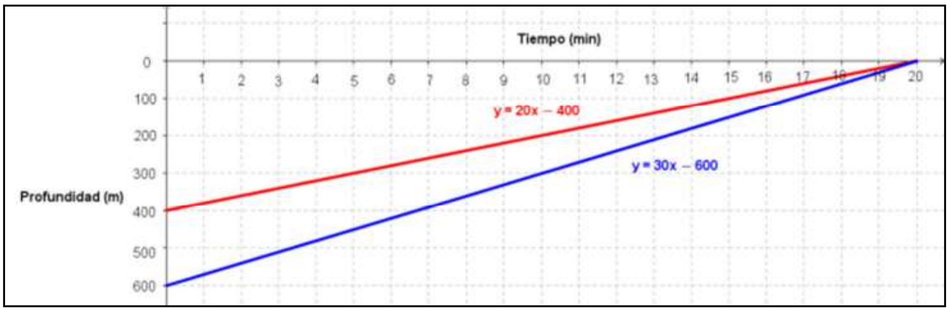
c. ¿A partir de qué día es más barato el viaje a través de la segunda agencia de viajes?
A partir del décimo día de estancia, pues la gráfica está por debajo de la otra.

35. El submarino rojo, situado a 400 m por debajo de la superficie, asciende a 20 m por minuto. Próximo a él se encuentra el submarino amarillo, que sube desde los 600 m de profundidad a 30 m por minuto.

a. Expresa las funciones que relacionan la profundidad a la que se encuentran los submarinos y el tiempo de ascenso.

Si x = tiempo (min) e y = profundidad (m):
$y = 20x - 400$
$y = 30x - 600$

b. Representa gráficamente las funciones que relacionan los metros de profundidad y la velocidad de ascenso de los dos submarinos.



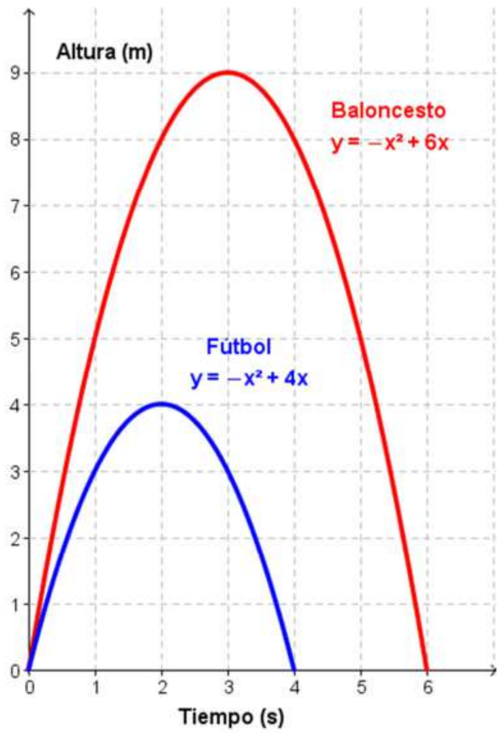
c. ¿Cuánto tiempo ha de trascurrir para que ambos submarinos se encuentren a la misma profundidad?

Observando la representación gráfica se concluye que ha de transcurrir 20 minutos, que es el punto de cruce de las dos funciones.

d. ¿Cuál de los dos asciende antes a la superficie? ¿Qué tiempo es ese?
Ambos salen a la vez a la superficie tras 20 minutos de ascenso.
e. Cuando llega a la superficie ¿a qué profundidad se encuentra el otro?
A la misma.
f. ¿Cuánto tiempo tarda el segundo en llegar a la superficie?
Lo mismo que el primero.

36. Javier y Ana lanzan a la vez dos pelotas, una de baloncesto y otra de fútbol, que describen trayectorias parabólicas. La ecuación que relaciona la altura de la pelota de baloncesto con respecto al tiempo es $y = -x^2 + 6x$ y la de la pelota de fútbol $y = -x^2 + 4x$.

a. Representa las dos funciones en la misma gráfica.



b. Averigua el tiempo que tardan la pelota de baloncesto y la de fútbol en llegar de nuevo al suelo. ¿Cuál de las dos llega antes?

La pelota de baloncesto tarda 6 s en llegar al suelo y la pelota de fútbol 4 s. Luego llega antes la pelota de fútbol.

c. ¿Cuál es la altura a la que se encuentran ambas pelotas al cabo de 2 s?

Al cabo de 2 s la pelota de baloncesto está a 8 m de altura y la de fútbol a 4 m.

d. ¿Cuántos segundos pasarán hasta que ambas pelotas alcancen su máxima altura?

La pelota de baloncesto alcanza su altura máxima a los 3 s y la de fútbol a los 2 s.

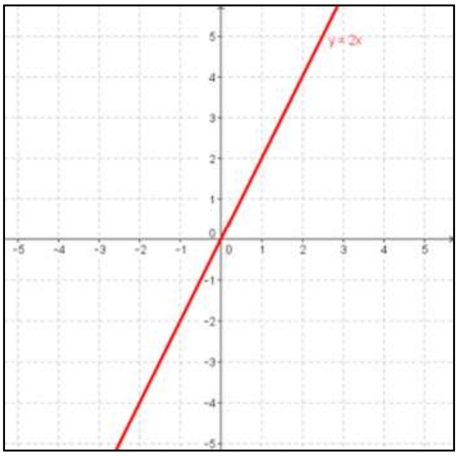
e. ¿Cuál de las dos pelotas consigue llegar más alto? ¿Qué altura es esa?

La mayor altura la alcanza la pelota de baloncesto con 9 m de altura.

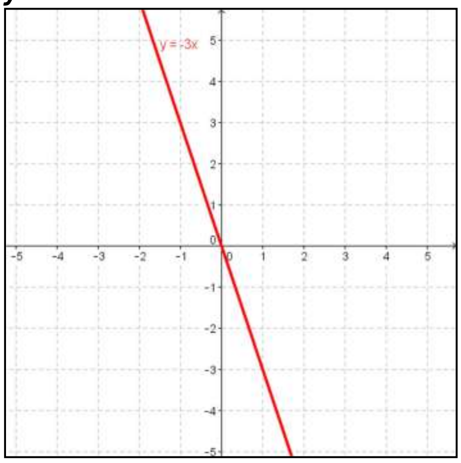
SOLUCIONES PÁG. 180

1. Representa las siguientes funciones lineales y afines:

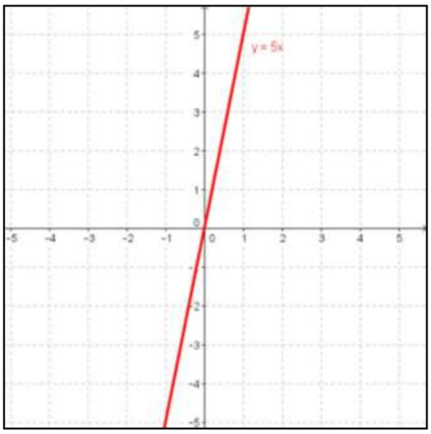
a. $y = 2x$



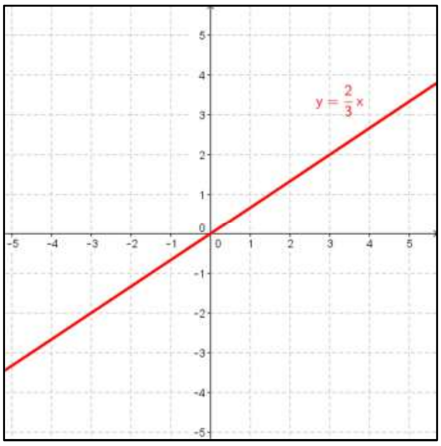
b. $y = -3x$



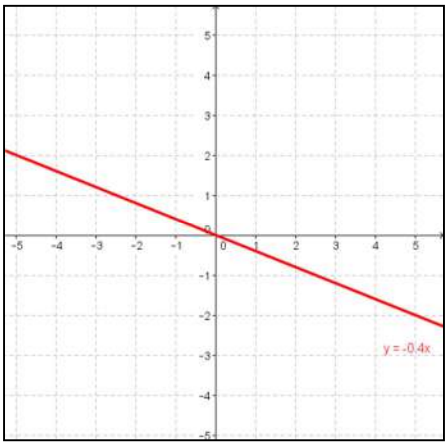
c. $y = 5x$



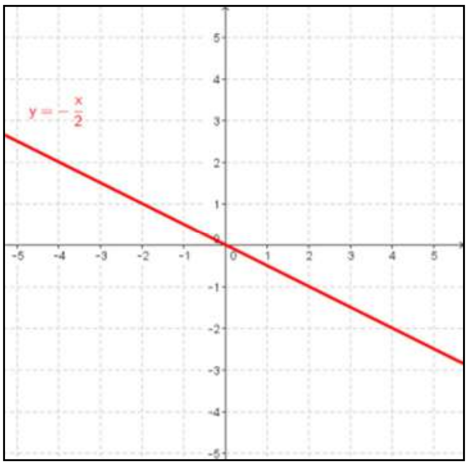
d. $y = \frac{2}{3}x$



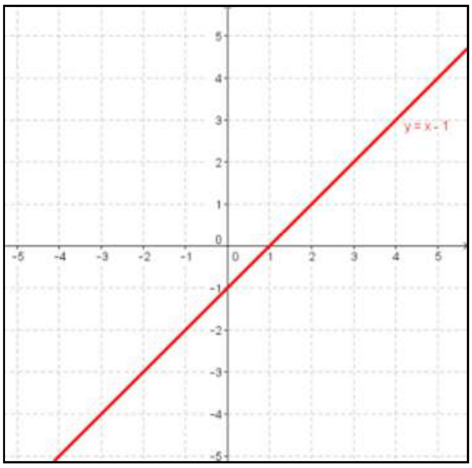
e. $y = -0{,}4x$



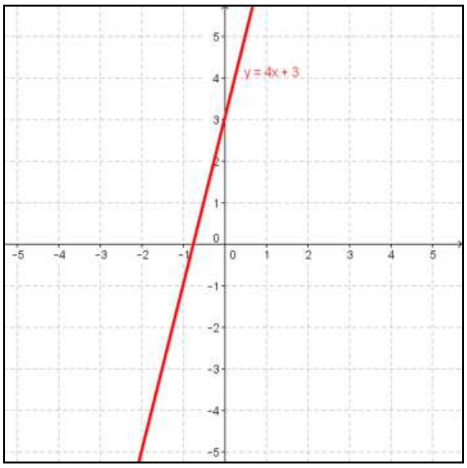
f. $y = -\frac{x}{2}$



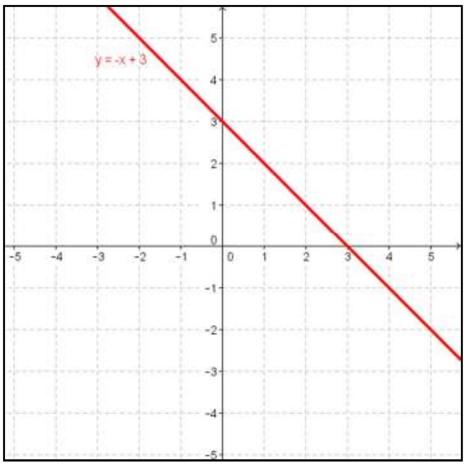
g. $y = x - 1$



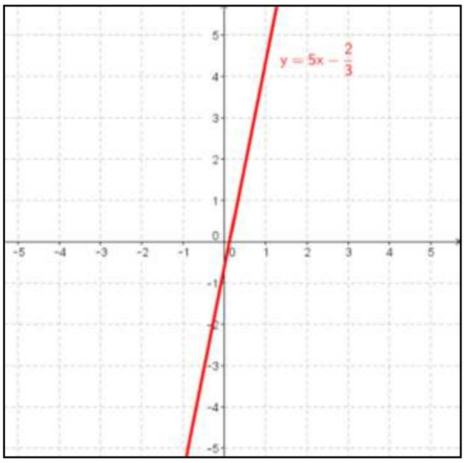
h. $y = 4x + 3$



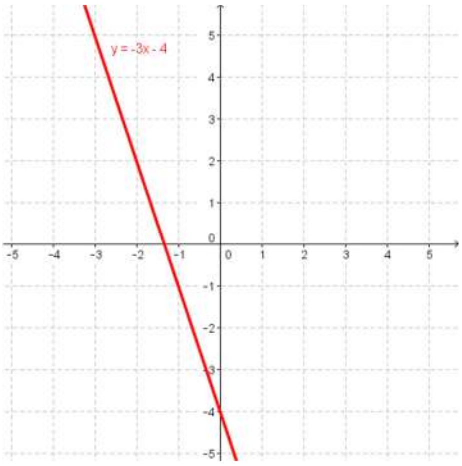
i. $y = -x + 3$



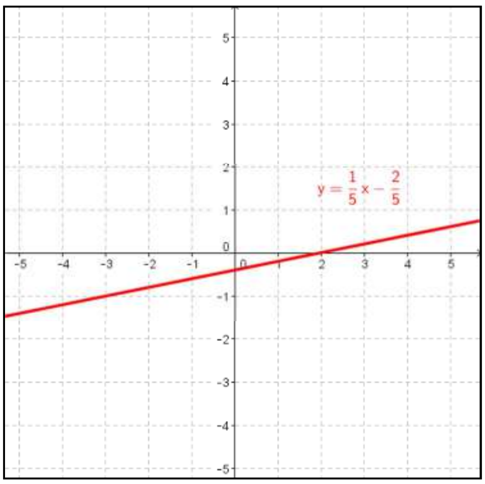
j. $y = 5x - \frac{2}{3}$



k. $y = -3x - 4$



l. $y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$



2. **Alberto recibe 10 € de paga fija mensual, más 1 € por día. Su hermana recibe 2 € de paga fija mensual, más 1,50 € por cada día.**

   a. **Expresa algebraicamente las dos funciones que relacionan el número de días y la paga recibida.**

   Alberto $\Rightarrow y = x + 10$
   Hermana $\Rightarrow y = 1{,}5x + 2$

   b. **¿A partir de qué día la paga recibida por la hermana es superior a la que le dan a Alberto?**

   Se igualan ambas funciones y se resuelve la ecuación resultante:

   $x + 10 = 1{,}5x + 2 \Rightarrow 8 = 0{,}5x \Rightarrow x = \dfrac{8}{0{,}5} = 16$

   En el día décimo sexto la paga es la misma. Luego, la paga de la hermana de Alberto es superior a la de Alberto a partir de 16 días.

SOLUCIONES PÁG. 181

1. **¿Qué punto tienen en común todas las rectas correspondientes a funciones lineales?**

   El punto (0 , 0).

2. **¿Cuándo es creciente una función lineal? ¿Y decreciente?**

   Es creciente cuando su pendiente, m, es positiva. Es decreciente cuando su pendiente, m, es negativa.

3. **¿Por qué cuadrantes pasa una función lineal cuya pendiente es negativa?**

   Por el segundo y el cuarto cuadrante.

4. **Dadas dos funciones lineales, ¿cómo se puede saber, sin representarlas, cuál de ellas está más inclinada con respecto al eje *X*?**

   Está más inclinada la que mayor pendiente tiene en valor absoluto.

5. **¿Cuál es la pendiente de la de la recta y = n?**

   La pendiente es 0, porque no tiene término en x.

6. **Si una función afín tiene como expresión y = mx + n, ¿cómo se llaman los números *m* y *n*?**

   El número m es la pendiente y n es la ordenada en el origen.

7. **¿Qué tienen en común dos funciones cuyas rectas son paralelas?**

   Que tienen la misma pendiente.

8. **¿Cuántos puntos de corte con el eje *Y* puede tener una parábola? ¿Y con el eje *X*?**

   Con el eje *Y* tiene un punto de corte. Con el eje *X* puede tener uno o dos puntos de corte, o no tener ninguno.

9. Sin representar una función cuadrática, ¿cómo se puede saber si su vértice es el punto más alto o el más bajo de la parábola?

Si el coeficiente a > 0, el vértice es el punto más bajo. Si el coeficiente a < 0, el vértice es el punto más alto.

10. ¿Son discontinuas todas las funciones de proporcionalidad inversa?

Sí.

11. ¿En qué cuadrantes se sitúa una función de proporcionalidad inversa cuya constante de proporcionalidad es positiva? ¿Y aquella cuya constante de proporcionalidad es negativa?

Si k > 0, la función está en el primer y tercer cuadrante. Si k < 0, la función está en el segundo y cuarto cuadrante.

12. ¿Cuándo es creciente una función de proporcionalidad inversa?

Cuando la constante de proporcionalidad inversa es negativa, k < 0.

13. ¿Qué tienen en común todos los puntos de una función afín cuya representación gráfica es una recta paralela al eje de abscisas?

El valor de su coordenada *y* es el mismo en todos los puntos.

14. Si una función cuadrática tiene como expresión $y = ax^2 + bx + c$, ¿cuál es el valor de *b* si su vértice está sobre el eje de ordenadas? Justifica tu repuesta.

Si el vértice está en el eje *Y*, el valor de su coordenada $x_V = 0$. Como $x_V = \frac{-b}{a} = 0$, entonces b = 0.

15. Indica cuál es la representación de una función afín, cuadrática y de proporcionalidad inversa.

Una función afín viene representada por una recta. Una función cuadrática se representa mediante una parábola. Una función de proporcionalidad inversa se representa mediante una hipérbola.

16. Prepara una presentación para tus compañeros. Puedes hacer un documento de PowerPoint, usar Glogster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 182

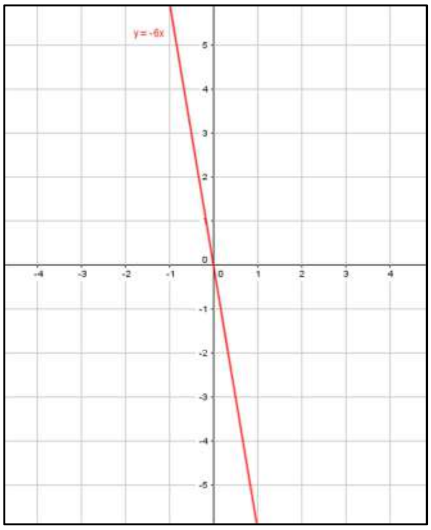
FUNCIONES LINEALES

1. **Indica si las relaciones entre las siguientes magnitudes son funciones lineales:**

   a. **El número de excavadoras que están trabajando y el tiempo que tardan en hacer una fosa.** → No, porque la relación entre las magnitudes no es directamente proporcional.
   b. **El número de vacas y el pienso que necesitan para alimentarse.** → Sí, porque la relación entre las magnitudes es directamente proporcional.
   c. **La edad de una persona y su peso.** → No, No, porque la relación entre las magnitudes no es directamente proporcional.
   d. **Las máquinas de una empresa embotelladora y el número de botellas que preparan en un día.** → Sí, porque la relación entre las magnitudes es directamente proporcional.

2. **Copia y completa la siguiente tabla de valores en tu cuaderno para la función lineal $y = -6x$ y represéntala:**

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	18	12	6	0	–6	–12	–18

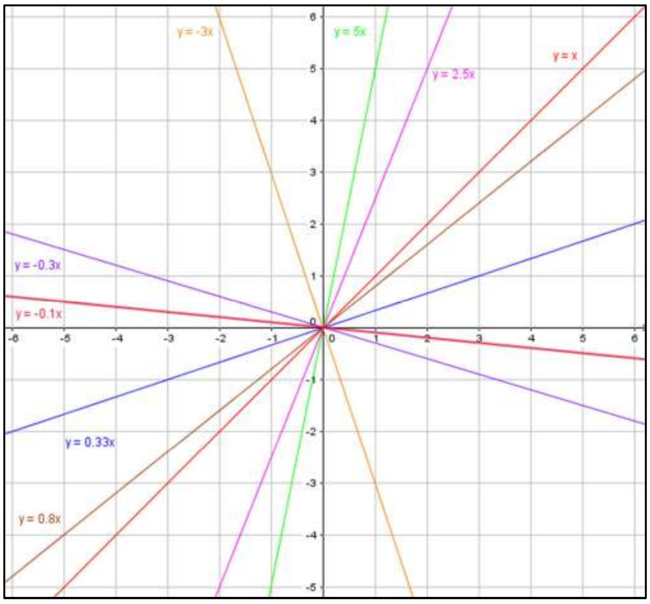


3. **Indica, sin representarlas, si estas funciones son crecientes o decrecientes. Represéntalas luego utilizando GeoGebra y comprueba tus respuestas.**

   a. $y = x \Rightarrow$ Función creciente, porque m > 0.
   b. $y = -3x \Rightarrow$ Función decreciente, porque m < 0.
   c. $y = 5x \Rightarrow$ Función creciente, porque m > 0.
   d. $y = \frac{x}{3} \Rightarrow$ Función creciente, porque m > 0.
   e. $y = -0{,}3x \Rightarrow$ Función decreciente, porque m < 0.
   f. $y = \frac{5}{2}x \Rightarrow$ Función creciente, porque m > 0.

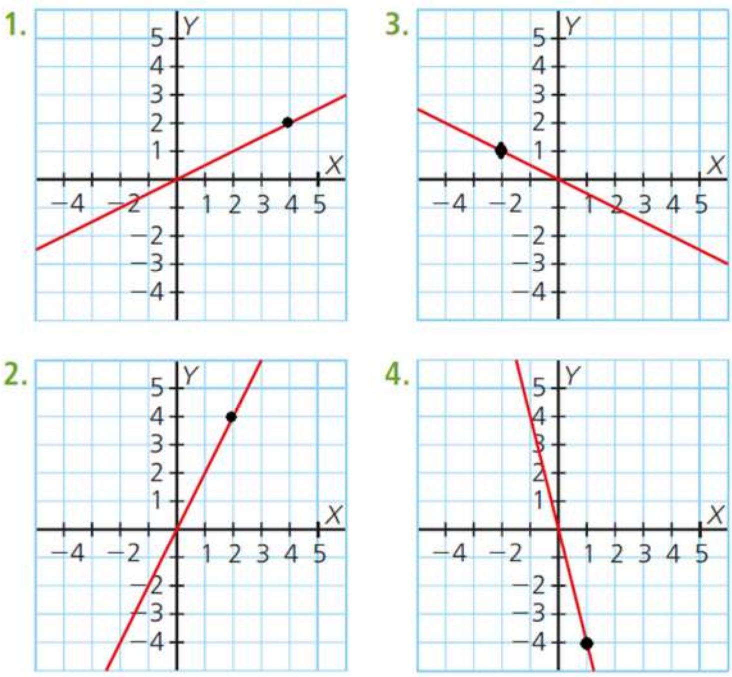
g. $\boldsymbol{y = 0{,}8x} \Rightarrow$ Función creciente, porque m > 0.

h. $\boldsymbol{y = -\frac{1}{10}x} \Rightarrow$ Función decreciente, porque m < 0.



4. Asocia cada una de las siguientes funciones lineales con su recta correspondiente:

a. $\boldsymbol{y = 2x}$ **b.** $\boldsymbol{y = -4x}$ **c.** $\boldsymbol{y = 0{,}5x}$ **d.** $\boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x}$



Para determinar la ecuación de una recta a partir de su representación, se elige un punto de dicha recta. Luego, para calcular el valor de la pendiente, se sustituye en la expresión $m = \frac{y}{x}$. De esta forma, la expresión algebraica de cada recta es:

- Recta (1). Se elige el punto (4 , 2). Entonces, $m=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5$, por lo que la expresión es: $y = 0{,}5x$.
- Recta (2). Se elige el punto (2 , 4). Entonces, $m=\frac{4}{2}=2$, por lo que la expresión es: $y = 2x$.
- Recta (3). Se elige el punto (–2 , 1). Entonces, $m=\frac{1}{-2}$, por lo que la expresión es: $y=\frac{-1}{2}x$
- Recta (4). Se elige el punto (1 , –4). Entonces, $m=\frac{-4}{1}=-4$, por lo que la expresión es: $y = -4x$.

5. Averigua la expresión algebraica de una función lineal cuya recta pasa por el punto (1 , 3).

La expresión algebraica de una función lineal es de la forma $y = mx$. Para calcular el valor de la pendiente, se sustituye en la expresión $m=\frac{y}{x} \Rightarrow m=\frac{3}{1}=3$. De esta forma, la expresión algebraica es: $y = 3x$

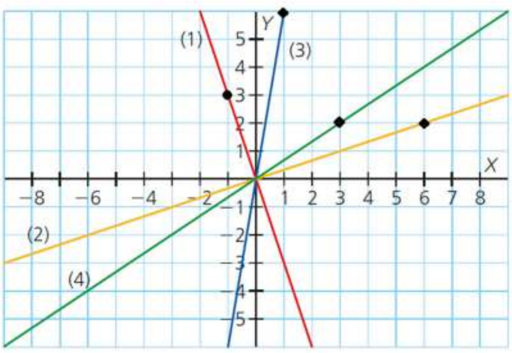
6. Obtén la expresión algebraica de una función lineal a partir de esta tabla de valores y represéntala:

x	**–3**	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**	**3**
y	**9**				**–3**		

La expresión algebraica de una función lineal es de la forma $y = mx$. Para calcular el valor de la pendiente, se sustituye en la expresión $m=\frac{y}{x}$ un punto conocido, por ejemplo (–3 , 9), siendo entonces $m=\frac{9}{-3}=-3$. De esta forma, la expresión algebraica es: $y=-3x$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	6	3	0	–3	–6	–9

7. Indica la expresión algebraica de las siguientes rectas:



Para determinar la ecuación de una recta a partir de su representación, se elige un punto de dicha recta. Luego, para calcular el valor de la pendiente, se sustituye en la expresión $m = \frac{y}{x}$. De esta forma, la expresión algebraica de cada recta es:

- Recta (1). Se elige el punto (–1 , 3). Entonces, $m = \frac{3}{-1} = -3$, por lo que la expresión es: $y = -3x$.
- Recta (2). Se elige el punto (6 , 2). Entonces, $m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, por lo que la expresión es: $y = \frac{1}{3}x$
- Recta (3). Se elige el punto (1 , 6). Entonces, $m = \frac{6}{1} = 6$, por lo que la expresión es: $y = 6x$
- Recta (4). Se elige el punto (3 , 2). Entonces, $m = \frac{2}{3}$, por lo que la expresión es: $y = \frac{2}{3}x$

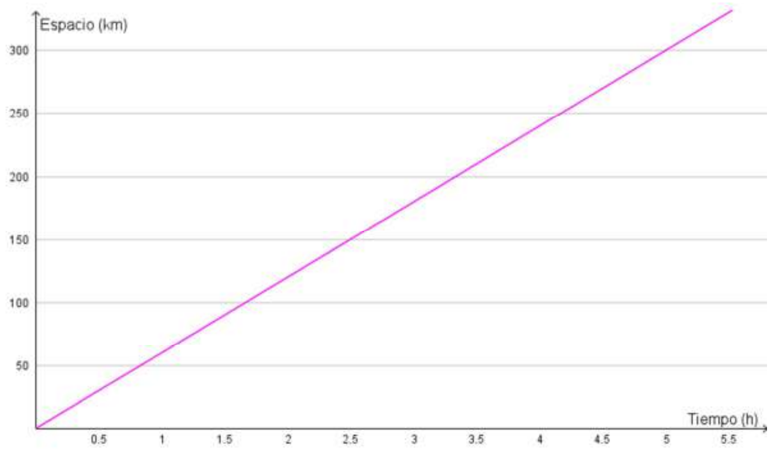
8. Halla la expresión algebraica que relaciona la longitud del lado de un pentágono regular y su perímetro.

Sea x = lado
y = perímetro $\Rightarrow y = 5x$

9. Una moto circula a una velocidad constante de 60 km/h. Halla la expresión que relaciona el tiempo y la distancia recorrida. Elabora una tabla de valores y represéntala.

Sea x = tiempo
y = distancia $\Rightarrow y = 60x$

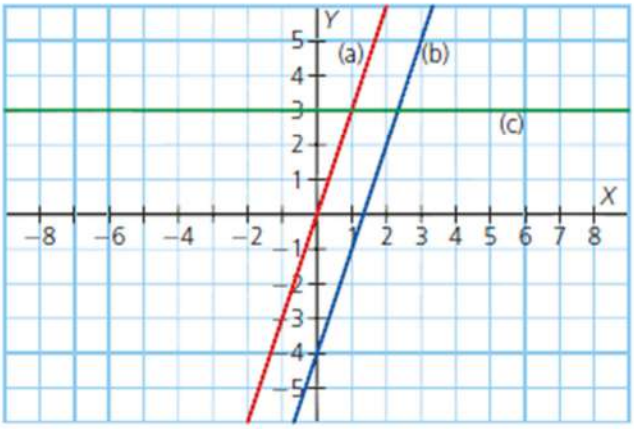
x	0	1	2	3	4	5
$y = 60x$	0	60	120	180	240	300



FUNCIONES AFINES

10. Asocia cada una de las siguientes funciones con su recta correspondiente:

1 $\boldsymbol{y = 3x}$ → Como m = 3 y n = 0, es la recta (a).
2 $\boldsymbol{y = 3}$ → Como m = 0 y n = 3, es la recta (c).
3 $\boldsymbol{y = 3x - 4}$ → Como m = 3 y n = –4, es la recta(b).



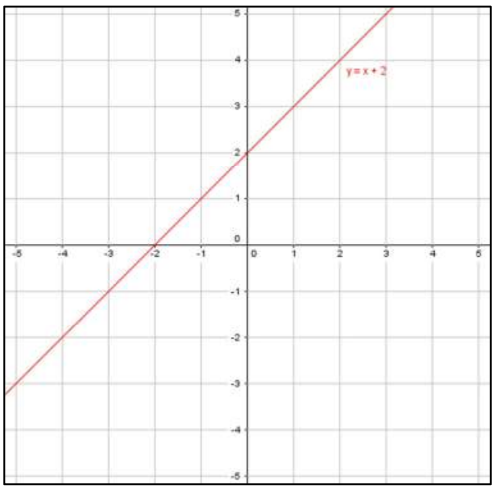
11. Dada la función $y = 4x - 6$, ¿cuál de los puntos siguientes pertenece a ella?

a. P (2 , 2) → $y = 4 \cdot 2 - 6 \Rightarrow y = 8 - 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ Sí pertenece.
b. Q (0 , 6) → $y = 4 \cdot 0 - 6 \Rightarrow y = 0 - 6 \Rightarrow y = -6 \Rightarrow$ No pertenece.
c. R (–1 , –10) → $y = 4 \cdot (-1) - 6 \Rightarrow y = -4 - 6 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow$ Sí pertenece.
d. S $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ → $y = 4 \cdot \frac{1}{2} - 6 \Rightarrow y = 2 - 6 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow$ Sí pertenece.

SOLUCIONES PÁG. 183

12. Completa la siguiente tabla de valores y representa la gráfica de la función:

x	–3	–2	0	1	3	4
$y = x + 2$	–1	0	2	3	5	6



13. Indica cuál es la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones y represéntalas. Comprueba con GeoGebra tus representaciones gráficas.

a. $\boldsymbol{y = x - 3} \rightarrow m = 1,\ n = -3$

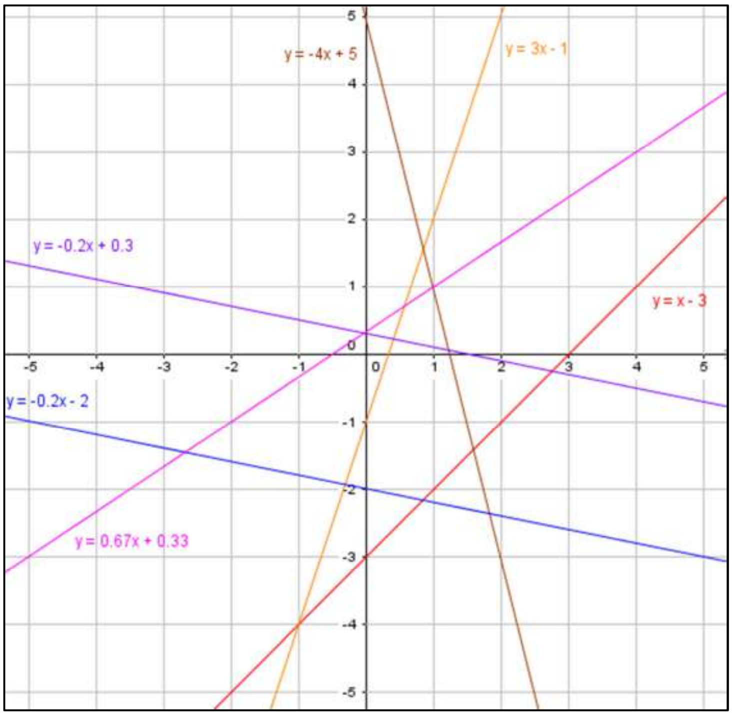
b. $\boldsymbol{y = 3x - 1} \rightarrow m = 3,\ n = -1$

c. $\boldsymbol{y = -4x + 5} \rightarrow m = -4,\ n = 5$

d. $\boldsymbol{y = -\frac{1}{5}x - 2} \rightarrow m = \frac{-1}{5},\ n = -2$

e. $\boldsymbol{y = -0{,}2x + 0{,}3} \rightarrow m = -0{,}2,\ n = 0{,}3$

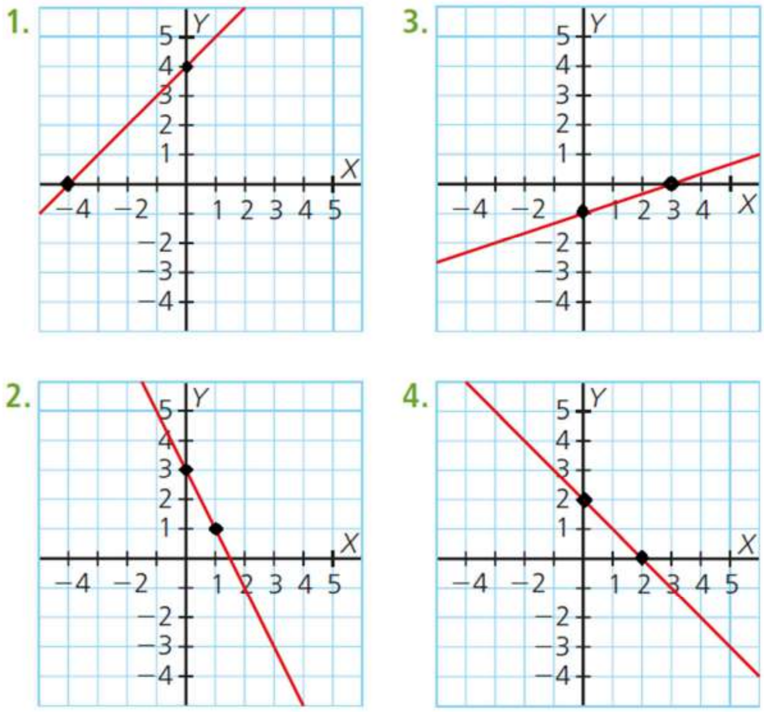
f. $\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}} \rightarrow m = \frac{2}{3},\ n = \frac{1}{3}$



14. Asocia cada una de las siguientes funciones afines con su recta correspondiente:

a. $y = x + 4$ **c.** $y = -2x + 3$

b. $y = -x + 2$ **d.** $y = \frac{1}{3}x - 1$



- Recta 1.
  Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:
  $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{4-0}{0-(-4)} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow m = 1$$
  La recta corta al eje de ordenadas, *Y*, en 4. Por tanto, la ordenada en el origen es n = 4.

  La expresión de la recta es: $y = x + 4$
- Recta 2.
  Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:
  $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{1-3}{1-0} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow m = -2$$
  La recta corta al eje de ordenadas, *Y*, en 3. Por tanto, la ordenada en el origen es n = 3.

  La expresión de la recta es: $y = -2x + 3$
- Recta 3.
  Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:
  $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{0-(-1)}{3-0} = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

La recta corta al eje de ordenadas, *Y,* en –1. Por tanto, la ordenada en el origen es n = –1.

La expresión de la recta es: $y = \frac{1}{3}x - 1$

- Recta 4.
  Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:
  $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{0-2}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow m = -1$$
  La recta corta al eje de ordenadas, *Y,* en 2. Por tanto, la ordenada en el origen es n = 2.

  La expresión de la recta es: $y = -x + 2$

15. Halla la expresión de la recta que cumple estas condiciones:

a. Tiene de pendiente 5, y su ordenada en el origen es –3.

La expresión algebraica es de la forma $y = mx + n$. Como m = 5, y n = –3, la recta es: $y = 5x - 3$

b. Es paralela a la recta de expresión $y = -4x + 5$, y su ordenada en el origen es 2.

Como las rectas son paralelas, presentan la misma inclinación respecto al eje de abscisas, *X.* Por tanto, tienen la misma pendiente, m = –4.
La ordenada en el origen, es n = 2.

La expresión algebraica es: $y = -4x + 2$

c. Tiene de pendiente –1 y pasa por el punto P (2 , 0).

La expresión algebraica es de la forma $y = mx + n$. Como m = –1, por el momento se sabe que $y = -1x + n$.

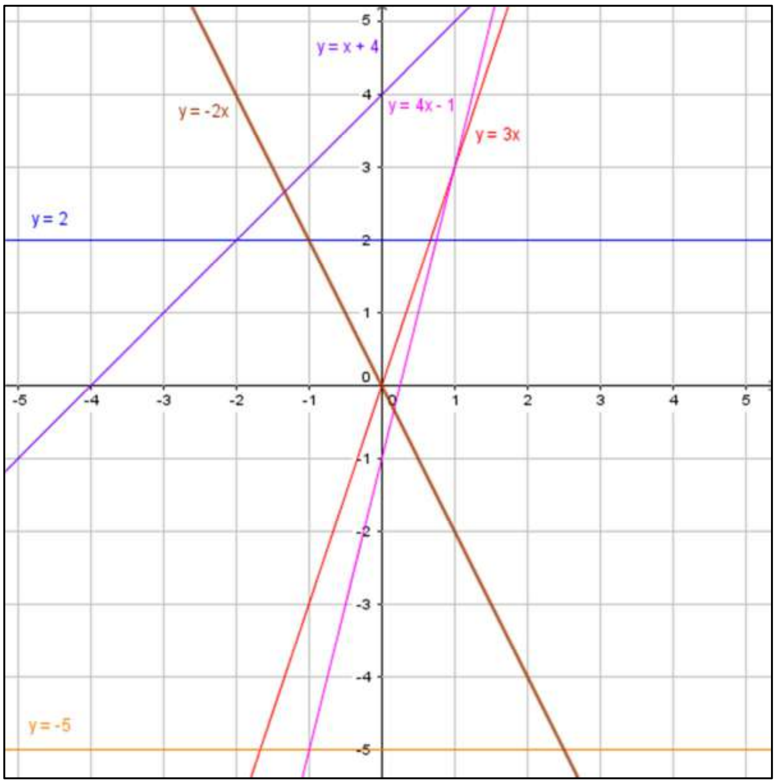
Para hallar el valor de n, se sustituye el punto P en dicha expresión:
$0 = -1 \cdot 2 + n \Rightarrow 2 = n$

La expresión algebraica es: $y = -x + 2$

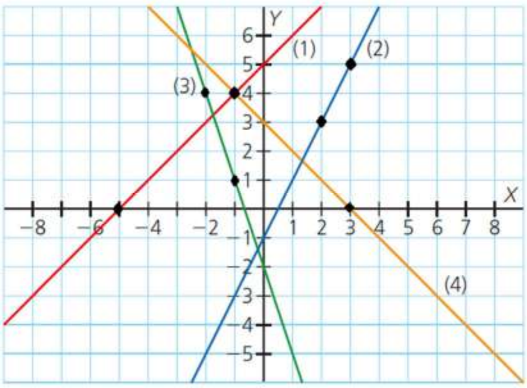
16. Representa las siguientes funciones:

a. $y = 3x$ **c.** $y = 2$ **e.** $y = 4x - 1$

b. $y = -5$ **d.** $y = x + 4$ **f.** $y = -2x$



17. Halla la expresión algebraica de las rectas representadas en la siguiente gráfica:



- Recta 1.
  Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{4-0}{-1-(-5)} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow m = 1$$

La recta corta al eje de ordenadas, *Y,* en 5. Por tanto, la ordenada en el origen es n = 5.
La expresión de la recta es: $y = x + 5$

- Recta 2.
  Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:
  $$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow m=\frac{5-3}{3-2}=\frac{2}{1}=2\Rightarrow m=2$$
  La recta corta al eje de ordenadas, *Y,* en –1. Por tanto, la ordenada en el origen es n = –1.

  La expresión de la recta es: $y = 2x - 1$

- Recta 3.
  Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:
  $$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow m=\frac{1-4}{-1-(-2)}=\frac{-3}{1}=-3\Rightarrow m=-3$$
  La recta corta al eje de ordenadas, *Y,* en –2. Por tanto, la ordenada en el origen es n = –2.

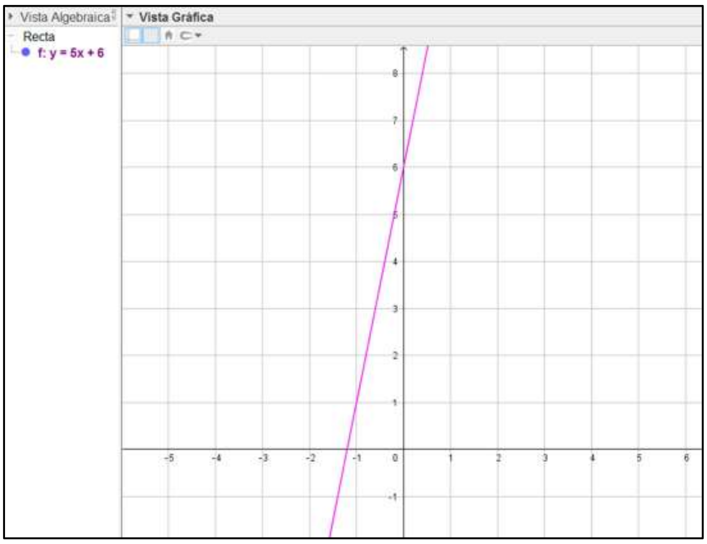
  La expresión de la recta es: $y = -3x - 2$

- Recta 4.
  Se calcula la pendiente de la recta a partir de los puntos marcados en la recta:
  $$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow m=\frac{0-4}{3-(-1)}=\frac{-4}{4}=-1\Rightarrow m=-1$$
  La recta corta al eje de ordenadas, *Y,* en 3. Por tanto, la ordenada en el origen es n = 3.

  La expresión de la recta es: $y = -x + 3$

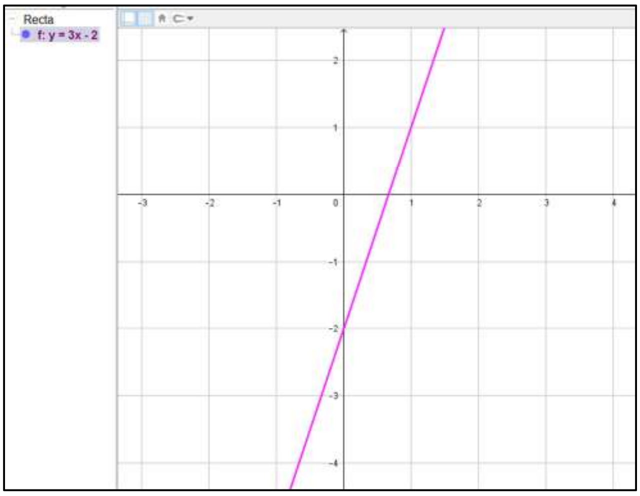
18. Dibuja con GeoGebra una función afín que tenga:

a. Pendiente positiva y ordenada en el origen positiva.
Respuesta abierta. Por ejemplo: $y = 5x + 6$



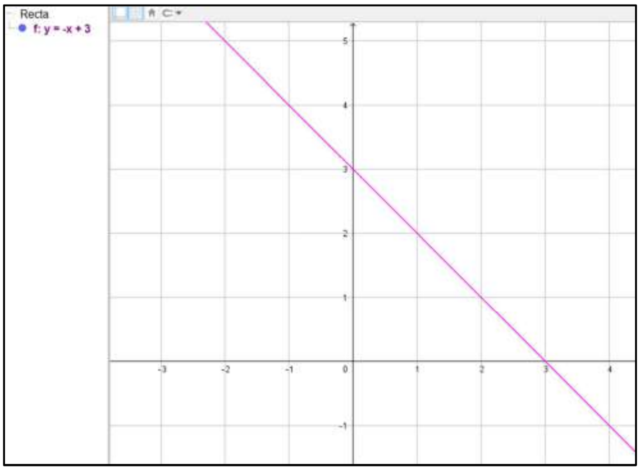
b. Pendiente positiva y ordenada en el origen negativa.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $y = 3x - 2$



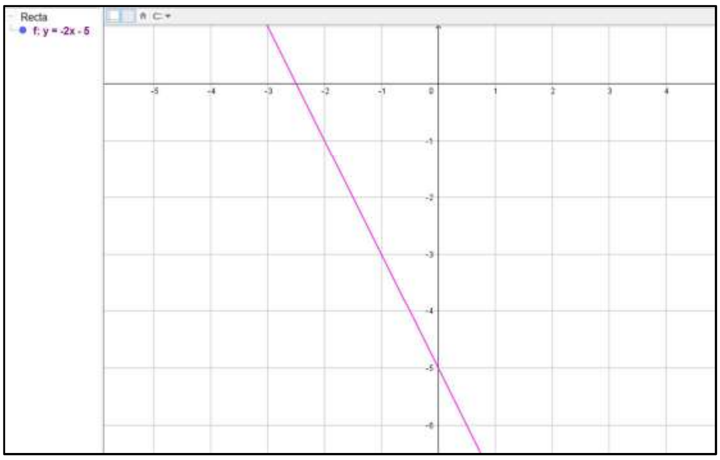
c. Pendiente negativa y ordenada en el origen positiva.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $y = -x + 3$



d. Pendiente negativa y ordenada en el origen negativa.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $y = -2x - 5$



19. Actividad resuelta.

20. Halla la expresión algebraica de las funciones lineales que pasan por los puntos:

a. P (2 , –1) y Q (5 , 2)

La expresión es de la forma $y = mx + n$. El coeficiente de x, m, es la pendiente y se calcula como el cociente entre la variación de la variable y de los dos puntos y la variación de la variable x: $m = \frac{2-(-1)}{5-2} = \frac{3}{3} = 1$.

Así, la función es $y = x + n$.

Para calcular n, se sustituye uno de los dos puntos en la expresión $y = x + n$ y se despeja n. Si se sustituye el punto P (2 , –1), se tiene que:

$-1 = 2 + n \Rightarrow n = -3$

Por tanto, la función es $y = x - 3$.

b. P (1 , –3) y Q (3 , 1)

La expresión es de la forma $y = mx + n$. El coeficiente de x, m, es la pendiente y se calcula como el cociente entre la variación de la variable y de los dos puntos y la variación de la variable x: $m = \frac{1-(-3)}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$.

Así, la función es $y = 2x + n$.

Para calcular n, se sustituye uno de los dos puntos en la expresión $y = 2x + n$ y se despeja n. Si se sustituye el punto P (1 , –3), se tiene que:

$-3 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -5$

Por tanto, la función es $y = 2x - 5$.

c. P (2 , 0) y Q (1 , 3)

La expresión es de la forma $y = mx + n$. El coeficiente de x, m, es la pendiente y se calcula como el cociente entre la variación de la variable y de los dos puntos y la variación de la variable x: $m = \frac{3-0}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$.

Así, la función es $y = -3x + n$.

Para calcular n, se sustituye uno de los dos puntos en la expresión $y = -3x + n$ y se despeja n. Si se sustituye el punto P (2 , 0), se tiene que:

$0 = -3 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 6$

Por tanto, la función es $y = -3x + 6$.

d. P (2 , 4) y Q (4 , 5)

La expresión es de la forma $y = mx + n$. El coeficiente de x, m, es la pendiente y se calcula como el cociente entre la variación de la variable y de los dos puntos y la variación de la variable x: $m = \frac{5-4}{4-2} = \frac{1}{2}$.

Así, la función es $y = \frac{1}{2}x + n$.

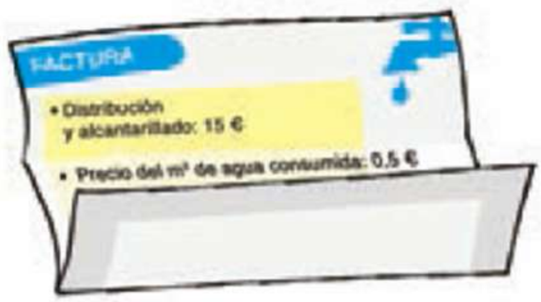
Para calcular *n,* se sustituye uno de los dos puntos en la expresión $y = \frac{1}{2}x + n$ y se despeja *n.* Si se sustituye el punto P (2 , 4), se tiene que:

$4 = \frac{1}{2} \cdot 2 + n \Rightarrow n = 3$

Por tanto, la función es $y = \frac{1}{2}x + 3$.

SOLUCIONES PÁG. 184

21. La factura mensual de agua de una casa es la siguiente:



a. Elabora una tabla de valores que relacione el número de metros cúbicos consumidos de agua y el precio total de la factura.

x = metros de agua, y = precio total

x	2	4	6	8	10	12
y	16	17	18	19	20	21

b. Escribe la expresión algebraica.

La expresión es de la forma $y = mx + n$. El coeficiente de *x, m,* es la pendiente y se calcula como el cociente entre la variación de la variable *y* de dos puntos y la variación de la variable *x.* Si se sustituyen los dos primeros puntos: $m = \frac{17-16}{4-2} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Así, la función es $y = 0,5x + n$.

Para calcular *n,* se sustituye uno de los dos puntos en la expresión $y = 0,5x + n$ y se despeja *n.* Si se sustituye el punto P (2 , 16), se tiene que:

$16 = 0,5 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 15$

Por tanto, la función es $y = 0,5x + 15$.

c. Si este mes el consumo de agua es de 80 m^3, ¿cuál es el precio de la factura?

Se sustituye el valor de *x* en la función:

$y = 0,5 \cdot 80 + 15 \Rightarrow y = 40 + 15 \Rightarrow y = 55$

El precio de la factura es de 55 €.

d. Si el mes pasado se pagó 65 €, ¿cuántos metros cúbicos se consumieron?

Se sustituye el valor de *y* en la función:

$$65 = 0{,}5x + 15 \Rightarrow 65 - 15 = 0{,}5x \Rightarrow 50 = 0{,}5x \Rightarrow x = \frac{50}{0{,}5} = 100$$

Se consumieron 100 m^3.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

22. Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones cuadráticas:

a. $y = 2x^2 - 2$

- Punto de corte con el eje *Y:*
  $x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0^2 - 2 = -2$
  Luego el punto de corte es (0 , –2).
- Puntos de corte con el eje *X:*

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{0 \pm 4}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{4} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

Luego los puntos de corte son (–1 , 0) y (1 , 0).

b. $y = x^2 - 3x + 2$

- Punto de corte con el eje *Y:*
  $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$
  Luego el punto de corte es (0 , 2).
- Puntos de corte con el eje *X:*

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Luego los puntos de corte son (1 , 0) y (2 , 0).

c. $y = 4x^2$

- Punto de corte con el eje *Y:*
  $x = 0 \Rightarrow y = 4 \cdot 0^2 = 0$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).

- Puntos de corte con el eje *X:*

$$y = 0 \Rightarrow\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Luego el punto de corte es (0 , 0).

d. $\boldsymbol{y = x^2 - 5x + 6}$

- Punto de corte con el eje *Y:*

$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$

Luego el punto de corte es (0 , 6).

- Puntos de corte con el eje *X:*

$y = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Luego los puntos de corte son (2 , 0) y (3 , 0).

e. $\boldsymbol{y = x^2 - 9}$

- Punto de corte con el eje *Y:*

$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 9 = -9$

Luego el punto de corte es (0 , –9).

- Puntos de corte con el eje *X:*

$$y = 0 \Rightarrow\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{0 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{0+6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{0-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Luego los puntos de corte son (–3 , 0) y (3 , 0).

f. $\boldsymbol{y = x^2 - 4x}$

- Punto de corte con el eje *Y:*

$x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$

Luego el punto de corte es (0 , 0).

- Puntos de corte con el eje *X:*

$y = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{4 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+4}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{4-4}{2} = 0 \end{cases}$$

Luego los puntos de corte son (0 , 0) y (4 , 0).

23. Halla el vértice de estas funciones cuadráticas:

a. $y = 6x^2$

La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{0}{2 \cdot 6} = 0$$

Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

$y_v = 6x^2 \Rightarrow y_v = 6 \cdot 0^2 = 0$

Por tanto, el vértice es V (0 , 0).

b. $y = 3x^2 - 1$

La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{0}{2 \cdot 3} = 0$$

Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

$y_v = 3x^2 - 1 \Rightarrow y_v = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1$

Por tanto, el vértice es V (0 , –1).

c. $y = x^2 + 4x + 3$

La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-4}{2 \cdot 1} = -2$$

Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

$y_v = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow y_v = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 \Rightarrow y_v = 4 - 8 + 3 = -1$

Por tanto, el vértice es V (–2 , –1).

d. $y = 3x^2 - 6x - 5$

La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-6)}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$$

Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

$y_v = 3x^2 - 6x - 5 \Rightarrow y_v = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 5 \Rightarrow y_v = 3 - 6 - 5 = -8$

Por tanto, el vértice es V (1 , –8).

e. $y = x^2 - 8x$

La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-8)}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

$y_v = x^2 - 8x \Rightarrow y_v = 4^2 - 8 \cdot 4 \Rightarrow y_v = 16 - 32 = -16$

Por tanto, el vértice es V (4 , –16).

f. $\boldsymbol{y = x^2 - x - 2}$

La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-(-1)}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

$$y_v = x^2 - x - 2 \Rightarrow y_v = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow y_v = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow y_v = \frac{1-2-8}{4} = \frac{-9}{4}$$

Por tanto, el vértice es V $\left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$.

24. Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas:

a. $\boldsymbol{y = -3x^2}$

Como a < 0, las ramas de la parábola apuntan hacia abajo.

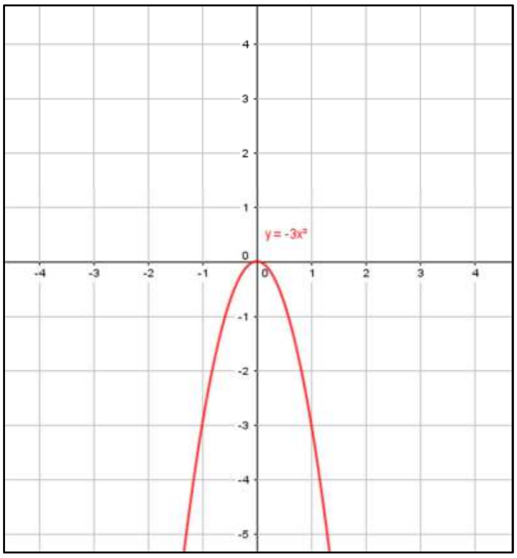
Se calculan los puntos de corte con los ejes:

- Punto de corte con el eje *Y:*
  $x = 0 \Rightarrow y = -3 \cdot 0^2 = 0$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).
- Puntos de corte con el eje *X:*
  $$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0}}{2 \cdot (-3)} = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{-6} = \frac{0}{-6} = 0$$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).

Se calcula el vértice:

- La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:
  $$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{0}{2 \cdot (-3)} = \frac{0}{-6} = 0$$
- Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:
  $y_v = -3x^2 \Rightarrow y_v = -3 \cdot 0^2 \Rightarrow y_v = 0$

Por tanto, el vértice es V (0 , 0).



b. $\boldsymbol{y = 5x^2}$

Como a > 0, las ramas de la parábola apuntan hacia arriba.

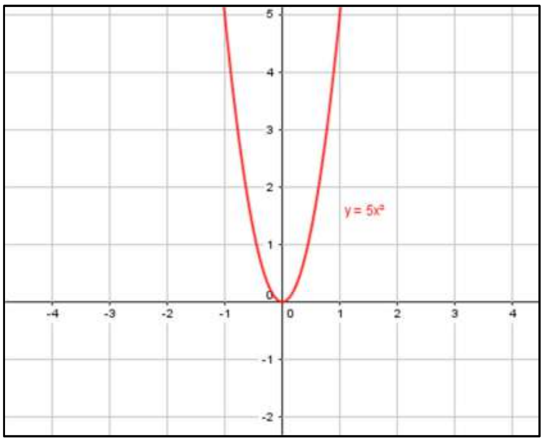
Se calculan los puntos de corte con los ejes:

- Punto de corte con el eje *Y:*
  $x = 0 \Rightarrow y = 5 \cdot 0^2 = 0$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).
- Puntos de corte con el eje *X:*
  $$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 5 \cdot 0}}{2 \cdot 5} = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{10} = \frac{0}{10} = 0$$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).

Se calcula el vértice:

- La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:
  $$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{0}{2 \cdot 5} = \frac{0}{10} = 0$$
- Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:
  $y_v = 5x^2 \Rightarrow y_v = 5 \cdot 0^2 \Rightarrow y_v = 0$

Por tanto, el vértice es V (0 , 0).



c. $\boldsymbol{y = 0{,}1x^2}$

Como a > 0, las ramas de la parábola apuntan hacia arriba.

Se calculan los puntos de corte con los ejes:

- Punto de corte con el eje *Y:*
  $x = 0 \Rightarrow y = 0{,}1 \cdot 0^2 = 0$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).
- Puntos de corte con el eje *X:*
  $$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0}}{2 \cdot 0{,}1} = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{0{,}2} = \frac{0}{0{,}2} = 0$$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).

Se calcula el vértice:

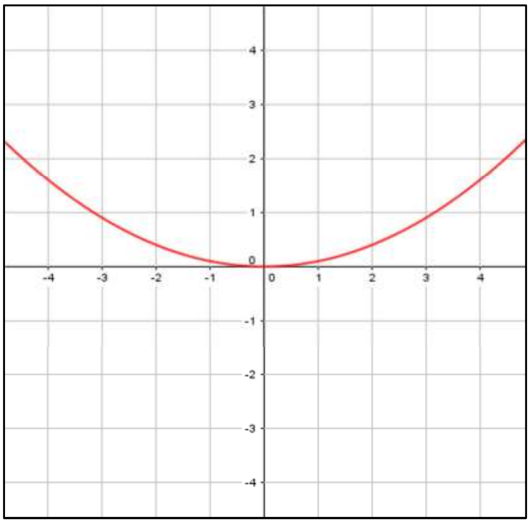
- La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

  $x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{0}{2 \cdot 0{,}1} = \frac{0}{0{,}2} = 0$

- Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

  $y_v = 0{,}1x^2 \Rightarrow y_v = 0{,}1 \cdot 0^2 \Rightarrow y_v = 0$

Por tanto, el vértice es V (0 , 0).



d. $y = \frac{5}{2}x^2$

Como a > 0, las ramas de la parábola apuntan hacia arriba.
Se calculan los puntos de corte con los ejes:

- Punto de corte con el eje *Y:*

  $x = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \cdot 0^2 = 0$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).

- Puntos de corte con el eje *X:*

  $y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot 0}}{2 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{5} = \frac{0}{5} = 0$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).

Se calcula el vértice:

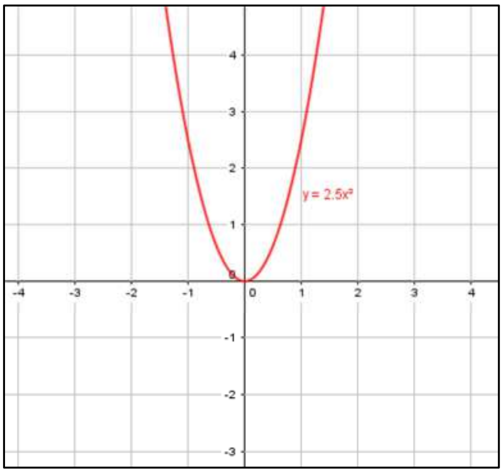
- La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

  $x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{0}{2 \cdot \frac{5}{2}} = \frac{0}{5} = 0$

- Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

  $y_v = 5x^2 \Rightarrow y_v = \frac{5}{2} \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow y_v = 0$

Por tanto, el vértice es V (0 , 0).



e. $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$

Como a > 0, las ramas de la parábola apuntan hacia arriba.

Se calculan los puntos de corte con los ejes:

- Punto de corte con el eje *Y:*

  $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 1 = 1$

  Luego el punto de corte es (0 , 1).

- Puntos de corte con el eje *X:*

  $$y = 0 \Rightarrow \ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

  Luego no tiene punto de corte con el eje *X*.

Se calcula el vértice:

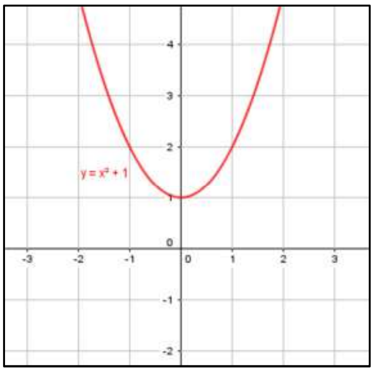
- La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

  $$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{0}{2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

- Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

  $y_v = x^2 + 1 \Rightarrow \ y_v = 0^2 + 1 = 1 \Rightarrow y_v = 1$

Por tanto, el vértice es V (0 , 1).



f. $\boldsymbol{y = x^2 - 2x}$

Como a > 0, las ramas de la parábola apuntan hacia arriba.

Se calculan los puntos de corte con los ejes:

- Punto de corte con el eje *Y:*

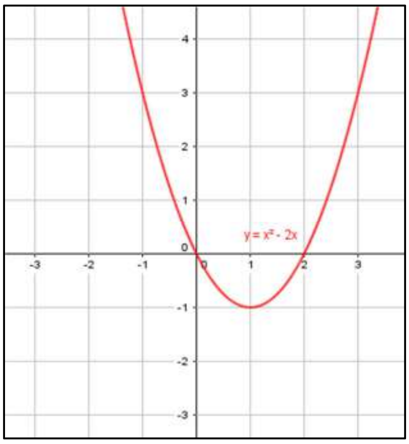
  $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).

- Puntos de corte con el eje *X:*
  $y = 0 \Rightarrow$
  $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot0}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{4-0}}{2}=\frac{2\pm2}{2}\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2+2}{2}=2\\ x_2=\dfrac{2-2}{2}=0\end{cases}$$
  Luego los puntos de corte con el eje son (0 , 0) y (2 , 0).

Se calcula el vértice:
- La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:
  $$x_v=\frac{-b}{2a}\Rightarrow x_v=\frac{-(-2)}{2\cdot1}=\frac{2}{2}=1$$
- Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:
  $y_v = x^2 - 2x \Rightarrow y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 \Rightarrow y_v = -1$

Por tanto, el vértice es V (1 , –1).



25. Ordena de mayor a menor las funciones $y = 3x^2$, $y = 2x^2$, $y = -x^2 + 2$ e $y = -4x^2 - 5$, según la abertura de sus ramas.

Cuanto mayor es el coeficiente *a* en valor absoluto, menor es la abertura. Por tanto, el orden es: $y = -x^2 + 2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = -4x^2 - 5$

26. Halla el valor de *m* para que la función $y = x^2 + mx - 1$ pase por el punto (–1 , 1).

Se sustituye el punto en la función y se despeja *m*.

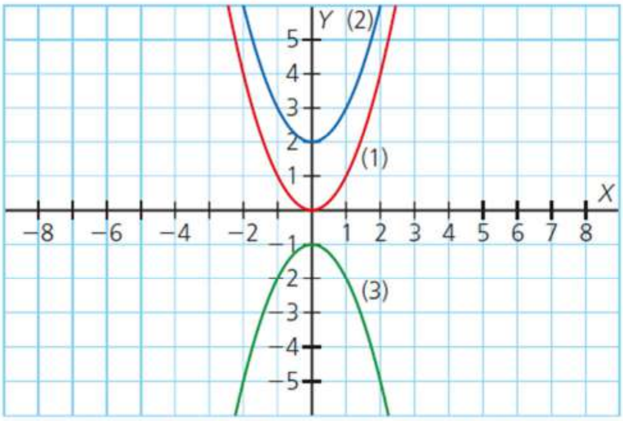
$1 = (-1)^2 + m \cdot (-1) - 1 \Rightarrow 1 = 1 - m - 1 \Rightarrow m = -1$

27. ¿Existe algún valor entero de *a* para el que la función $y = ax^2 + ax + a$ pase por el punto P (3 , 2)?

Se sustituye el punto en la función.

$$2 = a \cdot 3^2 + a \cdot 3 + a \Rightarrow 2 = 9a + 3a + a \Rightarrow 2 = 13a \Rightarrow a=\frac{2}{13}$$

28. Asocia las siguientes funciones con su correspondiente gráfica:



a. $\boldsymbol{y = x^2 + 2}$ → El valor de a > 0, por tanto las ramas de parábola apuntan hacia arriba. Como b = 0, su vértice está sobre el eje de ordenadas. Es la función (2).

b. $\boldsymbol{y = -x^2 - 1}$ → El valor de a < 0, por tanto, las ramas de la parábola apuntan hacia abajo. Es la función (3).

c. $\boldsymbol{y = x^2}$ → El valor de a > 0, por tanto las ramas de parábola apuntan hacia arriba. Es la función (1).

29. Determina los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas:

a. $\boldsymbol{y = 4x^2}$

- Punto de corte con el eje *Y:*
  $x = 0 \Rightarrow y = 4 \cdot 0^2 = 0$
  Luego el punto de corte es (0 , 0).
- Puntos de corte con el eje *X:*

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0}}{2 \cdot 4} = \frac{0 \pm \sqrt{0}}{8} = 0$$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).

b. $\boldsymbol{y = x^2 - 1}$

- Punto de corte con el eje *Y:*
  $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 - 1 = -1$
  Luego el punto de corte es (0 , –1).
- Puntos de corte con el eje *X:*

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{0 \pm 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{0 + 2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{0 - 2}{2} = -1 \end{cases}$$

  Luego los puntos de corte son (–1 , 0) y (1 , 0).

c. $\boldsymbol{y = x^2 + 5x}$

- Punto de corte con el eje *Y:*

  $x = 0 \Rightarrow y = 0^2 + 5 \cdot 0 = 0$

  Luego el punto de corte es (0 , 0).

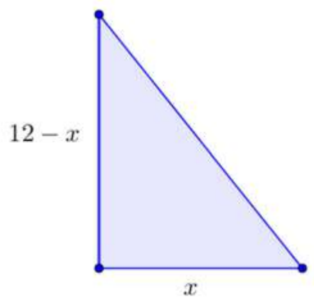
- Puntos de corte con el eje *X:*

  $$y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-5 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

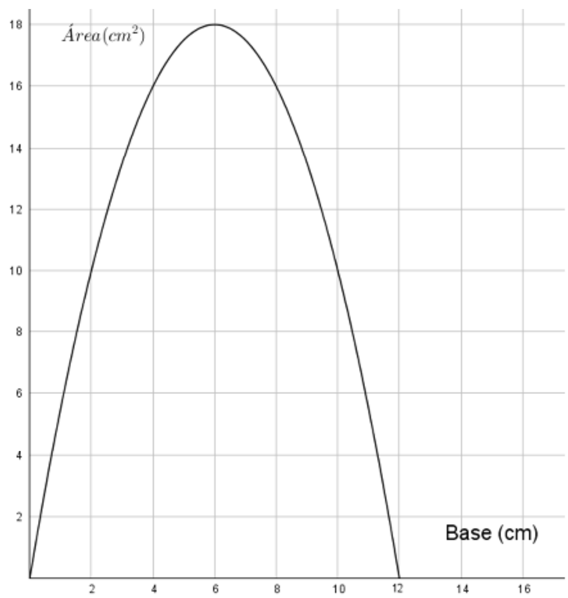
  $$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+5}{2} = 0 \\ x_2 = \dfrac{-5-5}{2} = -5 \end{cases}$$

  Luego los puntos de corte son (–5 , 0) y (0 , 0).

30. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 12 cm. Halla la expresión que relaciona el área del triángulo y uno de sus catetos y represéntala.



$$y = \frac{x \cdot (12 - x)}{2} = \frac{12x - x^2}{2}$$



31. Se quiere dibujar todos los rectángulos cuya base y cuya altura sumen 8 cm.

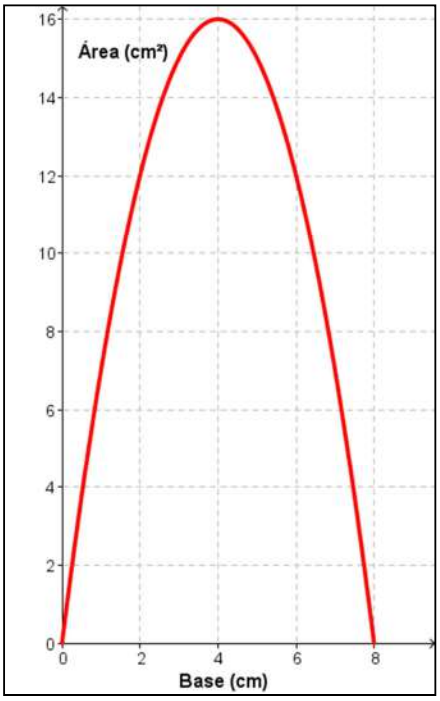
a. ¿Tienen todos los rectángulos la misma área?

No. Por ejemplo, se tienen varios rectángulos:

- Base: 1 cm, altura: 7 cm.
  $A = b \cdot h \Rightarrow A = 1 \cdot 7 = 7 \Rightarrow A = 7 \text{ cm}^2$
- Base: 2 cm, altura: 6 cm.
  $A = b \cdot h \Rightarrow A = 2 \cdot 6 = 12 \Rightarrow A = 12 \text{ cm}^2$

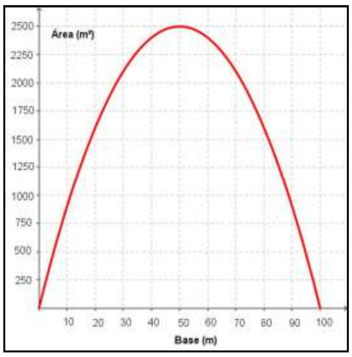
b. Encuentra la expresión algebraica de la función que relaciona la base del rectángulo y el área y representa dicha función.

$y = x \cdot (8 - x) = -x^2 + 8x$



32. Andrés tiene 200 m de valla para cercar un terreno rectangular donde quiere plantar trigo. ¿Cuáles han de ser las dimensiones del terreno para que el área cultivable sea máxima?

Para que pueda cercar el terreno, la base debe medir x y el ancho $(100 - x)$. Así, el área es: $y = x \cdot (100 - x) = -x^2 + 100x$



El área máxima se consigue en el vértice de la función representada. Por tanto, el vértice es:

- La abscisa *x,* se calcula mediante la expresión:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-100}{2\cdot(-1)} = \frac{-100}{-2} = 50$$

- Para hallar la coordenada *y*, se sustituye el valor obtenido en la función:

$$y_v = -x^2 + 100x \Rightarrow y_v = -50^2 + 100 \cdot 50 \Rightarrow y_v = -2\,500 + 5\,000 \Rightarrow 2\,500$$

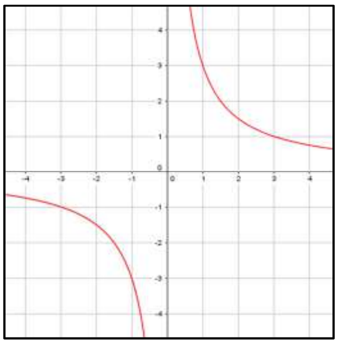
Por tanto, el vértice es V (50 , 2 500).
Las dimensiones son $b = 50$ m, $h = 50$ m.

FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

33. Indica cuál es la constante de proporcionalidad inversa de estas funciones y en qué cuadrantes se sitúan. Represéntalas.

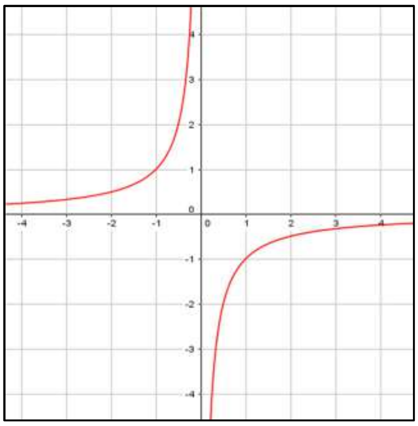
a. $y = \frac{3}{x}$

k = 3. Se sitúa en el primer y tercer cuadrante.



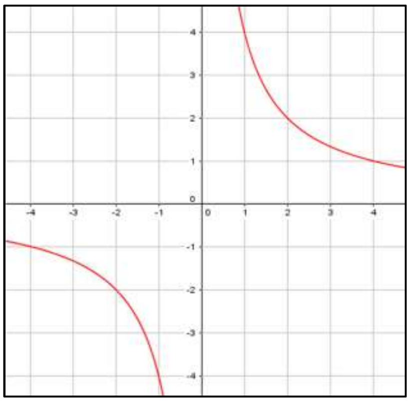
b. $y = \frac{-1}{x}$

k = –1. Se sitúa en el segundo y cuarto cuadrante.



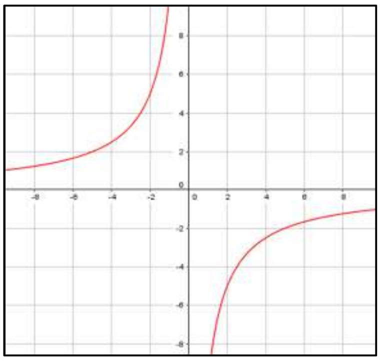
c. $y = \frac{4}{x}$

k = 4. Se sitúa en el primer y tercer cuadrante.



d. $y = \frac{-10}{x}$

k = –10. Se sitúa en el segundo y cuarto cuadrante.

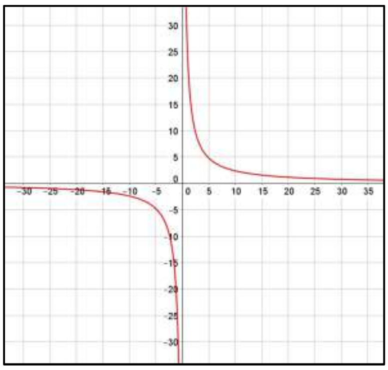


34. Dada la función $y = \frac{24}{x}$**:**

a. Elabora una tabla de valores.

x	–24	–12	–6	–4	1	2	8	24
y	–1	–2	–4	–6	24	12	3	1

b. Represéntala. ¿Es creciente o decreciente?



Es decreciente.

SOLUCIONES PÁG. 185

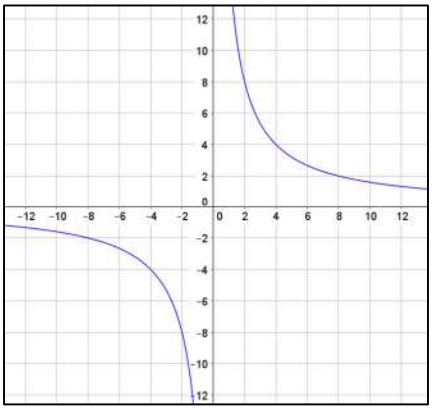
35. El producto de dos números es 16.

a. Expresa la función que relaciona estos dos números.

El producto de dos números es la constante de proporcionalidad inversa:

$x \cdot y = 16 \Rightarrow y = \dfrac{16}{x}$

b. Representa la gráfica de la función.



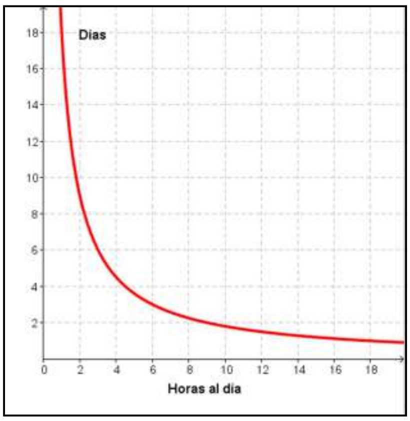
36. Trabajando 6 h al día, un obrero tarda 3 días en acabar un encargo.

a. Construye una tabla de valores que relacione el número de horas trabajas al día y el número de días necesario para realizar el encargo.

x = número de horas trabajadas al día
y = días trabajados para acabar el trabajo

x	1	2	3	6	9	18
y	18	9	6	3	2	1

b. Representa los puntos de la tabla de valores. ¿Es una función de proporcionalidad inversa?



Sí es una función de proporcionalidad inversa.

APLICACIONES

37. A un vendedor de seguros le ofrecen dos tipos de contrato. Con el primero cobraría 1 000 € fijos mensuales, más 50 € por cada seguro que venda. El segundo contrato establece un fijo de 200 €, más 100 € por cada seguro contratado. El vendedor está convencido de que será capaz de hacer 25 seguros al mes. ¿Cuál de los dos tipos de contrato debería firmar?

Primer tipo de contrato: $y = 50x + 1\ 000$
Segundo tipo de contrato: $y = 100x + 200$

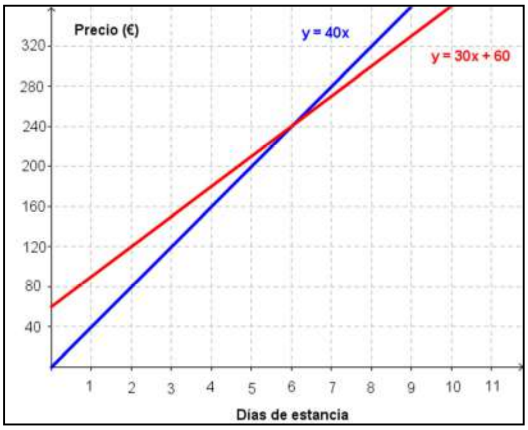
Si vende 25 seguros al mes, la cantidad a percibir sería:
Primer contrato: $y = 50 \cdot 25 + 1\ 000 = 2\ 250$
Segundo contrato: $y = 100 \cdot 25 + 200 = 2\ 700$
Si acepta el primer tipo de contrato, cobraría 2 250 € y si acepta el segundo, 2 700 €, luego debería aceptar el segundo tipo de contrato.

38. Para preparar sus vacaciones, Samuel ha preguntado las tarifas de dos *campings.* En uno de ellos, le cobran 60 € de fianza y 30 € por día de estancia. En el otro *camping* tiene que abonar 40 € diarios.

a. Escribe la expresión de las funciones que relacionan el número de días y el precio total.

Primer camping: $y = 30x + 60$
Segundo camping: $y = 40x$

b. Representa las funciones.



c. ¿Cuántos días tendría que estar Samuel de vacaciones para que el precio fuese el mismo en los dos *campings*?

Para que el precio fuese el mismo el valor de las dos funciones debe ser el mismo. Por tanto, se igualan las funciones y se resuelve la ecuación:

$$30x + 60 = 40x \Rightarrow 60 = 10x \Rightarrow x = \frac{60}{10} = 6$$

Tendría que estar 6 días.

d. Si va a estar solo una semana, ¿cuál de los dos *campings* le resulta más rentable?

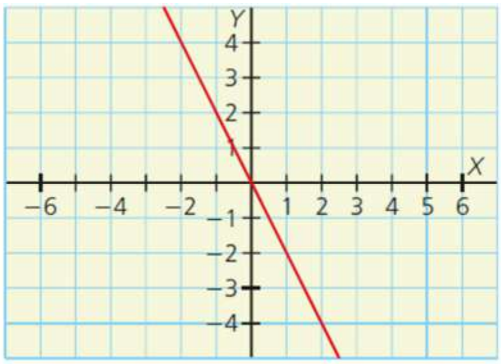
Se sustituye el valor en ambas funciones:
Primer camping: $y = 30x + 60 \Rightarrow y = 30 \cdot 7 + 60 = 270$
Segundo camping: $y = 40x \Rightarrow y = 40 \cdot 7 = 280$

En el primer camping pararía 270 € y en el segundo 280 €. Por tanto, le resultaría más rentable el primero.

EVALUACIÓN

1. La expresión algebraica de la recta de esta gráfica es:

a. $y = x$ **b. $y = 2x$** c. $y = -2x$ **d. $y = -3x$**



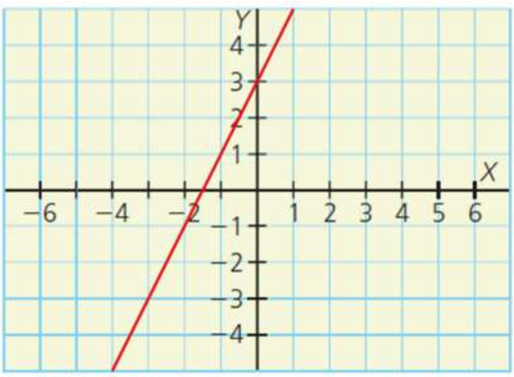
Se toma un punto de la recta, (1 , –2). La pendiente es: $m = \frac{-2}{1} = -2$

2. ¿Cuál de las siguientes funciones es afín?

a. $y = 4$ **b. $y = 5x$** **c. $y = x^2$** d. $y = 5x + 1$

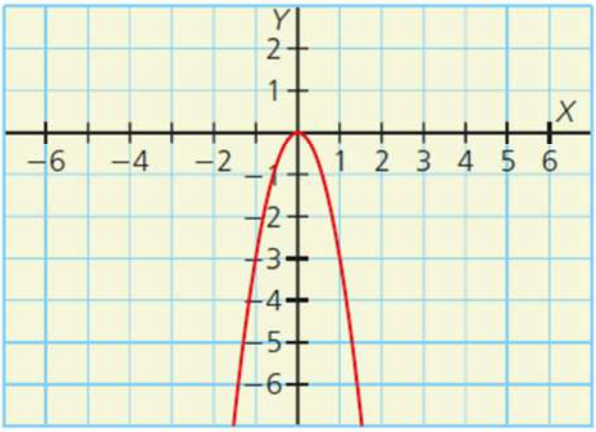
Una función es afín cuando la variable independiente tiene grado 1 y además m ≠ 0 y n ≠ 0

3. Indica cuál de las siguientes afirmaciones sobre la función representada es cierta:



a. Es lineal.
b. Su pendiente es 3.
c. Su ordenada en el origen es 3.
d. Pasa por el punto (1 , 2).

4. La expresión de la parábola representada en esta gráfica es:



a. $\boldsymbol{y = 3x^2}$ **b.** $\boldsymbol{y = -2x^2}$ c. $y = -3x^2$ **d.** $\boldsymbol{y = x^2}$

La parábola tiene las ramas apuntando hacia abajo, luego a < 0. Se eligen dos puntos de la parábola, (1 , –3) y (–1 , –3) y ambos puntos cumplen la función c.

5. ¿Cuál de las siguientes hipérbolas está en el primer y el tercer cuadrante?

a. $y = \dfrac{4}{x}$ **b.** $\boldsymbol{y = \dfrac{-1}{x}}$ **c.** $\boldsymbol{y = \dfrac{-7}{x}}$ **d.** $\boldsymbol{y = \dfrac{-9}{x}}$

Para que esté en el primer y tercer cuadrante, la constante de proporcionalidad, k, debe ser positiva.

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 10. Estadística

Unidad 10. Estadística

SOLUCIONES PÁG. 189

1. **Escribe tres ejemplos de población sobre los que realizar un estudio estadístico.**

   Respuesta abierta. Por ejemplo:
   - Abonados a un complejo deportivo.
   - Asistentes a un concierto.
   - Bombillas de una fábrica.

2. **De estas variables estadísticas, indica cuáles son cualitativas y cuáles cuantitativas:**

   a. La frecuencia de paso de un autobús. → Cuantitativa, porque los valores de la variable expresan una cantidad numérica.
   b. Los bolos que tiras en cada intento. → Cuantitativa, porque los valores de la variable expresan una cantidad numérica.
   c. La optativa que cursas en 2.º de ESO. →Cualitativa, porque los valores de la variable expresan una cualidad.
   d. Tu deporte preferido. → Cualitativa, porque los valores de la variable expresan una cualidad.
   e. La nota que obtuviste en Matemáticas el curso pasado. → Cuantitativa, porque los valores de la variable expresan una cantidad numérica.

3. **Indica tres variables cualitativas y tres cuantitativas sobre las que realizar un estudio estadístico.**

   Respuesta abierta. Por ejemplo:

   - Variables cualitativas: color preferido, deportista preferido y alimento que más se consume.
   - Variables cuantitativas: año de nacimiento, número de horas de lectura y número de faltas de ortografía.

4. **Se quiere conocer la intención de voto a las elecciones al consejo escolar de los estudiantes de un centro que cuenta con 2 000 alumnos.**

   a. ¿Cuál sería la población y su tamaño?
   La población son todos los alumnos del centro y su tamaño es 2 000.
   b. ¿Resultaría conveniente hacer el estudio sobre una muestra? ¿Por qué? ¿Cómo harías la muestra?
   Es conveniente hacer una muestra, por el gran tamaño de la población. La muestra se puede hacer aleatoriamente escogiendo 30 alumnos al azar de la lista ordenada alfabéticamente de los alumnos del centro.

5. **Explica las ventajas y desventajas de trabajar con muestras en lugar de hacerlo con toda la población.**

La ventaja es que al trabajar con un número muy inferior de individuos, todo el proceso del estudio estadístico se simplifica bastante.
La desventaja es que los resultados pueden no ser representativos de la población si la muestra no está muy bien seleccionada.

6. **Indica cuáles de estas afirmaciones son ciertas y corrige las erróneas:**

a. **El tamaño de una muestra es siempre menor que el de la población correspondiente.** → Cierto.
b. **Una muestra se utiliza cuando la población del estudio es muy grande.** → Cierto.
c. **Cualquier muestra es representativa de su población.** → Falso, debe tomarse al azar.
d. **Las variables cuantitativas continuas pueden tomar valores intermedios entre dos valores consecutivos.** → Cierto.

7. **Junto a un grupo de compañeros, elige una variable estadística, como la edad o la masa corporal. Considerando la población de los alumnos de tu centro, elige una muestra y realiza una encuesta registrando los datos referentes a la variable estadística elegida.**

Respuesta abierta.

8. **Busca información acerca de la importancia de la estadística en la vida y analiza la información que ofrece la web del Instituto Nacional de Estadística (INE), observando los términos estadísticos utilizados.**

Respuesta abierta.

9. **En un municipio de 5 000 habitantes hay escuelas deportivas de karate, baloncesto y tenis. Se quiere abrir una nueva escuela y se va a realizar un estudio sobre las preferencias en cuestión de deporte.**

a. **¿Cuál es la variable estadística? ¿Cuál es la población?**
La variable estadística es la preferencia del nuevo deporte. La población es los 5 000 habitantes.
b. **¿Harías el estudio sobre la población o sobre una muestra?**
Es conveniente hacerlo sobre una muestra.
c. **¿Qué preguntas realizarías para obtener la información necesaria?**
Respuesta abierta. Por ejemplo:
¿Qué deporte te gustaría practicar? De entre estos deportes, ¿cuál elegirías?

10. **Indica de qué tipo es la variable estadística y cuál es la población en cada apartado.**

    a. **El número de aprobados en una asignatura entre los alumnos de la clase.**
    Variable cuantitativa discreta, porque los valores de la variable expresan una cantidad numérica formada por valores aislados. La población es los alumnos de la clase.

    b. **Los puntos que ha obtenido cada equipo en una jornada de la liga de baloncesto.**
    Variable cuantitativa discreta, porque los valores de la variable expresan una cantidad numérica formada por valores aislados. La población es los equipos de la liga de baloncesto.

    c. **El color de los coches de las escuderías de Fórmula 1.**
    Cualitativa, porque la variable toma valores que son modalidades. La población es los coches que disputan el campeonato de F1.

    d. **El nombre de los profesores que nos dan clase.**
    Cualitativa, porque la variable toma valores que son modalidades. La población es los profesores que imparten materias en la clase.

    e. **El tiempo que estacionan los coches en un parking.**
    Cuantitativa continua, porque los valores de la variable expresan una cantidad numérica formada por valores. Los datos pueden ser muchos valores diferentes, pero próximos entre sí, ya que entre dos valores cualesquiera se pueden encontrar otros intermedios. La población es los coches que aparcan en el parking.

11. **Un fabricante de bombillas debe realizar un estudio de la durabilidad del producto. Para ello, de cada 1 500 unidades se eligen 3 al azar y se comprueba que sobrepasan el tiempo mínimo establecido de duración. Si disponen de 90 000 bombillas:**

    a. **¿Cuál es la población? ¿Y su tamaño?**
    La población es las bombillas fabricadas. El tamaño es 90 000.

    b. **¿Cuál es la muestra? ¿Y su tamaño?**
    La muestra es las bombillas escogidas para el análisis. El tamaño es 180.

    c. **¿Cuál es la variable estadística? ¿De qué tipo es?**
    La variable estadística es la durabilidad de las bombillas. Es de tipo cuantitativo continua, si mido el tiempo de durabilidad; o cualitativa, si compruebo si superan el tiempo mínimo de duración o no.

12. **El informe PISA (Programa Internacional para la Evaluación de los Alumnos) analiza el rendimiento de los estudiantes. Para ello, se realizan unas pruebas estandarizadas a estudiantes de 15 años de todo el mundo. En el año 2012 se examinó a 510 000 alumnos de todos los países. Indica cuál es la variable estadística de este estudio, la población y la muestra tomada.**

    La variable estadística es el rendimiento de los alumnos. La población es los estudiantes de 15 años de todo el mundo. La muestra tomada son los 510 000 alumnos a los que se les aplica la prueba.

13. En un congreso internacional de jóvenes investigadores se realiza un estudio para conocer la edad media de los investigadores y el porcentaje de ellos que se dedican al trabajo sobre genética. Para recabar los datos, se les pasa una encuesta a los congresistas europeos. Indica cuáles son las variables estadísticas de este estudio, la población y la muestra tomada.

Las variables estadísticas son la edad media de los investigadores y el porcentaje que se dedican al trabajo sobre genética. La población está formada por los investigadores del congreso. La muestra tomada son los congresistas europeos.

SOLUCIONES PÁG. 191

14. En un control de velocidad de vehículos realizado en una zona limitada a 70 km/h, se han tomado los siguientes registros:

62 78 59 74 82 65 71 77 63 74 80 72 69 55 78 69 81 70 85
67 58 76 62 75 56 68 57 74 83 75 72 73 81 74 80 66

Realiza un recuento de los datos y elabora una tabla de frecuencias.

x_i	c_i	n_i	N_i	f_i	p_i
[55 , 60)	57,5	5	5	0,14	14 %
[60 , 65)	62,5	3	8	0,08	8 %
[65 , 70)	67,5	6	14	0,17	17 %
[70 , 75)	72,5	9	23	0,25	25 %
[75 , 80)	77,5	6	29	0,17	17 %
[80 , 85]	82,5	7	36	0,19	19 %
Total		N = 36		1	100 %

15. Completa en tu cuaderno esta tabla de frecuencias para obtener los resultados correctos:

x_i	n_i	N_i	f_i	p_i
0	(1)	(2)	**0,15** (3)	(4)
1	(5)	**7** (6)	(7)	(8)
2	**7** (9)	(10)	(11)	(12)
3	(13)	(14)	(15)	**5** (16)
4	(17)	**20** (18)	(19)	(20)

x_i	n_i	N_i	f_i	p_i
0	3 (1)	3 (2)	**0,15** (3)	15 (4)
1	4 (5)	**7** (6)	0,2 (7)	20 (8)
2	**7** (9)	14 (10)	0,35 (11)	35 (12)
3	1 (13)	15 (14)	0,05 (15)	**5** (16)
4	5 (17)	**20** (18)	0,25 (19)	25 (20)

$$(1) = (3)\cdot(18) \Rightarrow (1) = 0{,}15\cdot 20 = 3$$

$$(1) = (2) = 3$$

$$(4) = (3)\cdot 100 \Rightarrow (4) = 0{,}15\cdot 100 = 15$$

$$(5) = (6) - (2) \Rightarrow (5) = 7 - 3 = 4$$

$$(7) = \frac{(5)}{(18)} \Rightarrow (7) = \frac{4}{20} = 0{,}2$$

$$(8) = (7)\cdot 100 \Rightarrow (8) = 0{,}2\cdot 100 = 20$$

$(10) = (9) + (6) \Rightarrow (10) = 14$

$$(12) = (11) \cdot 100 \Rightarrow (12) = 0{,}35 \cdot 100 = 35$$

$$(11) = \frac{(9)}{(18)} \Rightarrow (11) = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

$$(15) = \frac{(16)}{100} \Rightarrow (15) = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

$(13) = (18) \cdot (15) \Rightarrow (13) = 20 \cdot 0{,}05 = 1$

$(14) = (10) + (13) \Rightarrow (14) = 14 + 1 = 15$

$(17) = (18) - (14) \Rightarrow (17) = 20 - 15 = 5$

$$(19) = \frac{(17)}{(18)} \Rightarrow (19) = \frac{5}{20} = 0{,}25$$

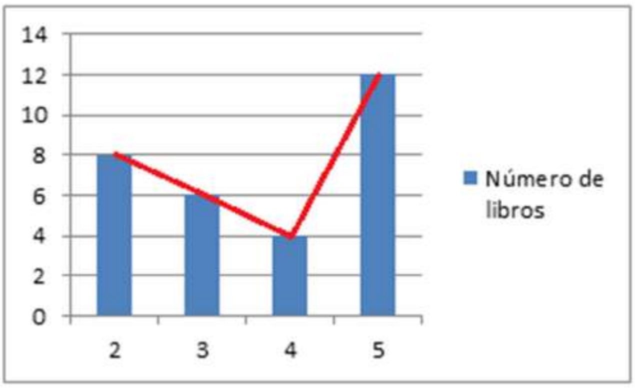
$(20) = (19) \cdot 100 \Rightarrow (20) = 0{,}25 \cdot 100 = 25$

SOLUCIONES PÁG. 193

16. Se ha preguntado a 30 alumnos por el número de libros que han leído este curso y las respuestas han sido:

5	**4**	**2**	**5**	**3**	**2**	**5**	**3**	**2**	**5**	**5**	**5**	**2**	**3**	**4**
5	**4**	**2**	**2**	**3**	**5**	**5**	**4**	**3**	**5**	**2**	**5**	**5**	**3**	**2**

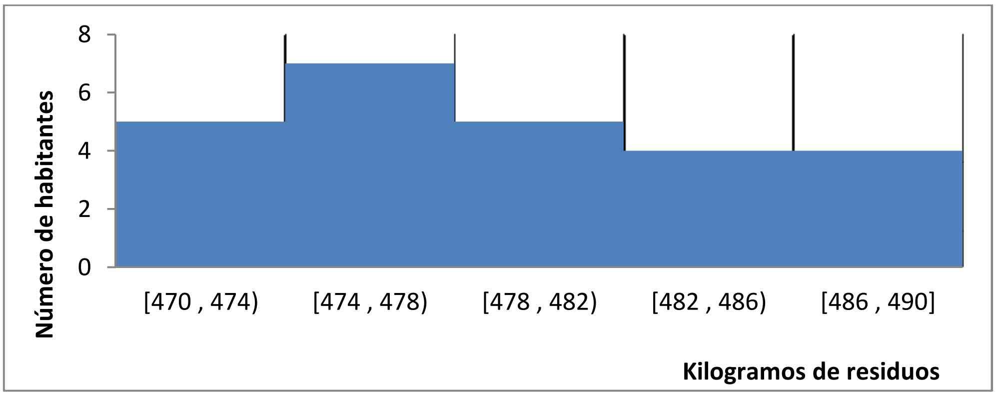
Representa los datos en un diagrama de barras y traza su polígono de frecuencias.



17. Se ha tomado una muestra de los habitantes de un municipio para realizar un estudio sobre los kilógramos de residuos recogidos al cabo del año:

484 476 481 477 476 488 472 471 486 480 478 470 472
477 475 478 483 484 474 479 475 486 472 490 483

Representa los datos en un histograma cuyo primer intervalo sea [470 , 474).

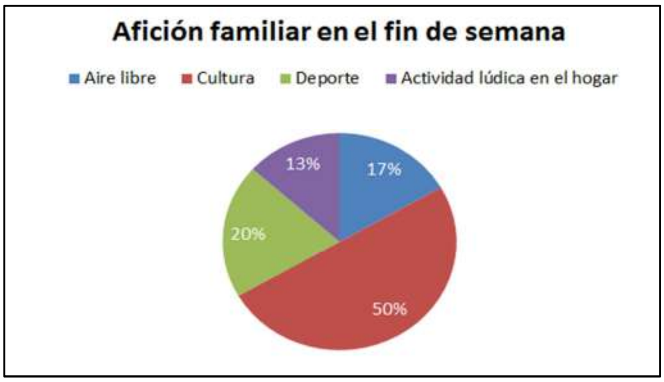


18. En 40 hogares se ha llevado a cabo una encuesta para conocer cuál es la afición familiar a la que dedican más tiempo durante el fin de semana:

Afición familiar, x_i	Aire libre	Cultura	Deporte	Actividad lúdica en el hogar
Frecuencia absoluta, n_i	5	15	6	4

Representa estos datos en un diagrama de sectores.
Se recogen los datos en una tabla de frecuencias para hallar la amplitud del sector:

Afición familiar	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Amplitud
Aire libre	5	0,17	0,17 · 360º = 61,2º
Cultura	15	0,50	0.50 · 360º = 180º
Deporte	6	0,20	0,20 · 360º = 72º
Actividad lúdica en el hogar	4	0,13	0,13 · 360º = 46º,8
Total	30	1	360º



19. Busca información sobre otras representaciones gráficas en estadística diferentes a las estudiadas en la unidad.

Respuesta abierta.

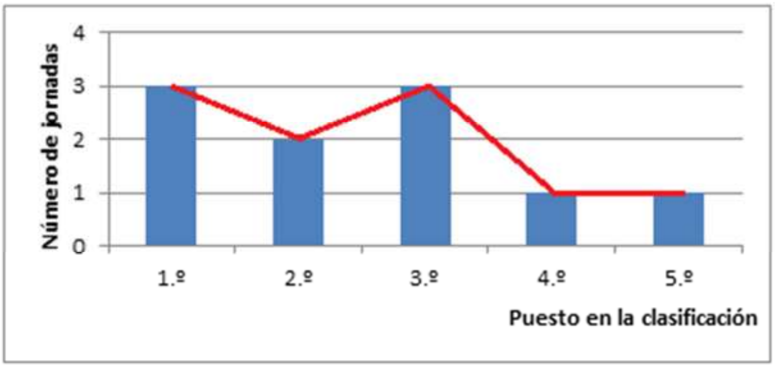
20. En la siguiente tabla se recoge el puesto en la clasificación que un equipo de baloncesto ha ocupado en las primeras diez jornadas del campeonato:

1.º	**3.º**	**2.º**	**5.º**	**3.º**	**4.º**	**2.º**	**1.º**	**1.º**	**3.º**

a. Realiza una tabla de frecuencias con estos datos.

Puesto	n_i	N_i	f_i	p_i
1.º	3	3	0,3	30
2.º	2	5	0,2	20
3.º	3	8	0,3	30
4.º	1	9	0,1	10
5.º	1	10	0,1	10

b. Representa gráficamente los datos mediante un polígono de frecuencias.

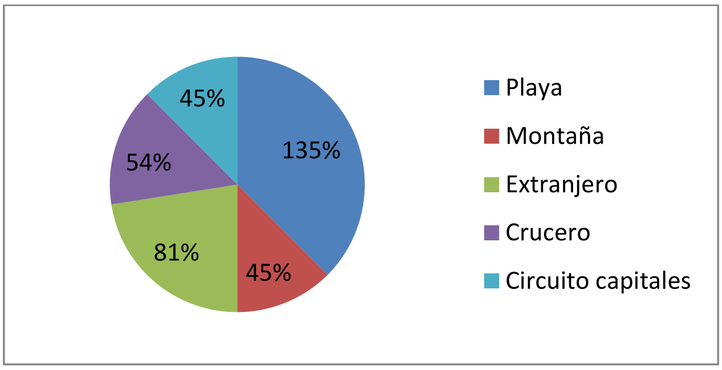


21. Tras encuestar a una serie de familias sobre su destino de vacaciones preferido en verano, se ha recogido la siguiente información:

Playa	**Montaña**	**Extranjero**	**Crucero**	**Circuito capitales**
15	**5**	**9**	**6**	**5**

Elabora una tabla de frecuencias y representa los datos mediante un diagrama de sectores.

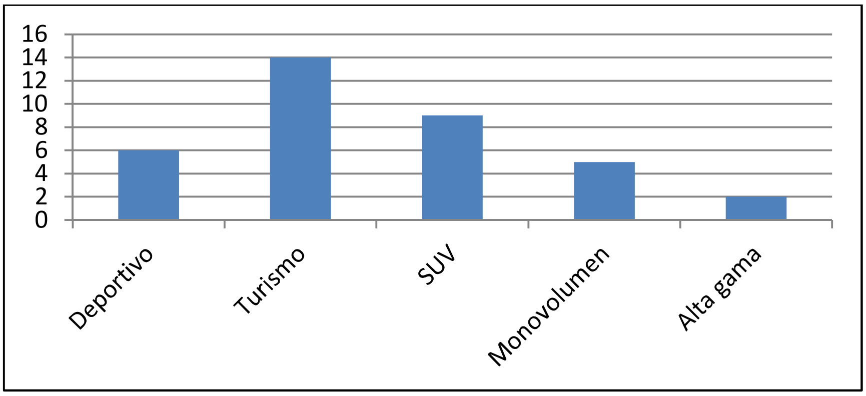
Destino	n_i	N_i	f_i	p_i	Amplitud
Playa	15	15	0,375	37,5	135º
Montaña	5	20	0,125	12,5	45º
Extranjero	9	29	0,225	22,5	81º
Crucero	6	35	0,150	15	54º
Circuito capitales	5	40	0,125	12,5	45º



22. Para finalizar el año y conseguir un aumento de las ventas, se ha lanzado una campaña de promoción en un concesionario de vehículos. El resultado ha sido las siguientes cifras de ventas:

Deportivo	Turismo	SUV	Monovolumen	Alta gama
6	14	9	5	2

Representa gráficamente los datos en un diagrama de barras.



SOLUCIONES PÁG. 195

23. Las puntuaciones que ha obtenido Eduardo en los ejercicios de clase de Inglés son:

7 5 8 6 9 7 7 8 6 7 5 8 9 7 6 8 9 6 7 6

Halla los parámetros estadísticos de centralización de los datos.
Se recogen en una tabla los datos.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	N_i
5	2	10	2
6	5	30	7
7	6	42	13
8	4	32	17
9	3	27	20
Total	20	141	

La moda es el valor de la variable que más se repite: $M_o = 7$
La media es el valor central alrededor del cual se sitúan los valores de la variable:

$$\overline{x} = \frac{141}{20} = 7{,}05$$

La mediana, es un valor central que verifica que, una vez ordenados los datos, está situado en la mitad. Como hay un número par de datos, la mediana es la media aritmética de los dos datos centrales: $M_e = \frac{7+7}{2} = 7$

24. Se ha realizado una encuesta para conocer los gustos sobre colores. Los resultados han sido:

Colores, x_i	**Azul**	**Rojo**	**Verde**	**Amarillo**	**Rosa**
Frecuencia absoluta, n_i	**9**	**14**	**10**	**6**	**11**

Halla los parámetros de centralización que sea posible de estos datos.
El único parámetro que puede obtenerse en variables cualitativas es la moda, cuyo valor es 14, pues es el valor de la variable que más veces se repite.

25. Actividad resuelta.

26. Se ha encuestado a 25 personas sobre la superficie de la vivienda en la que residen. Los resultados obtenidos, en metros cuadrados, son:

77 85 96 79 92 88 80 96 84 83 89 97 77 86 94 76 96 89 90 92 78 98 85 91 84

Calcula los parámetros de centralización de estos datos.
Se recogen en una tabla los datos.

x_i	c_i	n_i	$c_i \cdot n_i$	N_i
[75 , 80)	77,5	5	387,5	5
[80 , 85)	82,5	4	330	9
[85 , 90)	87,5	6	525	15
[90 , 95)	92,5	5	462,5	20
[95 , 100]	97,5	5	487,5	25
Total		25	2 192,5	

El intervalo modal es el [85 , 90], se repite 6 veces.
La media es $\overline{x} = \frac{2192{,}5}{25} = 87{,}7$
El número de datos es impar, por lo que la mediana es el dato central, 12,5. El intervalo mediano es [85 , 90) porque es el primero cuya frecuencia absoluta acumulada excede de 12,5.

27. Se han registrado las horas que emplean diariamente los hijos y los padres de varias familias en ver la televisión. Los resultados son los siguientes:

Padres: 0 1,5 1 1,5 1 2 0 0,5 1 1 1,5 2 0,5 1,5 0,5 1 2 1 1 1,5 2

Hijos: 0 2 1,5 2 1,5 2 1 0,5 1,5 1 2 2 0,5 1,5 2 1,5 1,5 2 2 2 0,5

a. ¿Quién dedica de media más tiempo a ver la televisión?

Se recogen los datos en una tabla.

Padres			
x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	N_i
0	2	0	2
0,5	3	1,5	5
1	7	7	12
1,5	5	7,5	17
2	4	8	21
Total	21	24	

Hijos			
x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	N_i
0	1	0	1
0,5	3	1,5	4
1	2	2	6
1,5	6	9	12
2	9	18	21
Total	21	30,5	

Se calcula la media para los padres y los hijos.

Para los padres: $\overline{x} = \dfrac{24}{21} = 1{,}15$

Para los hijos: $\overline{x} = \dfrac{30{,}5}{21} = 1{,}45$

Los hijos 1,45 horas de media frente a 1,14 de los padres.

b. Halla la mediana y la moda de ambas distribuciones.

Para hallar la mediana se tiene en cuenta que el número de datos es impar. Por lo tanto se toma el dato en la posición central, 11. La mediana de los padres es 1 h y la de los hijos 1,5 h.

La moda de los padres es 1 h y la de los hijos 2 h.

28. La media aritmética de una lista de seis números enteros positivos es 15. Indica cuál es el mayor número entero que podría aparecer en esa lista:

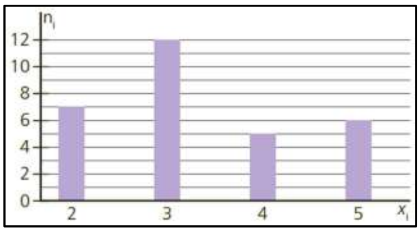
a. Si los números pueden repetirse.

El mayor número entero es el 85. Los menores números que pueden aparecer son 1, 1, 1, 1 y 1 que suman 5. Entre los seis números deben sumar 90, porque 15 · 6 = 90; por lo tanto, el sexto número es 85.

b. Si los números no pueden repetirse.

El mayor número entero es 75. Los menores números que pueden aparecer son 1, 2, 3, 4 y 5 que suman 15. Como entre los seis números deben sumar 90, el sexto número es 75.

29. Obtén la moda, la media aritmética y la mediana de los datos representados en el siguiente diagrama de barras:



Se recogen los datos en una tabla.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	N_i
2	7	14	7
3	12	36	19
4	5	20	24
5	6	30	30
Total	30	100	

La moda es el 3, se repite 12 veces.

La media es $\overline{x} = \dfrac{100}{30} = 3{,}3$.

El número de datos es par. Por lo tanto, la mediana es 3 porque es el primer valor cuya frecuencia absoluta acumulada excede de 15.

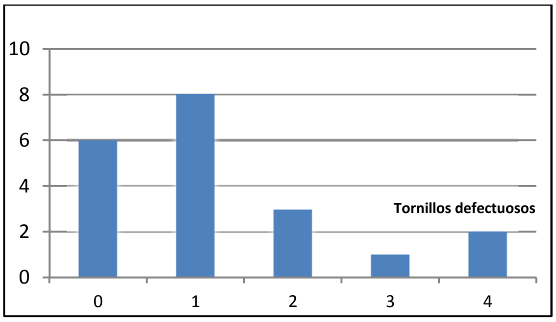
30. En un análisis de calidad se han revisado 20 cajas de tornillos y se ha detectado que algunas piezas estaban defectuosas. A continuación, se dan el número de tornillos defectuosos en cada una de las cajas revisadas:

0 0 1 0 1 0 2 2 3 4 1 1 0 1 1 2 1 4 0 1

a. Elabora una tabla de frecuencias.

Tornillos defectuosos, x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	N_i	f_i	p_i
0	6	0	6	0,30	30%
1	8	8	14	0,40	40%
2	3	6	17	0,15	15%
3	1	3	18	0,05	5%
4	2	8	20	0,10	10%
Total	20	25		1	100%

b. Representa los datos en un diagrama de barras.



c. Calcula la moda, la media y la mediana.

La moda es el valor con la frecuencia más alta, $M_o = 1$, cuya frecuencia es 8.

La media es $\overline{x}=\frac{25}{20}=1,25$

El número de datos es par, por lo que es la media aritmética de los dos datos centrales, 10 y 11. Por lo tanto, M_e = 1, ya que ambas posiciones están en la celda cuyo valor es 14, primer valor que excede a 10 y 11.

SOLUCIONES PÁG. 197

31. Halla el rango de los siguientes conjuntos de datos:

El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos.

a. 10 13 11 9 14 12 11 15 14 13
R = 15 – 9 = 6

b. 17 12 15 13 16 14 18 11 16
R = 18 – 11 = 7

32. La edad de tres grupos diferentes de personas son las siguientes:

A: 17 12 14 16 14 13 18 13 15 12
B: 22 27 30 25 29 23 26 28 22 23
C: 30 34 33 34 35 38 34 34 33 34

a. Halla el rango de cada uno de los grupos.
El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos.
R_A = 18 – 12 = 6; R_B = 30 – 22 = 8; R_C = 38 – 30 = 8

b. Indica en qué grupo están más concentrados los datos.
Están más concentrados en el grupo C, aunque el rango sea mayor que en el grupo A.

c. Analiza cómo afecta el rango a la hora de cuantificar el agrupamiento de los datos.
El rango solo depende de los valores extremos, por ello indica relativamente el nivel de agrupamiento de los datos. Los grupos B y C tienen el mismo rango, pero los datos están mucho más agrupados en el C.

33. Halla la varianza del siguiente conjunto de datos:

6 4 9 10 8 9 7 11

Se calcula la media.

$$\overline{x}=\frac{6+4+9+10+8+9+7+11}{8}=\frac{64}{8}=8$$

La varianza es la media de los cuadrados de las desviaciones de los valores con respecto a la media.

$$V(x)=\frac{(6-8)^2+(4-8)^2+(9-8)^2+(10-8)^2+(8-8)^2+(9-8)^2+(7-8)^2+(11-8)^2}{8}=$$

$$=\frac{4+16+1+4+0+1+1+9}{8}=\frac{36}{8}=4,5$$

34. Según datos del INE, la media del número de personas que conviven en el hogar de los españoles es de 2,3. En una encuesta realizada a un grupo de personas se obtienen los siguientes datos:

4 3 5 1 4 3 2 2 3 1 2 2 5 1 4 3 2 1 4 3 2 2 5 1 2 2 5 1 3 1 4 3 3 4

a. ¿Coincide la media de estos datos con la del INE?

Se organizan los datos en una tabla.

Número de personas, x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	N_i
1	7	7	7
2	9	18	16
3	8	24	24
4	6	24	30
5	4	20	34
Total	34	93	

$\bar{x} = \dfrac{93}{34} = 2,74$. Por tanto, la media de la muestra es mayor que la del INE.

b. Halla los parámetros estadísticos de centralización y dispersión de los datos.

La moda es el valor que mayor frecuencia tiene. Por tanto, $M_o = 2$.

La mediana es el valor que está en el medio de la lista de valores. Como hay un número par de datos, la mediana es la media aritmética de los dos datos centrales, los que ocupan la posición 17 y 18. Por tanto, $M_e = 3$.

El rango es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor. R = 5 – 1 = 4

La varianza es la media de los cuadrados de las desviaciones de los valores con respecto a la media.

$$V(x) = \frac{(1-2,74)^2 \cdot 7 + (2-2,74)^2 \cdot 9 + (3-2,74)^2 \cdot 8 + (4-2,74)^2 \cdot 6 + (5-2,74)^2 \cdot 4}{34} =$$

$$= \frac{21,19 + 4,93 + 0,54 + 9,53 + 20,43}{34} = \frac{56,62}{34} = 1,67$$

La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza: $S(x) = \sqrt{1,67} = 1,29$

35. Las puntuaciones de un grupo de alumnos en las materias de Inglés y Lengua han sido:

IN: 4 8 5 9 4 8 6 10 5 9 6 10 5 9
LE: 5 9 6 7 7 8 5 9 7 7 6 8 5 9

a. Halla la media y la desviación típica de las notas de cada materia.

Se elabora una tabla en la que se recojan los datos.

Inglés		
x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$
4	2	8
5	3	15
6	2	12
8	2	16
9	3	27
10	2	20
Total	14	98

Lengua		
x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$
5	3	15
6	2	12
7	4	28
8	2	16
9	3	27
Total	14	98

Se calcula la media de las puntuaciones en las dos asignaturas, que es igual en ambas, ya que el producto $x_i \cdot n_i$ es el mismo:

$$\overline{x} = \frac{98}{14} = 7$$

Se calcula la varianza y la desviación típica:

Para inglés:

$$V(x) = \frac{(4-7)^2 \cdot 2 + (5-7)^2 \cdot 3 + (6-7)^2 \cdot 2 + (8-7)^2 \cdot 2 + (9-7)^2 \cdot 3 + (10-7)^2 \cdot 2}{14} =$$

$$= \frac{18+12+2+2+12+18}{14} = \frac{64}{14} = 4{,}57$$

$$S(x) = \sqrt{4{,}57} = 2{,}14$$

Para Lengua:

$$V(x) = \frac{(5-7)^2 \cdot 3 + (6-7)^2 \cdot 2 + (7-7)^2 \cdot 4 + (8-7)^2 \cdot 2 + (9-7)^2 \cdot 3}{14} =$$

$$= \frac{12+2+0+2+12}{14} = \frac{28}{14} = 2$$

$$S(x) = \sqrt{2} = 1{,}41$$

La media en ambos casos es 7, y la desviación típica es 2,14 en Inglés y 1,41 en Lengua.

b. ¿En qué materia crees que la media es más representativa? ¿Por qué?
La media es más representativa en la materia de Lengua porque la desviación típica es menor y eso indica que los datos están más agrupados.

36. ¿Para qué tipo de variables estadísticas no es posible calcular los parámetros estadísticos? ¿Cuál es la razón?

Para las variables cualitativas porque los datos son cualidades, por lo que no se pueden ordenar, ni realizar operaciones con ellas.

37. Entra en esta PÁG. web y realiza un estudio completo de una variable estadística:

http://www.ine.es/explica/explica_pasos_primera_encuesta.htm

Respuesta abierta.

38. Actividad resuelta

39. Los lanzamientos de peso, en metros, registrados en una competición de atletismo han sido:

12,5 14,5 13,0 13,2 13,8 14,0 14,2 13,3 13,9 13,4 13,5 13,2 13,8 12,1 14,5 14,3 12,6 14,1 13,0 12,0 13,3 13,2 13,1 13,9

Halla los parámetros de dispersión de estas marcas.
Se recogen los datos en una tabla estadística.

x_i	c_i	n_i	$c_i \cdot n_i$	$d_i = x_i - \overline{x}$	d_i^2	$d_i^2 \cdot n_i$
[12,0 ; 12,5)	12,25	2	24,5	1,23	1,51	3,02
[12,5 ; 13,0)	12,75	2	25,5	0,73	0,53	1,06
[13,0 ; 13,5)	13,25	9	119,25	0,23	0,05	0,45
[13,5 ; 14,0)	13,75	5	68,75	0,27	0,07	0,35
[14,0 ; 14,5]	14,25	6	85,5	0,77	0,59	3,54
Total		24	323,5			8,42

R = 14,5 – 12,0 = 2,5

$$\overline{x} = \frac{323,5}{24} = 13,48$$

$$V(x) = \frac{8,42}{24} = 0,35$$

$$S(x) = \sqrt{0,35} = 0,59$$

40. Las temperaturas medias diarias registradas en dos ciudades durante un mes son:

Temperatura ciudad A	**12 ºC**	**13 ºC**	**15 ºC**	**16 ºC**	**18 ºC**
N.º de días	**3**	**7**	**14**	**5**	**1**

Temperatura ciudad B	**11 ºC**	**12 ºC**	**14 ºC**	**16 ºC**	**19 ºC**
N.º de días	**4**	**4**	**12**	**5**	**5**

Calcula la moda, la media, la mediana y el rango en cada grupo.

Temperatura ciudad A, x_i	N.º de días, n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
12 ºC	3	3	36
13 ºC	7	10	91
15 ºC	14	24	210
16 ºC	5	29	80
18 ºC	1	30	18
Total	30		435

Temperatura ciudad B, x_i	N.º de días, n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
11 ºC	4	4	44
12 ºC	4	8	48
14 ºC	12	20	168
16 ºC	5	25	80
19 ºC	5	30	95
Total	30		435

La moda es el valor que tiene la frecuencia más alta.

- En la ciudad A: M_o = 15 ºC, cuya frecuencia es 14.
- En la ciudad B: M_o = 14 ºC, cuya frecuencia es 12.

La media es el valor central alrededor del cual se sitúan los valores de la variable.

- En la ciudad A: $\overline{x} = \frac{435}{30} = 14,5\ ºC$
- En la ciudad B: $\overline{x} = \frac{435}{30} = 14,5\ ºC$

La mediana es un valor central que verifica que, una vez ordenados los datos, está situado en la mitad. El número de datos es par, por lo que la mediana es la media aritmética de los dos datos centrales, que son la posición 15 y 16.

- En la ciudad A: M_e = 15 ºC
- En la ciudad B: M_e = 14 ºC

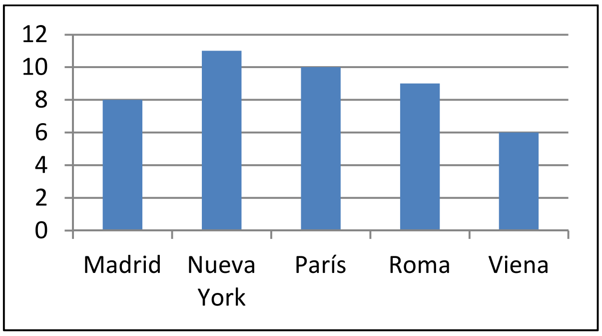
El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos.

- En la ciudad A: R = 18 – 12 = 6 ºC
- En la ciudad B: R = 19 – 11 = 8 ºC

SOLUCIONES PÁG. 198

1. **Representa en un diagrama de barras los datos recogidos en esta tabla, que muestra el número de aviones que han aterrizado en un aeropuerto proveniente de las ciudades indicadas en la siguiente tabla:**

Madrid	Nueva York	París	Roma	Viena
8	11	10	9	6



SOLUCIONES PÁG. 199

1. **Describe cuál es el objeto de estudio de la estadística.**
Cómo organizar, representar y analizar la información acerca de una característica que posee un conjunto de individuos.

2. **Define qué son la población y los individuos en un estudio estadístico.**
Población es el conjunto de elementos que poseen la característica que se quiere estudiar e individuo es cada uno de los elementos de esa población.

3. **Indica la diferencia entre la población y la muestra de individuos en un estudio estadístico.**
La población es el conjunto de individuos que poseen la característica del estudio, mientras que la muestra es solo una parte de la población, que es sobre la que se hace el estudio.

4. **¿Cuál es la diferencia entre una variable cuantitativa y una cualitativa? ¿Y entre una variable cuantitativa discreta y otra continua?**
La variable cuantitativa se expresa en valores numéricos, mientras que la cualitativa lo hace con cualidades no numéricas.
La variable cuantitativa discreta toma unos pocos valores aislados y la continua toma numerosos valores y muy próximos entre sí.

5. **¿Cómo se calcula la frecuencia relativa y el porcentaje de cada uno de los datos?**
La frecuencia relativa se calcula como el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos. Y el porcentaje se calcula multiplicando por 100 la frecuencia relativa.

6. **Describe la diferencia entre frecuencia absoluta y frecuencia relativa.**
La frecuencia absoluta de un valor es el número de veces que se repite, mientras que la frecuencia relativa de ese valor es el número de veces que se repite en relación al número total de datos.

7. **¿Cuánto deben sumar todas las frecuencias relativas? ¿Y las absolutas?**
Las frecuencias relativas deben sumar 1 y las frecuencias absolutas deben sumar el número total de datos, que es el tamaño.

8. **Indica qué variables se pueden representar con cada uno de los gráficos estadísticos.**
Las variables cualitativas se pueden representar con diagramas de barras, polígonos de frecuencias, pictogramas y diagrama de sectores.
Las variables cuantitativas discretas se pueden representar con diagramas de barras, polígonos de frecuencias, pictogramas y diagrama de sectores.
Y las variables cuantitativas continuas se pueden representar con histogramas, pictogramas y diagrama de sectores.

9. **¿En qué se diferencian un diagrama de barras y un histograma?**
Con el diagrama de barras se representan variables cuantitativas discretas mediante barras para cada valor. Con el histograma se representan variables cuantitativas continuas mediante rectángulos adosados para cada intervalo en que se agrupan los datos.

10. **¿Cómo se realiza un pictograma a partir de un diagrama de barras?**
Se sustituye los rectángulos del diagrama de barras por figuras referentes a la variable estudiada.

11. **¿De qué forma se obtienen las amplitudes de cada uno de los sectores que componen el círculo representado en el diagrama de sectores?**
Multiplicando las frecuencias relativas por 360º.

12. **¿Qué indican los parámetros de centralización? ¿Y los de dispersión?**
Los parámetros de centralización son los valores alrededor de los cuales se sitúan los datos recogidos de la variable estadística.

Los parámetros de dispersión indican el grado de concentración de estos datos alrededor de los parámetros de centralización y así saber la representatividad de estos.

13. **¿En qué tipo de variables estadísticas no se puede calcular la media? ¿Por qué?**
Para las variables cualitativas, porque no son numéricas y no se puede operar con ellas.

14. **Para calcular la media de la distribución de una variable cuantitativa continua, ¿qué valor se toma de cada uno de los intervalos en que se agrupan los datos?**
Se toma la marca de clase.

15. **¿Qué valores de una variable estadística influyen en el cálculo del rango de la distribución de los valores?**
Los dos valores extremos, el menor y el mayor.

16. **¿Cuál es el principal inconveniente para el uso de la varianza en la comparación con los datos de la variable estadística?**
El inconveniente es que no está expresado en las mismas unidades que los datos.

17. **Realiza una presentación digital a tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…**
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 200

POBLACIÓN Y MUESTRA

1. **Indica cuál es la variable estadística, de qué tipo es y la población en cada uno de estos casos:**
   a. **En un mercado se hace un sondeo sobre el tipo de leche que se consume.**
   La variable estadística es el tipo de leche, de tipo cualitativa; la población es la gente del mercado.
   b. **La Concejalía de Familia y Bienestar del Ayuntamiento de una determinada localidad investiga sobre cuántas piezas de fruta toman al día los niños de un colegio.**
   La variable estadística es el número de piezas de frutas tomadas al día, de tipo cuantitativa discreta; la población es los alumnos del colegio.
   c. **En una fábrica se realiza una encuesta sobre el medio de transporte más utilizado para acudir al trabajo.**
   La variable estadística es el medio de transporte más usado para acudir al trabajo, de tipo cualitativa; la población es los empleados de la fábrica.

2. **Se va a realizar un estudio en cierta localidad sobre los hábitos de ahorro de agua, luz y calefacción de los vecinos en sus hogares. Se han elegido al azar 100 personas del padrón y se va a analizar el gasto medio en un año.**
Indica la población, la muestra elegida y el carácter estadístico sobre el que se hace el estudio.
La variable estadística es el hábito de ahorro de agua, luz y calefacción en los hogares. La población es los hogares de la localidad, y la muestra tomada son las 100 personas elegidas.

3. **¿De qué tipo son las siguientes variables estadísticas?**
   a. **La ciudad que más turistas extranjeros ha recibido este verano.** → Cualitativa.
   b. **La cantidad de neumáticos vendidos en una semana.** → Cuantitativa discreta.
   c. **El peso de las aves censadas en una reserva.** → Cuantitativa continua.

TABLAS DE FRECUENCIAS

4. El primer día de clase tras las vacaciones, Celia y sus compañeros han rellenado una ficha con sus datos personales, entre ellos la edad de cada uno. Las edades recogidas han sido las siguientes:

14 14 15 13 15 14 14 14 14 15 13 14 15 16 14 15 13 14 15 13 14 14 14 15 14

Elabora una tabla de frecuencias.

Datos	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Porcentaje
13	4	4	0,16	16 %
14	13	17	0,52	52 %
15	7	24	0,28	28 %
16	1	25	0,04	4 %
Total	25		1	100 %

5. Jesús tiene un rebaño de corderos y sigue la norma de pesar a los corderos lechales cuando han cumplido las dos primeras semanas de vida. Los 30 últimos registros, expresados en kilogramos, son:

5,8 6,1 5,9 7,0 6,4 5,8 6,2 7,5 7,1 6,6 6,5 6,3 5,5 5,8 7,0 5,8 7,2 7,4 6,1 6,9 5,8 7,4 5,9 6,3 5,8 5,8 6,9 7,0 5,9 6,3

Realiza una tabla de frecuencias en la que los datos mostrados se agrupen en cinco intervalos de amplitud 4.

Datos	c_i	n_i	N_i	f_i	p_i
[5,5 ; 5,9)	5,7	8	8	0,27	27 %
[5,9 ; 6,3)	6,1	6	14	0,20	20 %
[6,3 ; 6,7)	6,5	6	20	0,20	20 %
[6,7 ; 7,1)	6,9	5	25	0,17	17 %
[7,1 ; 7,5]	7,3	5	30	0,17	17 %
Total		30		1	100 %

6. Entra en esta PÁG. web y realiza diferentes actividades interactivas sobre tablas de frecuencias:

http://conteni2.educarex.es/mats/11896/contenido/

Respuesta abierta.

7. En una clase de Educación Física se ha preguntado a los alumnos por los deportes que les gustaría practicar a lo largo del curso entre las siguientes opciones: baloncesto (B), hockey (H), voleibol (V) y tiro con arco (T). Las respuestas obtenidas han sido:

T B T V B T H B V T B B T B H V B H T B B H V B

Elabora una tabla estadística y responde a estas preguntas:

Datos	Fr. absoluta	Fr. absoluta acumulada	Fr. relativa	Porcentaje
B	10	10	0,42	42 %
H	4	14	0,17	17 %
V	4	18	0,17	17 %
T	6	24	0,25	25 %
Total	24		1	100 %

a. ¿Qué porcentaje de alumnos eligieron el baloncesto?
El 42 %

b. ¿Qué deporte ha tenido menor frecuencia relativa?
El *hockey* y el boleibol.

8. En esta tabla se recoge la frecuencia de la presencia de los alimentos en el menú de un centro de enseñanza:

Carne	Legumbre	Pescado	Verdura
9	**5**	**10**	**14**

a. Realiza una tabla estadística.

Datos	Fr. absoluta	Fr. absoluta acumulada	Fr. relativa	Porcentaje
Carne	9	9	0,24	24 %
Legumbre	5	14	0,13	13 %
Pescado	10	24	0,26	26 %
Verdura	14	38	0,37	37 %
Total	38		1	100

b. ¿Qué porcentaje de veces se come legumbres?
Se come un 13 %

c. ¿Cuántas comidas son en total?
En total son 38 comidas.

9. Las notas de las clases de 2.º A y 2.º B de un instituto en la materia de Matemáticas son:

2.° A: 8 5 6 7 6 9 6 4 8 5 8 4 6 4 8 6 7 6 8 9 6 8 5 6 4 8 4 6 7 8
2.° B: 8 5 6 7 6 9 6 4 8 5 8 4 6 4 8 6 7 6

a. Elabora una tabla de frecuencias para cada curso.

Datos clase 2.° A	Fr. absoluta	Fr. absoluta acumulada	Fr. relativa	Porcentaje
4	5	5	0,17	17 %
5	3	8	0,10	10 %
6	9	17	0,30	30 %
7	3	20	0,10	10 %
8	8	28	0,27	27 %
9	2	30	0,07	7 %
Total	30		1	100 %

Datos clase 2.º B	Fr. absoluta	Fr. absoluta acumulada	Fr. relativa	Porcentaje
4	3	3	0,17	17 %
5	2	5	0,11	11 %
6	6	11	0,33	33 %
7	2	13	0,11	11 %
8	4	17	0,22	22 %
9	1	18	0,06	6 %
Total	18		1	100 %

b. Halla la frecuencia absoluta de suspensos en cada curso e indica en cuál de ellos se dan peores resultados.
Suspenden 5 y 3 personas respectivamente.

c. Repite la misma operación analizando la frecuencia relativa de los suspensos en cada curso.
Suspenden un 0,17 en ambas clases, es decir, un 17 %. Por tanto, tienen los mismos resultados en cuanto a suspensos.

10. La esperanza de vida en diferentes países del mundo es:

82 81 84 82 80 83 84 82 81 82 84 85 85 82 81 84 80 82 82 80 82 81

a. Realiza una tabla estadística de frecuencias.

Datos	n_i	N_i	f_i	p_i
80	3	3	0,14	14 %
81	4	7	0,18	18 %
82	8	15	0,36	36 %
83	1	16	0,04	4 %
84	4	20	0,18	18 %
85	2	22	0,09	9 %
Total	22		1	100 %

b. ¿En cuántos países la esperanza de vida no supera los 81 años? ¿Qué dato de la tabla nos lo indica?
En 3 países. El dato que lo indica es la frecuencia absoluta, o la acumulada, del 80.

c. ¿En cuántos países supera la esperanza de vida los 82 años?
En 7 países. Hasta 82 años son 15 países, por lo que restan 7 hasta los 22 totales.

SOLUCIONES PÁG. 201

11. En un curso de natación han realizado una actividad para controlar el tiempo de resistencia bajo el agua. Los tiempos obtenidos, en segundos, han sido:

40 82 93 65 76 91 84 63 55 47 62 54 79 60 56 68 99 54 76 68

Elabora una tabla estadística agrupando los datos en intervalos.

Datos	c_i	n_i	N_i	f_i	p_i
[40 , 50)	45	2	2	0,10	10 %
[50 , 60)	55	4	6	0,20	20 %
[60 , 70)	65	6	12	0,30	30 %
[70 , 80)	75	3	15	0,15	15 %
[80 , 90)	85	2	17	0,10	10 %
[90 , 100]	95	3	20	0,15	15 %
Total		20		1	100 %

12. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla de frecuencias:

Datos	**Fr. absoluta**	**Fr. absoluta acumulada**	**Fr. relativa**	**Porcentaje**
A	2 (1)	2 (2)	0,1 (3)	**10** (4)
B	4 (5)	6 (6)	**0,2** (7)	20 (8)
C	9 (9)	**15** (10)	0,45 (11)	45 (12)
D	**5** (13)	20 (14)	0,25 (15)	25 (16)
Total	**20** (17)		1 (18)	(19)

(3) = (4) : 100 ⇒ (3) = 10 : 100 = 0,1
(1) = (3) · (17) ⇒ (1) = 0,1 · 20 = 2
(2) = (1) ⇒ (2) = 2
(8) = (7) · 100 ⇒ (8) = 0,2 · 100 = 20
(5) = (7) · (17) ⇒ (5) = 0,2 · 20 = 4
(6) = (2) + (5) ⇒ (6) = 2 + 4 = 6
(9) = (10) – (6) ⇒ (9) = 15 – 6 = 9

$$(11) = \frac{(9)}{(17)} \Rightarrow (11) = \frac{9}{20} = 0,45$$

(12) = (11) · 100 ⇒ (12) = 0,45 · 100 = 45
(14) = (10) + (13) ⇒ (14) = 15 + 5 = 20

$$(15) = \frac{(13)}{(17)} \Rightarrow (15) = \frac{5}{20} = 0,25$$

(16) = (15) · 100⇒ (16) = 0,25 · 100 = 25
(18) = (3) + (7) + (11) + (15) ⇒ (18) = 0,1 + 0,2 + 0,45 + 0,25 = 1
(19) = (4) + (8) + (12) + (16) ⇒ (19) = 10 + 20 + 45 + 25 = 100

13. Los resultados de los 40 lanzamientos de un dado se han recogido en la siguiente tabla. Por error, no se ha indicado la frecuencia del 6; ¿sabrías decir cuál es?

La suma de todas las frecuencias relativas es 1. Por lo tanto:
1 – (0,1 + 0,2 + 0,3 + 0,1 + 0,1) = 1 – 0,8 = 0,2

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0,1	**0,2**	**0,3**	**0,1**	**0,1**	0,2

A continuación, responde si son ciertas o falsas las siguientes cuestiones y corrige las erróneas:

a. El 2 salió 20 veces.

Se multiplica la frecuencia relativa del 2 por el número total de lanzamientos.
0,2 · 40 = 8. Falso. Salió 8 veces.

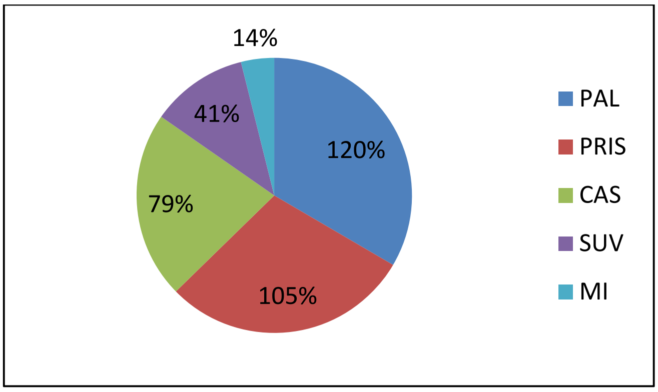
b. La frecuencia absoluta del 3 es 12.
Se multiplica la frecuencia relativa del 3 por el número total de lanzamientos.
0,3 · 40 = 12. Correcto.

c. El 5 salió en un 1 % de los lanzamientos.
Se multiplica a frecuencia relativa del 5 por 100.
0,1 · 100 = 10 %. Falso, salió el 10 %.

GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

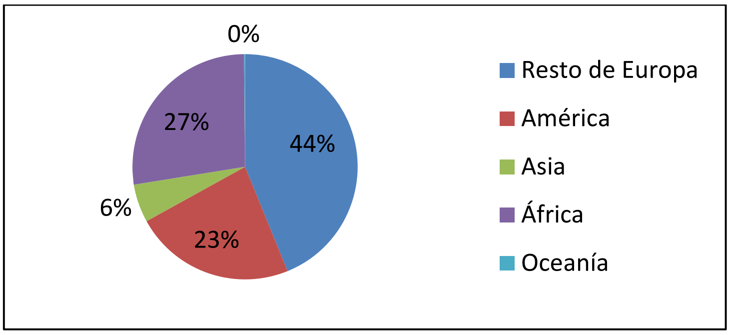
14. Representa mediante un diagrama de sectores la distribución de escaños que han obtenido los partidos políticos presentados a las elecciones generales de Liliput.

Partidos políticos	Escaños
PAL	102
PRIS	89
CAS	67
SUV	35
MI	12



15. Utiliza una hoja de cálculo para realizar un diagrama de sectores que muestre la procedencia de los extranjeros residentes en España. Los datos, agrupados por continentes, son los recogidos en la siguiente tabla:

Resto de Europa	América	Asia	África	Oceanía
360 000	190 000	45 000	225 000	1 000



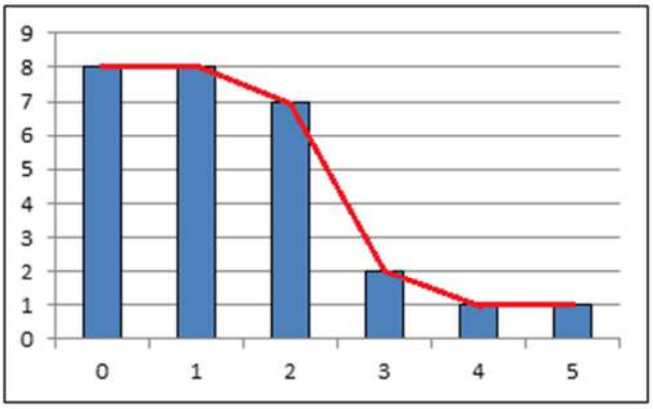
16. **Antes del sorteo de la lotería de Navidad se ha preguntado a un grupo de personas por la preferencia de la terminación del décimo jugado. Las respuestas han sido:**

0 3 4 2 0 5 2 0 1 1 1 0 2 0 1 0 2 1 1 0 2 1 0 1 3 2 2

a. Organiza los datos en una tabla estadística.

Datos	n_i	N_i	f_i	p_i
0	8	8	0,30	30 %
1	8	16	0,30	30 %
2	7	23	0,26	26 %
3	2	25	0,07	7 %
4	1	26	0,04	4 %
5	1	27	0,04	4 %
Total	27		1	100 %

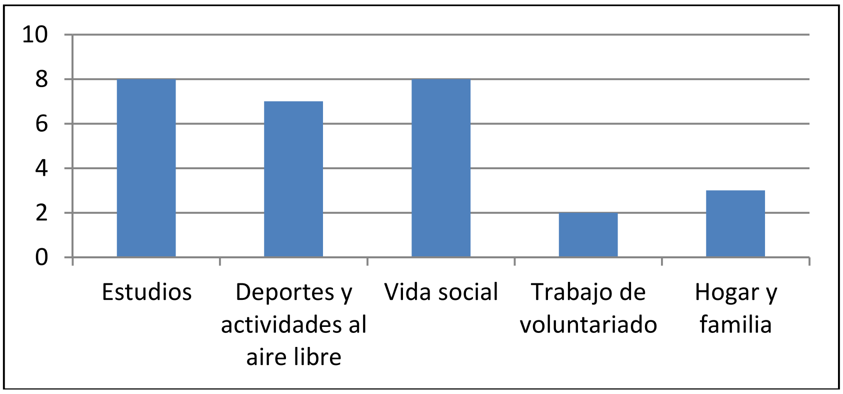
b. Represéntalos en un diagrama de barras con polígono de frecuencias.

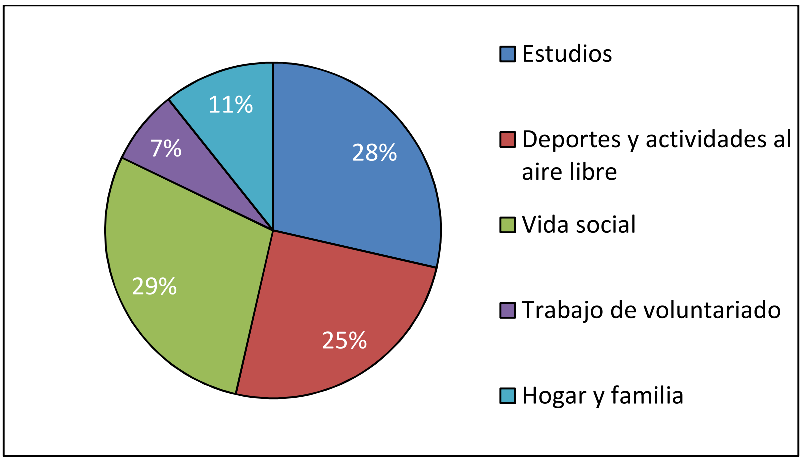


17. **En un estudio sobre a qué dedican el tiempo libre los socios de un club de jubilados entre las siguientes actividades: estudios (E), deportes y actividades al aire libre (D), vida social y entretenimiento (V), trabajo de voluntariado (T) y hogar y familia (H), las respuestas han sido:**

E V T E D V H D V E H E V D V E V D H E V D E V E T D D

Representa los datos en un diagrama de barras y en uno de sectores.





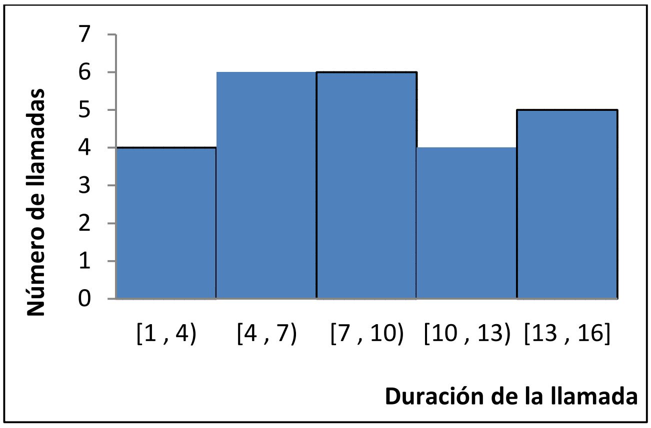
18. El departamento de comunicación de una empresa ha medido los tiempos de duración, en minutos, de las 25 videoconferencias realizadas:

5 1 10 7 12 3 6 4 16 9 2 5 8 14 13 5 8 11 3 15 10 9 7 14 6

a. Realiza una tabla de frecuencias agrupando los datos en intervalos de 3 min de amplitud, comenzando en 1.

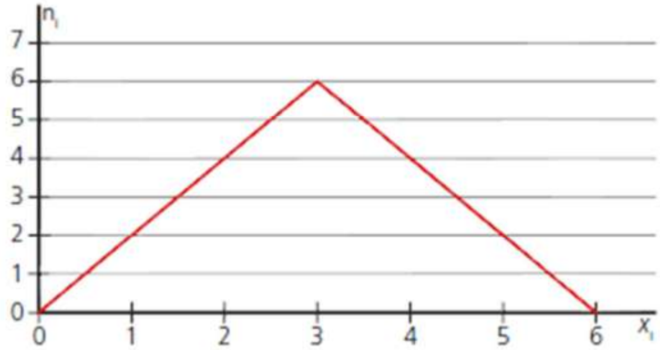
Datos	c_i	n_i	N_i	f_i	p_i
[1 , 4)	2,5	4	4	0,16	16 %
[4 , 7)	5,5	6	10	0,24	24 %
[7 , 10)	8,5	6	16	0,24	24 %
[10 , 13)	11,5	4	20	0,16	16 %
[13 , 16]	14,5	5	25	0,20	20 %
Total		25		1	100 %

b. Representa los datos en un histograma.



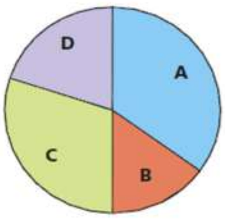
SOLUCIONES PÁG. 202

19. Contesta si las siguientes afirmaciones sobre la gráfica son verdaderas o falsas y corrige estas últimas:



a. **La frecuencia absoluta del 2 es 4.** → Verdadero.
b. **Es una gráfica de frecuencias relativas.** → Falso, porque sus valores son mayores de 1.
c. **El tamaño de la muestra es 6.** → Se suman todas las frecuencias absolutas. 2 + 4 + 6 + 4 + 2 = 18. Falso, el tamaño de la muestra es 18.
d. **La presencia del 2 es de un 40 %** → Se divide la frecuencia absoluta de 2 entre el tamaño de la muestra. $\frac{4}{18}\cdot 100 = 0{,}22\cdot 100 = 22{,}2\%$. Falso, la presencia del 2 es de un 22,2%.

20. Indica a cuál de las siguientes estadísticas pertenece este diagrama de sectores:



I	II	III	IV
A: 75	A: 100	A: 150	A: 80
B: 25	B: 100	B: 50	B: 20
C: 60	C: 120	C: 120	C: 70
D: 40	D: 80	D: 80	D: 30
200	400	400	200

La suma de los sectores A y B tiene una amplitud de 180º, por lo que tendrían que ser la mitad de los datos, y tienen distinta amplitud. Por lo tanto, la muestra II no pertenece al gráfico.

Pertenece a I y III, pues la III tiene frecuencias dobles con respecto a I.

MEDIDAS DE CENTRALIZACIÓN

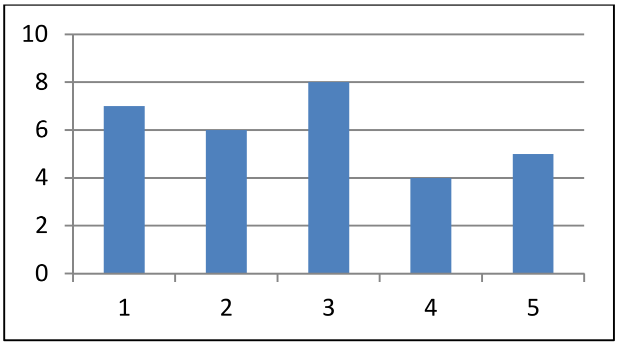
21. El número de tazas de café que se toman los empleados de una oficina a lo largo de un día son:

3 2 1 5 4 3 1 2 4 3 5 2 1 3 3 1 2 4 3 5 3 1 5 3 1 2 4 5 1 2

a. Organiza los datos en una tabla estadística.

Datos	n_i	N_i	f_i	p_i	$x_i \cdot n_i$
1	7	7	0,23	23 %	7
2	6	13	0,20	20 %	12
3	8	21	0,27	27 %	24
4	4	25	0,13	13 %	16
5	5	30	0,17	17 %	25
Total	30		1	100 %	84

b. Represéntalos en un diagrama de barras.



c. Calcula los parámetros de centralización.

La moda es el valor que tiene la mayor frecuencia. La moda es $M_o = 3$, cuya frecuencia es 8.

La media aritmética es el valor central alrededor del cual se sitúan los valores de la variable. $\overline{x} = \frac{84}{30} = 2{,}8$

La mediana es un valor central que verifica que, una vez ordenados los datos, está situado en la mitad. Hay un número par de datos, la mediana es la media aritmética entre los dos datos centrales, los que ocupan las posiciones 15 y 16. La mediana es $M_e = 3$.

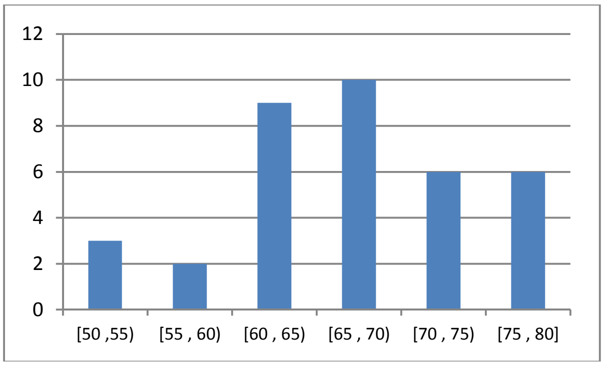
22. En una granja se han pesado 36 huevos y se han obtenido los siguientes valores expresados en gramos:

65 62 63 75 68 70 61 52 60 69 58 53 69 62 55 71 72 70
63 79 79 68 80 69 61 72 50 65 74 62 65 78 77 62 67 69

a. Efectúa el recuento de los datos y elabora una tabla estadística de frecuencias agrupándolos en intervalos.

Datos	c_i	n_i	N_i	f_i	p_i	$c_i \cdot n_i$
[50 , 55)	52,5	3	3	0,08	8 %	157,5
[55 , 60)	57,5	2	5	0,05	5 %	115
[60 , 65)	62,5	9	14	0,25	25 %	562,5
[65 , 70)	67,5	10	24	0,28	28 %	675
[70 , 75)	72,5	6	30	0,17	17 %	435
[75 , 80]	77,5	6	36	0,17	17 %	465
Total		36		1	100 %	2 410

b. Represéntalos gráficamente mediante el diagrama de barras correspondiente.



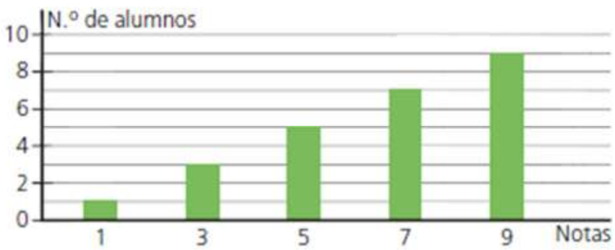
c. Halla la moda, la media y la mediana.

La moda es el valor de la variable que más se repite. Por tanto, el intervalo modal es [65 , 70), cuya frecuencia es 10.

La media es el valor central alrededor del cual se sitúan los valores de la variable: $\bar{x} = \frac{2\,410}{36} = 66,94$.

El intervalo mediano es [65 , 70), porque es el primero cuya frecuencia absoluta acumulada excede de 18.

23. La gráfica recoge las calificaciones de una prueba de Lengua en una clase de 2.º de ESO. Elabora una tabla de frecuencias y responde a las cuestiones propuestas:



a. ¿Cuántos alumnos son en la clase?

Se suman las frecuencias:

1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25. Son 25 alumnos.

b. ¿Cuántos alumnos han suspendido la prueba?

Han suspendido la prueba cuatro alumnos, que son los que han obtenido menos de un 5.

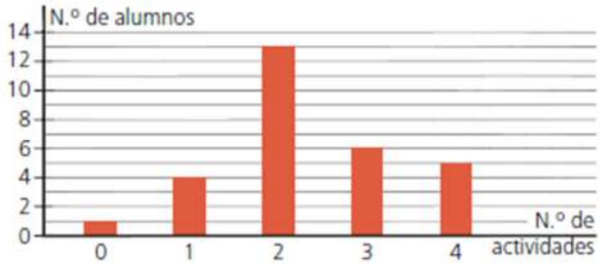
c. ¿Cuántos alumnos han sacado un sobresaliente?
Han sacado un sobresaliente nueve alumnos.

d. Calcula la moda, la media y la mediana.
La moda es el valor que tiene mayor frecuencia: $M_o = 9$, sobresaliente.
Para calcular la media se recogen los datos en una tabla estadística:

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
1	1	1	1
3	3	4	9
5	5	9	25
7	7	16	49
9	9	25	81
Total	25		165

La media es el valor central alrededor del cual se sitúan los valores de la variable. La media es $\bar{x} = \frac{165}{25} = 6{,}6$.
La mediana es un valor central que verifica que, una vez ordenados los datos, está situado en la mitad. Como hay un número impar de datos, la mediana es el dato que ocupa la posición 13. La mediana es $M_e = 7$.

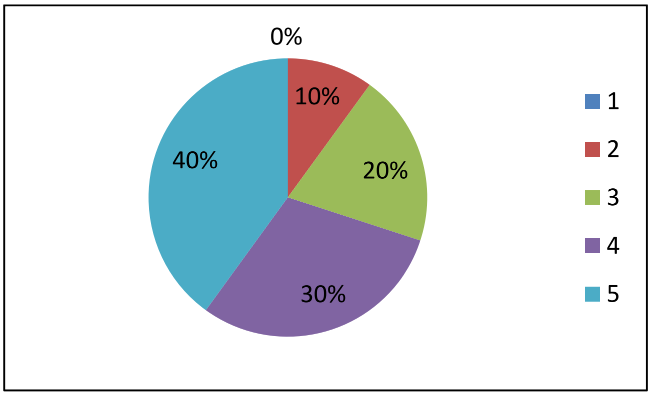
24. En la clase de Nicolás han llevado a cabo una encuesta sobre el número de actividades realizadas en familia fuera del hogar durante el fin de semana. Las respuestas obtenidas se han representado en este diagrama de barras:



a. ¿Cuántos alumnos hay en clase de Nicolás?
Se suman las frecuencias:
1 + 4 + 13 + 6 + 5 = 29. Hay 29 alumnos.

b. ¿Algún alumno no ha realizado ninguna actividad?
Sí, hay un alumno.

c. Representa los datos en un diagrama de sectores.



d. Calcula la media de actividades realizadas.

Para calcular la media se recogen los datos en una tabla estadística:

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
0	1	1	0
1	4	5	4
2	13	18	26
3	6	24	18
4	5	29	20
Total	29		68

La media es el valor central alrededor del cual se sitúan los valores de la variable. La media es $\overline{x} = \dfrac{68}{29} = 2{,}34$.

SOLUCIONES PÁG. 203

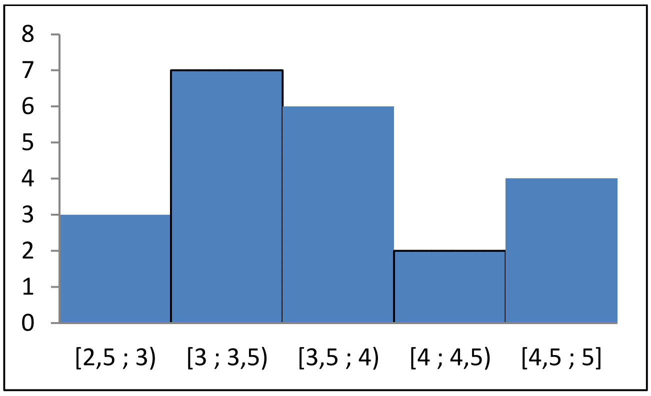
25. En un estudio para conocer si se cumple un óptimo consumo de calorías por día se obtienen estos resultados en miles de kilocalorías:

3,3 2,7 4,5 5,0 2,9 3,1 4,6 3,4 3,0 4,2 3,7
3,9 2,5 3,5 3,8 3,6 4,4 3,7 3,1 3,3 4,8 3,1

a. Organiza los datos en una tabla estadística con cinco intervalos de 0,5 de amplitud.

Datos	c_i	n_i	N_i	f_i	p_i	$c_i \cdot n_i$
[2,5 ; 3)	2,75	3	3	0,14	14 %	8,25
[3 ; 3,5)	3,25	7	10	0,32	32 %	22,75
[3,5 , 4)	3,75	6	16	0,27	27 %	22,5
[4 ; 4,5)	4,25	2	18	0,09	9 %	8,50
[4,5 , 5]	4,75	4	22	0,18	18 %	19
Total		22		1	100 %	81

b. Represéntalos en un histograma.



c. Calcula los parámetros de centralización.

El intervalo modal es [3 ; 3,5), se repite 7 veces.

La media es el valor central alrededor del cual se sitúan los valores de la variable: $\overline{x} = \dfrac{81}{22} = 3{,}68$.

El intervalo mediano es [3,5 ; 4), porque es el primero cuya frecuencia absoluta acumulada contiene las posiciones 11 y 12.

26. El equipo de baloncesto de un colegio ha jugado cuatro temporadas en la liga. En las tres primeras anotó 372, 401 y 398 puntos, respectivamente. Si la media anotadora en las cuatro temporadas ha sido de 400 puntos, ¿cuántos tantos anotó en la cuarta temporada?

$$\overline{x} = \frac{372 + 401 + 398 + x}{4} \Rightarrow 400 = \frac{1171 + x}{4} \Rightarrow 4 \cdot 400 = 1171 + x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\,600 - 1\,171 = x \Rightarrow x = 429$$

Anotó 429 puntos.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

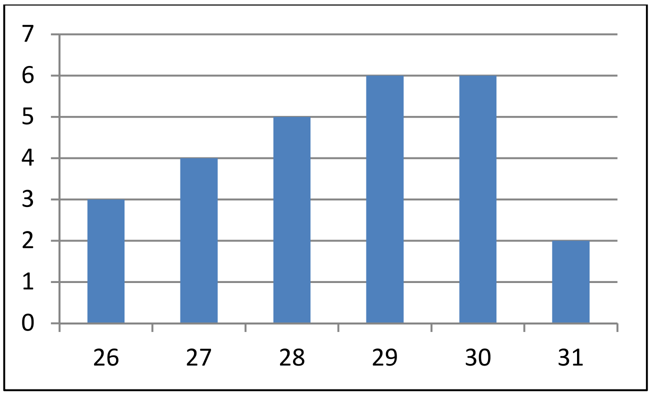
27. En una encuesta sobre planificación familiar se evalúa la edad a la que se casan las parejas. Los resultados obtenidos han sido:

30 28 29 26 27 29 30 27 31 30 28 29 27
30 28 26 29 28 27 30 31 26 29 30 28 29

a. Elabora una tabla estadística con los datos.

Datos	n_i	N_i	f_i	p_i	$x_i \cdot n_i$	d_i^2	$d_i^2 \cdot n_i$
26	3	3	0,12	12 %	78	6,45	19,35
27	4	7	0,15	15 %	108	2,37	9,48
28	5	12	0,19	19 %	140	0,29	1,45
29	6	18	0,23	23 %	174	0,21	1,26
30	6	24	0,23	23 %	180	2,13	12,78
31	2	26	0,08	8 %	62	6,05	12,1
Total	26			100 %	742		56,42

b. Represéntalos en un diagrama de barras.



c. Obtén sus parámetros de dispersión.
El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de los datos: R = 31 – 26 = 5

La media es $\overline{x} = \frac{742}{26} = 28{,}54$

La varianza es la media de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media: $V(x)=\frac{56,42}{26}=2,17$

La desviación típica es la raíz cuadrada positiva de la varianza: $S\ (x)=\sqrt{2,17}=1,47$

28. Sara y Paula han preguntado a veintiún compañeros de sus respectivas clases la edad a la que tuvieron su primer móvil. Las respuestas han sido:
Clase de Sara:
13 12 13 15 14 13 11 12 14 13 15 12 11 13 14 15 12 11 11 15 14

Clase de Paula:
13 11 13 15 11 13 11 15 15 13 15 15 11 13 15 15 11 11 13 11 13

a. ¿Cuál es la moda y la media de estas dos distribuciones de datos?

Se recogen los datos en una tabla de frecuencias.

Clase de Sara, x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
11	4	4	44
12	4	8	48
13	5	13	65
14	4	17	56
15	4	21	60
Total	21		273

Clase de Paula, x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
11	7	7	77
13	7	14	91
15	7	21	105
Total	21		273

En la clase de Sara la moda es 13 pues tiene una frecuencia de 5, y en la clase de Paula es 11, 13 y 15, pues los tres datos tienen la misma frecuencia, 7.
Para calcular la media se aplica la expresión:

$$\bar{x}_{\text{clase de Sara}}=\frac{273}{21}=13\ ;\ \bar{x}_{\text{clase de Paula}}=\frac{273}{21}=13$$

La media en ambas clases es la misma, 13.

b. ¿En qué distribución crees que son más representativos estos parámetros? ¿Por qué?

En la primera, porque los datos están más agrupados alrededor de la media.

c. Halla la desviación típica de ambas distribuciones e interpreta su valor.

Clase de Sara, x_i	n_i	$c_i \cdot n_i$	d_i^2	$d_i^2 \cdot n_i$
11	4	44	4	16
12	4	48	1	4
13	5	65	0	0
14	4	56	1	4
15	4	60	4	16
Total	21	273		40

Clase de Paula, x_i	n_i	$c_i \cdot n_i$	d_i^2	$d_i^2 \cdot n_i$
11	7	77	4	28
13	7	91	0	0
15	7	105	4	28
Total	21	273		56

Se calcula la varianza y la desviación típica de ambas clases.

$$V(x)_{\text{clase de Sara}}=\frac{40}{21}=1,9\Rightarrow S\ (x)_{\text{clase de Sara}}=\sqrt{1,9}=1,38$$

$$V(x)_{\text{clase de Paula}}=\frac{56}{21}=2,67\Rightarrow S\ (x)_{\text{clase de Paula}}=\sqrt{2,67}=1,63$$

En la clase de Sara, S (x) = 1,38 y en la clase de Paula, S (x) = 1,63. Como la desviación típica es menor en la clase de Sara, los parámetros estadísticos son más representativos al estar los datos más agrupados.

EVALUACIÓN

1. **¿Qué tipo de variable estadística es la medida del tiempo que tarda un vehículo en recorrer una cierta distancia?**
   a. Cualitativa. c. Cuantitativa continua.
   b. Cuantitativa discreta. **d. Ninguna.**

2. **Indica cuál es la frecuencia absoluta del valor 5 en los siguientes datos:**

   5 3 1 4 3 5 3 2 4 5 3 2 5 2 4 3 1
   a. 4 **b. 5** **c. 3** **d. 6**

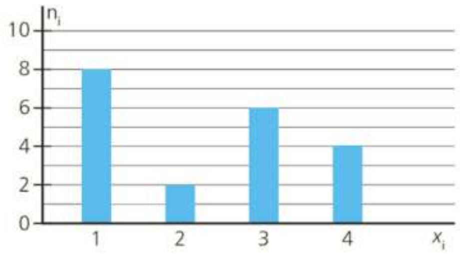
   La frecuencia absoluta es 4 porque se repite 4 veces.

3. **Señala cuál es la frecuencia relativa del valor 2 en los siguientes datos:**

   3 3 1 2 3 3 3 2 2 3 3 2 3 2 2 3 1 2 1 3
   a. 0,35 **b. 0,5** **c. 0,43** **d. 0,26**

   La frecuencia relativa es el cociente del dato entre el número total de datos:
   $$f_i = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

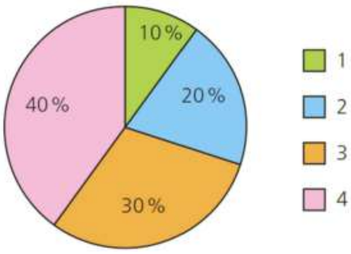
4. **¿Cuál es la media del siguiente conjunto de datos?**



   a. 3 **b. 1,8** **c. 2** d. 2,3

$$\overline{x} = \frac{1\cdot 8 + 2\cdot 2 + 3\cdot 6 + 4\cdot 4}{8+2+6+4} = \frac{46}{20} = 2{,}3$$

5. La desviación típica de este conjunto de 120 datos es:



a. 1 **b. 0,75** **c. 1,25** **d. 1,5**

Se recogen los datos en una tabla de frecuencias.

Datos	n_i	N_i	f_i	$x_i \cdot n_i$	d_i^2	$d_i^2 \cdot n_i$
1	$120\cdot\frac{10}{100}=12$	12	0,1	12	4	48
2	$120\cdot\frac{20}{100}=24$	36	0,2	48	1	24
3	$120\cdot\frac{30}{100}=36$	72	0,3	108	0	0
4	$120\cdot\frac{40}{100}=48$	120	0,4	192	1	48
Total	120		1	360		120

$$\overline{x}=\frac{360}{120}=3$$

$$\text{V}\ (x)=\frac{120}{120}=1\Rightarrow \text{S}\ (x)=\sqrt{1}=1$$

6. Los siguientes datos indican el número de móviles que tienen en 15 hogares. La media de estos datos es:

5 3 2 4 3 5 3 4 3 1 3 5 4 2 1

a. 3,9 b. 3,2 **c. 2,7** **d. 4,1**

$$\overline{x}=\frac{5+3+2+4+3+5+3+4+3+1+3+5+4+2+1}{15}=\frac{48}{15}=3,2$$

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 11. Probabilidad

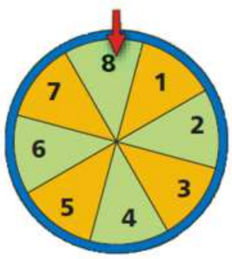
Unidad 11. Probabilidad

SOLUCIONES PÁG. 207

1. **Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles deterministas:**
   a. **Medir la masa de un litro de agua.**
   Es determinista porque el resultado se puede predecir antes de realizar el experimento.
   b. **Extraer una papeleta de una urna con tres papeletas blancas y ver de qué color es.**
   Es determinista porque el resultado se puede predecir antes de realizar el experimento.
   c. **Elegir sin mirar una pieza del ajedrez.**
   Es aleatorio porque el resultado no se puede predecir antes de realizar el experimento.
   d. **Predecir quiénes serán los goleadores en el partido de tu equipo de fútbol favorito.**
   Es aleatorio porque el resultado no se puede predecir antes de realizar el experimento.
   e. **Decir quién ganará las elecciones que se celebrarán el próximo mes.**
   Es aleatorio porque el resultado no se puede predecir antes de realizar el experimento.

2. **Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios:**
   a. **Extraer una carta de una bajara española y anotar el palo de la carta extraída.**
   E = {copas, espadas, oros y bastos}
   b. **Coger un pez de una pecera en la que hay peces rojos, azules y plateados y registrar el color del pez.**
   E = { rojo, azul y plateado}
   c. **Introducir una contraseña formada en este orden por una vocal y un dígito del 1 al 2.**
   E = {a1, a2, e1,e2, i1, i2, o1,o2, u1, u2}

3. **Se hace girar una ruleta como la de la figura y se apunta el número del sector que sale.**



   a. **¿Es aleatorio este experimento?**
   Sí, es aleatorio.
   b. **Escribe el espacio muestral.**
   E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

4. **Indica el espacio muestral del experimento aleatorio «lanzar un dado con forma de dodecaedro y anotar el resultado». (Ten en cuenta que todas las caras del dodecaedro están numeradas del 1 al 12).**
   E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

5. **En el bombo de un sorteo de lotería hay 10 bolas numeradas del 0 al 9. Se extraen sucesivamente cinco bolas para formar el número correspondiente al primer premio, introduciendo de nuevo la bola en el bombo tras cada extracción. Si se considera el experimento «qué número sale en primer lugar» en el primer premio, ¿qué elementos tiene el espacio muestral?**
   E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

6. **Escribe en tu cuaderno tres experimentos aleatorios y tres deterministas.**
   Respuesta abierta.

7. **Considera el experimento «lanzar al aire una moneda y anotar el resultado de la cara visible». Escribe el espacio muestral.**
   E = {cara, cruz}

8. **Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles no:**
   a. **Coger una ficha de dominó del montón de la mesa para ver si es el seis doble.**
      Es aleatorio porque el resultado no se puede predecir antes de realizar el experimento.
   b. **Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos se conocen.**
      Es determinista porque el resultado se puede predecir antes de realizar el experimento.
   c. **Lanzar a canasta un balón de baloncesto desde la línea de tres puntos y comprobar si se encesta o no.**
      Es aleatorio porque el resultado no se puede predecir antes de realizar el experimento.
   d. **Calcular la distancia a la que se encuentra una tormenta si se sabe el tiempo que transcurre desde que se ve el relámpago hasta que se oye el trueno.**
      Es determinista porque el resultado se puede predecir antes de realizar el experimento.
   e. **Juntar dos imanes por las caras de la misma polaridad.**
      Es determinista porque el resultado se puede predecir antes de realizar el experimento.

9. **Se extrae una bola de la siguiente urna y se anota el color:**

   a. **¿Es un experimento aleatorio? Razona tu respuesta.**
      Sí, es un experimento aleatorio, ya que no se puede predecir el color de la bola que se extraerá.
   b. **Escribe el espacio muestral.**
      E = {roja, verde, azul, amarilla}

SOLUCIONES PÁG. 209

10. Se realiza un experimento consistente en lanzar un dado cúbico. Indica:

a. El espacio muestral.
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b. Un suceso elemental.
Respuesta abierta. Por ejemplo, A = {1}

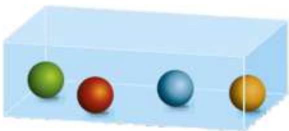
c. Un suceso compuesto.
Respuesta abierta. Por ejemplo, B = {1, 2}

d. Un suceso seguro.
C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

e. Un suceso imposible.
Respuesta abierta. Por ejemplo, D = {8}

f. Dos sucesos compatibles.
Respuesta abierta. Por ejemplo, F = {1, 2} y G = {2, 3}

11. Con la urna de la figura se lleva a cabo el experimento de sacar una bola y comprobar su color. Escribe los elementos que componen los siguientes sucesos:



a. El espacio muestral.
E = {bola naranja, bola verde, bola roja, bola azul}

b. Un suceso elemental.
Respuesta abierta. Por ejemplo, A = {bola naranja}

c. Un suceso compuesto.
Respuesta abierta. Por ejemplo, B = {bola naranja, bola roja}

d. Un suceso seguro.
C = {bola naranja, bola verde, bola roja, bola azul}

e. Un suceso imposible.
Por ejemplo, D = {bola amarilla}

f. Dos sucesos incompatibles.
Respuesta abierta. Por ejemplo, F = {bola naranja, bola verde} y G = {bola roja, bola azul}

12. Se efectúa el experimento consistente en extraer una carta de una baraja española que tiene 40 naipes distribuidos en cuatro palos. Describe los resultados que forman los siguientes sucesos:

a. A = {sacar un as}
A = {as de oros, as de copas, as de bastos, as de espadas}

b. B = {sacar el rey de copas}
B = {rey de copas}

c. C = {sacar una figura}
C = {sota de oros, caballo de oros, rey de oros, sota de copas, caballo de copas, rey de copas, sota de bastos, caballo de bastos, rey de bastos, sota de espadas, caballo de espadas, rey de espadas}

d. D = {sacar un basto}
D = {as de bastos, 2 de bastos, 3 de bastos, 4 de bastos, 5 de bastos, 6 de bastos, 7 de bastos, sota de bastos, caballo de bastos, rey de bastos}

13. **Considera el experimento de lanzar dos veces una moneda. Determina el espacio muestral, así como los elementos que forman los siguientes sucesos:**
    E = {CC, CX, XC, XX}
    a. **A = {sacar dos caras}**
       A = {CC}
    b. **B = {sacar al menos una cara}**
       B = {CX, XC}
    c. **C = {no sacar dos caras}**
       C = {CX, XC, XX}

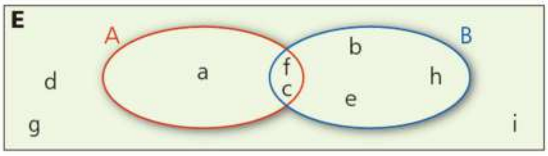
14. **Se hace girar una ruleta como la de la figura y se anota el número del sector al que apunta la flecha:**

    Escribe los elementos que componen:
    a. **El espacio muestral.**
       E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
    b. **El suceso A = {salir un múltiplo de 3}.**
       A = {3, 6, 9}
    c. **El suceso B = {salir un divisor de 6}.**
       B = {1, 2, 3, 6}
    d. **El suceso C = {salir un número menor de 3}.**
       C = {1, 2}

15. **Considera el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico y clasifica los siguientes sucesos:**
    a. **A = {obtener un número divisor de 10}**
       Es un suceso compuesto, porque está formado por varios sucesos elementales.
    b. **B = {obtener un número impar mayor que 5}**
       Es un suceso imposible, porque en el dado cúbico no hay un número impar mayor que 5.
    c. **C = {no obtener un 1}**
       Es un suceso compuesto, porque está formado por varios sucesos elementales. Tamién es el suceso contrario a {obtener 1}.
    d. **D = {obtener un múltiplo de 4}**
       Es un suceso elemental, porque está formado por un solo elemento.

16. **Considera el experimento «coger al azar una ficha y anotar los números de sus dos partes» en el juego de dominó. Inventa los siguientes sucesos:**
    a. **Dos sucesos que sean compatibles.**
       Respuesta abierta. Por ejemplo, A = {blanco y 2} y B = {blanco y tres}
    b. **Dos sucesos que sean incompatibles.**
       Respuesta abierta. Por ejemplo, A = {blanco y 2} y B = {doble tres}
    c. **Un suceso y su contrario.**
       Respuesta abierta. Por ejemplo, A = {doble blanco} y B = {no doble blanco}

17. En el siguiente diagrama se representa el espacio muestral, E, y dos sucesos, A y B.



a. Escribe el suceso A.
A = {a, c, f}
b. Escribe el suceso B.
B = {b, c, e, f, h}
c. Escribe el suceso contrario a A.
C = {b, d, e, g, h, i}
d. ¿Son los sucesos A y B compatibles?
Sí, porque tienen c y f como elementos en común.

18. Se elige al azar una ficha de entre las 28 que forman un juego completo de dominó. Escribe los elementos que integran los siguientes sucesos:
a. A = {sacar una ficha doble}
A = {(1 , 1), (2 , 2), (3 , 3), (4 , 4), (5 , 5), (6 , 6)}
b. B = {sacar una ficha con una blanca}
B = {(0 , 0), (0 , 1), (0 , 2), (0 , 3), (0 , 4), (0 , 5), (0 , 6)}
c. C = {sacar una ficha con al menos un seis}
C = {(6 , 0), (6 , 1), (6 , 2), (6 , 3), (6 , 4), (6 , 5), (6 , 6)}
d. D = {sacar una ficha cuyos dos números sumen 4}
D = {(0 , 4), (1 , 3), (2 , 2)}

19. Se lanzan dos dados cúbicos al aire y se suman los valores que se muestran en la cara superior. Escribe los componentes de cada uno de los siguientes sucesos y clasifícalos:
a. A = {obtener un 8}
A = {8}. Suceso elemental.
b. B = {obtener un cuadrado perfecto}
B = {4, 9}. Suceso compuesto.
c. C = {obtener un divisor de 17}
C = {Ø}. Suceso imposible.
d. D = {obtener un número múltiplo de 9} e I = {obtener un número divisor de 16}
D = {9}, F = {2, 4, 8}. Sucesos incompatibles.

SOLUCIONES PÁG. 211

20. Los resultados de lanzar 100 veces un dado son:

Dado	Frecuencia absoluta, n_i
1	18
2	24
3	7
4	16
5	15
6	20

Si consideramos el suceso A = {obtener un 2}:

a. ¿Cuál es su frecuencia absoluta?

La frecuencia absoluta de un suceso, A, es el número de veces que se produce el suceso al realizar el experimento: $n_i = 24$

b. ¿Y la frecuencia relativa?

La frecuencia relativa de un suceso, A, es el cociente entre la frecuencia absoluta del suceso A y el número de veces que se realiza el experimento: $f_i = \dfrac{24}{100} = 0,24$

21. En una urna hay 5 bolas numeradas del 0 al 4. Se realiza 500 veces el experimento aleatorio consistente en «extraer una bola, anotar su número y volver a introducirla a la urna». Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

Urna	Frecuencia absoluta, n_i
0	71
1	65
2	128
3	111
4	125

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

E = {0, 1, 2, 3, 4}

b. ¿Cuál es la frecuencia absoluta de cada uno de los sucesos elementales?

n (0) = 71; n (1) = 65; n (2) = 128; n (3) = 111; n (4) = 125

c. ¿Y la frecuencia relativa de cada uno de los sucesos elementales?

f (0) = $\dfrac{71}{500} = 0,142$; f (1) = $\dfrac{65}{500} = 0,13$; f (2) = $\dfrac{128}{500} = 0,256$; f (3) = $\dfrac{111}{500} = 0,222$; f (4) = $\dfrac{125}{500} = 0,25$

22. Formad grupos de 4 personas en clase, coged una moneda cada uno y realizad el siguiente experimento aleatorio: «lanzar la moneda y anotar en el cuaderno el resultado obtenido». Repetid el experimento 20 veces de manera que cada grupo elabore una tabla que reúna los resultados de todos los miembros del grupo.

a. ¿Cuál es la frecuencia absoluta de obtener cara? ¿Y la de obtener cruz?

b. ¿Cuál es la frecuencia relativa de cada uno de los valores anteriores?

Recoged en una única tabla los datos de cada grupo de la clase. ¿Cuáles son la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de obtener cara y de obtener cruz en esta nueva tabla?

Respuesta abierta.

23. Se introducen todas las fichas del parchís en una caja y se extrae una al azar, se anota el color y se devuelve a la caja. Este experimento aleatorio se ha repetido 1 000 veces y se han obtenido los siguientes resultados:

Fichas	Frecuencia absoluta, n_i
Roja	263
Verde	241
Amarilla	252
Azul	244

a. ¿Cuál es la frecuencia absoluta de cada uno de los colores?
n (roja) = 263; n (verde) = 241; n (amarilla) = 252; n (azul) = 244

b. Calcula la frecuencia relativa de cada color.
f (roja) = $\frac{263}{1000} = 0,263$; f (verde) = $\frac{241}{1000} = 0,241$; f (amarilla) = $\frac{252}{1000} = 0,252$;
f (azul) = $\frac{244}{1000} = 0,244$

c. Indica un número que se aproxime a todas las frecuencias relativas de cada uno de los colores.
Las frecuencias relativas están próximas a 0,25.

24. Se gira 30 veces la siguiente ruleta y se anota el número que marca la flecha cada vez que se para:

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
E = {5, 7, 9}

b. ¿Cuánto sumarán las frecuencias absolutas de cada uno de los números obtenidos?
Las frecuencias absolutas sumarán 30.

c. ¿Cuánto sumarán las frecuencias relativas de cada uno de los números obtenidos?
Las frecuencia relativas sumarán 1.

d. ¿Puede ser 0,6 la frecuencia relativa del número 5? ¿Y 1,2?
Sí, si saliera 18 veces. No, la frecuencia relativa no puede ser mayor de 1.

e. Indica dos sucesos compatibles y dos incompatibles.
Respuesta abierta. Por ejemplo, dos sucesos incompatibles son A = {impar} y B = {5}; dos sucesos incompatibles son A = {7, 9} y B = {5}.

25. En una calculadora se pulsa al azar una de las cuatro operaciones algebraicas que tiene. Este experimento se realiza 30 veces y se obtienen estos datos:

Operaciones	Frecuencia absoluta, n_i
+	12
–	6
×	3
/	9

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?
E = {+, –, ×, /}

b. Halla la frecuencia relativa de cada operación algebraica.
f (+) = $\frac{12}{30} = 0,4$; f (–) = $\frac{6}{30} = 0,2$; f (×) = $\frac{3}{30} = 0,1$; f (/) = $\frac{9}{30} = 0,3$

SOLUCIONES PÁG. 213

26. Rodrigo ha realizado el siguiente experimento aleatorio: «lanzar dos monedas al aire y anotar el número de caras obtenidas». El experimento lo ha repetido 500 veces y ha recogido los resultados en la siguiente tabla:

N.º de lanzamientos / N.º de caras	100	200	300	400	500
0 caras	17	47	76	98	126
1 cara	69	111	151	205	250
2 caras	14	42	73	97	124

Halla la frecuencia relativa de cada suceso e indica la probabilidad experimental de los siguientes sucesos:

a. A = {no obtener ninguna cara}

f (0 C) = $\frac{126}{500}=0{,}4$. La probabilidad experimental coincide con la frecuencia relativa.

b. B = {obtener una cara}

f (1 C) = $\frac{250}{500}=0{,}5$. La probabilidad experimental coincide con la frecuencia relativa.

c. C = {obtener dos caras}

f (2 C) = $\frac{124}{500}=0{,}248$. La probabilidad experimental coincide con la frecuencia relativa.

d. D = {no obtener ninguna cruz}

No obtener ninguna cruz es lo mismo que obtener dos caras.

f (0 X) = $0{,}248$. La probabilidad experimental coincide con la frecuencia relativa.

27. Explica, razonadamente, cuáles de los siguientes valores no pueden corresponder a la probabilidad de un suceso:

a. 0,25 **c. 0,075** **e.** $\frac{2}{7}$

b. –0,5 **d. 3,04** **f. 0,823**

Los valores **b.** y **d.** no pueden ser porque no están en el intervalo [0 , 1].

28. Se dispone de dos dados cúbicos, uno rojo y otro azul, pero uno de ellos está trucado. Para detectar el dado trucado, se lanzan los dos dados 1 000 veces. En la siguiente tabla se recoge el número de veces que ha salido el 5:

	Dado rojo	Dado azul
N.º de lanzamientos	1 000	1 000
N.º de veces que sale el 5	175	400

Observa los resultados y razona cuál es el dado trucado.

Es el azul, porque sale un número muy superior al que se le podría asignar mediante la probabilidad experimental.

29. En un experimento aleatorio, la probabilidad de un suceso, A, es P (A) = 0,83. Calcula la del suceso contrario.

P (Ac) = 1 – P (A) = 1 – 0,83 = 0,17

30. De una urna en la que hay bolas de diferentes colores se extrae una bola, se anota el color y se vuelve a introducir. Este experimento aleatorio se repite 100 veces y los resultados son los que puedes ver en esta tabla:

Colores \ N.º de extracciones	20	40	60	80	100
Azul	**9**	**15**	**25**	**31**	**39**
Verde	**7**	**11**	**17**	**25**	**31**
Morado	**3**	**9**	**13**	**17**	**21**
Amarillo	**1**	**5**	**5**	**7**	**9**

a. Halla la frecuencia relativa de cada uno de los sucesos.

f (azul) = $\frac{39}{100} = 0{,}39$; f (verde) = $\frac{31}{100} = 0{,}31$; f (morado) = $\frac{21}{100} = 0{,}21$;

f (amarillo) = $\frac{9}{100} = 0{,}009$

b. Asígnales una probabilidad experimental.

P (azul) = 0,39; P (verde) = 0,31; P (morado) = 0,21; P (amarillo) = 0,09

c. ¿Todas las probabilidades pertenecen al intervalo [0 , 1]?

Sí, todas están en el intervalo [0 , 1].

d. Calcula la suma de todas las probabilidades. ¿Qué resultado obtienes?

0,39 + 0,31 + 0,21 + 0,009 = 1

e. Halla la suma de la probabilidad de no obtener azul y la probabilidad de obtener azul. ¿Qué resultado obtienes?

P (no azul) + P (azul) = (1 – 0,39) + 0,39 = 0,61 + 0,39 = 1

31. Con los datos de la actividad 22 asigna una probabilidad a los siguientes sucesos:

a. A = {obtener una cruz}

P (una cruz) = $\frac{1}{2}$

b. B = {obtener una cara}

P (una cara) = $\frac{1}{2}$

32. La probabilidad de un suceso A en un experimento aleatorio es P (A) = 0,60, y la probabilidad de un suceso B, P (B) = 0,40. ¿Se puede deducir con estos datos que los sucesos A y B son sucesos contrarios? Razona tu respuesta y pon un ejemplo que ilustre tu razonamiento.

No. En el experimento de extraer una bola de un bombo con diez bolas numeradas del 0 a 9, el suceso A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} y el suceso B = {0, 1, 2, 3} cumplen las condiciones y no son contrarios.

SOLUCIONES PÁG. 215

33. En la clase de Ricardo hay 14 alumnos morenos, 8 rubios, 7 castaños y 1 pelirrojo. Si se elige un alumno al azar, halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a. Ser rubio.

P (ser rubio) = $\frac{8}{30} = 0,27$

b. Ser castaño.

P (ser castaño) = $\frac{7}{30} = 0,23$

c. Ser moreno.

P (ser moreno) = $\frac{14}{30} = 0,47$

d. Ser pelirrojo.

P (ser pelirrojo) = $\frac{1}{30} = 0,03$

34. En una caja hay bombones de diversos tipos: 8 de chocolate negro, 9 de chocolate con leche, 5 de chocolate blanco y 6 bombones con envoltorio. Si se escoge un bombón al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a. A = {escoger un bombón de chocolate negro}

P (bombón de chocolate negro) = $\frac{8}{28} = 0,29$

b. B = {escoger un bombón de chocolate blanco}

P (bombón de chocolate blanco) = $\frac{5}{28} = 0,18$

c. C = {escoger un bombón de chocolate con leche}

P (bombón de chocolate con leche) = $\frac{9}{28} = 0,32$

d. D = {escoger un bombón con envoltorio}

P (bombón con envoltorio) = $\frac{6}{28} = 0,21$

35. Una baraja española está formada por 40 naipes distribuidos en cuatro palos. Se realiza el experimento aleatorio de extraer una carta al azar. Halla la probabilidad que tienen los siguientes sucesos:

a. A = {extraer el as de espadas}

P (extraer el as de espadas) = $\frac{1}{40} = 0,025$

b. B = {extraer una carta de copas}

P (extraer una carta de copas) = $\frac{10}{40} = 0,25$

c. C = {extraer un caballo}

P (extraer un caballo) = $\frac{4}{40} = 0,10$

d. D = {extraer una figura}

P (extraer una figura) = $\frac{12}{40} = 0,30$

36. Las notas finales de curso de la clase de Ismael han sido las siguientes: 3 alumnos han suspendido 3 materias, 5 han suspendido 2 materias, 2 han suspendido 1 materia, y 15 han aprobado todas las materias. Si se elige un alumno al azar, halla la probabilidad de los siguientes sucesos:

a. A = {lo ha aprobado todo}

P (lo ha aprobado todo) = $\frac{15}{25} = 0,6$

b. B = {ha suspendido 2 materias}

P (ha suspendido 2 materias) = $\frac{5}{25} = 0,2$

c. C = {ha suspendido más de una materia}

P (ha suspendido más de una materia) =
= P (ha suspendido 3 materias) + P (ha suspendido 2 materias) =
$\frac{3}{25} + \frac{5}{25} = \frac{8}{25} = 0,32$

d. D = {no ha aprobado todo}

P (no ha aprobado todo) = 1 – P (lo ha aprobado todo) = 1 – $\frac{15}{25} = \frac{10}{25} = 0,4$

37. Manuel quiere comprar un marcador fluorescente que cuesta 70 cts. y en el abrigo lleva las siguientes monedas:

Si coge del bolsillo una sola moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que pueda comprar el marcador?

Solo puede comprar el marcador si saca alguna de las 2 monedas de 1 € o la moneda de 2 €. Hay 3 casos favorables.

P (comprar marcador) = $\frac{3}{5} = 0,6$

38. Se elige al azar un día del mes de marzo para realizar una prueba deportiva.

a. Escribe un suceso seguro y un suceso imposible asociados a este experimento.

A = {números del 1 al 31}; B = {33}

b. Calcula la probabilidad de cada uno.

P (A) = 1; P (B) = 0

39. Una urna contiene bolas de colores. No se sabe qué cantidad hay ni de qué colores son, pero sí que la probabilidad de extraer una bola azul es $\frac{2}{5}$.
¿Significa esto que en la urna hay 5 bolas y que 2 de ellas son azules? Razona tu respuesta.

No, porque puede ser que haya 10 bolas en la urna y 4 sean azules. Lo que indica es que teóricamente, de cada 5 extracciones, dos serán bolas azules.

40. Se considera el experimento de lanzar un dado dodecaédrico con sus caras numeradas del 1 al 12 y anotar el resultado obtenido. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a. A = {obtener un número primo}

Los números primos son: 2, 3, 5, 7 y 11.

P (obtener número primo) = $\frac{5}{12} = 0,42$

b. B = {obtener un divisor de 12}

Los divisores de 12 son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

P (obtener divisor de 12) = $\frac{6}{12} = 0,5$

c. C = {obtener un múltiplo de 3}

Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9 y 12.

P (obtener un múltiplo de 3) = $\frac{4}{12} = 0,33$

d. D = {obtener un número impar}

Los números impares son: 1, 3, 5, 7, 9 y 11.

P (obtener número impar) = $\frac{6}{12} = 0,5$

41 Pedro y Javier están jugando con la siguiente ruleta:

Cada uno elige un color y hace girar la ruleta; gana el que ha seleccionado el color en el que se ha parado la flecha. Encuentra la probabilidad de ganar si se elige:

a. A = {el color rojo}

P (color rojo) = $\frac{4}{12} = 0,3$

b. B = {el color amarillo}

P (color amarillo) = $\frac{6}{12} = 0,5$

c. C = {el color azul}

P (color azul) = $\frac{2}{12} = 0,17$

d. D = {un color que no sea azul}

P (un color que no sea azul) = 1 – P (color azul) = 1 – 0,17 = 0,83

42. En grupos de cinco compañeros, construid un dado sesgado. Hay diferentes formas sencillas de hacerlo; investigadlo. A continuación, con ese dado, realizad un número elevado de lanzamientos y analizad cuál es la probabilidad que tiene de salir cada una de las caras y su diferencia con respecto a las de un dado normal.

Respuesta abierta.

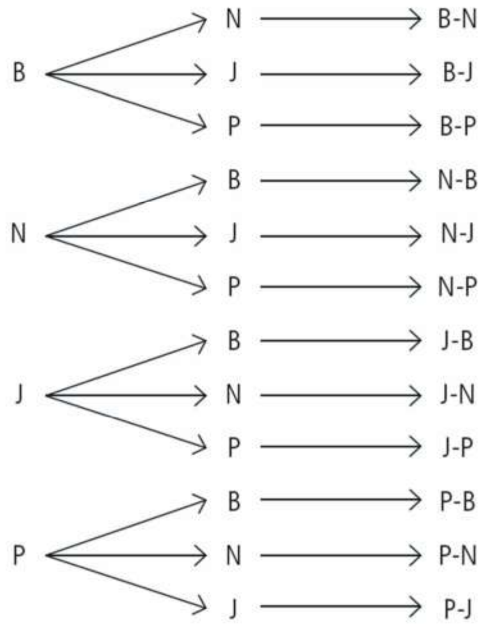
43. Visualiza el vídeo que se encuentra en la siguiente dirección de Internet y contesta a las preguntas que se van formulando en las distintas pantallas:

http://conteni2.educarex.es/mats/11966/contenido/

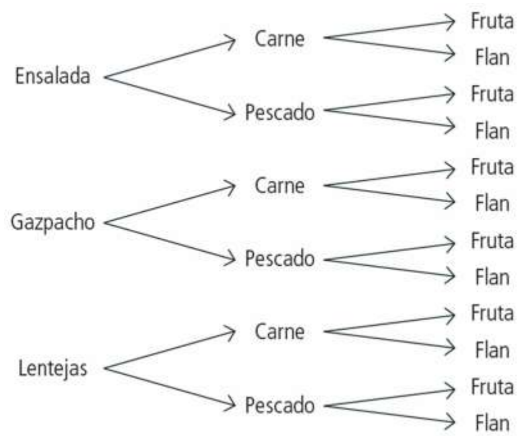
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 217

44. Benito, Nicolás, Jorge y Pilar han llegado a las semifinales de una competición de cálculo mental. Muestra en un diagrama de árbol las formas en que podrían quedar en primera y segunda posición.



45. En un restaurante se ofrece un menú que consta de dos platos y postre: de primer plato se puede elegir entre ensalada, gazpacho o lentejas; de segundo, entre carne o pescado, y de postre, entre fruta o flan. Si se considera el experimento de elegir un menú al azar:
a. Representa la información en un diagrama de árbol.

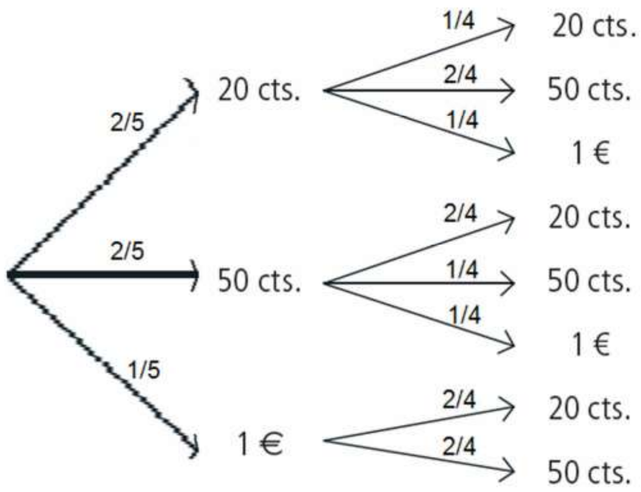


b. **Escribe el espacio muestral.**
E = {E-C-Fr, E-C-Fl, E-P-Fr, E-P-Fl, G-C-Fr, G-C-Fl, G-P-Fr, G-P-Fl, L-C-Fr, L-C-Fl, L-P-Fr, L-P-Fl}

c. **Halla la probabilidad de elegir el menú formado por lentejas, pescado y fruta.**
P (L-P-Fr) = $\frac{1}{12} = 0{,}083$

d. **Determina la probabilidad de elegir un menú en el que haya carne.**
P (E-C-Fr) + P (E-C-Fl) + P (G-C-Fr) + P (G-C-Fl) + P (L-C-Fr) + P (L-C-Fl) =
$= 6 \cdot \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = 0{,}5$

46. En el bolsillo del pantalón, Fermín lleva 2 monedas de 20 cts., otras 2 monedas de 50 cts. y 1 moneda de 1 €. Primero extrae una moneda del bolsillo y a continuación la otra. Utilizando un diagrama de árbol, halla la probabilidad de que:

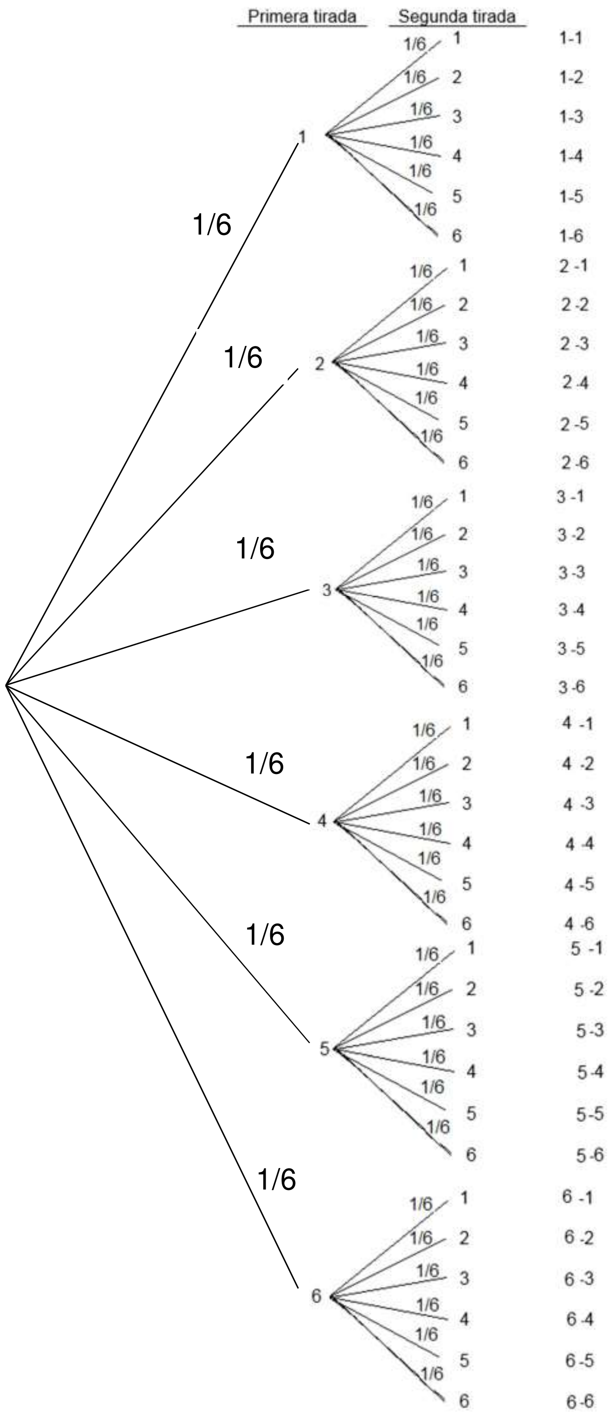


a. **Haya cogido una moneda de 1 € y otra de 50 cts.**
P (1.ª moneda 50 cts.) · P (2.ª moneda 1 €) + P (1.ª moneda 1 €) · P (2.ª moneda 50 cts.) =
$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{20}+\frac{2}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}=0{,}2$

b. **Haya cogido la moneda de 1 €.**
P (1.ª moneda 20 cts.) · P (2.ª moneda 1 €) + P (1.ª moneda 50 cts.) · P (2.ª moneda 1 €) + + P (1.ª moneda 1 €) · P (2.ª moneda 20 cts.) + P (1.ª moneda 1 €) · P (2.ª moneda 50 cts.) =
$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{20}+\frac{2}{20}+\frac{2}{20}+\frac{2}{20}=\frac{8}{20}=0{,}4$

c. **Entre las dos monedas sumen menos de 1 €.**
P (1.ª moneda 20 cts.) · P (2.ª moneda 20 cts.) + P (1.ª moneda 20 cts.) · P (2.ª moneda 50 cts.) + + P (1.ª moneda 50 cts.) · P (2.ª moneda 20 cts.) =
$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{2}{20}+\frac{4}{20}+\frac{4}{20}=\frac{10}{20}=0{,}5$

47. Representa en un diagrama de árbol los resultados que se pueden obtener al lanzar un dado dos veces. Halla las siguientes probabilidades:



a. Sacar dos seises.

$$\text{P (sacar dos seises)} = \frac{1}{36} = 0{,}028$$

b. Sacar al menos un cinco.

$$\text{P (sacar al menos un cinco)} = \frac{11}{36} = 0{,}305$$

48. En el juego de «pares o nones», dos jugadores eligen par o non, para, a continuación, extender a la vez el número de dedos que deseen de una de sus manos. Se hace el recuento de dedos extendidos y gana el jugador que haya elegido la paridad correcta.

a. Representa las diferentes posibilidades del juego en un diagrama de árbol.

El diagrama de árbol tiene 6 elementos en la primera rama, desde el 0 hasta el 5, y en la segunda rama, de cada elemento anterior salen 6 elementos, desde el 0 hasta el 5. En total hay 36 posibilidades.

b. Halla la probabilidad de que saquen par los dos jugadores.

P (sacar par los dos) = P (sacar par el 1.º) · P (sacar par el 2.º) =

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = 0,25$$

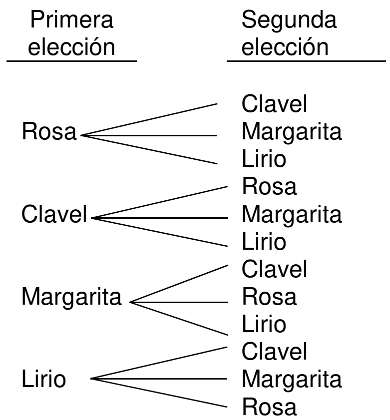
c. Halla la probabilidad de ganar si se elige impar.

P (suma impar) = P (sacar par el 1.º) · P (sacar impar el 2.º) +

+ P (sacar impar el 1.º) + P (sacar par el 2.º) =

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{18}{36} = 0,5$$

49. En una floristería dan la opción de confeccionar un ramo con dos tipos diferentes de flores a elegir entre rosas, claveles, margaritas y lirios.



a. Si se elige los dos tipos de flores al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el ramo tenga rosas y claveles?

P (tener rosas y claveles) = P (1.ª rosa) · P (2.ª clavel) + P (1.ª clavel) · P (2.ª rosa) =

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = 0,17$$

b. ¿Y la probabilidad de que no contenga margaritas?

P (no contenga margaritas) $= 1 - P(\text{tener margaritas}) = 1 - \frac{6}{12} = 0,5$

50. En el cumpleaños de Diego, cada invitado puede elegir para la comida entre hamburguesa o perrito, entre agua o refresco y entre tarta o helado. Considera el experimento «elegir el menú compuesto por las tres opciones».

a. Halla la probabilidad de elegir el menú formado por hamburguesa, refresco y helado.

P (H-R-He) $= \frac{1}{8} = 0,125$

b. Determina la probabilidad de elegir un menú en el que no haya helado.

P (no contenga helado) = $1 - \text{P}\left(\text{tenga helado}\right) = 1 - \frac{4}{8} = 0,5$

51. Con los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4 se forman números de tres cifras distintas (no pueden empezar por 0). Establece la probabilidad de:

a. Formar el número 321.

Un número formado por 3 cifras puede tener:

3.ª cifra: 4 posibilidades		2.ª cifra: 4 posibilidades		1.ª cifra: 3 posibilidades	
4	·	4	·	3	= 48

P (formar el número 321) = P (3.ª cifra sea 3) · P (2.ª cifra sea 2) · P (1.ª cifra sea 1)

$= = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{48} = 0,02$

b. Formar un número que tenga el 4 en las decenas.

P (que tenga el 4 en las decenas) = P (3.ª cifra sea 1, 2, 3) · P (2.ª cifra sea 4) ·

· P (1.ª cifra sea distinta de la 3.ª cifra y distinta de 4) = $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{9}{48} = 0,1875$

c. Formar un número mayor de 200.

P (número mayor de 200) = P (3.ª cifra sea 2) · P (2.ª cifra sea distinta de 2) ·

· P (1.ª cifra sea distinta de 2 y de la 2.ª cifra) + P (3.ª cifra sea 3) ·

· P (2.ª cifra sea distinta de 3) · P (1.ª cifra sea distinta de 3 y de la 2.ª cifra) +

+ P (3.ª cifra sea 4) · P (2.ª cifra sea distinta de 4) ·

· P (1.ª cifra sea distinta de 4 y de la 2.ª cifra) =

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$

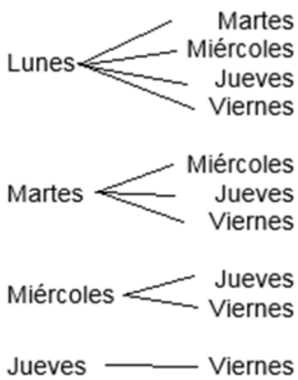
d. Formar un número entre 100 y 200.

P (número entre 100 y 200) = P (3.ª cifra sea 1) · P (2.ª cifra sea distinta de 1) ·

· P (1.ª cifra sea distinta de 1 y de la 2.ª cifra) = $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{4} = 0,25$

52. Alba tiene que entrenar dos días a la semana para recuperarse de una lesión, sin contar sábados ni domingos. Si elige los días al azar, cuál es la probabilidad de:

a. Entrenar martes y jueves.



P (entrenar martes y jueves) $= \frac{1}{10} = 0,1$

b. No entrenar el lunes.

P (no entrenar el lunes) $= 1 -$ P$\left(\text{entrenar lunes}\right) = 1 - \dfrac{4}{10} = 0{,}6$

c. Entrenar dos días seguidos.

P (entrenar dos días seguidos) $= \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

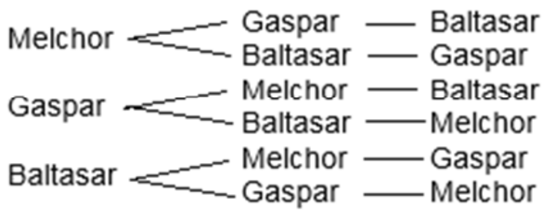
d. Entrenar un viernes.

P (entrenar un viernes) $= \dfrac{4}{10} = 0{,}4$

Nota: no se considera el orden de los días.

53. Sara está montando el belén en casa y este año no tiene claro cuál va a ser el orden en el que va a colocar a los Reyes Magos, por lo que lo elegirá al azar. Halla las siguientes probabilidades:

a. Los dispone por este orden: Melchor, Gaspar y Baltasar.



P (Melchor, Gaspar y Baltasar) $= \dfrac{1}{6} = 0{,}167$

b. Gaspar es el primero.

P (Gaspar sea el primero) $= \dfrac{2}{6} = 0{,}333$

c. Baltasar no es el último.

P (Baltasar no sea el último) $= \dfrac{4}{6} = 0{,}667$

d. Melchor y Gaspar van seguidos.

P (Melchor y Gaspar vayan seguidos) $= \dfrac{4}{6} = 0{,}667$

SOLUCIONES PÁG. 218

1. Simula el experimento aleatorio de lanzar un dado tetraédrico, con sus cuatro caras numeradas del 1 al 4. Determina la probabilidad que se le asignaría al suceso {obtener un 3} simulando 50 lanzamientos.
Respuesta abierta.

2. Simula el experimento aleatorio de formar dígitos de dos cifras extrayendo dos bolas de dos bombos diferentes. Del primer bombo, que contiene 9 bolas numeradas del 1 al 9, se extraen las decenas del número, mientras que del segundo bombo, que contiene 10 bolas numeradas del 0 al 9, se extraen las unidades del número. Simulando 50 extracciones, establece la probabilidad que se le asignaría al suceso {obtener un número par}.
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 219

1. **Escribe un ejemplo de un experimento determinista y otro de un experimento aleatorio.**
   Respuesta abierta. Por ejemplo, un experimento determinista es observar a qué temperatura congela el agua. Un experimento aleatorio es lanzar un dado cúbico al aire y observar qué número sale.

2. **Define qué es el espacio muestral y qué es un suceso de un experimento aleatorio.**
   El espacio muestral es el conjunto de los resultados que se pueden producir en un experimento aleatorio. Un suceso es un subconjunto del espacio muestral.

3. **Explica qué es el suceso contrario a un suceso dado.**
   Es el suceso que tiene únicamente todos los resultados del espacio muestral que no forman parte de A.

4. **¿Qué diferencia existe entre sucesos compatibles y sucesos incompatibles?**
   Los sucesos compatibles tienen elementos en común, mientras que los incompatibles no los tienen.

5. **Enuncia la ley de los grandes números.**
   Si un experimento aleatorio se repite un número elevado de veces, la frecuencia relativa de un suceso irá fluctuando hasta estabilizarse en un valor fijo, el cual se asigna como la probabilidad experimental del suceso.

6. **¿Por qué la probabilidad de un suceso en un experimento aleatorio está siempre comprendida entre 0 y 1?**
   Porque la probabilidad se construye a partir de la frecuencia relativa del suceso, que toma valores entre 0 y 1.

7. **¿Para qué tipo de sucesos la probabilidad es 0? ¿Y para cuáles es 1?**
   La probabilidad es 0 para los sucesos imposibles. La probabilidad es 1 para los sucesos seguros.

8. **¿Cuál es el suceso contrario al suceso seguro?**
   El suceso imposible.

9. **¿Cuál es la condición necesaria para que se pueda aplicar la regla de Laplace en un experimento aleatorio?**
   La condición necesaria es que los sucesos elementales sean equiprobables.

10. **Realiza una presentación digital a tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Gloster…**
    Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 220

EXPERIMENTOS ALEATORIOS. ESPACIO MUESTRAL

1. **Indica si los siguientes experimentos son aleatorios o son deterministas. Razona tu respuesta.**
   a. **Coger de un cajón, y sin mirar, unos calcetines de entre varios colores e indicar el color.**
   Es aleatorio porque el resultado no se puede predecir antes de realizar el experimento.
   b. **Decir el ganador de un torneo de patinaje artístico antes de que se dispute.**
   Es aleatorio porque el resultado no se puede predecir antes de realizar el experimento.
   c. **De entre los tres resultados posibles de un partido de fútbol, 1, X, 2, acertar, en el descanso del partido, el resultado final.**
   Es aleatorio porque el resultado no se puede predecir antes de realizar el experimento.
   d. **Decir el tiempo que tardará en llegar al suelo un objeto que se deja caer desde la ventana de un primer piso.**
   Es determinista porque el resultado se puede predecir antes de realizar el experimento.

2. **Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios:**
   a. **Elegir al azar un color de los que integran el arco iris.**
   E = {rojo, naranja, amarillo, verde, cian, azul, violeta}
   b. **Seleccionar al azar uno de los meses del año.**
   E = {enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre}
   c. **Extraer una bola de un bombo con 10 bolas numeradas del 0 al 9.**
   E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
   d. **Elegir uno de los múltiplos del número 13, que sean menores de 100.**
   E = {0, 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91}

3. **Escribe el espacio muestral de un experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y anotar la resta del mayor menos el menor de los puntos obtenidos en la cara superior.**
   E = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

4. **En una bolsa hay 7 bolas de colores numeradas del 1 al 7. Las bolas con número par son rojas, y las impares son azules. Si se extrae una bola al azar, indica el espacio muestral de este experimento.**
   E = {1 azul, 2 rojo, 3 azul, 4 rojo, 5 azul, 6 rojo, 7 azul}

SUCESOS. TIPOS DE SUCESOS

5. **Se extrae una bola de la siguiente urna:**

Indica:

a. **El espacio muestral.**
E = {1 rojo, 2 verde, 3 amarillo, 4 negro, 5 azul}

b. **Un suceso compuesto.**
Respuesta abierta. Por ejemplo, A = {1 rojo, 2 verde}

c. **Un suceso y su contrario.**
Respuesta abierta. Por ejemplo, D = {4 negro, 5 azul} y Dc = {1 rojo, 2 verde, 3 amarillo}

d. **Un suceso seguro.**
F = {sacar bola del 1 al 5}

6. **Se considera el experimento aleatorio «lanzar un dado tetraédrico con sus cuatro caras numeradas del 1 al 4 y anotar el número obtenido». Indica:**

a. **El espacio muestral.**
E = {1, 2, 3, 4}

b. **Un suceso compuesto.**
Respuesta abierta. Por ejemplo, B = {1, 4}

c. **Dos sucesos compatibles.**
Respuesta abierta. Por ejemplo, C = {1, 2, 3} y D = {par}

d. **Un suceso y su contrario.**
Respuesta abierta. Por ejemplo, F = {1, 2} y Dc = {3, 4}

7. **Para la ruleta de la figura indica:**

a. **El espacio muestral.**
E = {rojo, rosa, verde, azul}

b. **Un suceso elemental.**
Respuesta abierta. Por ejemplo, B = {rojo}

c. **Un suceso compuesto.**
Respuesta abierta. Por ejemplo, C = {rojo, rosa}

d. **Un suceso seguro.**
D = {rojo, rosa, verde, azul}

e. **Un suceso imposible.**
Respuesta abierta. Por ejemplo, F = {amarillo}

f. **Dos sucesos compatibles.**
Respuesta abierta. Por ejemplo, G = {rojo, azul} y H = {azul, rosa, verde}

8. Considera el experimento aleatorio consistente en coger al azar una ficha de un juego de dominó y escribe:

a. Un suceso compuesto.

Respuesta abierta. Por ejemplo, B = {(4, 1), (5, 4)}

b. Dos sucesos que sean compatibles.

Respuesta abierta. Por ejemplo, C = {cuatro doble} y D = {al menos un cuatro}

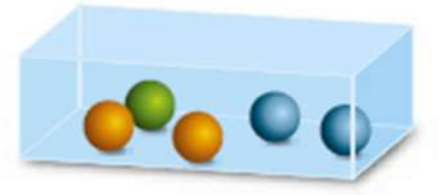
c. Dos sucesos que sean incompatibles.

Respuesta abierta. Por ejemplo, F = {blanca doble} y G = {(3, 4)}

9. En el experimento de lanzar un dado, elige un suceso, A, y escribe cuál es el contrario del suceso A.

Respuesta abierta. Por ejemplo, A = {salir número par}, el suceso contrario al suceso A es A^c = {no salir número par}.

10. En una urna como la de la figura se extraen dos bolas sin introducir la primera y se anota el color.



a. Indica un suceso elemental y su contrario.

Respuesta abierta. Por ejemplo, A = {(naranja, naranja)} y A^c = {(naranja, verde), (naranja, azul), (verde, naranja), (verde, azul), (azul, naranja), (azul, verde), (azul, azul)}

b. Indica dos sucesos compatibles.

Respuesta abierta. Por ejemplo, B = {(naranja, naranja), (naranja, verde), (naranja, azul)} y C = {(naranja, azul), (verde, naranja), (verde, azul), (azul, naranja), (azul, verde), (azul, azul)}

c. Indica un suceso imposible y su contrario.

Respuesta abierta. Por ejemplo, D = {(rojo, rojo)} y D^c = {(naranja, naranja), (naranja, verde), (naranja, azul), (verde, naranja), (verde, azul), (azul, naranja), (azul, verde), (azul, azul)}

11. ¿Completan siempre el espacio muestral los sucesos A y A^c? Considera el experimento del lanzamiento de un dado y pon un ejemplo que ilustre tu respuesta.

Sí, siempre forman el espacio muestral los dos juntos. Respuesta abierta, por ejemplo: A = {1, 2} y A^c = {3, 4, 5, 6}

12. Considera un experimento aleatorio y contesta a las siguientes preguntas poniendo un ejemplo:

a. ¿Es el contrario de un suceso seguro un suceso imposible?

Sí. Por ejemplo, una urna con bolas numeradas todas con números pares. Si se hace una extracción, el suceso seguro es A = {par} y el suceso imposible es B = {impar}.

b. ¿Es el contrario de un suceso imposible un suceso seguro?

No. Por ejemplo, al lanzar un dado numerado de con números pares se observa el número que queda en la parte superior. El suceso seguro es A = {par} y un suceso imposible es B = {1}.

SOLUCIONES PÁG. 221

13. **Los sucesos contrarios y los sucesos incompatibles no son conceptos equivalentes, pero mantienen una relación que los vincula siempre en un sentido.**
    Considera el experimento consistente en lanzar un dado y contesta a las siguientes preguntas, dando un ejemplo que demuestre tu respuesta.
    a. **¿Son siempre incompatibles los sucesos contrarios?**
       Sí. Por ejemplo, A = {par} y B = {impar}

    b. **¿Son siempre contrarios los sucesos incompatibles?**
       No. Por ejemplo, A = {par} y B = {1}

FRECUENCIA DE UN SUCESO

14. **Se introducen las diferentes piezas de un ajedrez en una caja y se extrae una al azar, se anota qué pieza es y se devuelve a la caja.**
    Este experimento aleatorio se ha repetido 40 veces y se han obtenido los siguientes resultados:

	Peón	Torre	Caballo	Alfil	Rey	Reina
Frecuencia absoluta, n_i	**7**	**5**	**10**	**3**	**8**	**7**

a. **¿Cuál es el espacio muestral del experimento?**
   E = {peón, torre, caballo, alfil, rey, reina}
b. **¿Cuál es la frecuencia absoluta de cada una de las piezas?**
   n (peón) = 7; n (torre) = 5; n (caballo) = 10; n (alfil) = 3; n (rey) = 8; n (reina) = 7
c. **Calcula la frecuencia relativa de cada pieza.**
   f (peón) = $\frac{7}{40}$ = 0,175; f (torre) = $\frac{5}{40}$ = 0,125; f (caballo) = $\frac{10}{40}$ = 0,25;
   f (alfil) = $\frac{3}{40}$ = 0,075; f (rey) = $\frac{8}{40}$ = 0,2; f (reina) = $\frac{7}{40}$ = 0,175

15. **El experimento de la actividad anterior se repite hasta llegar a las 3 000 reiteraciones. Se han obtenido estos nuevos resultados:**

Frecuencia absoluta, n_i	Peón	Torre	Caballo	Alfil	Rey	Reina
1 000	150	173	159	181	166	171
2 000	329	332	330	340	331	338
3 000	491	505	496	507	499	502

a. **Halla las frecuencias relativas de las piezas en cada tramo de lanzamiento.**

n_i	f (peón)	f (torre)	f (caballo)	f (alfil)	f (rey)	f (reina)
1 000	0,150	0,173	0,159	0,181	0,166	0,171
2 000	0,164 5	0,166	0,165	0,17	0,165 5	0,169
3 000	0,163 7	0,168 3	0,165 3	0,169	0,166 3	0,167 3

b. **Analiza si las frecuencias relativas tienden hacia algún número concreto.**
   Cada una de ellas parece que tienden a 0,166.

16. Simula 30 veces el lanzamiento de un dado tetraédrico generando una secuencia de números entre 1 y 4 como se describe en la sección *Herramientas tecnológicas.*

a. ¿Cuál es la frecuencia absoluta de cada suceso?

Respuesta abierta.

b. Halla la frecuencia relativa de cada uno de los sucesos.

Respuesta abierta.

PROBABILIDAD

17. En el experimento consistente en lanzar una chincheta y observar si la punta queda hacia arriba o tocando el suelo, los resultados de las 500 veces que se ha repetido son:

N.º de lanzamientos	100	200	300	400	500
Punta hacia arriba	18	47	77	99	126

a. ¿Qué probabilidad experimental asignarías al suceso A = {punta hacia arriba} según los datos de la tabla?

P {punta hacia arriba} $= \frac{126}{500} = 0{,}25$

b. ¿Y al suceso B = {punta hacia abajo}?

P (punta hacia abajo) = 1 – 0,25 = 0,75

18. En una estantería hay colocados CD de dos tipos: de música clásica y de pop. Sara y Rosa van a elegir un CD al azar y, antes, Sara dice: «La probabilidad de coger uno de música clásica es $\frac{9}{22}$», a lo que Rosa responde: «Pero la probabilidad de coger uno de música pop es $\frac{7}{11}$».

a. ¿Pueden ser ciertas ambas afirmaciones?

No, porque son sucesos contrarios y la suma de sus probabilidades debe dar 1.

En este caso la suma es: $\frac{9}{22} + \frac{7}{11} = \frac{9}{22} + \frac{14}{22} = \frac{23}{22} = 1{,}05$

b. Si solamente Sara estuviera en lo cierto, ¿cuál sería la probabilidad de escoger un CD de música pop?

P (CD música pop) $= 1 - \frac{9}{22} = \frac{22}{22} - \frac{9}{22} = \frac{13}{22} = 0{,}59$

19. Álvaro y Rodrigo van a jugar a la lotería y tienen dos números para elegir, acabados uno en 00 y el otro en 34. Álvaro dice que no quiere el de terminación 00 porque tiene menos posibilidades de salir que el otro. Rodrigo, en cambio, replica que él prefiere el 00 porque el otro número resultó agraciado la pasada semana y tiene, por ello, menos posibilidades de salir. ¿Tú qué piensas? ¿Quién está en lo cierto? Razona tu respuesta.

Ninguno está en lo cierto, porque todos los números, sucesos elementales, son equiprobables. En cada sorteo el experimento se repite de nuevo con idénticas condiciones que la primera.

20. En una tómbola de la feria del pueblo de César tienen el siguiente juego: un jugador paga 1 € y extrae una bola de una urna que contiene 1 bola roja, 3 bolas verdes y 6 negras; según sea el color de la bola extraída se procede de la siguiente forma:
• Si es roja, el jugador gana 3 €.
• Si es verde, el jugador gana 2 €.
• Si es negra, el jugador pierde lo apostado.
a. Formad grupos en clase y simulad la práctica del juego con el mismo experimento o uno similar.
b. Repetid el experimento 50 veces y extraed conclusiones.
c. Juntad los resultados de cada grupo y analizad esa información. ¿Quién sale beneficiado en el juego?

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 222

21. Un dado tetraédrico trucado tiene la siguiente característica: la probabilidad de obtener cada uno de los números pares es idéntica e igual a 0,35 cada una. Si se sabe que la probabilidad de obtener cada uno de los números impares es también igual, calcula la probabilidad de sacar un 3.

La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales es 1, por tanto: 1 = P (1) + P (2) + P (3) + P (4)

1 = 2 · P (impar) + 2 · P (par)

1 = 2 · P (impar) + 2 · 0,35

$$\text{P (impar)} = \frac{1-2\cdot 0{,}35}{2} \Rightarrow \text{P (impar)} = \frac{1-0{,}70}{2} \Rightarrow \text{P (impar)} = 0{,}15$$

P (1) = P (3) = 0,15

REGLA DE LAPLACE

22. Indica si las probabilidades de los siguientes sucesos son correctas y, en caso contrario, rectifícalas:

a. P (1) = 0,6

No es correcta. $P(1) = \frac{4}{8} = 0{,}5$

b. P (2) = 0,25

No es correcta. $P(2) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

c. P (3) = 0,125

Sí, es correcta. $P(3) = \frac{1}{8} = 0{,}125$

d. P (impar) = 0,5

No es correcta. $P(\text{impar}) = \frac{5}{8} = 0{,}625$

23. Juan tiene en el estuche 12 rotuladores, 9 lápices de colores, 4 bolígrafos y 2 lapiceros. Si coge un objeto al azar del estuche, halla la probabilidad de sacar:

a. A = {un bolígrafo}

$$P\ (\text{un bolígrafo}) = \frac{4}{27} = 0{,}148$$

b. B = {un rotulador}

$$P\ (\text{un rotulador}) = \frac{12}{27} = 0{,}444$$

c. C = {un lapicero}

$$P\ (\text{un lapicero}) = \frac{2}{27} = 0{,}074$$

d. D = {un rotulador o un lápiz de color}

$$P\ (\text{un rotulador o un lápiz de color}) = \frac{12}{27} + \frac{9}{27} = \frac{21}{27} = 0{,}777$$

24. María usa la tarjeta bancaria en muchas ocasiones; la emplea para comprar en diversos comercios, sacar dinero de los cajeros, etc. Su tarjeta tiene una clave de 4 dígitos del 0 al 9. Está preocupada por la seguridad de su clave y cree que puede ser fácil adivinarla en caso de pérdida:

a. ¿Cuántas claves diferentes se pueden crear?

Se puede crear $10^4 = 10\,000$ claves.

b. ¿Cuál es la probabilidad de acertar su clave en un solo intento?

$$P\ (\text{acertar en un solo intento}) = \frac{1}{10000} = 0{,}000\,1$$

c. ¿Y si supiéramos que empieza por 3?

$$P\ (\text{acertar sabiendo que empieza por 3}) = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

25. En la bandeja de dulces de Navidad, Fe tiene 5 polvorones, 4 mazapanes y 7 trozos de turrón. Si su padre coge uno al azar, cuál es la probabilidad de que el elegido:

a. Sea un polvorón.

$$P\ (\text{sea un polvorón}) = \frac{5}{16} = 0{,}312\,5$$

b. Sea un mazapán.

$$P\ (\text{sea un mazapán}) = \frac{4}{16} = 0{,}25$$

c. No sea un polvorón.

P (no sea un polvorón) = 1 – P (sea un polvorón) = 1 – 0,312 5 = 0,687 5

d. No sea un trozo de turrón.

$$P\ (\text{no sea un trozo de turrón}) = 1 - P\ (\text{sea un trozo de turrón}) = 1 - \frac{7}{16} = 0{,}562\,5$$

26. De los 25 alumnos de la clase de Yohana, 15 han aprobado todas las materias, a 5 les ha quedado una, 3 han suspendido 2, y a 2 les han quedado 3 o más. Si se elige un alumno al azar, halla la probabilidad de que haya:

a. Aprobado todo.

$$P\ (\text{apruebe todo}) = \frac{15}{25} = 0{,}6$$

b. Suspendido una materia.

P (suspenda una materia) $= \frac{5}{25} = 0{,}2$

c. Suspendido más de una materia.

P (suspenda más de una materia) =

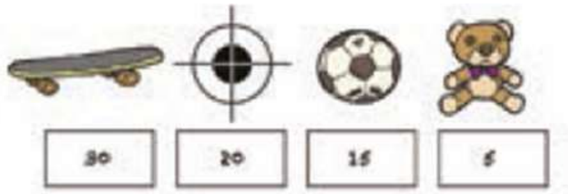
P (suspenda 2 materias) + P (suspenda 3 o más materias) $= \frac{3}{25} + \frac{2}{25} = \frac{5}{25} =$ 0,2

d. Suspendido alguna materia.

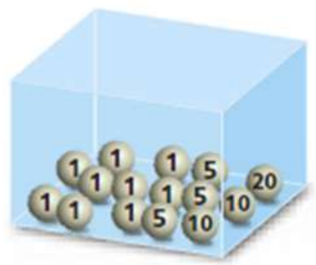
P (suspenda alguna materia) =

P (suspenda una materia) + P (suspenda 2 materias) + P (suspenda 3 o más materias) $= \frac{5}{25} + \frac{3}{25} + \frac{2}{25} = \frac{10}{25} = 0{,}4$

27. En la feria de verano que se celebra en el pueblo de Mario hay una tómbola en la que se venden boletos con puntos con los que se pueden conseguir estos regalos:



Los puntos de los boletos se consiguen a través de la bola extraída de una urna con la composición que se puede ver en la imagen:



Halla la probabilidad de estos sucesos al extraer un solo boleto:

a. Conseguir el monopatín.

P (conseguir el monopatín) = 0

b. Conseguir el muñeco.

P (conseguir el muñeco) $= \frac{3}{15} = 0{,}2$

c. No conseguir nada.

P (no ganar nada) $= \frac{11}{15} = 0{,}73$

d. Conseguir un premio que no sea el muñeco.

P (conseguir un premio que no sea el muñeco) = P (conseguir el monopatín) +

+ P (conseguir el balón) + P (conseguir la diana) $= \frac{0}{15} + \frac{0}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{15} = 0{,}07$

28. En una urna se introducen tarjetas con cada una de las letras de las palabras:

Se extrae una tarjeta al azar de la urna.
La frecuencia absoluta de cada letra es:

R	E	B	A	Ñ	O	P	S	I	N
4	4	2	6	2	2	2	2	1	2

a. ¿Qué tiene mayor probabilidad de salir: una vocal o una consonante?
Hay más probabilidad de salir una consonante.

P (consonante) $= \dfrac{14}{27} = 0{,}518$

b. ¿Qué letra es más probable que salga?

Es más probable que salga la letra A. P (A) $= \dfrac{6}{27} = 0{,}222$

c. ¿Qué letras tienen la misma probabilidad de ser extraídas?

Tienen la misma probabilidad la letra R y la E; y la B, la Ñ, la P, la S, la N y la O.

d. Después de sacar las letras que forman la palabra ÉBANO, ¿qué letra es más probable que salga: la R o la E?
Tras sacar las letras de la palabra ÉBANO, la frecuencia absoluta de cada letra es:

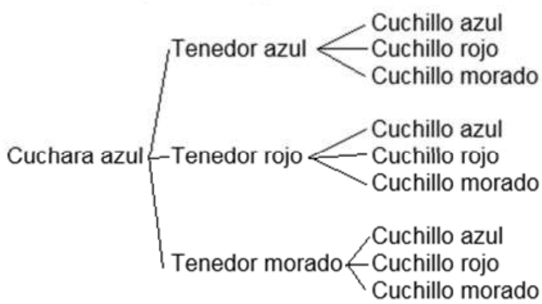
R	E	B	A	Ñ	O	P	S	I	N
4	3	1	5	2	1	2	2	1	1

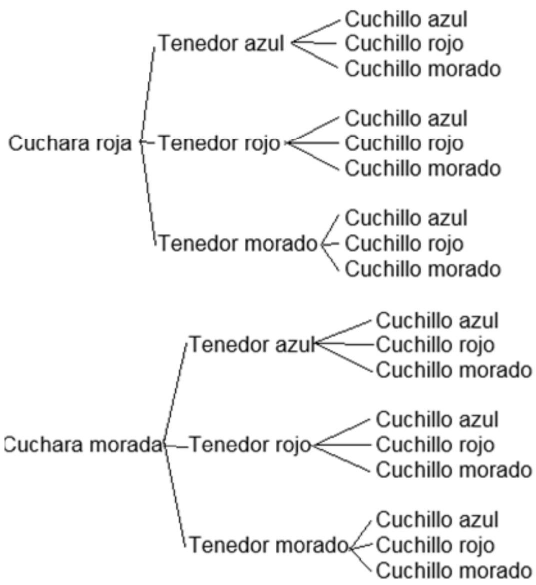
Es más probable que salga la R. P (salir R) $= \dfrac{4}{22} = 0{,}18$

SOLUCIONES PÁG. 223

DIAGRAMA DE ÁRBOL

29. Al coger los cubiertos para comer, se dispone de tres juegos de cuchara, tenedor y cuchillo en tres colores diferentes: azul, rojo y morado. Si se selecciona al azar un cubierto de cada clase, qué probabilidad hay de elegir:
Se construye un diagrama de árbol:





a. Un cubierto de cada color.

P (un cubierto de cada color) = $\frac{6}{27}$ = 0,22

b. Una cuchara de color rojo.

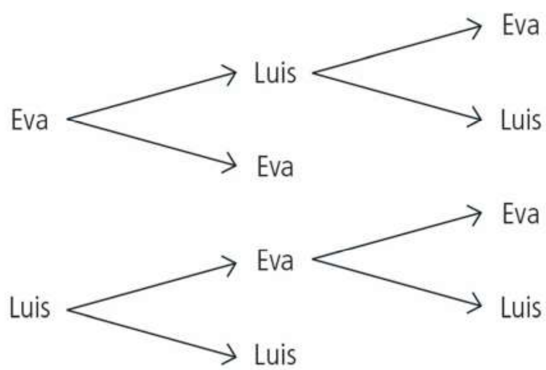
P (una cuchara de color rojo) = $\frac{9}{27}$ = 0,3

c. Los tres cubiertos sin ninguno azul.

P (los tres cubiertos sin ninguno azul) = $\frac{8}{27}$ = 0,30

30. Eva y Luis juegan a los dardos y han consensuado que el ganador será el primero que obtenga dos victorias.

a. Representa los resultados en un diagrama de árbol.



b. ¿Cuál es la probabilidad de que el juego se acabe en dos partidas?

P (acabar el juego en dos partidas) = $\frac{2}{6}$ = 0,33

c. ¿Y de que termine en tres partidas?

P (acabar el juego en tres partidas) = $\frac{4}{6}$ = 0,66

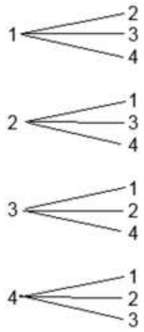
d. Si Luis hubiese ganado la primera partida, ¿cuál sería la probabilidad de que ganase el juego?

P (ganar Luis) = $\frac{2}{3}$ = 0,66

31. Con las cifras 1, 2, 3 y 4 se forman números de dos cifras distintas. Si se selecciona uno al azar, halla la probabilidad de:

a. Elegir el 23.

Se construye el diagrama de árbol.



P (elegir el 23) = $\frac{1}{12}$ = 0,083

b. Elegir un múltiplo de 3.

Los múltiplos de 3 son: 12, 21, 24 y 42

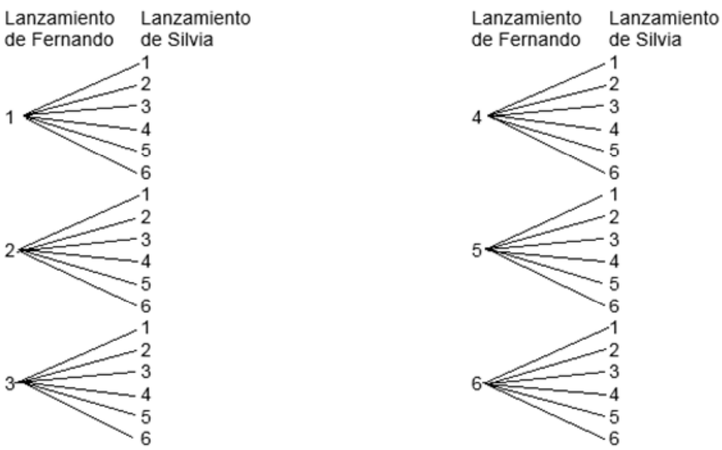
P (elegir un múltiplo de 3) = $\frac{4}{12}$ = 0,3

c. Elegir un número menor de 20.

P (elegir un número menor de 20) = $\frac{3}{12}$ = 0,25

32. Fernando y Silvia lanzan un dado cada uno.

Se construye un diagrama de árbol.



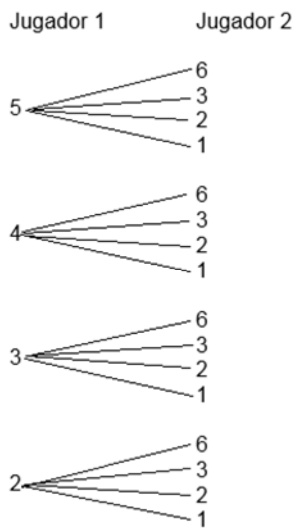
a. ¿Cuál es la probabilidad de que Fernando saque mayor puntuación que Silvia?

P (gane Fernando) = $\frac{15}{36}$ = 0,42

b. ¿Cuál es la probabilidad de que empaten?

P (empaten) = $\frac{6}{36}$ = 0,16

33. Dos jugadores lanzan un dado tetraédrico cada uno y gana el que obtiene el mayor resultado. Si los jugadores usan unos dados con los siguientes números en las caras:
Dado del jugador 1: 5 4 3 2
Dado del jugador 2: 6 3 2 1
Se construye el diagrama de árbol.



a. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el jugador 1?

P (gane el jugador 1) = $\frac{9}{16}$ = 0,56

b. ¿Y de que gane el jugador 2?

P (gane el jugador 2) = $\frac{5}{16}$ = 0,31

c. ¿Con qué dado preferirías jugar?
Con el dado 1.

34. Se lanza un dado dos veces y se suman los resultados obtenidos en la cara superior. Si la suma es 6, 7, 8 o 9, gana el jugador A; en el resto de casos, el ganador es el jugador B. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?

Suma 6 con: (1 , 5), (2 , 4), (3 , 3), (4 , 2) y (5 , 1)
Suma 7 con: (1 , 6), (2 , 5), (3 , 4), (4 , 3), (5 , 2) y (6 , 1)
Suma 8 con: (2 , 6), (3 , 5), (4 , 4), (5 , 3) y (6 , 2)
Suma 9 con: (3 , 6), (4 , 5), (5 , 4) y (6 , 3).

P (de ganar A) = $\frac{20}{36} = 0{,}56$

P (de ganar B) = $\frac{16}{36} = 0{,}44$.

Tiene más posibilidades de ganar A.

EVALUACIÓN

1. **Indica cuál de estos experimentos no es aleatorio:**
   a. **Lanzar un dado.**
   b. **Coger una carta de una baraja.**
   c. Ver si un gas se expande en su recipiente.
   d. **Lanzar una moneda al aire.**

2. **En el experimento aleatorio que consisten en lanzar dos dados y sumar los dos resultados de la cara superior, el número de elementos de su espacio muestral es:**
   a. 6 **b. 9** **c. 10** d. 11

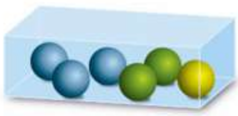
   E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

3. **En el experimento aleatorio de lanzar un dado se considera el suceso A = {obtener un número mayor que 3}. El suceso contrario de A es:**
   a. {1 , 2 , 3} **b. {4 , 5 , 6}** **c. {1 , 2}** **d. {3 , 4 , 5 , 6}**

   A = {obtener un número mayor que 3} = {4, 5, 6}

4. **En el experimento aleatorio de escoger un número al azar entre los dígitos 1 a 10, dos sucesos compatibles son:**
   a. **{elegir par} y {1 , 5}**
   b. **{elegir impar} y {4 , 10}**
   c. {elegir un múltiplo de 3} y {2, 4, 6}
   d. **{7 , 9} y {elegir un múltiplo de 5}**

5. **La probabilidad de extraer una bola azul de esta urna es:**



   a. 3 b. 0,5 **c. 0,25** **d. 0,284**

   P (extraer bola azul) = $\frac{3}{6} = 0{,}5$

6. **En una caja de bombones, 12 son de licor, 8 son de chocolate con leche, y 10 tienen almendra. Si se escoge un bombón al azar, la probabilidad de que sea de almendra es:**
   a. $\mathbf{\frac{10}{20}}$ **b. 0,1** c. $\frac{1}{3}$ **d. 0,3**

   P (bombón de almendra) = $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

7. **Las letras de la palabra DIVISIBILIDAD se escriben cada una en una papeleta y se introducen en una bolsa. La probabilidad de que, al extraer una de las papeletas, tenga escrita la letra I es:**
   a. 0,38 **b. 0,42** **c. 0,29** **d. 0,46**

   P (extraer la letra I) = $\frac{5}{13} = 0{,}38$

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 12. Triángulos. Teorema de Pitágoras

Unidad 12. Triángulos. Teorema de Pitágoras

SOLUCIONES PÁG. 235

1 Indica cuál de estas ternas puede formar triángulos:
Para formar un triángulo se debe cumplir que el lado mayor sea menor que la suma de los otros dos lados.

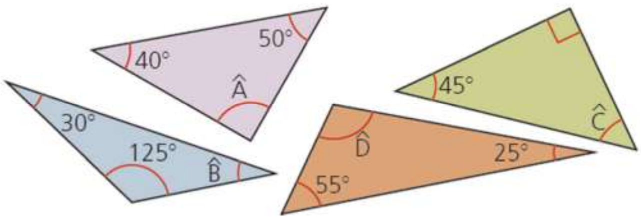
a. 5 cm, 7 cm, 13 cm
Sí, porque $5 + 7 < 13$.

b. 16 cm, 11 cm, 6 cm
No, porque $11 + 6 \nless 16$.

c. 8 cm, 13 cm, 5 cm
No, porque $8 + 5 \nless 13$.

d. 1 cm, 3 cm, 2 cm
No, porque $1 + 2 \nless 3$.

2 Halla el valor de los ángulos desconocidos de los siguientes triángulos:



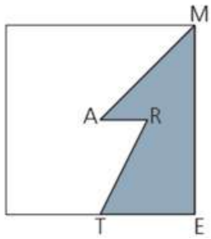
Los ángulos de un triángulo suman 180°.

- $40º + 50º + \hat{A} = 180º \Rightarrow \hat{A} = 90º$
- $30º + 125º + \hat{B} = 180º \Rightarrow \hat{B} = 25º$
- $45º + 90º + \hat{C} = 180º \Rightarrow \hat{C} = 45º$
- $55º + 25º + \hat{D} = 180º \Rightarrow \hat{D} = 100º$

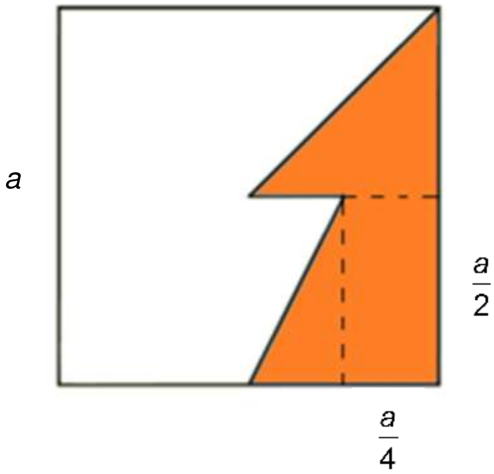
3 ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo rectángulo isósceles?
Al ser rectángulo, uno de los ángulos mide 90º. Además, es isósceles, lo que significa que los otros dos ángulos miden lo mismo. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo mide 180º, se tiene que:
$180º = 90º + x^{º} + x^{º} \Rightarrow x^{º} = 45º$.

Los ángulos miden 90º, 45º y 45º.

4 Dentro del cuadrado de centro A está la figura MARTE. El punto T es el punto medio de un lado, y R está a igual distancia de A que del lado ME. Si el área del cuadrado es 1 m^2, ¿qué área tiene MARTE?



Para calcular el área de MARTE descomponemos la figura en otras más sencillas.



El área del cuadrado es $A = a^2 \Rightarrow A = 1$ m^2

- El área del triángulo superior es: $A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{8}$

  Como $a^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{a^2}{8} = \frac{1}{8}$

- El área del triángulo inferior es: $A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{16}$

  Como $a^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{a^2}{16} = \frac{1}{16}$

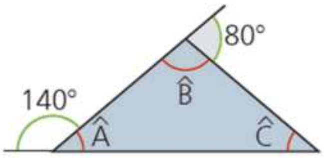
- El área del rectángulo inferior es: $A = b \cdot h \Rightarrow A = \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$

  Como $a^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{a^2}{8} = \frac{1}{8}$

La suma de las áreas calculadas es $A_{MARTE} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} \Rightarrow A_{MARTE} = \frac{5}{16}$ m^2

5 Calcula los ángulos desconocidos en estos triángulos:

a.

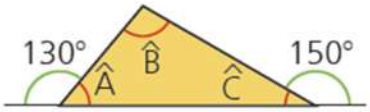


$140^{\circ} + \hat{A} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{A} = 40^{\circ}$

$80^{\circ} + \hat{B} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{B} = 100^{\circ}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{C} = 40^{\circ}$

b.

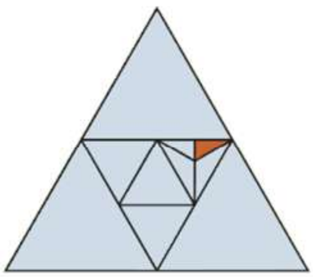


$130^{\circ} + \hat{A} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{A} = 50^{\circ}$

$150^{\circ} + \hat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{C} = 30^{\circ}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \hat{B} = 100^{\circ}$

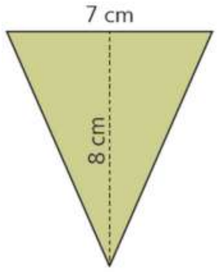
6 ¿Qué fracción de la figura representa la parte sombreada?



El área de la parte sombreada es $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{96}$ del total.

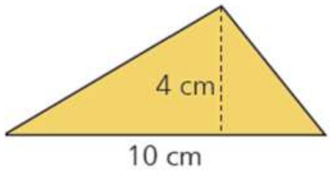
7 Halla el área de los siguientes triángulos:

a.



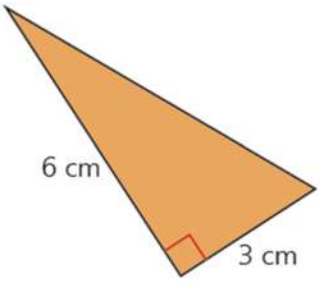
$$A=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow A=\frac{7\cdot 8}{2}=28\Rightarrow A=28\,\text{cm}^2$$

b.



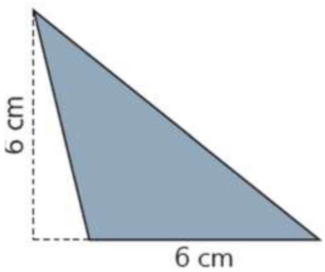
$$A=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow A=\frac{10\cdot 4}{2}=20\Rightarrow A=20\,\text{cm}^2$$

c.



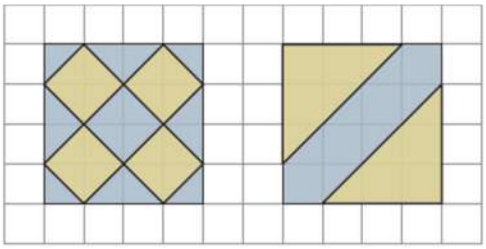
$$A=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow A=\frac{6\cdot 3}{2}=9\Rightarrow A=9\ \text{cm}^2$$

d.



$$A=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow A=\frac{6\cdot 6}{2}=18\Rightarrow A=18\,\text{cm}^2$$

8 Halla el área de las zonas sombreadas de marrón en el interior de estos cuadrados de 8 dm de lado:



Como el lado del cuadrado completo es 8 dm, el lado de cada cuadrado de la cuadrícula es 2 dm.

- Figura izquierda.

  El área sombreada en marrón es la misma que el área sombreada en gris. Por lo tanto es la mitad del área del cuadrado de lado 8 dm.

  $A_{\text{cuadrado}} = l^2 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 8^2 = 64 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = 64\ \text{dm}^2$

  Por tanto, el área sombreada en marrón es $A = 32\ \text{dm}^2$

- Figura derecha
  Como el lado de cada cuadrado de la cuadrícula es 2 dm, los catetos de los triángulos marrones son 6 dm, con lo que el área de cada triángulo marrón es
  $A = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18 \Rightarrow A = 18\ \text{dm}^2$
  El área total (dos triángulos) es $A = 36\ \text{dm}^2$.

SOLUCIONES PÁG. 237

9 Comprueba si las siguientes ternas de números se corresponden con ternas pitagóricas:
Una terna pitagórica es la que verifica el teorema de Pitágoras.

a. 4 cm, 6 cm, 8 cm

No, porque $4^2 + 6^2 \neq 8^2$

b. 10 cm, 14 cm, 12 cm

No, porque $10^2 + 12^2 \neq 14^2$

c. 8 cm, 6 cm, 10 cm

Sí, porque $6^2 + 8^2 = 10^2$

d. 15 cm, 25 cm, 20 cm

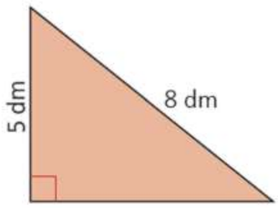
Sí, porque $15^2 + 20^2 = 25^2$

10 Completa la siguiente tabla en tu cuaderno:

Lados (*b*, *c*, *a*)	A_{cuadrado} sobre *b*	A_{cuadrado} sobre *c*	A_{cuadrado} sobre *a*	¿Es triángulo rectángulo?
1 m, 2 m, 3 m	1	4	9	No, porque: $9 \neq 4 + 1$
4 m, 7 m, 10 m	16	49	100	No, porque: $100 \neq 16 + 49$
4,5 m, 6 m, 7,5 m	20,25	36	56,25	Sí, porque: $56{,}25 = 20{,}25 + 36$

11 Calcula los lados desconocidos de los siguientes triángulos rectángulos:

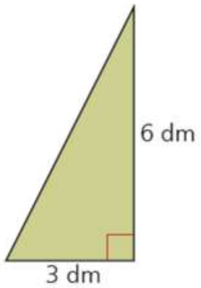
a.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 8^2 = 5^2 + c^2 \Rightarrow c = 6{,}2 \Rightarrow c = 6{,}2$ dm

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow a = 6{,}7 \Rightarrow a = 6{,}7$ dm

12 Halla la hipotenusa de los triángulos rectángulos cuyos catetos miden:
Para hallar la hipotenusa se aplica el teorema de Pitágoras: $b^2 + c^2 = a^2$

a. 7 m y 9 m

$7^2 + 9^2 = a^2 \Rightarrow 130 = a^2 \Rightarrow a = 11{,}4 \Rightarrow a = 11{,}4$ m

b. 10 m y 12 m

$10^2 + 12^2 = a^2 \Rightarrow 244 = a^2 \Rightarrow a = 15{,}6 \Rightarrow a = 15{,}6$ m

c. 11 m y 12 m

$11^2 + 12^2 = a^2 \Rightarrow 265 = a^2 \Rightarrow a = 16{,}3 \Rightarrow a = 16{,}3$ m

d. 5 m y 8 m

$5^2 + 8^2 = a^2 \Rightarrow 89 = a^2 \Rightarrow a = 9{,}4 \Rightarrow a = 9{,}4$ m

13 Determina el cateto que falta de los triángulos rectángulos cuyos lados conocidos miden:

Los catetos se calculan aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

a. 13 cm y 9 cm

$13^2 = 9^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{169-81} = \sqrt{88} = 9{,}38 \Rightarrow c = 9{,}38$ cm

b. 8 cm y 11 cm

$11^2 = 8^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{121-64} = \sqrt{57} = 7{,}55 \Rightarrow c = 7{,}55$ cm

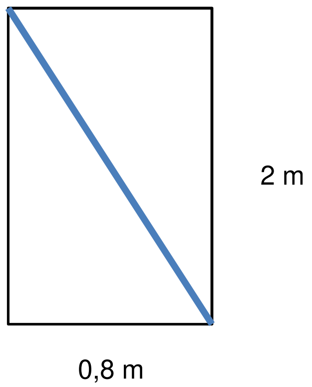
c. 1 cm y 2 cm

$2^2 = 1^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = 1{,}73 \Rightarrow c = 1{,}73$ cm

d. 5 cm y 3 cm

$5^2 = 3^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4 \Rightarrow c = 4$ cm

14 Por una puerta cuyas dimensiones son 2 m de alto por 80 cm de ancho tiene que pasar un tablero de 215 cm de alto por 5 m de lado. ¿Crees que cabrá por ella?



La diagonal de la puerta se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 0{,}8^2 + 2^2 = a^2 \Rightarrow 4{,}64 = a^2 \Rightarrow a = 2{,}154$ m es la medida de la diagonal de la puerta, es decir, el tablero de 2,15 cm cabe (muy ajustado, pero cabe).

15 El tamaño de las pantallas de proyección se mide por la longitud en pulgadas o en centímetros, de su diagonal. Si 1 pulgada equivale a 2,53 cm:

a. ¿Cuál es la longitud, en metros, de los lados de una pantalla cuadrada cuya diagonal mide 150 pulgadas?

150 pulgadas = 3,795 m
$l^2 + l^2 = 3{,}795^2 \Rightarrow 2l^2 = 14{,}40 \Rightarrow l = 2{,}68$ m

b. ¿Qué longitud tiene la diagonal, en pulgadas, de una pantalla cuadrada cuyos lados miden 2 m × 2 m?

$2^2 + 2^2 = l^2 \Rightarrow l = 2{,}83$ m = 283 cm

$$l = \frac{283}{2{,}53} = 111{,}86 \text{ pulgadas}$$

16 Halla el área de un triángulo rectángulo que tiene una hipotenusa de 25 cm y uno de cuyos catetos mide 15 cm.

Se halla la longitud del otro cateto aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

$25^2 = 15^2 + a^2 \Rightarrow a = 20$ cm

El área del triángulo es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{20 \cdot 15}{2} = 150 \Rightarrow A = 150 \text{ cm}^2$$

17 Una hormiga recorre la diagonal de un cuadrado una y otra vez, porque coincide que en uno de los extremos de la diagonal hay un montón de pipas y en el otro está la entrada de su hormiguero. Considerando que hay 20 pipas en el montón y que el cuadrado tiene 40 cm de lado, ¿qué distancia recorrerá la hormiga hasta guardar todas las pipas en su hormiguero si parte de él y transporta una pipa en cada viaje?

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal del cuadrado.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 40^2 + 40^2 = a^2 \Rightarrow a = 56{,}57$ cm.

La distancia que recorrerá la hormiga es: $2 \cdot 20 \cdot 56{,}57 = 2\,262{,}8$ cm $= 2{,}26$ m.

18 Considerando que *a*, *b* y *c* son, respectivamente, la hipotenusa y los catetos de los siguientes triángulos rectángulos, halla, en cada caso, el elemento que falta de la terna anterior, teniendo en cuenta que las medidas vienen dadas en centímetros:

a. *b* = 6, *c* = 8

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa, *a*.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ cm

b. *a* = 5, *c* = 3

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el cateto, *b*.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b = 4$ cm

c. *a* = 10, *b* = 4

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el cateto, *c*.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10^2 = 4^2 + c^2 \Rightarrow c = 9{,}16$ cm

d. *c* = 6, *b* = 12

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa, *a*.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 12^2 + 6^2 \Rightarrow a = 13{,}42$ cm

e. *b* = 10, *a* = 20

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el cateto, *c*.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 20^2 = 10^2 + c^2 \Rightarrow c = 17{,}32$ cm

f. $\boldsymbol{c = 7, a = 13}$

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el cateto, *b*.

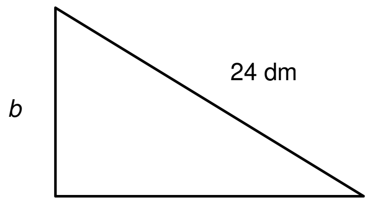
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = b^2 + 7^2 \Rightarrow b = 10{,}95$ cm

19 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 24 dm y uno de los catetos tiene doble longitud que el otro. Halla el área del triángulo rectángulo.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 24^2 = b^2 + (2b)^2 \Rightarrow 24^2 = 5b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 10{,}73$ dm es la medida del cateto menor.



El cateto mayor mide 2 · 10,73 = 21,46 cm.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{21{,}46 \cdot 10{,}73}{2} = \frac{230{,}27}{2} = 115{,}14 \Rightarrow A = 115{,}14\ \text{dm}^2$$

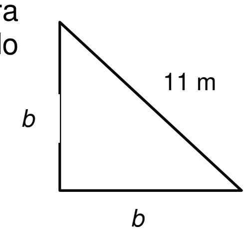
20 Calcula el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 11 m.

Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales. Para averiguar la longitud de los catetos del triángulo rectángulo isósceles se aplica el teorema de Pitágoras.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 11^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow 11^2 = 2b^2 \Rightarrow b = 7{,}78$ m

Se calcula el perímetro:

$P = 11 + 2 \cdot 7{,}78 = 26{,}56 \Rightarrow P = 26{,}56$ m

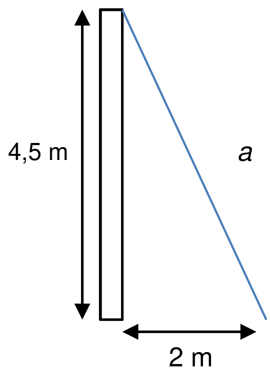


21 Para asegurar un mástil de 4,5 m de altura, se ha fijado un cable en el extremo superior del mástil y a 2 m del pie del mismo. Halla la longitud del cable.

El cable es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado. Se aplica el teorema de Pitágoras.

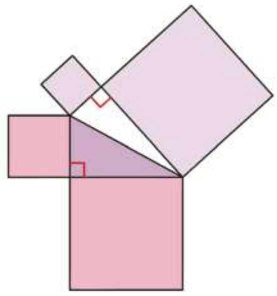
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4{,}5^2 + 2^2 \Rightarrow a^2 = 24{,}25 \Rightarrow a = 4{,}92$ m

La longitud del cable es de 4,92 m.



22 ¿Qué pareja de cuadrados suman mayor área: los de color violeta o los rosas? Razona tu respuesta.

Suman el mismo área porque ambas sumas equivalen al cuadrado sobre la hipotenusa de cada triángulo, y la hipotenusa es la misma para ambos triángulos.



23 Visita esta página de Internet, repasa los contenidos y realiza las actividades propuestas:

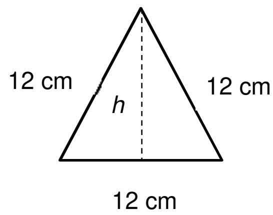
http://conteni2.educarex.es/mats/101076/contenido/

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 239

24 Halla el perímetro y el área de un triángulo equilátero de 12 cm de lado.

Se calcula la altura del triángulo aplicando el teorema de Pitágoras:



$a^2 = b^2 + c^2$

$12^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = 10{,}39$ cm

Se calculan el área y el perímetro:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{12 \cdot 10{,}39}{2} = 62{,}34 \Rightarrow A = 62{,}34 \text{ cm}^2$$

$P = 12 + 12 + 12 = 36 \Rightarrow P = 36$ cm

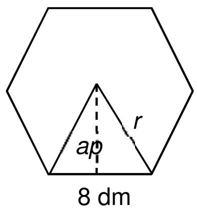
25 Calcula el perímetro y el área de un hexágono regular cuyo lado mide 8 dm.

Se calcula la apotema mediante el teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, y teniendo en cuenta que se trata de un hexágono regular, donde el radio coincide con la longitud del lado, es decir, $r = 8$ dm:

$8^2 = 4^2 + ap^2 \Rightarrow ap = 6{,}93$ dm

Se calculan el perímetro y el área:

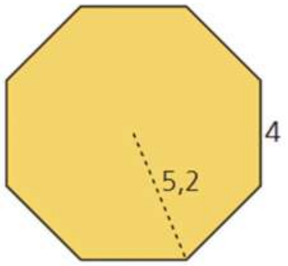
$P = 6 \cdot 8 = 48 \Rightarrow P = 48$ dm



$$A = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A = \frac{48 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}32 \Rightarrow A = 166{,}32 \text{ dm}^2$$

26 Determina el área de las siguientes figuras, cuyas medidas están expresadas en metros:

a.



Se calcula la apotema mediante el teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$:

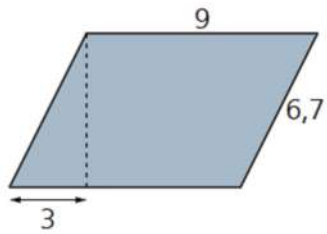
$5{,}2^2 = 2^2 + ap^2 \Rightarrow ap = 4{,}8$ m

Se calculan el perímetro y el área:

$P = 8 \cdot 4 = 32 \Rightarrow P = 32$ m

$$A = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A = \frac{32 \cdot 4{,}8}{2} = 76{,}8 \Rightarrow A = 76{,}8 \text{ m}^2$$

b.



Se calcula la altura mediante el teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$:

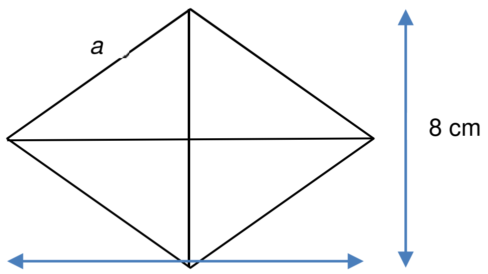
$6{,}7^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = 5{,}99$ m

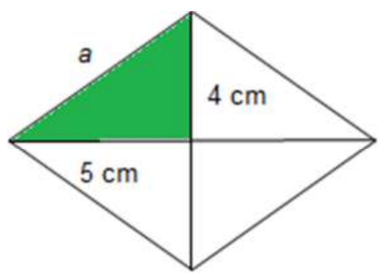
Se calcula el área descomponiendo la figura en dos triángulos rectángulos y un cuadrado de lado 6 m:

$$A = 2 \cdot A_{\text{triángulo}} + A_{\text{cuadrado}} \Rightarrow A = 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} + l^2 \Rightarrow A = 3 \cdot 5{,}99 + 6^2 = 53{,}97 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 53{,}97 \text{ m}^2$$

27 Calcula el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales miden 10 cm y 8 cm, respectivamente.





Se calcula el lado del rombo mediante el teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$:

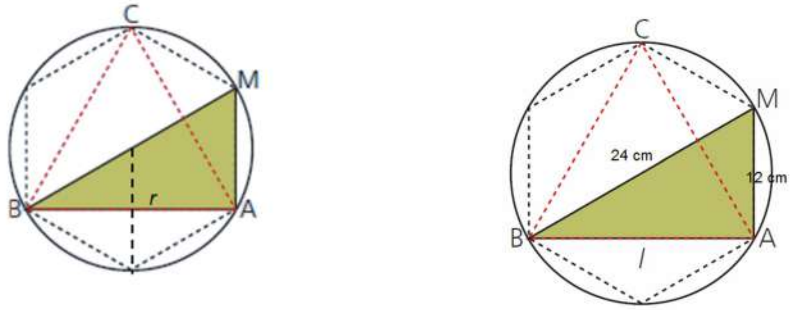
$a^2 = 4^2 + 5^2 \Rightarrow a = 6{,}4$ m

Se calculan el perímetro y el área:

$P = 4 \cdot 6{,}4 = 25{,}6 \Rightarrow P = 25{,}6$ cm

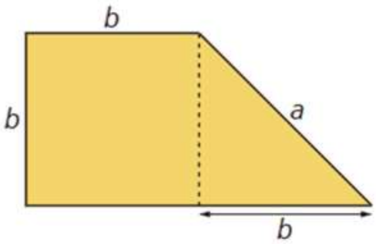
$$A = 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = 4 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 40 \Rightarrow A = 40 \text{ cm}^2$$

28 Averigua el lado de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 12 cm de radio.



Considerando el triángulo rectángulo ABM de la figura, el cateto AM del hexágono regular tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia, es decir, mide 12 cm. La hipotenusa mide 24 cm, ya que es un diámetro. Aplicando el teorema de Pitágoras:
$24^2 = 12^2 + l^2 \Rightarrow l = 20{,}78$ cm

29 Halla el perímetro y el área de la siguiente figura sabiendo que la longitud *b* mide 5 m:



Se calcula el lado *a* sabiendo que se cumple el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo:

$a^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 = 2 \cdot 5^2 = 50 \Rightarrow a = 7{,}07$ m

Se calcula el perímetro de la figura completa:

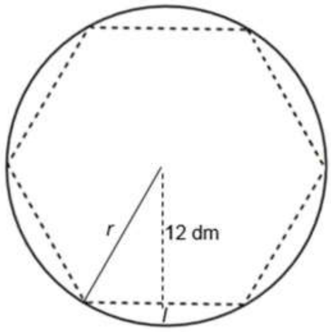
$P = b + b + b + a + b \Rightarrow P = 4 \cdot b + a \Rightarrow P = 4 \cdot 5 + 7{,}07 = 27{,}07 \Rightarrow P = 27{,}07$ m

El área es la suma del área del cuadrado de lado *b* y el triángulo de lado y altura *b*:

$$A = b^2 + \frac{b \cdot b}{2} \Rightarrow A = 25 + \frac{25}{2} = 37{,}5 \Rightarrow A = 37{,}5 \text{ m}^2$$

30 Determina el radio de la circunferencia circunscrita al hexágono regular que tiene 12 dm de apotema.

En el hexágono regular inscrito en una circunferencia los triángulos son equiláteros, y el radio de la circunferencia coincide con el lado del hexágono, es decir $r = l$.

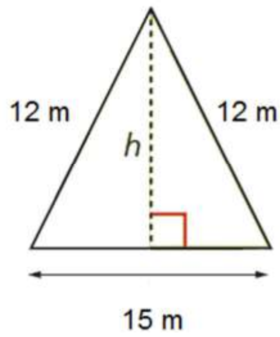


Para calcular el radio se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de altura (apotema) 12 dm y base $\frac{r}{2}$:

$$r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + 12^2 \Rightarrow 4r^2 = r^2 + 576 \Rightarrow 3r^2 = 576 \Rightarrow r = 13,86 \text{ dm}$$

31 Halla la altura y el área de un triángulo isósceles cuyos lados miden 12 m, 12 m y 15 m, respectivamente.

Para calcular la altura se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de altura h y base $\frac{15}{2}$ m:



$$12^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow 576 = 225 + 4h^2 \Rightarrow h = 9,37 \text{ m}$$

Para calcular el área se aplica:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{15 \cdot 9,37}{2} = 70,28 \Rightarrow A = 70,28 \text{ m}^2$$

SOLUCIONES PÁG. 241

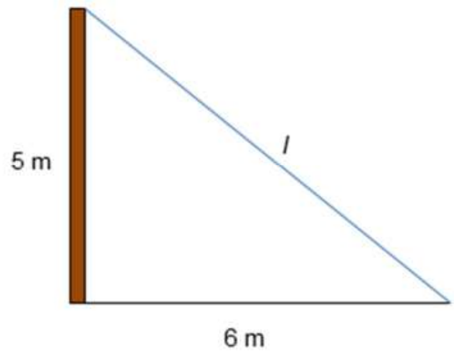
32 Investiga sobre el conocimiento del teorema de Pitágoras en las civilizaciones anteriores a los griegos.

Respuesta abierta.

33 Para sujetar una cucaña de 5 m de altura, perpendicular al suelo, se han colocado varias cuerdas fijadas a su extremo superior y ancladas al suelo a 6 m del pie de la cucaña. Halla la longitud de las cuerdas que la sujetan y realiza un dibujo que represente la situación.

Para calcular la longitud de las cuerdas, l, se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo de lados 6 m, y 5 m e hipotenusa l:

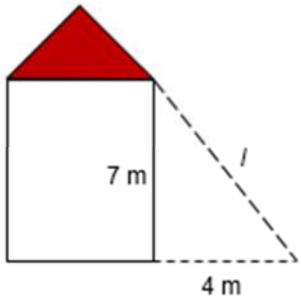
$l^2 = 6^2 + 5^2 \Rightarrow l = 7,81$ m



34 Juan ha colado el balón en el tejado del gimnasio, que tiene una altura de 7 m. Para recuperarlo, utiliza una escalera que apoya a una distancia de 4 m de la pared. ¿Qué longitud tiene la escalera con la que accede al tejado para recuperar el balón?

Para calcular la longitud de la escalera, *l*, se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo de lados 7 m, y 4 m e hipotenusa *l*:

$l^2 = 4^2 + 7^2 \Rightarrow l = 8{,}06$ m



35 Clasifica, en función de sus ángulos, los siguientes triángulos, que vienen dados por los lados:

a. 5 m, 12 m, 13 m

Rectángulo, porque se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, donde $a = 13$ m, $b = 12$ m y $c = 5$ m.

b. 7 m, 11 m, 14 m

Obtusángulo, porque se cumple $a^2 > b^2 + c^2$, donde $a = 14$ m, $b = 11$ m y $c = 7$ m.

c. 9 m, 12 m, 15 m

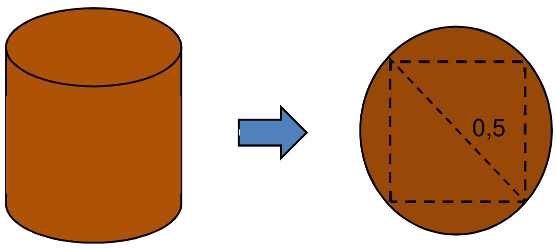
Rectángulo, porque se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, donde $a = 15$ m, $b = 12$ m y $c = 9$ m.

d. 8 m, 13 m, 15 m

Acutángulo, porque se cumple $a^2 < b^2 + c^2$, donde $a = 15$ m, $b = 13$ m y $c = 8$ m.

36 De un tronco de madera con una sección circular de medio metro de diámetro se quiere obtener una viga cuadrada. ¿Cuál es el tamaño de la viga más grande que se puede extraer del tronco?

El cuadrado mayor que se puede inscribir en una circunferencia es aquel con una diagonal *d* igual al diámetro de la circunferencia.
El diámetro de la circunferencia es 1 m, luego la hipotenusa del cuadrado es también 1 m.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular los lados del cuadrado:

$0{,}5^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow 0{,}5^2 = 2l^2 \Rightarrow l = 0{,}35$ m

37 Visita esta página web, repasa los contenidos y realiza las actividades propuestas:

http://conteni2.educarex.es/mats/101077/contenido/

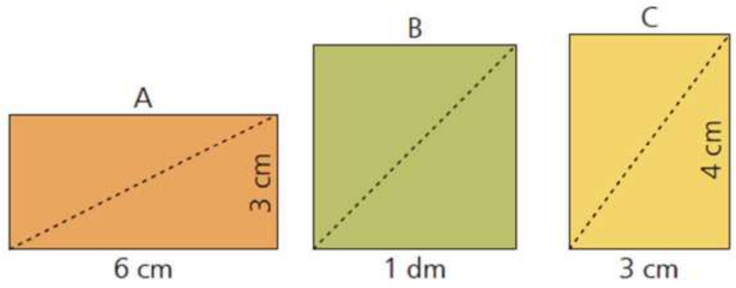
Respuesta abierta.

38 En una piscina de 10 m de largo por 5 m de ancho, ¿cuál es la mayor distancia que se puede nadar en línea recta?

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal de la piscina rectangular:

$d^2 = 5^2 + 10^2 \Rightarrow d^2 = 125 \Rightarrow d = 11{,}18$ m

39 Empareja cada una de estas figuras con la medida de su correspondiente diagonal:



I. 0,5 dm **II. 0,67 dm** **III. 14,1 cm**

Se calcula la diagonal de cada caso, aplicando el teorema de Pitágoras:

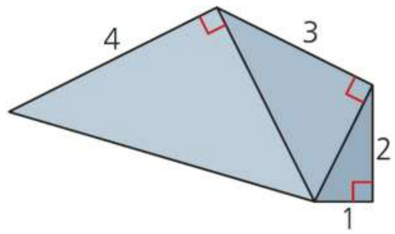
A. $d^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow d = 6{,}7$ cm $= 0{,}67$ dm

B. $d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = 1{,}41$ dm $= 14{,}1$ cm

C. $d^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow d = 5$ cm $= 0{,}5$ dm

Es decir, se corresponden I. C; II. A; III. B.

40 Calcula el perímetro de esta figura:

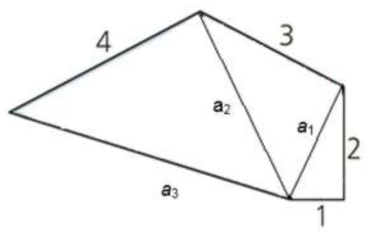


Se calculan los lados que faltan mediante el teorema de Pitágoras y teniendo en cuenta la categoría de lado o hipotenusa que tiene cada lado incógnita:

$a_1^2 = 1^2 + 2^2 \Rightarrow a_1^2 = 5 \Rightarrow a_1 = 2{,}23$

$a_2^2 = a_1^2 + 3^2 \Rightarrow a_2^2 = 2{,}23^2 + 9 = 13{,}97 \Rightarrow a_2 = 3{,}73$

$a_3^2 = a_2^2 + 4^2 \Rightarrow a_3^2 = 3{,}73^2 + 16 = 29{,}91 \Rightarrow a_3 = 5{,}47$



El perímetro se calcula sumando los lados:

$P = a_3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15{,}47$

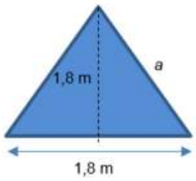
41 La entrada a una tienda de campaña tiene forma de triángulo isósceles, y sus dimensiones son 1,80 m tanto de ancho como de alto.

a. Halla la longitud de los lados iguales de la entrada.

Para calcular el lado del triángulo isósceles se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de lado la mitad de 1,8 m y altura 1,8 m:

$a^2 = 0{,}9^2 + 1{,}8^2 \Rightarrow a = 2{,}01$ m

b. Calcula la superficie de tela que se ha empleado en la construcción de la tienda si tiene una longitud de 2,80 m.



Se calcula el área de la entrada:

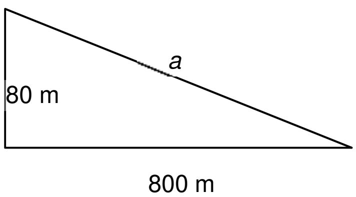
$$A_{\text{entrada}} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{entrada}} = \frac{1{,}8 \cdot 1{,}8}{2} = 1{,}62 \Rightarrow A_{\text{entrada}} = 1{,}62 \text{ m}^2$$

Se calcula el área de la tienda, sumando el área de los dos triángulos de 1,8 m de base y 1,8 m de altura, el de dos rectángulos de lados 2,01 m y 2,8 m y el del suelo, que es un rectángulo de lados 1,8 m y 2,8 m:

$A_{\text{tienda}} = 2 \cdot 1{,}62 + 2 \cdot (2{,}8 \cdot 2{,}01) + (1{,}8 \cdot 2{,}8) = 19{,}54 \Rightarrow A_{\text{tienda}} = 19{,}54 \text{ m}^2$

42 En una carretera de montaña hay una señal que advierte de la fuerte pendiente. El porcentaje que aparece indica la relación entre la altura que se asciende por la carretera y la distancia de desplazamiento horizontal. Así, una señal de pendiente del 10 % significa que se asciende 10 m de desnivel por cada 100 m de avance horizontal.

a. ¿Qué distancia hay que recorrer para ascender una altura de 80 m?



Para ascender una altura de 80 m se recorren 800 m en horizontal, es decir, si se resuelve el triángulo mediante el teorema de Pitágoras:

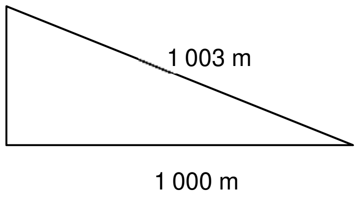
$a^2 = 800^2 + 80^2 \Rightarrow a = 804$ m

b. En otro tramo de carretera de diferente pendiente se han recorrido 1 003 m por la carretera. Si el desplazamiento horizontal ha sido de 1 000 m, ¿cuál es la pendiente de este tramo?

Se calcula la altura mediante el teorema de Pitágoras:

$1\,003^2 = h^2 + 1\,000^2 \Rightarrow h = 77{,}5$ m

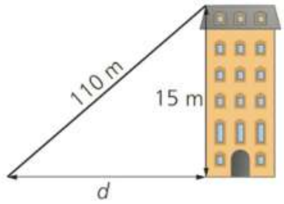
Cada 1 000 m recorridos en horizontal se ascienden 77,5 m, luego cada 100 m recorridos en horizontal se ascienden 7,75 m. Es decir, la pendiente es de 7,75 %.



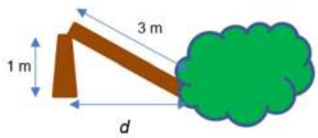
43 ¿A qué distancia nos tenemos que alejar de un edificio de 15 m de altura para tener desde ese punto una visual al extremo superior del edificio de 110 m?

Se calcula la distancia mediante el teorema de Pitágoras:

$110^2 = 15^2 + d^2 \Rightarrow d = 108{,}97$ m



44 Un árbol de 4 m de altura se ha tronchado por la fuerza del viento en un punto situado a 1 m del suelo. ¿A qué distancia del pie del árbol quedará el extremo caído?



La altura del árbol es ahora 1 m, con lo que la parte tronchada mide 3 m.

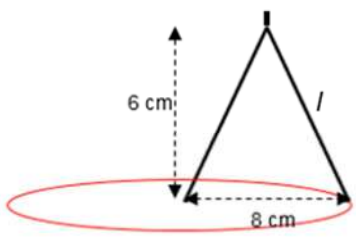
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la distancia al pie del árbol:

$3^2 = d^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 8 \Rightarrow d = 2{,}83$ m

45 Con un compás, Marcos traza una circunferencia de 8 cm de radio. Si el eje del compás (punto superior central) se encuentra a una distancia de 6 cm del papel, ¿cuánto miden cada uno de los brazos del compás?

Los brazos del compás distan 8 cm, de forma que se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de lados 4 cm de base y 6 cm de altura:

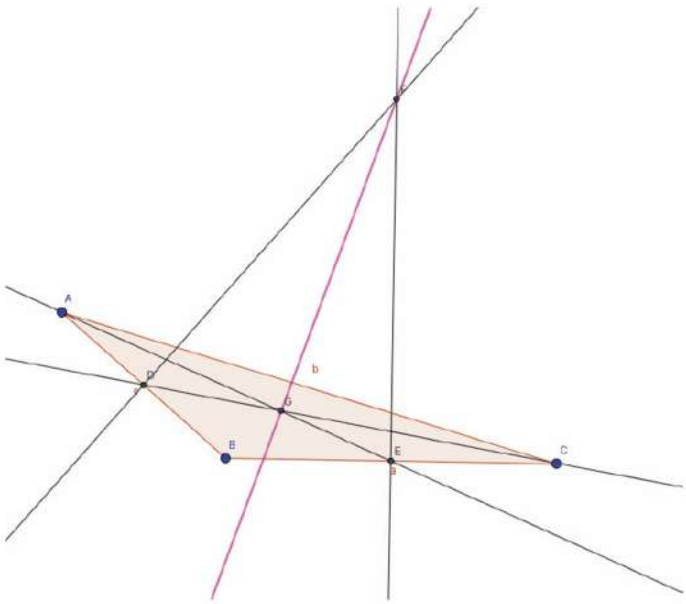
$l^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow l = 7{,}21$cm, es la longitud de cada brazo.



SOLUCIONES PÁG. 242

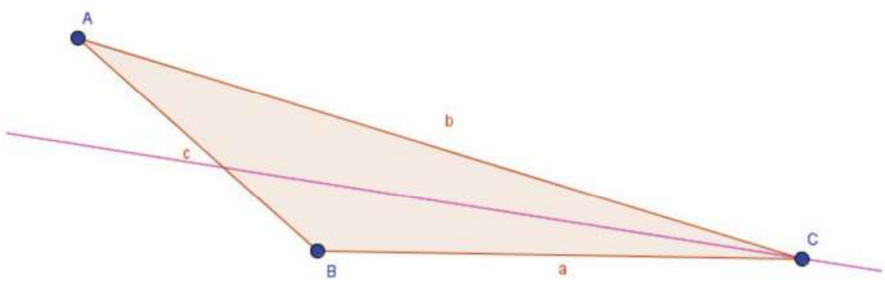
HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

1 Traza la recta de Euler del triángulo obtusángulo.
Se localizan, siguiendo las instrucciones de la pág. 242, el baricentro G (intersección de dos medianas), y el circuncentro F (intersección de dos mediatrices). La unión de estos dos puntos es la recta de Euler.

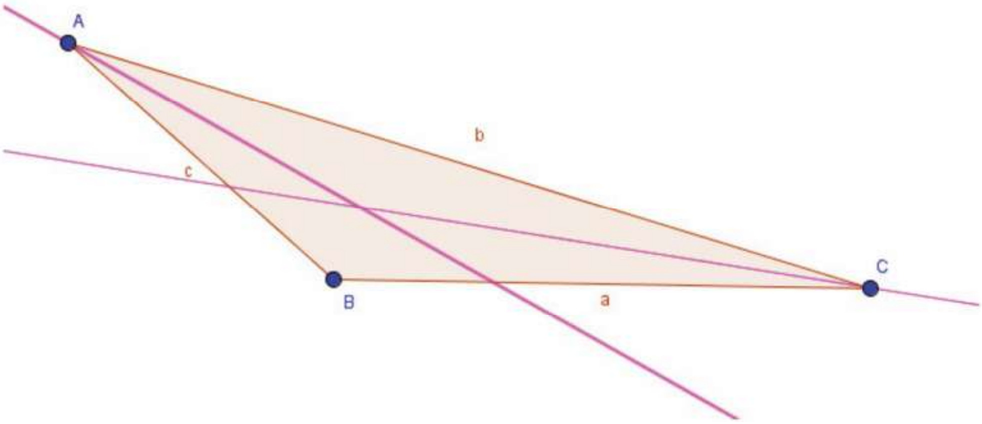


2 Investiga cómo trazar en el triángulo el incentro.
El incentro es la intersección de las bisectrices. La bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.

Se elige la herramienta Bisectriz, , y se dibuja la bisectriz del vértice C pinchando primero en el vértice B, luego en el vértice C y por último en el vértice A:



Se dibuja la bisectriz del vértice A pinchando primero en el vértice C, luego en A y por último en B:



El punto de corte de ambas bisectrices es el incentro.

SOLUCIONES PÁG. 243

1 **¿Cuánto suman los tres ángulos de un triángulo?**
Los tres ángulos de un triángulo suman 180º.

2 **¿Cómo son los lados de un triángulo escaleno?**
Los tres lados son desiguales.

3 **¿Qué nombre recibe el triángulo que tiene un ángulo de 120°?**
Obtusángulo.

4 **¿Qué tipo de triángulo, en función de sus ángulos, es un triángulo equilátero?**
Acutángulo, porque tiene los tres ángulos agudos.

5 **¿Puede un triángulo isósceles ser obtusángulo?**
Sí, uno de los ángulos mide más de 90º y los otros dos miden lo mismo.

6 **Para poder formar un triángulo, ¿qué propiedad deben verificar sus lados?**
Debe verificarse que su lado mayor debe ser menor que la suma de los otros dos.

7 **Describe qué es la altura de un triángulo. ¿Cuántas hay en un triángulo?**
La altura es el segmento que va perpendicularmente de un vértice al lado opuesto o la prolongación del mismo. Un triángulo tiene tres alturas.

8 **¿Qué nombre recibe el lado mayor de un triángulo rectángulo?**
Es la hipotenusa.

9 **Escribe el enunciado del teorema de Pitágoras.**
El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

10 **¿Cuáles son las longitudes de los lados del denominado triángulo pitagórico?**
Las longitudes son 3, 4 y 5.

11 ¿Qué elementos de un cuadrado intervienen formando un triángulo rectángulo?
La diagonal y dos de sus lados contiguos.

12 ¿Para qué aplicaban los antiguos agrimensores egipcios el teorema de Pitágoras?
Para delimitar las parcelas de cultivo después de las periódicas crecidas de las aguas del río Nilo.

13 ¿Cómo se puede emplear el triángulo rectángulo para clasificar los triángulos?

Se comprueba si los lados del triángulo verifican la relación del teorema de Pitágoras.

Si se cumple la igualdad es un triángulo rectángulo, si el cuadrado de la hipotenusa es mayor que la suma de los cuadrados de los catetos, es un triángulo obtusángulo, y si es menor es acutángulo.

14 ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden la unidad?
La hipotenusa mide $\sqrt{2}$, porque $1^2 + 1^2 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$.

15 La altura de un triángulo equilátero ¿en qué punto corta a su base correspondiente?
Corta en su punto medio.

16 ¿Cómo se llama el punto de corte de las tres alturas?
Se llama ortocentro.

17 ¿Cómo se llama el punto de corte de las tres mediatrices?
Se llama circuncentro.

18 Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 244 – REPASO FINAL

TRIÁNGULOS. TRIÁNGULO RECTÁNGULO

1 Indica cuál de estas ternas de segmentos pueden formar un triángulo:

a. 9 m, 11 m, 19 m

No, porque $9 + 11 > 19$

b. 7 m, 13 m, 17 m

No, porque $7 + 13 > 17$

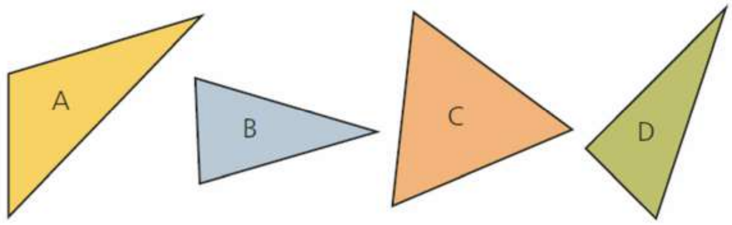
c. 3 dm, 5 dm, 8 dm

No, porque $3 + 5 = 8$, y el lado mayor debería ser menor que la suma de los lados menores.

d. 10 cm, 11 cm, 22 cm

Sí, porque $10 + 11 < 22$

2 Clasifica los triángulos dibujados en función de sus lados y de sus ángulos:



A Escaleno, porque tiene los tres lados desiguales.

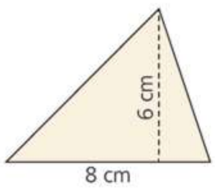
B Isósceles, porque tiene dos lados iguales y otro desigual.

C Equilátero, porque tiene los tres lados iguales.

D Escaleno, porque tiene los tres lados desiguales.

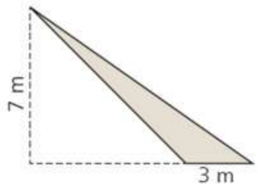
3 Halla el área de los siguientes triángulos:

a.



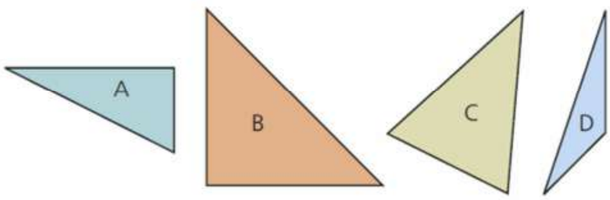
$$A=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow A=\frac{8\cdot 6}{2}=24\Rightarrow A=24\ \text{cm}^2$$

b.



$$A=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow A=\frac{3\cdot 7}{2}=10{,}5\Rightarrow A=10{,}5\ \text{m}^2$$

4 Clasifica los siguientes triángulos en función de sus ángulos:



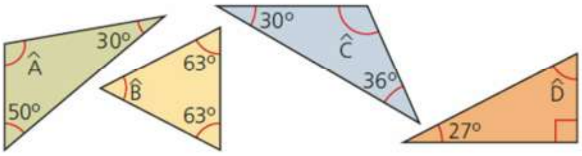
A Rectángulo, porque tiene un ángulo recto.

B Rectángulo, porque tiene un ángulo recto.

C Acutángulo, porque tiene los tres ángulos agudos.

D Obtusángulo, porque tiene un lado obtuso.

5 Halla el valor de los ángulos de estos triángulos:



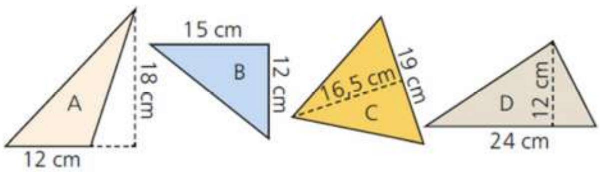
$50º + 30º + \hat{A} = 180º \Rightarrow \hat{A} = 100º$

$63º + 63º + \hat{B} = 180º \Rightarrow \hat{B} = 54º$

$30º + 36º + \hat{C} = 180º \Rightarrow \hat{C} = 114º$

$27º + 90º + \hat{D} = 180º \Rightarrow \hat{D} = 63º$

6 Halla el área de los siguientes triángulos:



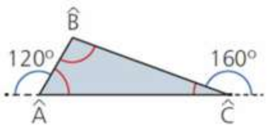
A. $A = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \dfrac{12 \cdot 18}{2} = 108 \Rightarrow A = 108 \text{ cm}^2$

B. $A = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \dfrac{15 \cdot 12}{2} = 90 \Rightarrow A = 90 \text{ cm}^2$

C. $A = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \dfrac{19 \cdot 16,5}{2} = 156,75 \Rightarrow A = 156,75 \text{ cm}^2$

D. $A = \dfrac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \dfrac{24 \cdot 12}{2} = 144 \Rightarrow A = 144 \text{ cm}^2$

7 Calcula el valor de los ángulos de estos triángulos:
a.

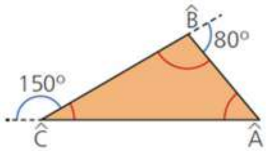


$120º + \hat{A} = 180º \Rightarrow \hat{A} = 60º$

$160º + \hat{C} = 180º \Rightarrow \hat{C} = 20º$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º \Rightarrow \hat{B} = 100º$

b.



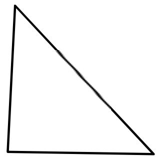
$150º + \hat{C} = 180º \Rightarrow \hat{C} = 30º$

$80º + \hat{B} = 180º \Rightarrow \hat{B} = 100º$

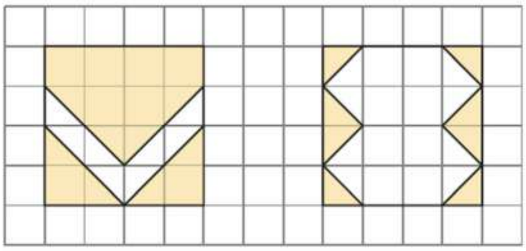
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º \Rightarrow \hat{A} = 50º$

8 Halla el área de un triángulo rectángulo isósceles en el que uno de sus catetos mide 10 dm.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \Rightarrow A = 50 \text{ dm}^2$$



9 Halla el área de las zonas que quedan en blanco en el interior de estos cuadrados de lado 4 m:



- Como el lado del cuadrado completo es 4 m, el lado de cada cuadradito de la cuadrícula es 1 m, y su área 1 m^2. Para calcular el área total de las zonas sin colorear se tienen que contar cuántos cuadraditos de área 1 m^2 hay, en total son 4 m^2.
- Se sigue la misma lógica que antes, y tenemos doce cuadraditos blancos, es decir, 12 m^2.

TEOREMA DE PITÁGORAS

10 Halla la hipotenusa de los triángulos rectángulos cuyos catetos miden:
Para hallar la hipotenusa se aplica el teorema de Pitágoras.

a. 7 m y 9 m

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 7^2 + 9^2 \Rightarrow a = 11{,}4$ m

b. 10 m y 12 m

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 10^2 + 12^2 \Rightarrow a = 15{,}62$ m

c. 11 m y 12 m

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 11^2 + 12^2 \Rightarrow a = 16{,}28$ m

d. 5 m y 8 m

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 5^2 + 8^2 \Rightarrow a = 9{,}43$ m

11 Los siguientes lados corresponden al cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Halla el valor del otro cateto.

Para hallar el valor del otro cateto se aplica el teorema de Pitágoras.

a. 5 dm y 8 dm

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 8^2 - 5^2 \Rightarrow c = 6{,}24$ dm

b. 12 dm y 13 dm

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 13^2 - 12^2 \Rightarrow c = 5$ dm

c. 8 dm y 10 dm

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow c = 6$ dm

d. 3 dm y 4 dm

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 4^2 - 3^2 \Rightarrow c = 2{,}65$ dm

12 Indica cuáles de las siguientes ternas de números pueden ser ternas pitagóricas:

a. 6 m, 9 m, 12 m

No, porque $6^2 + 9^2 \neq 12^2$

b. 12 m, 16 m, 20 m

Sí, porque $12^2 + 16^2 = 20^2$

c. 7 m, 12 m, 18 m

No, porque $7^2 + 12^2 \neq 18^2$

d. 1,5 m, 2 m, 2,5 m

Sí, porque $1{,}5^2 + 2^2 = 2{,}5^2$

13 Halla el lado que falta en las siguientes ternas pitagóricas, dadas en metros. El orden es cateto 1, cateto 2, hipotenusa:

a. 6, 10, a

$6^2 + 10^2 = a^2 \Rightarrow a = 11{,}66$ m

b. 11, c, 15

$11^2 + c^2 = 15^2 \Rightarrow c = 10{,}2$ m

c. b, 4, 7

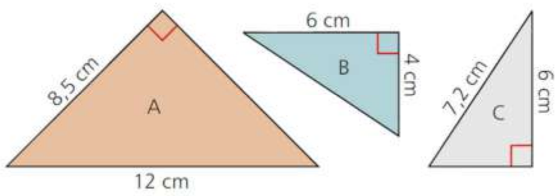
$b^2 + 4^2 = 7^2 \Rightarrow b = 5{,}7$ m

d. 5, 10, a

$5^2 + 10^2 = a^2 \Rightarrow a = 11{,}18$ m

SOLUCIONES PÁG. 245

14 Halla el valor del lado desconocido en los siguientes triángulos rectángulos:



Triángulo A: $8{,}5^2 + c^2 = 12^2 \Rightarrow c = 8{,}47$ cm

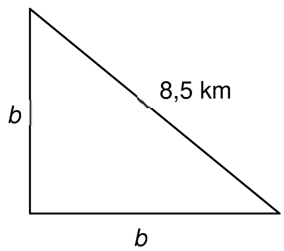
Triángulo B: $4^2 + 6^2 = a^2 \Rightarrow a = 7{,}21$ cm

Triángulo C: $b^2 + 6^2 = 7{,}2^2 \Rightarrow b = 3{,}98$ cm

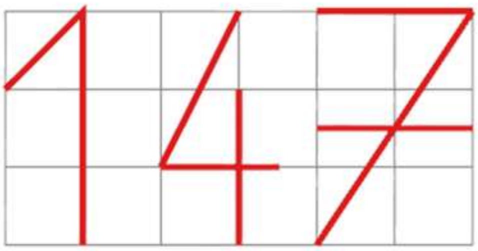
15 Investiga sobre los pitagóricos y cuáles eran sus normas dentro de su escuela.
Respuesta abierta.

16 Dos peregrinos que transitan por caminos perpendiculares entre sí se encuentran en un cruce de caminos. Se saludan y prosiguen por sus respectivas sendas a la misma velocidad. Tras una hora de camino se encuentran uno del otro a 8,5 km de distancia en línea recta. ¿Qué distancia habrá caminado cada uno desde el cruce de caminos?

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo que forman el recorrido de cada peregrino y la línea recta que los une tras recorrer ambos la misma distancia:
$b^2 + b^2 = 8{,}5^2 \Rightarrow b = 6$ km



17 En esta trama de cuadrados de lado la unidad, calcula la longitud del trazo de este número:



Para calcular los tramos inclinados se aplica el teorema de Pitágoras según corresponda.

El número 1 mide 3 + $\sqrt{1^2+1^2}$ = 4,41 unidades.

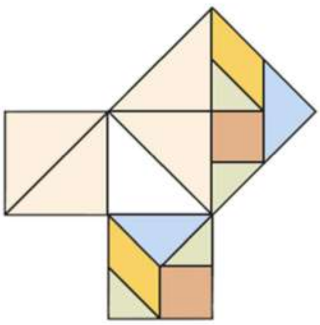
El número 4 mide 3,5 + $\sqrt{1^2+2^2}$ = 5,74 unidades.

El número 7 mide 4 + $\sqrt{2^2+3^2}$ = 7,61 unidades.

En total suman 4,41 + 5,74 + 7,61 = 17,76 unidades.

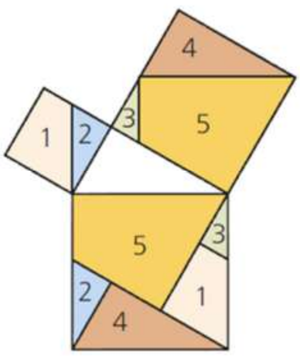
18 El teorema de Pitágoras tiene multitud de demostraciones, dos de las cuales puedes ver en las siguientes imágenes. Demuestra tú el teorema de Pitágoras de las dos formas: primero utiliza las piezas del tangram y luego dibuja la figura en una hoja y recorta cada uno de los trozos numerados a fin de recomponer el rompecabezas.

a.



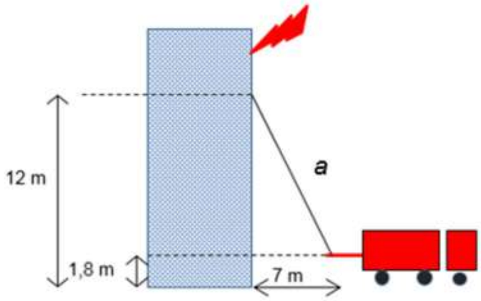
Respuesta abierta.

b.



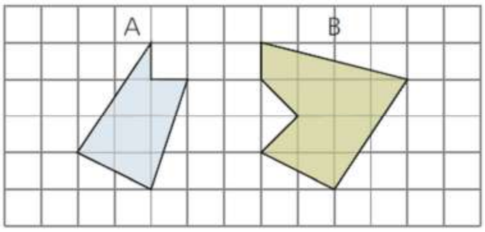
Respuesta abierta.

19 Para auxiliar a los habitantes de un edificio en llamas, los bomberos entran por la ventana desplegando la escalera situada en la base del camión a 1,80 m de altura del suelo y a 7 m de la pared del edificio. ¿Qué longitud debe tener la escalera para poder acceder por una ventana situada a 12 m del suelo?

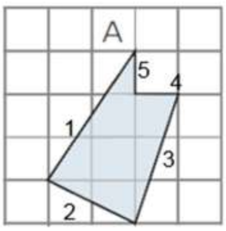


Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de base 7 m y altura 10,2 m (12 m – 1,8 m):
$7^2 + 10{,}2^2 = a^2 \Rightarrow a = 12{,}37$ m

20 Halla el perímetro de las siguientes figuras dibujadas en una trama de cuadrados de 2 cm lado.



Para calcular la longitud de cada lado se aplica el teorema de Pitágoras a cada tramo:



$l_1^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow l_1 = 7{,}21$

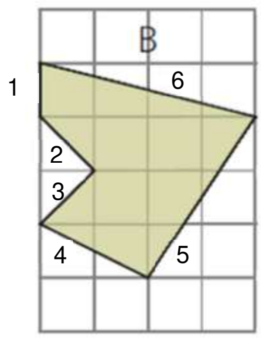
$l_2^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow l_2 = 4{,}47$

$l_3^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow l_1 = 6{,}32$

$l_4 = 2$

$l_5 = 2$

$P_A = 7{,}21 + 4{,}47 + 6{,}32 + 2 + 2 = 22 \Rightarrow P = 22$ cm



$l_1 = 2$

$l_2^2 = l_3^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow l_2 = l_3 = 2{,}83$

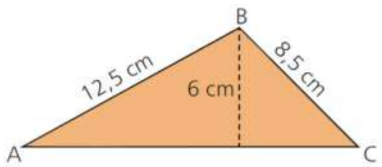
$l_4^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow l_4 = 4{,}47$

$l_5^2 = 4^2 + 6^2 \Rightarrow l_4 = 7{,}21$

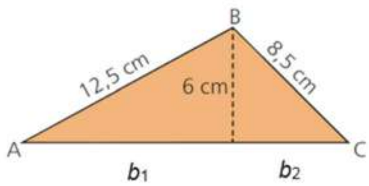
$l_6^2 = 2^2 + 8^2 \Rightarrow l_4 = 8{,}25$

$P_B = 2 + 2{,}83 + 2{,}83 + 4{,}47 + 7{,}21 + 8{,}25 = 27{,}59 \Rightarrow P = 27{,}59$ cm

21 Halla el área del triángulo ABC



La longitud de la base se calcula aplicando el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos, de modo que la base mide:



$b_1^2 + 6^2 = 12{,}5^2 \Rightarrow b_1 = 10{,}97$ m

$b_2^2 + 6^2 = 8{,}5^2 \Rightarrow b_2 = 6{,}02$ m

En total, $b_1 + b_2 = 16{,}99$ cm

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(10{,}97 + 6{,}02) \cdot 6}{2} = 50{,}97 \Rightarrow A = 50{,}97 \text{ cm}^2$$

22 La hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles mide 15 m, y este valor es el triple de uno de los catetos. Halla el perímetro de dicho triángulo.

Se trata de un triángulo de catetos 5 cm e hipotenusa 15 cm. El perímetro es:

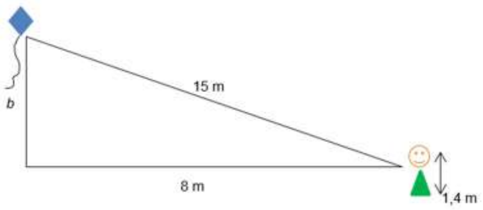
$P = 15 + 5 + 5 = 25 \Rightarrow P = 25$ m

23 La diagonal de un rectángulo mide 40 dm, y sus lados son proporcionales a 3 dm y 4 dm. Calcula la longitud de los lados del rectángulo.

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de los lados: $a^2 = b^2 + c^2$.
Como los catetos son proporcionales a las medidas que se dan, resulta que:
$40^2 = (3x)^2 + (4x)^2 \Rightarrow x = 8$
Es decir, un lado mide 24 dm y el otro lado mide 32 dm.

24 Una niña de 1,4 m de altura está jugando con una cometa a la que sujeta con una cuerda de 15 m de longitud. Si el viento ha desplazado la cometa a 8 m de la vertical de la niña, ¿cuál es la altura que ha alcanzado respecto al nivel del suelo?

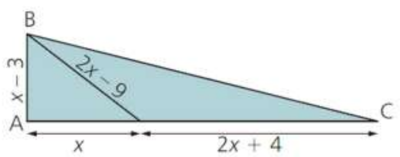
Se aplica el teorema de Pitágoras para conocer la longitud del cateto incógnita, *b:*
$15^2 = 8^2 + b^2 \Rightarrow b = 12{,}69$ m
La altura que alcanza la cometa respecto a la niña es de 12,69 m, y respecto al suelo de 12,69 m + 1,4 m = 14,09 m.



25 Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son tres números naturales consecutivos. Halla las dimensiones del triángulo.

Como los números son consecutivos, se define un cateto a, un cateto $a + 1$ y una hipotenusa $a + 2$, de manera que cumplan el teorema de Pitágoras:
$a^2 + (a + 1)^2 = (a + 2)^2 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$.
Los lados del triángulo miden 3, 4 y 5.

26 Halla el perímetro del triángulo ABC.



Se calcula la longitud de x, aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2 + (x - 3)^2 = (2x - 9)^2 \Rightarrow 2x^2 - 30x + 72 = 0 \Rightarrow x_1 = 12;\ x_2 = 3$ (no vale esta solución porque el cateto mediría 0)

Si $x = 12$, los catetos miden 9 y 40.

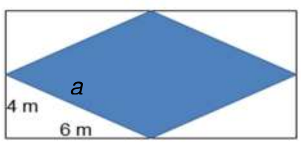
La hipotenusa se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9^2 + 40^2 \Rightarrow a = 41$

El perímetro es: $P = 9 + 40 + 41 = 90$

EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y LOS POLÍGONOS REGULARES

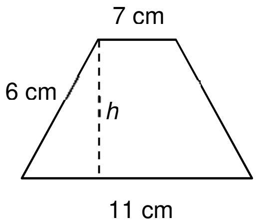
27 En un rectángulo cuyas dimensiones son 8 m × 12 m se inscribe un rombo de forma que sus vértices sean los puntos medios de los lados del rectángulo. Halla el perímetro del rombo.



Se calcula el valor del lado del rombo mediante el teorema de Pitágoras:
$4^2 + 6^2 = a^2 \Rightarrow a = 7{,}21$ m
El perímetro es $P = 4 \cdot 7{,}21 = 28{,}84 \Rightarrow P = 28{,}84$ m

SOLUCIONES PÁG. 246

28 Las bases de un trapecio isósceles miden 7 cm y 11 cm, respectivamente, y el lado oblicuo, 6 cm. Calcula el perímetro y el área del trapecio.

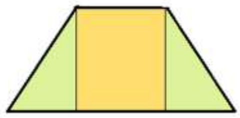


Para calcular la altura aplicamos el teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que la base del triángulo mide la mitad de la diferencia entre las bases, es decir, 2 cm:

$h^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow h = 5{,}66$ m

El perímetro es la suma de los lados, es decir, $P = 11 + 6 + 7 + 6 = 30$ cm.

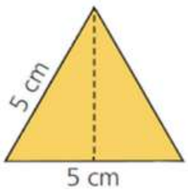
El área del trapecio es la suma del área de los dos triángulos rectángulos de base 2 cm y altura 5,66 cm y el rectángulo de lados 7 cm y 5,66 cm:



$$A_{total} = 2 \cdot A_{triángulo} + A_{rectángulo}$$
$$A_{total} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 5{,}66}{2} + 7 \cdot 5{,}66 = 50{,}94 \Rightarrow A_{total} = 50{,}94\,\text{cm}^2$$

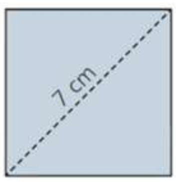
29 Halla el área de las siguientes figuras:

a.



Se calcula el valor de la altura aplicando el teorema de Pitágoras:
$2{,}5^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4{,}33$ cm
$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}83 \Rightarrow A = 10{,}83\,\text{cm}^2$$

b.



Se calcula el valor del lado aplicando el teorema de Pitágoras:

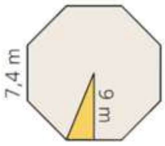
$l^2 + l^2 = 7^2 \Rightarrow l = 4{,}95$ cm

$A = l^2 = 4{,}95^2 = 24{,}5$ cm^2

30 Actividad resuelta.

31 Calcula el área de estas figuras:

a.



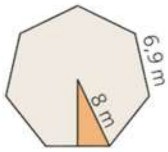
Se calcula en primer lugar el perímetro del octógono, conociendo la longitud de lado, que es 7,4 m.

$P = 8 \cdot 7{,}4 = 59{,}2$ m

Se calcula el área, sabiendo que la apotema mide 9 m:

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} \Rightarrow A = \frac{59{,}2 \cdot 9}{2} = 266{,}4 \Rightarrow A = 266{,}4 \text{ m}^2$$

b.



Se calcula en primer lugar la apotema del heptágono, conociendo el valor de la hipotenusa, 8 m y el lado del triángulo 3,45 m, mediante el teorema de Pitágoras:

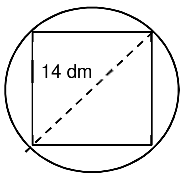
$3{,}45^2 + ap^2 = 8^2 \Rightarrow ap = 7{,}22$ m

El perímetro del heptágono es: $P = 7 \cdot 6{,}9 = 48{,}3 \Rightarrow P = 48{,}3$ m

Se calcula el área, sabiendo que la apotema mide 7,22 m y el perímetro 48,3 m:

$$A = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A = \frac{48{,}3 \cdot 7{,}22}{2} = 174{,}36 \Rightarrow A = 174{,}36 \text{ m}^2$$

32 Un cuadrado está inscrito en una circunferencia de 7 dm de radio. Averigua el valor de su perímetro.



Se calcula el valor del lado aplicando el teorema de Pitágoras:

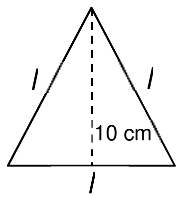
$l^2 + l^2 = 14^2 \Rightarrow l = 9{,}9$ dm

$P = 4 \cdot 9{,}9 = 39{,}6 \Rightarrow P = 39{,}6$ dm

33 La altura de un triángulo equilátero mide 10 cm. Halla el área y el perímetro de dicho triángulo.

Se calcula el valor del lado aplicando el teorema de Pitágoras:

$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 10^2 = l^2 \Rightarrow l = 11{,}55$ cm



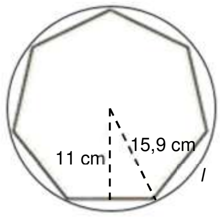
$P = 3 \cdot 11{,}55 = 34{,}65 \Rightarrow P = 34{,}65$ cm

$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{11{,}55 \cdot 10}{2} = 57{,}75 \Rightarrow A = 57{,}75$ cm^2

34 Calcula el área de un heptágono regular que tiene una apotema de 11 cm y se puede inscribir en una circunferencia de 15,9 cm radio.

Se averigua el lado del heptágono aplicando el teorema de Pitágoras:

$\left(\frac{l}{2}\right)^2 + 11^2 = 15{,}9^2 \Rightarrow l = 22{,}96$ cm



El área es:

$A = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A = \frac{7 \cdot 22{,}96 \cdot 11}{2} = 883{,}96 \Rightarrow A = 883{,}96$ cm^2

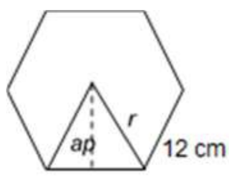
35 El lado de un hexágono regular mide 12 cm. Halla:

a. El perímetro del hexágono.

$P = 6 \cdot 12 = 72 \Rightarrow P = 72$ cm

b. El área del hexágono.

Se calcula en primer lugar la apotema del hexágono, conociendo el valor de la hipotenusa, 12 cm (el lado del hexágono regular coincide con el radio de la circunferencia en la que se inscribe), mediante el teorema de Pitágoras:



$6^2 + ap^2 = 12^2 \Rightarrow ap = 10{,}39$ cm

El área es:

$A = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A = \frac{72 \cdot 10{,}39}{2} = 374{,}04 \Rightarrow A = 374{,}04$ cm^2

36 El área de un triángulo isósceles mide 35 m^2 y la altura al lado desigual mide 7 m. Halla el perímetro de dicho triángulo.

Se halla el valor de la base a partir del valor del área:

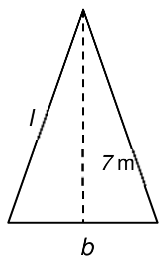
$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot A}{h} \Rightarrow b = \frac{2 \cdot 35}{7} = 10 \Rightarrow b = 10$ m

Ahora se calcula el valor de los lados iguales, mediante el teorema de Pitágoras:

$5^2 + 7^2 = l^2 \Rightarrow l = 8{,}6 \Rightarrow l = 8{,}6$ m

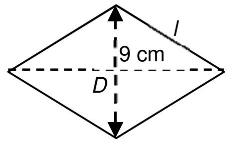
El perímetro es, entonces:

$P = 8{,}6 + 8{,}6 + 10 = 27{,}2 \Rightarrow P = 27{,}2$ m



37 El área de un rombo mide 63 cm^2 y su diagonal menor tiene una longitud de 9 cm. Halla el perímetro del rombo.

Se obtiene el valor del lado del rombo a partir del valor del área.
Se tiene en cuenta que el área total del rombo la forman dos triángulos de altura h = 4,5 cm y base la diagonal mayor, D:

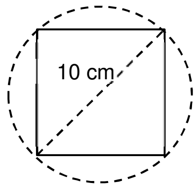


$$A_{\text{triángulo}} = \frac{D \cdot h}{2} \Rightarrow D = \frac{2 \cdot A}{h} \Rightarrow D = \frac{2 \cdot \frac{63}{2}}{4,5} = 14 \ \Rightarrow D = 14 \text{ cm}$$

Se halla el lado del rombo aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de lados la mitad de las diagonales, es decir, 4,5 cm y 7 cm:
$4,5^2 + 7^2 = l^2 \Rightarrow l = 8,32$ cm
El perímetro es:
$P = 4 \cdot l \Rightarrow P = 4 \cdot 8,32 = 33,28 \Rightarrow P = 33,28$ cm

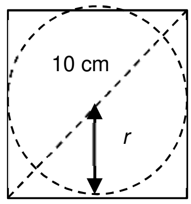
38 Considerando un cuadrado cuya diagonal mide 10 cm, determina el radio de la circunferencia:

a. Que lo circunscribe.



El diámetro de la circunferencia coincide con la diagonal del cuadrado, luego r = 5 cm

b. Inscrita en él.

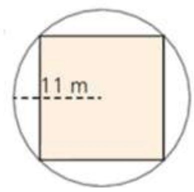


El radio de la circunferencia coincide con el valor de medio lado del cuadrado. Se calcula el valor de ese lado mediante el teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que el valor de la hipotenusa del triángulo que delimitan la semidiagonal del cuadrado y los lados de longitud r es 5 cm:

$r^2 + r^2 = 5^2 \Rightarrow r = 3,54$ cm

39 Calcula el perímetro de las figuras coloreadas:

a.

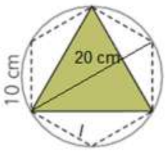


La diagonal del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia (22 m) en la que está inscrito el cuadrado. Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el valor del lado del cuadrado:

$l^2 + l^2 = 22^2 \Rightarrow l = 15, 56$ m

Se calcula el perímetro: $P = 4 \cdot l \Rightarrow P = 4 \cdot 15,56 = 62,24 \Rightarrow P = 62,24$ m

b.

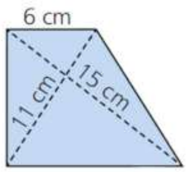


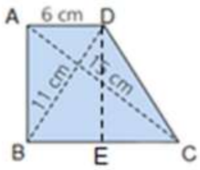
El lado del hexágono, 10 cm, coincide con el radio de la circunferencia en que está inscrito, de manera que se averigua el valor de lado del triángulo, *l*, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de lado 10 cm e hipotenusa el valor del diámetro de la circunferencia, 20 cm (que coincide con la diagonal del hexágono que pasa por el centro de la circunferencia):

$10^2 + l^2 = 20^2 \Rightarrow l = 17{,}32$ cm

El perímetro es: $P = 3 \cdot l \Rightarrow P = 3 \cdot 17{,}32 = 51{,}96 \Rightarrow P = 51{,}96$ cm

40 Halla el perímetro del siguiente trapecio:





Tomamos el triángulo rectángulo ABD y calculamos su altura según el teorema de Pitágoras:

$6^2 + h^2 = 11^2 \Rightarrow h = 9{,}22$ cm

Para calcular la base mayor, *b*, tomamos el triángulo ABC y aplicamos de nuevo el teorema de Pitágoras:

$9{,}22^2 + b^2 = 15^2 \Rightarrow b = 11{,}83$ cm

Para calcular el lado oblicuo, *l*, tomamos el triángulo CDE y aplicamos Pitágoras una vez más, sabiendo que el tramo CE mide 11,83 – 6 = 5,83 cm

$5{,}83^2 + 9{,}22^2 = l^2 \Rightarrow l = 10{,}91$ cm

El perímetro es la suma de los lados:

$P = 6 + 9{,}22 + 11{,}83 + 10{,}91 = 37{,}96 \Rightarrow P = 37{,}96$ cm

APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

41 Clasifica, en función de sus ángulos, los triángulos que tienen las siguientes medidas:

a. 18 m, 25 m, 30 m
Acutángulo, porque se cumple $a^2 < b^2 + c^2$, donde $a = 30$ m, $b = 18$ m y $c = 25$ m.

b. 28 m, 38 m, 48 m
Obtusángulo, porque se cumple $a^2 > b^2 + c^2$, donde $a = 48$ m, $b = 28$ m y $c = 38$ m.

c. 15 m, 20 m, 24 m
Acutángulo, porque se cumple $a^2 < b^2 + c^2$, donde $a = 24$ m, $b = 20$ m y $c = 15$ m.

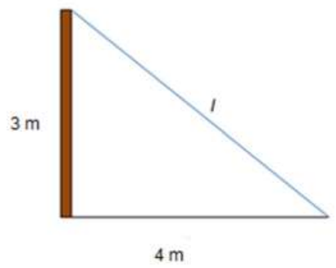
d. 10 m, 11 m, 16 m
Obtusángulo, porque se cumple $a^2 > b^2 + c^2$, donde $a = 16$ m, $b = 11$ m y $c = 10$ m.

42 Se ha instalado una antena de televisión de 3 m de altura, perpendicular a la cubierta plana de un edificio. Para asegurar la antena se ha colocado un cable atado al extremo superior de la antena y a 4 m de su pie. Realiza un dibujo esquemático que represente la situación y calcula la longitud del cable.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo formado por la antena, el cable y el suelo:

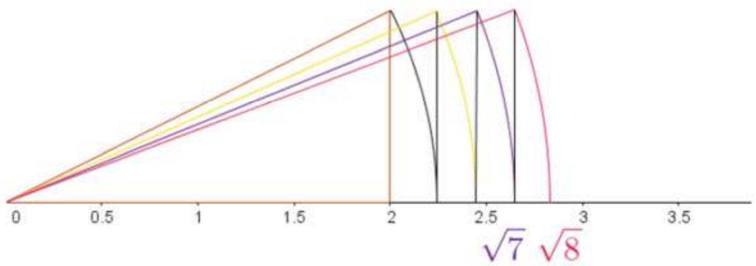
$4^2 + 3^2 = l^2 \Rightarrow l = 5$ m

La longitud del cable es de 5 m.



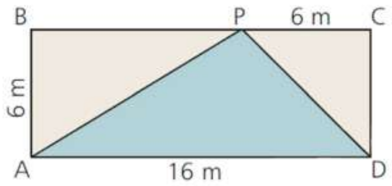
43 Representa gráficamente √7 y √8 utilizando el teorema de Pitágoras.

Ver página 240 del libro del alumno.



SOLUCIONES PÁG. 247

44 Virginia ha alquilado una parcela en un huerto urbano en forma de rectángulo que tiene unas dimensiones de 16 m de largo por 6 m de ancho. Ha dividido la parcela en diferentes zonas para sembrar distintas plantas, como muestra la figura.



Si se quiere vallar cada una de las zonas:

a. Calcula la longitud de la valla que se necesita para cercar la zona PCD.

La zona PCD es un triángulo rectángulo de lados 6 m y 6 m. Se calcula la hipotenusa y después el perímetro de esa zona:

$6^2 + 6^2 = PD^2 \Rightarrow PD = 8{,}49$ m

$P = 6 + 6 + 8{,}49 = 20{,}49$, es decir, se necesitan 20,49 m de valla.

b. ¿Qué longitud tendrá la valla que cerque la zona PAB?

La zona PAB es un triángulo rectángulo de lados 6 m y 10 m. Se calcula la hipotenusa y después el perímetro de esa zona:

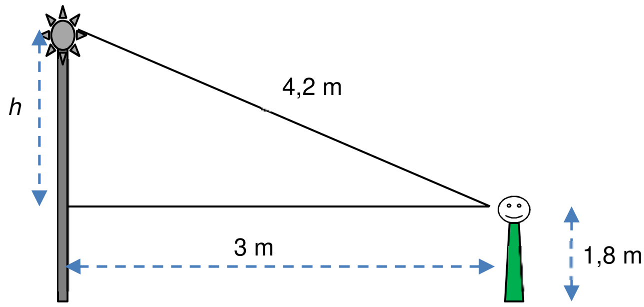
$6^2 + 10^2 = PA^2 \Rightarrow PA = 11{,}66$ m

$P = 6 + 10 + 11{,}66 = 27{,}66$, es decir, se necesitan 27,66 m de valla.

c. ¿Qué tipo de triángulo es la zona PAD?

Es un triángulo obtusángulo.

45 Un observador de 1,80 m de altura se encuentra situado a una distancia de 3 m de una farola. Si en esa posición la visual al extremo superior de la farola tiene una longitud de 4,2 m, halla la altura de la farola.

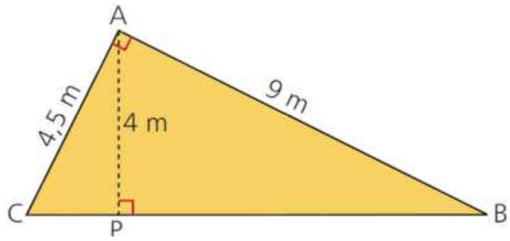


Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que forman el observador, la farola y la visual:

$3^2 + h^2 = 4,2^2 \Rightarrow h = 2,94$ m

La altura de la farola es: 2,94 + 1,8 = 4,74 m

46 Calcula los catetos y las hipotenusas de todos los triángulos rectángulos que se formen en la siguiente figura:



Se forman tres triángulos rectángulos: ACP, ACB y APB

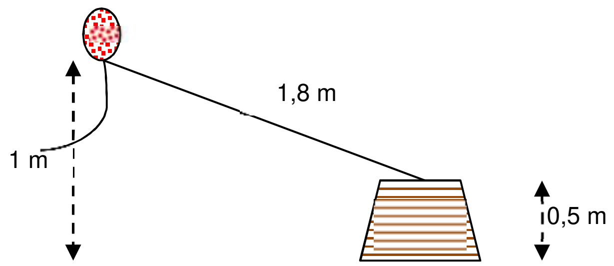
Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar los catetos e hipotenusas:

- Triángulo ACP
  $CP^2 + 4^2 = 4,5^2 \Rightarrow CP = 2,06$ m

- Triángulo APB
  $PB^2 + 4^2 = 9^2 \Rightarrow PB = 8,06$ m

- Triángulo ACB
  $CB = CP + PB \Rightarrow CB = 2,06 + 8,06 = 10,12 \Rightarrow CB = 10,12$ m

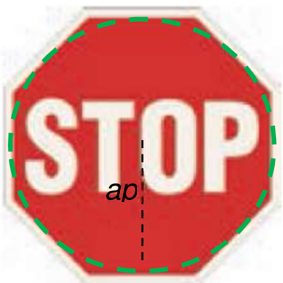
47 Se ha atado un globo con un hilo de 18 dm de longitud y se ha fijado el otro extremo del hilo al centro de una mesa de 50 cm de altura. Una ráfaga de viento ha tensado el hilo, desplazando el globo hasta un punto en el que la vertical al suelo es de 1 m. Halla la distancia de la vertical al centro de la mesa.



Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo que forman el hilo, la vertical hasta la altura de la mesa y la horizontal:
$0{,}5^2 + b^2 = 1{,}8^2 \Rightarrow b = 1{,}729$ m = 17,29 dm

La distancia de la vertical al centro de la mesa es de 17,29 dm.

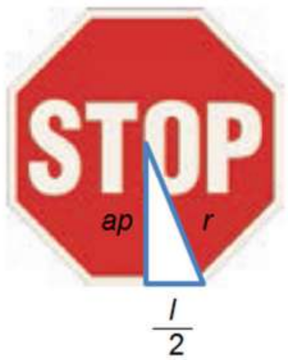
48 Las señales viales de *stop* son señales de prioridad con forma de octógono regular. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al octógono. Dato: el lado del octógono mide 31,18 mm y su área es 60 657,6 mm^2



El radio de la circunferencia inscrita en el octógono coincide con la apotema del mismo, luego:

$$A = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow ap = \frac{2 \cdot A}{P} \Rightarrow ap = \frac{2 \cdot 60\,657{,}6}{8 \cdot 31{,}18} = 486{,}35 \Rightarrow ap = 486{,}35 \text{ mm}$$

Es decir, el radio de la circunferencia inscrita mide 486,35 mm.



Para hallar el radio de la circunferencia circunscrita se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por el radio de la misma, la mitad del lado del octógono y la apotema:

$$r^2 = ap^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow r = \sqrt{486{,}35^2 + 15{,}59^2} =$$
$$= \sqrt{236\,536{,}32 + 243{,}05} = \sqrt{236\,779{,}37} =$$
$$= 486{,}6$$

El radio de la circunferencia circunscrita es el radio del octógono, y mide 486,6 mm.

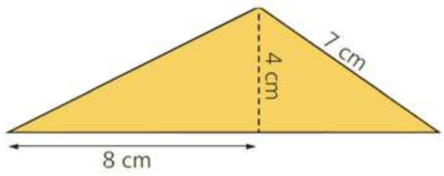
EVALUACIÓN

1 ¿Cuál de estas ternas de segmentos forma un triángulo?

a. 1, 3, 5 **b. 2, 4, 6** **c. 3, 5, 8** d. 4, 6, 8

La respuesta correcta es **d.** porque es la única que cumple $a < b + c$, donde b y c son los lados menores y a el lado mayor del triángulo.

2 El área de este triángulo es:



a. 27,5 cm^2 **b. 22,5 cm^2** **c. 16 cm^2** **d. 14 cm^2**

Se calcula el valor de la base, llamando b al tramo de base que no se conoce:

$4^2 + b^2 = 7^2 \Rightarrow b = 5{,}74$ cm

La base completa del triángulo mide: 8 + 5,74 = 13,74 cm

Se calcula el área:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{13{,}74 \cdot 4}{2} = 27{,}5 \Rightarrow A = 27{,}5 \text{ cm}^2$$

3 Clasifica el triángulo de la actividad anterior:

a. Isósceles. b. Obtusángulo. **c. Equilátero.** d. Escaleno.

Las respuestas correctas son b. (tiene un ángulo obtuso) y d. (sus tres lados son distintos)

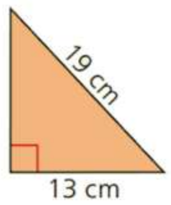
4 ¿Cuáles de estas medidas corresponden a los lados de un triángulo rectángulo?

a. 10, 15, 20 **b. 12, 15, 18** **c. 9, 12, 16** d. 5, 12, 13

Para que se correspondan a las medidas de un triángulo rectángulo debe cumplirse que $a^2 = b^2 + c^2$, donde a es el lado mayor y b y c los lados menores.

5 **Halla el perímetro del siguiente triángulo:**

a. 32 cm b. 45,8 cm **c. 40 cm** **d. 123,5 cm**



Se calcula el cateto que falta: $13^2 + c^2 = 19^2 \Rightarrow c = 13{,}8$ cm
El perímetro es $P = 19 + 13 + 13{,}8 = 45{,}8$ cm

6 **Los lados de un triángulo miden 25 m, 20 m y 14 m, respectivamente; ¿qué tipo de triángulo es?**
a. Acutángulo. **b. Rectángulo.** **c. Isósceles.** d. Obtusángulo.

Se comprueba que los lados del triángulo cumplen la desigualdad del triángulo obtusángulo: $a^2 > b^2 + c^2$, donde $a = 25$ m; $b = 20$ m y $c = 14$ m.

7 **Halla el área de un triángulo equilátero si la medida de uno de sus lados es 10 m.**

a. 50 m² **b. 30 m²** c. 43,3 m² **d. 25 m²**

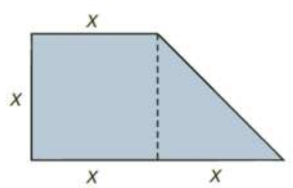
Se calcula la altura del triángulo área sabiendo que los tres lados son iguales:

$5^2 + h^2 = 10^2 \Rightarrow h = 8{,}66$ m

Se calcula el área del triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 43{,}3 \Rightarrow A = 43{,}3 \text{ m}^2$$

8 **El perímetro de la siguiente figura cuando $x = 8$ dm es:**



a. 64 dm b. 43,3 dm **c. 32 dm** **d. 96 dm**

Se calcula el lado que falta (la hipotenusa) aplicando el teorema de Pitágoras:
$$a^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow a^2 = 2x^2 \Rightarrow a = \sqrt{2 \cdot 8^2} = 11{,}3$$
Se calcula el perímetro:
$P = 4 \cdot 8 + 11{,}3 = 43{,}3$ dm

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 13. Semejanza. Teorema de Tales

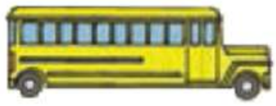
Unidad 13. Semejanza. Teorema de Tales

SOLUCIONES PÁG. 251

1 Indica cuáles de estas figuras son semejantes entre sí.

a.

b.



c.

No son semejantes ninguna, ya que las longitudes de dos lados homólogos no guardan ninguna razón de semejanza.

2 La figura A se ha ampliado hasta obtener la figura B. Halla el tanto por ciento en el que se ha ampliado la imagen. Para ello, mide dos lados homólogos.

Figura A

Figura B

Se toman como lados homólogos las bases. En la figura A, la base mide 2,3 cm, en la figura B, la base mide 2,9 cm, es decir, la razón de semejanza es $r = \frac{2,9}{2,3} = 1,26$, por tanto, se ha producido una ampliación del 126 %.

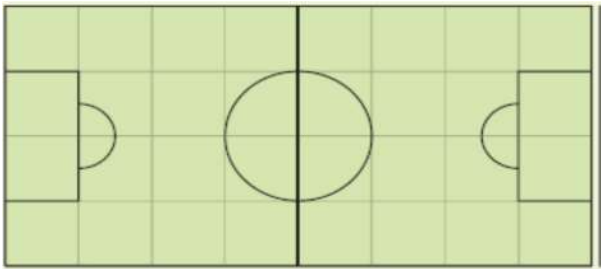
3 La figura A se ha reducido hasta obtener la figura B. Halla el tanto por ciento en el que se ha reducido la imagen.

Figura A

Figura B

Se toma como lado homógolo la altura del árbol. En la figura A, la altura mide 2,8 cm, en la figura B, la altura mide 2,2 cm, es decir, la razón de semejanza es $r = \frac{2,2}{2,8} = 0,78$, por tanto, se ha producido una disminución del 78 %.

4 Dibuja en tu cuaderno esta figura y, a continuación, dibuja otra semejante con el doble de tamaño. Para ello, debes tomar una cuadrícula el doble de grande que la inicial. ¿Cuál es la razón de semejanza?



Se calcula la razón de semejanza como el cociente entre dos lados homólogos. Si la figura es el doble de la del enunciado, r = 2

5 Rodrigo y Nicolás posan juntos en una fotografía en la que miden 1,6 cm y 1,9 cm, respectivamente. Si Rodrigo tiene una altura real de 1,56 m:

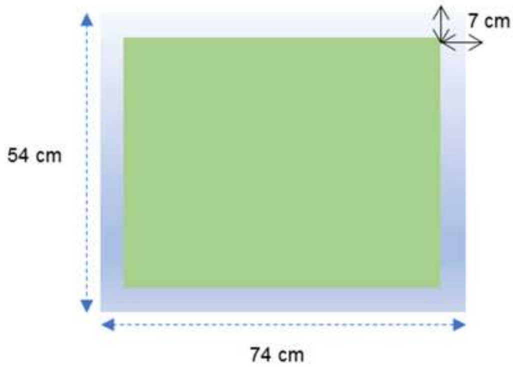
a. ¿Qué razón de semejanza se ha utilizado en la foto?

$r = \frac{1,6}{156} = 0,010$, es decir r = 1 %

b. ¿Cuánto mide realmente Nicolás?

$r = 0,010 = \frac{1,9}{x} \Rightarrow x = 185,25 \text{ cm}$, es decir, Nicolás mide 1,85 cm.

6 La lámina de una pintura mide 60 cm × 40 cm. Se enmarca con un marco de 7 cm de ancho. ¿Es el rectángulo de la lámina semejante al rectángulo que forma el marco?

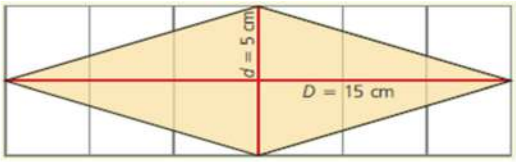


Las dimensiones del rectángulo del marco son, en su parte exterior, 74 cm × 54 cm, y las del rectángulo formado por la lámina son 60 cm × 40 cm.

Los rectángulos no son semejantes, porque sus lados homólogos no son proporcionales, $\frac{60}{74} \neq \frac{40}{54}$.

7 Actividad resuelta.

8 Dibuja un rombo semejante al de la figura mediante:



a. Una ampliación del 175 %.

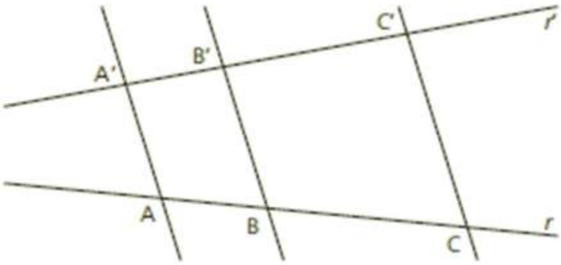
Con una ampliación del 175 %, la diagonal mayor mide 15 · 1,75 = 26,25 cm y la diagonal menor mide 5 · 1,75 = 8,75 cm.

b. Una reducción del 80 %.

Con una reducción del 80 %, la diagonal mayor mide 15 · 0,8 = 12 cm y la diagonal menor mide 5 · 0,8 = 4 cm.

SOLUCIONES PÁG. 253

9 Si las rectas que cortan a *r* y *r'* son paralelas entre sí, halla la longitud del segmento $\overline{BC}$, sabiendo que las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ son, respectivamente, 2,8 cm, 2,5 cm y 4 cm.

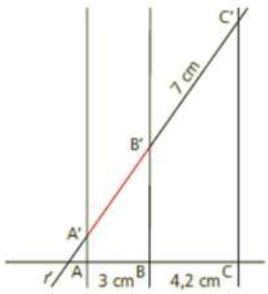


Se aplica el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{B'C'} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \overline{BC} = 4 \cdot \frac{2,8}{2,5} = 4,48 \Rightarrow \overline{BC} = 4,48 \text{ cm}$$

10 Halla la longitud del segmento $\overline{A'B'}$.

Se aplica el teorema de Tales:



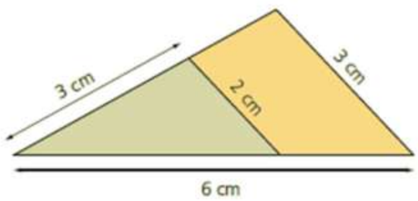
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}\Rightarrow\overline{A'B'}=\overline{AB}\cdot\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}\Rightarrow\overline{A'B'}=3\cdot\frac{7}{4,2}=5\Rightarrow\overline{A'B'}=5\ \text{cm}$$

11 Investiga acerca de la figura de Tales de Mileto y las aplicaciones que de sus conocimientos hizo en su vida.

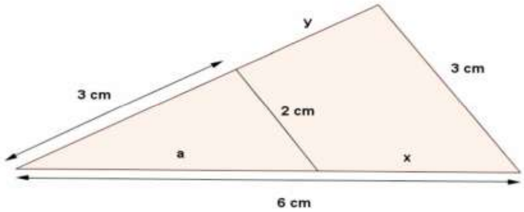
Respuesta abierta.

12 Actividad resuelta.

13 Halla el perímetro de cada uno de los triángulos formados en la siguiente figura:



Se consideran las incógnitas:



Son triángulos en posición de Tales, es decir, los segmentos mantienen una proporción: $\frac{3}{3+y}=\frac{a}{6}=\frac{2}{3}$

$$\frac{a}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow a=\frac{2\cdot 6}{3}=4\Rightarrow a=4\ \text{cm}$$

$$\frac{3}{3+y}=\frac{a}{6}\Rightarrow\frac{3}{3+y}=\frac{4}{6}\Rightarrow 18=4\cdot(3+y)\Rightarrow y=1{,}5\text{ cm}$$

$a + x = 6 \Rightarrow 4 + x = 6 \Rightarrow x = 2$ cm

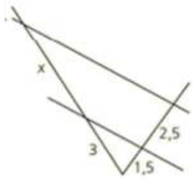
Se calcula el perímetro:

$P_{\text{pequeño}} = 3 + 4 + 2 = 9$ cm

$P_{\text{grande}} = 4{,}5 + 3 + 6 = 13{,}5$ cm

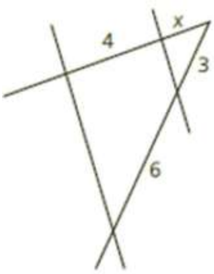
14 Calcula las longitudes de los lados desconocidos en las siguientes figuras, cuyas medidas vienen dadas en centímetros:

a.



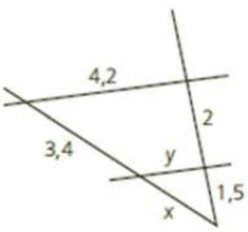
$$\frac{3}{1{,}5}=\frac{x}{2{,}5}\Rightarrow x=5\text{ cm}$$

b.



$$\frac{x}{3}=\frac{x+4}{3+6}\Rightarrow x=2\text{ cm}$$

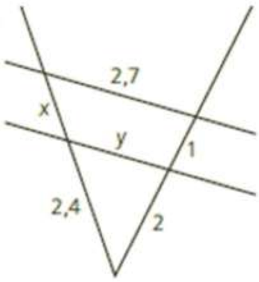
c.



$$\frac{x}{x+3{,}4}=\frac{1{,}5}{1{,}5+2}\Rightarrow 2x-5{,}1=0\Rightarrow x=2{,}55\text{ cm}$$

$$\frac{1{,}5}{1{,}5+2}=\frac{y}{4{,}2}\Rightarrow y=1{,}8\text{ cm}$$

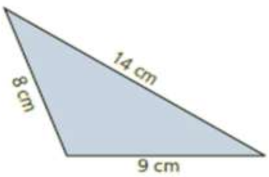
d.



$$\frac{2,4}{2} - \frac{2,4+x}{2+1} \rightarrow 2x - 2,4 - 0 \rightarrow x - 1,2 \text{ cm}$$

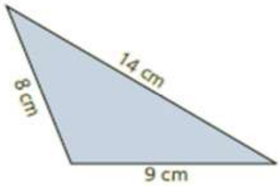
$$\frac{2}{3} = \frac{y}{2,7} \rightarrow y = 1,8 \text{ cm}$$

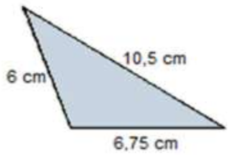
15 A partir del triángulo de la figura, dibuja en tu cuaderno otro triángulo que esté en posición de Tales con él, con una razón de semejanza de 0,75.



Se establece la relación de los dos triángulos en posición de Tales, siendo el triángulo semejante menor que el original:

$$\frac{x}{8} = \frac{y}{9} = \frac{z}{14} = 0,75$$



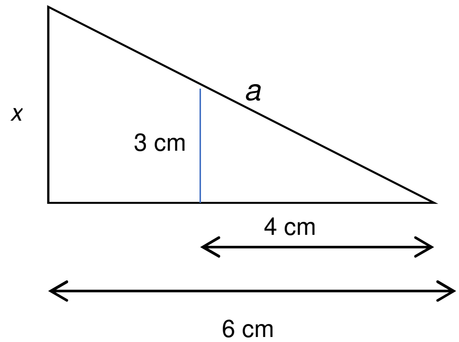


$$\frac{x}{8} = 0,75 \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{9} = 0,75 \Rightarrow y = 6,75 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{14} = 0,75 \Rightarrow z = 10,5 \text{ cm}$$

16 Dibuja en tu cuaderno un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm, respectivamente. A continuación, dibuja otro en posición de Tales cuyo cateto mayor mida 6 cm.



a. ¿Cuál es la razón de semejanza de ambos triángulos?

La relación de semejanza entre los dos triángulos es: $r = \frac{6}{4} = 1{,}5$

b. ¿Cuál es el perímetro del nuevo triángulo?

Mediante la razón de semejanza se halla el cateto menor del triángulo mayor:

$r = \frac{x}{3} = 1{,}5 \Rightarrow x = 4{,}5 \text{ cm}$

Se aplica directamente el teorema de Pitágoras al nuevo triángulo:

$4{,}5^2 + 6^2 = a^2 \Rightarrow a = 7{,}5$ cm

El perímetro es: $P = 4{,}5 + 6 + 7{,}5 = 18$ cm

c. Calcula el área de ambos triángulos.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \Rightarrow A = 6 \text{ cm}^2$$

$$A' = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A' = \frac{6 \cdot 4{,}5}{2} = 13{,}5 \Rightarrow A' = 13{,}5 \text{ cm}^2$$

SOLUCIONES PÁG. 255

17 La longitud de los lados de un pentágono son 1,5 cm, 2,3 cm, 4 cm, 0,9 cm y 3,2 cm, respectivamente. Calcula la longitud de los lados de un pentágono semejante cuya razón de semejanza es $r = \frac{5}{2}$.

Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos del pentágono:

$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{y}{2{,}3} = \frac{z}{4} = \frac{t}{0{,}9} = \frac{v}{3{,}2} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 3{,}75 \text{ cm}$$

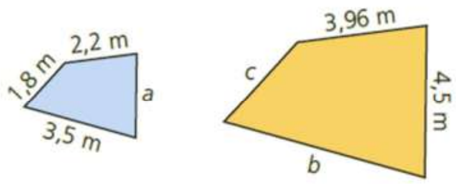
$$\frac{y}{2{,}3} = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 5{,}75 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow z = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{t}{0,9} = \frac{5}{2} \Rightarrow t = 2,25 \text{ cm}$$

$$\frac{v}{3,2} = \frac{5}{2} \Rightarrow v = 8 \text{ cm}$$

18 Halla la longitud de los lados desconocidos para que ambos cuadriláteros sean semejantes.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos de los cuadriláteros:

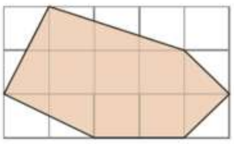
$$\frac{4,5}{a} = \frac{b}{3,5} = \frac{c}{1,8} = \frac{3,96}{2,2} = 1,8$$

$$\frac{4,5}{a} = 1,8 \Rightarrow a = 2,5 \text{ m}$$

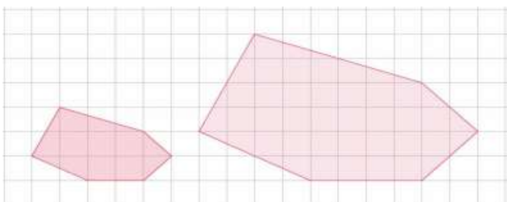
$$\frac{b}{3,5} = 1,8 \Rightarrow b = 6,3 \text{ m}$$

$$\frac{c}{1,8} = 1,8 \Rightarrow c = 3,24 \text{ m}$$

19 Dibuja en tu cuaderno un polígono semejante al de la figura con una razón de semejanza r = 2.



Se puede dibujar el polígono semejante sobre la misma cuadrícula multiplicando por 2 la longitud de cada lado.



20 Los lados de un triángulo miden 8 dm, 12 dm y 6 dm, respectivamente. Halla el perímetro de un triángulo semejante a este cuya razón de semejanza sea r = $\frac{3}{4}$

.

Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos de los triángulos:

$$\frac{a}{8}=\frac{b}{12}=\frac{c}{6}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow a=6 \text{ dm}$$

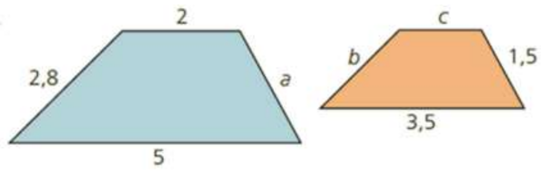
$$\frac{b}{12}=\frac{3}{4}\Rightarrow b=9 \text{ dm}$$

$$\frac{c}{6}=\frac{3}{4}\Rightarrow c=4{,}5 \text{ dm}$$

Se calcula el perímetro: P = 6 + 9 + 4,5 = 19,5 dm

21 Determina la longitud de los lados desconocidos de estas figuras semejantes, cuyas medidas vienen dadas en centímetros:

a.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

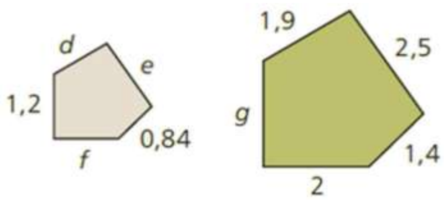
$$\frac{1{,}5}{a}=\frac{b}{2{,}8}=\frac{c}{2}=\frac{3{,}5}{5}=0{,}7$$

$$\frac{1{,}5}{a}=0{,}7\Rightarrow a=2{,}14 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{2{,}8}=0{,}7\Rightarrow b=1{,}96 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{2}=0{,}7\Rightarrow c=1{,}4 \text{ cm}$$

b.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{1{,}9}{d}=\frac{2{,}5}{e}=\frac{2}{f}=\frac{g}{1{,}2}=\frac{1{,}4}{0{,}84}$$

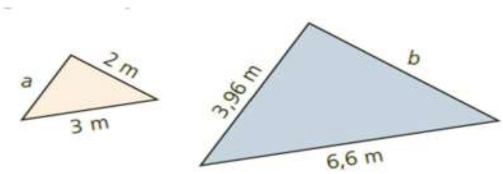
$$\frac{1,9}{d} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow d = 1,14 \text{ cm}$$

$$\frac{2,5}{e} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow e = 1,5 \text{ cm}$$

$$\frac{2}{f} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow f = 1,2 \text{ cm}$$

$$\frac{g}{1,2} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow g = 2 \text{ cm}$$

22 Determina la longitud de los lados desconocidos de estos triángulos semejantes:



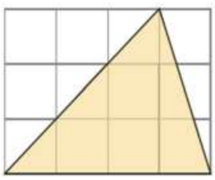
Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{3,96}{a} = \frac{b}{2} = \frac{6,6}{3}$$

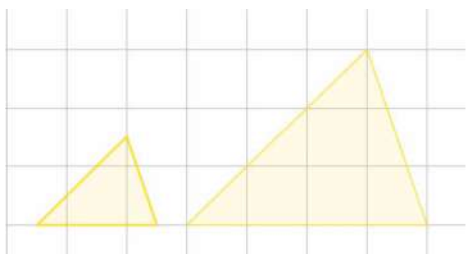
$$\frac{3,96}{a} = \frac{6,6}{3} \Rightarrow a = 1,8 \text{ m}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{6,6}{3} \Rightarrow b = 4,4 \text{ m}$$

23 Dibuja en tu cuaderno un triángulo semejante al siguiente, con una razón de semejanza $r = \frac{1}{2}$:



Se puede dibujar el triángulo semejante sobre la misma cuadrícula dividiendo entre 2 la longitud de cada lado.



24 Indica si las siguientes parejas de triángulos son semejantes:

a. 8 m, 12 m, 15 m y 10 m, 15 m, 19 m.

No son semejantes, porque sus lados homólogos no son proporcionales:

$$\frac{10}{8} = \frac{15}{12} \neq \frac{19}{15}$$

b. 25°, 90° y 65°, 25°.

Sí son semejantes, porque los ángulos del primero son:

25º, 90º y 180º – 25º – 90º = 65º

y los segundo son:

65º, 25º y 180º – 65º – 25º = 90º

Es decir, en los dos triángulos los tres ángulos son iguales, 25º, 65º y 90º.

c. 60°, 60° y 4 m, 4 m, 4 m.

Los dos triángulos son equiláteros (el primero tiene los tres ángulos iguales, 60º, 60º y 180º – 60º – 60º = 60º; el segundo tiene los tres lados iguales) y por tanto son semejantes.

25 Razona si los siguientes pares de triángulos son semejantes:

a. Dos triángulos equiláteros distintos.

Sí, porque tienen todos los ángulos iguales.

b. Dos triángulos isósceles distintos.

No, porque pueden tener los tres ángulos distintos.

c. Dos triángulos acutángulos que tengan un ángulo igual.

No, porque pueden tener los otros dos ángulos distintos.

d. Dos triángulos isósceles cuyas parejas de lados iguales forman el mismo ángulo.

Sí, porque tienen los tres ángulos iguales, ya que cada uno de los otros dos ángulos valen la mitad del suplementario del dado.

26 Dos cuadriláteros tienen sus cuatro lados iguales cada uno de ellos y cumplen, además, que sus lados correspondientes mantienen entre sí una razón de semejanza r = 1,5. Con estas indicaciones, ¿se puede asegurar que son semejantes? Razona tu respuesta.

No, porque se puede tratar de un cuadrado y un rombo, que no son semejantes.

SOLUCIONES PÁG. 257

27 Las medidas de un triángulo son 4 dm, 6 dm y 9 dm, y las de otro triángulo semejante a él son 6 dm, 9 dm y 13,5 dm.

a. Obtén la razón de semejanza de ambos triángulos.

La razón de semejanza es $r = \frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{13,5}{9} = 1,5$

b. Calcula el perímetro de los dos triángulos.

$P = 4 + 6 + 9 = 19$ dm

$P' = 6 + 9 + 13,5 = 28,5$ dm

28 De dos triángulos semejantes se conocen las longitudes de un par de lados homólogos: 2,8 cm y 7 cm, respectivamente. Si el perímetro del triángulo menor es de 9,8 cm y el área vale 4,19 cm²:

a. ¿Cuál es el perímetro del otro triángulo?

La razón de semejanza es $r = \frac{7}{2,8} = 2,5$. Como esta razón de semejanza coincide con la razón de semejanza entre perímetros:

$P' = r \cdot P \Rightarrow P' = 2,5 \cdot 9,8 = 24,5 \Rightarrow P' = 24,5$ cm

b. ¿Cuál es su área?

La razón de semejanza entre áreas es $\frac{A'}{A} = r^2$, de modo que:

$A' = A \cdot r^2 \Rightarrow A' = 4,19 \cdot 2,5^2 = 26,19 \Rightarrow A' = 26,19 \text{ cm}^2$

29 De un cuadrilátero se conocen sus lados, que miden 3 m, 4 m, 6 m y 7 m, respectivamente, y de otro cuadrilátero semejante a él se sabe que su perímetro mide 46 m.

a. Halla la razón de semejanza de ambos cuadriláteros.

Se calcula el perímetro del cuadrilátero: $P = 3 + 4 + 6 + 7 = 20 \Rightarrow P = 20$ m

Se comparan los perímetros para hallar la razón de semejanza:

$$r = \frac{P'}{P} = \frac{46}{20} = \frac{23}{10} = 2,3$$

b. ¿Cuánto miden los lados del segundo cuadrilátero?

Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{6} = \frac{d}{7} = 2,3$$

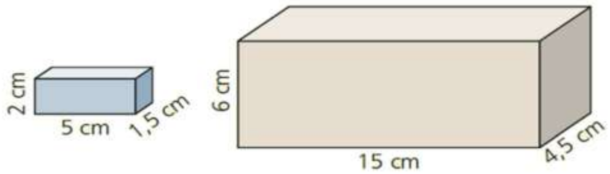
$$\frac{a}{3} = 2,3 \Rightarrow a = 6,9 \text{ m}$$

$$\frac{b}{4} = 2{,}3 \Rightarrow b = 9{,}2 \text{ m}$$

$$\frac{c}{6} = 2{,}3 \Rightarrow c = 13{,}8 \text{ m}$$

$$\frac{d}{7} = 2{,}3 \Rightarrow d = 16{,}1 \text{ m}$$

30 Dados estos prismas semejantes, ¿qué relación hay entre su razón de semejanza y la de sus volúmenes?



Se halla la razón de semejanza entre los prismas:

$$\text{r} = \frac{4{,}5}{1{,}5} = \frac{15}{5} = \frac{6}{2} = 3$$

Se halla la razón entre volúmenes:

$$\frac{V'}{V} = \text{r}^3 \Rightarrow \frac{V'}{V} = 3^3 \Rightarrow \frac{V'}{V} = 27$$

31 Los perímetros de dos hexágonos semejantes miden, respectivamente, 43 cm y 150,5 cm, y el área del primer hexágono, 130 cm^2.

a. Halla la razón de semejanza entre los hexágonos.

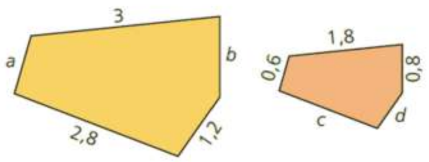
$$\text{r} = \frac{P'}{P} = \frac{150{,}5}{43} = 3{,}5$$

b. Calcula el área del segundo hexágono.

La razón de semejanza entre áreas es $\frac{A'}{A} = \text{r}^2$, de modo que:

$A' = A \cdot \text{r}^2 \Rightarrow A' = 130 \cdot 3{,}5^2 = 1\ 592{,}5 \text{ cm}^2$

32 Dados estos dos polígonos semejantes, cuyas unidades están dadas en centímetros, halla:



a. Los lados desconocidos.

Se halla la razón de semejanza entre los polígonos:

$$\mathrm{r} = \frac{0,6}{a} = \frac{0,8}{b} = \frac{c}{2,8} = \frac{d}{1,2} = \frac{1,8}{3} = 0,6$$

$$\frac{0,6}{a} = 0,6 \Rightarrow a = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{0,8}{b} = 0,6 \Rightarrow b = 1,3 \text{ cm}$$

$$\frac{c}{2,8} = 0,6 \Rightarrow c = 1,68 \text{ cm}$$

$$\frac{d}{1,2} = 0,6 \Rightarrow d = 0,72 \text{ cm}$$

b. Los perímetros de ambos polígonos.

Los perímetros se calculan sumando los lados de cada polígono:

P = 1 + 2,8 + 1,2 + 1,3 + 3 = 9,3 cm

P' = 0,6 + 1,68 + 0,72 + 0,8 + 1,8 = 5,60 cm

33 De una serie de triángulos se indican a continuación su perímetro y su área. ¿Cuáles de ellos son semejantes?

a. *P* = 12 cm, *A* = 24 cm² — **c. *P* = 18 cm, *A* = 54 cm²**

b. *P* = 24 cm, *A* = 256 cm² — **d. *P* = 15 cm, *A* = 100 cm²**

Se busca la razón de semejanza entre los triángulos y se observa que:

- $\mathrm{r} = \frac{P_{a.}}{P_{c.}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}; \mathrm{r}^2 = \frac{A_{a.}}{A_{c.}} = \frac{24}{54} = \frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^3}$, es decir, los triángulos a. y c. son semejantes.
- $\mathrm{r} = \frac{P_{b.}}{P_{d.}} = \frac{24}{15} = 1,6; \mathrm{r}^2 = \frac{A_{b.}}{A_{d.}} = \frac{256}{100} = 2,56 = 1,6^2$, es decir, los triángulos b. y d. son semejantes.

34 El lado de un cuadrado mide 5 cm, y el lado de otro cuadrado es el cuádruple. Calcula:

a. La razón entre sus perímetros.

La razón entre sus perímetros es: $\mathrm{r} = \frac{P'}{P} \Rightarrow \mathrm{r} = \frac{4 \cdot (5+5+5+5)}{5+5+5+5} = 4$, igual que entre sus lados.

b. La razón entre sus áreas.

La razón entre sus áreas es $4^2 = 16$.

SOLUCIONES PÁG. 259

35 Visita estas páginas en Internet. En una de ellas adquirirás más conocimientos sobre la interpretación de mapas y planos y en la otra realizarás un repaso de lo aprendido acerca de la semejanza a través de las actividades propuestas.

http://conteni2.educarex.es/mats/101109/contenido/

http://conteni2.educarex.es/mats/101069/contenido/

Respuesta abierta.

36 En un mapa, la distancia entre las ciudades de Tallin y Helsinki es de 16 cm. Si en la realidad estas dos ciudades distan entre sí 80 km, ¿cuál es la escala con la que está elaborado el mapa?

La razón de semejanza entre la distancia real y la distancia en el mapa es:

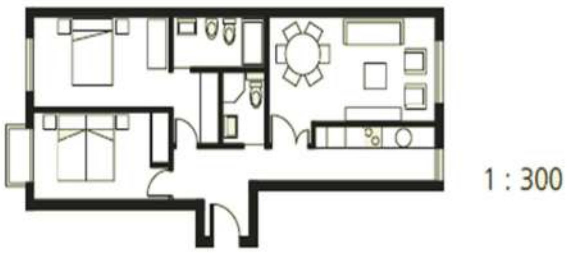
$$\frac{80\text{ km}}{16\text{ cm}} = \frac{80\,000\text{ m}}{0{,}16\text{ m}} = 500\,000$$

Por tanto, la escala es 1:500 000

37 En grupos de tres elaborad un plano del aula. Para ello elegid una escala adecuada y medid las dimensiones del aula para representarla en vuestros cuadernos.

Respuesta abierta.

38 En el siguiente plano de un piso realizado con una escala 1:300, toma las medidas necesarias para contestar a las siguientes preguntas:



a. ¿Qué dimensiones reales tiene el salón?

El salón mide en el plano 1,8 cm × 1 cm, como la escala es 1:300, en realidad medirá:

0,018 m · 300 = 5,4 m

0,01 m · 300 = 3 m, es decir, el salón mide realmente 5,4 × 3 m

b. Se quiere representar en el plano una mesa en el salón cuyas dimensiones son 1 m × 0,50 m. ¿Cuánto medirá en el plano?

La mesa medirá:

$$\frac{1}{300} = 3{,}33 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 0{,}33\ \text{cm}$$

$$\frac{0{,}5}{300} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}\,\text{m} = 0{,}17\ \text{cm}$$

Es decir, la mesa medirá sobre el plano 0,33 cm × 0,17 cm

39 En el plano de un piso realizado a una escala de 1:200, la cocina mide 3 cm × 2 cm. Calcula:

a. Las dimensiones de la cocina en la realidad.

Como la escala es 1:200, en realidad medirá:

0,03 m · 200 = 6 m

0,02 m · 200 = 4 m

Es decir, el salón mide realmente 6 × 4 m

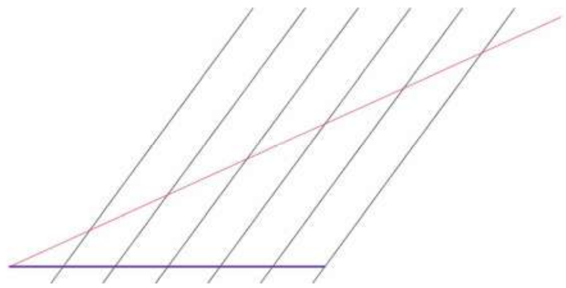
b. La superficie de la cocina en el plano y en la realidad.

La superficie que tendrá la cocina en el plano es $A = 3 \cdot 2 = 6\ \text{cm}^2$, y en la realidad, $A' = 6 \cdot 4 = 24\ \text{m}^2$.

40 Actividad resuelta.

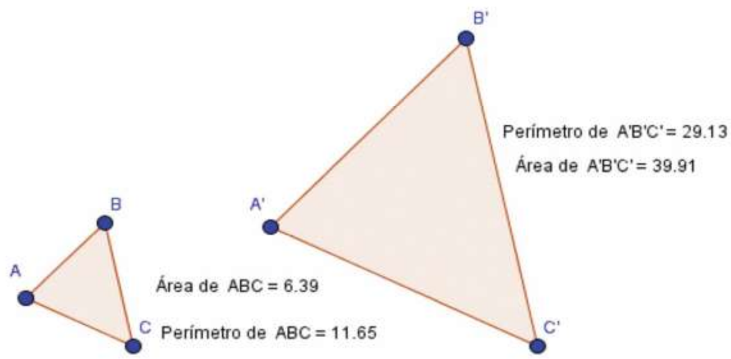
41 Dibuja en tu cuaderno un segmento de 8 cm y divídelo en 6 partes iguales utilizando el teorema de Tales.

Se trata de apoyarse en un segmento dividido en 6 partes iguales y trazar paralelas entre los extremos de los dos segmentos. Por el teorema de Tales, los tramos entre las paralelas son proporcionales a las seis partes iguales marcadas en la recta auxiliar y, por tanto, serán también iguales entre sí.



SOLUCIONES PÁG. 260 - HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

1 Dibuja dos triángulos semejantes según una razón de semejanza r = 2,5. Comprueba que sus perímetros tienen la misma razón de semejanza, y que la razón entre sus áreas es el cuadrado de dicha razón.



La relación entre perímetros es: $\frac{P'}{P} = \frac{29{,}13}{11{,}65} = 2{,}5 = r$.

La relación entre áreas es: $\frac{A'}{A} = \frac{39{,}91}{6{,}39} = 6{,}25 = r^2$

SOLUCIONES PÁG. 261 - APRENDO A APRENDER

1 ¿Qué son los ángulos homólogos en dos figuras semejantes?

Son los ángulos que se corresponden en ambas figuras, y tienen la misma amplitud por ser semejantes.

2 ¿En las figuras semejantes puede variar la forma o el tamaño?

Solo puede variar el tamaño.

3 Si la razón de semejanza es mayor que la unidad, ¿cómo es la figura semejante respecto a la inicial?

Es una figura ampliada.

4 Cuando la figura semejante se obtiene a través de una reducción de la original, ¿cómo es la razón de semejanza?

Es menor que la unidad.

5 Enuncia el teorema de Tales.

Si dos rectas secantes, *r* y *r'*, son cortadas por rectas paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección en la recta *r* son proporcionales a los determinados por los puntos de intersección correspondientes en la recta *r'*.

6 ¿Cuándo dos triángulos están en posición de Tales?

Deben tener todos sus ángulos iguales y los lados correspondientes a cada uno proporcionales.

7 ¿Cuál es el valor de la razón de semejanza que hay entre dos polígonos si uno de ellos ha aumentado en un 175 % con respecto al otro?

$r = 1{,}75$

8 ¿Qué deben cumplir los elementos de dos polígonos semejantes?

Debe cumplir que los lados homólogos de ambos polígonos son proporcionales y los ángulos homólogos son iguales.

9 ¿Cuáles son los criterios de semejanza para triángulos rectángulos?

Los dos criterios son:

- Tienen un ángulo agudo igual.
- Tienen dos de sus lados homólogos proporcionales.

10 ¿Se puede asegurar que dos triángulos rectángulos isósceles son siempre semejantes?

Sí, pues los ángulos en ambos triángulos son 45º, 45º y 90º.

11 ¿Qué cumple la relación entre los perímetros de dos polígonos semejantes?

Se cumple que coincide con la razón de semejanza de los lados de los polígonos.

12 ¿Y la razón entre las áreas?

Se cumple que es el cuadrado de la razón de semejanza de los lados de los polígonos.

13 ¿Qué diferencia hay entre un mapa y un plano?

En el mapa se representa una parte o toda la superficie terrestre y se emplea una escala menor que en el plano. Mientras que el plano se emplea para representar realidades diferentes a la superficie terrestre.

14 ¿Qué es una representación a escala?

Es una representación gráfica de la realidad manteniendo las proporciones en las distancias.

15 Explica el significado de la escala 1:1 000.

La escala 1:1 000 significa que una determinada distancia en el mapa mide 1 000 veces más en la realidad y en las mismas unidades.

16 Dos octógonos regulares tienen lados de distintas longitudes; ¿se puede afirmar que son semejantes?

Sí, porque los ángulos homólogos son iguales y los lados son proporcionales.

17 Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 262 – REPASO FINAL

RAZÓN Y SEMEJANZA

1 Una fotocopiadora reproduce figuras semejantes ampliando o reduciendo la original. Se hace una fotocopia de una imagen encerrada en un rectángulo que mide 20 cm × 8 cm.

a. Halla las dimensiones de rectángulo si en la fotocopiadora se selecciona ampliar un 150 %.

Se establece la relación de semejanza:

$$r = \frac{150}{100} = 1{,}5 \Rightarrow 1{,}5 = \frac{a}{20} = \frac{b}{8}$$

$$1{,}5 = \frac{a}{20} \Rightarrow a = 30 \text{ cm}$$

$$1{,}5 = \frac{b}{8} \Rightarrow b = 12 \text{ cm}$$

Las dimensiones son 30 cm × 12 cm.

b. Calcula las dimensiones del rectángulo si se selecciona reducir un 75 %.

Se establece la relación de semejanza:

$$r = \frac{75}{100} = 0{,}75 \Rightarrow 0{,}75 = \frac{a}{20} = \frac{b}{8}$$

$$0{,}75 = \frac{a}{20} \Rightarrow a = 15 \text{ cm}$$

$$0{,}75 = \frac{b}{8} \Rightarrow b = 6 \text{ cm}$$

Las dimensiones son 15 cm × 6 cm.

c. ¿Qué porcentaje se ha seleccionado si las dimensiones del nuevo rectángulo son 24 cm × 9,6 cm?

Se establece la relación de semejanza:

$$\frac{r}{100} = \frac{24}{20} = \frac{9{,}6}{8} = 1{,}2 \Rightarrow r = 120,\ r = 120\%$$

Se ha seleccionado un porcentaje de 120 %.

2 Irene ha hecho una fotografía a su perro, que mide 1,14 m.

a. Si en la foto tiene una altura de 3 cm, ¿cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la foto?

Se establece la relación de semejanza: $r = \frac{1,14}{0,03} = 38$

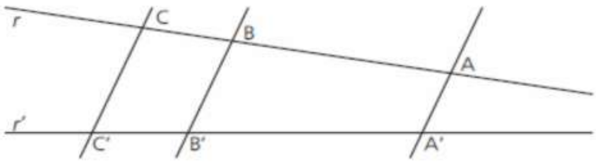
b. Si en la foto también aparece su hermana Julia con una altura de 4 cm, ¿cuánto mide realmente?

$r = 38 = \frac{h}{0,04} \Rightarrow h = 1,52$ m. Julia mide 1,52 m

TEOREMA DE TALES

3 Las rectas que cortan a *r* y *r* ' son paralelas entre sí. Halla la longitud del segmento $\overline{B'C'}$ sabiendo que las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{BC}$ son, respectivamente, 2,7 cm, 2,9 cm y 1,5 cm.

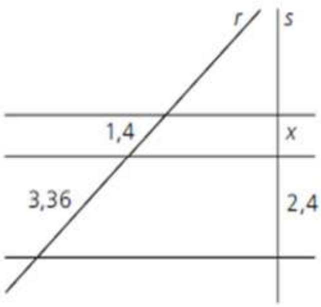
Se realiza un esquema para colocar las rectas y los segmentos:



Se establece la relación de semejanza según el teorema de Tales:

$$r = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{2,9}{2,7} = 1,07 \Rightarrow \overline{B'C'} = 1,61 \text{ cm}$$

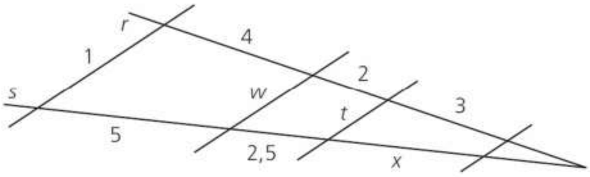
4 Si las rectas que cortan a *r* y *s* son paralelas, halla la longitud *x*.



Se establece la relación de semejanza según el teorema de Tales:

$$r = \frac{x}{1,4} = \frac{2,4}{3,36} \Rightarrow x = 1$$

5 Si las rectas que cortan a *r* y *s* son paralelas, halla la longitud de *x*, *w* y *t*.

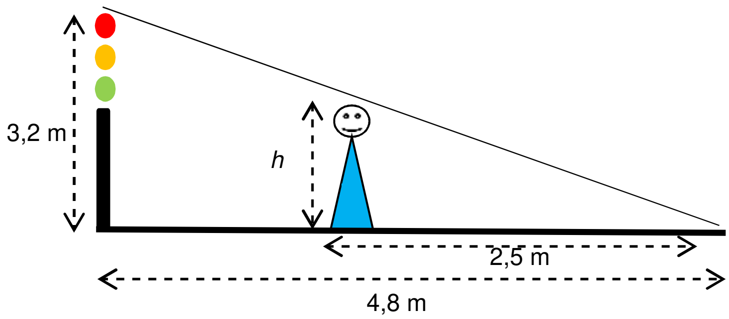


Se toman los segmentos proporcionales para averiguar longitudes:

$$\frac{x}{3}=\frac{2,5}{2}\Rightarrow x=3,75$$
$$\frac{w}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow w=0,5$$
$$\frac{t}{w}=\frac{3}{5}\Rightarrow \frac{t}{0,5}=0,6\Rightarrow t=0,3$$

6 La sombra de Hugo tiene una longitud de 2,5 m. En ese lugar y en ese preciso momento del día un semáforo que tiene una altura de 3,2 m produce una sombra de 4,8 m de longitud. ¿Cuál es la estatura de Hugo?

Se realiza un esquema para entender la situación:

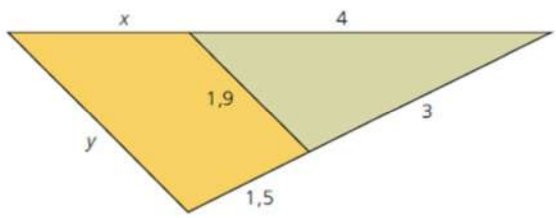


Se trata de dos triángulos en posición de Tales, luego sus lados son semejantes, es decir,

$$\frac{2,5}{4,8}=\frac{h}{3,2}\Rightarrow h=1,67$$

Hugo mide 1,67 m.

7 Halla la longitud de los segmentos desconocidos.



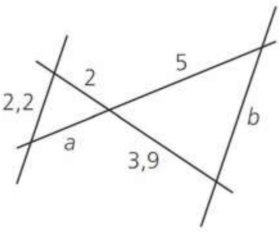
Se trata de dos triángulos en posición de Tales, luego sus lados son semejantes, es decir,

$$\frac{x+4}{4}=\frac{1,5+3}{3}\Rightarrow \frac{x+4}{4}=\frac{4,5}{3}\Rightarrow x=2$$

$$\frac{y}{1,9}=\frac{1,5+3}{3}\Rightarrow\frac{y}{1,9}=\frac{4,5}{3}\Rightarrow y=2,85$$

8 Calcula el valor de cada uno de los segmentos cuya medida se desconoce.

a.

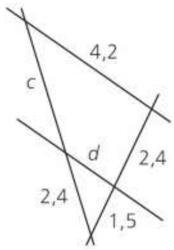


Se toman los segmentos proporcionales para averiguar longitudes, teniendo en cuenta que se forman dos triángulos opuestos por el vértice. Los segmentos proporcionales son los lados prolongados.

$$\frac{a}{2}=\frac{5}{3,9}\Rightarrow a=2,56$$

$$\frac{b}{2,2}=\frac{3,9}{2}\Rightarrow b=4,29$$

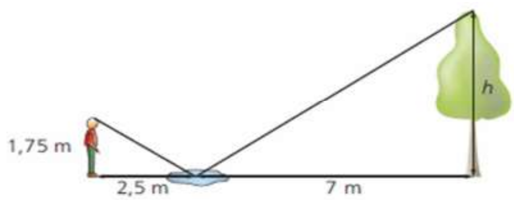
b.



$$\frac{c}{2,4}=\frac{2,4}{1,5}\Rightarrow c=3,84$$

$$\frac{d}{4,2}=\frac{1,5}{1,5+2,4}\Rightarrow d=1,62$$

9 Rodrigo tiene delante un árbol cuya copa se ve reflejada en un charco que hay entre medias. Si Rodrigo mide 1,75 m, calcula la altura del árbol teniendo en cuenta las distancias recogidas en la siguiente figura:

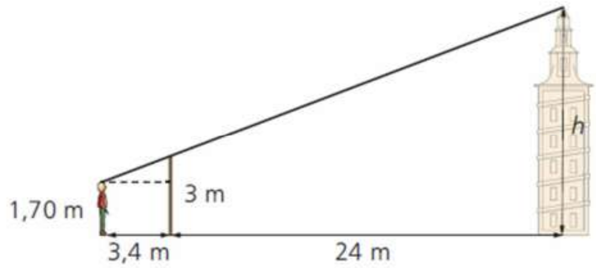


Se plantea la proporción entre los lados de los triángulos semejantes:

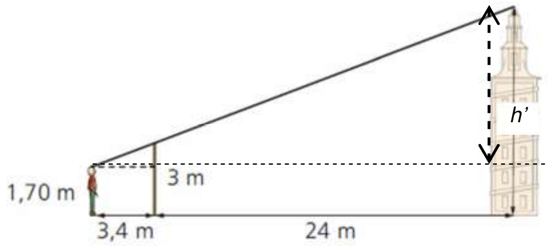
$$\frac{h}{1,75}=\frac{7}{2,5}\Rightarrow h=4,9$$

El árbol mide 4,9 m.

10 Sergio quiere calcular la altura de la torre del campanario de su pueblo. Para ello, clava una vara en el suelo de forma que sobresalga 3 m y se sitúa de tal modo que en su visual al campanario coincidan los extremos del listón y de la torre. Si Sergio ha tomado las medidas indicadas en la imagen, halla la altura del campanario.



Se plantea la proporción de los lados de los lados semejantes:



$$\frac{h'}{24+3,4}=\frac{3-1,7}{3,4}\Rightarrow h'=10,48$$

$h = h' + 1,7 = 10,48 + 1,70 = 12,18$

El campanario mide 12,18 m

SOLUCIONES PÁG. 263

SEMEJANZA DE POLÍGONOS. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

11 Halla la longitud de los lados de un pentágono semejante a otro cuyos lados miden 2 cm, 5 cm, 6 cm, 10 cm y 14 cm, con una razón de semejanza r = 2,5.

Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos de los pentágonos:

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{5}=\frac{c}{6}=\frac{d}{10}=\frac{e}{14}=2,5$$

$$\frac{a}{2}=2,5\Rightarrow a=5 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{5}=2,5\Rightarrow b=12,5 \text{ cm}$$

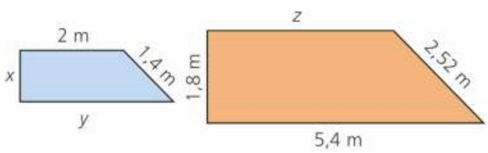
$$\frac{c}{6}=2,5\Rightarrow c=15 \text{ cm}$$

$$\frac{d}{10}=2,5\Rightarrow d=25 \text{ cm}$$

$$\frac{e}{14}=2,5\Rightarrow e=35 \text{ cm}$$

12 Halla la longitud de los lados desconocidos en estos polígonos semejantes:

a.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

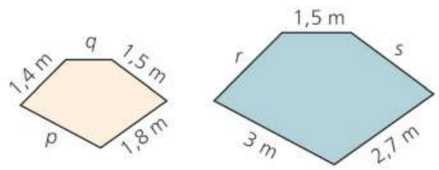
$$\frac{1,8}{x}=\frac{5,4}{y}=\frac{z}{2}=\frac{2,52}{1,4}=1,8$$

$$\frac{1,8}{x}=1,8 \Rightarrow x=1\text{ m}$$

$$\frac{5,4}{y}=1,8 \Rightarrow y=3\text{ m}$$

$$\frac{z}{2}=1,8 \Rightarrow z=3,6\text{ m}$$

b.



Se establece la relación de proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{1,5}{q}=\frac{r}{1,4}=\frac{3}{p}=\frac{s}{1,5}=\frac{2,7}{1,8}=1,5$$

$$\frac{1,5}{q}=1,5 \Rightarrow q=1\text{ m}$$

$$\frac{r}{1,4}=1,5 \Rightarrow r=2,1\text{ m}$$

$$\frac{3}{p}=1,5 \Rightarrow p=2\text{ m}$$

$$\frac{s}{1,5}=1,5 \Rightarrow s=2,25\text{ m}$$

13 Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. Dos triángulos rectángulos son siempre semejantes.
Falso, pues puede que solo tengan un ángulo igual.

b. El rectángulo cuyos lados miden 5 cm y 7 cm es semejante a otro de 11,5 cm y 16,1 cm de lados.

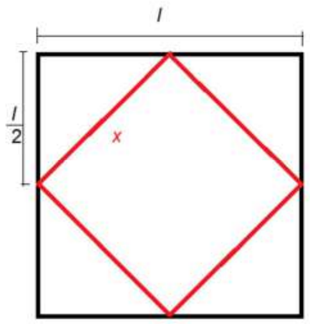
Verdadero, pues: $r=\frac{11,5}{5}=\frac{16,1}{7}=2,3$

c. La razón entre las alturas de dos triángulos semejantes no es igual a la razón de semejanza de los triángulos.

Falso. Sí se mantiene la razón, pues al trazar la altura se crean triángulos semejantes.

d. Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrado, se obtiene otro que no es semejante al anterior.

Falso, son semejantes con razón $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que es la relación entre los lados del cuadrado semejante y del original:



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del lado del cuadrado pequeño:

$$x = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \rightarrow x = \sqrt{2\left(\frac{l}{2}\right)^2} \rightarrow x = \frac{l}{2}\sqrt{2}$$

Se aplica el teorema de Tales para hallar la razón de proporcionalidad:

$$r = \frac{\frac{l}{2}\sqrt{2}}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

14 Dos cuadriláteros tienen sus cuatro ángulos iguales cada uno de ellos. Con estas condiciones, ¿se puede asegurar que son semejantes? Razona tu respuesta.

No, porque pueden ser un cuadrado y un rectángulo, que no son semejantes.

15 Indica, razonando tu respuesta, todos los triángulos semejantes que aparecen en el siguiente dibujo:

Hay tres triángulos semejantes: BAC, AMC y BMA.

Tienen dos lados homólogos proporcionales, y el ángulo comprendido entre ellos es igual.

16 Si se toman los puntos medios de los dos catetos de un triángulo rectángulo y se unen con el vértice del ángulo recto, se forma otro triángulo. ¿Es este último semejante al triángulo rectángulo inicial? Razona tu respuesta.

Sí es semejante, puesto que están en posición de Tales.

17 Demuestra si las siguientes parejas de triángulos son semejantes:

a. 6 m, 10 m, 14 m y 15 m, 25 m, 35 m

Sí, porque los lados son proporcionales, con r = 2,5:

$$\frac{6}{15}=\frac{10}{25}=\frac{14}{35}$$

b. 40°, 60° y 80°, 60°

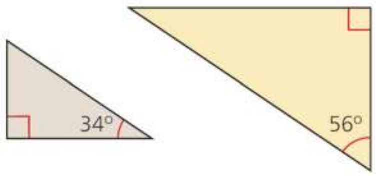
Sí, porque los ángulos son iguales, 40º, 60º y 80º.

c. 3 cm, 4 cm y 5 cm y 45°, 45°

No, porque los dos son triángulos rectángulos, pero uno de ellos es isósceles (tiene los tres lados iguales) y el otro no.

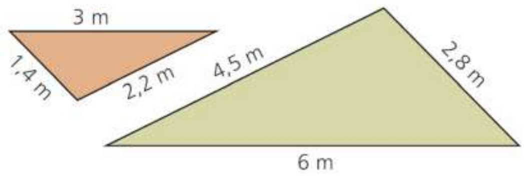
18 Indica si estos triángulos son semejantes:

a.



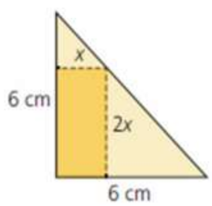
Sí, porque los ángulos son iguales, 34º, 56º y 90º.

b.



No, porque los lados no son proporcionales: $\frac{6}{3}=\frac{2,8}{1,4}\neq\frac{4,5}{2,2}$

19 En un triángulo rectángulo isósceles se ha inscrito un rectángulo cuya altura es el doble que la base. Halla el área del rectángulo.



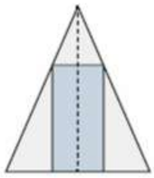
Se han formado dos triángulos semejantes, uno de ellos es el original y el otro tiene altura $2x$ y base $6 - x$.

Se establece la proporción entre los triángulos semejantes:

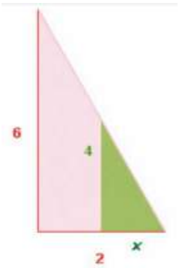
$$\frac{6}{6}=\frac{2x}{6-x}\Rightarrow x=2\text{ cm}$$

El área es: $A = x \cdot 2x \Rightarrow A = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \Rightarrow A = 8\text{ cm}^2$

20 En un triángulo isósceles de 4 m de base y 6 m de altura se inscribe un rectángulo de 4 m de altura. Halla el área del rectángulo.



Resultan dos triángulos semejantes, como se ve en la figura:

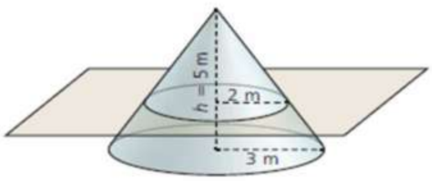


Se establece la proporción entre los triángulos semejantes:

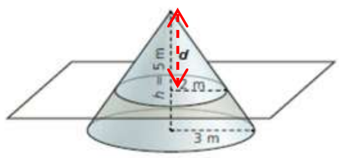
$\frac{6}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 1{,}3$ m

Las dimensiones del rectángulo son 1,4 × 4, así que el área es: $A = 5{,}6$ m^2

21 En un cono de 3 m de radio y 5 m de altura se ha realizado un corte por un plano perpendicular a la altura, generando una sección circular de 2 m de radio. Halla la distancia desde el centro de esta sección al vértice del cono.



Se establece la proporción entre los triángulos semejantes: $\frac{5}{3} = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 3{,}3$ m

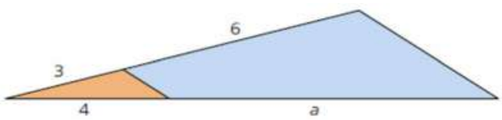


La distancia desde el centro al vértice del cono es 3,3 m.

SOLUCIONES PÁG. 264

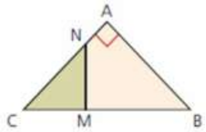
22 Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a. El valor de *a* es 8.



Cierto, porque $\frac{4}{3} = \frac{a}{6} \Rightarrow a = 8$

b. Los triángulos ABC y MCN son semejantes.



Cierto. Los dos triángulos tienen los tres ángulos iguales.

PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS SEMEJANTES

23 Los lados de dos pentágonos regulares miden, respectivamente, 4 cm y 9 cm.

a. ¿Son semejantes?

Sí, pues sus ángulos homólogos son iguales y sus lados proporcionales.

b. En caso afirmativo, ¿cuál es la razón de semejanza?

$$r = \frac{9}{4} = 2,25$$

c. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?

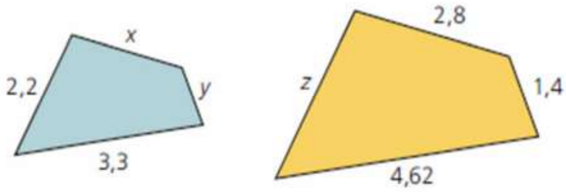
$P = 4 \cdot 5 = 20$

$P' = 9 \cdot 5 = 45$

$$r = \frac{P'}{P} \Rightarrow r = \frac{45}{20} = 2,25$$

Es la misma.

24 En la imagen aparecen dos cuadriláteros semejantes con las medidas en centímetros. Halla:



a. Los lados desconocidos.

Se establece la proporción entre los lados homólogos:

$$\frac{2,8}{x} = \frac{1,4}{y} = \frac{z}{2,2} = \frac{4,62}{3,3} = 1,4$$

$$\frac{2,8}{x} = 1,4 \Rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

$$\frac{1,4}{y} = 1,4 \Rightarrow y = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{2,2} = 1,4 \Rightarrow z = 3,08 \text{ cm}$$

b. Los perímetros de ambos polígonos.

$P = 2 + 1 + 3,3 + 2,2 = 8,5$ cm

$P' = 2,8 + 1,4 + 4,62 + 3,08 = 11,9$ cm.

Se comprueba también que $P' = r \cdot P = 1,4 \cdot 8,5 = 11,9$

25 El perímetro de un cuadrilátero es 24 dm, y su área es 16 dm^2. Si redujéramos el cuadrilátero usando $\frac{1}{4}$ como razón de semejanza:

a. Halla el perímetro del nuevo cuadrilátero.

$P' = r \cdot P \Rightarrow P' = \frac{1}{4} \cdot 24 = 6 \Rightarrow P' = 6 \text{ dm}$

b. Calcula su área.

$A' = r^2 \cdot A \Rightarrow A' = \frac{1}{16} \cdot 16 = 1 \Rightarrow A' = 1 \text{ dm}^2$

26 Las áreas de dos hexágonos regulares semejantes son 93,6 m^2 y 452,63 m^2, respectivamente. Si el perímetro del primer hexágono mide 36 m, halla:

a. La razón de semejanza entre los hexágonos.

Se establece la razón de semejanza entre áreas:

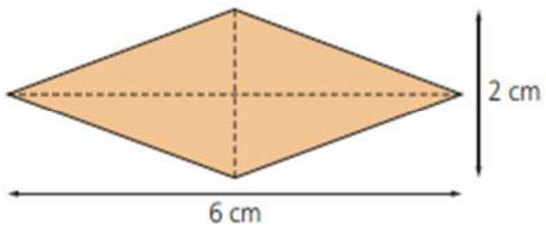
$A' = r^2 \cdot A \Rightarrow r^2 = \frac{A'}{A} \Rightarrow r^2 = \frac{452{,}63}{93{,}6} = 4{,}8 \Rightarrow r = 2{,}2$

b. El perímetro del segundo hexágono.

Se establece la razón de semejanza entre perímetros:

$P' = r \cdot P \Rightarrow P' = 2{,}2 \cdot 36 = 79{,}2 \Rightarrow P' = 79{,}2$ m

27 Halla el perímetro de un rombo semejante al de la figura, cuya área sea nueve veces mayor.



Si la razón entre áreas es 9, entonces r = 3.

El lado del rombo inicial, l, es, aplicando Pitágoras:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 10 = l^2 \Rightarrow l = 3{,}16 \text{ cm}$$

Su perímetro es $P = 3{,}16 \cdot 4 = 12{,}64$ cm, por lo que el perímetro del nuevo rombo es $P' = r \cdot P = 3 \cdot 12{,}64 = 37{,}92$ cm.

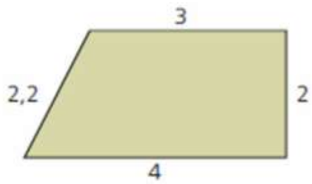
28 El perímetro de un rectángulo mide 36 m, y su área, 72 m^2. Calcula el área de otro rectángulo semejante cuyo perímetro mide 27 m.

Las relaciones entre perímetros y áreas son:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{P'}{P} \\ r^2 &= \frac{A'}{A} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{P'}{P}\right)^2 = \frac{A'}{A} \Rightarrow A' = \left(\frac{P'}{P}\right)^2 \cdot A$$

$$A' = \left(\frac{27}{36}\right)^2 \cdot 72 = 40{,}5 \Rightarrow A' = 40{,}5 \text{ m}^2$$

29 Calcula el área de un trapecio semejante al de la figura, con las dimensiones en metros, cuyo perímetro sea tres veces mayor.



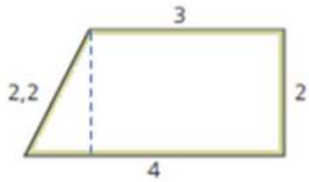
La relación entre perímetros equivale al valor de la razón:

$$\frac{P'}{P} = r \Rightarrow \frac{3 \cdot P}{P} = r \Rightarrow 3 = r$$

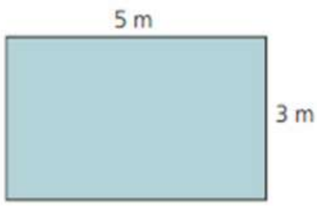
El área del trapecio es:

$$A = A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{triángulo}} \Rightarrow A = 3 \cdot 2 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 7 \Rightarrow A = 7 \text{ m}^2$$

$A' = r^2 \cdot A \Rightarrow A' = 3^2 \cdot 7 = 63 \Rightarrow A' = 63 \text{ m}^2$



30 Fíjate en el rectángulo de la imagen:



Si se considera otro rectángulo semejante reducido cuyas áreas tengan entre sí una razón de, $\frac{1}{4}$ halla:

a. El perímetro del rectángulo semejante.

La razón de semejanza es $r = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

El perímetro del rectángulo es $P = 3 + 5 + 3 + 5 = 16$ m, luego el perímetro del rectángulo reducido es $P' = r \cdot P \Rightarrow P' = 0{,}5 \cdot 16 = 8 \Rightarrow P' = 8$ m

b. El área del nuevo rectángulo.

El área del rectángulo es $A = 3 \cdot 5 = 15 \text{ m}^2$, luego el área del rectángulo reducido es $A' = r^2 \cdot A \Rightarrow A' = 0{,}25 \cdot 15 = 3{,}75 \Rightarrow A' = 3{,}75 \text{ m}^2$.

c. Las dimensiones del rectángulo semejante.

La relación entre lados homólogos es r = 0,5, luego el rectángulo es de 2,5 m × 1,5 m.

31 El diámetro de una circunferencia mide 10 cm. Si se considera una nueva circunferencia cuyo radio es el doble que el de la anterior, calcula:

a. ¿Cuántas veces es mayor la longitud de la segunda circunferencia que la de la primera?

La longitud de la circunferencia es equivale a su perímetro. Si la circunferencia tiene un radio $r = 10$ cm, su perímetro es $P = 2\pi r$. Si el radio de la segunda circunferencia es $r' = 2r$, su perímetro será $P' = 2\pi \cdot (2R) = 4\pi r$, es decir, es mayor dos veces. Si la razón entre perímetros es 2, quiere decir que r = 2.

b. ¿Cuántas veces es mayor el área del círculo?

Como r = 2, el área $A' = r^2 \cdot A \Rightarrow A' = 2^2 \cdot A$, es decir, es mayor cuatro veces.

32 Dados dos cubos cuyas aristas miden 4 cm y 6 cm, respectivamente:

a. Halla la razón de semejanza entre ambos cubos.

La razón es: $r = \frac{6}{4} = 1{,}5$

b. Determina la razón de semejanza entre sus volúmenes.

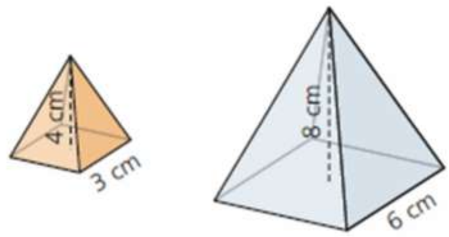
La razón entre sus volúmenes es: $\frac{V'}{V} = \frac{6^3}{4^3} = \frac{216}{64} = 1{,}5^3 = r^3$

c. Analiza cuál es la relación entre estas dos razones.

La razón de los volúmenes de los cubos es igual al cubo de la razón de dichos cuerpos.

SOLUCIONES PÁG. 265

33 Comprueba la relación entre la razón de semejanza de estas pirámides y la de sus volúmenes:



La razón de semejanza entre los lados de las pirámides es: $r = \frac{6}{3} = 2$

Se calcula el volumen de ambas pirámides mediante $V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$, con lo que el volumen de la pirámide pequeña es 12 cm^2 y el de la pirámide grande es 96 cm^2.

La relación entre los volúmenes de las dos pirámides es: $\frac{V'}{V} = \frac{96}{12} = 8$.

Se verifica entonces que la razón de los volúmenes es igual al cubo de la razón de los cuerpos, pues $8 = 2^3$.

APLICACIONES: PLANOS Y MAPAS. ESCALAS

34 El plano de un edificio realizado en una escala 1:150 tiene una planta cuadrada cuya arista mide 20 cm. Halla la superficie de la planta del edificio en la realidad.

$$\frac{1}{150} = \frac{0{,}20}{x} \Rightarrow x = 30 \text{ m}$$

$A = l^2 \Rightarrow A = 30^2 = 900 \Rightarrow A = 900 \text{ m}^2$

35 Se ha realizado la maqueta de una escultura que tiene unas dimensiones de 2 m × 3 m × 3,4 m. Si la escala de la maqueta es de 1:80, calcula las dimensiones de la escultura en la maqueta.

Se establece la relación de semejanza, donde *a* es el largo, *b* el ancho y *c* el fondo.

$$\frac{1}{80}=\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{3,4}$$

$$\frac{1}{80}=\frac{a}{2}\Rightarrow a=0,025 \text{ m}=2,5 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{80}=\frac{b}{3}\Rightarrow b=0,0375 \text{ m}=3,75 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{80}=\frac{c}{3,4}\Rightarrow c=0,0425 \text{ m}=4,25 \text{ cm}$$

Las dimensiones son 2,5 cm × 3,75 cm × 4,25 cm

36 Dos ciudades se encuentran separadas por una distancia de 120 km. Al representarlas en un mapa, la distancia que las separa es de 20 cm.

a. ¿Cuál es la escala del mapa?

$$\frac{1}{x}=\frac{0,20}{120\,000}\Rightarrow x=\ 600\,000 \text{ m}$$

Es decir, 1 cm equivale a 600 000 cm, o 6 km. La escala es 1:600 000

b. ¿Cuál sería la distancia que separa a dos ciudades que en el mapa distan 12 cm una de otra?

$$\frac{1}{600\,000}=\frac{0,12}{d}\Rightarrow d=\ 72\,000 \text{ m}$$

La distancia real es 72 km.

37 En un mapa, dos ciudades se encuentran separadas por una distancia de 12 cm. Si en la realidad están a 84 km de distancia:

a. ¿Cuál será la escala del mapa?

$$\frac{1}{x}=\frac{0,12}{84\,000}\Rightarrow x=\ 700\,000 \text{ m}$$

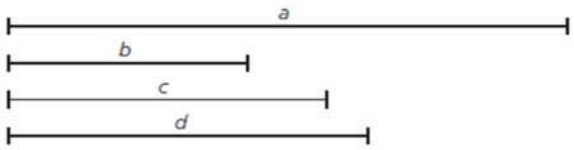
La escala es 1:700 000

b. ¿Cuál sería la distancia que separa en el mapa a dos ciudades que en la realidad distan 120 km?

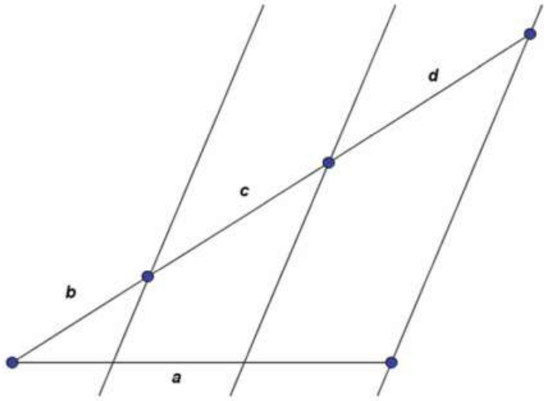
$$\frac{1}{700\,000}=\frac{d}{120\,000}\Rightarrow d=\ 0,171\,4 \text{ m}\ =\ 17,14 \text{ cm}$$

La distancia en el mapa es 17,14 cm.

38 Divide el segmento *a* en partes proporcionales a los segmentos *b*, *c* y *d*, utilizando el teorema de Tales.

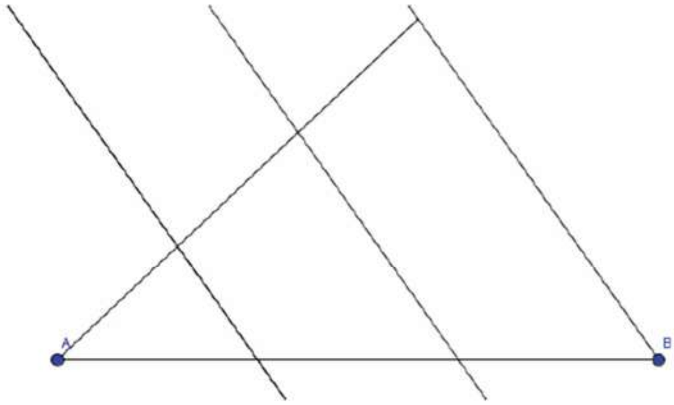


Se trata de disponer el segmento *a* como recta secante a los demás segmentos alineados, de modo que se puedan trazar rectas paralelas con las longitudes de cada segmento *b*, *c*, o *d*, y obtener así los segmentos proporcionales.



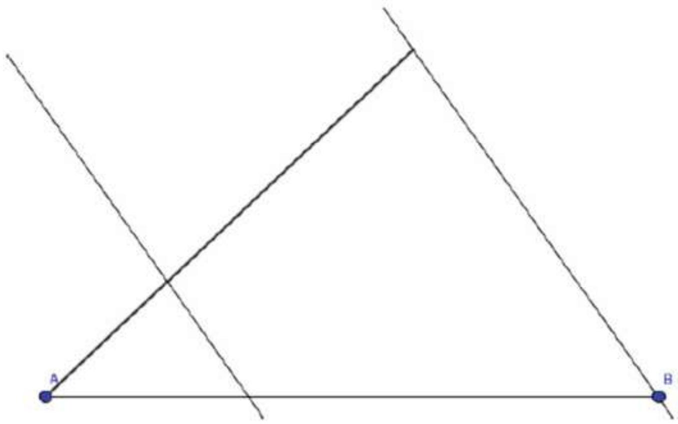
39 Divide en tu cuaderno un segmento de 10 cm en tres partes iguales.

Se trata de disponer el segmento de 10 cm como recta secante a una recta cualquiera de, por ejemplo, 9 cm, por la que trazaremos tres paralelas equidistantes.



40 Dibuja en tu cuaderno un segmento y, aplicando el teorema de Tales, divídelo en dos partes de modo que una de ellas sea el doble que la otra.

Se trata de disponer el segmento dibujado como recta secante a una recta cualquiera, por ejemplo, de 3 cm y trazar dos paralelas separadas entre sí la distancia indicada en el enunciado, es decir, tomar un segmento de 1 cm y otro de 2 cm.



EVALUACIÓN

1 Los lados de dos rectángulos semejantes miden 6 m y 8 m, y 14,4 m y 19,2 m. ¿Cuál es la razón de semejanza?

a. 1,3 b. 2,4 **c. 3,5** **d. 4,6**

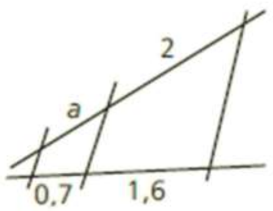
$$r = \frac{14,4}{6} = \frac{19,2}{8} = 2,4$$

2 Los lados de un triángulo miden 14 m, 15 m y 18 m, y los lados de otro semejante a él son *x* m, 9 m y 10,8 m. ¿Cuál es el valor de *x*?

a. 7,3 **b. 7,8** **c. 8** d. 8,4

$$\frac{14}{x} = \frac{15}{9} = \frac{18}{10,8} \Rightarrow x = 8,4 \text{ m}$$

3 El valor del segmento a es:



a. 0,45 b. 0,875 **c. 0,98** **d. 1,11**

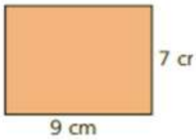
$$\frac{a}{0,7} = \frac{2}{1,6} \Rightarrow a = 0,875$$

4 Se coloca perpendicular al suelo un bastón de 1 m de longitud y proyecta una sombra de 100 cm. Si en ese mismo instante un edificio colindante arroja una sombra de 30 m, ¿cuál es su altura?

a. 30 cm b. 30 m **c. 300 cm** **d. 300 m**

$$\frac{1}{100}=\frac{x}{3000}\Rightarrow x=30\text{ m}$$

5 Considerando un rectángulo como el de la figura, halla los lados de otro rectángulo semejante cuya área sea 252 cm^2:



a. 28 cm y 36 cm c. 14 cm y 18 cm
b. 10 cm y 12 cm **d. 21 cm y 27 cm**

$$r^2=\frac{A'}{A}\Rightarrow r^2=\frac{252}{63}\Rightarrow r=2$$

Los lados del rectángulo semejante son entonces:

$7 \cdot 2 = 14$ cm

$9 \cdot 2 = 18$ cm

6 En el plano de una casa, realizado a escala 1:50, el salón rectangular mide 12 cm × 8 cm. Halla la superficie real del salón.

a. 24 m^2 **b. 9,6 m^2** **c. 96 m^2** **d. 48 m^2**

Se calculan los lados del salón rectangular con ayuda de la escala:

$$\frac{1}{50}=\frac{0{,}12}{a}=\frac{0{,}08}{b}$$
$$\frac{1}{50}=\frac{0{,}12}{a}\Rightarrow a=6\text{ m}$$
$$\frac{1}{50}=\frac{0{,}08}{b}\Rightarrow b=4\text{ m}$$

La superficie del salón es $A = 6 \cdot 4 = 24$ m^2

7 Una fotografía mide 12 cm de largo por 8 cm de alto. Si se amplía a un alto de 12 cm, ¿cuál será el largo?

a. 20 cm **b. 15 cm** **c. 8 cm** d. 18 cm

Se establece la relación de semejanza entre lados homólogos:
$$\frac{12}{x}=\frac{8}{12}\Rightarrow x=18\text{ cm}$$

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

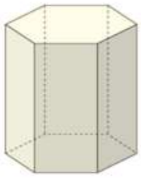
Unidad 14. Geometría del espacio. Poliedros

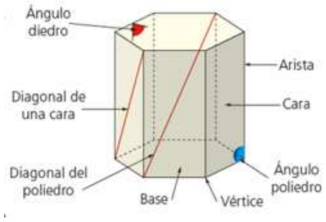
Unidad 14. Geometría del espacio. Poliedros

SOLUCIONES PÁG. 269

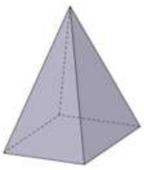
1 Dibuja en tu cuaderno estos poliedros y señala sus elementos:

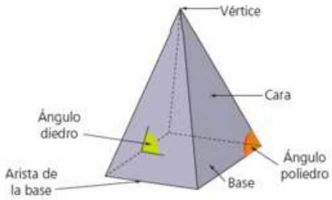
a.





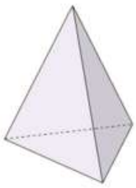
b.





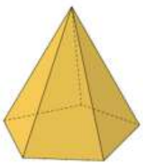
2 Indica cuáles de estos poliedros son convexos y cuáles cóncavos:

a.



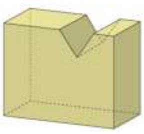
Convexo, porque cualquier segmento que une dos puntos del poliedro queda contenido en él.

b.



Convexo, porque cualquier segmento que une dos puntos del poliedro queda contenido en él.

c.



Cóncavo, porque hay dos puntos del poliedro cuyo segmento que forman no está contenido en él.

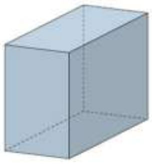
d.

 Convexo, porque al menos hay dos puntos en el poliedro cuyo segmento de unión no está contenido en él.

3 Comprueba si se cumple la fórmula de Euler en cada uno de estos poliedros:

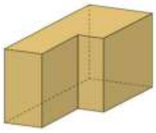
Según la fórmula de Euler, en un poliedro convexo la suma de las caras (C) más los vértices (V) igualan al número de aristas (A) más dos.

a.



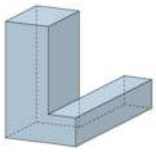
C = 6; V = 8; A = 12 ⇒ 6 + 8 = 12 + 2. La cumple, es convexo.

b.



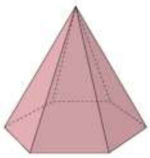
C = 8; V = 12; A = 18 ⇒ 8 + 12 = 18 + 2. La cumple, y es cóncavo.

c.



C = 10; V = 15; A = 21 ⇒ 10 + 15 ≠ 21 + 2. No la cumple, es cóncavo.

d.



C = 7; V = 7; A = 12 ⇒7 + 7 = 12 + 2. La cumple, es convexo.

4 Mira a tu alrededor e indica tres objetos que sean poliedros convexos y otros tres que sean cóncavos.

Respuesta abierta.

5 Indica, razonando tu respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

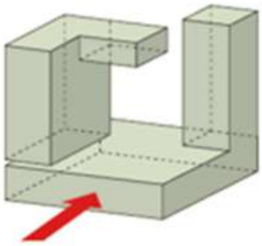
a. La fórmula de Euler es válida para todos los poliedros.
Falsa, algunos poliedros cóncavos no la cumplen.

b. Una diagonal de un poliedro une dos de sus vértices.
Falsa, una diagonal une dos vértices de caras distintas.

c. Un poliedro convexo de 12 caras y 20 vértices tiene 30 aristas.
Verdadera. Si es convexo cumple la fórmula de Euler, luego C + V = A + 2 ⇒ 12 + 20 = 30 + 2

d. Las caras de un poliedro son iguales.
Falsa, solo si es regular.

6 Si observamos la figura desde el sentido indicado por la flecha, ¿cuál de las figuras se verá?



a.

b.

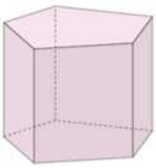
c.

La figura c.

7 Comprueba si se verifica la fórmula de Euler en los siguientes poliedros y clasifícalos en cóncavos o convexos:

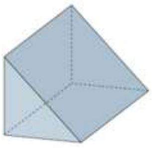
Según la fórmula de Euler, en un poliedro convexo C + V = A + 2.

a.



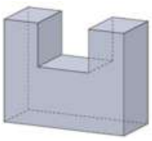
7 + 10 = 15 + 2. Poliedro convexo.

b.



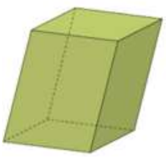
5 + 6 = 9 + 2. Poliedro convexo.

c.



10 + 16 = 24 + 2. Poliedro cóncavo, pero cumple la fórmula de Euler.

d.



6 + 8 = 12 + 2. Poliedro convexo.

8 Un poliedro convexo tiene 8 caras y 6 vértices; ¿cuántas aristas tiene?
Según la fórmula de Euler, $C + V = A + 2 \Rightarrow 8 + 6 = A + 2 \Rightarrow A = 12$
Tiene 12 aristas.

9 Visita esta página de Internet para repasar la clasificación de los poliedros y sus elementos más importantes:

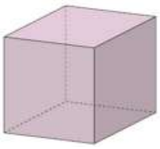
http://conteni2.educarex.es/más/11999/contenido/

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 271

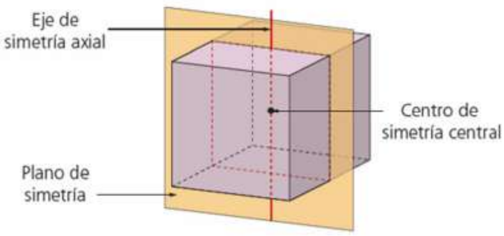
10 Mira a tu alrededor e indica tres objetos que sean poliedros regulares.
Respuesta abierta.

11 Dibuja en tu cuaderno estos poliedros y señala en cada uno el centro de la simetría central, un eje de simetría axial y un plano de simetría:
a.

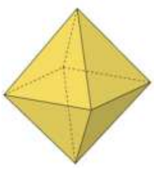


Para señalar los elementos se debe tener en cuenta que:

- El centro de simetría, O, equidista de los vértices del poliedro.
- Cada uno de los puntos del poliedro tiene asociado otro punto que equidista del eje de simetría axial.
- Un plano de simetría pasa por el centro de simetría y divide el poliedro en dos partes iguales.



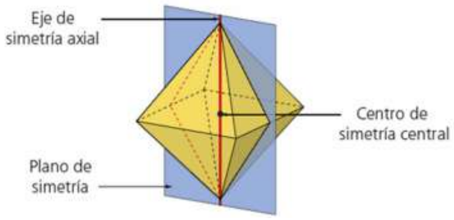
b.



Para señalar los elementos se debe tener en cuenta que:

- El centro de simetría, O, equidista de los vértices del poliedro.
- Cada uno de los puntos del poliedro tiene asociado otro punto que equidista del eje de simetría axial.

- Un plano de simetría pasa por el centro de simetría y divide el poliedro en dos partes iguales.



12 Rellena en tu cuaderno la siguiente tabla y comprueba que se cumple la fórmula de Euler en los sólidos platónicos:

	Forma de las caras	N.º de caras	N.º de arista	N.º de vértices
Tetraedro	Triángulos	4	6	4
Octaedro	Triángulos	8	12	6
Icosaedro	Triángulos	20	30	12
Cubo	Cuadrados	6	12	8
Dodecaedro	Pentágonos	12	30	20

Para comprobar la fórmula de Euler se debe aplicar en cada caso C + V = A + 2. En todos los casos se cumple.

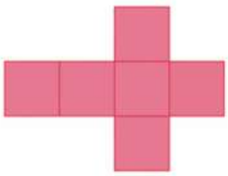
13 Indica cuántas caras concurren en los vértices de cada uno de los sólidos platónicos.

- En el tetraedro, en el cubo y en el dodecaedro concurren tres caras en cada vértice.
- En el octaedro concurren cuatro caras en cada vértice.
- En el icosaedro concurren cinco caras en cada vértice.

14 Analiza cuál es el poliedro de menor número de caras y explica por qué no puede haber otro con menos caras.
El menor número de caras que concurren en un vértice es tres, pero se necesita al menos una cara más para cerrar el poliedro. Por tanto, al menos el poliedro debe tener cuatro caras.

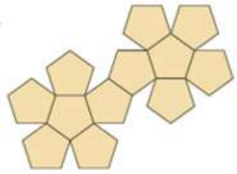
15 Busca información acerca de la presencia de los poliedros regulares en la historia y de los diferentes matemáticos que los han estudiado.
Respuesta abierta.

16 Dibuja el desarrollo plano de un cubo y de un octaedro.



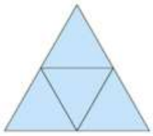
17 Indica el nombre de los sólidos platónicos a los que corresponden estos desarrollos planos:

a.



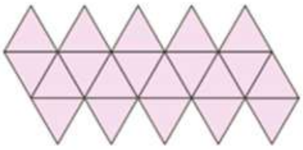
Dodecaedro (tiene 12 caras).

b.



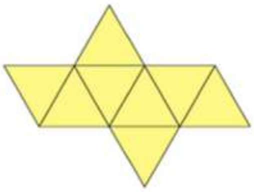
Tetraedro (tiene 4 caras)

c.



Icosaedro (tiene 20 caras)

d.



Octaedro (tiene 8 caras)

18 Considerando los puntos medios de las caras de los sólidos platónicos como los vértices de un nuevo poliedro, se obtiene su poliedro dual, que está inscrito en él. Investiga más a fondo sobre este concepto y busca qué sólidos platónicos son duales entre sí.

Respuesta abierta. Se puede poner como ejemplo el octaedro y el cubo. El octaedro se puede inscribir en un cubo, disponiendo los 6 vértices del octaedro en el centro de las 6 caras del cubo.

19 ¿Cuál es el número mínimo de caras que concurren en el vértice de un poliedro?

El número mínimo de caras que concurren en el vértice de un poliedro es tres.

20 ¿Cuál es el máximo que pueden sumar los ángulos interiores de las caras que concurren en el vértice de un poliedro regular?

Una de las condiciones para que un poliedro sea regular es que la suma de los ángulos interiores que convergen en cada vértice sea menor de 360º, es decir, los ángulos suman menos de 360º.

21 Las caras de los sólidos platónicos son triángulos, cuadrados o pentágonos. ¿Por qué no pueden existir poliedros regulares con caras hexagonales?
Porque en cada vértice concurren como mínimo tres caras y como el ángulo interior de un hexágono es de 120º, los ángulos que concurren en un vértice de ese poliedro suman 3 · 120 º = 360º, con lo que se incumple una de las condiciones de los poliedros regulares.

22 Entre tu compañero y tú utilizad materiales como el poliedro para construir los sólidos platónicos y otros poliedros.
Respuesta abierta.

23 Indica cuánto suman los ángulos de las caras que concurren en cada vértice de:

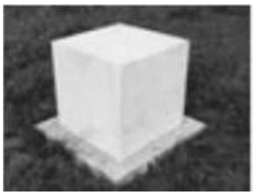
a. Un cubo.
En el vértice de un cubo concurren 3 caras, cada una de ellas con un ángulo de 90º, luego 3 · 90º = 270°

b. Un tetraedro.
En el vértice de un tetraedro concurren 3 caras, cada una de ellas con un ángulo de 60º, luego 3 · 60º = 180°

c. Un octaedro.
En el vértice de un octaedro concurren 4 caras, cada una de ellas con un ángulo de 60º, luego 4 · 60º = 240°

24 Indica cuáles de estas imágenes se corresponden con poliedros regulares y de qué tipo son:

a.



Sí, es un cubo.

b.

Sí, es un dodecaedro.

c.

No es un poliedro regular.

d.

No es un poliedro regular porque no tiene iguales todas las caras.

e.

No es un poliedro regular porque la base es un cuadrado y las caras laterales son triángulos.

f.

No es un poliedro regular porque sus caras no son polígonos regulares iguales entre sí.

SOLUCIONES PÁG. 273

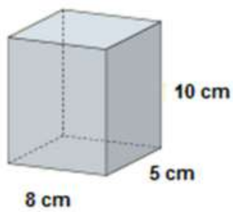
25 Dibuja en tu cuaderno tres objetos con forma de prisma que veas a tu alrededor. Señala sus elementos y comprueba que se cumple la fórmula de Euler.

Respuesta abierta.

26 Actividad resuelta.

27 Determina el área y el volumen de un prisma rectangular cuyas aristas básicas miden 8 cm y 5 cm, respectivamente, y que tiene una altura de 10 cm.

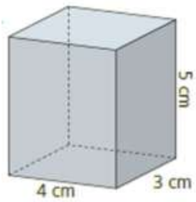
$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 5 \cdot 8 + (2 \cdot 8 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \cdot 10) = 340$
$A_{total} = 340 \text{ cm}^2$



El volumen, por su parte, será:
$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 5 \cdot 8 \cdot 10 = 400$
$V = 400 \text{ cm}^3$

28 Halla el área de los siguientes prismas:

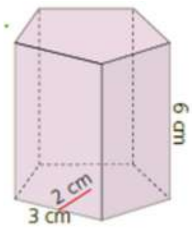
a.



$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot 4 \cdot 3 + (2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 5) = 94 \Rightarrow A_{total} = 94$ cm^2

b.



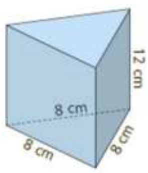
$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

La apotema del pentágono es 2 cm, y el perímetro es $P = 3 \cdot 5 = 15$ cm:

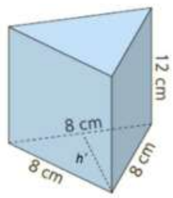
$$A_{total} = 2 \cdot \frac{15 \cdot 2}{2} + 15 \cdot 6 = 120 \Rightarrow A_{total} = 120 \text{ cm}^2$$

29 Calcula el volumen de los siguientes prismas:

a.



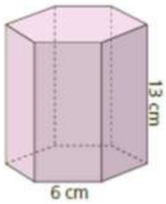
Para calcular el área de la base se calcula en primer lugar la altura del triángulo de la base, según el teorema de Pitágoras, $4^2 + h^2 = 8^2 \Rightarrow h' = 6{,}93$ cm



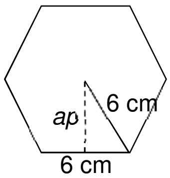
$$A_{base} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{base} = \frac{8 \cdot 6{,}93}{2} = 27{,}72 \Rightarrow A_{base} = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 27{,}72 \cdot 12 = 332{,}64 \Rightarrow V = 332{,}64$ cm^3

b.



Para calcular el área de la base se calcula en primer lugar la apotema del hexágono que forma la base, aplicando el teorema de Pitágoras, y teniendo en cuenta que en el hexágono el lado coincide con el radio de la circunferencia en que se inscribe ese hexágono, así que $3^2 + ap^2 = 6^2 \Rightarrow ap = 5{,}2$ cm.



$$A_{base} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A_{base} = \frac{36 \cdot 5{,}2}{2} = 93{,}6 \Rightarrow A_{base} = 93{,}6 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 93{,}6 \cdot 13 = 1\,216{,}8 \text{ cm}^3$$

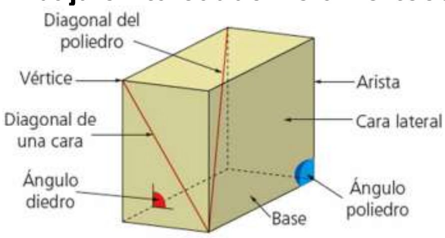
30 ¿Qué capacidad tiene una piscina con forma de prisma rectangular cuyas dimensiones son 8 m × 4 m × 2 m? ¿Cuántos litros de agua puede contener?

Tiene una capacidad de $8 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ m^3.

1 m^3 = 1 000 L, así que puede contener 64 000 L de agua.

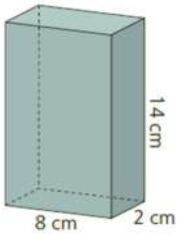
SOLUCIONES PÁG 275

31 Dibuja en tu cuaderno un ortoedro y señala sus elementos.



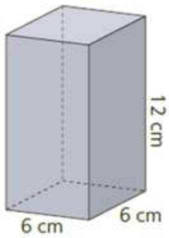
32 Mira a tu alrededor y busca tres objetos con forma de paralelepípedo.
Respuesta abierta.

33 Determina el área y el volumen de los paralelepípedos.
a.



$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 8 \cdot 2 + (2 \cdot 2 \cdot 14 + 2 \cdot 8 \cdot 14) = 312 \Rightarrow A = 312\ cm^2$
$V = A_{base} \cdot h$
$V = 8 \cdot 2 \cdot 14 = 224 \Rightarrow V = 224\ cm^3$

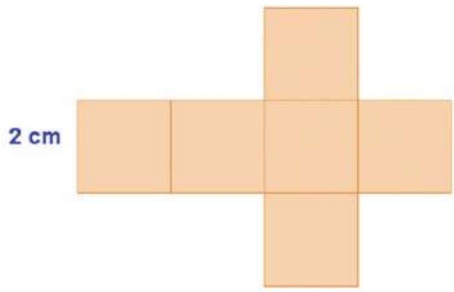
b.



$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$
$A_{total} = 2 \cdot 6 \cdot 6 + (2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 12) = 360 \Rightarrow A_{total} = 360\ cm^2$
$V = A_{base} \cdot h$

$V = 6 \cdot 6 \cdot 12 = 432 \Rightarrow V = 432\ cm^3$

34 Dibuja el desarrollo plano de un cubo de 2 cm de arista y halla su área y su volumen.

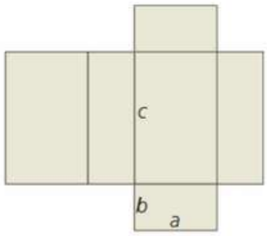


Se calcula el área total como la suma del área de 6 caras de 2 cm de lado:
$A_{total} = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24 \Rightarrow A_{total} = 24\ cm^2$
Se calcula el volumen según la expresión:
$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 4 \cdot 2 = 8 \Rightarrow V = 8\ cm^3$

35 Las dimensiones de un armario de madera son 1 m de ancho, 60 cm de fondo y 2 m de alto.

a. ¿Qué cantidad de corcho se necesita para forrarlo interiormente?

Se construye el desarrollo plano del paralelepípedo, con los valores a = 1 m, b = 0,6 m y c = 2 m.



El área del armario es la suma del área de las bases más el área lateral:

$A_{total} = A_{bases} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c = 2 \cdot (1 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 2 + 1 \cdot 2) = 7{,}60$

Se necesita 7,60 m^2 de corcho.

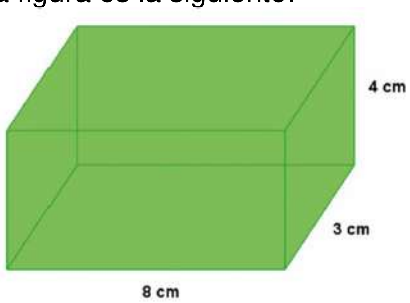
b. ¿Qué capacidad tiene?

Se calcula el volumen como:

$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = a \cdot b \cdot c = 1{,}2 \Rightarrow V = 1{,}2\ m^3$

36 Dibuja un ortoedro que tenga unas dimensiones de 8 cm por 3 cm de base y 4 cm de altura. Calcula su área total y su volumen.

La figura es la siguiente:



Se calcula el área como la suma del área de las bases más el área lateral:

$A_{total} = A_{bases} + A_{lateral}$

$A_{total} = 2 \cdot 8 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \cdot 4 = 136 \Rightarrow A_{total} = 136\ cm^2$

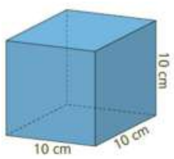
Se calcula el volumen como:

$V = A_{base} \cdot h$

$V = 8 \cdot 3 \cdot 4 = 96 \Rightarrow V = 96\ cm^3$

37 Halla el área total y el volumen de los siguientes paralelepípedos:

a.



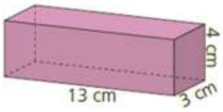
Se calcula el área total como la suma del área de 6 caras de 10 cm de lado:

$A_{total} = 10 \cdot 10 \cdot 6 = 600 \Rightarrow A_{total} = 600\ cm^2$

$V = A_{base} \cdot h$

$V = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000 \Rightarrow V = 1\,000\ cm^3$

b.



Se calcula el área como la suma del área de las bases más el área lateral:

$A_{total} = A_{bases} + A_{lateral}$

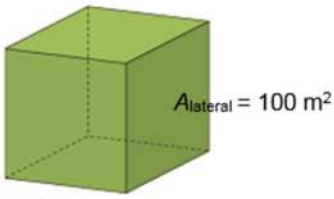
$A_{total} = 2 \cdot 13 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 13 \cdot 4 = 206 \Rightarrow A_{total} = 206\ \text{cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h$

$V = 13 \cdot 3 \cdot 4 = 156 \Rightarrow V = 156\ \text{cm}^3$

38 Halla el área total y el volumen de un cubo que tiene un área lateral de 100 m².

Se plantea la figura según los datos del enunciado. Al tratarse de un cubo el área lateral es cuatro veces el área de una de las caras, entonces el área de cada cara es:



$A_{cara} = \dfrac{100}{4} = 25 \Rightarrow A_{cara} = 25\ \text{m}^2$

Luego la arista del cubo mide 5 m.

Se calcula el área total: $A_{total} = 6 \cdot A_{cara} \Rightarrow A_{total} = 6 \cdot 25 = 150 \Rightarrow A_{total} = 150\ \text{m}^2$

Se calcula el volumen: $V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 25 \cdot 5 = 125 \Rightarrow V = 125\ \text{m}^3$

39 El área lateral de un ortoedro es de 72 m². Si las dimensiones de su base son 4 m × 5 m, ¿cuánto miden su área total y su volumen?

$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral}$

$A_{base} = 4 \cdot 5 = 20\ \text{m}^2$; $A_{lateral} = 72\ \text{m}^2 \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot 20 + 72 = 112\ \text{m}^2$

Si llamamos x a la altura del ortoedro, se calcula dicha altura a partir del área lateral:

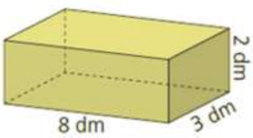
$A_{lateral} = 2 \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot 4 \cdot x \Rightarrow 72 = 10x + 8x \Rightarrow x = 4\ \text{m}$

La altura del ortoedro mide 4 m, luego:

$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = 20 \cdot 4 = 80 \Rightarrow V = 80\ \text{m}^3$

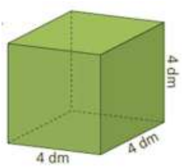
40 Calcula mentalmente el volumen de los siguientes paralelepípedos:

a.



$V = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48\ \text{dm}^3$

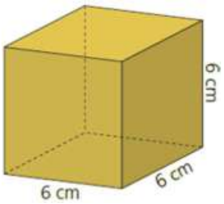
b.



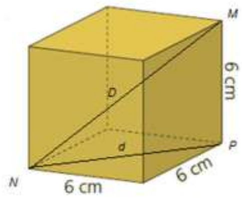
$V = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64\ \text{dm}^3$

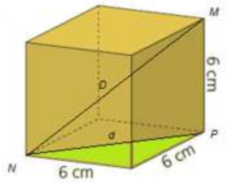
41 Halla la longitud de la diagonal de estos paralelepípedos:

a.



Se observa el triángulo *MNP* y según el teorema de Pitágoras:





$D^2 = d^2 + 6^2$

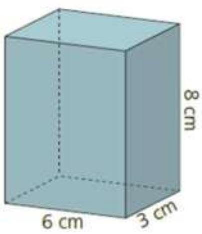
Como no se conoce la diagonal *d*, se debe aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo verde de la base:

$d^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow d^2 = 72 \Rightarrow d = 8{,}49$ cm

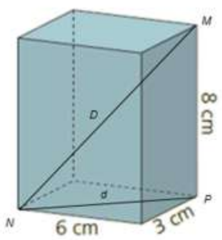
Se sustituye la distancia *d* para calcular *D:*

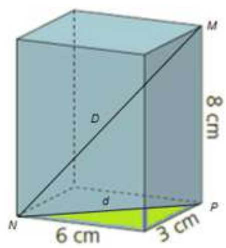
$D^2 = 8{,}49^2 + 6^2 \Rightarrow D^2 = 108{,}08 \Rightarrow D = 10{,}4$ cm

b.



Se observa el triángulo *MNP* y según el teorema de Pitágoras:





$D^2 = d^2 + 8^2$

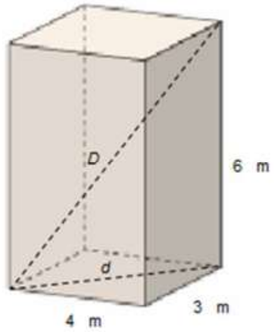
Como no se conoce la diagonal *d*, se debe aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo verde de la base:

$d^2 = 6^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 45 \Rightarrow d = 6{,}71$ cm

Se sustituye la distancia *d* para calcular *D:*

$D^2 = 6{,}71^2 + 8^2 \Rightarrow D^2 = 109{,}02 \Rightarrow D = 10{,}44$ cm

42 Determina la longitud de la cuerda más larga que une dos vértices en una habitación ortoédrica que tiene unas dimensiones, en metros, de 4 × 6 × 3.



Según el teorema de Pitágoras:

$D^2 = d^2 + 6^2$

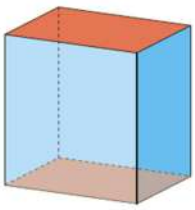
Como no se conoce la diagonal *d*, se debe aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo de la base:

$d^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 25 \Rightarrow d = 5$ m

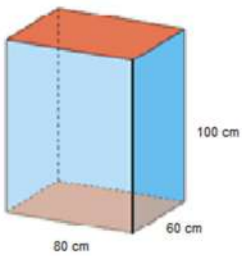
Se sustituye la distancia *d* para calcular *D*:

$D^2 = 5^2 + 6^2 \Rightarrow D^2 = 61 \Rightarrow D = 7{,}81$ m es la longitud de la cuerda.

43 Sergio ha construido un ortoedro de cartón que tiene unas dimensiones, en centímetros, de 80 × 60 × 100.



Si quiere pintar las bases de rojo y las caras laterales de azul, ¿qué superficie pintará de cada color?



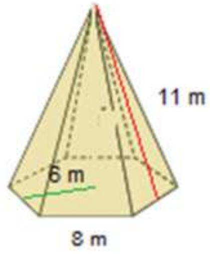
Se calcula el área de cada cara que interesa pintar:

$A_{rojo} = 2 \cdot 80 \cdot 60 = 9\,600 \Rightarrow A_{rojo} = 9\,600$ cm²

$A_{azul} = 2 \cdot 60 \cdot 100 + 2 \cdot 80 \cdot 100 = 28\,000 \Rightarrow A_{azul} = 28\,000$ cm²

SOLUCIONES PÁG. 277

44 Halla el área de una pirámide hexagonal de 11 m de apotema, 8 m de arista básica y 6 m de apotema básica.



Se calcula el área de la base según la expresión:

$A_{\text{pirámide}} = P \cdot \dfrac{ap + ap'}{2}$, donde *P* es el perímetro de la base, *ap* la apotema de la pirámide y *ap'* la apotema básica.

En este caso $P = 8 \cdot 6 = 48$ m; $ap = 11$ m y $ap' = 6$ m

$$A_{\text{pirámide}} = 48 \cdot \frac{11+6}{2} = 408 \Rightarrow A_{\text{pirámide}} = 408 \text{ m}^2$$

45 Actividad resuelta.

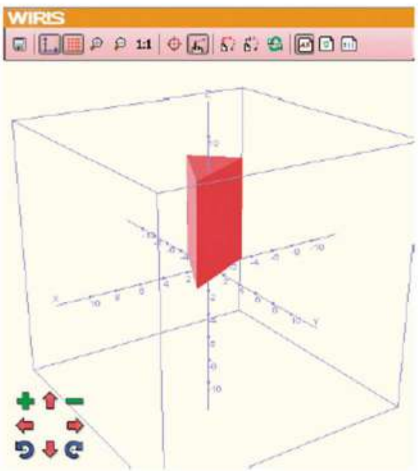
46 Actividad resuelta.

SOLUCIONES PÁG. 278

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

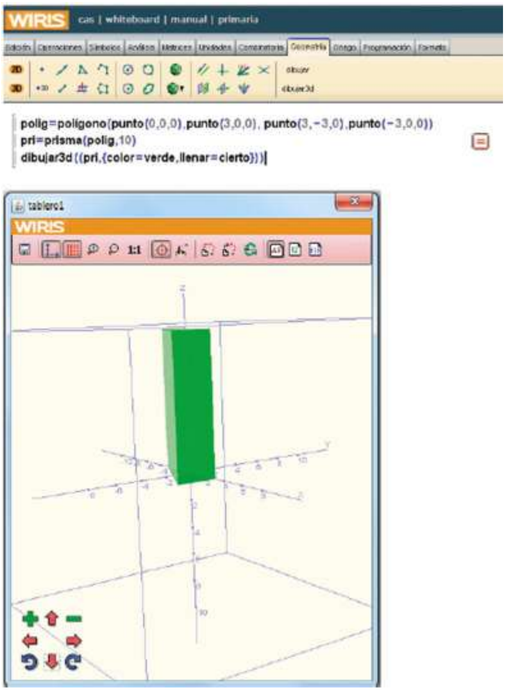
1 Dibuja un prisma triangular que tenga 8 unidades de altura y color rojo.

Mediante la herramienta WIRIS se obtiene:



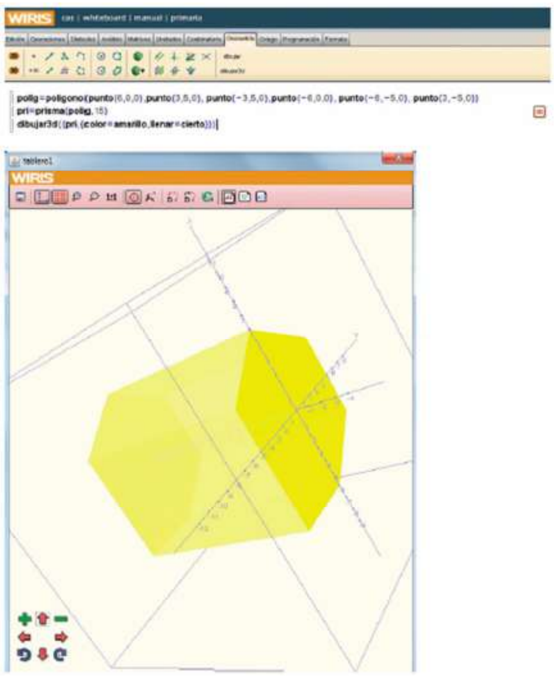
2 Dibuja un prisma cuadrangular cuya altura valga 10 y que sea de color verde.

Mediante la herramienta WIRIS se obtiene:

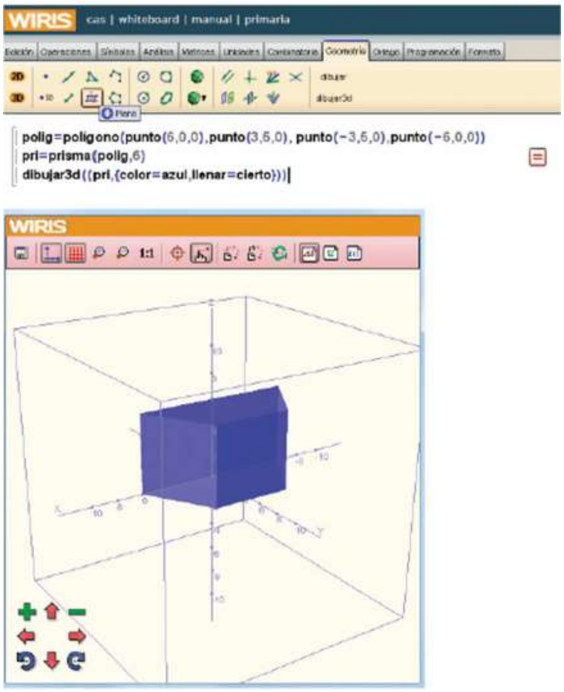


3 Dibuja un prisma hexagonal de 15 unidades de altura y color amarillo.

Mediante la herramienta WIRIS se obtiene:



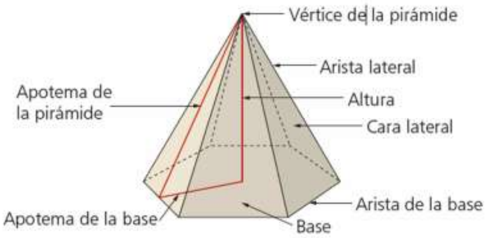
4 **Dibuja un prisma cuadrangular con una base que no esté centrada en el origen de coordenadas.**
Mediante la herramienta WIRIS se obtiene:



SOLUCIONES PÁG. 279 - APRENDO A APRENDER

1 **¿Con qué otro nombre se conoce a los poliedros regulares?**
Con el nombre de sólidos platónicos.

2 **Dibuja una pirámide en tu cuaderno y señala sus elementos.**



3 **¿Cuál es la diferencia entre la diagonal de un poliedro y la diagonal de una de sus caras?**
La diagonal del poliedro une vértices de caras distintas y la de un polígono une vértices de una cara que no sean contiguos.

4 **Explica la diferencia entre un poliedro cóncavo y uno convexo.**
En un poliedro convexo el segmento que une dos puntos cualesquiera está contenido en el poliedro, mientras que en un poliedro cóncavo hay al menos dos puntos del poliedro cuyo segmento que forman no está contenido en él.

5 **Además de que sus caras sean polígonos regulares e iguales entre sí, ¿qué otras dos condiciones cumplen los poliedros regulares?**
En cada vértice deben concurrir el mismo número de caras, que deben ser al menos tres, y la suma de los ángulos que convergen en cada vértice debe ser menor de 360º.

6 Escribe alguno de los elementos de un prisma.
Los elementos son: altura, bases, arista de la base, apotema de la base, cara lateral, arista lateral.

7 Explica qué es el desarrollo plano de un poliedro.
Es el poliedro extendido en un plano.

8 ¿En qué se diferencia un paralelepípedo de un prisma?
Un paralelepípedo es un prisma de 6 caras con forma de paralelogramo, en el que cada par de caras opuestas son paralelas e iguales entre sí.
Un prisma puede tener más o menos caras y puede que las caras laterales no sean iguales.

9 Escribe alguno de los elementos de una pirámide.
Los elementos son: altura, vértice de la pirámide, apotema de la pirámide, arista lateral, cara lateral, base, arista de la base, apotema de la base.

10 El volumen de una pirámide es inferior al de un prisma que tenga la misma base y la misma altura; ¿cuánto menor es?
El volumen de una pirámide es $\frac{1}{3}$ inferior al volumen de un prisma que tenga la misma base y la misma altura.

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$$

11 ¿Cuál es el enunciado de la fórmula de Euler para poliedros convexos?
Caras + Vértices = Aristas + 2

12 ¿Qué elementos determinan las simetrías en los poliedros regulares?
El centro de simetría, los ejes de simetría y planos de simetría.

13 Explica la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo.
En un prisma recto la altura es perpendicular a sus bases y en un prisma oblicuo no.

14 Un paralelepípedo es un prisma especial; ¿qué le diferencia del resto de prismas?
Se diferencia en que todas sus caras son paralelogramos.

15 ¿Qué elementos de un paralelepípedo forman un triángulo rectángulo en el que se puede aplicar el teorema de Pitágoras en el espacio?
La arista lateral, la diagonal de una base y la diagonal del prisma.

16 Describe qué es la apotema de una pirámide e indica las diferencias que tiene con respecto a la apotema de la base.
La apotema de la pirámide es la altura de sus caras laterales.

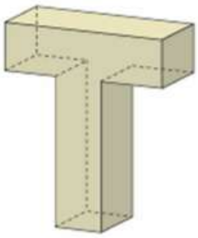
17 Realiza una presentación digital a tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…
Respuesta abierta.

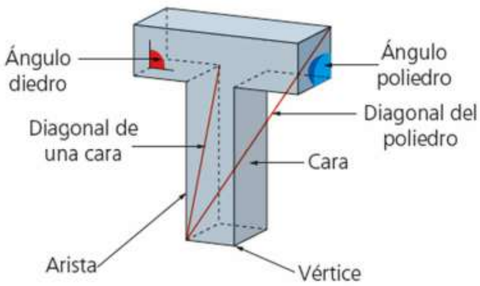
SOLUCIONES PÁG. 280 - REPASO FINAL

POLIEDROS

1 **Dibuja los siguientes poliedros en tu cuaderno y señala sus elementos, indicando si son cóncavos o convexos, y comprueba si se cumple la fórmula de Euler:**

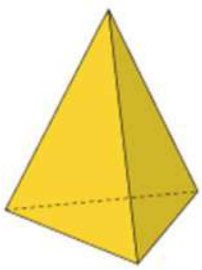
a.

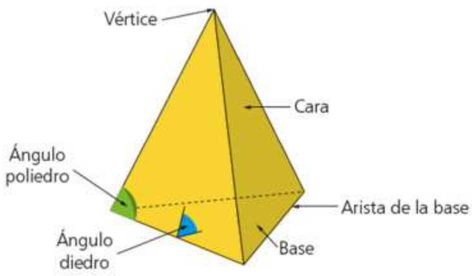




Cóncavo, aunque se cumple la ecuación de Euler:
C + V = A + 2 = 10 + 16 = 24 + 2

b.

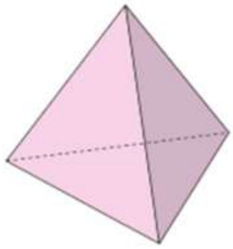




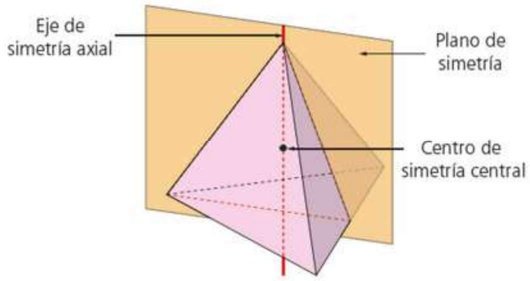
Convexo. Se cumple la ecuación de Euler:
C + V = A + 2 = 4 + 4 = 6 + 2

POLIEDROS REGULARES

2 Indica y dibuja en tu cuaderno alguno de los ejes y planos de simetría de un tetraedro regular.



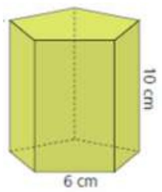
Se debe tener en cuenta que un plano de simetría pasa por el centro de simetría, del que equidistan los vértices del poliedro, y que divide el poliedro en dos partes iguales.



PRISMAS

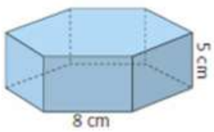
3 Calcula mentalmente el área lateral de los siguientes prismas:

a.



$A_{lateral} = 5 \cdot 6 \cdot 10 = 300 \Rightarrow A_{lateral} = 300 \text{ cm}^2$

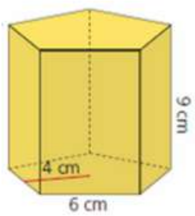
b.



$A_{lateral} = 6 \cdot 8 \cdot 5 = 240 \Rightarrow A_{lateral} = 240 \text{ cm}^2$

4 Halla el área total y el volumen de estos prismas:

a.

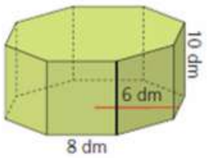


$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{2} + 5 \cdot 6 \cdot 9 = 390 \Rightarrow A_{total} = 390 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{2} \cdot 9 = 540 \Rightarrow V = 540 \text{ cm}^3$$

b.



$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

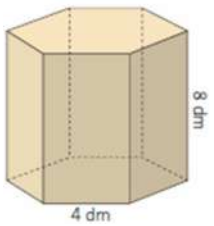
$$A_{total} = 2 \cdot \frac{8 \cdot 8 \cdot 6}{2} + 8 \cdot 8 \cdot 10 = 1\,024 \Rightarrow A_{total} = 1024 \text{ dm}^2$$

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{8 \cdot 8 \cdot 6}{2} \cdot 10 = 1\,920 \Rightarrow V = 1\,920 \text{ dm}^3$$

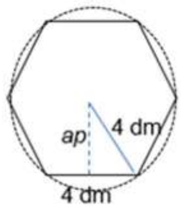
5 Actividad resuelta.

6 Determina el área y el volumen de estas figuras:

a.



Al tratarse la base de un hexágono regular, el lado del polígono mide lo mismo que el radio de la circunferencia en que se inscribe, con lo cual la apotema se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:



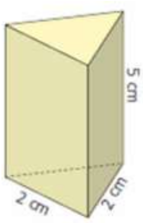
$2^2 + ap^2 = 4^2 \Rightarrow ap = 3{,}46$ dm mide la apotema de la base.

$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot \frac{P \cdot ap}{2} + P \cdot h$$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 3{,}46}{2} + 6 \cdot 4 \cdot 8 = 275{,}04 \Rightarrow A_{total} = 275{,}04 \text{ dm}^2$$

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3{,}46}{2} \cdot 8 = 332{,}16 \Rightarrow V = 332{,}16 \text{ dm}^3$$

b.



Se debe calcular la altura de la base, h', aplicando el teorema de Pitágoras a dicha base:

$1^2 + h'^2 = 2^2 \Rightarrow h' = 1{,}73$ cm

Con lo cual, el área total es:

$$A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} \Rightarrow A_{total} = 2 \cdot \frac{b \cdot h'}{2} + P \cdot h$$

$$A_{total} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} + 3 \cdot 2 \cdot 5 = 33{,}46 \Rightarrow A_{total} = 33{,}46 \text{ cm}^2$$

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{b \cdot h'}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{2 \cdot 1{,}73}{2} \cdot 5 = 8{,}65 \Rightarrow V = 8{,}65 \text{ cm}^3$$

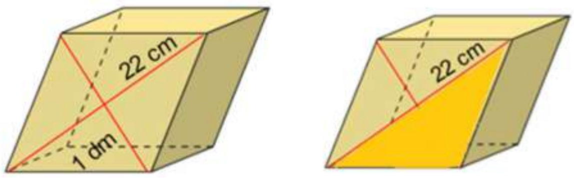
7 ¿Cuántos litros caben en un depósito en forma de prisma rectangular cuyas dimensiones, en metros, son 2 × 1 × 2?
El volumen es: $V = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4 \text{ m}^3 = 4\,000$ L.

8 Calcula el volumen de un prisma heptagonal, sabiendo que su área lateral mide 462 cm²; su arista básica, 6 cm, y su apotema, 3 cm.
Como se trata de un prisma regular el área de todas las caras laterales es igual, y como son 7 caras, a cada una le corresponden: $\frac{462}{7} =$ 66 cm², es decir, 6 cm de lado por 11 cm de alto. La altura del prisma es, por tanto, 11 cm.

$$V = A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{7 \cdot 6 \cdot 3}{2} \cdot 11 = 693 \Rightarrow V = 693 \text{ cm}^3$$

9 Halla el área total de un romboedro cuyas caras tienen unas diagonales que miden 1 dm y 22 cm, respectivamente.

Las diagonales del romboedro son estas:

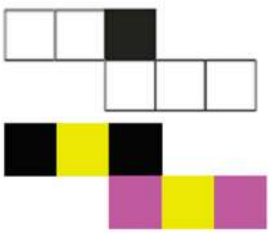


Se calcula el área del triángulo coloreado:

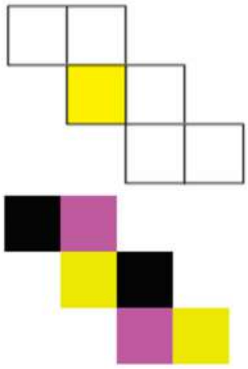
$$A_{triángulo} = \frac{D \cdot \frac{d}{2}}{2} \Rightarrow A_{triángulo} = \frac{22 \cdot 5}{2} = 55 \Rightarrow A_{triángulo} = 55 \text{ cm}^2$$

Es decir, el área de cada cara del romboedro es $A_{cara} = A_{triángulo} \cdot 2 = 110 \text{ cm}^2$
Y el área total del romboedro es: $A_{romboedro} = A_{cara} \cdot 6 = 110 \cdot 6 = 660 \text{ cm}^2$.

10 Las caras opuestas de un cubo se pintan del mismo color. Se emplean tres colores: amarillo, rosa y negro. Indica dónde debe ir cada color.
a.



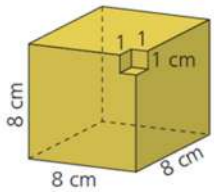
b.

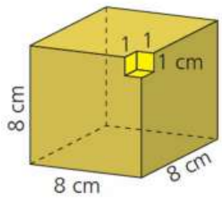


SOLUCIONES PÁG 281

11 Halla el área total y el volumen de las siguientes figuras:

a.





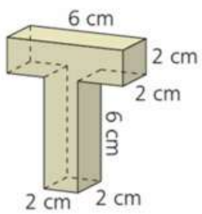
El área del cubo completo, de 8 cm de lado, sería

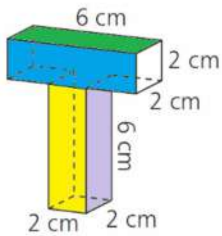
$A_{cubo} = 8 \cdot 8 \cdot 6 = 384$ cm^2.

Si se observa, el área que falta en el cubo incompleto es la misma que se añade con las nuevas caras coloreadas de amarillo. Por tanto, el área del cubo incompleto es también 384 cm^2.

El volumen sí cambia: el del cubo completo sería $V = 8^3 = 512$ cm^3, pero el del cubo incompleto es 1 cm^3 menor, es decir, 511 cm^3.

b.





Se puede calcular el área sumando el área de cada una de las caras:

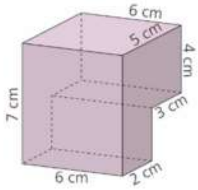
$A_{total} = 7 \text{ caras} \cdot 2 \cdot 6 + 5 \text{ caras} \cdot 2 \cdot 2 = 104$ cm^2

El volumen se calcula sumando los volúmenes de los dos paralelepípedos de dimensiones $2 \times 2 \times 6$, es decir

$V = 24 + 24 = 48$ cm^3

12 Calcula el área total y el volumen de estos cuerpos geométricos:

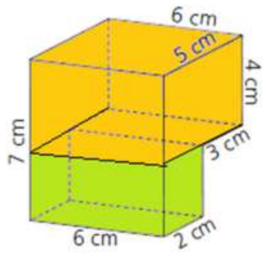
a.



Se calcula el área sumando el de todas las caras como si estuvieran completas y restando los dos trozos laterales de 3 × 3:

$A = 2 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \cdot 2 + 2 \cdot 7 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 60 + 84 + 70 - 18 = 196\ \text{cm}^2$

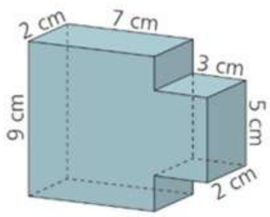
Se calcula el volumen sumando el de los dos cuerpos señalados en la figura (o restando la porción que falta al volumen total):



$V = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \cdot 6 = 156\ \text{cm}^3$

$V = 5 \cdot 6 \cdot 7 - 3 \cdot 3 \cdot 6 = 156\ \text{cm}^3$

b.

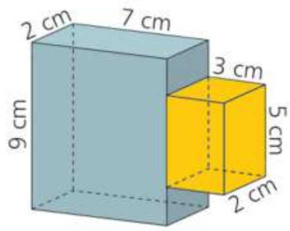


Se calcula el área sumando el de todas las caras:

$A_{total} = 2 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 232\ \text{cm}^2$

Se calcula el volumen sumando el de los dos cuerpos señalados en la figura:

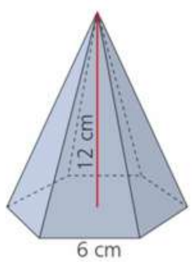
$V = 7 \cdot 2 \cdot 9 + 3 \cdot 2 \cdot 5 = 156\ \text{cm}^3$



PIRÁMIDES Y TRONCOS DE PIRÁMIDES

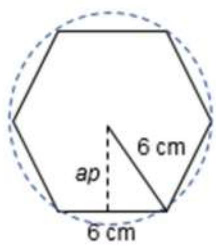
13 Halla el área lateral de las siguientes figuras:

a.



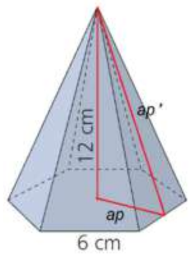
- Se calcula la apotema de la base, aplicando el teorema de Pitágoras y sabiendo que en el hexágono regular el lado coincide con el radio:

  $3^2 + ap^2 = 6^2 \Rightarrow ap = 5{,}2\ \text{cm}$



- Se calcula la apotema de la pirámide, aplicando el teorema de Pitágoras:

  $ap^2 + 12^2 = ap'^2 \Rightarrow 5{,}2^2 + 144 = ap'^2 \Rightarrow ap' = 13{,}08$ cm

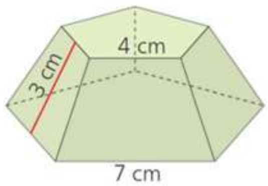


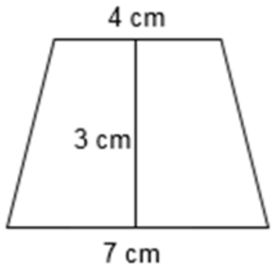
- Se calcula el área lateral con la expresión:

  $$A_{lateral} = n \cdot \frac{l \cdot ap'}{2} \Rightarrow A_{lateral} = 6 \cdot \frac{6 \cdot 13{,}08}{2} = 235{,}44 \text{ cm}^2,$$

  donde n es el número de lados y l la longitud del lado.

b.





$$A_{lateral} = n \cdot \frac{(l + l') \cdot ap_l}{2}$$

$$A_{lateral} = 5 \cdot \frac{(4+7) \cdot 3}{2} = 82{,}5$$

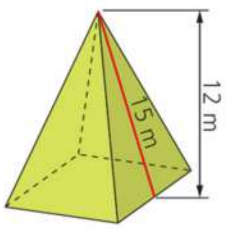
$$A_{lateral} = 82{,}5 \text{ cm}^2$$

14 Una pirámide de 28 aristas ¿cuántos vértices tiene?

En una pirámide el número de lados de la base es igual al número de vértices más 1, luego se trata de una pirámide con una base de 14 lados, es decir, 15 vértices.

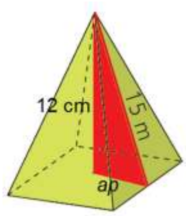
15 Halla el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:

a.



- Se calcula la apotema de la base, aplicando el teorema de Pitágoras:

  $ap^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow ap = 9$, es decir, la arista de la base mide $9 \cdot 2 = 18$ m



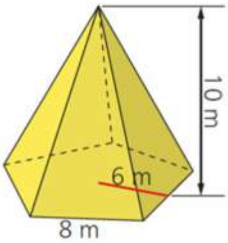
- Se calcula el área total según la expresión:

  $$A = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A = 4 \cdot 18 \cdot \frac{9+15}{2} = 864 \Rightarrow A = 864 \text{ m}^2$$

- Se calcula el volumen según la expresión:

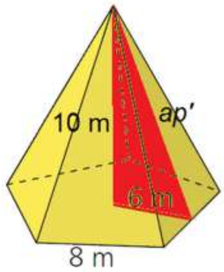
  $$V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{18 \cdot 18 \cdot 12}{3} = 1\,296 \Rightarrow V = 1\,296 \text{ m}^3$$

b.



- Se calcula la apotema de la pirámide, según el teorema de Pitágoras:
  $6^2 + 10^2 = ap'^2 \Rightarrow ap' = 11{,}66$

- Se calcula el área total según la expresión:



$$A = P \cdot \frac{ap + ap'}{2}$$

$$A = 5 \cdot 8 \cdot \frac{6 + 11{,}66}{2} = 353{,}2$$

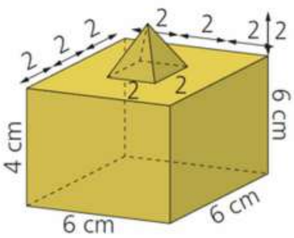
$$A = 353{,}2 \text{ m}^2$$

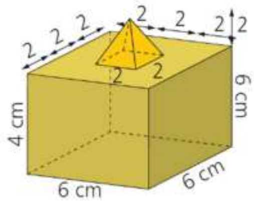
- Se calcula el volumen según la expresión:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 8 \cdot 6}{2} \cdot 10 = 400 \Rightarrow V = 400 \text{ m}^3$$

16 Determina el volumen de estas figuras:

a.

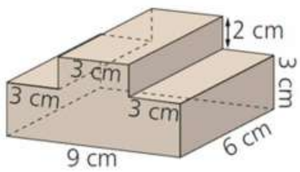


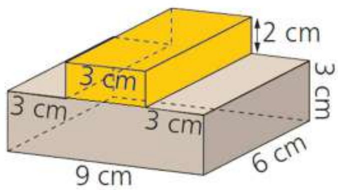


Se calcula el volumen de cada figura coloreada, teniendo en cuenta que la altura de la pirámide es 2 cm:

$$V = 6 \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 146{,}67 \text{ m}^3$$

b.





Se calcula el volumen de cada figura coloreada:
$V = 9 \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 6 = 198 \text{ m}^3$

EVALUACIÓN

1 **El área de un prisma rectangular de 6 m de altura y cuya base mide 3 m × 4 m es:**

a. 108 m^2 **b. 72 m^2** **c. 18 m^2** **d. 96 m^2**

El prisma tiene unas dimensiones de 3 × 4 × 6, luego su área es:
$A = 2 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 108$ m^2

2 **El poliedro que tiene 30 aristas es:**

a. El tetraedro. c. El icosaedro.
b. El octaedro. d. El dodecaedro.

El tetraedro tiene 6, el octaedro 12, el dodecaedro y el icosaedro tienen 30 aristas.

3 **Si un cubo tiene un volumen de 216 m^3, el área de una de sus caras es:**

a. 24 m^2 **b. 6 m^2** c. 36 m^2 **d. 100 m^2**

Un cubo tiene 6 caras iguales, así que el área de cada cara es: $\frac{216}{6} = 36$ m^2.

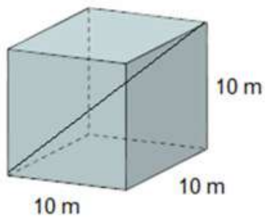
4 **El volumen de una pirámide pentagonal de 8 m de altura y cuya base tiene una arista de 5 m y una apotema de 3 m es:**

a. 84 m^3 b. 100 m^3 **c. 64 m^3** **d. 200 m^3**

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot ap}{2} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot 3}{2} \cdot 8 = 100 \Rightarrow V = 100 \text{ m}^3$$

5 **La máxima distancia que se puede recorrer en línea recta en un hexaedro de 10 m de arista es:**

a. 10 m c. Entre 15 y 20 m
b. Entre 10 y 15 m **d. 20 m**



La diagonal del hexaedro se calcula aplicando el teorema de Pitágoras:
$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$, donde $a = b = c = 10$ m

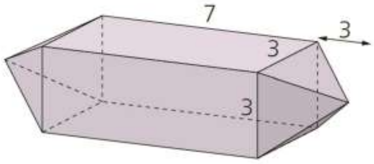
6 **El área total de una pirámide cuadrangular de 8 m de altura y 4 m de arista básica es:**

a. 81,97 m^2 **b. 99,9 m^2** **c. 81,1 m^2** **d. 65 m^2**

Se calcula la apotema de la pirámide:
$2^2 + 8^2 = ap'^2 \Rightarrow ap' = 8{,}246$ m

$$A = P \cdot \frac{ap + ap'}{2} \Rightarrow A = 4 \cdot 4 \cdot \frac{2 + 8{,}246}{2} = 81{,}97 \text{ m}^2$$

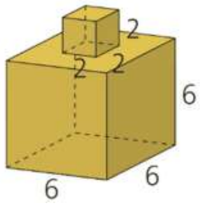
7 El volumen de esta figura cuyas medidas están dadas en metros es:



a. 80 m³ b. 81 m³ **c. 82 m³** **d. 83 m³**

$$V = 7 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \text{ m}^3$$

8 El área, en decámetros cuadrados, de esta figura cuyas medidas están dadas en metros es:



a. 1 dam² **b. 0,250 dam²** c. 2,32 dam² **d. 0,5 dam²**

$A = 6 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 232 \text{ m}^2 = 2{,}32 \text{ dam}^2$

MATEMÁTICAS
2.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

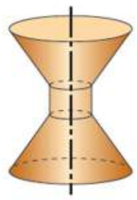
Unidad 15. Cuerpos de revolución

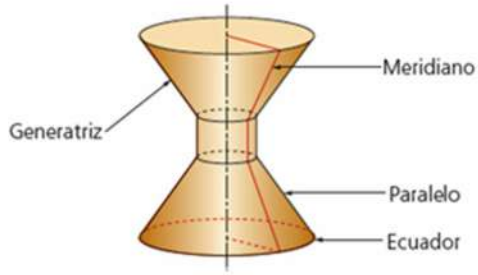
Unidad 15. Cuerpos de revolución

SOLUCIONES PÁG. 285

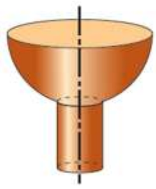
1 Dibuja en tu cuaderno estos cuerpos de revolución y señala sus elementos:

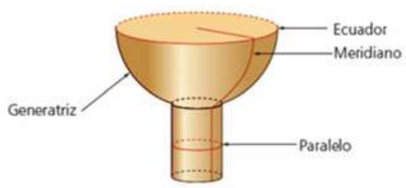
a.





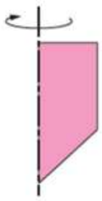
b.

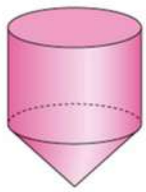




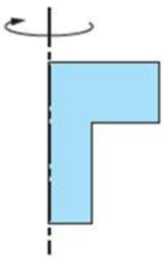
2 Dibuja en tu cuaderno los cuerpos de revolución que se obtienen al hacer girar las figuras indicadas alrededor del eje.

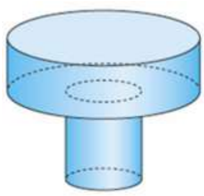
a.





b.

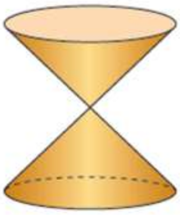




3 Dibuja en tu cuaderno la línea que, con un giro de 360° sobre el eje, origina estos cuerpos de revolución:

a.

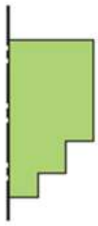
b.



4 Relaciona en tu cuaderno cada figura con su correspondiente cuerpo de revolución.

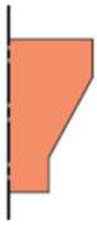
A

B

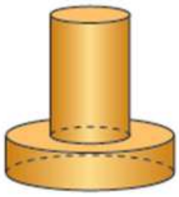


C

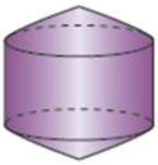
D



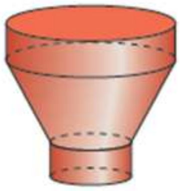
I



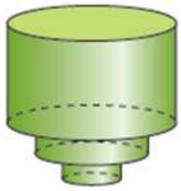
II



III



IV



A-II, B-IV, C-I, D-III

5 ¿Qué puntos de la generatriz que origina un cuerpo de revolución forman paralelos que se reducen a un punto?

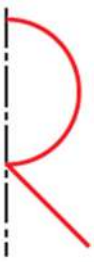
La generatriz es la línea que, al girar alrededor del eje de giro, genera el cuerpo de revolución.

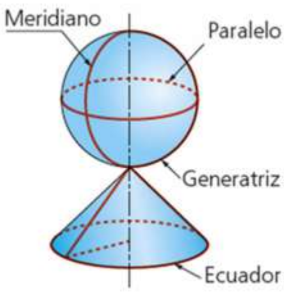
El paralelo es cada una de las circunferencias que describen los puntos de la generatriz en su rotación alrededor del eje de giro.

Por tanto, los puntos que pertenecen al eje de giro forman al girar paralelos que se reducen a un punto.

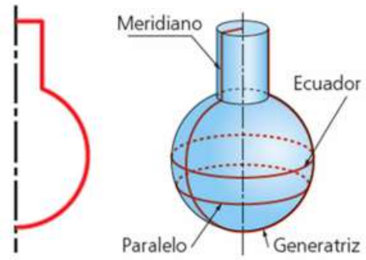
6 Dibuja en tu cuaderno los cuerpos de revolución que se obtienen cuando giran las generatrices indicadas alrededor del eje. Señala un paralelo, el ecuador y un meridiano en cada uno de ellos.

a.



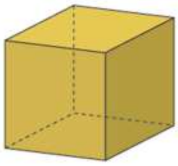


b.



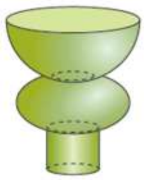
7 **Indica cuáles de estos cuerpos son de revolución y dibuja en tu cuaderno la generatriz que los origina:**

a.

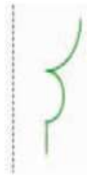


No es un cuerpo de revolución, porque no puede obtenerse al hacer girar una generatriz.

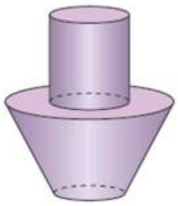
b.



Sí es un cuerpo de revolución y su generatriz es:

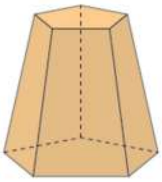


c.



Sí es un cuerpo de revolución, y su generatriz es:

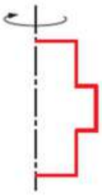
d.

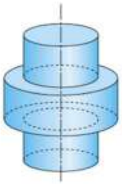


No es un cuerpo de revolución, porque no puede obtenerse al hacer girar una generatriz.

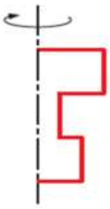
8 Dibuja en tu cuaderno los cuerpos de revolución que se obtendrán al hacer girar las figuras con respecto al eje marcado.

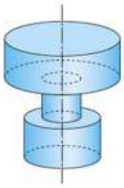
a.





b.



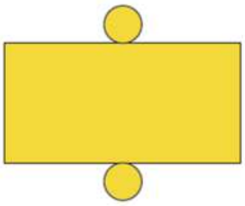


9 Formad grupos de cuatro personas y buscad fotografías de cuerpos de revolución presentes en vuestro entorno. Realizad una presentación y explicad en clase las diferentes figuras.

Respuesta abierta.

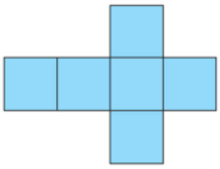
10 Indica cuáles de los siguientes desarrollos planos corresponden a cuerpos de revolución:

a.



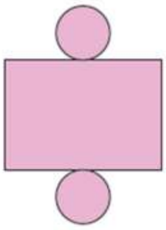
No, parece un cilindro, pero no puede formar un cuerpo de revolución porque la longitud de la circunferencia no es igual a la de la base del rectángulo.

b.



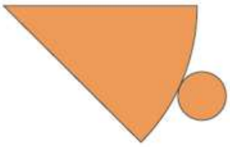
No, es un cubo. No existe generatriz para formar ese cuerpo.

c.



Sí, es un cilindro. Su generatriz es una recta paralela al eje de giro.

d.



Sí, es un cono, su generatriz es una recta que corta el eje de rotación.

11 Completa en tu cuaderno las frases con la palabra adecuada para que sean correctas.

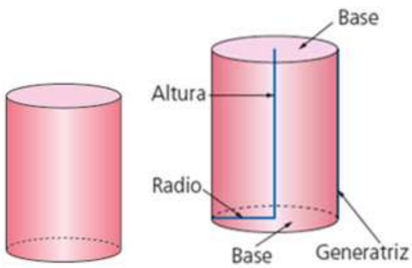
generatriz – meridianos – paralelos

a. Todos los meridianos **son iguales entre sí.**
b. Los paralelos **son circunferencias con centro en el eje de giro.**
c. La recta generatriz **origina un cuerpo de revolución.**

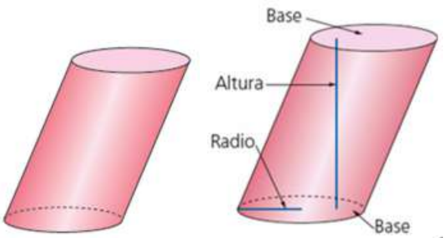
SOLUCIONES PÁG. 287

12 Dibuja en tu cuaderno estos cilindros y señala sus elementos:

a.



b.



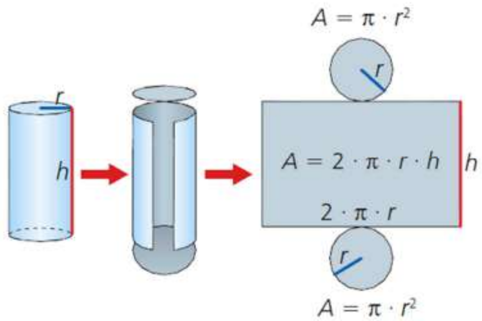
13 Mira a tu alrededor e indica tres objetos que sean cilindros.

Respuesta abierta.

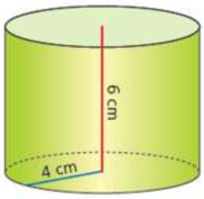
14 Actividad resuelta.

15 Halla el área de la base, el área lateral y el área total de los siguientes cilindros:

Para conocer el área de un cilindro se debe tener en cuenta cómo es su desarrollo plano:



a.



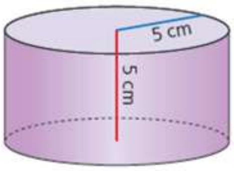
En este caso $r = 4$ cm y $h = 6$ cm

$A_{base} = \pi \cdot 4^2 = 50{,}24\ cm^2$

$A_{lateral} = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 150{,}72\ cm^2$

$A_{total} = 2 \cdot 50{,}24 + 150{,}72 = 251{,}2\ cm^2$

b.



En este caso $r = 5$ cm y $h = 5$ cm

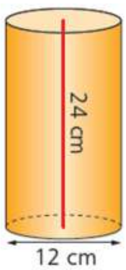
$A_{base} = \pi \cdot 5^2 = 78{,}5\ cm^2$

$A_{lateral} = 2\pi \cdot 5 \cdot 5 = 157\ cm^2$

$A_{total} = 2 \cdot 78{,}5 + 157 = 314\ cm^2$

16 Halla el área total y el volumen de estos cilindros:

a.



En este caso $r = 6$ cm y $h = 24$ cm

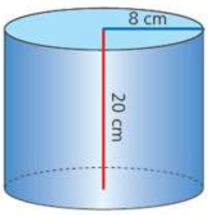
$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 113{,}04\ cm^2$

$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 6 \cdot 24 = 904{,}32\ cm^2$

$A_{total} = 2 \cdot 113{,}04 + 904{,}32 = 1\,130{,}4\ cm^2$

$V = A_{base} \cdot h = 113{,}04 \cdot 24 = 2\,712{,}96\ cm^3$

b.



En este caso $r = 8$ cm y $h = 20$ cm

$A_{base} = \pi \cdot 8^2 = 200{,}96\ cm^2$

$A_{lateral} = 2\pi \cdot 8 \cdot 20 = 1\,004{,}8\ cm^2$

$A_{total} = 2 \cdot 200{,}96 + 1\,004{,}8 = 1\,406{,}72\ cm^2$

$V = A_{base} \cdot h = 200{,}96 \cdot 24 = 4\,019{,}2\ cm^3$

17 Una lata cilíndrica de refresco tiene unas dimensiones de 7 cm de diámetro y 15 cm de altura.

a. Halla el área lateral de la lata.

$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 3{,}5 \cdot 15 = 329{,}7\ cm^2$

b. Calcula el volumen, en litros, que cabe en la lata.

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 15 = 576{,}975\ cm^3 = 0{,}576\ 975\ L$

c. ¿Cuántas latas se necesitan para envasar 10 L?

Si el volumen en una lata es el calculado en el apartado anterior, 0,577 L, para envasar 10 L se precisan:

10 : 0,577 = 17,33. Por tanto, se necesitan 18 latas.

18 Marcos quiere construir un bote cilíndrico para guardar los útiles de dibujo cuyas dimensiones son 11 cm de alto por 6 cm de diámetro. ¿Qué cantidad de cartulina utilizará?

Se trata de calcular la superficie de un cilindro sin una de las tapas:

$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 28{,}2\ cm^2$

$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 3 \cdot 11 = 207{,}3\ cm^2$

$A_{total} = 28{,}2 + 207{,}3 = 235{,}5\ cm^2$

Utilizará 235,5 cm^2 de cartulina.

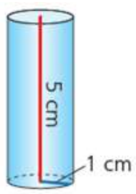
19 Una jarra cilíndrica tiene unas dimensiones de 10 cm de diámetro y 25 cm de altura. ¿Cuántos litros de agua caben en la jarra?

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 25 = 1\ 962{,}5\ cm^3$.

En la jarra caben 1,962 5 L

20 Calcula mentalmente el área total y el volumen, expresándolos en función de π, de los siguientes cilindros:

a.



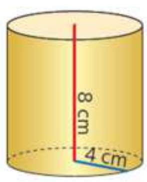
$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi\ cm^2$

$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 1 \cdot 5 = 10\pi\ cm^2$

$A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi + 10\pi = 12\pi\ cm^2$

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 25 = 25\pi\ cm^3$

b.



$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$

$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = 64\pi$

$A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 32\pi + 64\pi = 96\pi\ cm^2$

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = 16\pi \cdot 8 = 128\pi\ cm^3$

21 En la fabricación de una tubería cilíndrica se han empleado 628 cm^2 de material. Si la tubería tiene un diámetro de 2 cm, ¿cuál es su longitud?

Un tubo es un cilindro sin tapas, es decir, solo se tiene en cuenta el área lateral. Sabiendo que el radio es de 1 cm:

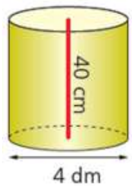
$$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 628\ cm^2 \Rightarrow h = \frac{628}{2\pi \cdot 1} = 100\ cm = 1\ m$$

La tubería tiene una longitud de 1 m.

22 ¿Cuál de estos dos cilindros tiene mayor capacidad?

a.

b.



Se calcula el volumen de los dos cilindros para compararlo, con la precaución de expresar todas las medidas en dm:

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 7 = 197{,}82 \text{ dm}^3$

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 50{,}26 \text{ dm}^3$

El cilindro a. tiene mayor capacidad.

23 Un dispensador de agua de forma cilíndrica tiene unas dimensiones de 40 cm de altura por 30 cm de diámetro.

Se considera el dispensador como un cilindro con una sola tapa.

a. ¿Qué cantidad máxima de agua puede contener?

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 40 = 28\,260 \text{ cm}^3$

Puede contener como máximo 28,26 L.

b. Si se consume el agua a razón de 1,5 L cada hora, expresa en horas, minutos y segundos, el tiempo que tardará en vaciarse el dispensador lleno.

$$\frac{1{,}5 \text{ L}}{1 \text{ hora}} = \frac{28{,}260 \text{ L}}{x} \Rightarrow x = 18{,}840 \text{ horas}$$

$$0{,}840 \text{ h} \cdot \frac{60 \text{ min}}{\text{h}} = 50{,}4 \text{ min}$$

$$0{,}4 \text{ min} \cdot \frac{60 \text{ s}}{\text{min}} = 24 \text{ s}$$

El tiempo que tarda el dispensador en vaciarse es de 18 h 50 min 24 s.

24 ¿Cuál es la altura de un cilindro que tiene un volumen de 942 dm^3 y cuya base tiene un radio de 10 dm?

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = 942 \text{ dm}^3$

$$h = \frac{942}{\pi \cdot 10^2} = 3 \text{ dm}$$

Tiene una altura de 3 dm.

SOLUCIONES PÁG. 289

25 Dibuja en tu cuaderno un cono y señala sus elementos.

Respuesta abierta.

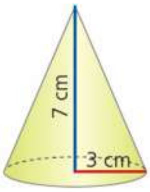
26 Mira a tu alrededor e indica tres objetos que sean conos.

Respuesta abierta.

27 Actividad resuelta.

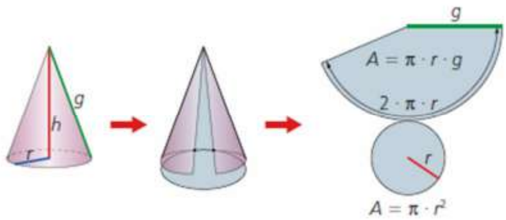
28 Halla el área total de los siguientes conos:

a.



- Se calcula la generatriz del cono aplicando el teorema de Pitágoras:

  $3^2 + 7^2 = g^2 \Rightarrow g = 7{,}62$, la generatriz mide 7,62 cm.

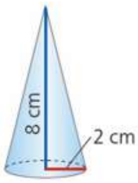


- Se calcula el área del cono mediante la expresión:

  $A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r \cdot (r + g) =$

  $= \pi \cdot 3 \cdot (3 + 7{,}62) = 100{,}04 \text{ cm}^2$

b.



- Se calcula la generatriz del cono aplicando el teorema de Pitágoras:

  $2^2 + 8^2 = g^2 \Rightarrow g = 8{,}25$, la generatriz mide 8,25 cm.

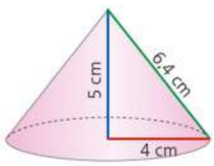
- Se calcula el área del cono mediante la expresión:

  $A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r \cdot (r + g) =$

  $= \pi \cdot 2 \cdot (2 + 8{,}25) = 64{,}37 \text{ cm}^2$

29 Halla el área total y el volumen de estos conos:

a.



- Se calcula el área del cono mediante la expresión:

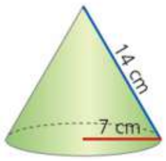
  $A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r \cdot (r + g) =$

  $= \pi \cdot 4 \cdot (4 + 6{,}4) = 130{,}62 \text{ cm}^2$

- Se calcula el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 5 = 83{,}73 \text{ cm}^3$$

b.



- Se calcula la altura del cono aplicando el teorema de Pitágoras:

$7^2 + h^2 = 14^2 \Rightarrow h = 12{,}12$ cm.

- Se calcula el área del cono mediante la expresión:

$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r \cdot (r + g) =$
$= \pi \cdot 7 \cdot (7 + 14) = 461{,}58 \text{ cm}^2$

- Se calcula el volumen:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 7^2 \cdot 12{,}12 = 621{,}59 \text{ cm}^3$$

30 El depósito isotérmico de la figura se utiliza para el almacenaje de leche. Su diámetro es de 800 mm. Por otro lado, la parte cilíndrica tiene la misma altura que la parte cónica, y ambas miden en total 1 700 mm.
¿Qué capacidad de almacenaje tiene el depósito en metros cúbicos?

Se debe calcular el volumen de un cilindro y de un cono idénticos radios y alturas, 400 mm y 850 mm respetivamente, o lo que es lo mismo, un radio de 0,4 m y una altura de 0,85 m.

$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}85 = 0{,}427 \text{ m}^3$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}85 = 0{,}142 \text{ m}^3$$

La parte cilíndrica tiene un volumen de 0,427 m^3 y la parte cónica de 0,142 35 m^3. En total tiene un volumen de 0,427 + 0,142 = 0,569 m^3.

31 Las almenas de un castillo tienen el tejado en forma cónica con unas dimensiones de 3 m de altura y un diámetro de 5 m. Halla el área lateral del tejado de una almena.

Se calcula la generatriz del cono aplicando el teorema de Pitágoras:

$2{,}5^2 + 3^2 = g^2 \Rightarrow g = 3{,}91$ m.

Se calcula el área lateral del cono mediante la expresión:

$A_{lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}91 = 30{,}69 \text{ m}^2$

32 Un reloj de arena de 18 cm de altura se compone de dos recipientes cónicos iguales de 4 cm de diámetro cada uno. La arena ocupa un 85 % de uno de ellos, y el reloj es de 3 min, que es exactamente lo que tarda en caer toda la arena del espacio superior al inferior.

a. ¿Qué volumen tiene el reloj?

Se debe calcular el volumen de dos conos iguales de 2 cm de radio y 9 cm de altura cada uno:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 9 = 37{,}68 \text{ cm}^3$$

$V_{reloj} = 2 \cdot 37{,}68 = 75{,}36 \text{ cm}^3$

b. ¿Qué volumen ocupa la arena?

Se calcula el 85 % del volumen de uno de los conos:

$V = 0{,}85 \cdot 37{,}68 = 32{,}03 \text{ cm}^3$

c. ¿Cuánto tiempo marcaría el reloj si uno de los recipientes estuviera lleno completamente?

Si 32,03 cm^3 de arena corresponden a 3 minutos, se calcula a cuánto tiempo corresponde el volumen de un recipiente lleno, 37,68 cm^3 de arena:

$$\frac{3 \text{ min}}{32{,}03 \text{ cm}^3} = \frac{x}{37{,}68 \text{ cm}^3} \Rightarrow x = 3{,}53 \text{ min}$$

3,53 min = 3 min 31 min, 45,1 s

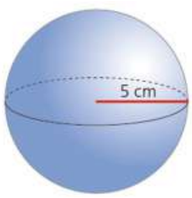
d. Si dispusieses de dos relojes de arena, uno de 5 min y otro de 4 min, ¿cómo conseguirías cronometrar 3 min exactamente?

Se pondrían en marcha a la vez los dos relojes; cuando acabara el de 4 min, quedaría tan solo 1 min en el de 5 min, y en ese momento se le da la vuelta a los dos relojes simultáneamente y cuando se vaciara el de 5 min quedarían exactamente 3 min en el otro reloj.

SOLUCIONES PÁG. 291

33 Determina el área y el volumen de las siguientes esferas:

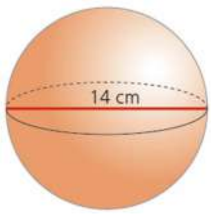
a.



$A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 5^2 = 314 \text{ cm}^2$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 5^3 = 523{,}33 \text{ cm}^3$$

b.



$A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 7^2 = 615{,}44 \text{ cm}^2$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 7^3 = 1436{,}03 \text{ cm}^3$$

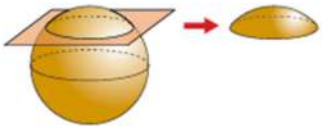
34 Partiendo de una esfera de 4 cm de radio:

a. ¿Cómo se puede obtener un círculo máximo?

Cortando la esfera con un plano que pase por su centro.

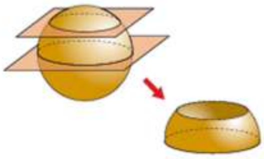
b. ¿Y un círculo menor?

Cortando la esfera con un plano que no pase por su centro.



c. ¿Por dónde se debe cortar una esfera con un plano para obtener dos segmentos esféricos?

Por cualquier plano en el que no esté el centro de la esfera.



35 En el juego del billar americano se utilizan 15 bolas numeradas y una bola blanca. Todas las bolas, la blanca incluida, miden lo mismo: tienen un diámetro de 57 mm.

a. ¿Cuál es la superficie esférica de cada bola?

$A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 28{,}5^2 = 10\,201{,}86\ \text{mm}^2$

b. ¿Qué volumen sumarán todas las bolas del billar?

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 5^3 = 96917{,}67\,\text{mm}^3$$

Como el volumen de una bola es de 96 917,67 mm^3, el de 15 bolas sería 1 453 765,05 mm^3.

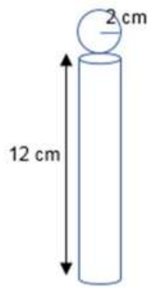
36 Un bastón de madera tiene forma cilíndrica con una longitud de 120 mm y un radio de 2 cm y está rematado en su parte superior con una esfera. Si la esfera tiene el mismo diámetro que la parte cilíndrica, ¿qué cantidad de madera se ha empleado en su construcción?

Se calcula el área de la parte cilíndrica, teniendo en cuanta que tiene las dos tapas:

$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 12{,}56\ \text{cm}^2$

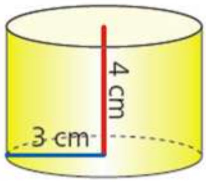
$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 12 = 150{,}72\ \text{cm}^2$

$A_{cilindro} = 150{,}72 + 2 \cdot 12{,}56 = 175{,}84\ \text{cm}^2$



Se calcula el área de la parte esférica:
$A_{esfera} = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 2^2 = 50{,}24$ cm^2
$A_{total} = A_{cilindro} + A_{esfera} = 226{,}08$ cm^2, es la cantidad de madera empleada.

37 ¿Cuál de estos cuerpos tiene mayor superficie?
a.

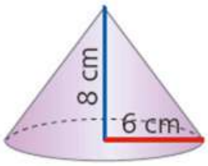


$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$ cm^2

$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 3 \cdot 4 = 24\pi$ cm^2

$A_{cilindro} = 2 \cdot 9\pi + 24\pi = 42\pi$ cm^2

b.



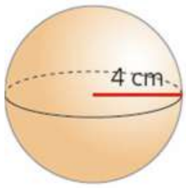
Se calcula la generatriz mediante el teorema de Pitágoras:

$6^2 + 8^2 = g^2 \Rightarrow g = 10$ cm

Se calcula el área total del cono:

$A_{cono} = A_{base} + A_{lateral} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r \cdot (r + g) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + 10) = 96\pi$ cm^2

c.



$A_{esfera} = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$ cm^2

Tiene mayor superficie el cono.

38 Con una jarra cilíndrica de 38 cm de alto y 14 cm de diámetro completamente llena de agua se quiere rellenar globos para formar esferas con un diámetro de 15 cm. ¿Cuántos globos se podrán rellenar de agua?
El volumen de agua de que se dispone es el de la jarra cilíndrica, es decir,
$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 7^2 \cdot 38 = 1862\pi$ cm^3
El volumen de cada globo es el de una esfera de 7,5 cm de radio:
$$V_{globo} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 7{,}5^3 = 562{,}5\pi \text{ cm}^3$$
La relación entre volúmenes es de 3,31, luego se podrán rellenar de agua 3 globos completos.

39 Se dispone de una cacerola cilíndrica con unas dimensiones de 30 cm de diámetro y 20 cm de alto llena de sopa en un 90 % con la que se va a servir a una serie de comensales cuyos platos tienen forma de cuenco semiesférico de 8 cm de diámetro. ¿A cuántos comensales se les podrá servir sopa si se llenan los cuencos al 95 %?

El volumen de sopa disponible es del 90% del volumen de un cilindro de 15 cm de radio y 20 cm de altura, es decir:

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 20 = 4500\pi \text{ cm}^3$

$V_{sopa\ disponible} = 4500\pi \text{ cm}^3 \cdot 0,9 = 4\,050\pi \text{ cm}^3$

El volumen de cada plato coincide con el de una semiesfera de radio 4 cm:

$$V_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 4^3 = 42,67\pi \text{ cm}^3$$

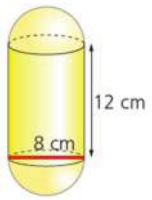
El volumen de sopa que cabe en cada plato es del 95 % del volumen del plato, luego:

$V_{sopa\ en\ un\ plato} = 42,67\pi \cdot 0,95 = 40,53\pi \text{ cm}^3$

La relación entre volumen de sopa disponible y volumen de sopa en cada plato es de 99,9, luego se podrá servir sopa a unos 100 comensales.

40 Halla el volumen de estas figuras:

a.



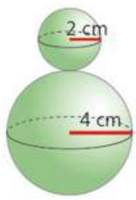
Se trata de sumar el volumen de un cilindro de 4 cm de radio y 12 cm de altura y el de dos semiesferas de 4 cm de radio (o una esfera completa de 4 cm de radio).

$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 = 192\pi \text{ cm}^3$

$$V_{esfera} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = 85,33\pi \text{ cm}^3$$

$V_{total} = 192\pi + 85,33\pi = 870,83 \text{ cm}^3$

b.



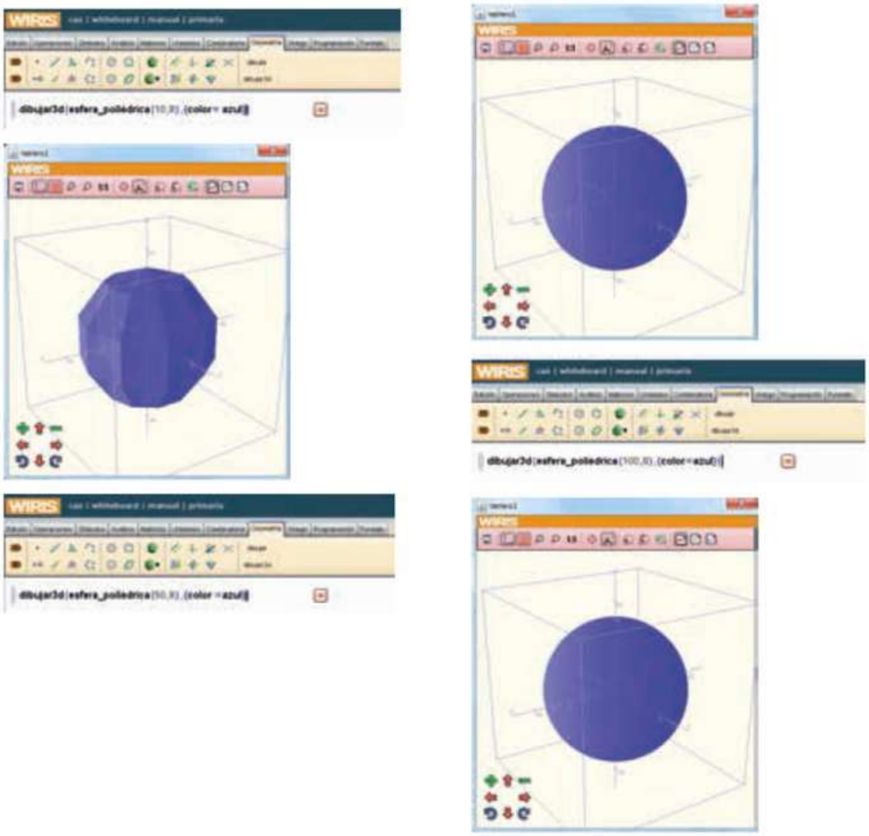
Se trata de sumar el volumen de dos esferas de 4 cm de radio y 2 cm de radio.

$$V_{esferas} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 + \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r'^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = 301,44 \text{ cm}^3$$

SOLUCIONES PÁG. 292 – HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

1 **Dibuja una esfera de radio 8 y de color azul. Realízalo en tres pasos para los siguientes valores de n: 10, 50 y 100.**

Ver libro del alumno para uso de la herramienta WIRIS.



SOLUCIONES PÁG. 293 – APRENDO A APRENDER

1 **¿Qué diferencias existen entre un paralelo y un meridiano en un cuerpo de revolución?**
Un paralelo es cada una de las circunferencias que describen los puntos de la generatriz en su rotación alrededor del eje de giro. Un meridiano es la línea de intersección entre el cuerpo de revolución y un plano que contenga el eje de giro.

2 **¿Qué nombre recibe el paralelo de mayor radio?**
Ecuador.

3 **¿Son iguales todos los meridianos de un cuerpo de revolución? ¿Y todos los paralelos?**
Todos los meridianos de un cuerpo de revolución son iguales. Los paralelos no son iguales.

4 ¿Qué puntos de un cuerpo de revolución describen en su giro de 360° un paralelo puntual?

Los puntos que también pertenecen al eje de giro.

5 El volumen de un cono es menor que el de un cilindro de igual base y altura. ¿En qué proporción?

$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$, es decir $V_{cilindro} = 3 \cdot V_{cono}$, es decir, el volumen del cono es una tercera parte del volumen del cilindro.

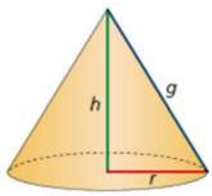
6 Si el eje de giro de un cilindro no es perpendicular a sus bases, ¿de qué tipo es el cilindro?

Es un cilindro oblicuo.

7 ¿En qué tipo de cilindros la longitud de la altura coincide con la de la generatriz?

En los cilindros rectos.

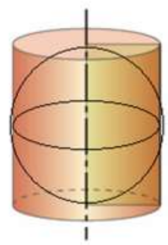
8 ¿Qué elementos del cono verifican el teorema de Pitágoras? Realiza un dibujo en tu cuaderno.



La altura, el radio y la generatriz:
$g^2 = h^2 + r^2$

9 ¿Cuántas veces es mayor el volumen de un cilindro que el de la esfera inscrita en él?

$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi \cdot r^3$



$V_{esfera} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3$

La relación entre volúmenes es 1,5, es decir, el volumen de un cilindro es una vez y media mayor que el volumen de la esfera inscrita en él.

10 ¿Cuántas veces es mayor el volumen de una esfera que el de un cono de igual altura y cuya base tiene el mismo radio que la esfera?

$V_{esfera} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3$

$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

La relación entre volúmenes es 4, es El volumen de una esfera es cuatro veces mayor que el volumen del cono con igual altura e igual radio de la esfera.

11 **Pon un ejemplo tomado de la vida real de cada uno de los cuerpos de revolución.**
Respuesta abierta.

12 **Indica la diferencia existente entre el círculo máximo y el círculo menor de una esfera.**
Un círculo máximo se produce por el corte de una esfera con un plano que pasa por su centro, mientras que un círculo menor el plano no pasa por el centro.

13 **¿Es cierto que por cada punto de un cuerpo de revolución pasa un único paralelo y un único meridiano? En caso contrario, indica un contraejemplo.**
Es cierto para todos los puntos, excepto para los puntos del cuerpo que se intersecan con el eje de rotación, ya que por ellos pasan todos los meridianos.

14 **El área de una esfera se puede aproximar al área lateral de un cuerpo de revolución en el que se inscriba. ¿Cuál es ese cuerpo de revolución?**
Un cilindro.

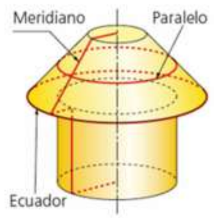
15 **Prepara una presentación digital a tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, utilizar Gloster…**
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 294 – REPASO FINAL

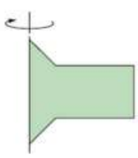
CUERPOS DE REVOLUCIÓN

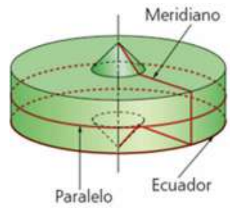
1 **Dibuja en tu cuaderno los cuerpos de revolución que se obtienen al hacer girar las figuras indicadas alrededor del eje y señala un paralelo, un meridiano y el ecuador.**

a.



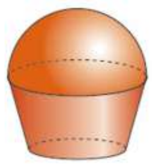
b.



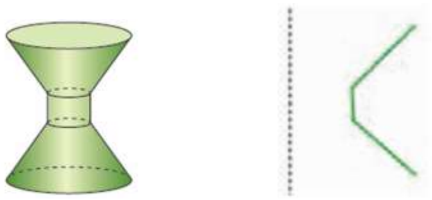


2 **Dibuja en tu cuaderno la figura que, con un giro de 360°, origina estos cuerpos de revolución:**

a.



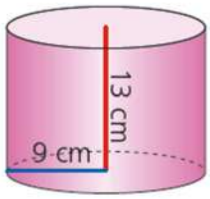
b.



CILINDRO: ÁREA Y VOLUMEN

3 Halla el área total y el volumen de los siguientes cilindros:

a.



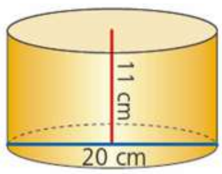
$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 9^2 = 81\pi \text{ cm}^2$

$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 9 \cdot 13 = 234\pi \text{ cm}^2$

$A_{cilindro} = 2 \cdot 81\pi + 234\pi = 396\pi = 1\,243{,}44 \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 9^2 \cdot 13 = 1053\pi = 3\,306{,}42 \text{ cm}^3$

b.



$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 10^2 = 100\pi \text{ cm}^2$

$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 10 \cdot 11 = 220\pi \text{ cm}^2$

$A_{cilindro} = 2 \cdot 100\pi + 220\pi = 420\pi = 1\,318{,}8 \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 11 = 3\,454 \text{ cm}^3$

4 Ana trabaja conduciendo un camión cisterna que transporta leche. El depósito cilíndrico del camión tiene unas dimensiones de 5 m de largo y 2 m de diámetro. Para garantizar ciertas condiciones de seguridad y temperatura, solo se puede llenar el 85 % de la capacidad total del depósito. ¿Cuántos litros de leche puede llevar Ana?

El volumen de la cisterna del camión es:

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 = 15{,}7 \text{ m}^3$.

La cantidad de leche que puede transportar es:

$15{,}7 \text{ m}^3 \cdot 0{,}85 = 13{,}345 \text{ m}^3$.

5 Se dispone de un vaso cilíndrico de 6 cm de diámetro y 9 cm de altura. Si se quiere tener la mayor cantidad de refresco posible, ¿qué habría que elegir: un vaso el doble de alto o uno el doble de ancho? Justifica tu respuesta.

Se calcula el volumen en los dos casos: $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = = \pi \cdot 3^2 \cdot 9 =$ $= 254{,}34 \text{ cm}^3$

- Para un vaso con el doble de altura, $h' = 2 \cdot h = 2 \cdot 9 = 18$ cm:

  $V' = \pi \cdot r^2 \cdot h' = 2\pi \cdot r^2 \cdot h = 2 \cdot V \Rightarrow V' = 2 \cdot V$

  $V' = \pi \cdot 3^2 \cdot 18 = 508{,}68 \text{ cm}^3$

- Para un vaso con el doble de diámetro $r' = 2 \cdot r = 2 \cdot 3 = 6$ cm

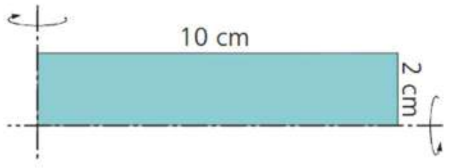
  $V' = \pi \cdot r'^2 \cdot h = \pi \cdot (2 \cdot r)^2 \cdot h = 4\pi \cdot r^2 \cdot h = 4 \cdot V \Rightarrow V' = 4 \cdot V$

  $V' = \pi \cdot 6^2 \cdot 9 = 1017{,}36 \text{ cm}^3$

  Un vaso el doble de alto tiene una capacidad de 508,68 cm^3 y el doble de ancho de 1 017,36 cm^3.

Por tanto, se elegiría el vaso doble de ancho.

6 Si se hace girar un rectángulo por su base o por su altura como indica la figura, se obtienen cilindros diferentes. ¿Serán iguales el área total y el volumen de ambos cilindros? Compruébalo.



- Si se gira sobre el eje vertical se obtiene un cilindro de altura 2 cm y radio 10 cm, cuyo área y volumen son:

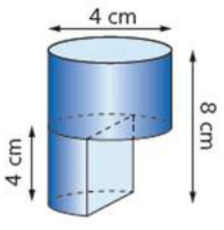
  $A_{cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 + 2\pi \cdot 10 \cdot 2 = 753{,}6 \text{ cm}^2$
  $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 10^2 \cdot 2 = 1053\pi = 628 \text{ cm}^3$

- Si se gira sobre el eje horizontal se obtiene un cilindro de altura 10 cm y radio 2 cm, cuyo área y volumen son:

  $A_{cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 10 = 150{,}72 \text{ cm}^2$
  $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 10 = 125{,}6 \text{ cm}^3$

No son iguales ni el área ni el volumen.

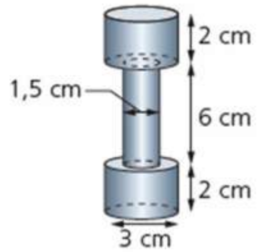
7 Halla el volumen de las siguientes figuras:
a.



Se trata de calcular el volumen de un cilindro de 2 cm de radio y 4 cm de altura y el de un semicilindro de radio 2 cm y 4 cm de altura. De igual forma se puede calcular el volumen de un cilindro de 2 cm de radio y 4 cm de altura y multiplicarlo por $\frac{3}{2}$.

$$V_{total} = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 24\pi = 75{,}36 \text{ cm}^3$$

b.

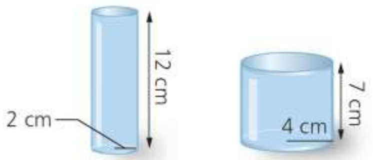


Se trata de calcular el volumen de dos cilindros de radio 1,5 cm y altura 2 cm y el de otro cilindro de radio $r' = 0,75$ cm y altura $h' = 6$ cm

$V_{total} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h + \pi \cdot r'^2 \cdot h' = 2 \cdot \pi \cdot 1,5^2 \cdot 2 + \pi \cdot 0,75^2 \cdot 6 = 38,86 \text{ cm}^3$

8 Actividad resuelta.

9 El líquido del primer recipiente se traslada al segundo:



a. ¿Se llenará este segundo recipiente?

Se calcula el líquido que contiene el primer recipiente:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 12 = 150,72 \text{ cm}^3$

Se calcula el volumen que cabe en el segundo recipiente:

$V' = \pi \cdot r'^2 \cdot h' = \pi \cdot 4^2 \cdot 7 = 351,68 \text{ cm}^3$

Por tanto, no se llenará el segundo recipiente.

b. En caso de no llenarse, ¿a qué altura llegará el líquido?

El volumen de 150,72 cm^3 llena un cilindro de radio conocido, 4 cm y altura, *h*, desconocida:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi \cdot r^2} = \frac{150,72}{\pi \cdot 4^2} = 3 \text{cm}$$

El líquido llegará a una altura de 3 cm.

CONO: ÁREA Y VOLUMEN

10 Se va a utilizar un bote cilíndrico de 8 cm de diámetro y 6 cm de alto para guardar monedas.

a. ¿Cuál es el volumen del bote?

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 301,44 \text{ cm}^3$

b. Si se quiere colocar una etiqueta que rodee al bote, ¿cuánto papel haría falta?

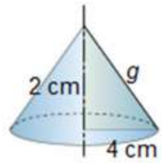
$A_{lateral} = 2\pi \cdot r \cdot h = 2\pi \cdot 4 \cdot 6 = 150,72 \text{ cm}^2$

c. Para cerrar el bote, se va a añadir una tapa en forma de cono con una altura de 2 cm; ¿cuánto material haría falta?

Se calcula la generatriz del cono según el teorema de Pitágoras: $2^2 + 4^2 = g^2 \Rightarrow g = 4{,}47$ cm.

Se calcula el área lateral del cono:

$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4 \cdot 4{,}47 = 56{,}14 \text{ cm}^2$

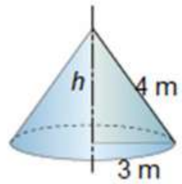


11 El área lateral de un cono es 37,68 m², y su radio, 3 m. Calcula su volumen.

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot r \cdot g \Rightarrow g = \frac{A_{\text{lateral}}}{\pi \cdot r} = \frac{37{,}68}{\pi \cdot 3} = 4 \text{cm}$$

Se calcula la altura del cono aplicando el teorema de Pitágoras: $2^2 + h^2 = 4^2 \Rightarrow h = 2{,}65$ m

Se calcula el volumen del cono de radio 3 m y altura 2,65 m:

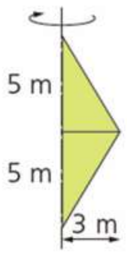


$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 2{,}65 = 24{,}96 \text{ m}^3$$

SOLUCIONES PÁG. 295

12 Determina el volumen de los cuerpos de revolución que se generan en la rotación de cada una de estas figuras alrededor de los ejes indicados:

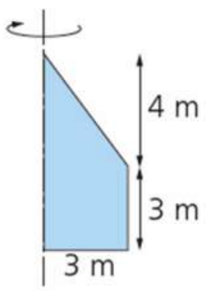
a.



Se trata de dos conos de radio 3 m y altura 5 m.

$$V_{\text{conos}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 94{,}2 \text{ m}^3$$

b.



Se trata de un cono de radio 3 m y altura 4 m y un cilindro de radio y altura 3 m.

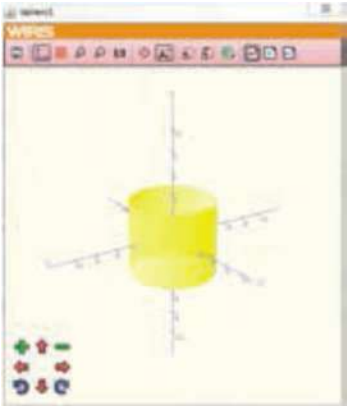
$$V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ m}^3$$

$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 27\pi = 122{,}46 \text{ m}^3$

ESFERA: ÁREA Y VOLUMEN

13 Dibuja en tu cuaderno los siguientes cuerpos de revolución y calcula su área total y su volumen:

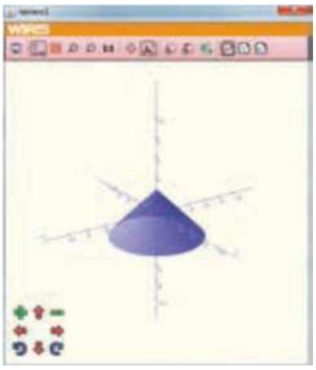
a. Un cilindro de 4 cm de radio y 7 cm de altura.



$A_{cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 4^2 + 2\pi \cdot 4 \cdot 7 =$
$= 276{,}32\ cm^2$

$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 7 = 351{,}68\ cm^3$

b. Un cono de 5 cm de radio y 5 cm de altura.



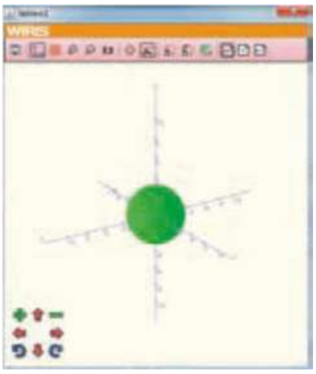
Se calcula la generatriz mediante el teorema de Pitágoras: $5^2 + 5^2 = g^2 \Rightarrow g = 7{,}07$ cm

Se calcula el área total del cono:

$A_{cono} = A_{base} + A_{lateral} = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r \cdot (r + g) =$
$= \pi \cdot 5 \cdot (5 + 7{,}07) = 189{,}5\ cm^2$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5 = 130{,}8\ cm^3$$

c. Una esfera de 6 cm de diámetro.

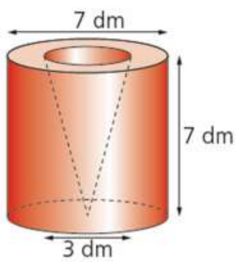


$A_{esfera} = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 3^2 = 113{,}04\ cm^2$

$$V_{esfera} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 113{,}04\ cm^3$$

14 Halla el volumen de las siguientes figuras, que tienen los huecos indicados:

a.



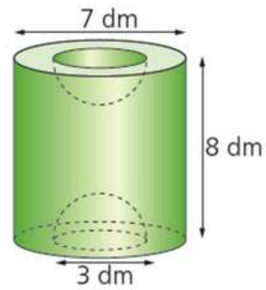
Se calcula el volumen del cilindro de 7 dm de diámetro y 7 dm de altura y se le resta el volumen de un cono de 3 dm de diámetro y 7 dm de altura.

$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 7 = 269{,}25\ dm^3$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 7 = 16{,}49\ dm^3$$

$V_{cilindro} - V_{cono} = 269{,}26 - 16{,}49 = 252{,}77\ dm^3$

b.



Se calcula el volumen del cilindro de 7 dm de diámetro y 8 dm de altura y se le resta el volumen de una esfera de 3 dm de diámetro.

$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 8 = 307{,}72 \text{ dm}^3$

$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 1{,}5^3 = 14{,}13 \text{ dm}^3$

$V_{\text{cilindro}} - V_{\text{esfera}} = = 307{,}72 - 14{,}13 = 293{,}59 \text{ dm}^3$

15 ¿Qué radio debe tener como mínimo el aro de una canasta de baloncesto para que quepan los balones si estos tienen un área de 3 629,84 cm²?

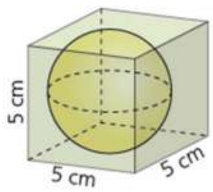
Se debe averiguar el radio de una esfera de $A = 3\,629{,}84 \text{ cm}^2$

$A_{\text{esfera}} = 4\pi \cdot r^2 = 3\,629{,}84 \Rightarrow r = 17 \text{ cm}$

Debe tener como mínimo un radio de 17 cm.

16 Halla el volumen que queda entre estas figuras:

a.



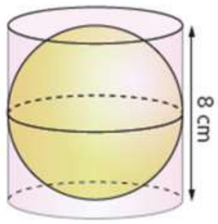
Se calcula el volumen del cubo de 5 cm de lado y se le resta el volumen de la esfera inscrita en él, de 5 cm de diámetro.

$V_{\text{cubo}} = l^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 2{,}5^3 = 65{,}42 \text{ cm}^3$

$V_{\text{cubo}} - V_{\text{esfera}} = 125 - 65{,}42 = 59{,}58 \text{ cm}^3$

b.



Se calcula el volumen del cilindro de 8 cm de radio y 8 cm de altura y se le resta el volumen de la esfera inscrita en él, de 8 cm de diámetro.

$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 401{,}92 \text{ cm}^3$

$V_{\text{esfera}} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 4^3 = 267{,}95 \text{ cm}^3$

$V_{\text{cilindro}} - V_{\text{esfera}} = 401{,}92 - 267{,}95 = 133{,}97 \text{ cm}^3$

17 Un recipiente cilíndrico de 20 cm de altura y 4 cm de radio está lleno de agua hasta una altura de 18 cm. Si se introduce en él una bola de cristal de 6 cm de diámetro, ¿qué volumen de agua se derramará?

El volumen total del recipiente cilíndrico es:

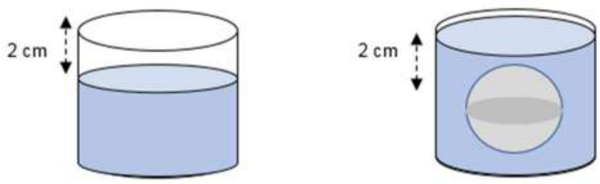
$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 = 1\,004{,}80$ cm^3

Como la altura del agua solo es de 18 cm, el volumen de agua que contiene el cilindro es:

$V_{agua} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{agua} = \pi \cdot 4^2 \cdot 18 = 904{,}32$ cm^3

El volumen de la esfera que se introduce en el agua es: $V_{esfera} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 113{,}04$ cm^3 y coincide con el volumen de agua que desaloja.

El volumen de agua derramada es el que excede la altura del recipiente.



Si llamamos V' al volumen del cilindro de radio 4 cm y altura 2 cm:

$V' = \pi \cdot r^2 \cdot h'_{recipiente} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 100{,}48$ cm^3

$V_{derramado} = V_{esfera} - V'_{cilindro} = 113{,}04 - 100{,}48 = 12{,}56$ cm^3.

EVALUACIÓN

1 El área de un cilindro de 8 m de radio y 3 m de altura es:
a. 512,5 m^2 **b. 601,3 m^2** **c. 584,7 m^2** d. 552,64 m^2

$A_{cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 8^2 + 2\pi \cdot 8 \cdot 3 = 552{,}64$ m^2

2 El volumen de un cono de 6 m de diámetro y 5 m de generatriz es:
a. 42,15 m^3 b. 37,68 m^3 **c. 28,25 m^3** **d. 31,35 m^3**

Se calcula la altura mediante el teorema de Pitágoras:
$3^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow h = 4$ m

$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 37{,}68$ m^3

3 El área de una esfera que tiene un radio de 8 m es:
a. 803,84 m^2 **c. 915,84 m^2**
b. 756,84 m^2 **d. 888,84 m^2**

$A_{esfera} = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 8^2 = 803{,}84$ m^2

4 El volumen de un cono es 100 m^3; ¿cuál será el volumen del cilindro que tiene las mismas dimensiones que el cono?
a. 100 m^3 **b. 200 m^3** c. 300 m^3 **d. 400 m^3**

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 100 \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 100}{\pi \cdot r^2}$$

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Sustituyendo *h* en la expresión del volumen del cilindro:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{3 \cdot 100}{\pi \cdot r^2} = 300 \text{ m}^3$$

5 ¿Cuál es el volumen de una semiesfera de 12 dm de diámetro?
a. 756,4 dm^3 **c. 814,2 dm^3**
b. 452,16 dm^3 **d. 968,3 dm^3**

$V_{esfera} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot 6^3 = 904{,}32 \text{ dm}^3$, al ser una semiesfera el volumen es la mitad, es decir, 452,16 m^3.

6 La máxima cantidad de agua que puede contener un depósito cilíndrico de 1 m de diámetro y 2 m de altura es:
a. 1 000 L **b. 2 000 L** **c. 1 350 L** d. 1 570 L

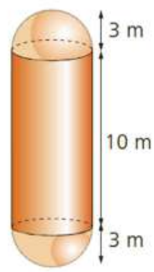
$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 2 = 1{,}57 \text{ m}^3 = 1\,570 \text{ L}$

7 Un cono de 6 cm de radio tiene un área total de 401,92 cm^2; entonces tiene un volumen de:
a. 372,56 cm^3 **c. 314,2 cm^3**
b. 279,3 cm^3 d. 530,16 cm^3

Se calcula la generatriz del cono:
$A_{cono} = \pi \cdot r \cdot (r + g) = \pi \cdot 6 \cdot (6 + g) = 401{,}92 \text{ cm}^2 \Rightarrow g = 15{,}3 \text{ cm}$
Se calcula la altura del cono mediante el teorema de Pitágoras:
$r^2 + h^2 = g^2 \Rightarrow 6^2 + h^2 = 15{,}3^2 \Rightarrow h = 14{,}07 \text{ cm}$
El volumen de un cono de radio 6 cm y altura 14,07 cm es:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 14{,}1 = 530{,}16 \text{ m}^3$$

8 El volumen de la siguiente figura es:
a. 150π m^3 **c. 100π m^3**
b. 126π m^3 **d. 300π m^3**



Se debe calcular el volumen de un cilindro de radio 1,5 m y altura 10 m y sumarlo al de una esfera de diámetro 3 m:
$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 90\pi \text{ m}^3$

$$V_{esfera} = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \text{ m}^3$$

$$V_{total} = 90\pi + 36\pi = 126\pi \text{ m}^3$$

9 El área lateral de un cono de 3 m de radio y 4 m de altura es:
a. 15 π m^2 **b. 12 π m^2** **c. 20 π m^2** **d. 10 π m^2**

Se calcula la generatriz del cono:
$r^2 + h^2 = g^2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = g^2 \Rightarrow g = 5$ m

Se calcula el área lateral del cono:
$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 3 \cdot 5) = 15\ \pi$ m^2