1 Números enteros

1. Selecciona, entre estos números:

9	**21**	**24**	**30**	**48**	**50**	**100**	**120**

a) Los múltiplos de 3.

b) Los múltiplos de 12.

c) Los múltiplos de 20.

d) Los múltiplos de 25.

a) Múltiplos de 3: 9, 21, 24, 30, 48, 120

b) Múltiplos de 12: 24, 48, 120

c) Múltiplos de 20: 100, 120

d) Múltiplos de 25: 50, 100

2. Razona si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si un número es múltiplo de 9, también lo es de 3.

b) Si un número es múltiplo de 5 lo es también de 25.

a) Cierto, ya que 9 es múltiplo de 3.

b) Falso, por ejemplo, 10 es múltiplo de 5, pero no de 25.

3. Encuentra, entre estos números:

1	**3**	**7**	**9**	**14**	**28**	**15**	**77**

a) Divisores de 30.

b) Divisores de 45.

c) Divisores de 56.

d) Divisores de 77.

Indica, en cada caso, qué divisores faltan.

a) Divisores de 30: 1, 3, 15. Faltan 2, 5, 6, 10, 30

b) Divisores de 45: 1, 3, 9, 15. Faltan 5, 45

c) Divisores de 56: 1, 7, 14, 28. Faltan 2, 4, 8, 56

d) Divisores de 77: 1, 7, 77. Falta 11

4. Aplica los criterios de divisibilidad para completar la siguiente tabla en tu cuaderno.

Número	**Divisible por**								
	2	**3**	**4**	**5**	**9**	**10**	**11**	**25**	**100**
48	●	●	●	●	●	●	●	●	●
75	●	●	●	●	●	●	●	●	●
319	●	●	●	●	●	●	●	●	●
4510	●	●	●	●	●	●	●	●	●

Número	**Divisible por**								
	2	**3**	**4**	**5**	**9**	**10**	**11**	**25**	**100**
48	Sí	Sí	Sí	No	No	No	No	No	No
75	No	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí	No
319	No	No	No	No	No	No	Sí	No	No
4510	Sí	No	No	Sí	No	Sí	Sí	No	No

5. Actividad resuelta.

6. Comprueba si los números 429, 568 y 1327 son múltiplos de 7 aplicando el criterio anterior.

429 → 42 – 2 · 9 = 42 –18 = 24, que no es múltiplo de 7.

5689 → 568 – 2 · 9 = 568 – 18 = 550; 56 – 2 · 8 = 56 – 16 = 40, que no es múltiplo de 7.

1327 → 132 – 2 · 7 = 132 – 14 = 118; 11 – 2 · 8 = 11– 16 = –5, no es múltiplo de 7.

7. Indica cuáles de los siguientes números son primos, y cuáles compuestos.

a) 39	**c) 27**	**e) 58**	**g) 147**	**i) 313**
b) 53	**d) 121**	**f) 83**	**h) 205**	**j) 524**

a) $39 = 3 \cdot 13$, compuesto

b) 53, primo

c) $27 = 3 \cdot 9$, compuesto

d) $121 = 11 \cdot 11$, compuesto

e) $58 = 2 \cdot 29$, compuesto

f) 83, primo

g) $147 = 3 \cdot 49$, compuesto

h) $205 = 41 \cdot 5$, compuesto

i) 313, primo

j) $524 = 2 \cdot 262$, compuesto

8. Escribe todos los números entre 20 y 40 que solo tengan dos divisores. ¿Cómo son esos números?

Los números con dos divisores, 1 y él mismo, son: 23, 29, 31 y 37. Son números primos.

9. Los números 2 y 3 son dos números primos consecutivos. ¿Es posible encontrar otros dos números primos consecutivos? ¿Por qué?

No es posible, ya que uno de los números será par y, por tanto, será múltiplo de 2, no será primo.

10. Busca los números primos que hay entre 300 y 320.

Los números primos entre 300 y 320 son 307, 311, 313 y 317.

11. Descompón en factores primos estos números.

a) 126	**c) 408**	**e) 375**	**g) 632**
b) 356	**d) 512**	**f) 1225**	**h) 2340**

a) $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

b) $356 = 2^2 \cdot 89$

c) $408 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17$

d) $512 = 2^9$

e) $375 = 3 \cdot 5^3$

f) $1225 = 5^2 \cdot 7^2$

g) $632 = 2^3 \cdot 79$

h) $2340 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13$

12. Actividad resuelta.

13. Calcula el número correspondiente a cada descomposición en factores primos.

a) $2^3 \cdot 5^3$	**b)** $3^2 \cdot 11$	**c)** $2^3 \cdot 3^2$	**d)** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

a) $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$

b) $3^2 \cdot 11 = 99$

c) $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$

d) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 30^2 = 900$

14. Completa en tu cuaderno las igualdades.

a) $\mathbf{304 = 2^{\bullet} \cdot \bullet}$

b) $\mathbf{\bullet = 3^2 \cdot 13}$

c) $\mathbf{201 = 3 \cdot \bullet}$

d) $\mathbf{616 = 2^{\bullet} \cdot 7^{\bullet} \cdot 11^{\bullet}}$

a) $304 = 2^4 \cdot 19$

b) $117 = 3^2 \cdot 13$

c) $201 = 3 \cdot 67$

d) $616 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11$

15. Escribe cuatro múltiplos comunes a los números $n = 3^2 \cdot 2$ y $m = 3^2 \cdot 5$.

Los múltiplos comunes serán múltiplos de $3^2 \cdot 2 \cdot 5 = 90$. Por ejemplo, 90, 180, 270 y 360.

16. Si la descomposición de un número es $2^4 \cdot 3^7$, escribe cinco divisores distintos del número. ¿Puede haber algún divisor distinto de 1 que no sea múltiplo de 2 ni de 3?

Por ejemplo, 2, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $6 = 2 \cdot 3$ y $9 = 3^2$.

No es posible, todos los divisores distintos de 1 contendrán al menos uno de los factores 2 o 3.

17. Calcula el número de divisores de los siguientes números. Comprueba que estás en lo cierto.

a) 45

b) 54

c) 81

d) 105

e) 120

f) 200

a) $45 = 3^2 \cdot 5$ tiene $(2+1)\cdot(1+1) = 6$. Divisores de 45: 1, 3, 5, 9, 15 y 45.

b) $54 = 2 \cdot 3^3$ tiene $(1+1)\cdot(3+1) = 8$. Divisores de 54: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

c) $81 = 3^4$ tiene $(4+1) = 5$. Divisores de 81: 1, 3, 9, 27 y 81.

d) $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ tiene $(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 8$. Divisores de 105: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35 y 105.

e) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ tiene $(3+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 16$. Divisores de 120: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 y 120.

f) $200 = 2^3 \cdot 5^2$ tiene $(3+1)\cdot(2+1) = 12$. Divisores de 200: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100 y 200.

18. Si el número 48 tiene 10 divisores, ¿cuántos tendrá el número $336 = 48 \cdot 7$? ¿Y cuántos tendrá el número $144 = 48 \cdot 3$?

En el caso del número 336, como 7 no es divisor de 48, el número de divisores se multiplica por 2 (el exponente de 7 más uno). Por tanto, 336 tiene $10 \cdot 2 = 20$ divisores.

En el caso del número $144 = 48 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$, tiene $(4+1)\cdot(2+1) = 15$ divisores.

19. ¿Cuántos divisores comunes tienen los números $n = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ y $m = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$?

Su máximo común divisor es $2^2 \cdot 7$, por lo que tienen $(2+1)\cdot(1+1) = 6$ divisores comunes.

20. Actividad interactiva.

21. Calcula todos los divisores comunes de los siguientes pares de números.

a) 28 y 32 **c) 45 y 54** **e) 23 y 44**

b) 25 y 60 **d) 31 y 50** **f) 64 y 75**

a) 1, 2 y 4 **c)** 1, 3 y 9 **e)** 1

b) 1 y 5 **d)** 1 **f)** 1

22. Calcula el máximo común divisor de los siguientes números usando la descomposición factorial.

a) 32 y 56 **c) 80 y 120** **e) 18, 48 y 98**

b) 49 y 56 **d) 36 y 175** **f) 33, 60 y 66**

a) $32 = 2^5$ y $56 = 2^3 \cdot 7 \Rightarrow \text{m.c.d.}(32,56) = 2^3 = 8$

b) $49 = 7^2$ y $56 = 2^3 \cdot 7 \Rightarrow \text{m.c.d.}(49,\ 56) = 7$

c) $80 = 2^4 \cdot 5$ y $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow \text{m.c.d.}(80,\ 120) = 2^3 \cdot 5 = 40$

d) $36 = 2^2 \cdot 3^2$ y $175 = 5^2 \cdot 7 \Rightarrow \text{m.c.d.}(36,\ 175) = 1$

e) $18 = 2 \cdot 3^2$, $48 = 2^4 \cdot 3$ y $98 = 2 \cdot 7^2 \Rightarrow \text{m.c.d.}(18,\ 48,\ 98) = 2$

f) $33 = 3 \cdot 11$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \Rightarrow \text{m.c.d.}(33,\ 60,\ 66) = 3$

23. Escribe un número y un múltiplo suyo. Calcula el máximo común divisor de ambos números. ¿Qué observas?

Tomamos el número 7 y múltiplo $7 \cdot 2 = 14$.

Calculamos el máximo común divisor: m.c.d. (7, 14) = 7

El máximo común divisor es el primero de los dos números.

24. Escribe dos números cuyo máximo común divisor sea 7. Multiplica ambos números por 6. ¿Cuál es el máximo común divisor de los dos números obtenidos?

Elegimos los números $14 = 7 \cdot 2$ y $49 = 7^2 \Rightarrow \text{m.c.d.}\ (14,\ 49) = 7$.

Multiplicamos por 6 ambos números $14 \cdot 6 = 84 = 7 \cdot 2^2 \cdot 3$ y $49 \cdot 6 = 294 = 7^2 \cdot 2 \cdot 3$. Calculamos el máximo común divisor: $\text{m.c.d.}(84, 294) = 7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$. Es el resultado de multiplicar 7· 6.

25. En una granja hay 72 ovejas y 84 cabras. ¿Cómo se puede repartir a los animales en cercados del mayor tamaño posible, pero sin mezclar, de forma que en todos haya el mismo número de animales?

Se calcula el máximo común divisor de 72 y 84. $72 = 2^3 \cdot 3^2$ y $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \Rightarrow \text{m.c.d.}(72,\ 84) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Habrá 12 animales en cada cercado.

26. Escribe dos números cuyo m.c.d. sea 210 y que estén entre 10 000 y 11000.

Como $10\,000 : 210 = 47{,}6190476$, el primer número es $210 \cdot 48 = 10\,080$.

El siguiente número sería $210 \cdot 49 = 10\,290$.

27. Actividad interactiva.

28. Escribe los cinco primeros múltiplos de cada par de números. ¿Aparece el mínimo común múltiplo entre ellos?

a) 7 y 9 **c) 60 y 90** **e) 30 y 56**

b) 36 y 45 **d) 42 y 63** **f) 18 y 22**

a) Múltiplos de 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42. Múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54. No aparece.

b) Múltiplos de 36: 36, 72, 108, 144, 180, 216. Múltiplos de 45: 45, 90, 135, 180, 225, 270. Aparece, 180.

c) Múltiplos de 60: 60, 120, 180, 240, 300, 360. Múltiplos de 90: 90, 180, 270, 360, 450, 540. Aparece, 180.

d) Múltiplos de 42: 42, 84, 126, 168, 210, 252. Múltiplos de 63: 63, 126, 189, 252, 315, 378. Aparece, 126.

e) Múltiplos de 30: 30, 60, 90, 120, 150, 180. Múltiplos de 56: 56, 112, 168, 224, 280, 336. No aparece.

f) Múltiplos de 18: 18, 36, 54,72, 90, 108. Múltiplos de 22: 22, 44, 66, 88, 110, 132. No aparece.

29. Halla el mínimo común múltiplo en cada caso.

a) 14, 30 y 42 **b) 56, 84 y 120** **c) 81, 90 y 99**

a) $14 = 2\cdot 7, 30 = 2\cdot 3\cdot 5$ y $42 = 2\cdot 3\cdot 7 \Rightarrow \text{m.c.m.}(14, 30, 42) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 210$

b) $56 = 2^3\cdot 7,\ 84 = 2^2\cdot 3\cdot 7$ y $120 = 2^3\cdot 3\cdot 5 \Rightarrow \text{m.c.m.}(56, 84, 120) = 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7 = 840$

c) $81 = 3^4,\ 90 = 2\cdot 3^2\cdot 5$ y $99 = 3^2\cdot 11 \Rightarrow \text{m.c.m.}(81, 90, 99) = 2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 11 = 8910$

30. Escribe un número y un múltiplo suyo. Calcula el m.c.m. de ambos números, ¿qué observas?

Elegimos los números 7 y $14 = 7\cdot 2$: m.c.m. (7, 14) = 14.

El mínimo común múltiplo es el múltiplo del primer número.

31. Si el producto de dos números coincide con el mínimo común múltiplo de los mismos, ¿cuánto vale su máximo común divisor? ¿Por qué?

El máximo común divisor es 1, ya que son primos entre sí.

32. Si un número es múltiplo de 6 y otro es múltiplo de 4, ¿se puede asegurar que su mínimo común múltiplo es múltiplo de 24? Compruébalo.

No se puede asegurar que el mínimo común múltiplo es múltiplo de 24.

Por ejemplo, 18 es múltiplo de 6 y 12 es múltiplo de 4, y su mínimo común múltiplo es 36, que no es múltiplo de 24.

33. Carmen suele ir a la biblioteca de su barrio cada 28 días, Rafael, cada 25, y Teresa, cada 22. El día 12 de septiembre se encontraron los tres amigos allí. ¿Qué día volverán a coincidir en la biblioteca?

Calculamos el mínimo común múltiplo de 28, 25 y 22.

$28 = 2^2\cdot 7,\ 25 = 5^2$ y $22 = 2\cdot 11 \Rightarrow \text{m.c.m.}(28, 25, 22) = 2^2\cdot 7\cdot 5^2\cdot 11 = 7700$

Tardarán 7700 días en volver a coincidir.

34. Asocia un número entero a cada situación.

a) Un avión vuela a una altura de 6500 m.

b) El garaje está en el segundo sótano.

c) Han ingresado en el banco 1200 €.

d) El submarino está a 1520 m de profundidad.

a) +6500 **b)** − 2 **c)** +1200 **d)** − 1520

35. Escribe una situación real que se pueda expresar con estos números enteros.

a) **−350** **b)** **13** **c)** **3147** **d)** **−25**

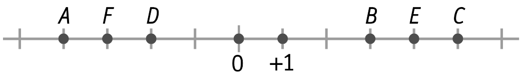
a) Tiene una deuda de 350 €.

b) Vive en el decimotercer piso.

c) Un alpinista está sobre un pico a 3147 m de altura.

d) El submarinista está a 25 m de profundidad.

36. Escribe en tu cuaderno los números representados.



A = –4 *C* = +5 *E* = +4

B = +3 *D* = –2 *F* = –3

37. Representa −7, +5, −4, 0, −2 y +9 en la recta numérica y ordénalos de menor a mayor.

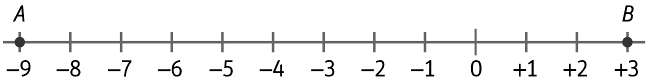
Ordenados de menor a mayor: –7 < – 4 < –2 < 0 < +5 < +9

38. Representa los siguientes pares de números y halla la distancia entre ellos.

a) **−9 y 3** **c)** **11 y −2** **e)** **−15 y 4**

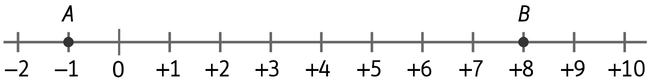
b) **−1 y 8** **d)** **−7 y 3** **f)** **10 y 8**

a)



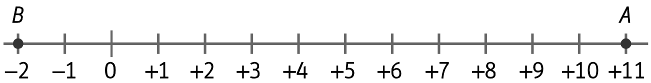
Distancia: 12 unidades

b)



Distancia: 9 unidades

c)

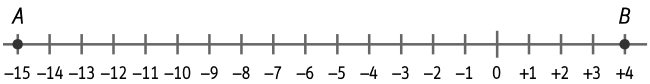


Distancia: 13 unidades

d)

Distancia: 10 unidades

e)



Distancia: 19 unidades

f)

Distancia: 2 unidades

39. Calcula el valor absoluto y el opuesto de cada número.

a) −4 **c) +32** **e) −58**

b) +15 **d) 0** **f) −100**

a) $|-4| = 4$; op(–4) = +4 **c)** $|+32| = 32$; op(+32) = –32 **e)** $|-58| = 58$; op(–58) = +58

b) $|+15| = 15$; op(+15) = –15 **d)** $|0| = 0$; op(0) = 0 **f)** $|-100| = 100$; op(–100) = +100

40. Calcula el opuesto del opuesto de cada uno de los siguientes números. ¿Qué observas?

a) −8 **b) +5** **c) +26** **d) −30**

a) $\text{op}(\text{op}(-8)) = -8$ **b)** $\text{op}(\text{op}(+5)) = +5$ **c)** $\text{op}(\text{op}(+26)) = +26$ **d)** $\text{op}(\text{op}(-30)) = -30$

En todos los casos, al calcular el opuesto del opuesto se obtiene el número inicial.

41. Actividad resuelta

42. Ordena de mayor a menor los números −12, +54, −36, −21, −25 y 13, sin representarlos en la recta.

$-36 < -25 < -21 < -12 < 13 < +54$

43. Escribe todos los números enteros que cumplen $|a| < 5$.

–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 y 4

44. Es posible encontrar un número que cumpla $|a| < -3$? ¿Por qué?

No es posible, el valor absoluto de cualquier número es mayor o igual que cero.

45. Encuentra dos números que estén a 10 unidades de distancia y que no sean opuestos. ¿A qué distancia están entre sí los opuestos de esos números?

Por ejemplo, 6 y –4. Sus opuestos, –6 y 4, también están a 10 unidades de distancia.

46. Escribe tres números enteros que cumplan la condición pedida.

a) Están entre −5 y su valor absoluto.

b) Están entre 4 y su opuesto.

c) Son mayores que |−6|.

a) –4, 0, 2

b) –1, 0, 3

c) 7, 8, 9

47. Realiza las siguientes sumas.

a) $(+15)+(+4)$ **c)** $(-38)+(+13)$ **e)** $(-11)+(-28)+(+75)$

b) $(+22)+(-15)$ **d)** $(+16)+(+17)+(+2)$ **f)** $(-48)+(+53)+(+65)$

a) $(+15)+(+4) = +19$ **c)** $(-38)+(+13) = -25$ **e)** $(-11)+(-28)+(+75) = +36$

b) $(+22)+(-15) = +7$ **d)** $(+16)+(+17)+(+2) = +35$ **f)** $(-48)+(+53)+(+65) = +70$

48. Resuelve las siguientes sumas de dos formas distintas.

a) $(+15)+(-14)+(+19)+(-6)$ **b)** $(-32)+(+26)+(-18)$ **c)** $(+64)+(-101)+(-80)+(+49)$

a) $(+15)+(-14)+(+19)+(-6)=(+1)+(+19)+(-6)=(+20)+(-6)=+14$

$(+15)+(-14)+(+19)+(-6)=(+34)+(-20)=+14$

b) $(-32)+(+26)+(-18)=(-6)+(-18)=-24$

$(-32)+(+26)+(-18)=(+26)+(-50)=-24$

c) $(+64)+(-101)+(-80)+(+49)=(-37)+(-80)+(+49)=(-117)+(+49)=-68$

$(+64)+(-101)+(-80)+(+49)=(+113)+(-181)=-68$

49. Realiza las siguientes restas.

a) $(+25)-(+14)$ **c)** $(+31)-(+25)$ **e)** $(-84)-(+32)$

b) $(-13)-(-9)$ **d)** $(+12)-(-35)$ **f)** $(-200)-(-147)$

a) $(+25)-(+14)=+11$ **c)** $(+31)-(+25)=+6$ **e)** $(-84)-(+32)=-116$

b) $(-13)-(-9)=-4$ **d)** $(+12)-(-35)=+47$ **f)** $(-200)-(-147)=-53$

50. Halla el resultado de las operaciones eliminando primero los paréntesis.

a) $(-8)-(+17)-(-34)+(-99)$ **c)** $(-62)-(-9)+(-44)-(-21)$

b) $(-6)-(+42)+(+29)-(-84)$ **d)** $(-200)+(+500)-(+100)+(-400)$

a) $(-8)-(+17)-(-34)+(-99)=-8-17+34-99=-90$

b) $(-6)-(+42)+(+29)-(-84)=-6-42+29+84=65$

c) $(-62)-(-9)+(-44)-(-21)=-62+9-44+21=-76$

d) $(-200)+(+500)-(+100)+(-400)=-200+500-100-400=-200$

51. Calcula las operaciones.

a) $-4+8-(27-35)-60$ **c)** $(120-45)-(120+45)-(45-120)$

b) $12-(-5-33)+(-4+89)-(-30)$ **d)** $(12-88)-(35-47-102)+6$

a) $-4+8-(27-35)-60=-4+8-27+35-60=43-91=-48$

b) $12-(-5-33)+(-4+89)-(-30)=12+5+33-4+89+30=169-4=165$

c) $(120-45)-(120+45)-(45-120)=120-45-120-45-45+120=120-135=-15$

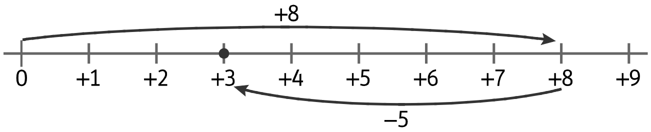
d) $(12-88)-(35-47-102)+6=12-88-35+47+102+6=167-123=44$

52. Actividad resuelta.

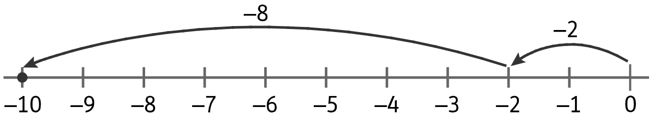
53. Efectúa gráficamente estas sumas y restas.

a) $(+8)+(-5)$ **b)** $(-2)+(-8)$ **c)** $(-12)-(-9)$ **d)** $(-7)-(-11)$

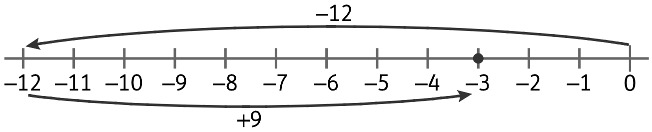
a) $(+8)+(-5)=+3$



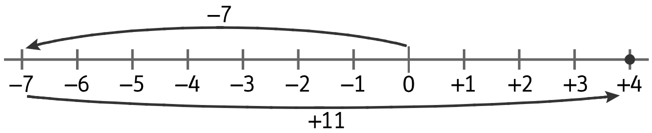
b) $(-2)+(-8)=-10$



c) $(-12)-(-9)=-3$



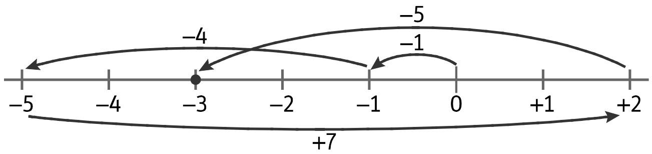
d) $(-7)-(-11)=+4$



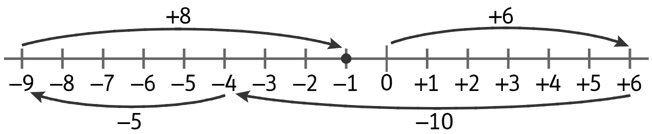
54. Resuelve gráficamente las operaciones y comprueba los resultados obtenidos.

a) $(-1)+(-4)-(-7)+(-5)$ **b)** $(+6)-(+10)+(-5)-(-8)$ **c)** $(+3)-(-5)+(-8)$

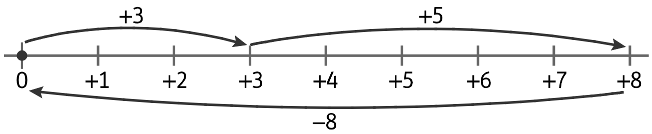
a) $(-1)+(-4)-(-7)+(-5)=-3$



b) $(+6)-(+10)+(-5)-(-8)=-1$



c) $(+3)-(-5)+(-8)=0$



55. A lo largo de una mañana el precio de una acción en la Bolsa subió 3 CENT, bajó 6, bajó 15, subió 8 y subió 1. Al final del día, ¿había subido o bajado de precio respecto del día anterior?

$+3-6-15+8+1=12-21=-9$

El precio de la acción bajó 9 CENT.

56. Actividad interactiva

57. Realiza las siguientes multiplicaciones.

a) $(+12)\cdot(-4)$ **c)** $(-25)\cdot(-7)$ **e)** $(+14)\cdot(-3)\cdot(+7)$

b) $(-9)\cdot(+5)$ **d)** $(-11)\cdot(-12)\cdot(-4)$ **f)** $(+4)\cdot(-8)\cdot(+20)\cdot(-10)$

a) $(+12)\cdot(-4)=-48$ **c)** $(-25)\cdot(-7)=+175$ **e)** $(+14)\cdot(-3)\cdot(+7)=-294$

b) $(-9)\cdot(+5)=-45$ **d)** $(-11)\cdot(-12)\cdot(-4)=-528$ **f)** $(+4)\cdot(-8)\cdot(+20)\cdot(-10)=+6400$

58. Indica, sin realizar cálculos, el signo que tiene el resultado de cada operación.

a) $3\cdot(-4)\cdot 5\cdot(-6)\cdot 7\cdot(-8)$

b) $(-23)\cdot(-12)\cdot 4\cdot 10\cdot 7\cdot(-1)\cdot(-9)$

c) $(-11)\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot(-6)\cdot 13\cdot(-8)\cdot(-5)\cdot(-12)$

a) Negativo **b)** Positivo **c)** Negativo

59. Realiza las siguientes divisiones.

a) $(+39):(-3)$ **c)** $(-195):(+13)$ **e)** $(+399):(-19)$

b) $(-64):(-16)$ **d)** $(-245):(+35)$ **f)** $(+552):(-24)$

a) $(+39):(-3)=-13$ **c)** $(-195):(+13)=-15$ **e)** $(+399):(-19)=-21$

b) $(-64):(-16)=-4$ **d)** $(-245):(+35)=-7$ **f)** $(+552):(-24)=-23$

60. Actividad resuelta

61. Averigua el término que falta en cada igualdad.

a) $(-6)\cdot\bullet=72$ **d)** $(-2)\cdot\bullet\cdot(-2)=80$

b) $\bullet:(-13)=-169$ **e)** $\bullet:(-105)=1$

c) $(-114):(\bullet)=19$ **f)** $(-5)\cdot\bullet\cdot 11=110$

a) $(-6)\cdot(-12)=72$ **d)** $(-2)\cdot(+20)\cdot(-2)=80$

b) $(+2197):(-13)=-169$ **e)** $(-105):(-105)=1$

c) $(-114):(-6)=19$ **f)** $(-5)\cdot(-2)\cdot 11=110$

62. Realiza estas operaciones combinadas.

a) $(-8):(-2)\cdot(+3)\cdot(-4)$ **b)** $(-20)\cdot(+10):(-5):8$ **c)** $1000:(-10):(-10)\cdot(-3)$

a) $(-8):(-2)\cdot(+3)\cdot(-4) = 4\cdot 3\cdot(-4) = -48$

b) $(-20)\cdot(+10):(-5):8 = (-200):(-5):8 = 40:8 = +5$

c) $1000:(-10):(-10)\cdot(-3) = -100:(-10)\cdot(-3) = 10\cdot(-3) = -30$

63. Actividad resuelta.

64. Obtén los divisores enteros de estos números.

a) 15 **b)** – 31 **c)** 81 **d)** – 21

a) 1, 3, 5, 15, –1, –3, –5, –15

b) 1, 31, –1, –31

c) 1, 3, 9, 27, 81, –1, –3, –9, –27, –81

d) 1, 3, 7, 21, –1, –3, –7, –21

65. Dos arqueólogos van a descender hasta los 2752 metros en una cueva, recorriendo 344 metros cada media hora. ¿Cuántos metros recorrerán en hora y media? Expresa el resultado como número entero.

Una hora y media son tres medias horas. Recorren $3\cdot(-344) = -1032$ metros.

66. Realiza las siguientes operaciones.

a) $7+13\cdot(-6)$

b) $(-10)+8:(-2)$

c) $60-(-16):(-4)$

d) $-(-5)-(-9)\cdot(-4)$

e) $42:(-2)\cdot 3-4$

f) $100-99\cdot(-4)$

g) $6-6:6+6$

h) $(-9)+(-2)\cdot(-4)$

a) $7+13\cdot(-6) = 7-78 = -71$

b) $(-10)+8:(-2) = -10-4 = -14$

c) $60-(-16):(-4) = 60-4 = 56$

d) $-(-5)-(-9)\cdot(-4) = 5-36 = -31$

e) $42:(-2)\cdot 3-4 = -21\cdot 3-4 = -63-4 = -67$

f) $100-99\cdot(-4) = 100+396 = 496$

g) $6-6:6+6 = 6-1+6 = 11$

h) $(-9)+(-2)\cdot(-4) = -9+8 = -1$

67. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(-5)+(-5)\cdot 4-(-2)\cdot(-9)$

b) $6-4\cdot(-20)+20:(-5)$

c) $-(-8)\cdot(-11)+(-3)\cdot(-15)-6\cdot(-20)$

d) $200-(-45)\cdot(-3):(-5)+(-12)\cdot 8$

e) $150:(-15):(-5)-20\cdot(-18)+300\cdot(-1)$

f) $67-96:(-12)+43-5\cdot(-17)$

a) $(-5)+(-5)\cdot 4-(-2)\cdot(-9) = -5-20-18 = -43$

b) $6-4\cdot(-20)+20:(-5) = 6+80-4 = 82$

c) $-(-8)\cdot(-11)+(-3)\cdot(-15)-6\cdot(-20) = -88+45+120 = 77$

d) $200-(-45)\cdot(-3):(-5)+(-12)\cdot 8 = 200-135:(-5)-96 = 200+43-96 = 147$

e) $150:(-15):(-5)-20\cdot(-18)+300\cdot(-1) = -10:(-5)+360-300 = 2+360-300 = 62$

f) $67-96:(-12)+43-5\cdot(-17) = 67+8+43+85 = 203$

68. Halla el resultado de las siguientes operaciones.

a) $\mathbf{5-4\cdot[12+3\cdot(-6)]}$

b) $\mathbf{(-8+3\cdot 7)-[44-(-6)+5\cdot(-9)]}$

c) $\mathbf{18:(-2):3-(-5)\cdot(-6):2-[(-7)-(-7)-9]}$

d) $\mathbf{(240:(-2)):(9-(-3))-[-148-(-11)\cdot 12]}$

e) $\mathbf{(-9-3\cdot 2)-[34-(-3)\cdot(-12)]-(-1)\cdot(-7)}$

f) $\mathbf{[(-14):7-(-25)]-[5-(-6)\cdot(-8)]-[-(-7)]}$

a) $5-4\cdot[12+3\cdot(-6)]=5-4\cdot[12-18]=5-4\cdot(-6)=5+24=29$

b) $(-8+3\cdot 7)-[44-(-6)+5\cdot(-9)]=(-8+21)-[44+6-45]=13-5=8$

c) $18:(-2):3-(-5)\cdot(-6):2-[(-7)-(-7)-9]=-3-15-[-7+7-9]=-18+9=-9$

d) $(240:(-2)):(9-(-3))-[-148-(-11)\cdot 12]=(-120):12-[-148+132]=-10+16=6$

e) $(-9-3\cdot 2)-[34-(-3)\cdot(-12)]-(-1)\cdot(-7)=(-9-6)-[34-36]-7=-15-(-2)-7=-15+2-7=-20$

f) $[(-14):7-(-25)]-[5-(-6)\cdot(-8)]-[-(-7)]=[-2+25]-[5-48]-7=23-(-43)-7=23+43-7=59$

69. Comprueba si las siguientes operaciones son correctas. Corrige las erróneas en tu cuaderno.

a) $\mathbf{(-8)\cdot 7-3\cdot(-2)=-62}$

b) $\mathbf{18+12:[-(-8)+3\cdot(-2)]=24}$

c) $\mathbf{12-3\cdot 2+6=12}$

d) $\mathbf{(-40):[(-2)\cdot(5-3\cdot 2)]=20}$

e) $\mathbf{60:20\cdot 3-2\cdot(-7+4)=15}$

f) $\mathbf{5-4\cdot[7+(-3)\cdot 2+2]=-7}$

a) $(-8)\cdot 7-3\cdot(-2)=-56+6=-50\rightarrow$ Errónea

b) $18+12:[-(-8)+3\cdot(-2)]=18+12:[8-6]=18+12:2=18+6=24\rightarrow$ Correcta

c) $12-3\cdot 2+6=12-6+6=12\rightarrow$ Correcta

d) $(-40):[(-2)\cdot(5-3\cdot 2)]=-40:[-2\cdot(5-6)]=-40:[-2\cdot(-1)]=-40:2=-20\rightarrow$ Errónea

e) $60:20\cdot 3-2\cdot(-7+4)=3\cdot 3-2\cdot(-3)=9+6=15\rightarrow$ Correcta

f) $5-4\cdot[7+(-3)\cdot 2+2]=5-4\cdot[7-6+2]=5-4\cdot 3=5-12=-7\rightarrow$ Correcta

70. Coloca los paréntesis que sean necesarios para que las igualdades sean correctas.

a) $\mathbf{10-8\cdot 4:2=-4}$

b) $\mathbf{10-8\cdot 4:2=-11}$

c) $\mathbf{10-8\cdot 4:2=-6}$

d) $\mathbf{24-15\cdot 4-10=-54}$

e) $\mathbf{24-15\cdot 4-10=114}$

f) $\mathbf{24-15\cdot 4-10=-46}$

a) $(10-8)\cdot(4:2)=4$

b) $(10-8\cdot 4):2=-11$

c) $10-8\cdot(4:2)=-6$

d) $(24-15)\cdot(4-10)=-54$

e) $24-15\cdot(4-10)=114$

f) No son necesarios.

71. Resuelve las operaciones de dos maneras distintas.

a) $8\cdot[(-5)-(-9)+(+6)-10]$ **b)** $-10\cdot[14-13+12-11+10]$ **c)** $-30\cdot[6-(-15)+(-9)-(-24)]$

a) $8\cdot[(-5)-(-9)+(+6)-10]=8\cdot(-5+9+6-10)=8\cdot 0=0$

$8\cdot[(-5)-(-9)+(+6)-10]=-40+72+48-80=0$

b) $-10\cdot[14-13+12-11+10]=-10\cdot 12=-120$

$-10\cdot[14-13+12-11+10]=-140+130-120+110-100=-120$

c) $-30\cdot[6-(-15)+(-9)-(-24)]=-30\cdot(6+15-9+24)=-30\cdot 36=-1080$

$-30\cdot[6-(-15)+(-9)-(-24)]=-180-450+270-720=-1080$

72. Copia en tu cuaderno y completa.

a) $(-8)\cdot[\bullet-5]=(-72)-(-40)=\bullet$

b) $15\cdot[3-(\bullet)]=\bullet+30=\bullet$

c) $(\bullet)\cdot[-6+(\bullet)]=54-27=\bullet$

d) $[\bullet+\bullet]\cdot(-11)=121+\bullet=-55$

e) $[-23+\bullet-\bullet]\cdot(-2)=\bullet+24-200=\bullet$

a) $(-8)\cdot[9-5]=(-72)-(-40)=-32$

b) $15\cdot[3-(-2)]=45+30=75$

c) $(-9)\cdot[-6+(+3)]=54-27=27$

d) $[-11+16]\cdot(-11)=121+(-176)=-55$

e) $[-23+(-12)-(-100)]\cdot(-2)=46+24-200=-130$

73. Resuelve las operaciones sacando factor común.

a) $25\cdot 16-25\cdot(-9)$ **c)** $41\cdot 93-41\cdot 18+41\cdot(-25)$

b) $13\cdot 6-13\cdot 7+13\cdot 8-13\cdot 9$ **d)** $360-230+70-110$

a) $25\cdot 16-25\cdot(-9)=25\cdot[16-(-9)]=25\cdot 25=625$

b) $13\cdot 6-13\cdot 7+13\cdot 8-13\cdot 9=13\cdot(6-7+8-9)=-26$

c) $41\cdot 93-41\cdot 18+41\cdot(-25)=41\cdot[93-18+(-25)]=41\cdot 50=2050$

d) $360-230+70-110=10\cdot(36-23+7-11)=10\cdot 9=90$

74. El producto de un número entero por la suma de tres enteros negativos es 42. Halla los valores que puede tomar el número y los correspondientes de la suma.

Como la suma de los tres enteros es negativa, el primer número también debe serlo para que el producto sea positivo. Por tanto, el número debe ser un divisor entero negativo de 42.

Los divisores enteros negativos de 42 son −1, −2, −3, −6, −7, −14, −21 y −42.

Como el segundo factor es la suma de tres enteros negativos, no puede ser ni –1 ni –2.

Los productos posibles son: $(-1)\cdot(-42)$, $(-2)\cdot(-21)$, $(-3)\cdot(-14)$, $(-6)\cdot(-7)$, $(-7)\cdot(-6)$, $(-14)\cdot(-3)$

75. Extrae el mayor factor común posible y resuelve.

a) $250-550+(-20)-(-80)$ **b)** $36-60+144-(-120)$ **c)** $42-(-24)-(+70)-(-112)$

Busca en cada caso dos factores comunes más y realiza cada operación extrayéndolos.

a) $250-550+(-20)-(-80)=10\cdot(25-55-2+8)=10\cdot(-24)=-240$

$250-550+(-20)-(-80)=5\cdot(50-110-4+16)=5\cdot(-48)=-240$

$250-550+(-20)-(-80)=2\cdot(125-275-10+40)=2\cdot(-120)=-240$

b) $36-60+144-(-120)=12\cdot(3-5+12+10)=12\cdot 20=240$

$36-60+144-(-120)=6\cdot(6-10+24+20)=6\cdot 40=240$

$36-60+144-(-120)=2\cdot(18-30+72+60)=2\cdot 120=240$

c) $42-(-24)-(+70)-(-112)=2\cdot(21+12-35+56)=2\cdot 54=108$

$42-(-24)-(+70)-(-112)=-2\cdot(-21-12+35-56)=-2\cdot(-54)=108$

$42-(-24)-(+70)-(-112)=-1\cdot(-42-24+70-112)=-1\cdot(-108)=108$

76. Rosa ha comprado 15 lotes de 6 zumos para una excursión, de los que ha dado 6 a 2.° ESO A y 5 a 2.° ESO B. Tiene que volver a la tienda a comprar otros 5 lotes, para poder dar a otros dos cursos.

Si tiene que dar zumos a 50 alumnos más, ¿Cuántos le han sobrado? Calcúlalo de dos formas distintas.

- Primera forma: Contando los lotes que le quedan después de repartir a 2.º ESO A y 2.º ESO B y de comprar 5 lotes más. Se calculan los zumos que tiene y se restan los 50 que tiene que dar.

  $(15-6-5+5)\cdot 6-50=54-50=4$ zumos

- Segunda forma: En lugar de contar lotes, calculando directamente los envases de zumo.

  $15\cdot 6-6\cdot 6-5\cdot 6+5\cdot 6-50=90-36-30+30-50=4$ zumos

77. Escribe en cada caso una operación que cumpla las condiciones pedidas.

a) Aparece una operación cada vez, hay cuatro números distintos y el resultado es −8.

b) Aparecen tres operaciones distintas y al menos dos paréntesis, y el resultado es 20.

a) Posible respuesta: $4\cdot 3+1-5$

b) Posible respuesta: $(5-3)\cdot(8+2)$

78. Escribe cuatro múltiplos comprendidos entre 200 y 1500 de cada uno de los siguientes números.

a) 15 **c) 43** **e) 101**

b) 29 **d) 65** **f) 212**

a) 225, 300, 315, 1350 **c)** 430, 860, 903, 1290 **e)** 202, 303, 404, 505

b) 290, 580, 870, 1160 **d)** 325, 650, 975, 1300 **f)** 424, 636, 848, 1060

79. Encuentra el primer múltiplo de tres cifras de cada uno de los siguientes números.

a) 9 **c) 35** **e) 42**

b) 23 **d) 11** **f) 2**

a) 108 **c)** 105 **e)** 126

b) 115 **d)** 110 **f)** 100

80. Si un número es múltiplo de 8, ¿será también múltiplo de 4? ¿Y de 16?

Será múltiplo de 4, pero no es necesariamente múltiplo de 16. Por ejemplo, 24 es múltiplo de 8 y no de 16.

81. Encuentra todos los divisores de cada uno de los siguientes números.

a) 22 **c) 48** **e) 102**

b) 31 **d) 63** **f) 116**

a) 1, 2, 11, 22 **c)** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 **e)** 1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102

b) 1, 31 **d)** 1, 3, 7, 9, 21, 63 **f)** 1, 2, 4, 29, 58, 116

82. Escribe tres divisores de cada número.

a) 216 **c) 320** **e) 500**

b) 415 **d) 1221** **f) 221**

a) 2, 3, 6 **c)** 2, 5, 10 **e)** 2, 5, 10

b) 5, 83, 415 **d)** 3, 11, 33 **f)** 13, 17, 221

83. Escribe cinco números que solo tengan dos divisores.

Cualquier número primo tiene solo dos divisores, 1 y él mismo. Por ejemplo: 2, 3, 5, 7 y 11.

84. Completa la tabla en tu cuaderno, utilizando los criterios de divisibilidad.

Número	Entre	¿Es divisible?
324	3	●●●
641	6	●●●
875	25	●●●
7912	4	●●●
82 962	11	●●●

Número	Entre	¿Es divisible?
324	3	Sí $(3+2+4=9)$
641	6	No (no es divisible entre 2)
875	25	Sí (acaba en 75, múltiplo de 25)
7912	4	Sí (12 es múltiplo de 4)
82 962	11	Sí $(8+9+2-2-6=11)$

85. Comprueba si los siguientes números son divisibles entre 6 sin hacer la división.

a) 465 **d) 1182** **g) 32 244**

b) 326 **e) 2348** **h) 15 146**

c) 552 **f) 5124** **i) 42 000**

a) No, no es divisible entre 2. **d)** Sí. **g)** Sí.

b) No, no es divisible entre 3. **e)** No, no es divisible entre 3. **h)** No, no es divisible entre 3.

c) Sí. **f)** Sí. **i)** Sí.

86. Averigua si los siguientes números son primos o compuestos.

a) **59** **d)** **91** **g)** **263**

b) **83** **e)** **117** **h)** **473**

c) **33** **f)** **71** **i)** **217**

a) Primo **d)** Compuesto **g)** Primo

b) Primo **e)** Compuesto **h)** Compuesto

c) Compuesto **f)** Primo **i)** Compuesto

87. Actividad resuelta.

88. Encuentra un divisor de los siguientes números separando sus cifras.

a) **474 747** **b)** **427** **c)9331** **d)** **487 487**

a) $474\,747 = 47 \cdot 10000 + 47 \cdot 100 + 47 = 47 \cdot 10101$

b) $427 = 42 \cdot 10 + 7 = 6 \cdot 7 \cdot 10 + 7 = 60 \cdot 7 + 7 = 61 \cdot 7$

c) $9331 = 93 \cdot 100 + 31 = 31 \cdot 300 + 31 = 31 \cdot 301$

d) $487487 = 48 \cdot 10000 + 74 \cdot 100 + 87 = 480000 + 7400 + 487 = 487000 + 487 = 487 \cdot 1001$

89. Escribe un número de dos cifras. A continuación, vuelve a escribirlo, de forma que quede un número de cuatro cifras. ¿Es posible que sea primo?

Por ejemplo: $43 \Rightarrow 4343 = 4300 + 43 = 43 \cdot 100 + 43 \cdot 1 = 43 \cdot 101$

No puede ser primo, ya que es igual al número inicial por 101.

90. Halla en cada caso los posibles valores de *A* para que se cumpla la condición pedida.

a) **285*A*4 es divisible entre 2 y 3.** **c)** **4960*A* es divisible entre 4 y 9.**

b) ***A*9679 es múltiplo de 11.** **d)** **8567*A* es divisible entre 5 y 3, pero no por 2.**

a) Es divisible entre 2 porque acaba en par. Para que $2+8+5+4+A$ sea múltiplo de 3, por tanto *A* = 2, 5, 8.

b) La diferencia entre $(A+6+9)-(7+9)$ debe ser cero o múltiplo de 11, lo que solo se cumple si *A*=1.

c) Como $4+9+6=19$, si se suma 8, se obtiene un múltiplo de 9, 49608, que también es múltiplo de 4. *A*=8.

d) Para que sea múltiplo de 5, *A*=0 o *A*=5. Pero, como no puede ser múltiplo de 2, *A*=0 queda descartado. Comprobamos si 85675 es divisible entre 3: $8+5+6+7+5=31$, que no es divisible entre 3. Por tanto, ningún valor de *A* cumple las condiciones pedidas.

91. Escribe la descomposición en factores primos de los siguientes números.

a) **128** **d)** **98** **g)** **396**

b) **215** **e)** **540** **h)** **1000**

c) **725** **f)** **444** **i)** **3528**

a) 2^7 **d)** $7^2 \cdot 2$ **g)** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$

b) $5 \cdot 43$ **e)** $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$ **h)** $2^3 \cdot 5^3$

c) $5^2 \cdot 29$ **f)** $2^2 \cdot 3 \cdot 37$ **i)** $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$

92. Factoriza los números comprendidos entre 640 y 650, e indica cuáles de ellos son primos.

$640 = 2^7 \cdot 5$ | 643 es primo | $646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$ | $649 = 11 \cdot 59$

641 es primo | $644 = 2^2 \cdot 7 \cdot 23$ | 647 es primo | $650 = 2 \cdot 5^2 \cdot 13$

$642 = 2 \cdot 3 \cdot 107$ | $645 = 3 \cdot 5 \cdot 43$ | $648 = 2^3 \cdot 3^4$

93. Calcula el número que aparece factorizado.

a) $2^3 \cdot 3^2$ **b)** $5 \cdot 7^2$ **c)** $2 \cdot 3^2 \cdot 5$ **d)** $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

a) $2^3 \cdot 3^2 = 72$ **b)** $5 \cdot 7^2 = 245$ **c)** $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ **d)** $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600$

94. Actividad resuelta

95. Factoriza los siguientes números descomponiéndolos en productos más sencillos.

a) 42000 **c)** 81 000 **e)** 284

b) 630 **d)** 1111 **f)** 7350

a) $42000 = 42 \cdot 1000 = 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$

b) $630 = 63 \cdot 10 = 9 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

c) $81000 = 81 \cdot 1000 = 9 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^3$

d) $1111 = 1100 + 11 = 11 \cdot (100 + 1) = 11 \cdot 101$

e) $284 = 280 + 4 = 4 \cdot 70 + 4 \cdot 1 = 4 \cdot 71$

f) $7350 = 735 \cdot 10 = (7 \cdot 100 + 7 \cdot 5) \cdot 2 \cdot 5 = 7 \cdot 105 \cdot 2 \cdot 5 = 7 \cdot (5 \cdot 20 + 5) \cdot 2 \cdot 5 = 7 \cdot 21 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

96. Escribe todos los divisores del número 144 a partir de su descomposición factorial.

$144 = 2^4 \cdot 3^2$. Divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

97. Indica el número de divisores de los siguientes números a partir de su descomposición en factores primos. Calcúlalos.

a) 240 **b)** 405 **c)** 2310 **d)** 6125

a) $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ tiene $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$ divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 30, 40, 48, 60, 80, 120, 240.

b) $405 = 3^4 \cdot 5$ tiene $5 \cdot 2 = 10$ divisores: 1, 3, 5, 9, 15, 27, 45, 81, 135, 405.

c) $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ tiene $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ divisores: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 21, 22, 30, 33, 35, 42, 55, 66, 70, 77, 105, 110, 154, 165, 210, 231, 330, 385, 462, 770, 1155, 2310

d) $6125 = 5^3 \cdot 7^2$ tiene $4 \cdot 3 = 12$ divisores: 1, 5, 7, 25, 35, 49, 125, 175, 245, 875, 1225, 6125.

98. ¿Es posible encontrar un número que tenga exactamente 7 divisores? ¿Y que tenga 7 divisores y solo dos factores primos?

Si, es posible encontrar un número con 7 divisores, es cualquiera cuya factorización tenga un solo factor primo de exponente 6.

No es posible encontrar un número con 7 divisores y solo dos factores primos, ya que si el número es $a^m \cdot b^n$, debería cumplirse que $(m+1)(n+1) = 7$. Como 7 es primo, no es posible.

99. Calcula el máximo común divisor de los siguientes números a partir de su descomposición en factores primos.

a) 81 y 99 | **b) 120 y 320** | **c) 112 y 121** | **d) 40, 64 y 90** | **e) 72, 105 y 400** | **f) 228, 612 y 900**

a) $81 = 3^4$ y $99 = 3^2 \cdot 11 \Rightarrow$ m.c.d.$(81, 99) = 3^2 = 9$

b) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $320 = 2^6 \cdot 5 \Rightarrow$ m.c.d.$(120, 320) = 2^3 \cdot 5 = 40$

c) $112 = 2^4 \cdot 7$ y $121 = 11^2 \Rightarrow$ m.c.d.$(112, 121) = 1$

d) $40 = 2^3 \cdot 5$, $64 = 2^6$ y $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \Rightarrow$ m.c.d$(40,\ 64,\ 90) = 2$

e) $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ y $400 = 2^4 \cdot 5^2 \Rightarrow$ m.c.d.$(72,\ 105,\ 400) = 1$

f) $228 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19$, $612 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$ y $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \Rightarrow$ m.c.d.$(228,\ 612,\ 900) = 2^2 \cdot 3 = 12$

100. Encuentra el mínimo común múltiplo de los siguientes números a partir de su descomposición factorial.

a) 21 y 28 | **b) 4, 9 y 12** | **c) 15 y 16** | **d) 4, 5 y 9** | **e) 45 y 180** | **f) 240 y 36** | **g) 28, 48 y 60** | **h) 33, 44 y 132**

a) $21 = 3 \cdot 7$ y $28 = 2^2 \cdot 7 \Rightarrow$ m.c.m.$(21,\ 28) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

b) $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ y $12 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow$ m.c.m.$(4,\ 9,\ 12) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

c) $15 = 3 \cdot 5$ y $16 = 2^4 \Rightarrow$ m.c.m$(15,\ 16) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

d) $4 = 2^2$, 5 y $9 = 3^2 \Rightarrow$ m.c.m.$(4,\ 5,\ 9) = 2^2 \cdot 5 \cdot 3^2 = 180$

e) $45 = 3^2 \cdot 5$ y $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \Rightarrow$ m.c.m.$(45, 180) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

f) $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ y $36 = 2^2 \cdot 3^2 \Rightarrow$ m.c.m.$(240,\ 36) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

g) $28 = 2^2 \cdot 7$, $48 = 2^4 \cdot 3$ y $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow$ m.c.m.$(28,\ 48,\ 60) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1680$

h) $33 = 3 \cdot 11$, $44 = 2^2 \cdot 11$ y $132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \Rightarrow$ m.c.m.$(33,\ 44,\ 132) = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$

101. Comprueba si los siguientes números son primos entre sí.

a) 32 y 81 | **b) 63 y 108** | **c) 75 y 512** | **d) 121 y 1045** | **e) 78 y 168** | **f) 1002 y 1230**

a) Sí. $32 = 2^5$ y $81 = 3^4$

b) No, son múltiplos de 3

c) Sí. $75 = 3 \cdot 5^2$ y $512 = 2^9$

d) No, son múltiplos de 11.

e) No, son múltiplos de 2.

f) No, son múltiplos de 2.

102. Calcula el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor en cada caso.

a) $\mathbf{2^4 \cdot 3^2}$ **y** $\mathbf{3^4}$ | **b)** $\mathbf{2^2 \cdot 3}$ **y** $\mathbf{2^3 \cdot 5}$ | **c)** $\mathbf{2^3}$ **y** $\mathbf{3^2}$ | **d)** $\mathbf{2^2 \cdot 5,\ 2 \cdot 5^2}$ **y** $\mathbf{3^2 \cdot 5}$

a) m.c.d.$(2^4 \cdot 3^2, 3^2) = 3^2 = 9$; m.c.m.$(2^4 \cdot 3^2, 3^4) = 2^4 \cdot 3^4 = 1296$

b) m.c.d.$(2^2 \cdot 3,\ 2^3 \cdot 5) = 2^2 = 4$; m.c.m.$(2^2 \cdot 3, 2^3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

c) m.c.d.$(2^3,\ 3^2) = 1$; m.c.m.$(2^3,\ 3^2) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$

d) m.c.d.$(2^2 \cdot 5, 2 \cdot 5^2, 3^2 \cdot 5) = 5$; m.c.m.$(2^2 \cdot 5, 2 \cdot 5^2, 3^2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$

103. La descomposición en factores primos de un número es la siguiente.

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

Encuentra en cada caso otro número de forma que se cumpla la condición pedida.

a) m.c.d. = 42 y sea mayor que 60.

b) m.c.m. = $3^2 \cdot 7$

c) m.c.d. = 1

a) Por ejemplo, $2 \cdot 3 \cdot 7^2 = 42 \cdot 7 = 294$

b) Es imposible, en el m.c.m. deben aparecer al menos los factores 2, 3, 5 y 7.

c) Cualquier número primo distinto de 2, 3, 5 y 7. Por ejemplo, 11.

104. Escribe tres números formados por tres cifras que sean primos entre sí.

Los números no deben tener factores comunes. Por ejemplo, $512 = 2^9$, $243 = 3^5$ y $121 = 11^2$.

105. Encuentra dos números cuyo máximo común divisor sea 14 y cuyo mínimo común múltiplo sea 84. ¿Puedes encontrar más de una solución?

Como $84 = 14 \cdot 6 = 14 \cdot 2 \cdot 3 = 28 \cdot 3 = 42 \cdot 2$, las dos soluciones posibles son: 14, 84 y 28, 42.

106. El producto del máximo común divisor por el mínimo común múltiplo de dos números es 54 432, y uno de los números es 216. ¿Cuál es el otro?

Se aplica la propiedad: $\text{m.c.d.}(a, b) \cdot \text{m.c.m.}(a, b) = a \cdot b$.

$\text{m.c.d.}(a, b) \cdot \text{m.c.m.}(a, b) = 54\,432 = 216 \cdot b \Rightarrow 54\,432 : 216 = 252$. El otro número es 252.

107. El máximo común divisor de dos números es 30 y su producto es 18 000, ¿cuál es el mínimo común múltiplo de ambos números?

Se aplica la propiedad: $\text{m.c.d.}(a, b) \cdot \text{m.c.m.}(a, b) = a \cdot b$, entonces, $30 \cdot \text{m.c.m.}(a, b) = 18\,000 \Rightarrow 18\,000 : 30 = 600$

El mínimo común múltiplo es 600.

108. Expresa estas expresiones usando números enteros.

a) Lorena ha ganado 3500 € en la lotería.

b) La temperatura mínima fue de 12 ºC bajo cero.

c) El alpinista ha escalado 4756 m.

d) El barco hundido se encontraba a 7450 m de profundidad.

a) +3500 **b)** −12 **c)** +4756 **d)** −7450

109. Describe una situación cotidiana a la que se pueda asociar cada número entero.

a) −5 **b) −532** **c) +37** **d) +1212**

a) El termómetro marca 5 grados bajo cero.

b) El submarino está a 532 m de profundidad.

c) Una cometa vuela a una altura de 37 m.

d) Han ingresado en el banco 1212 €.

110. Dados los siguientes números:

−7	**−4**	**1**	**−3**
9	**11**	**−13**	

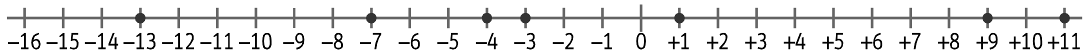
a) Escribe el valor absoluto de cada uno.

b) Representa cada número en la recta y ordénalos de mayor a menor.

c) Representa los opuestos en la recta y ordénalos de menor a mayor.

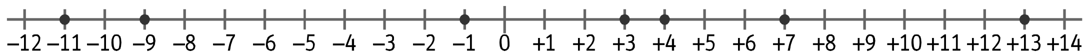
a) $|-7|=7$ $\quad |-4|=4$ $\quad |1|=1$ $\quad |-3|=3$ $\quad |9|=9$ $\quad |11|=1$ $\quad |-13|=13$

b)



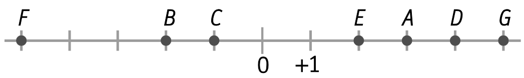
11 > 9 > 1 > −3 > −4 > −7 > −13

c)



−11 < −9 < −1 < +3 < +4 < +7 < +13

111. Observa la recta numérica y escribe el valor absoluto y el opuesto de los números que faltan.



$A=+3,\ \text{op}(A)=-3,\ |A|=3$

$B=-2,\ \text{op}(B)=2,\ |B|=2$

$C=-1,\ \text{op}(C)=+1,\ |C|=1$

$D=+4,\ \text{op}(D)=-4,\ |D|=4$

$E=+2,\ \text{op}(E)=-2,\ |E|=2$

$F=-5,\ \text{op}(F)=+5,\ |F|=5$

$G=+5,\ \text{op}(G)=-5,\ |G|=5$

112. Ordena los siguientes números sin representarlos en la recta:

−38	**−500**	**+37**	**−39**	**+10**	**+22**	**−499**

Calcula sus opuestos y ordénalos.

Números ordenados: –500 < –499 < –39 < –38 < +10 < +22 < +37

Opuestos: op(–38) = +38

op(–500) = +500

op(+37) = –37

op(–39) = +39

op(+10) = –10

op(+22) = –22

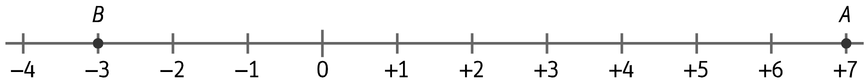
op(–499) = +499

Opuestos ordenados: +500 > +499 > +39 > +38 > –10 > –22 > –37

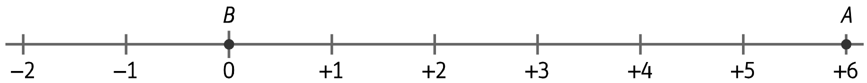
113. Representa los siguientes pares de números y halla la distancia entre ellos.

a) **7 y op(+3)** **b)** **op(−6) y 0** **c)** **op(−4) y op(+8)** **d)** **op(−3) y op(−10)**

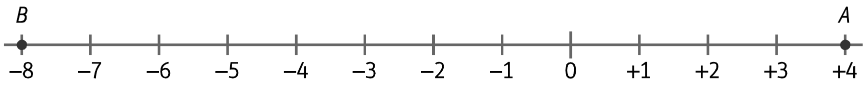
a) +7 y –3. Distancia: 10



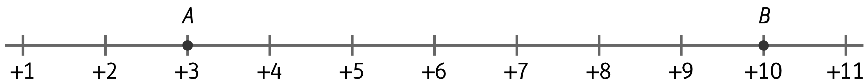
b) +6 y 0. Distancia: 6



c) +4 y –8. Distancia: 12



d) +3 y +10. Distancia: 7



114. Encuentra el número entero que cumple la condición pedida en cada caso.

a) **Está a la misma distancia de −4 y −22.**

b) **Es una unidad menor que el opuesto de 17.**

c) **Su valor absoluto es menor que el valor absoluto de −10, y el número es mayor que −10.**

a) –13

b) –18

c) Cualquier número entero entre –9 y 9

115. Realiza las siguientes sumas.

a) $(-\mathbf{24})+(-\mathbf{47})$

b) $(-\mathbf{102})+(-\mathbf{18})$

c) $(+\mathbf{405})+(+\mathbf{99})$

d) $(+\mathbf{63})+(-\mathbf{59})$

e) $(-\mathbf{820})+(+\mathbf{439})$

f) $(+\mathbf{552})+(-\mathbf{211})$

g) $(-\mathbf{228})+(-\mathbf{715})$

h) $(-\mathbf{1220})+(+\mathbf{78})$

a) $(-24)+(-47)=-71$

b) $(-102)+(-18)=-120$

c) $(+405)+(+99)=+504$

d) $(+63)+(-59)=+4$

e) $(-820)+(+439)=-381$

f) $(+552)+(-211)=+341$

g) $(-228)+(-715)=-943$

h) $(-1220)+(+78)=-1142$

116. Realiza las siguientes restas, escribiéndolas previamente como sumas de números enteros.

a) $(-98)-(-99)$

b) $(-46)-(+11)$

c) $(+108)-(-100)$

d) $(+331)-(+249)$

e) $(+12)-(+441)$

f) $(-222)-(+333)$

g) $(-504)-(-306)$

h) $(+301)-(-662)$

a) $(-98)-(-99)=(-98)+(+99)=+1$

b) $(-46)-(+11)=(-46)+(-11)=-57$

c) $(+108)-(-100)=(+108)+(+100)=+208$

d) $(+331)-(+249)=(+331)+(-249)=+82$

e) $(+12)-(+441)=(+12)+(-441)=-429$

f) $(-222)-(+333)=(-222)+(-333)=-555$

g) $(-504)-(-306)=(-504)+(+306)=-198$

h) $(+301)-(-662)=(+301)+(+662)=+963$

117. Realiza las siguientes operaciones eliminando primero los paréntesis y corchetes.

a) $(-12)+(-5)-(-7)+(-10)$

b) $(-25)+(-49)-(-88)+(-36)$

c) $(-3)-(-7)+(-9)-(-8)-(+25)-(-34)$

d) $(-33)-(28-45+49)$

e) $120-(16-5)-[38-(-6)]$

f) $-40-(-20-33+15)-(-80)+(13-91)$

g) $25+(41-25)-[16-(-25)-4]$

a) $(-12)+(-5)-(-7)+(-10)=-12-5+7-10=-20$

b) $(-25)+(-49)-(-88)+(-36)=-25-49+88-36=-22$

c) $(-3)-(-7)+(-9)-(-8)-(+25)-(-34)=-3+7-9+8-25+34=+12$

d) $(-33)-(28-45+49)=-33-28+45-49=-65$

e) $120-(16-5)-[38-(-6)]=120-16+5-38-6=+65$

f) $-40-(-20-33+15)-(-80)+(13-91)=-40+20+33-15+80+13-91=0$

g) $25+(41-25)-[16-(-25)-4]=25+41-25-16-25+4=+4$

118. Calcula.

a) $(-8)\cdot(+9)$

b) $(+14)\cdot(-5)$

c) $(-27)\cdot(-11)$

d) $(+18)\cdot(-2)\cdot(+5)$

e) $(-10)\cdot(-21)\cdot(-4)$

f) $(+9)\cdot(-2)\cdot(+30)\cdot(-12)$

a) $(-8)\cdot(+9)=-72$

b) $(+14)\cdot(-5)=-70$

c) $(-27)\cdot(-11)=+297$

d) $(+18)\cdot(-2)\cdot(+5)=-180$

e) $(-10)\cdot(-21)\cdot(-4)=-840$

f) $(+9)\cdot(-2)\cdot(+30)\cdot(-12)=+6480$

119. Calcula e indica el resto de cada división.

a) $(-32):(-4)$

b) $342:(-5)$

c) $-1267:23$

d) $(+200):(+25)$

e) $(-320):(+16)$

f) $875:(-6)$

g) $(+1245):(-57)$

h) $(-244):122$

a) $(-32):(-4)=+8, \textit{resto}=0$

b) $342:(-5)=-68, \textit{resto}=+2$

c) $-1267:23=-55, \textit{resto}=-2$

d) $(+200):(+25)=+8, \textit{resto}=0$

e) $(-320):(+16)=-20, \textit{resto}=0$

f) $875:(-6)=-145, \textit{resto}=+5$

g) $(+1245):(-57)=-21, \textit{resto}=+48$

h) $(-244):122=-2, \textit{resto}=0$

120. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones encadenadas.

a) $(24):(-3)\cdot(+5)\cdot(-2)$

b) $(-35)\cdot(+10):(-7)\cdot 4$

c) $1460:(-10):(-73)\cdot(-3)$

d) $(-231)\cdot(-1):(-3)\cdot(-5):(-11)$

a) $(24):(-3)\cdot(+5)\cdot(-2)=(-8)\cdot(+5)\cdot(-2)=(-40)\cdot(-2)=80$

b) $(-35)\cdot(+10):(-7)\cdot 4=(-350):(-7)\cdot 4=50\cdot 4=200$

c) $1460:(-10):(-73)\cdot(-3)=(-146):(-73)\cdot(-3)=2\cdot(-3)=-6$

d) $(-231)\cdot(-1):(-3)\cdot(-5):(-11)=231:(-3)\cdot(-5):(-11)=(-77)\cdot(-5):(-11)=385:(-11)=-35$

121. Resuelve las siguientes operaciones.

a) $16-[5-(-9)]:(-7)+7\cdot[-5-3\cdot(-2)]$

b) $40:(-2)\cdot(+5)-6+6\cdot[101+53\cdot(-2)]$

c) $(5-10)\cdot(5+10)-12:[16-15\cdot(-1)-29]$

d) $[48-5\cdot(-9):3]-6+4\cdot[19-3\cdot(-7)]$

a) $16-[5-(-9)]:(-7)+7\cdot[-5-3\cdot(-2)]=16-(+14):(-7)+7\cdot(-5+6)=16+2+7\cdot 1=16+2+7=25$

b) $40:(-2)\cdot(+5)-6+6\cdot[101+53\cdot(-2)]=(-20)\cdot(+5)-6+6\cdot(101-106)=-100-6+6\cdot(-5)=-106-30=-136$

c) $(5-10)\cdot(5+10)-12:[16-15\cdot(-1)-29]=(-5)\cdot 15-12:(16+15-29)=-75-12:2=-75-6=-81$

d) $[48-5\cdot(-9):3]-6+4\cdot[19-3\cdot(-7)]=(48+45:3)-6+4\cdot(19+21)=(48+15)-6+4\cdot 40=63-6+160=217$

122. Realiza las siguientes operaciones de dos formas.

a) $11 \cdot [12 - 15 - 40]$

b) $[13 - (-5) + (-2)] \cdot 6$

c) $(-9) \cdot [-12 - (+15)]$

d) $(-23 + 33) \cdot (-10)$

a) $11 \cdot [12 - 15 - 40] = 11 \cdot (-43) = -473$

$11 \cdot [12 - 15 - 40] = 11 \cdot 12 - 11 \cdot 15 - 11 \cdot 40 = 132 - 165 - 440 = -473$

b) $[13 - (-5) + (-2)] \cdot 6 = (13 + 5 - 2) = 16 \cdot 6 = 96$

$[13 - (-5) + (-2)] \cdot 6 = 13 \cdot 6 + 5 \cdot 6 - 2 \cdot 6 = 78 + 30 - 12 = 96$

c) $(-9) \cdot [-12 - (+15)] = (-9) \cdot (-27) = 243$

$(-9) \cdot [-12 - (+15)] = (-9) \cdot (-12) - (-9) \cdot (+15) = (+108) - (-135) = 243$

d) $(-23 + 33) \cdot (-10) = 10 \cdot (-10) = -100$

$(-23 + 33) \cdot (-10) = (-23) \cdot (-10) + (+33) \cdot (-10) = 230 - 330 = -100$

123. Actividad resuelta.

124. Extrae los factores comunes y halla el resultado.

a) $13 - 130 + 26 + (-65)$

b) $32 - 56 - 132 + 88 - 48$

c) $27 + 36 - 45 - 54 + 63 - 72$

d) $-20 + 30 - 110 + 420 - 330$

a) $13 - 130 + 26 + (-65) = 13 \cdot (1 - 10 + 2 - 5) = 13 \cdot (-12) = -156$

b) $32 - 56 - 132 + 88 - 48 = 4 \cdot (8 - 14 - 33 + 22 - 12) = 4 \cdot (-29) = -116$

c) $27 + 36 - 45 - 54 + 63 - 72 = 9 \cdot (3 + 4 - 5 - 6 + 7 - 8) = 9 \cdot (-5) = -45$

d) $-20 + 30 - 110 + 420 - 330 = 10 \cdot (-2 + 3 - 11 + 42 - 33) = 10 \cdot (-1) = -10$

125. De un número natural se conocen las siguientes propiedades:

- **Tiene exactamente seis divisores naturales.**
- **Solo tiene dos divisores primos.**
- **Es menor que 100.**
- **Uno de sus divisores es 7.**

¿Cuántas posibilidades hay?

El número es de la forma $x^m \cdot 7^n$, donde x, m y n son números naturales y, además, x es un número primo.
Para que tenga seis divisores naturales, $(m+1) \cdot (n+1) = 6$. Como ni m ni n pueden valer 0, hay dos posibilidades para los exponentes: $m = 1$, $n = 2$ o $m = 2$, $n = 1$.

Si $m = 1$ y $n = 2$, entonces $x \cdot 7^2 = x \cdot 49$. Para que se cumpla que $x \cdot 49 < 100$, la única posibilidad es $x = 2$. El número sería $2 \cdot 7^2 = 98$.

Si $m = 2$ y $n = 1$, entonces $x^2 \cdot 7 < 100 \rightarrow x^2 < \frac{100}{7} \approx 14{,}3$. Por tanto, los valores de x pueden ser $x = 2$ o $x = 3$. El número sería $2^2 \cdot 7 = 28$ o $3^2 \cdot 7 = 63$

En resumen, hay tres posibles soluciones: 28, 63 y 98.

126. Un número es múltiplo de 99 si es múltiplo a la vez de 11 y de 9.

a) Halla un múltiplo de 99 de 4 cifras o más.

b) Separa sus cifras en grupos de 2 desde el final y suma esos grupos. Si sale más de 100, repite la operación. ¿Qué número obtienes?

c) Prueba con otro número. ¿Qué conclusión sacas?

a) Por ejemplo, $99 \cdot 28 = 2772$

b) $27 + 72 = 99$

c) Por ejemplo, para $99 \cdot 9974 = 987426$, $98 + 74 + 26 = 198$ y $1 + 98 = 99$.

Al final, se obtiene siempre 99.

127. Indica si son ciertas las siguientes propiedades.

- **El opuesto de la suma de dos números es igual a la suma de sus opuestos.**
- **La resta de números enteros tiene la propiedad conmutativa.**
- **El valor absoluto de un número entero no puede ser menor que ese número.**
- **El producto de dos números enteros es siempre mayor que cualquiera de ellos.**

- Verdadero: $-(a+b) = -a - b = (-a) + (-b)$
- Falso: $5 - 3 = 2$ y $3 - 5 = -2$. Los resultados son opuestos.
- Verdadero: Si el número es positivo, su valor absoluto igual a él, y si el número es negativo, su valor absoluto es positivo, por tanto, mayor que él.
- Falso: Por ejemplo, $(-1) \cdot 2 = -2$ y $-2 < -1 < 2$.

128. ¿Es posible encontrar un número que tenga exactamente 8 divisores enteros? ¿Y que tenga 9? Justifica tus respuestas.

Puede tener 8 divisores enteros, si tiene 4 divisores naturales. Por ejemplo, $16 = 2^4$.

El número de divisores enteros de un número es el doble del número de divisores naturales, que será un número par. Por tanto, un número no puede tener exactamente 9 divisores enteros.

129. Busca cuatro números distintos tales que al multiplicar el primero por la suma de los otros tres, el resultado sea el opuesto del primero.

Respuesta libre. Por ejemplo: $5 \cdot (7 + (-2) + (-6))$.-

130. Al multiplicar un número entero por la suma de varios, se obtiene el valor absoluto del primero.

a) ¿Qué valores puede tener esa suma?

b) ¿De qué depende el valor de la suma?

a) Puede ser 1 o –1.

b) Si el número es positivo, la suma debe valer 1, y si es negativo, –1.

131. Pilar está organizando una coreografía formada por 48 bailarines. Para organizarlos, tiene que colocarlos de forma que en todas las columnas haya el mismo número de bailarines.

¿De cuantas formas posibles puede colocarlos?

El número de bailarines debe ser divisor de $48 = 2^4 \cdot 3$, que tiene $(4+1) \cdot (1+1) = 10$ divisores. Hay 10 posibilidades.

132. En un aeropuerto hay ocho mostradores de facturación. En un determinado momento hay 240 pasajeros esperando para facturar. ¿Cuántos mostradores podrá abrir la compañía para que se distribuyan a partes iguales? ¿Cuántos viajeros habrá por fila en cada caso?

$240 : 1 = 240 \Rightarrow$ 1 mostrador para los 240 pasajeros.

$240 : 2 = 120 \Rightarrow$ 2 mostradores para 120 pasajeros cada uno.

$240 : 3 = 80 \Rightarrow$ 3 mostradores para 80 pasajeros cada uno.

$240 : 4 = 60 \Rightarrow$ 4 mostradores para 60 pasajeros cada uno.

$240 : 5 = 48 \Rightarrow$ 5 mostradores para 48 pasajeros cada uno.

$240 : 6 = 40 \Rightarrow$ 6 mostradores para 40 pasajeros cada uno.

$240 : 8 = 30 \Rightarrow$ 8 mostradores para 30 pasajeros cada uno.

133. Inés está cambiando el suelo de su cocina que mide 360 cm de ancho y 630 cm de largo. Quiere que las baldosas sean cuadrados y del mayor tamaño posible.

a) ¿Qué medidas tendrá cada baldosa?

b) ¿Cuántas necesitará?

a) $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ m.c.d.$(360, 630) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$ cm de lado.

b) $360 : 90 = 4$ baldosas de ancho y $630 : 90 = 7$ baldosas de largo, $4 \cdot 7 = 28$ baldosas en total.

134. El inspector Tolosabe ha capturado a varios famosos delincuentes, 60 mujeres y 105 hombres, en el xxx Congreso Mafioso. La prisión solo tiene 15 celdas, aunque tienen bastante capacidad. Decide encerrar a sus prisioneros separando a los hombres de las mujeres y metiendo en todas las celdas el mismo número de prisioneros. ¿Podrá hacerlo?

Habrá que intentar meter en cada celda el mayor número posible de presos, y que sea divisor a la vez de 60 y 105.

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ m.c.d.$(60, 105) = 3 \cdot 5 = 15$

Sí, puede hacerlo, metiendo 15 presos por celda. Necesita $60 : 15 = 4$ celdas para las mujeres y $105 : 15 = 7$ celdas para los hombres, $4 + 7 = 11$ celdas en total.

135. Actividad resuelta

136. Los miembros de un coro se reúnen en grupos del mismo tamaño. Si se juntan de 3 en 3, sobran 2. Si se juntan de 4 en 4, sobran 3. Si lo hacen de 6 en 6, sobran 5. Lee la conversación y contesta.

- **Director del coro: ¡Esto es imposible!**
- **Cantante principal: No, únete a nosotros y así podremos formar los grupos perfectamente.**

¿Cuántos miembros tenía el coro, sin contar al director?

Contando al director, se pueden agrupar de 3 en 3, de 4 en 4 o de 6 en 6, ya que en los tres casos solo faltaba una persona. Por tanto, el coro con el director será múltiplo de 3, 4 y 6. Como m.c.m. (3, 4, 6)=12, el coro con el director puede tener 12, 24, 36…

El coro sin el director tendrá 11, 23, 35… miembros.

137. La temperatura a lo largo de un día en Villafría puede variar bastante. Hoy, por ejemplo, era de 3 grados bajo cero a las 2 de la mañana, y a las 4 había bajado cinco más. Por suerte, a mediodía había subido 12 grados, pero por la tarde llegó un viento helado que hizo que la temperatura a las seis fuera 10 grados menor.

a) ¿Qué temperatura hubo a las horas señaladas?

b) ¿Qué diferencia hubo entre la temperatura más alta y la más baja?

a) A las 4, la temperatura era de $-3+(-5)=-8$ grados, a mediodía, era de $-8+12=+4$, y a las seis de la tarde, era de $4-10=-6$ grados.

b) Hubo una diferencia de $+4-(-8)=12$ grados.

138. En la siguiente tabla se muestran los resultados que cuatro jugadores de golf han conseguido en los 6 primeros hoyos del campo.

Hoyo	1	2	3	4	5	6
Par	4	6	3	5	4	4
J1	+2	−1	Par	−2	+3	Par
J2	−1	+1	+2	Par	Par	−1
J3	Par	+2	Par	−1	−1	+2
J4	−2	Par	−2	+3	Par	+1

El par indica el número de golpes en que hay que meter la pelota en el hoyo. Sabiendo que gana el jugador que menos golpes ha realizado al final:

a) ¿Qué jugador va ganando?

b) ¿Algún jugador ha metido la pelota de un solo golpe?

a) Al par de cada hoyo hay que sumar la diferencia que ha obtenido cada jugador (cero, si consiguió el par):

J1 → $4+2+6-1+3+5-2+4+3+4=28$ golpes.

J3 → $4+6+2+3+5-1+4-1+4+2=28$ golpes.

J2 → $4-1+6+1+3+2+5+4+4-1=27$ golpes.

J4 → $4-2+6+3-2+5+3+4+4+1=26$ golpes.

Va ganando el jugador 4.

b) El jugador 4 metió la pelota en un golpe en el tercer hoyo ($3-2=1$).

139. Observa el recibo del banco de Vicente y contesta.

Fecha	Concepto	Importe (€)
01-09-16	Abono de haberes	1350
03-09-16	Pago recibo comunidad	−35
07-09-16	Abono de intereses	28
13-09-16	Pago recibo de la luz	−112
17-09-16	Compra con tarjeta	−78
21-09-16	Pago cajero automático	−200
SALDO AL 22-09-16		836

a) ¿Cuánto es el total de pérdidas que ha tenido durante los días correspondientes al recibo?

b) ¿Cuál era el saldo el día 01-09-16, antes de producirse el abono de haberes?

c) ¿Cuál era el saldo el día 10-09-16? ¿Y el día 20?

a) $-35-112-78-200=-425$ €

b) $836+425-1350-28=-117$ €

c) El día 10 el saldo era de $-117+1350-35+28=1226$ € y el día 20 era de $836+200=1036$ €.

140. Piensa un número de tres cifras. Escríbelo dos veces seguidas (por ejemplo, si era 123, escribe 123123). A continuación, divide el resultado entre 7, divide el cociente obtenido entre 11 y divide el cociente que resulta entre 13.

- **¿Qué relación hay entre 123123 y 123?**
- **¿Qué relación hay entre 7, 11 y 13?**
- **Compara tus respuestas con tu compañero y entre los dos buscad una explicación al resultado obtenido.**

- $123123:7:11:13 = 17589:11:13 = 1599:13 = 123$. Se obtiene el número inicial.
- $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$
- $123123 = 123000 + 123 = 123 \cdot 1001 = 123 \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13)$

141. Si *x* es un número entero menor que 2, tal que $|x-2| = p$, ¿cuál es el valor de $x - p$?

A. -2 **B.** 2 **C.** $2-2p$ **D.** $2p-2$

Al ser entero y menor que 2, $x-2$ es negativo, luego $|x-2| = 2-x$. Por tanto, $p = 2-x$ y $x = 2-p$.
De manera que $x - p = 2 - p - p = 2 - 2p$.

La respuesta es C. $2-2p$.

142. Si la suma de dos números es *S* y luego les añadimos 3 a cada uno y posteriormente los doblamos, ¿cuál es la suma de los dos nuevos números?

A. $2S+3$ **B.** $3S+6$ **C.** $2S+6$ **D.** $2S+12$

Los números son x y $S-x$. Si sumamos 3 a cada uno y los doblamos, obtenemos $2(x+3) = 2x+6$ y $2(S-x+3) = 2S-2x+6$, cuya suma es $2x+6+2S-2x+6 = 2S+12$.

La respuesta es D. $2S+12$.

143. Los lados de un triángulo miden 4, 6 y *x*, y los de otro triángulo miden 4, 6 e *y*. ¿Cuál es el menor número positivo que no puede ser el resultado de $|x-y|$?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

En un triángulo la suma de los dos lados menores debe ser mayor que el lado mayor.

Si suponemos que el lado que falta es el mayor, su valor debe ser menor que $4+6 = 10$.

Si suponemos que el lado que falta es el menor, su valor debe ser mayor que $6-4 = 2$.

Por tanto, la diferencia máxima es menor que $10-2 = 8$.

La respuesta correcta es D. 8.

144. De los próximos años, ¿cuál es el primero que se podrá escribir como producto de tres números consecutivos?

A. 2040 **B.** 2046 **C.** 2052 **D.** 2184

$2040 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 23$ No es posible.

$2046 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$ No es posible.

$2052 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 19$ No es posible.

$2184 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 13 = 4 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 13 = 12 \cdot 13 \cdot 14$. Sí es posible.

La respuesta es D. 2184.

Encuentra el error

145. Jorge está buscando el número de divisores de 360 000. Aunque es un número grande, es fácil descomponerlo.

$$\mathbf{360\,000 = 10\,000 \cdot 36 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 6 = 10^4 \cdot 6^2}$$

Por tanto, el número tendrá $(4+1)\cdot(2+1) = 5 \cdot 3 = 15$ divisores.

¿Es correcto?

No es correcto, ya que no se ha realizado la descomposición en factores primos.

$360\,000 = 10\,000 \cdot 36 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 6 = 10^4 \cdot 6^2 = (2 \cdot 5)^4 \cdot (2 \cdot 3)^2 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4$.

Tiene $(6+1)\cdot(2+1)\cdot(4+1) = 7 \cdot 3 \cdot 5 = 105$ divisores.

146. El profesor de Santi y Marta les ha pedido que resuelvan una operación combinada.

- **Marta ha resuelto una operación de la siguiente forma.**

  $$\mathbf{5 - [3 \cdot (-4) - 6] = 5 - [-12 - 6] = 5 - [-18] = 5 + 18 = 23}$$

- **Santi prefiere quitar primero el corchete aplicando lo que ha aprendido: el menos delante del paréntesis cambia de signo los números que hay dentro.**

  $$\mathbf{5 - [3 \cdot (-4) - 6] = 5 + (-3) \cdot (+4) + 6 = 5 - 12 + 6 = -1}$$

Sorprendentemente, los resultados son distintos.

¿Alguno de ellos ha cometido un error?

Santi se equivoca, al cambiar de signo los dos factores del producto $3 \cdot (-4)$. La solución correcta es:

$$5 - [3 \cdot (-4) - 6] = 5 + (-3) \cdot (-4) + 6 = 5 + 12 + 6 = 23$$

PONTE A PRUEBA

La escala Kelvin

Actividad resuelta

El guerrero de Kalamar

Roberto está jugando a un juego de aventuras, en el que el personaje principal es un héroe que se enfrenta a múltiples enemigos, encuentra objetos, rescata elfos prisioneros…

El héroe empieza con 20 puntos vitales (+20) y consigue y pierde puntos a lo largo de la partida. Si en algún momento los puntos llegan a 0, hay que volver a empezar la partida.

- **REP (rescatar a un elfo prisionero): + 10 puntos**
- **DDD (derrotar a un dragón dormido): +2**
(dormido no tiene mucho mérito, ¿no?)
- **DMDMD (derrotar a un malvado dragón MUY despierto): +100**
(esto es otra cosa)
- **VTM (vencido por un trol maloliente): –4**
- **VGB (vencido por un gnomo bajito) –6**
(¡si era mucho más pequeño que tú!)
- **DOM (derrotar a un orco malvado): +5**
- **VDP (vencer a un duende pesado): +3**
- **TUP (tropezar con una piedra): –1 punto (a veces pasa…)**
- **DMP (el dragón te muerde un poquito): –40**

1. **En esta partida, Roberto ha vencido a 3 orcos y 4 duendes, y ha rescatado a 7 elfos, pero se ha caído 5 veces (no con la misma piedra), le han derrotado 2 troles y un gnomo. ¿Cuántos puntos tiene en total?**
2. **Su amiga Marina le manda al móvil cómo va su partida, pero abreviando:**

VGB VGB VGB VDP VDP DOM DOM VTM VTM DMP REP REP REP DMDMD

   ¿Cuántos puntos tiene?

3. **Roberto sospecha que Marina usa un programa que le permite seguir jugando con puntuación negativa. ¿Lleva razón?**

1. Tiene $+20+3\cdot(+5)+4\cdot(+3)+7\cdot(+10)+5\cdot(-1)+2\cdot(-4)+(-6)=20+15+12+70-5-8-6=98$ puntos.
2. Tiene
$+20+3\cdot(-6)+2\cdot(+3)+2\cdot(+5)+2\cdot(-4)+(-40)+3\cdot(+10)+(+100)=20-18+6+10-8-40+30+100=100$ puntos.
3. Después de DMP, Marina tenía:
$+20+3\cdot(-6)+2\cdot(+3)+2\cdot(+5)+2\cdot(-4)+(-40)=20-18+6+10-8-40=-30$ puntos, por lo que tendría que haber vuelto a empezar. Sí, Marina ha hecho trampa.

La cigarra y el primo

Los estudios sobre las cigarras han demostrado que tienen un ciclo vital de 17 años.

Durante esos 17 años permanecen ocultas en estado larval, y solamente al final del ciclo salen en estado adulto para vivir un par de semanas más, que es el tiempo que necesitan para reproducirse.

La cuestión que inquietaba a los zoólogos era: ¿Por qué el ciclo vital de la cigarra es tan largo? ¿Qué quiere decir que el ciclo vital sea un número primo de años?

Según una teoría, existe un parásito con su propio ciclo vital, que la cigarra está intentando evitar. Si el parásito tiene un ciclo vital, pongamos, de 2 años, entonces la cigarra quiere evita tener un ciclo que sea divisible por 2, en caso contrario coincidirán.

1. **Supongamos que la cigarra tuviera un ciclo vital de 3 años, y su parásito, de 2 años. Si coincidieran este año, ¿cuándo volverían a coincidir?**
2. **Si las cigarras irrumpiesen cada 14 años, ¿qué ciclo vital le interesaría tener al parásito?**
3. **Después de un tiempo de evolución, la cigarra llegó a su ciclo de 17 años. Si el parásito apareciese cada año, tendría que hacerlo 17 veces hasta volver a coincidir. ¿Y si despertara cada 2? ¿Y cada 3 años? ¿Y cada 16?**

1. m.c.m. $(2,3)=2\cdot 3=6$. Coincidirían dentro de 6 años.

2. Un número divisor de 14, es decir, ciclos de 2 o de 7 años.

3. Si despierta cada 2, coincidirán cada $17\cdot 2=34$ años; si lo hace cada 3, cada $17\cdot 3=51$ años, y si lo hace cada 16, dentro de $17\cdot 16=272$ años.

AUTOEVALUACIÓN

1. Aplicando los criterios de divisibilidad, comprueba si los siguientes números son múltiplos de 6 o de 11.

a) 418 **b) 7392** **c) 61476** **d) 4554**

a) Como $4+1+8=13$, no es múltiplo de 3, tampoco lo es de 6.

Como $(4+8)-1=11$, sí es múltiplo de 11.

b) Como acaba en cifra par, es múltiplo de 2 y como $7+3+9+2=21=7\cdot 3$ es múltiplo de 3, por tanto, es múltiplo de 6.

Como ($(7+9)-(3+2)=11$, es múltiplo de 11.

c) Como acaba en cifra par, es múltiplo de 2 y como $6+1+4+7+6=24=3\cdot 8$ es múltiplo de 3, por tanto, es múltiplo de 6.

Como ($(6+4+6)-(1+7)=8$, no es múltiplo de 11.

d) Como acaba en cifra par, es múltiplo de 2 y como $4+5+5+4=18=6\cdot 3$ es múltiplo de 3, por tanto, es múltiplo de 6.

Como ($(4+5)-(5+4)=0$, es múltiplo de 11.

2. Calcula el número de divisores de 180 y escríbelos.

$180=2^2\cdot 3^2\cdot 5$, luego tiene $(2+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)=18$ divisores.

Los divisores son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180.

3. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes números.

a) 96 y 180 **b) 140, 245 y 700**

a) $96=2^5\cdot 3,\ 180=2^2\cdot 3^2\cdot 5 \Rightarrow$ m.c.d.$(96,180)=2^2\cdot 3=12$ y m.c.m.$(96,180)=2^5\cdot 3^2\cdot 5=1440$

b) $140=2^2\cdot 5\cdot 7,\ 245=5\cdot 7^2,\ 700=2^2\cdot 5^2\cdot 7 \Rightarrow$ m.c.d.$(140,\ 245,700)=5\cdot 7=35$ y m.c.m.$(140,\ 245,700)=2^2\cdot 7^2\cdot 5^2=4900$

4. Ordena los siguientes números enteros.

−13, 12, 20, −2, −14, −5, 6, 0

–14 < –13 < –5 < –2 < 0 < 6 < 12 < 20

5. Escribe el valor absoluto y el opuesto de cada uno de los siguientes números.

a) **−10** **b)** **+96** **c)** **−45** **d)** **19**

a) $|-10| = 10$; op(–10) = +10 **c)** $|-45| = 45$; op(–45) = +45

b) $|+96| = 96$; op(+96) = –96 **d)** $|+19| = 19$; op(+19) = –19

6. Realiza las siguientes operaciones con números enteros.

a) $\mathbf{(-18)+(+45)}$ **c)** $\mathbf{-60:(-6)\cdot 10}$

b) $\mathbf{(-6)+(-12)-(-15)-(+3)}$ **d)** $\mathbf{12\cdot 45:(-9)}$

a) $(-18)+(+45) = -18+45 = 27$

b) $(-6)+(-12)-(-15)-(+3) = -6-12+15-3 = -6$

c) $-60:(-6)\cdot 10 = 10\cdot 10 = 100$

d) $12\cdot 45:(-9) = 540:(-9) = -60$

7. Realiza las operaciones sacando factor común.

a) $\mathbf{17\cdot 6 - 17\cdot 20 + 17\cdot(-16)}$ **b)** $\mathbf{240-600-480-225}$

a) $17\cdot 6 - 17\cdot 20 + 17\cdot(-16) = 17\cdot[6-20-16] = 17\cdot(-30) = -510$

b) $240-600-480-225 = 15\cdot(16-40-32-15) = 15\cdot(-71) = -1065$

8. Una distribuidora tiene en el almacén 840 latas de atún, 455 latas de mejillones y 315 latas de berberechos. Quiere almacenarlas en cajas del mismo tamaño, sin mezclar productos distintos, de forma que emplee el menor número posible de cajas. ¿Cuántas latas tendrá cada caja y cuántas cajas habrá de cada producto?

El número de latas será el máximo común divisor de 840, 455 y 315.

$840 = 2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7,\ 455 = 5\cdot 7\cdot 13$ y $315 = 3^2\cdot 5\cdot 7 \Rightarrow \text{m.c.d.}(840, 455, 315) = 5\cdot 7 = 35$

Habrá 35 latas en cada caja, $840:35 = 24$ cajas de atún, $455:35 = 13$ latas de mejillones y $315:35 = 9$ latas de berberechos.

9. El caracol Paco se ha metido en un pozo. Durante tres días sube 3 metros diarios, pero se cansa mucho y los cuatro días siguientes baja 4 metros por día. En la semana siguiente vuelve a subir, a razón de 2 metros por día. Si todavía le faltan tres metros para salir del pozo, ¿a qué profundidad empezó?

El recorrido total de Paco ha sido $3\cdot(+3)+4\cdot(-4)+7\cdot(+2) = 9-16+14 = 7$ metros.

Si le faltan 3, empezó a $-3+(-7) = -10$ metros, es decir, a 10 metros de profundidad.

2 Fracciones y decimales

1. Indica la interpretación de fracción que se utiliza en cada caso.

   a) Un quinto del público del teatro es de Toledo.

   b) Setenta y cinco de cada 100 estudiantes practican algún deporte.

   c) Jacinto ha comido un cuarto de pizza.

   d) Tres decimos de las rosas tienen pulgones.

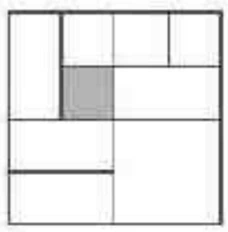
   a) Fracción de una cantidad

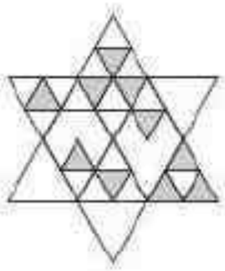
   b) Cociente entre dos números

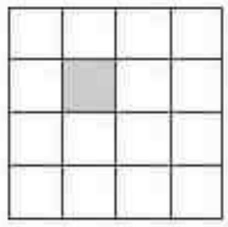
   c) Partes de una unidad

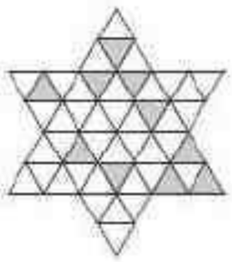
   d) Fracción de una cantidad

2. Completa los dibujos en tu cuaderno e indica la fracción de la parte coloreada.

   a) 

   b) 

   a)  $\frac{1}{16}$

   b)  $\frac{10}{48}=\frac{5}{24}$

3. Comprueba si estas fracciones son equivalentes.

   a) $\frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$ c) $\frac{12}{25}$ y $\frac{60}{75}$ e) $\frac{36}{60}$ y $\frac{21}{35}$

   b) $\frac{16}{25}$ y $\frac{20}{30}$ d) $\frac{81}{120}$ y $\frac{54}{80}$ f) $\frac{84}{21}$ y $\frac{68}{17}$

   a) $4\cdot\mathbf{9} = 6\cdot\mathbf{6} = 36 \Rightarrow \frac{4}{6}$ y $\frac{6}{9}$ son equivalentes.

   b) $16\cdot\mathbf{30} \neq 25\cdot\mathbf{20} \Rightarrow \frac{16}{25}$ y $\frac{20}{30}$. no son equivalentes.

   c) $12\cdot\mathbf{75} \neq 25\cdot 60 \Rightarrow \frac{12}{25}$ y $\frac{60}{75}$. no son equivalentes.

   d) $81\cdot\mathbf{80} = 120\cdot\mathbf{54} = 6480 \Rightarrow \frac{81}{120}$ y $\frac{54}{80}$ son equivalentes.

   e) $36\cdot 35 = 60\cdot 21 = 1260 \Rightarrow \frac{36}{60}$ y $\frac{21}{35}$ son equivalentes.

   f) $84\cdot 17 = 21\cdot 68 = 1428 \Rightarrow \frac{84}{21}$ y $\frac{68}{17}$ son equivalentes.

4. Completa en tu cuaderno los números que faltan.

$$\frac{\bullet}{20}=\frac{15}{60}=\frac{3}{\bullet}=\frac{\bullet}{24}=\frac{1}{\bullet}=\frac{\bullet}{36}$$

$$\frac{5}{20}=\frac{15}{60}=\frac{3}{12}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}=\frac{9}{36}$$

5. Escribe dos fracciones amplificadas de cada una.

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{11}{13}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{18}{21}$

a) $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}$ b) $\frac{11}{13}=\frac{22}{26}=\frac{33}{39}$ c) $\frac{5}{9}=\frac{10}{18}=\frac{15}{27}$ d) $\frac{18}{21}=\frac{36}{42}=\frac{54}{63}$

6. Ordena las fracciones de menor a mayor.

a) $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}$ y $\frac{7}{9}$ b) $\frac{5}{11}, \frac{17}{25}$ y $\frac{7}{12}$ c) $\frac{43}{60}, \frac{56}{75}$ y $\frac{55}{42}$

a) $\frac{3}{7}=\frac{135}{315}, \frac{2}{5}=\frac{126}{315}$ y $\frac{7}{9}=\frac{245}{315} \Rightarrow \frac{126}{315}<\frac{135}{315}<\frac{245}{315} \Rightarrow \frac{2}{5}<\frac{3}{7}<\frac{7}{9}$

b) $\frac{5}{11}=\frac{1500}{3300}, \frac{17}{25}=\frac{2244}{3300}$ y $\frac{7}{12}=\frac{1925}{3300} \Rightarrow \frac{1500}{3300}<\frac{1925}{3300}<\frac{2244}{3300} \Rightarrow \frac{5}{11}<\frac{7}{12}<\frac{17}{25}$

c) $\frac{43}{60}=\frac{1505}{2100}, \frac{56}{75}=\frac{1568}{2100}$ y $\frac{55}{42}=\frac{2750}{2100} \Rightarrow \frac{1505}{2100}<\frac{1568}{2100}<\frac{2750}{2100} \Rightarrow \frac{43}{60}<\frac{56}{75}<\frac{55}{42}$

7. Actividad resuelta.

8. Halla tres fracciones comprendidas entre $\frac{4}{9}$ y $\frac{5}{9}$ y escríbelas en forma irreducible.

Una posibilidad es escribir $\frac{4}{9}=\frac{16}{36}$ y $\frac{5}{9}=\frac{20}{36}$.

Las fracciones pedidas podrían ser $\frac{17}{36}$, $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$ y $\frac{19}{36}$.

9. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma de fracción irreducible.

a) $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}$ c) $\frac{19}{42}-\frac{11}{28}$ e) $\frac{10}{11}-\frac{4}{7}+\frac{3}{5}$

b) $\frac{1}{23}+\frac{1}{16}$ d) $\frac{11}{12}-\frac{6}{25}$ f) $\frac{1}{6}-\frac{8}{3}+\frac{1}{20}$

a) $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36}$

b) $\frac{1}{23}+\frac{1}{16}=\frac{16+23}{368}=\frac{39}{368}$

c) $\frac{19}{42}-\frac{11}{28}=\frac{38-33}{84}=\frac{5}{84}$

d) $\frac{11}{12}-\frac{6}{25}=\frac{275-72}{300}=\frac{203}{300}$

e) $\frac{10}{11}-\frac{4}{7}+\frac{3}{5}=\frac{350-220+231}{385}=\frac{361}{385}$

f) $\frac{1}{6}-\frac{8}{3}+\frac{1}{20}=\frac{10-160+3}{60}=\frac{-147}{60}=\frac{-49}{20}$

10. Actividad resuelta.

11. Reduce a común denominador y calcula el resultado.

a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{3}+\frac{5}{9}-\frac{5}{27}$ c) $\frac{42}{18}+\frac{35}{20}-\frac{17}{42}$ d) $\frac{13}{3}-\frac{13}{6}-\frac{13}{20}$

a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}=\frac{6-4+5}{8}=\frac{7}{8}$

b) $\frac{5}{3}+\frac{5}{9}-\frac{5}{27}=\frac{45+15-5}{27}=\frac{55}{27}$

c) $\frac{42}{18}+\frac{35}{20}-\frac{17}{42}=\frac{7}{3}+\frac{7}{4}-\frac{17}{42}=\frac{196+147-34}{84}=\frac{309}{84}=\frac{103}{28}$

d) $\frac{13}{3}-\frac{13}{6}-\frac{13}{20}=\frac{260-130-39}{60}=\frac{91}{60}$

12. Opera, simplificando todo lo posible los resultados.

a) $\frac{3}{5}-7-\frac{9}{10}+\frac{5}{12}$ c) $23+\frac{7}{40}-\frac{10}{7}-14$

b) $\frac{13}{17}+\frac{3}{15}-9+\frac{8}{20}$ d) $10-\frac{15}{24}-11+\frac{50}{6}$

a) $\frac{3}{5}-7-\frac{9}{10}+\frac{5}{12}=\frac{36-420-54+25}{60}=\frac{-413}{60}$

b) $\frac{13}{17}+\frac{3}{15}-9+\frac{8}{20}=\frac{13}{17}+\frac{1}{5}-9+\frac{2}{5}=\frac{65+17-765+34}{85}=\frac{-649}{85}$

c) $23+\frac{7}{40}-\frac{10}{7}-14=9+\frac{7}{40}-\frac{10}{7}=\frac{2520+49-400}{280}=\frac{2169}{280}$

d) $10-\frac{15}{24}-11+\frac{50}{6}=-1-\frac{5}{8}+\frac{25}{3}=\frac{-24-15+200}{24}=\frac{161}{24}$

13. Actividad resuelta.

14. Expresa cada fracción como suma de un número entero y una fracción.

a) $\frac{18}{7}$ c) $\frac{11}{2}$ e) $\frac{33}{10}$

b) $\frac{33}{5}$ d) $\frac{43}{4}$ f) $\frac{89}{16}$

a) $\frac{18}{7}=2+\frac{4}{7}$ c) $\frac{11}{2}=5+\frac{1}{2}$ e) $\frac{33}{10}=3+\frac{3}{10}$

b) $\frac{33}{5}=6+\frac{3}{5}$ d) $\frac{43}{4}=10+\frac{3}{4}$ f) $\frac{89}{16}=5+\frac{9}{16}$

15. Realiza estas multiplicaciones y expresa el resultado en forma de fracción irreducible.

a) $\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}$ c) $\frac{16}{5}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{11}$ e) $\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{18}\cdot 2$

b) $\frac{12}{15}\cdot\frac{25}{36}$ d) $\frac{13}{42}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{24}{10}$ f) $\frac{20}{9}\cdot 5\cdot\frac{11}{9}$

a) $\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4}{35}$ c) $\frac{16}{5}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{5}{11}=\frac{16}{33}$ e) $\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{18}\cdot 2=\frac{11}{12}$

b) $\frac{12}{15}\cdot\frac{25}{36}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{36}=\frac{5}{9}$ d) $\frac{13}{42}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{24}{10}=\frac{13}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{12}{5}=\frac{156}{175}$ f) $\frac{20}{9}\cdot 5\cdot\frac{11}{9}=\frac{1100}{81}$

16. Escribe la fracción inversa.

a) $\frac{-5}{8}$ b) $\frac{16}{5}$ c) $\frac{-15}{23}$ d) 35

a) $\frac{-8}{5}$ b) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{-23}{15}$ d) $\frac{1}{35}$

17. Realiza estas divisiones y expresa el resultado como fracción irreducible.

a) $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$ c) $\frac{12}{5}:\frac{4}{25}$ e) $8:\frac{7}{6}$

b) $\frac{1}{5}:\frac{6}{10}$ d) $\frac{7}{2}:2$ f) $\frac{16}{5}:24$

a) $\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$ c) $\frac{12}{5}:\frac{4}{25}=\frac{300}{20}=15$ e) $8:\frac{7}{6}=\frac{48}{7}$

b) $\frac{1}{5}:\frac{6}{10}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$ d) $\frac{7}{2}:2=\frac{7}{4}$ f) $\frac{16}{5}:24=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$

18. Completa los términos que faltan.

a) $\frac{5}{\bullet}\cdot\frac{7}{\bullet}=1$ b) $\frac{12}{25}=1:\frac{\bullet}{\bullet}$ c) $\frac{11}{23}:\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\cdot\frac{\bullet}{\bullet}=\frac{\bullet}{\bullet}$ d) $\frac{21}{33}:\frac{\bullet}{\bullet}=\frac{168}{198}$

a) $\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{5}=1$ b) $\frac{12}{25}=1:\frac{25}{12}$ c) $\frac{11}{23}:\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\cdot\frac{\frac{7}{5}}{\frac{115}{77}}=\frac{77}{115}$ d) $\frac{21}{33}:\frac{6}{8}=\frac{168}{198}$

19. Encuentra los términos que faltan.

a) $\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)^{3}=\frac{1}{216}$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\bullet}=\frac{16}{625}$ c) $\left(\frac{\bullet}{\bullet}\right)^{\bullet}=\frac{243}{1024}$

a) $\left(\frac{1}{6}\right)^{3}=\frac{1}{216}$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{4}=\frac{16}{625}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5}=\frac{243}{1024}$

20. La mitad de los habitantes de Villaquebrado han nacido en el pueblo. Cuatro quinceavos de los habitantes vienen de Ciudad Racional, y el resto son de Cocientópolis. ¿Qué fracción de los habitantes vienen de esta última ciudad?

Habitantes de Villaquebrado: $\frac{1}{2}$

Habitantes de Ciudad Racional: $\frac{4}{15}$

Habitantes de Cocientópolis: $1-\frac{1}{2}-\frac{4}{15}=\frac{7}{30}$

21. Elvira estuvo varios días de vacaciones. La tercera parte los pasó en Francia, la cuarta parte, en Suiza, y los 10 días restantes en Italia. ¿Cuánto duraron sus vacaciones?

Entre Francia y Suiza suman $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$ de sus vacaciones.

Por tanto, los 10 días en Italia representan $1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$.

Sus vacaciones duraron $10:\frac{5}{12}=24$ días.

22. Actividad interactiva

23. Realiza las siguientes operaciones.

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6}$

b) $\frac{2}{9}-\frac{5}{6}:\frac{4}{3}$

c) $\frac{7}{20}+\frac{13}{12}\cdot\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8}+\frac{7}{12}$

e) $\frac{13}{6}:\frac{5}{2}-\frac{19}{24}$

f) $\frac{5}{3}:\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{5}$

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{4}+\frac{5}{24}=\frac{18}{24}+\frac{5}{24}=\frac{23}{24}$

b) $\frac{2}{9}-\frac{5}{6}:\frac{4}{3}=\frac{2}{9}-\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4}=\frac{2}{9}-\frac{5}{8}=\frac{16-45}{72}=\frac{-29}{72}$

c) $\frac{7}{20}+\frac{13}{12}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{20}+\frac{13}{18}=\frac{63+130}{180}=\frac{193}{180}$

d) $\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{8}+\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{7}{12}=\frac{6+7}{12}=\frac{13}{12}$

e) $\frac{13}{6}:\frac{5}{2}-\frac{19}{24}=\frac{26}{30}-\frac{19}{24}=\frac{104-95}{120}=\frac{9}{120}=\frac{3}{40}$

f) $\frac{5}{3}:\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{5}=\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{6}{5}=9$

24. Resuelve las operaciones siguientes.

a) $\frac{7}{9}+\frac{5}{9}\cdot 8$

b) $11-\frac{5}{4}:\frac{3}{4}$

c) $\frac{7}{20}+\frac{13}{12}\cdot 5$

d) $\frac{3}{4}:2\cdot\frac{4}{5}$

e) $11-4\cdot\frac{17}{24}$

f) $9:\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{5}$

a) $\frac{7}{9}+\frac{5}{9}\cdot 8=\frac{7}{9}+\frac{40}{9}=\frac{47}{9}$

b) $11-\frac{5}{4}:\frac{3}{4}=11-\frac{5}{3}=\frac{33-5}{3}=\frac{28}{3}$

c) $\frac{7}{20}+\frac{13}{12}\cdot 5=\frac{7}{20}+\frac{65}{12}=\frac{21}{60}+\frac{325}{60}=\frac{346}{60}=\frac{173}{30}$

d) $\frac{3}{4}:2\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$

e) $11-4\cdot\frac{17}{24}=11-\frac{17}{6}=\frac{66-17}{6}=\frac{49}{6}$

f) $9:\frac{1}{9}\cdot\frac{3}{5}=81\cdot\frac{3}{5}=\frac{243}{5}$

25. Efectúa las siguientes operaciones combinadas.

a) $\frac{3}{8}-\frac{5}{6}:\frac{4}{3}+\frac{2}{9}$

b) $\frac{5}{3}:3-3:\frac{5}{3}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}:\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}$

d) $\frac{11}{12}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{16}$

e) $\frac{7}{6}-\frac{11}{3}:4+\frac{14}{9}$

f) $\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3$

g) $\frac{3}{40}-\frac{12}{28}:\frac{2}{3}+\frac{23}{36}$

h) $10:\frac{15}{4}\cdot 8-\frac{24}{35}$

a) $\frac{3}{8}-\frac{5}{6}:\frac{4}{3}+\frac{2}{9}=\frac{3}{8}-\frac{15}{24}+\frac{2}{9}=\frac{27-45+16}{72}=\frac{-2}{72}=\frac{-1}{36}$

b) $\frac{5}{3}:3-3:\frac{5}{3}=\frac{5}{9}-\frac{9}{5}=\frac{25-81}{45}=\frac{-56}{45}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}:\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{5}+\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{5}+\frac{8}{5}=\frac{10}{5}=2$

d) $\frac{11}{12}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{16}=\frac{11}{12}-\frac{3}{20}-\frac{1}{16}=\frac{220-36-15}{240}=\frac{169}{240}$

e) $\frac{7}{6}-\frac{11}{3}:4+\frac{14}{9}=\frac{7}{6}-\frac{11}{12}+\frac{14}{9}=\frac{42-33+56}{36}=\frac{65}{36}$

f) $\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{3}{8}+\frac{27}{8}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$

g) $\frac{3}{40}-\frac{12}{28}:\frac{2}{3}+\frac{23}{36}=\frac{3}{40}-\frac{36}{56}+\frac{23}{36}=\frac{189-1620+1610}{2520}=\frac{179}{2520}$

h) $10:\frac{15}{4}\cdot 8-\frac{24}{35}=\frac{40}{15}\cdot 8-\frac{24}{35}=\frac{320}{15}-\frac{24}{35}=\frac{2240}{105}-\frac{72}{105}=\frac{2168}{105}$

32. Escribe el número a partir de los datos indicados en cada caso.

a) Parte entera: 3, período: 5, anteperíodo: 8

b) Anteperíodo: 46, parte entera: 0, período: 1

c) Anteperíodo: 452, período: 301, parte entera: 56

a) 3,855 555… b) 0,461 11… c) 56,452 301 301 301…

33. Expresa en forma decimal las siguientes fracciones, indicando de qué tipo es el número obtenido.

a) $\frac{18}{5}$ c) $\frac{23}{15}$ e) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{13}{9}$ d) $\frac{35}{6}$ f) $\frac{441}{63}$

a) $\frac{18}{5} = 3{,}6$, decimal exacto

b) $\frac{13}{9} = 1{,}\widehat{4}$, periódico puro

c) $\frac{23}{15} = 1{,}5\widehat{3}$, periódico mixto

d) $\frac{35}{6} = 5{,}8\widehat{3}$, periódico mixto

e) $\frac{5}{7} = 0{,}\widehat{714285}$, periódico puro

f) $\frac{441}{63} = 7$, entero

34. Indica de qué tipo es el resultado correspondiente en cada caso, sin hacer la división.

a) $\frac{10}{27}$ c) $\frac{23}{11}$ e) $\frac{28}{56}$

b) $\frac{13}{48}$ d) $\frac{325}{14}$ f) $\frac{90}{54}$

a) $\frac{10}{3^3}$, periódico puro

c) $\frac{23}{11}$, decimal puro

e) $\frac{28}{56} = \frac{1}{2}$, decimal exacto

b) $\frac{13}{2^4 \cdot 3}$, periódico mixto

d) $\frac{325}{2 \cdot 7}$, periódico mixto

f) $\frac{90}{54} = \frac{5}{3}$, periódico puro

35. Halla la fracción generatriz de los siguientes números.

a) $4{,}8$ d) $25{,}\widehat{4}$ g) $1{,}00\widehat{3}$

b) $3{,}\widehat{12}$ e) $0{,}1\widehat{16}$ h) $2{,}\widehat{09}$

c) $23{,}714$ f) $34{,}\widehat{239}$ i) $0{,}\widehat{019}$

a) $\frac{48}{10} = \frac{24}{5}$

d) $\frac{254-25}{9} = \frac{229}{9}$

g) $\frac{1003-100}{900} = \frac{903}{900} = \frac{301}{300}$

b) $\frac{312-3}{99} = \frac{309}{99} = \frac{103}{33}$

e) $\frac{116-1}{990} = \frac{115}{990} = \frac{23}{198}$

h) $\frac{209-2}{99} = \frac{207}{99} = \frac{23}{11}$

c) $\frac{23\,714}{1000} = \frac{11\,857}{500}$

f) $\frac{34\,239-34}{999} = \frac{34\,205}{999}$

i) $\frac{19}{999}$

36. Actividad resuelta.

37. Realiza estas operaciones pasando los decimales a fracciones. Expresa el resultado en forma decimal.

a) $\frac{7}{10}+2{,}15$ b) $4{,}5+3{,}21+0{,}17$ c) $\frac{12}{15}-4{,}65$

a) $\frac{7}{10}+\frac{215}{100}=\frac{70}{100}+\frac{215}{100}=\frac{285}{100}=2{,}85$

b) $\frac{45}{10}+\frac{321}{100}+\frac{17}{100}=\frac{450}{100}+\frac{321}{100}+\frac{17}{100}=\frac{788}{100}=7{,}88$

c) $\frac{12}{15}-\frac{465}{100}=\frac{4}{5}-\frac{93}{20}=\frac{-77}{20}=-3{,}85$

38. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a) $0{,}5-0{,}\overset{\frown}{5}:5$, c) $0{,}05\cdot\frac{4}{5}+1{,}\overset{\frown}{05}-1{,}0\overset{\frown}{2}$

b) $\left(\frac{3}{4}-0{,}39\right):0{,}\overset{\frown}{36}$ d) $1{,}1\overset{\frown}{6}-2:2{,}\overset{\frown}{4}$

a) $\frac{5}{10}-\frac{5}{9}:5=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}==\frac{9}{18}-\frac{2}{18}=\frac{7}{18}$

b) $\left(\frac{3}{4}-\frac{39}{100}\right):\frac{36}{99}=\left(\frac{75}{100}-\frac{39}{100}\right):\frac{36}{99}=\frac{36}{100}:\frac{36}{99}=\frac{99}{100}$

c) $\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{5}+\frac{104}{99}-\frac{92}{90}=\frac{1}{25}+\frac{104}{99}-\frac{46}{45}=\frac{99+2600-2530}{2475}=\frac{169}{2475}$

d) $\frac{105}{90}-2:\frac{22}{9}=\frac{7}{6}-\frac{9}{11}=\frac{77}{66}-\frac{54}{66}=\frac{23}{66}$

39. Los números decimales correspondientes a las fracciones $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$ y $\frac{1}{7}$ son periódicos puros. Encuentra sus períodos.

¿Hay alguna relación entre el número de cifras del denominador y la longitud del período?

$\frac{1}{9}=0{,}\overset{\frown}{1}$, período: 1 $\frac{1}{99}=0{,}\overset{\frown}{01}$, período: 01 $\frac{1}{7}=0{,}\overset{\frown}{142857}$, período: 142857

No hay relación entre el número de cifras del denominador y la longitud del período.

40. Trunca los siguientes números al orden indicado.

a) 33,5024 a las décimas c) 2,9995 a las milésimas

b) 688,159 a las centésimas d) 48,09999 a las unidades

a) 33,5 b) 688,15 c) 2,999 d) 48

41. Redondea los siguientes números al orden indicado.

a) 91,422 a las unidades c) 777,310099 a las milésimas

b) 0,3579 a las décimas d) 9,999 a las centésima

a) 91 b) 0,4 c) 777,310 d) 10

42. Trunca y redondea a las centésimas e indica si se trata de una aproximación por defecto o por exceso.

a) $\frac{35}{6}$ d) $\frac{128}{125}$ g) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{23}{11}$ e) $\frac{83}{99}$ h) $\frac{548}{999}$

c) $\frac{32}{15}$ f) $\frac{65}{3}$ i) $\frac{328}{415}$

a) $\frac{35}{6} = 5{,}8\widehat{3}$; truncado: 5,83; redondeado: 5,83 (defecto)

b) $\frac{23}{11} = 2{,}\widehat{09}$; truncado: 2,09; redondeado: 2,09 (defecto)

c) $\frac{32}{15} = 2{,}1\widehat{3}$; truncado: 2,13; redondeado: 2,13 (defecto)

d) $\frac{128}{125} = 1{,}024$; truncado: 1,02; redondeado: 1,02 (defecto)

e) $\frac{83}{99} = 0{,}\widehat{83}$; truncado: 0,83; redondeado: 0,84 (exceso)

f) $\frac{65}{3} = 21{,}\widehat{6}$; truncado: 21,66; redondeado: 21,67 (exceso)

g) $\frac{5}{7} = 0{,}\widehat{714285}$; truncado: 0,71; redondeado: 0,71 (defecto)

h) $\frac{548}{999} = 0{,}\widehat{548}$; truncado: 0,54; redondeado: 0,55 (exceso)

i) $\frac{328}{415} = 0{,}7903...$; truncado: 0,79; redondeado: 0,79 (defecto)

43. Calcula el error absoluto y el error relativo cometidos al tomar 2,3 como valor aproximado de $2{,}\widehat{3}$.

Error absoluto: $\left|2{,}\widehat{3} - 2{,}3\right| = \frac{7}{3} - \frac{23}{10} = \frac{70-69}{30} = \frac{1}{30}$

Error relativo: $\frac{1}{30} : \frac{7}{3} = \frac{1}{70}$

44. Al medir una cuerda de 15,680 m, se produce un error relativo de 0,05. ¿Qué error absoluto se ha cometido?

El error absoluto será $0{,}05 \cdot 15{,}680 = 0{,}784$ m

45. En la tienda del barrio venden los huevos por docenas. Una docena cuesta 2,80 €.

a) Si se pudiera comprar un huevo por separado, ¿cuál sería su precio? Redondea la cantidad a los céntimos.

b) Multiplica el precio que has obtenido al redondear por 12, para saber lo que costaría una docena a ese precio. ¿Qué ocurre?

c) Hoy ha subido 3 CENT el precio de la docena de huevos. Responde a las dos cuestiones anteriores con el nuevo dato. ¿Qué observas?

a) $2{,}80 : 12 = 0{,}2\widehat{3} \Rightarrow 0{,}23$ €

b) $12 \cdot 0{,}23 = 2{,}76$ €. La docena costaría 4 CENT más barata.

c) $2{,}83 : 12 = 0{,}2358\widehat{3} \Rightarrow 0{,}24$ € . Un huevo costaría 1 CENT más.

$12 \cdot 0{,}24 = 2{,}88$ €. La docena costaría 8 CENT más cara.

46. Escribe la fracción correspondiente a cada enunciado.

a) He recorrido 20 km de 54 km.

b) El bizcocho tarda en hacerse una hora y media.

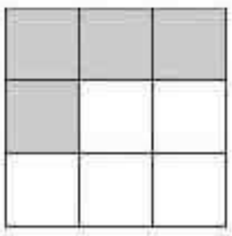
c) En el depósito quedan seis décimas partes de aceite.

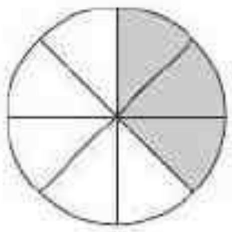
d) Existe una probabilidad de 1 entre 100 de que me toque el premio.

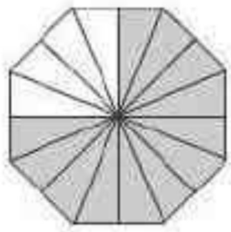
a) $\frac{20}{54}=\frac{10}{27}$ b) $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ c) $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{100}$

47. Representa en tu cuaderno las siguientes figuras geométricas y colorea la fracción indicada.

a) $\frac{4}{9}$ de un cuadrado b) $\frac{3}{8}$ de un círculo c) $\frac{12}{16}$ de un octógono

a)


b)


c)


48. Calcula la fracción de cantidad en cada caso.

a) $\frac{3}{4}$ de 56 b) $\frac{7}{10}$ de 80 c) $\frac{11}{9}$ de 18 d) $\frac{8}{3}$ de 39

a) $\frac{3\cdot 56}{4}=3\cdot 14=42$

b) $\frac{7\cdot 80}{10}=7\cdot 8=56$

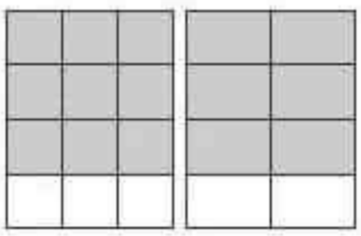
c) $\frac{11\cdot 18}{9}=11\cdot 2=22$

d) $\frac{8\cdot 39}{3}=8\cdot 13=104$

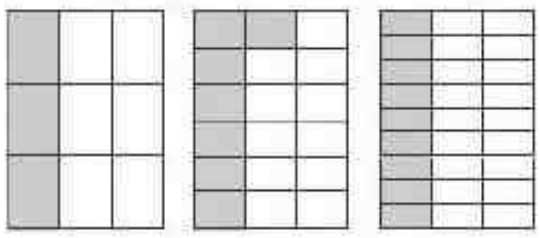
49. Representa las siguientes fracciones e indica si son equivalentes a partir de su gráfica.

a) $\frac{9}{12}$ y $\frac{6}{8}$ b) $\frac{3}{9}$, $\frac{7}{18}$ y $\frac{9}{27}$

a) Son equivalentes.



b) No son equivalentes.



50. Escribe tres fracciones equivalentes a $\frac{6}{18}$ por amplificación y tres por simplificación.

Por amplificación: $\frac{6}{18}=\frac{12}{36}=\frac{18}{54}=\frac{24}{72}$

Por simplificación: $\frac{6}{18}=\frac{3}{9}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

AUTOEVALUACIÓN

1. Simplifica las siguientes fracciones hasta obtener la fracción irreducible.

a) $\frac{48}{64}$ c) $\frac{120}{3600}$ e) $\frac{483}{46}$

b) $\frac{36}{99}$ d) $\frac{63}{91}$ f) $\frac{266}{114}$

a) $\frac{48}{64}=\frac{3}{4}$ c) $\frac{120}{3600}=\frac{1}{30}$ e) $\frac{483}{46}=\frac{21}{2}$

c) $\frac{36}{99}=\frac{4}{11}$ d) $\frac{63}{91}=\frac{9}{13}$ f) $\frac{266}{114}=\frac{7}{3}$

2. Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes.

a) $\frac{16}{54}$ y $\frac{24}{81}$ b) $\frac{15}{75}$ y $\frac{12}{72}$ c) $\frac{36}{92}$ y $\frac{45}{115}$

a) $\frac{16}{54}=\frac{8}{27}$ y $\frac{24}{81}=\frac{8}{27} \Rightarrow$ Son equivalentes.

b) $\frac{15}{75}=\frac{1}{5}$ y $\frac{12}{72}=\frac{1}{6} \Rightarrow$ No son equivalentes.

c) $\frac{36}{92}=\frac{9}{23}$ y $\frac{45}{115}=\frac{9}{23} \Rightarrow$ Son equivalentes.

3. Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones.

$$\frac{5}{8}, \frac{12}{25}, \frac{7}{10}, \frac{5}{12}$$

$\frac{5}{8}=\frac{375}{600}$ $\frac{12}{25}=\frac{288}{600}$ $\frac{7}{10}=\frac{420}{600}$ $\frac{5}{12}=\frac{250}{600}$

$$\frac{250}{600}<\frac{288}{600}<\frac{375}{600}<\frac{420}{600} \Rightarrow \frac{5}{12}<\frac{12}{25}<\frac{5}{8}<\frac{7}{10}$$

4. Opera y simplifica todo lo posible.

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{25}$ b) $\frac{19}{36}:\frac{5}{4}-\frac{11}{20}$ c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{3}\right)$ d) $\frac{4}{9}\cdot 3-\left[\frac{5}{8}-1\right]:\frac{3}{4}$

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}\cdot\frac{12}{25}=\frac{3}{8}+\frac{2}{5}=\frac{15+16}{40}=\frac{31}{40}$

b) $\frac{19}{36}:\frac{5}{4}-\frac{11}{20}=\frac{19\cdot 4}{36\cdot 5}-\frac{11}{20}=\frac{19}{45}-\frac{11}{20}=\frac{76-99}{180}=\frac{-23}{180}$

c) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{6}\cdot\frac{8}{3}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{7}{9}-\frac{4}{9}\right)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$

d) $\frac{4}{9}\cdot 3-\left[\frac{5}{8}-1\right]:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}+\frac{3}{8}:\frac{3}{4}=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{11}{6}$

5. Opera y simplifica.

a) $\left[\frac{3}{2}:\left(\frac{5}{2}-1\right)\right]+\frac{3}{2}:\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}$

b) $2:\frac{15}{8}\cdot\left[\frac{11}{6}-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}-2\right)\right]$

a) $\left[\frac{3}{2}:\left(\frac{5}{2}-1\right)\right]+\frac{3}{2}:\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}=\left[\frac{3}{2}:\frac{3}{2}\right]+\frac{3\cdot4\cdot5}{2\cdot5\cdot6}=1+1=2$

b) $2:\frac{15}{8}\cdot\left[\frac{11}{6}-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}-2\right)\right]=\frac{16}{15}\cdot\left[\frac{11}{6}-\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\right]=\frac{16}{15}\cdot\left[\frac{11}{6}+\frac{4}{6}\right]=\frac{16}{15}\cdot\frac{15}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$

6. Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales.

a) 9,25 b) $12,\widehat{36}$ c) $1,19\widehat{4}$

a) $9{,}25=\frac{925}{100}=\frac{37}{4}$

b) $12,\widehat{36}=\frac{1236-12}{99}=\frac{1224}{99}=\frac{136}{11}$

c) $1,19\widehat{4}=\frac{1194-119}{900}=\frac{1075}{900}=\frac{43}{36}$

7. Redondea a las centésimas los siguientes números e indica en cada caso si has aproximado por defecto o por exceso.

a) 3,55877 c) 2,0624 e) 19,195

b) 0,35621 d) 11,0230 f) 21,2121

a) 3,56 (exceso) c) 2,06 (defecto) e) 19,20 (exceso)

b) 0,36 (exceso) d) 11,02 (defecto) f) 21,21 (defecto)

8. Calcula el error absoluto y el error relativo cometidos al redondear 2,25 a las décimas.

Error absoluto: $|2{,}3-2{,}25|=0{,}05$. Error relativo: $\frac{0{,}05}{2{,}25}=\frac{5}{225}=\frac{1}{45}$

9. El agua de una provincia procede de tres embalses. El primero aporta $\frac{3}{8}$ de la cantidad total de agua; el segundo, $\frac{7}{18}$, y el último, el resto. Ordena los embalses según la cantidad de agua que aportan, de mayor a menor.

El primer embalse aporta $\frac{3}{8}=\frac{27}{72}$ y el segundo, $\frac{7}{18}=\frac{28}{72}$ El último aporta $1-\frac{27}{72}-\frac{28}{72}=\frac{72-27-28}{72}=\frac{17}{72}$.
El segundo aporta la mayor cantidad, seguido del primero y del tercero.

10. De los músicos de una banda, $\frac{1}{5}$ tocan instrumentos de percusión. De los que quedan, la mitad tocan instrumentos de cuerda y los 8 músicos restantes tocan instrumentos de viento.
¿Cuántos músicos tiene la orquesta?

Hay $\frac{1}{5}$ que tocan instrumentos de percusión y $\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$ que tocan instrumentos de cuerda.

Los 8 que tocan instrumentos de viento representan $1-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=\frac{5-1-2}{5}=\frac{2}{5}$ del total.

La orquesta tiene $8:\frac{2}{5}=20$ músicos.

3 Potencias y raíces

1. Expresa los productos en forma de potencia.

a) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$

b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

c) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$

d) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

a) 6^5

b) 2^{10}

c) $(-1)^6$

d) $(-5)^3$

2. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a) 5^3

b) 2^8

c) 3^5

d) $(-3)^4$

e) $(-2)^5$

f) $(-11)^2$

g) $(-1)^{35}$

h) 3^6

i) 7^3

a) 125

b) 256

c) 243

d) 81

e) –32

f) 121

g) –1

h) 729

i) 343

3. Copia en tu cuaderno y completa la tabla.

Potencia	Base	Exponente	Resultado
2^3	●●	●●	●●
●●	5	4	●●
●●	●●	3	–729
●●	–2	●●	–128

Potencia	Base	Exponente	Resultado
2^3	2	3	8
5^4	5	4	625
$(-9)^3$	–9	3	–729
$(-2)^7$	–2	7	–128

4. Sin realizar la operación, indica el signo que tendrá el resultado.

a) $(-2)^{15}$

b) $(-8)^{32}$

c) $(-5)^{2017}$

d) $(-2135)^{315}$

a) Negativo

b) Positivo

c) Negativo

d) Negativo

5. Actividad resuelta.

6. Calcula las siguientes potencias.

a) 3^7 **d)** $(-5)^4$ **g)** -1^{13}

b) -3^7 **e)** -5^4 **h)** 1^{13}

c) $(-3)^7$ **f)** 5^4 **i)** $(-1)^{13}$

a) 2187 **d)** 625 **g)** –1

b) –2187 **e)** –625 **h)** 1

c) –2187 **f)** 625 **i)** –1

7. Copia y completa las siguientes expresiones.

a) $3^{\bullet} = 243$ **c)** $10^{\bullet} = 10\,000\,000$ **e)** $(-4)^{\bullet} = 4^8$ **g)** $\bullet^9 = 512$

b) $(-4)^5 = \bullet$ **d)** $(-6)^{\bullet} = -216$ **f)** $2^{\bullet} = 128$ **h)** $5^{\bullet} = 3125$

a) $3^5 = 243$ **c)** $10^7 = 10\,000\,000$ **e)** $(-4)^8 = 4^8$ **g)** $2^9 = 512$

b) $(-4)^5 = -1024$ **d)** $(-6)^3 = -216$ **f)** $2^7 = 128$ **h)** $5^5 = 3125$

8. Al calcular una potencia de exponente 4 se obtiene como resultado 81.

a) ¿Qué valor tiene la base?

b) ¿De cuántas maneras puedes escribir 81 en forma de potencia?

a) 3 o (–3)

b) De cinco maneras: 3^4, $(-3)^4$, 9^2, $(-9)^2$, 81^1

9. Un famoso cantante ha colgado un video en Internet. Se ha calculado que, durante la última hora, el número de visitas se multiplicaba por 2 cada minuto.

a) Si al comienzo de esa última hora, habían visto el video 16 personas, ¿cuántas visitas tenía pasados 5 minutos? ¿Y 10 minutos? ¿Y 15 minutos?

b) Escribe la potencia que indica el número de visitas que tiene el video al finalizar la primera hora.

a) A los 5 minutos se multiplicó por 2^5, por lo que tenía $16 \cdot 2^5 = 512$ visitas.

A los 10 minutos tenía $16 \cdot 2^5 \cdot 2^5 = 16384$ visitas.

A los 15 minutos tenía $16 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 = 524\,288$ visitas.

b) Al finalizar la primera hora tenía $16 \cdot 2^{60} = 2^4 \cdot 2^{60} = 2^{64}$ visitas.

10. Actividad interactiva.

11. Escribe como una única potencia.

a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2$ **d)** $3^{12} \cdot 3^{35} \cdot 3^{88}$

b) $(-4)^5 \cdot (-4)^4$ **e)** $(-3)^{50} \cdot (-3)^{42} \cdot (-3)^{39}$

c) $a^4 \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot a$ **f)** $x^{19} \cdot x^{80} \cdot x$

a) 2^6 **d)** 3^{135}

b) $(-4)^9$ **e)** $(-3)^{131}$

c) a^{10} f) x^{100}

12. Expresa los cocientes como una única potencia.

a) $2^{20} : 2^4$ **b)** $\frac{(-2)^{10}}{(-2)^2}$ **c)** $\frac{7^{23}}{7^8}$ **d)** $(-6)^{50} : (-6)^{10}$

a) 2^{16} **b)** $(-2)^8$ **c)** 7^{15} **d)** $(-6)^{40}$

13. Expresa usando una única potencia.

a) $\left((-3)^5\right)^{10}$ **b)** $\left((2^2)^5\right)^{10}$ **c)** $\left(m^3\right)^5$

a) $(-3)^{50}$ **b)** 2^{100} **c)** m^{15}

14. Actividad resuelta.

15. Escribe las siguientes operaciones como una única potencia.

a) $\frac{2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^7}{2^5 \cdot 2^6}$ **b)** $\frac{x^3 \cdot (x^4)^2}{x^6 \cdot x \cdot x^2}$ **c)** $\frac{(-5)^3 \cdot \left((-5)^2\right)^5}{\left((-5)^3\right)^4 \cdot (-5)}$

a) 2^3 **b)** x^2 **c)** $(-5)^0$

16. Expresa como una única potencia.

a) $2^6 \cdot 5^6 \cdot 7^6$ **c)** $12^5 : 4^5 \cdot 3^5$ **e)** $(-27)^{12} : (-3)^{12}$

b) $21^8 : 3^8$ **d)** $4^{36} \cdot 7^{36}$ **f)** $(-3)^4 \cdot (-3)^6 : (-3)^5$

a) 70^6 **c)** 3^{10} **e)** $(-3)^{24}$

b) 7^8 **d)** 28^{36} **f)** $(-3)^5$

17. Actividad resuelta.

18. Escribe como una única potencia y calcula el resultado.

a) $9^8 : 3^9$ **d)** $3^5 \cdot 9^6 : 27^2$

b) $8^3 \cdot 2^5$ **e)** $25^4 : 125 \cdot 5^6$

c) $(16^3)^2 \cdot 8^2$ **f)** $(-4)^8 : (-2)^8$

a) $(3^2)^8 : 3^9 = 3^7 = 2\,187$ **d)** $3^5 \cdot (3^2)^6 : (3^3)^2 = 3^{11} = 177\,147$

b) $(2^3)^3 \cdot 2^5 = 2^{14} = 16\,384$ **e)** $(5^2)^4 : 5^3 \cdot 5^6 = 5^{11} = 48\,828\,125$

c) $\left((2^3)^3\right)^2 \cdot (2^4)^2 = 2^{26} = 67108864$ **f)** $(-2^2)^8 : (-2)^8 = 2^8 = 256$

19. Expresa como producto de potencias de factores primos.

a) $(2 \cdot 3 \cdot 7)^5$ **b)** 14^9 **c)** $(-12)^3$ **d)** 30^{10}

a) $2^5 \cdot 3^5 \cdot 7^5$ **b)** $2^9 \cdot 7^9$ **c)** $(-3 \cdot 2^2)^3 = (-3)^3 \cdot 2^6$ **d)** $2^{10} \cdot 3^{10} \cdot 5^{10}$

20. Escribe como potencia de un producto o de un cociente.

a) $3^4 \cdot 25^2$ **b)** 8^7 **c)** $x^{100} \cdot y^{50}$ **d)** $(-0,5 \cdot b)^{15}$

a) $(3 \cdot 5)^4$ b) $\left(\frac{24}{3}\right)^7$ c) $(x^2 \cdot y)^{50}$ d) $\left(\frac{-b}{2}\right)^{15}$

21. Actividad resuelta.

22. Calcula.

a) $\frac{16 \cdot 81 \cdot 25}{12 \cdot 300}$ **b)** $\frac{9^4 \cdot 27^3}{81^4}$ **c)** $\frac{30^{20} \cdot 49^5}{(210^4)^2 \cdot 100^5 \cdot 9^6}$

a) $\frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 3^2 = 9$

b) $\frac{(3^2)^4 \cdot (3^3)^3}{(3^4)^4} = \frac{3^8 \cdot 3^9}{3^{16}} = 3$

c) $\frac{(2 \cdot 3 \cdot 5)^{20} \cdot (7^2)^5}{\left((2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)^4\right)^2 \cdot (2^2 \cdot 5^2)^5 \cdot (3^2)^6} = \frac{2^{20} \cdot 3^{20} \cdot 5^{20} \cdot 7^{10}}{2^{18} \cdot 3^{20} \cdot 5^{18} \cdot 7^8} = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 4900$

23. Actividad resuelta.

24. Simplifica y opera la expresión $\frac{(4^2 + 3^2) \cdot 2^6}{(5-1)^3 \cdot (4+1)}$.

$\frac{(4^2 + 3^2) \cdot 2^6}{(5-1)^3 \cdot (4+1)} = \frac{(16+9) \cdot 2^6}{4^3 \cdot 5} = \frac{5^2 \cdot 2^6}{2^6 \cdot 5} = 5$

25. Calcula las siguientes potencias.

a) 3^{-4} **d)** $(-1)^{-3}$ **g)** $(-7)^{-3}$

b) 5^{-2} **e)** $(-2)^{-2}$ **h)** $(-6)^0$

c) 10^{-3} **f)** 4^0 **i)** 2^{-8}

a) $\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$ d) $\frac{1}{(-1)^3} = -1$ g) $\frac{1}{(-7)^3} = -\frac{1}{343}$

b) $\frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ e) $\frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$ h) 1

c) $\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$ f) 1 i) $\frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$

26. Resuelve las siguientes operaciones usando las propiedades de las potencias.

a) $3^{-2}\cdot 3^{0}\cdot 3^{5}$

b) $\dfrac{\left(3^{3}\right)^{-2}\cdot 3^{8}\cdot 3}{\left(3^{4}\cdot 3^{-2}\right)^{2}}$

c) $\dfrac{2^{3}\cdot 2^{-5}\cdot 2^{4}}{2^{-2}\cdot 2^{0}}$

d) $\dfrac{\left(5^{-2}\right)^{-3}\cdot 5^{5}\cdot 5^{-10}}{\left(\left(5^{2}\right)^{-1}\right)^{3}\cdot 5^{4}}$

a) $3^{3}=27$

b) $\dfrac{3^{-6}\cdot 3^{8}\cdot 3}{3^{8}\cdot 3^{-4}}=\dfrac{3^{3}}{3^{4}}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{2^{2}}{2^{-2}}=2^{4}=16$

d) $\dfrac{5^{6}\cdot 5^{5}\cdot 5^{-10}}{5^{-6}\cdot 5^{4}}=\dfrac{5}{5^{-2}}=5^{3}=125$

27. Comprueba que $\dfrac{1}{2^{-5}}=2^{5}$.

Utiliza esta propiedad para escribir $\dfrac{2^{-2}\cdot 2^{6}}{2^{-10}\cdot 2^{7}}$ usando solo potencias de exponente positivo, y calcula el resultado.

$$\frac{1}{2^{-5}}=\frac{1}{\frac{1}{2^{5}}}=1:\frac{1}{2^{5}}=2^{5}$$

Como $\dfrac{1}{2^{-10}}=2^{10}$ y $2^{-2}=\dfrac{1}{2^{2}}$, entonces $\dfrac{2^{-2}\cdot 2^{6}}{2^{-10}\cdot 2^{7}}=\dfrac{2^{10}\cdot 2^{6}}{2^{2}\cdot 2^{7}}=\dfrac{2^{16}}{2^{9}}=2^{7}=128$.

28. Actividad resuelta.

29. Calcula.

a) $\dfrac{\left(3^{-2}\cdot 7^{2}\right)^{-5}\cdot\left(7^{-2}\cdot 3^{-3}\right)^{-6}}{\left(\left(3^{-2}\right)^{-4}\right)^{2}}$

b) $\dfrac{1000^{-5}\cdot 32^{12}}{\left(125^{3}\right)^{-3}\cdot\left(64^{-2}\right)^{-3}}$

a) $\dfrac{3^{10}\cdot 7^{-10}\cdot 7^{12}\cdot 3^{18}}{3^{16}}=\dfrac{3^{28}\cdot 7^{2}}{3^{16}}=3^{12}\cdot 7^{2}$

b) $\dfrac{\left(\left(2\cdot 5\right)^{3}\right)^{-5}\cdot\left(2^{5}\right)^{12}}{\left(\left(5^{3}\right)^{3}\right)^{-3}\cdot\left(\left(2^{6}\right)^{-2}\right)^{-3}}=\dfrac{2^{-15}\cdot 5^{-15}\cdot 2^{60}}{5^{-27}\cdot 2^{36}}=2^{-15+60-36}\cdot 5^{-15-(-27)}=2^{9}\cdot 5^{12}$

30. Expresa en notación científica e indica el orden de magnitud.

a) Masa de una orca: 10 000 kg

b) Masa de un caballo: 500 kg

c) Masa de una hormiga: 0,000 002 kg

a) Masa de una orca: 10^{4} kg, orden 4

b) Masa de un caballo: $5\cdot 10^{2}$ kg, orden 2

c) Masa de una hormiga: $2\cdot 10^{-6}$ kg, orden −6

31. Escribe en notación científica los siguientes números e indica el orden de magnitud.

a) **1 020 000**

b) **0,000 005 59**

c) **0,000 113**

d) **79 508 000 000 000 000**

e) **0,000 000 000 000 066 1**

f) **11 232 000 000 000 000 000**

a) $1{,}02 \cdot 10^{6}$, orden 6

b) $5{,}59 \cdot 10^{-6}$, orden −6

c) $1{,}13 \cdot 10^{-4}$, orden −4

d) $7{,}9508 \cdot 10^{16}$, orden 16

e) $6{,}61 \cdot 10^{-14}$, orden −14

f) $1{,}1232 \cdot 10^{19}$, orden 19

32. Escribe en notación decimal los siguientes números.

a) $\mathbf{3{,}552 \cdot 10^{7}}$

b) $\mathbf{8{,}81 \cdot 10^{-6}}$

c) $\mathbf{5{,}014 \cdot 10^{9}}$

d) $\mathbf{9{,}99 \cdot 10^{12}}$

e) $\mathbf{2{,}06 \cdot 10^{-12}}$

f) $\mathbf{7{,}127 \cdot 10^{-8}}$

a) 35 520 000

b) 0,000 008 81

c) 5 014 000 000

d) 9990 000 000 000

e) 0,000 000 000 002 06

f) 0,000 000 071 27

33. Actividad resuelta.

34. Escribe en notación científica.

a) $\mathbf{2600 \cdot 10^{14}}$

b) $\mathbf{0{,}00035 \cdot 10^{16}}$

c) $\mathbf{490000 \cdot 10^{2}}$

d) $\mathbf{925{,}1 \cdot 10^{-8}}$

e) $\mathbf{0{,}000\,065 \cdot 10^{-12}}$

f) $\mathbf{49000 \cdot 10^{-2}}$

a) $2{,}6 \cdot 10^{17}$

b) $3{,}5 \cdot 10^{12}$

c) $4{,}9 \cdot 10^{7}$

d) $9{,}251 \cdot 10^{-6}$

e) $6{,}5 \cdot 10^{-17}$

f) $4{,}9 \cdot 10^{2}$

35. Opera en notación científica.

a) $\mathbf{(9{,}2 \cdot 10^{15}) \cdot (8{,}9 \cdot 10^{7})}$

b) $\mathbf{(2{,}5 \cdot 10^{20}) \cdot (3{,}6 \cdot 10^{-15})}$

c) $\mathbf{(3{,}2 \cdot 10^{15}) : (6{,}4 \cdot 10^{3})}$

d) $\mathbf{(4{,}8 \cdot 10^{11}) : (3{,}6 \cdot 10^{5})}$

e) $\mathbf{(4 \cdot 10^{5})^{4}}$

f) $\mathbf{(2{,}5 \cdot 10^{-4})^{-2}}$

a) $(9{,}2 \cdot 8{,}9) \cdot (10^{15} \cdot 10^{7}) = 81{,}88 \cdot 10^{22} = 8{,}188 \cdot 10^{23}$

b) $(2{,}5 \cdot 3{,}6) \cdot (10^{20} \cdot 10^{-15}) = 9 \cdot 10^{5}$

c) $(3{,}2 : 6{,}4) \cdot (10^{15} : 10^{3}) = 0{,}5 \cdot 10^{12} = 5 \cdot 10^{11}$

d) $(4{,}8 : 3{,}6) \cdot (10^{11} : 10^{5}) = 1{,}\widehat{3} \cdot 10^{6}$

e) $4^{4} \cdot (10^{5})^{4} = 256 \cdot 10^{20} = 2{,}56 \cdot 10^{22}$

f) $2{,}5^{-2} \cdot (10^{-4})^{-2} = \dfrac{1}{2{,}5^{2}} \cdot 10^{8} = \dfrac{1}{6{,}25} \cdot 10^{8} = 0{,}16 \cdot 10^{8} = 1{,}6 \cdot 10^{7}$

36. Opera y da el resultado en notación científica.

a) $\dfrac{(3\cdot10^{15}):(2\cdot10^{7})}{(4\cdot10^{3})\cdot(2\cdot10^{3})}$ **b)** $\dfrac{(2\cdot10^{-3})^{2}\cdot(2\cdot10^{3})^{-2}}{(5\cdot10^{3}):(3\cdot10^{5})}$

a) $\dfrac{(3\cdot10^{15}):(2\cdot10^{7})}{(4\cdot10^{3})\cdot(2\cdot10^{3})}=\dfrac{1{,}5\cdot10^{8}}{8\cdot10^{6}}=0{,}1875\cdot10^{2}=1{,}875\cdot10$

b) $\dfrac{(2\cdot10^{-3})^{2}\cdot(2\cdot10^{3})^{-2}}{(5\cdot10^{3}):(3\cdot10^{5})}=\dfrac{(4\cdot10^{-6})\cdot\left(\dfrac{1}{4}\cdot10^{-6}\right)}{\dfrac{5}{3}\cdot10^{-2}}=10^{-12}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot10^{2}=0{,}6\cdot10^{-10}=6\cdot10^{-11}$

37. El planeta Tierra tiene una masa de $5{,}9722\cdot10^{21}$ t. La de Marte es de $6{,}39\cdot10^{23}$ kg y la masa de Mercurio $3285\cdot10^{20}$ kg.

a) Ordena los planetas de mayor a menor masa.

b) Júpiter tiene una masa de $1\,898\,000\cdot10^{21}$ kg, Saturno de 568 300 000 000 000 000 000 · 10^{6} kg y Venus de $4{,}867\cdot10^{24}$ kg. Ordena los seis planetas de menor a mayor.

a) Se expresan todas las masas en la misma unidad (toneladas):

Tierra: $5{,}9722\cdot10^{21}$ t Marte: $6{,}39\cdot10^{20}$ t Mercurio: $3{,}285\cdot10^{20}$ t

Ordenados de mayor a menor: Tierra – Marte – Mercurio.

b) Se expresan todas las masas en la misma unidad (toneladas):

Júpiter: $1{,}898\cdot10^{24}$ t Saturno: $5{,}683\cdot10^{23}$ t Venus: $4{,}867\cdot10^{21}$ t

Ordenados de menor a mayor: Mercurio – Marte – Venus – Tierra – Saturno – Júpiter.

38. Calcula los cuadrados de estos números.

a) 7 **d) 15** **g) 21**

b) 25 **e) 40** **h) 32**

c) 30 **f) 50** **i) 200**

a) 49 **d)** 225 **g)** 441

b) 625 **e)** 1600 **h)** 1024

c) 900 **f)** 2500 **i)** 40000

39. Indica que números se han elevado al cuadrado para obtener los siguientes.

100	**169**	**225**	**400**	**900**	**12 100**	**1 000 000**
10	13	15	20	30	110	1 000

40. Si un número acaba en 3, ¿en qué cifra acaba su cuadrado? ¿Y si acaba en 5? Encuentra todos los valores que puede tener la última cifra de un cuadrado perfecto.

Si el número acaba en 3, su cuadrado acaba en 9. Si acaba en 5, su cuadrado acaba en 5.

Última cifra del número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Última cifra del cuadrado	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

41. Escribe los cuadrados de los números de dos cifras que acaban en 0.

a) El número 2025 es un cuadrado perfecto. ¿Entre qué números de los que has obtenido en el apartado anterior está?

b) ¿Qué número elevado al cuadrado da 2025?

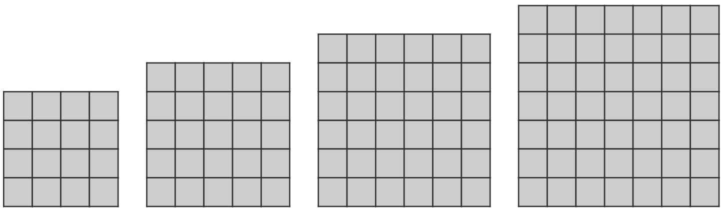
a) 2025 está entre 40 y 50.

Número	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Cuadrado	100	400	900	1600	2500	3600	4900	6400	8100

b) De los números naturales entre 40 y 50, el que tiene un cuadrado que acaba en 5 es 45: $45^2 = 2025$

42. Actividad resuelta.

43. Comprueba gráficamente si 19, 36 y 48 son cuadrados perfectos. Indica en los que no lo sean cuántas unidades sobran y cuántas harían falta para completar el siguiente cuadrado.



19 no es cuadrado perfecto, sobran 3 unidades o faltan 6.

36 es cuadrado perfecto, 6^2.

48 no es cuadrado perfecto, sobran 12 unidades o falta 1.

44. Un cuadrado está formado por 225 fichas.

a) ¿Cuántas fichas hay que quitar para que quede un cuadrado con 3 fichas menos en cada lado?

b) ¿Cuántas fichas hay que añadir para obtener el siguiente cuadrado?

c) ¿Cuál es el número menor de fichas que hay que quitar para construir un cuadrado más pequeño?

a) $225 = 15^2$. Para que quede $(15-3)^2 = 12^2 = 144$, hay que quitar 225 – 144 = 81 fichas.

b) El siguiente cuadrado es $16^2 = 256$, faltan 256 – 225 = 31 fichas.

c) El cuadrado anterior tiene $14^2 = 196$. Por tanto, hay que quitar 225 – 196 = 29 fichas.

45. Halla las raíces cuadradas de los siguientes números.

a) 49 **b) 169** **c) 64** **d) 100** **e) 400** **f) 225** **g) 0** **h) –16** **i) –169**

a) 7 y –7

b) 13 y –13

c) 8 y –8

d) 10 y –10

e) 20 y –20

f) 15 y –15

g) 0

h) No tiene raíces reales.

i) No tiene raíces reales.

46. Los alumnos del campeonato de kárate se han colocado sobre la superficie del pabellón formando un cuadrado.

a) Si hay entre 40 y 90 alumnos, ¿puedes decir exactamente cuántos son? ¿Hay más de una posibilidad?

b) Cuando han vuelto a clase, iban por parejas y no sobraba ninguno. ¿Cuántos eran?

a) Los cuadrados comprendidos entre 40 y 90 son 49, 64 y 81. Hay tres posibilidades.

b) De las tres opciones, el único número par es 64. Eran 64 alumnos.

47. Los números 9 y 16 son cuadrados perfectos.

a) Comprueba que su suma es un cuadrado perfecto.

b) ¿Será cierto que la suma de dos cuadrados perfectos es siempre un cuadrado perfecto? Compruébalo cambiando el 9 por otros cuadrados perfectos.

a) $9+16=25=5^2$

b) No siempre es cierto. Por ejemplo, 4 + 16 = 20, que no es cuadrado perfecto.

48. El número 3481 es un cuadrado perfecto.

a) Encuentra el siguiente número más cercano acabado en 00 que sea cuadrado perfecto.

b) Observa la terminación. ¿En qué cifras puede acabar la raíz de un cuadrado perfecto que acaba en 1?

c) Trata de encontrar la raíz de 3481.

a) $3600=60^2$

b) Debe ser el cuadrado de un número acabado en 1 o en 9.

c) $3481=59^2$. La raíz es 59.

49. Analiza y contesta:

Si dos números son cuadrados perfectos, su producto también lo es.

Usa esta propiedad para calcular la raíz de 1764, sabiendo que $1764=36\cdot 49$, y comprueba el resultado.

Como $\sqrt{36}=6$ y $\sqrt{49}=7$, $\sqrt{1764}=6\cdot 7=42$. En efecto, se cumple que $42^2=1764$.

50. Actividad interactiva.

51. Comprueba si las siguientes raíces son correctas sin calcularlas.

Número	Raíz entera	Resto
89	9	9
126	11	5
180	14	16
460	20	60
9081	95	56

Número	Raíz entera	Resto	Cuadrado de la raíz más el resto	¿Correcta?
89	9	9	$9^2+9=90$	No
126	11	5	$11^2+5=126$	Sí
180	14	16	$14^2+16=212$	No
460	20	60	$20^2+60=460$	Sí
9081	95	56	$95^2+56=9081$	Sí

52. Calcula las raíces cuadradas de los siguientes números utilizando el algoritmo.

a) 480 **c) 1000** **e) 155 478**

b) 600 **d) 1348** **f) 11 729**

a)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{4\ 80} & 21 \\ -4 & \overline{41\cdot 1 = 41} \\ \hline 080 & \\ -41 & \\ \hline 39 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6\ 00} & 24 \\ -4 & \overline{44\cdot 4 = 176} \\ \hline 200 & \\ -176 & \\ \hline 24 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{10\ 00} & 31 \\ -9 & \overline{61\cdot 1 = 61} \\ \hline 1\ 00 & \\ -61 & \\ \hline 39 & \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{13\ 48} & 36 \\ -9 & \overline{66\cdot 6 = 396} \\ \hline 4\ 48 & \\ -3\ 96 & \\ \hline 52 & \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{15\ 54\ 78} & 394 \\ -9 & \overline{69\cdot 9 = 621} \\ \hline 6\ 54 & \overline{784\cdot 4 = 3136} \\ -6\ 21 & \\ \hline 33\ 78 & \\ -31\ 36 & \\ \hline 2\ 42 & \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1\ 17\ 29} & 108 \\ -1 & \overline{20\cdot 0 = 0} \\ \hline 0\ 17 & \overline{208\cdot 8 = 1664} \\ -\ \ 0 & \\ \hline 17\ 29 & \\ -16\ 64 & \\ \hline 65 & \end{array}$$

53. Al utilizar el algoritmo de la raíz cuadrada se separan las cifras del número en grupos de dos.

a) ¿Cuántas cifras podrá tener la raíz entera de un número de 9 cifras?

b) ¿Cuántas cifras podrá tener la raíz entera de un número de 12 cifras?

a) Si el número tiene 9 cifras habrá cinco grupos, la raíz tendrá 5 cifras.

b) Si el número tiene 12, la raíz tiene 6 cifras.

54. Copia y completa en tu cuaderno.

a) **$\bullet < 222 < \bullet$**

La raíz entera de • es •.

El resto es $222 - \bullet = \bullet - \bullet = \bullet$.

b) **$16^2 < \bullet < \bullet$**

La raíz entera de • es •.

El resto es $\bullet - \bullet = \bullet - \bullet = \bullet$.

c) **$\bullet < \bullet < 21^2$**

La raíz entera de • es •.

El resto es $\bullet - \bullet = \bullet - \bullet = 12$.

a) $14^2 < 222 < 15^2$

La raíz entera de 222 es 14.

El resto es $222 - 14^2 = 222 - 196 = 26$.

b) $16^2 < 261 < 17^2$

La raíz entera de 261 es 16.

El resto es $261 - 16^2 = 261 - 256 = 5$.

c) Respuesta modelo: $20^2 < 412 < 21^2$

La raíz entera de 412 es 20.

El resto es $412 - 20^2 = 412 - 400 = 12$.

55. Actividad resuelta

56. ¿Cuántos números tienen raíz cuadrada exacta o entera igual a 14?

Como $14^2 = 196$ y $15^2 = 225$, los números son 196, 197, 198…, 224. Hay 29 números.

57. Calcula las raíces cuadradas siguientes por estimación, indicando si son exactas o enteras, y calcula el resto.

a) $\sqrt{75}$ **b)** $\sqrt{240}$ **c)** $\sqrt{144}$ **d)** $\sqrt{841}$

a) $\sqrt{75} = 8$, entera, resto: 11

b) $\sqrt{240} = 15$, entera, resto: 15

c) $\sqrt{144} = 12$, exacta

d) $\sqrt{841} = 29$, exacta

58. Actividad resuelta.

59. Calcula por aproximación las raíces cuadradas de los siguientes números.

a) 888 **b)** 9000 **c)** 23954 **d)** 688 221

a) $\sqrt{888} = 29$, resto: 47

b) $\sqrt{9000} = 94$, resto: 164

c) $\sqrt{23954} = 154$, resto: 238

d) $\sqrt{688\,221} = 829$, resto: 980

60. Actividad interactiva.

61. Desarrolla como cociente de potencias y calcula el resultado.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ **c)** $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$ **d)** $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25} = 0{,}36$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{6^2}{5^2} = \frac{36}{25} = 1{,}44$

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{4}\right)^3 = \frac{7^3}{4^3} = \frac{343}{64} = 5{,}359375$

62. Calcula las raíces cuadradas de las siguientes fracciones.

a) $\sqrt{\frac{16}{36}}$ **b)** $\sqrt{\frac{49}{25}}$ **c)** $\sqrt{\frac{1}{64}}$ **d)** $\sqrt{\frac{225}{196}}$

a) $\sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **b)** $\sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}$ **c)** $\sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$ **d)** $\sqrt{\frac{225}{196}} = \frac{15}{14}$

63. Actividad resuelta.

64. Calcula.

a) $\sqrt{\frac{32}{50}}$ **b)** $\sqrt{\frac{245}{405}}$ **c)** $\sqrt{\frac{600}{1536}}$ **d)** $\sqrt{\frac{343}{7}}$

a) $\sqrt{\frac{32}{50}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ **b)** $\sqrt{\frac{245}{405}} = \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$ **c)** $\sqrt{\frac{600}{1536}} = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$ **d)** $\sqrt{\frac{343}{7}} = \sqrt{49} = 7$

65. Aplica las propiedades de las potencias y calcula el resultado.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \frac{3^6}{2^4}$

b) $\left(\frac{3}{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)^2$

c) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{3^3}{2^2}\right)^2$

d) $\left(\frac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^{-5}$

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \frac{3^6}{2^4} = \frac{2^5}{3^5} \cdot \frac{3^6}{2^4} = 3 \cdot 2 = 6$

b) $\left(\frac{3}{2} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} \cdot 2^3\right)^2 = \left(3 \cdot 2^2\right)^2 = 3^2 \cdot 2^4 = 9 \cdot 16 = 144$

c) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{-3} : \left(\frac{3^3}{2^2}\right)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^3 : \frac{3^6}{2^4} = \frac{7^2 \cdot 5^3 \cdot 2^4}{5^2 \cdot 7^3 \cdot 3^6} = \frac{5 \cdot 2^4}{7 \cdot 3^6} = \frac{80}{5103} = 0.01567705271$

d) $\left(\frac{7}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^{-5} = \frac{7^3}{2^3} \cdot \frac{11^2}{7^2} \cdot \frac{11^5}{2^5} = \frac{7 \cdot 11^7}{2^8} = \frac{136410197}{256} = 532852.332031$

66. Actividad resuelta.

67. Calcula.

a) $\left(\frac{16}{25^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5^6 \cdot 2}{3^7}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{9^4}{5^{12}}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{4^5}{12^7}\right)^{-1} : \left(\frac{16}{9}\right)^{20}$

c) $\frac{9^{12}}{100^6} \cdot \left(\frac{3^5}{5^2} \cdot \frac{25}{9^6}\right)^{-3}$

d) $\left(\sqrt{\frac{30}{120}}\right)^6 : \left(\frac{25}{125}\right)^{-4} \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$

a) $\left(\frac{16}{25^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{5^6 \cdot 2}{3^7}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{9^4}{5^{12}}\right)^{-2} = \left(\frac{2^4}{\left(5^2\right)^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3^7}{5^6 \cdot 2}\right)^2 \cdot \left(\frac{5^{12}}{\left(3^2\right)^4}\right)^2 = \frac{2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^{24}}{5^{12} \cdot 5^{12} \cdot 2^2 \cdot 3^{16}} = \frac{2^{10}}{3^2}$

b) $\left(\frac{3}{8}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{4^5}{12^7}\right)^{-1} : \left(\frac{16}{9}\right)^{20} = \left(\frac{2^3}{3}\right)^6 \cdot \frac{\left(2^2 \cdot 3\right)^7}{\left(2^2\right)^5} : \left(\frac{2^4}{3^2}\right)^{20} = \frac{2^{18} \cdot 2^{14} \cdot 3^7 \cdot 3^{40}}{3^6 \cdot 2^{10} \cdot 2^{80}} = \frac{3^{41}}{2^{58}}$

c) $\frac{9^{12}}{100^6} \cdot \left(\frac{3^5}{5^2} \cdot \frac{25}{9^6}\right)^{-3} = \frac{\left(3^2\right)^{12}}{\left(2^2 \cdot 5^2\right)^6} \cdot \left(\frac{5^2}{3^5} \cdot \frac{\left(3^2\right)^6}{5^2}\right)^3 = \frac{3^{24}}{2^{12} \cdot 5^{12}} \cdot \frac{5^6}{3^{15}} \cdot \frac{3^{36}}{5^6} = \frac{3^{45}}{2^{12} \cdot 5^{12}}$

d) $\left(\sqrt{\frac{30}{120}}\right)^6 : \left(\frac{25}{125}\right)^{-4} \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-3} = \left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^6 : \left(\frac{125}{25}\right)^4 \cdot \left(2 \cdot 5\right)^5 \cdot 8^3 = \frac{1}{2^6} : 5^4 \cdot 2^5 \cdot 5^5 \cdot 2^9 = \frac{2^5 \cdot 5^2 \cdot 2^9}{2^6 \cdot 5^4} = 2^8 \cdot 5$

68. Resuelve.

a) $\sqrt{4^2+3^2}-2\cdot(3^2-2^2)$

b) $\sqrt{\frac{3}{12}}:3-2\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^2$

c) $(-2)^{-4}\cdot\frac{2^3}{3}+\frac{1}{5}\cdot\left[4-2^2\cdot\frac{1}{6}\right]-(-2)^3$

d) $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2^2}\right)^{-1}+\left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

e) $\left[\left(\frac{-3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{-4}{9}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]-2^{-1}\cdot\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{9}}$

a) $\sqrt{4^2+3^2}-2\cdot(3^2-2^2)=\sqrt{16+9}-2\cdot(9-4)=\sqrt{25}-2\cdot 5=5-10=-5$

b) $\sqrt{\frac{3}{12}}:3-2\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)^2=\sqrt{\frac{1}{4}}:3-2\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{1}{2}:3-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}-\frac{3}{6}=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}$

c) $(-2)^{-4}\cdot\frac{2^3}{3}+\frac{1}{5}\cdot\left[4-2^2\cdot\frac{1}{6}\right]-(-2)^3=\frac{1}{2^4}\cdot\frac{2^3}{3}+\frac{1}{5}\cdot\left[4-\frac{2}{3}\right]-(-8)=\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{3}+8=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+8=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{48}{6}=\frac{53}{6}$

d) $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2^2}\right)^{-1}+\left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{2^2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3-\frac{2^2}{3^2}=\frac{3}{4}-\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{2^2}{3}+\frac{8}{27}-\frac{4}{9}=\frac{3}{4}-3+\frac{8}{27}-\frac{4}{9}=$

$=\frac{81-324+32-48}{108}=\frac{-259}{108}$

e) $\left[\left(\frac{-3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{-4}{9}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]-2^{-1}\cdot\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{-3^3}{2^3}\cdot\frac{-2^6}{3^6}+\left(\frac{1}{3}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2^3}{3^3}+\frac{1}{27}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{16+2-9+18}{54}=\frac{27}{54}=\frac{1}{2}$

69. Expresa en forma de potencia.

a) $5\cdot5\cdot5\cdot5$

b) $(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)$

c) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$

d) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{-2}{3}$

a) 5^4 b) $(-4)^5$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^9$ d) $\left(\frac{-2}{3}\right)^6$

70. Calcula las siguientes potencias.

a) $(-3)^3$ c) 10^4 e) $(-1)^{27}$

b) 5^2 d) $(-2)^5$ f) $(-1)^{28}$

a) −27 c) 10000 e) −1

b) 25 d) −32 f) 1

71. Calcula en tu cuaderno la base de las siguientes potencias.

a) $\bullet^5=32$ b) $\bullet^3=1000$ c) $\bullet^3=64$ d) $\bullet^4=810\,000$

a) $2^5=32$ b) $10^3=1000$ c) $4^3=64$ d) $30^4=810\,000$

72. Calcula en tu cuaderno el exponente de las siguientes potencias.

a) $3^{\bullet} = 243$ **b)** $(-2)^{\bullet} = -512$ **c)** $2^{\bullet} = 1024$ **d)** $(-10)^{\bullet} = 1\,000\,000$

a) $3^5 = 243$ **b)** $(-2)^9 = -512$ **c)** $2^{10} = 1024$ **d)** $(-10)^6 = 1\,000\,000$

73. Indica el signo de las siguientes potencias sin calcularlas.

a) $(-4)^{23}$ **c)** 6^{11} **e)** $(-3)^{15}$

b) 5^{20} **d)** $(-7)^{80}$ **f)** 9^{99}

a) Negativo **c)** Positivo **e)** Negativo

b) Positivo **d)** Positivo **f)** Positivo

74. Actividad resuelta.

75. Escribe usando solo potencias de base positiva.

a) $(-2)^{33}$ **b)** $(-3)^{43}$ **c)** $(-4)^{11}$ **d)** $(-5)^{12}$

a) -2^{33} **b)** -3^{43} **c)** -4^{11} **d)** 5^{12}

76. Escribe cada número en forma de potencia de cuatro formas distintas, usando bases positivas y negativas.

a) 16 **b)** 256 **c)** 64 **d)** 81

a) $16 = 2^4 = (-2)^4 = 4^2 = (-4)^2$ **c)** $64 = 2^6 = (-2)^6 = 8^2 = (-8)^2$

b) $256 = 2^8 = (-2)^8 = 4^4 = (-4)^4$ **d)** $81 = 3^4 = (-3)^4 = 9^2 = (-9)^2$

77. Expresa como una sola potencia.

a) $3^8 \cdot 3^7 \cdot 3$ **c)** $(-2)^5 \cdot (-2)^{12}$ **e)** $(-n)^3 \cdot (-n)^{12} \cdot (-n)^{37}$

b) $2^{22} \cdot 2^{59} \cdot 2^{18}$ **d)** $8^5 \cdot 8^5 \cdot 8^5 \cdot 8^5 \cdot 8^5$ **f)** $p^6 \cdot p^0 \cdot p \cdot p^5$

a) 3^{16} **c)** $(-2)^{17}$ **e)** $(-n)^{52}$

b) 2^{99} **d)** 8^{25} **f)** p^{12}

78. Expresa como una única potencia.

a) $\frac{2^{48}}{2^{24}}$ **c)** $\frac{x^{16}}{x^4}$ **e)** $\frac{2^{10}}{2}$

b) $\frac{(-3)^5}{(-3)^4}$ **d)** $\frac{n^5}{n^2}$ **f)** $\frac{5^{18}}{5^2}$

a) 2^{24} **c)** x^{12} **e)** 2^9

b) -3 **d)** n^3 **f)** 5^{16}

79. Escribe como una sola potencia.

a) $\left(2^5\right)^5$ **c)** $\left(2^8\right)^8$ **e)** $\left(\left(4^2\right)^5\right)^{10}$

b) $\left(\left(-3\right)^3\right)^3$ **d)** $\left(x^3\right)^2$ **f)** $\left(\left(\left(m^2\right)^3\right)^4\right)^5$

a) 2^{25} **c)** 2^{64} **e)** 4^{100}

b) $(-3)^9$ **d)** x^6 **f)** m^{120}

80. Escribe como potencia de una potencia.

a) 2^{24} **c)** 8^7 **e)** 27^{13}

b) $(-3)^{15}$ **d)** 13^{60} **f)** $(-2)^{10}$

a) $\left(2^3\right)^8$ **c)** $\left(2^3\right)^7$ **e)** $\left(3^3\right)^{13}$

b) $\left((-3)^5\right)^3$ **d)** $\left(13^6\right)^{10}$ **f)** $\left((-2)^5\right)^2$

81. Escribe como potencia de un producto.

a) 24^5 **c)** $(-8)^7$ **e)** 144

b) 12^5 **d)** 6^{15} **f)** 1

a) $\left(2^3\cdot 3\right)^5$ **c)** $(-2\cdot 2^2)^7$ **e)** $\left(2^2\cdot 3\right)^2$

b) $\left(2^2\cdot 3\right)^5$ **d)** $\left(2\cdot 3\right)^{15}$ **f)** $\left(1\cdot(-1)\right)^2$

82. Escribe como potencia de un cociente.

a) 2^5 **c)** $(-2)^6$ **e)** 25

b) 6^3 **d)** 50^2 **f)** -3

a) $\left(\frac{6}{3}\right)^5$ **c)** $\left(\frac{-4}{2}\right)^6$ **e)** $\left(\frac{10}{2}\right)^2$

c) $\left(\frac{60}{10}\right)^3$ **d)** $\left(\frac{100}{2}\right)^2$ **f)** $\left(\frac{-6}{2}\right)^1$

83. Expresa como una única potencia las operaciones siguientes.

a) $3^4\cdot 2^4\cdot 5^4$ **c)** $4^6\cdot 3^6 : 6^6$ **e)** $24^9 : 3^9$

b) $5^2\cdot 3^2\cdot(-2)^2$ **d)** $(-12)^3 : (-6)^3$ **f)** $(-20)^5 : 10^5\cdot(-1)^5$

a) 30^4 **c)** 2^6 **e)** 8^9

b) $(-30)^2$ **d)** 2^3 **f)** 2^5

84. Expresa como una única potencia.

a) $4^8 \cdot 8^5 \cdot 16^3$ c) $(-2)^3 \cdot (-8)^5$ e) $125^3 : 5^7 \cdot 25^4$

b) $2^8 : 4^6 \cdot 8^5$ d) $(4^2)^3 \cdot 8^2 \cdot (2^5)^0$ f) $81^2 : (27^3 : 9^4)^2$

a) $(2^2)^8 \cdot (2^3)^5 \cdot (2^4)^3 = 2^{16} \cdot 2^{15} \cdot 2^{12} = 2^{43}$

b) $2^8 : 4^6 \cdot 8^5 = 2^8 : (2^2)^6 \cdot (2^3)^5 = 2^8 : 2^{12} \cdot 2^{15} = 2^{11}$

c) $(-2)^3 \cdot (-8)^5 = (-2)^3 \cdot ((-2)^3)^5 = (-2)^3 \cdot (-2)^{15} = (-2)^{18}$

d) $(4^2)^3 \cdot 8^2 \cdot (2^5)^0 = ((2^2)^2)^3 \cdot (2^3)^2 \cdot 2^0 = 2^{12} \cdot 2^6 \cdot 2^0 = 2^{18}$

e) $125^3 : 5^7 \cdot 25^4 = (5^3)^3 : 5^7 \cdot (5^2)^4 = 5^9 : 5^7 \cdot 5^8 = 5^{10}$

f) $81^2 : (27^3 : 9^4)^2 = (3^4)^2 : ((3^3)^3 : (3^2)^4)^2 = 3^8 : (3^9 : 3^8)^2 = 3^8 : 3^2 = 3^6$

85. Desarrolla las siguientes operaciones como producto de potencias de factores primos y resuelve.

a) $6^2 \cdot 3^5 \cdot 12^4$ c) $(18^3)^5 \cdot 24^6$ e) $39^{12} \cdot 4^6 : 26^{11}$

b) $20^3 : 25 \cdot 8^2$ d) $32^2 \cdot 100^7 : 10^6$ f) $14^6 \cdot 7^{15} \cdot 21^5$

a) $6^2 \cdot 3^5 \cdot 12^4 = (2 \cdot 3)^2 \cdot 3^5 \cdot (2^2 \cdot 3)^4 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 3^5 \cdot 2^8 \cdot 3^4 = 2^{10} \cdot 3^{11}$

b) $20^3 : 25 \cdot 8^2 = (2^2 \cdot 5)^3 : 5^2 \cdot (2^3)^2 = 2^6 \cdot 5^3 : 5^2 \cdot 2^6 = 2^{12} \cdot 5$

c) $(18^3)^5 \cdot 24^6 = ((2 \cdot 3^2)^3)^5 \cdot (2^3 \cdot 3)^6 = 2^{15} \cdot 3^{30} \cdot 2^{18} \cdot 3^6 = 2^{33} \cdot 3^{36}$

d) $32^2 \cdot 100^7 : 10^6 = (2^5)^2 \cdot (2^2 \cdot 5^2)^7 : (2 \cdot 5)^6 = 2^{10} \cdot 2^{14} \cdot 5^{14} : (2^6 \cdot 5^6) = 2^{18} \cdot 5^8$

e) $39^{12} \cdot 4^6 : 26^{11} = (3 \cdot 13)^{12} \cdot (2^2)^6 : (2 \cdot 13)^{11} = 3^{12} \cdot 13^{12} \cdot 2^{12} : (2^{11} \cdot 13^{11}) = 2 \cdot 3^{12} \cdot 13$

f) $14^6 \cdot 7^{15} \cdot 21^5 = (2 \cdot 7)^6 \cdot 7^{15} \cdot (3 \cdot 7)^5 = 2^6 \cdot 7^6 \cdot 7^{15} \cdot 3^5 \cdot 7^5 = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 7^{26}$

86. Escribe las siguientes operaciones como una única potencia.

a) $(2^2 \cdot 2^7) : (2^9 : 2^5)$ c) $5^6 : (5^3 : 5^2)^4 : 5$ e) $\dfrac{7^4 \cdot 7^9 \cdot 7^6}{7^8 \cdot 7^{10}}$

b) $(3^7 \cdot 3^5 : 3^6)^2 : 3^7$ d) $((a^3 \cdot a^5)^2)^3$ f) $\dfrac{(2^2 \cdot 2^5)^7 \cdot 2^9}{2^6 \cdot 2^{23}}$

a) $(2^2 \cdot 2^7) : (2^9 : 2^5) = 2^9 : 2^4 = 2^5$

b) $(3^7 \cdot 3^5 : 3^6)^2 : 3^7 = (3^6)^2 : 3^7 = 3^{12} : 3^7 = 3^5$

c) $5^6 : (5^3 : 5^2)^4 : 5 = 5^6 : 5^4 : 5 = 5^2 : 5 = 5$

d) $((a^3 \cdot a^5)^2)^3 = ((a^8)^2)^3 = a^{48}$

e) $\dfrac{7^4 \cdot 7^9 \cdot 7^6}{7^8 \cdot 7^{10}} = \dfrac{7^{19}}{7^{18}} = 7$

f) $\dfrac{(2^2 \cdot 2^5)^7 \cdot 2^9}{2^6 \cdot 2^{23}} = \dfrac{(2^7)^7 \cdot 2^9}{2^{29}} = \dfrac{2^{58}}{2^{29}} = 2^{29}$

87. Simplifica las expresiones siguientes utilizando las propiedades de las potencias.

a) $\left(2^2\cdot 3^5\right)^2\cdot\left(2^6\cdot 3\right)^7$

b) $\left(3\cdot 5^4\right)^6 : 3^4\cdot\left(3^2\cdot 5\right)^2$

c) $\dfrac{3^4\cdot 5^6\cdot 7^9}{7^5\cdot(3\cdot 4)^4}$

d) $\dfrac{\left(2^2\cdot 7^5\right)^4\cdot 7^6}{\left(2\cdot 7^3\right)^3\cdot 2\cdot\left(7^4\right)^4}$

e) $\dfrac{x^3\cdot\left(x^2\cdot x^6\right)^3}{\left(x^3\right)^9}$

f) $\dfrac{a^2\cdot\left(a\cdot b\cdot c^3\right)^2}{\left(b^2\cdot c\right)^2\cdot a^3}$

a) $(2^2\cdot 3^5)^2\cdot(2^6\cdot 3)^7 = 2^4\cdot 3^{10}\cdot 2^{42}\cdot 3^7 = 2^{46}\cdot 3^{17}$

b) $(3\cdot 5^4)^6 : 3^4\cdot(3^2\cdot 5)^2 = 3^6\cdot 5^{24} : 3^4\cdot 3^4\cdot 5^2 = 3^6\cdot 5^{26}$

c) $\dfrac{3^4\cdot 5^6\cdot 7^9}{7^5\cdot(3\cdot 4)^4} = \dfrac{3^4\cdot 5^6\cdot 7^9}{7^5\cdot 3^4\cdot 4^4} = \dfrac{5^6\cdot 7^4}{2^8}$

d) $\dfrac{(2^2\cdot 7^5)^4\cdot 7^6}{(2\cdot 7^3)^3\cdot 2\cdot(7^4)^4} = \dfrac{2^8\cdot 7^{20}\cdot 7^6}{2^3\cdot 7^9\cdot 2\cdot 7^{16}} = 2^4\cdot 7$

e) $\dfrac{x^3\cdot(x^2\cdot x^6)^3}{(x^3)^9} = \dfrac{x^3\cdot\left(x^8\right)^3}{x^{27}} = \dfrac{x^3\cdot x^{24}}{x^{27}} = 1$

f) $\dfrac{a^2\cdot(a\cdot b\cdot c^3)^2}{(b^2\cdot c)^2\cdot a^3} = \dfrac{a^2\cdot a^2\cdot b^2\cdot c^6}{b^4\cdot c^2\cdot a^3} = \dfrac{a\cdot c^4}{b^2}$

88. Resuelve las operaciones usando las potencias y sus propiedades.

a) $\dfrac{32\cdot 25\cdot 72}{90\cdot 128}$

b) $\dfrac{512\cdot 625}{10000\cdot 64}$

c) $\dfrac{28^3\cdot 25^3}{100^2\cdot 35^3}$

d) $\dfrac{(16\cdot 81)^8\cdot 5^9}{36^{16}\cdot 25^4}$

e) $\dfrac{12^{25}\cdot\left(9^7\right)^4}{\left(81^5\right)^4\cdot\left(2^7\right)^7}$

f) $\dfrac{\left(49^2\cdot 15^3\right)^4}{\left(21^2\right)^4\cdot 35^7}$

a) $\dfrac{32\cdot 25\cdot 72}{90\cdot 128} = \dfrac{2^5\cdot 5^2\cdot 2^3\cdot 3^2}{2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 2^7} = 5$

b) $\dfrac{512\cdot 625}{10000\cdot 64} = \dfrac{2^9\cdot 5^4}{2^4\cdot 5^4\cdot 2^6} = \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{28^3\cdot 25^3}{100^2\cdot 35^3} = \dfrac{\left(2^2\cdot 7\right)^3\cdot\left(5^2\right)^3}{\left(2^2\cdot 5^2\right)^2\cdot(5\cdot 7)^3} = \dfrac{2^6\cdot 7^3\cdot 5^6}{2^4\cdot 5^4\cdot 5^3\cdot 7^3} = \dfrac{2^2}{5}$

d) $\dfrac{(16\cdot 81)^8\cdot 5^9}{36^{16}\cdot 25^4} = \dfrac{\left(2^4\cdot 3^4\right)^8\cdot 5^9}{\left(2^2\cdot 3^2\right)^{16}\cdot\left(5^2\right)^4} = \dfrac{2^{32}\cdot 3^{32}\cdot 5^9}{2^{32}\cdot 3^{32}\cdot 5^8} = 5$

e) $\dfrac{12^{25}\cdot\left(9^7\right)^4}{\left(81^5\right)^4\cdot\left(2^7\right)^7} = \dfrac{\left(2^2\cdot 3\right)^{25}\cdot\left(\left(3^2\right)^7\right)^4}{\left(\left(3^4\right)^5\right)^4\cdot\left(2^7\right)^7} = \dfrac{2^{50}\cdot 3^{25}\cdot 3^{56}}{3^{80}\cdot 2^{49}} = 2\cdot 3 = 6$

f) $\dfrac{\left(49^2\cdot 15^3\right)^4}{\left(21^2\right)^4\cdot 35^7} = \dfrac{\left(\left(7^2\right)^2\cdot(3\cdot 5)^3\right)^4}{\left((3\cdot 7)^2\right)^4\cdot(5\cdot 7)^7} = \dfrac{7^{16}\cdot 3^4\cdot 5^{12}}{3^4\cdot 7^8\cdot 5^7\cdot 7^7} = 5^5\cdot 7$

89. Transforma los siguientes números en otros equivalentes, pero con potencias de exponente opuesto.

a) $\frac{1}{2}$ **c)** 2^{-4} **e)** $\frac{1}{25}$

b) $\frac{1}{3^2}$ **d)** 10^{-1} **f)** 25^{-2}

a) 2^{-1} **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ **e)** 5^{-2}

b) 3^{-2} **d)** $\frac{1}{10}$ **f)** $\left(\frac{1}{25}\right)^2$

90. Expresa como una única potencia.

a) $5^{-4}\cdot 5^3\cdot 5$ **f)** $11^{-6}:11^4$

b) $2^{-6}:2^{-8}\cdot 2^3$ **g)** $\left((3^{-2})^{-2}\right)^{-2}$

c) $(7^2)^{-3}\cdot 7^{-4}\cdot 7$ **h)** $x^6:(x^{-1})^2\cdot x^5$

d) $(4^5\cdot 4^{-3})^2$ **i)** $(3^{-3}:3^{-4})^5$

e) $(a^{-2}\cdot a^6)^3$ **j)** $\left((b^3:b^2)^{-3}\right)^{-2}$

a) $5^{-4+3+1}=5^0=1$ **f)** $11^{-6-4}=11^{-10}$

b) $2^{-6-(-8)+3}=2^5$ **g)** $3^{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}=3^{-8}$

c) $7^{-6-4+1}=7^{-9}$ **h)** $x^{6-(-2)+5}=x^{13}$

d) $4^{(5-3)\cdot 2}=4^4$ **i)** $3^{(-3-(-4))\cdot 5}=3^5$

e) $a^{(-2+6)\cdot 3}=a^{12}$ **j)** $b^{(3-2)\cdot(-3)\cdot(-2)}=b^6$

91. Actividad resuelta

92. Determina el signo de las siguientes potencias y escríbelas usando solo exponentes positivos.

a) 3^{-2} **c)** $(-4)^{-3}$ **e)** $(-10)^{-2}$

b) $(-5)^4$ **d)** $(-7)^{-10}$ **f)** $(-10)^{-7}$

a) $3^{-2}=\frac{1}{3^2}$, positivo **c)** $\frac{1}{(-4)^3}$, negativo **e)** $\frac{1}{10^2}$, positivo

b) 5^4, positivo **d)** $\frac{1}{7^{10}}$, positivo **f)** $\frac{1}{(-10)^7}$, negativo

93. Escribe usando solo exponentes positivos.

a) $\frac{1}{2^{-10}}$ **b)** $2^{-6}\cdot 3^8$ **c)** $\frac{2^{-3}\cdot 3^2}{5^{-4}}$ **d)** $\frac{2^{-1}\cdot 3^{-2}}{5^{-3}\cdot 7^4}$

a) 2^{10} **b)** $\frac{3^8}{2^6}$ **c)** $\frac{5^4\cdot 3^2}{2^3}$ **d)** $\frac{5^3}{2\cdot 3^2\cdot 7^4}$

94. Calcula y expresa el resultado usando solo exponentes positivos.

a) $\dfrac{\left((-2)^5\cdot 7^{-4}\right)^{-2}\cdot 7^6}{2^{-8}\cdot 7^{12}}$

b) $\dfrac{48^{-2}\cdot 27^3}{36^5\cdot 54^{-5}}$

c) $\dfrac{\left(5\cdot 13^{-4}\right)^{-2}\cdot\left(5^{-2}\cdot 13^{-4}\right)^{-1}}{\left(13^{-2}\right)^{-6}\cdot\left(5^{-1}\right)^{2}}$

d) $\dfrac{3^5\cdot\left(3^4\cdot x^6\right)^{-5}}{\left(3^{-2}\cdot x^{-3}\right)^7\cdot\left(x^{-2}\right)^{-4}}$

a) $\dfrac{\left((-2)^5\cdot 7^{-4}\right)^{-2}\cdot 7^6}{2^{-8}\cdot 7^{12}}=\dfrac{(-2)^{-10}\cdot 7^8\cdot 7^6}{2^{-8}\cdot 7^{12}}=\dfrac{2^{-10}\cdot 7^8\cdot 7^6}{2^{-8}\cdot 7^{12}}=\dfrac{2^8\cdot 7^8\cdot 7^6}{2^{10}\cdot 7^{12}}=\dfrac{7^2}{2^2}$

b) $\dfrac{48^{-2}\cdot 27^3}{36^5\cdot 54^{-5}}=\dfrac{54^5\cdot 27^3}{48^2\cdot 36^5}=\dfrac{\left(2\cdot 3^3\right)^5\cdot\left(3^3\right)^3}{\left(2^4\cdot 3\right)^2\cdot\left(2^2\cdot 3^2\right)^5}=\dfrac{2^5\cdot 3^{15}\cdot 3^9}{2^8\cdot 3^2\cdot 2^{10}\cdot 3^{10}}=\dfrac{3^{12}}{2^{13}}$

c) $\dfrac{\left(5\cdot 13^{-4}\right)^{-2}\cdot\left(5^{-2}\cdot 13^{-4}\right)^{-1}}{\left(13^{-2}\right)^{-6}\cdot\left(5^{-1}\right)^{2}}=\dfrac{5^{-2}\cdot 13^8\cdot 5^2\cdot 13^4}{13^{12}\cdot 5^{-2}}=\dfrac{5^2\cdot 13^8\cdot 5^2\cdot 13^4}{13^{12}\cdot 5^2}=5^2$

d) $\dfrac{3^5\cdot\left(3^4\cdot x^6\right)^{-5}}{\left(3^{-2}\cdot x^{-3}\right)^7\cdot\left(x^{-2}\right)^{-4}}=\dfrac{3^5\cdot 3^{-20}\cdot x^{-30}}{3^{-14}\cdot x^{-21}\cdot x^8}=\dfrac{3^5\cdot 3^{14}\cdot x^{21}}{3^{20}\cdot x^{30}\cdot x^8}=\dfrac{1}{3\cdot x^{17}}$

95. Expresa los siguientes números usando notación científica.

a) **235 000 000 000 000**

b) **41 250 000 000 000 000**

c) **0,000 000 000 000 000 008 741**

d) **0,000 000 000 000 333**

a) $2{,}35\cdot 10^{14}$ **b)** $4{,}125\cdot 10^{16}$ **c)** $8{,}741\cdot 10^{-18}$ **d)** $3{,}33\cdot 10^{-13}$

96. Expresa en notación decimal las siguientes expresiones con potencias de base 10.

a) $\mathbf{2{,}99\cdot 10^6}$ **b)** $\mathbf{8{,}5\cdot 10^8}$ **c)** $\mathbf{3{,}1\cdot 10^{-6}}$ **d)** $\mathbf{4{,}49\cdot 10^{-8}}$

a) 2 990 000 **b)** 850 000 000 **c)** 0,000 0031 **d)** 0,000 000 0449

97. Expresa los siguientes números en notación científica.

a) $\mathbf{32{,}5\cdot 10^8}$ **b)** $\mathbf{129{,}45\cdot 10^{-6}}$ **c)** $\mathbf{0{,}000063\cdot 10^{12}}$ **d)** $\mathbf{0{,}0059\cdot 10^{-12}}$

a) $3{,}25\cdot 10^9$ **b)** $1{,}2945\cdot 10^{-4}$ **c)** $6{,}3\cdot 10^7$ **d)** $5{,}9\cdot 10^{-15}$

98. Opera y escribe el resultado en notación científica.

a) **0,0003 + 0,000 15**

b) **0,0025 − 0,000 12**

c) **0,00832 + 0,0047**

d) **0,0036 − 0,000 75**

a) $0{,}0003+0{,}00015=0{,}00045=4{,}5\cdot 10^{-4}$

b) $0{,}0025-0{,}00012=0{,}00238=2{,}38\cdot 10^{-3}$

c) $0{,}00832+0{,}0047=0{,}01302=1{,}302\cdot 10^{-2}$

d) $0{,}0036-0{,}00075=0{,}00285=2{,}85\cdot 10^{-3}$

99. Realiza las siguientes operaciones y escribe el resultado en notación científica.

a) $\left(4{,}5\cdot10^{15}\right)\cdot\left(5\cdot10^{8}\right)$

b) $\left(4{,}5\cdot10^{15}\right):\left(5\cdot10^{8}\right)$

c) $\left(2{,}1\cdot10^{-10}\right)\cdot\left(3\cdot10^{5}\right)$

d) $\left(2{,}1\cdot10^{10}\right):\left(3\cdot10^{-5}\right)$

e) $\left(6\cdot10^{-11}\right):\left(3{,}4\cdot10^{3}\right)$

f) $\left(6\cdot10^{-11}\right)\cdot\left(3{,}4\cdot10^{-3}\right)$

a) $22{,}5\cdot10^{23}=2{,}25\cdot10^{24}$

b) $0{,}9\cdot10^{7}=9\cdot10^{6}$

c) $6{,}3\cdot10^{15}$

d) $0{,}7\cdot10^{-15}=7\cdot10^{-16}$

e) $1{,}765\cdot10^{-14}$

f) $20{,}4\cdot10^{-14}=2{,}04\cdot10^{-13}$

100. Calcula el cuadrado de cada número natural comprendido entre 30 y 40.

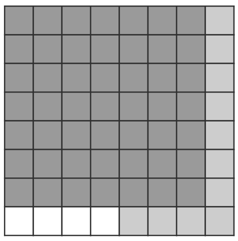
Número	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Cuadrado	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600

101. Encuentra todos los cuadrados perfectos comprendidos entre 200 y 300.

Entre 200 y 300 hay tres cuadrados perfectos:

$225=15^2$ $\quad$ $256=16^2$ $\quad$ $289=17^2$

102. Comprueba gráficamente si 60 es un cuadrado perfecto. Utiliza el dibujo que has hecho para calcular su raíz entera y su resto.



No es un cuadrado perfecto. Su raíz entera es 7, y el resto es 11.

103. Sin hacer la operación, indica en qué cifra termina cada uno de los siguientes cuadrados perfectos.

a) $\mathbf{36^2}$

b) $\mathbf{86^2}$

c) $\mathbf{813^2}$

d) $\mathbf{5750^2}$

e) $\mathbf{1009^2}$

f) $\mathbf{999999^2}$

a) 36^2 en 6

b) 86^2 en 6

c) 813^2 en 9

d) 5750^2 en 0

e) 1009^2 en 1

f) 999999^2 en 1

104. Calcula las siguientes raíces utilizando el algoritmo.

a) $\sqrt{692}$ **c)** $\sqrt{7644}$ **e)** $\sqrt{96\,247}$

b) $\sqrt{858}$ **d)** $\sqrt{61\,504}$ **f)** $\sqrt{258\,809}$

a)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6\;92} & 26 \\ -4 & 46\cdot 6=276 \\ \hline 2\;92 & \\ -2\;76 & \\ \hline 16 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{8\;58} & 29 \\ -4 & 49\cdot 9=441 \\ \hline 4\;58 & \\ -4\;41 & \\ \hline 17 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{76\;44} & 87 \\ -64 & 167\cdot 7=1169 \\ \hline 12\;44 & \\ -11\;69 & \\ \hline 75 & \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6\;15\;04} & 248 \\ -4 & 44\cdot 4=176 \\ \hline 2\;15 & 488\cdot 8=3904 \\ -1\;76 & \\ \hline 39\;04 & \\ -39\;04 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9\;62\;47} & 310 \\ -9 & 61\cdot 1=61 \\ \hline 0\;62 & 620\cdot 0=0 \\ -61 & \\ \hline 1\;47 & \\ -0 & \\ \hline 147 & \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{25\;88\;09} & 508 \\ -25 & 100\cdot 0=0 \\ \hline 0\;88 & 1008\cdot 8=8064 \\ -0 & \\ \hline 88\;09 & \\ -80\;64 & \\ \hline 7\;45 & \end{array}$$

105. Calcula la raíz cuadrada entera de los siguientes números por estimación e indica el resto.

a) **136** **c)** **425** **e)** **666**

b) **333** **d)** **507** **f)** **2016**

a) $\sqrt{136}=11$, resto: 15 **c)** $\sqrt{425}=20$, resto: 25 **e)** $\sqrt{666}=25$, resto: 41

b) $\sqrt{333}=18$, resto: 9 **d)** $\sqrt{507}=22$, resto: 23 **f)** $\sqrt{2016}=44$, resto: 80

106. Escribe todos los números cuya raíz cuadrada exacta o entera sea 20.

Son los números comprendidos entre 400 y 440: 400, 401, 402, …, 440.

107. Comprueba si las siguientes raíces son correctas sin calcularlas.

a) $\sqrt{2588}=50$ **, resto: 88** **c)** $\sqrt{1406}=37$ **, resto: 37**

b) $\sqrt{3986}=62$ **, resto: 142** **d)** $\sqrt{9800}=98$ **, resto: 196**

a) $50^2+88=2588$, correcta

b) $62^2+142=3986$, pero $142>2\cdot 62+1$, es incorrecta

c) $37^2+37=1406$, correcta

d) $98^2+196=9800$, correcta

108. Encuentra todos los números de tres cifras que tienen raíz cuadrada exacta.

Los números son 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961.

109. Desarrolla como cociente de potencias de exponente positivo.

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{7}$ **c)** $\frac{1}{3^{-6}}$ **e)** $\left(\frac{2^{-2}}{3^{-2}}\right)^{3}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$ **d)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-12}$ **f)** $\left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^{-5}$

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{7}=\frac{3^7}{2^7}$ **c)** $\frac{1}{3^{-6}}=3^6$ **e)** $\left(\frac{2^{-2}}{3^{-2}}\right)^{3}=\left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{3}=\frac{3^6}{2^6}$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^{3}=\frac{5^3}{2^3}$ **d)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-12}=5^{12}$ **f)** $\left(\sqrt{\frac{4}{9}}\right)^{-5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}=\frac{3^5}{2^5}$

110. Expresa como una única potencia.

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{4}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{3}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{12}$ **c)** $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right)^{5}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{8}:\left(\frac{3}{5}\right)^{3}$ **d)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{3}:\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\cdot\frac{2}{5}$

a) $\left(\frac{5}{7}\right)^{4+3+12}=\left(\frac{5}{7}\right)^{19}$ **c)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{3\cdot 5}=\left(\frac{3}{4}\right)^{15}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{8-3}=\left(\frac{3}{5}\right)^{5}$ **d)** $\left(\frac{2}{5}\right)^{3-2+1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{2}$

111. Calcula las siguientes raíces cuadradas.

a) $\sqrt{\frac{169}{144}}$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{729}}$ **c)** $\sqrt{\frac{1125}{245}}$

b) $\sqrt{\frac{169}{144}}=\frac{13}{12}$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{729}}=\frac{1}{27}$ **c)** $\sqrt{\frac{1125}{245}}=\sqrt{\frac{5\cdot 225}{5\cdot 49}}=\sqrt{\frac{225}{49}}=\frac{15}{7}$

112. Actividad resuelta.

113. Calcula las raíces y escribe los resultados en forma decimal.

a) $\sqrt{1{,}44}$ **c)** $\sqrt{1{,}\widehat{7}}$ **e)** $\sqrt{11{,}\widehat{1}}$

b) $\sqrt{0{,}81}$ **d)** $\sqrt{5{,}\widehat{4}}$ **f)** $\sqrt{0{,}69\widehat{4}}$

a) $\sqrt{\frac{144}{100}}=\frac{12}{10}=1{,}2$ **c)** $\sqrt{\frac{17-1}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}=1{,}\widehat{3}$ **e)** $\sqrt{\frac{111-11}{9}}=\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{10}{3}=3{,}\widehat{3}$

b) $\sqrt{\frac{81}{100}}=\frac{9}{10}=0{,}9$ **d)** $\sqrt{\frac{54-5}{9}}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}=2{,}\widehat{3}$ **f)** $\sqrt{\frac{694-69}{900}}=\sqrt{\frac{625}{900}}=\frac{25}{30}=0{,}8\widehat{3}$

114. Calcula.

a) $(-3)^2 \cdot \sqrt{16} - (5^2 - 11) : \sqrt{49} + (10-8)^2$

b) $\dfrac{(3^2-4)^3 \cdot \sqrt{13-2^2}}{5+3\cdot(-5)}$

c) $\dfrac{5}{6} - \left(\dfrac{4}{7}\right)^2 \cdot \left[\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{10} : (-2)^3\right]$

d) $\dfrac{3}{2^2} : \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{100}{90} - \left(\dfrac{1+3^2}{5^2-5}\right)^{-2}$

e) $\sqrt{\dfrac{75}{48}} - \left(\sqrt{\dfrac{4}{81}}\right)^{-2} + \dfrac{\sqrt{36}}{36} - 4^{-2}$

f) $\left[\left(\dfrac{-3}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{-4}{9}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right] - 2^{-1} \cdot \dfrac{1}{3} + \sqrt{\dfrac{1}{9}}$

a) $(-3)^2 \cdot \sqrt{16} - (5^2 - 11) : \sqrt{49} + (10-8)^2 = 9\cdot 4 - (25-11) : 7 + 2^2 = 36 - 14 : 7 + 4 = 36 - 2 + 4 = 38$

b) $\dfrac{(3^2-4)^3 \cdot \sqrt{13-2^2}}{5+3\cdot(-5)} = \dfrac{5^3 \cdot \sqrt{13-4}}{5-15} = \dfrac{125\cdot\sqrt{9}}{-10} = \dfrac{125\cdot 3}{-10} = \dfrac{375}{-10} = \dfrac{-75}{2}$

c) $\dfrac{5}{6} - \left(\dfrac{4}{7}\right)^2 \cdot \left[\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{10} : (-2)^3\right] = \dfrac{5}{6} - \dfrac{16}{49} \cdot \left[\dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{10} : (-8)\right] = \dfrac{5}{6} - \dfrac{16}{49} \cdot \left[\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{80}\right] = \dfrac{5}{6} - \dfrac{16}{\cancel{49}} \cdot \dfrac{\cancel{49}}{80} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{19}{30}$

d) $\dfrac{3}{2^2} : \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{100}{90} - \left(\dfrac{1+3^2}{5^2-5}\right)^{-2} = \dfrac{3}{4} : \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{10}{9} - \left(\dfrac{10}{20}\right)^{-2} = \dfrac{3\cdot 5\cdot 10}{4\cdot 2\cdot 9} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = \dfrac{25}{12} - 4 = \dfrac{-23}{12}$

e) $\sqrt{\dfrac{75}{48}} - \left(\sqrt{\dfrac{4}{81}}\right)^{-2} + \dfrac{\sqrt{36}}{36} - 4^{-2} = \sqrt{\dfrac{25}{16}} - \left(\dfrac{2}{9}\right)^{-2} + \dfrac{6}{36} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{81}{4} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{60-972+8-3}{48} = \dfrac{-907}{48}$

f) $\left[\left(\dfrac{-3}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{-4}{9}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right] - 2^{-1} \cdot \dfrac{1}{3} + \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \left[\dfrac{-3^3}{2^3} \cdot \dfrac{-2^6}{3^6} + \dfrac{1}{3^3}\right] - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = \left[\dfrac{2^3}{3^3} + \dfrac{1}{3^3}\right] - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{8+1}{27} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$

115. El cuadrado de 7 es 49. Encuentra todos los números naturales de dos cifras cuyo cuadrado acaba en 49. ¿Acaban todos en 7?

Para que el cuadrado acabe en 9, el número debe terminar en 3 o en 7.

$13^2 = 169$	$17^2 = 289$	$23^2 = 529$	$27^2 = 729$
$33^2 = 1089$	$37^2 = 1369$	$43^2 = 1849$	$47^2 = 2209$
$53^2 = 2809$	$57^2 = 3249$	$63^2 = 3969$	$67^2 = 4489$
$73^2 = 5329$	$87^2 = 7569$	$93^2 = 8649$	$97^2 = 9409$

Entre 0 y 99, los números cuyo cuadrado acaba en 49 son: 43, 57 y 93. No acaban todos en 7.

116. Escribe los cuadrados de los números del 0 al 9 y responde:

a) Calcula los cuadrados de 13, 23, 33 y 43. ¿En qué cifra acaban?

b) ¿En qué cifra acabarán los cuadrados de los números terminados en 8? ¿Y los cuadrados de los que acaban en 9?

c) ¿Qué terminaciones puede tener un cuadrado perfecto?

d) Piensa un número y díselo a tu compañero para que trate de averiguar si es un cuadrado perfecto. Diseñad una estrategia para determinar si un número cualquiera es un cuadrado perfecto.

a) $13^2 = 169$, $23^2 = 529$, $33^2 = 1089$ y $43^2 = 1849$. Todos acaban en 9.

b) Si el número acaba en 8, su cuadrado acaba en 4. $8^2 = 64$. Si acaba en 9, el cuadrado acaba en 1. $9^2 = 81$

c)

Número	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cuadrado	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Las terminaciones de un cuadrado perfecto pueden ser: 0, 1, 4, 5, 6 y 9.

d) Respuesta libre

117. Dada la fracción $\frac{4}{9}$, calcula la inversa de su raíz cuadrada y la raíz cuadrada de su inversa. ¿Se obtiene el mismo resultado?

$\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9}}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$, y $\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{9}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$. Sí, se obtiene el mismo resultado.

118. Comprueba con varios ejemplos que la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos es igual al doble del menor más uno. ¿Qué relación tiene esta propiedad con las raíces cuadradas?

Por ejemplo, $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 2 \cdot 4 + 1$ y $6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11 = 2 \cdot 5 + 1$.

El resto de la raíz debe ser menor que el doble de la raíz más 1. Si no, la raíz está mal calculada, se podría haber tomado al menos una unidad más.

119. En un campo de golf hay 6 madrigueras, en cada madriguera, 6 caminos, en cada camino, 6 guaridas y en cada guarida, una familia de 6 topos. ¿Cuántos topos hay en total?

En total hay $6^4 = 1296$ topos.

120. En la pastelería de Mateo han preparado una bandeja de pasteles con 8 pasteles por cada lado. Sus ayudantes son muy golosos, y se comieron algunos.

Mateo se dio cuenta de que los pasteles que quedaban podían colocarse en una bandeja de 6 pasteles de lado y le sobraban 3, que se comió para quitarse el disgusto.

¿Cuántos pasteles comieron sus ayudantes?

Al principio había $8^2 = 64$ pasteles.

Quedaron $6^2 + 3 = 39$ pasteles, luego los ayudantes se comieron $64 - 39 = 25$ pasteles.

121. Se han apilado ocho cajas cúbicas de 18 cm de arista formando una torre.

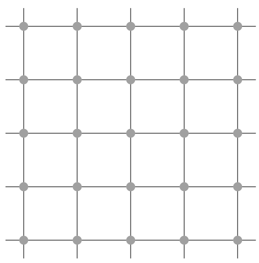
a) Expresa el volumen de cada caja en forma de potencia, y desarróllalo como producto de potencias de factores primos.

b) Expresa usando potencias de factores primos el volumen de la torre.

a) Cada caja tiene $18^3\ \text{cm}^3$ de volumen, es decir, $(2 \cdot 3^2)^3 = 2^3 \cdot 3^6$.

b) La torre tiene un volumen de $8 \cdot 2^3 \cdot 3^6 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^6 = 2^6 \cdot 3^6\ \text{cm}^3$.

122. En un juego se dibuja sobre una cuadrícula una red de puntos, formando un cuadrado.



a) Un jugador ha dibujado un cuadrado con 81 puntos. ¿Cuántos tiene que dibujar si quiere que el cuadrado tenga dos puntos más en cada lado?

b) Otro jugador se ha equivocado, y ha dibujado un rectángulo de 6 puntos de alto y 9 puntos de ancho. ¿Cuántos harán falta para conseguir un cuadrado de 10 puntos de lado?

a) Su cuadrado tiene $\sqrt{81} = 9$ puntos en cada lado, le faltan $11^2 - 9^2 = 121 - 81 = 40$ puntos.

b) El rectángulo tiene 6 · 9 = 54 puntos, faltan $10^2 - 54 = 100 - 54 = 46$ puntos.

123. Un virus mide 2,5 · 10^{-9} m. El grosor de una hoja de papel es de 0,1 mm.

a) Expresa ambas cantidades en la misma unidad usando notación científica.

b) ¿Cuántos virus deberían alinearse para conseguir igualar el grosor de una hoja de papel?

a) En metros, el grosor de la hoja de papel es 0,0001 = 10^{-4} m.

b) Se necesitan $10^{-4} : (2{,}5 \cdot 10^{-9}) = 4 \cdot 10^{4} = 40\,000$ virus.

124. Elena es una experta construyendo mosaicos con piezas cuadradas del mismo tamaño.

Iba a hacer un mosaico rectangular, pero finalmente lo hará cuadrado. Está contando las piezas que tiene.

Si quita 7 piezas, puede formar un mosaico cuadrado.

Para formar un cuadrado que tenga una pieza más por cada lado, tendría que comprar 12 piezas más de las que tiene.

a) ¿Cuántas piezas tiene?

b) ¿Qué tamaño podía tener el mosaico rectangular que quería hacer inicialmente?

a) Buscamos un número comprendido entre dos cuadrados que se diferencien en 7 + 12 = 19 piezas.

Como 19 = 2 · 9 +1, los cuadrados son 9^2 y 10^2, es decir, 81 y 100. Elena tiene 81 + 7 = 88 piezas.

Comprobamos que con 12 más forma un cuadrado de 100 piezas: 88 + 12 = 100.

b) Como tenía 88 piezas, hay varias opciones: 2 · 44, 4 · 22, 8 · 11 y una fila o columna con los 88.

125. En las últimas elecciones votaron bastantes habitantes del pueblo, aunque nadie ha apuntado el número exacto. Varios vecinos recuerdan los siguientes datos:

- **Votaron menos de 1000 habitantes.**
- **El número de votantes era una potencia de base 3.**
- **Si al número de votantes se le sumaba 157, el resultado era un cuadrado perfecto.**

¿Cuántos habitantes votaron en las elecciones?

Escribimos las primeras potencias de 3 menores que 1000: $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$ y $3^6 = 729$

Comprobamos si al sumar 157 se obtiene un cuadrado perfecto.

$3^1 + 157 = 160$ $\quad 3^2 + 157 = 166$ $\quad 3^3 + 157 = 184$ $\quad 3^4 + 157 = 238$ $\quad 3^5 + 157 = 400$ $\quad 3^6 + 157 = 886$

El único cuadrado es 400 = 20^2 . Por tanto, votaron 243 habitantes.

126. Pilar le propone un trato a su padre. Si resuelve bien un acertijo con potencias, su padre le dará un céntimo, y a partir de ahí doblará su dinero cada vez que resuelva bien otro acertijo.

Así, si resuelve bien dos ejercicios, recibirá 2 CENT; si hace bien tres, 4 CENT; si hace cuatro, 8 CENT, y así sucesivamente.

a) Si Pilar resuelve 6 acertijos correctamente, ¿cuánto dinero recibirá? ¿Crees que es una buena recompensa?

b) Calcula la cantidad que recibirá por resolver 10 acertijos.

c) Usando la cantidad anterior, calcula lo que recibirá por 20 acertijos, usando las propiedades de las potencias. ¿Qué te parece ahora la recompensa?

d) ¿Cuánto recibirá si resuelve correctamente *n* acertijos? Encuentra la potencia correspondiente.

a) Por resolver 5 acertijos recibiría $2^4 = 16$, y por resolver 6, $2^5 = 32$ CENT. No es una cantidad muy grande.

b) Por resolver 10 acertijos recibirá $2^9 = 512$, es decir, 5,12 €.

c) Por resolver 20 recibirá $2^{19} = 524\,288$, es decir, 5242,88 €. Ahora sí es una gran cantidad.

d) Por *n* respuestas recibe 2^{n-1} CENT.

127. Carmen ha colocado las fichas de su juego sobre la mesa, formando un cuadrado. En un descuido su hermano las ha tirado todas. Carmen no recuerda cuántas tenía, pero sabe que el cuadrado formado tenía menos de 10 fichas en cada lado, y que con las 14 que sobraban no podía construir el siguiente cuadrado más grande.

¿Cuántas fichas tenía?

Buscamos los cuadrados de los números menores que 10: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Hay tres cuadrados posibles que al sumar 14 no alcanzan el siguiente cuadrado: 49, 64 y 81.

Por tanto, Carmen podía tener 49 +14 = 63, 64 + 14 = 78 o 81 + 14 = 95 fichas.

128. ¿Cuál de los siguientes números es 2^{100}?

A. $4^5 \cdot 2^{10}$

B. $(2^3)^{97}$

C. La mitad de 2^{101}

D. $(4^5)^5$

$2^{101} : 2 = 2^{101-1} = 2^{100}$

La respuesta correcta es C. La mitad de 2^{101}.

129. ¿A qué número hay que elevar 27^3 para obtener 81^9?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 8

$(27^3)^4 = \left((3^3)^3\right)^4 = (3^4)^9 = 81^9$

La respuesta correcta es C. 4.

130. ¿Cuál es el valor de $\sqrt{2^4 + \sqrt{3^4}}$?

A. 4 **B.** $\sqrt{20}$ **C.** 5 **D.** $\sqrt{97}$

$\sqrt{2^4 + \sqrt{3^4}} = \sqrt{16 + \sqrt{81}} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

La respuesta correcta es C. 5.

131. ¿En cuántos ceros acaba el número $8^7 \cdot 25^{10}$?

A. 20 **B.** 21 **C.** 22 **D.** 23

$8^7 \cdot 25^{10} = (2^3)^7 \cdot (5^2)^{10} = 2^{21} \cdot 5^{20} = 2 \cdot 2^{20} \cdot 5^{20} = 2 \cdot 10^{20}$

La respuesta correcta es A. 20.

132. Si un número *a* es un cuadrado perfecto se puede escribir como un número *b* al cuadrado, es decir, $a = b^2$. ¿Qué será un cubo perfecto? Pon un ejemplo.

Un número *a* es un cubo perfecto si se puede escribir como el cubo de otro número *b*, es decir, $a = b^3$ Por ejemplo, $1000=10^3$.

133. **Si *N* es el menor entero positivo tal que su mitad es un cuadrado perfecto, su tercera parte es un cubo perfecto, su cuarta parte es la quinta potencia de un número natural, el exponente de 2 en la descomposición de factores primos de *N* es:**

A. **24** **B.** **25** **C.** **26** **D.** **27**

El número *N* es de la forma $2^n \cdot a$, siendo *a* un número natural impar.

Como su cuarta parte es una quinta potencia, al dividirlo entre 4, que es igual a 2^2, se obtiene que $2^{n-2} \cdot a$ es una potencia quinta. Luego n − 2 es múltiplo de 5, por lo que la única respuesta que encaja es 27.

Podemos calcular también el valor de *N*:

Como *N*/3 es un cubo perfecto, a/3 debe ser un cubo perfecto, por lo que el número *a* debe ser múltiplo de 3. Por otro lado, *a* debe ser un cuadrado perfecto y una potencia quinta (dividir *N* entre 2 o 4 no afecta al valor de *a*), por tanto, $a = 3^{10}$ y $N = 2^{27} \cdot 3^{10}$.

La respuesta correcta es D. 27.

134. **El número 2000 = $2^4 \cdot 5^3$ es, como puedes observar, el producto de siete números primos**

$$\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2000}$$

Si designamos por *A* el menor entero con esta propiedad y por *B* el mayor entero menor que 2000 que también tenga esta propiedad, ¿cuál es el valor de *B* – *A*?

A. **1971** **B.** **1983** **C.** **1856** **D.** **1844**

El número *A* es $2^7 = 128$. Para obtener *B,* probamos a sumar 128 a los posibles valores de $B - A$:

1971+128 = 2099 1983 +128 = 2111 $1856 + 128 = 1984 = 2^6 \cdot 31$ $1844 + 128 = 1972 = 2^2 \cdot 17 \cdot 29$

El único posible valor de *B* que es menor que 2000 y es el producto de siete números primos es 1984.

La respuesta correcta es C. 1856.

Encuentra el error

135. **El volumen de una gota de agua equivale, aproximadamente, a $5 \cdot 10^{-5}$ L. Una piscina olímpica puede contener 2 500 000 000 mL.**

Con esos datos, Natalia calcula el número de gotas que puede contener una piscina, usando notación científica:

$$\left(2,5 \cdot 10^9\right) : \left(5 \cdot 10^{-5}\right) = \left(2,5 : 5\right) \cdot 10^{9-5} = 0,5 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^3$$

Gema, al oír el resultado, asegura que está mal.

a) **¿Por qué está segura de que no es el resultado correcto?**

b) **En estos cálculos hay más de un error. Encuéntralos todos y calcula el resultado correcto.**

a) El resultado es de orden 3, lo que no tiene sentido, es demasiado pequeño (solo 5000 gotas).

b) El primer error se comete al operar con capacidades expresadas en unidades distintas. Lo correcto sería expresar ambas cantidades en litros, por ejemplo.

Después, hay un error de cálculo al dividir potencias, ya que no se ha tenido en cuenta que el exponente restado es negativo.

La operación correcta es $\left(2,5 \cdot 10^6\right) : \left(5 \cdot 10^{-5}\right) = \left(2,5 : 5\right) \cdot 10^{6-(-5)} = 0,5 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^{10}$ gotas.

PONTE A PRUEBA

La notación de ingeniería

Actividad resuelta

El jardín de los cuadrados

Margarita es matemática y se dedica al diseño de jardines. Tiene una curiosa manía: todos sus jardines tienen que ser cuadrados, o poder descomponerse en varios cuadrados, todos de distinto tamaño.

Así, diseña jardines de 16 m^2 (4 m de lado), pero también de 29 m^2 (suma de uno de 16 m^2, otro de 9 m^2 y otro de 4 m^2), o de 20 m^2 (suma de 16 m^2 y otro de 4 m^2). Este último, por ejemplo, no lo pondría como suma de cinco jardines de 4 m^2, aunque las dimensiones encajen, porque quiere que todas las medidas sean distintas.

1. **¿Podrá diseñar un jardín de 38 m^2 que cumpla sus condiciones?**
2. **El jardín de 100 m^2 se puede construir al menos de dos formas distintas. Búscalas.**
3. **Encuentra las formas de diseñar los jardines cuya área sea un número natural inferior a 40 m^2.**

   ¡Ojo! Puede que no todos sean posibles, y para algunos necesitarás más de dos cuadrados.

1. $38 = 25 + 9 + 4 = 5^2 + 3^2 + 2^2$. Es posible.
2. $100 = 10^2$ $\quad 100 = 64 + 36 = 8^2 + 6^2$ $\quad 100 = 49 + 25 + 16 + 9 + 1 = 7^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2$
3.

$1 = 1^2$	$13 = 3^2 + 2^2$	$21 = 4^2 + 2^2 + 1^2$	$34 = 5^2 + 3^2$
$4 = 2^2$	$14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$	$25 = 5^2$	$35 = 5^2 + 3^2 + 1^2$
$5 = 2^2 + 1^2$	$16 = 4^2$	$26 = 5^2 + 1^2$	$36 = 6^2$
$9 = 3^2$	$17 = 4^2 + 1^2$	$29 = 5^2 + 2^2$	$37 = 6^2 + 1^2$
$10 = 3^2 + 1^2$	$20 = 4^2 + 2^2$	$30 = 5^2 + 2^2 + 1^2$	$38 = 5^2 + 3^2 + 2^2$
			$39 = 5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$

El premio de la quiniela

La Quiniela es un juego de azar que apareció en España a mediados del siglo XX. Consiste en apostar sobre los resultados de varios partidos, marcando 1, si se cree que va a ganar el equipo que juega en su campo; X, si el partido terminará en empate, o 2, si se piensa que el equipo visitante terminará ganando. Si se aciertan suficientes resultados, se pueden ganar grandes premios.

Actualmente hay que acertar los resultados de 14 partidos y además los goles que meterá cada equipo en el partido número 15, asignando a cada uno el valor 0, 1, 2 o M (más de 2).

1. **Para el primer partido hay tres resultados posibles. Para cada uno de ellos, hay tres resultados del segundo. Al contar el tercer partido, se multiplica el número de posibilidades por 3, y así sucesivamente. ¿Cuántas formas hay de rellenar los 14 primeros partidos? Escríbelo en forma de potencia y calcula el resultado.**
2. **En el partido número 15 hay cuatro posibilidades para el marcador del primer equipo y 4 para el del segundo. ¿Cuántas opciones hay para rellenarlo?**
3. **¿Cuántas quinielas distintas se pueden rellenar? Exprésalo en notación científica, redondeando con una cifra decimal.**
4. **Si una apuesta simple cuesta 0,75 €, ¿cuánto cuesta rellenar todas las apuestas simples posibles? Utiliza el valor aproximado que calculaste en el apartado anterior.**

1. Hay $3^{14} = 4\,782\,969$ formas distintas
2. Hay $4 \cdot 4 = 16$ formas.
3. Hay $16 \cdot 4\,782\,969 = 76\,527\,504$ formas, es decir unas $7{,}7 \cdot 10^7$ formas.
4. $0{,}75 \cdot 7{,}7 \cdot 10^7 = 5{,}775 \cdot 10^7$ €, casi 58 millones de euros.

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica la base y el exponente de estas potencias y calcula el resultado.

a) 5^3 **c)** $(-4)^2$ **e)** 10^{-2}

b) 10^4 **d)** $(-1)^5$ **f)** $(-2)^{-3}$

a) Base 5, exponente 3, $5^3 = 125$

b) Base 10, exponente 4, $10^4 = 10000$

c) Base –4, exponente 2, $(-4)^2 = 16$

d) Base –1, exponente 5, $(-1)^5 = -1$

e) Base 10, exponente –2, $10^{-2} = 0{,}01$

f) Base –2, exponente –3, $(-2)^{-3} = -0{,}125$

2. Escribe como una única potencia.

a) $7^4 \cdot 7 \cdot 7^5$ **c)** $(3^2)^5 \cdot 3^4$ **e)** $14^5 : 7^5 \cdot 2^5$

b) $(-2)^8 : (-2)^5$ **d)** $(5^3 \cdot 5^2)^5 : 5^4 \cdot 5^7$ **f)** $(-2)^6 \cdot 3^6 \cdot (-5)^6$

a) $7^{4+1+5} = 7^{10}$ **c)** $3^{2\cdot 5+4} = 3^{14}$ **e)** $(2^5 \cdot 7^5) : 7^5 \cdot 2^5 = 2^{10}$

b) $(-2)^{8-5} = (-2)^3$ **d)** $5^{(3+2)\cdot 5-4+7} = 5^{28}$ **f)** $[(-2)\cdot 3\cdot(-5)]^6 = 30^6$

3. Opera usando las propiedades de las potencias.

a) $(2^2 \cdot 3^5)^2 \cdot 3^4$ **c)** $\dfrac{(-2)^7 \cdot 2^5 \cdot (-2)^4}{(-2)^6 \cdot 2^{10}}$ **e)** $\dfrac{2^{-15} \cdot (2^{-2})^{-9}}{(2^2)^{-6}}$

b) $\dfrac{2^5 \cdot 3^8 \cdot (2^2 \cdot 3)^7}{(2^4 \cdot 3^5)^2}$ **d)** $\dfrac{16^5 \cdot 81^3 \cdot 15^4}{10^2 \cdot 36^8}$ **f)** $\dfrac{6^{-5} \cdot 2^8 \cdot (3^4)^{-2}}{12^9 \cdot (2^4 \cdot 3^{-11})^{-2}}$

a) $(2^2 \cdot 3^5)^2 \cdot 3^4 = 2^4 \cdot 3^{10} \cdot 3^4 = 2^4 \cdot 3^{14}$

b) $\dfrac{2^5 \cdot 3^8 \cdot (2^2 \cdot 3)^7}{(2^4 \cdot 3^5)^2} = \dfrac{2^5 \cdot 3^8 \cdot 2^{14} \cdot 3^7}{2^8 \cdot 3^{10}} = 2^{11} \cdot 3^5$

c) $\dfrac{(-2)^7 \cdot 2^5 \cdot (-2)^4}{(-2)^6 \cdot 2^{10}} = \dfrac{-2^7 \cdot 2^5 \cdot 2^4}{2^6 \cdot 2^{10}} = \dfrac{-2^{16}}{2^{16}} = -1$

d) $\dfrac{16^5 \cdot 81^3 \cdot 15^4}{10^2 \cdot 36^8} = \dfrac{(2^4)^5 \cdot (3^4)^3 \cdot (3 \cdot 5)^4}{(2 \cdot 5)^2 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^8} = \dfrac{2^{20} \cdot 3^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^4}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{16} \cdot 3^{16}} = 2^2 \cdot 5^2$

e) $\dfrac{2^{-15} \cdot (2^{-2})^{-9}}{(2^2)^{-6}} = \dfrac{2^{-15} \cdot 2^{18}}{2^{-12}} = \dfrac{2^{12} \cdot 2^{18}}{2^{15}} = 2^{15}$

f) $\dfrac{6^{-5} \cdot 2^8 \cdot (3^4)^{-2}}{12^9 \cdot (2^4 \cdot 3^{-11})^{-2}} = \dfrac{2^{-5} \cdot 3^{-5} \cdot 2^8 \cdot 3^{-8}}{(2^2 \cdot 3)^9 \cdot 2^{-8} \cdot 3^{22}} = \dfrac{2^8 \cdot 2^8}{2^5 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \cdot 2^{18} \cdot 3^9 \cdot 3^{22}} = \dfrac{1}{2^7 \cdot 3^{44}}$

4. Expresa los siguientes números en notación científica.

a) 32 700 000 **b)** 0,000 000 022 **c)** $458 \cdot 10^7$ **d)** $0{,}00031 \cdot 10^{-5}$

a) $3{,}27 \cdot 10^7$ **b)** $2{,}2 \cdot 10^{-8}$ **c)** $4{,}58 \cdot 10^9$ **d)** $3{,}1 \cdot 10^{-9}$

5. Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números usando el algoritmo.

a) 8229 **b) 566992**

a)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{82\;29} & 90 \\ -81 & 180\cdot 0=0 \\ 1\;29 & \\ -\;\;0 & \\ 1\;29 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{56\;69\;92} & 752 \\ -49 & 145\cdot 5=725 \\ 7\;69 & 1502\cdot 2=3004 \\ -7\;25 & \\ 44\;92 & \\ -30\;04 & \\ 14\;88 & \end{array}$$

6. Calcula por aproximación las siguientes raíces y escribe el resto.

a) $\sqrt{164}$ **b)** $\sqrt{302}$ **c)** $\sqrt{888}$ **d)** $\sqrt{9100}$

a) $\sqrt{164}=12$, resto: 20

c) $\sqrt{888}=29$, resto: 47

b) $\sqrt{302}=17$, resto: 13

d) $\sqrt{9100}=95$, resto: 75

7. Calcula usando las propiedades de las potencias.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5:\left(\frac{1}{2}\right)^7$

c) $\sqrt{\frac{2}{50}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\cdot\frac{4}{5}$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^6:\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{-5}\cdot\sqrt{\frac{81}{625}}$

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3+5-7}=\frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\frac{1}{25}}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{2^2}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{5^2}{2^2}\cdot\frac{2^2}{5}=1$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{6-(-5)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^9$

d) $\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5\cdot\frac{9}{25}=\left(\frac{3}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^9$

8. Resuelve las siguientes operaciones combinadas.

a) $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]-\sqrt{\frac{49}{16}}$

b) $\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sqrt{5^2-4^2}:\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

c) $4^{-1}+\sqrt{\frac{2}{18}}\cdot(3^2-2^3\cdot 3)\cdot 5^{-1}$

a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{25}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{8}\right]-\frac{7}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{25}{4}-\frac{9}{4}\right]-\frac{7}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{4}-\frac{7}{4}=\frac{3}{4}-1-\frac{7}{4}=-1-\frac{4}{4}=-2$

b) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{25-16}:\left(\frac{2^2}{3^2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot 3:\frac{4}{9}=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}:\frac{4}{9}=\frac{3}{4}-\frac{27}{16}=\frac{12-27}{16}=\frac{-15}{16}$

c) $\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{9}}\cdot(9-8\cdot 3)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot(-15)\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{4}-1=\frac{-3}{4}$

9. En un puerto marítimo han recibido 8017 cajas. Deben colocarlas formando un cuadrado, y guardar las que sobren.

¿Cuántas almacenarán?

La raíz entera de 8017 es 89. Podrán formar un cuadrado de $89^2=7921$ cajas, y sobrarán $8017-7921=96$ cajas.

4 Proporcionalidad

1. Calcula la razón entre los siguientes pares de números:

a) 33 y 36 **b) 24 y 42** **c) 102 y 98**

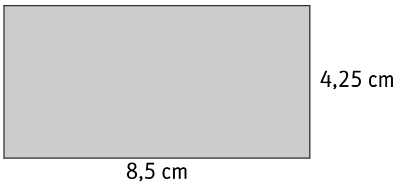
b) $\dfrac{33}{36} = \dfrac{11}{12} = 0,91\hat{6}$

b) $\dfrac{24}{42} = \dfrac{4}{7}$

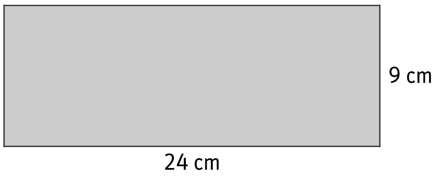
c) $\dfrac{102}{98} = \dfrac{51}{49}$

2. Calcula la razón entre las dimensiones de los siguientes rectángulos.

a)



b)



a) $\dfrac{4,25}{8,5} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

b) $\dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8} = 0,375$

3. Indica qué colecciones de números forman proporción.

a) 21, 30, 140 y 200

b) 16, 25, 14 y 21

c) 15,5; 2,5; 24,8 y 4

d) 10,5; 12,5; 16,5 y 18,5

a) $\dfrac{21}{30} = \dfrac{140}{200} = 0,7$. Sí forman proporción.

b) $\dfrac{16}{25} = 0,64 \neq \dfrac{14}{21} = 0,\hat{6}$. No forman proporción.

c) $\dfrac{15,5}{2,5} = \dfrac{24,8}{4} = 6,2$. Sí forman proporción.

d) $\dfrac{10,5}{12,5} = 0,84 \neq \dfrac{16,5}{18,5} = 0,\widehat{891}$. No forman proporción.

4. Calcula el valor que falta en las siguientes proporciones.

a) $\dfrac{4}{5} = \dfrac{x}{75}$ **b)** $\dfrac{10}{40} = \dfrac{7}{x}$ **c)** $\dfrac{18}{x} = \dfrac{27}{6}$ **d)** $\dfrac{4}{x} = \dfrac{x}{25}$

a) $x = \dfrac{4 \cdot 75}{5} = 60$

b) $x = \dfrac{40 \cdot 7}{10} = 28$

c) $x = \dfrac{18 \cdot 6}{27} = 4$

d) $x^2 = 25 \cdot 4 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$

5. La razón entre la altura de Joaquín y la sombra que proyecta es de $\dfrac{2}{7}$.

a) Si Joaquín mide 1,80 m, ¿cuánto mide su sombra?

b) En ese mismo instante, la sombra que proyecta un árbol de su jardín mide 4,75 m. Si la altura y la sombra de Joaquín y la sombra y la altura del árbol forman una proporción, ¿cuánto mide de alto el árbol?

a) $\dfrac{2}{7} = \dfrac{1,80}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1,80 \cdot 7}{2} = 6,3$

La sombra mide 6,3 m.

b) $\dfrac{2}{7} = \dfrac{x}{4,75} \Rightarrow x = \dfrac{4,75 \cdot 2}{7} = 1,36$

El árbol mide 1,36 m aproximadamente.

6. **Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.**

a) **El número de comics comprados de una colección y el dinero que cuestan.**

b) **El número de páginas de un libro y su precio.**

c) **La edad de un árbol y su altura.**

a) Sí son directamente proporcionales.

b) No son directamente proporcionales.

c) No son directamente proporcionales.

7. **Actividad resuelta.**

8. **Las magnitudes *A* y *B* son directamente proporcionales. Copia y completa la tabla.**

A	3	11	34	●	●
B	●	5	●	143	202,4

La razón de proporcionalidad es $\frac{3}{1,\widehat{36}}=\frac{11}{5}=\frac{34}{15,\widehat{45}}=\frac{314,6}{143}=\frac{445,28}{202,4}=2,2$.

A	3	11	34	314,6	445,28
B	$1,\widehat{36}$	5	$15,\widehat{45}$	143	202,4

9. **Un coche ha recorrido los 141 km distancia que hay entre Soria y Burgos en una hora y media. ¿Qué distancia recorrería en 3 horas yendo a la misma velocidad?**

$\frac{141}{1,5}=\frac{x}{3}\Rightarrow x=\frac{141\cdot 3}{1,5}=282$. En el doble de tiempo recorrerá el doble de distancia, 282 km.

10. **Para un viaje, Marco ha cambiado 120 €, y le han dado 1692 pesos argentinos. Si cambia 230 € más, ¿cuántos pesos recibirá?**

$\frac{120}{1692}=\frac{230}{x}\Rightarrow x=\frac{230\cdot 1692}{120}=3243$. Recibirá 3243 pesos.

11. **Los alcaldes de Restal, Alpedrito y Arroyosalinos han desarrollado un plan para remodelar 600 m, 900 m y 1300 m, respectivamente, de las carreteras de entrada a cada pueblo. En total han tenido que pagar entre los tres 70 000 €. ¿Qué parte le corresponde pagar a cada pueblo?**

$$r=\frac{70\,000}{600+900+1300}=\frac{70\,000}{2800}=25$$

Restal pagará $25\cdot 600=15\,000$ €, Alpedrito pagará $25\cdot 900=22\,500$ € y Arroyosalinos, $25\cdot 1300=32\,500$ €.

12. **Tres amigos han trabajado durante varios días en una obra. Rodrigo ha trabajado 25 horas, Rodolfo ha trabajado 36 horas y Roberto ha trabajado 60 horas. En total han recibido 1512,5 €. ¿Cuánto cobrará cada uno?**

$$r=\frac{1512,5}{25+36+60}=\frac{1512,5}{121}=12,5$$

Rodrigo cobrará $12,5\cdot 25=312,5$ €, Rodolfo, $12,5\cdot 36=450$ € y Roberto, $12,5\cdot 60=750$ €.

13. Calcula los siguientes porcentajes.

a) 25 % de 40 **b) 12 % de 86** **c) 70 % de 312** **d) 7 % de 312** **e) 120 % de 50** **f) 50 % de 120**

a) $\frac{25 \cdot 40}{100} = 10$ **c)** $\frac{70 \cdot 312}{100} = 218,4$ **e)** $\frac{120 \cdot 50}{100} = 60$

b) $\frac{12 \cdot 86}{100} = 10,32$ **d)** $\frac{7 \cdot 312}{100} = 21,84$ **f)** $\frac{50 \cdot 120}{100} = 60$

14. Expresa cada fracción utilizando el tanto por ciento.

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{18}{40}$ **c)** $\frac{15}{12}$ **d)** $\frac{42}{14}$ **e)** $\frac{17}{24}$ **f)** $\frac{1}{3}$

a) $\frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow 75\ \%$ **c)** $\frac{15}{12} = 1,25 \Rightarrow 125\ \%$ **e)** $\frac{17}{24} = 0,708\widehat{3} \Rightarrow 70,8\widehat{3}\ \%$

b) $\frac{18}{40} = 0,45 \Rightarrow 45\ \%$ **d)** $\frac{42}{14} = 3 \Rightarrow 300\ \%$ **f)** $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3} \Rightarrow 33,\widehat{3}\ \%$

15. Realiza las siguientes variaciones porcentuales.

a) Aumenta 16 un 5 %. **c) Aumenta 36 000 un 0,7 %.**

b) Disminuye 200 un 4 %. **d) Disminuye 0,64 un 5 %.**

a) $16 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 16 \cdot 1,05 = 16,8$ **c)** $36\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,7}{100}\right) = 36\,000 \cdot 1,007 = 36\,252$

b) $200 \cdot \left(1 - \frac{4}{100}\right) = 200 \cdot 0,96 = 192$ **d)** $0,64 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 0,64 \cdot 0,95 = 0,608$

16. Actividad resuelta.

17. Indica qué porcentaje aumenta o disminuye una cantidad al multiplicarla por los siguientes números.

a) 1,45 **b) 0,8** **c) 0,999** **d) 1,015** **e) 3** **f) 1**

a) $145 - 100 = 45 \Rightarrow$ Aumenta un 45 %. **d)** $101,5 - 100 = 1,5 \Rightarrow$ Aumenta un 1,5 %.

b) $100 - 80 = 20 \Rightarrow$ Disminuye un 20 %. **e)** $300 - 100 = 200 \Rightarrow$ Aumenta un 200 %.

c) $100 - 99,9 = 0,1 \Rightarrow$ Disminuye un 0,1 %. **f)** $100 - 100 = 0 \Rightarrow$ No varía.

18. Un equipo de futbol ha ganado 6 partidos de 15 que han disputado. Un equipo de baloncesto ha ganado 8 de 20 partidos. ¿Quién ha obtenido mejores resultados hasta el momento?

Equipo de fútbol: $\frac{6}{15} = 0,4 \Rightarrow 40\%$ Equipo de baloncesto: $\frac{8}{20} = 0,4 \Rightarrow 40\%$

Tienen el mismo porcentaje de victorias.

19. Una tienda rebajó un jersey que costaba 40 € un 15 %, y luego aplicó otra rebaja del 10 % sobre el precio ya rebajado. ¿Cuál es el precio final del jersey?

$40\cdot\left(1-\frac{15}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right)=40\cdot 0{,}85\cdot 0{,}9=30{,}6$. El precio final es de 30,6 €.

20. Actividad resuelta.

21. Un libro tiene una rebaja del 10 % y ahora cuesta 17,1 €. ¿Cuánto costaba antes?

Como 17,1 € es el precio inicial menos el 10 % de descuento, representa el 90 % del precio inicial, aplicamos la proporción:

$\frac{17{,}1}{90}=\frac{x}{100}\Rightarrow x=\frac{17{,}1\cdot 100}{90}=19$. Costaba 19 €.

22. Actividad interactiva.

23. Indica si las siguientes magnitudes son proporcionales y el tipo de proporcionalidad.

a) Velocidad a la que va un coche y tiempo que tarda en recorrer 100 km.

b) Número de refrescos vendidos y dinero obtenido.

c) Número de horas que un tractor está arando y la superficie que le queda por arar.

d) El número de amigos que participan en la compra de un regalo y la cantidad que aportan.

a) Inversamente proporcionales.

b) Directamente proporcionales.

c) No son proporcionales.

d) Inversamente proporcionales.

24. Actividad resuelta.

25. Indica si las magnitudes *A* y *B* son inversamente proporcionales. En caso afirmativo, calcula la constante de proporcionalidad inversa.

A	23	35	40	56	70
B	14	9,2	8,05	5,85	4,68

$23\cdot 14=35\cdot 9{,}2=40\cdot 8{,}05=322\neq 56\cdot 5{,}85=70\cdot 4{,}68=327{,}6$

Como todos los productos no son iguales, las magnitudes *A* y *B* no son inversamente proporcionales.

26. Reparte 510 de forma inversamente proporcional a $\frac{1}{2},\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{10}$.

Equivale a efectuar un reparto directo a 2, 5 y 10:

$\frac{510}{2+5+10}=\frac{510}{17}=30$

El reparto es $2\cdot 30=60$, $5\cdot 30=150$ y $10\cdot 30=300$.

27. Leyendo 100 páginas diarias, Raquel terminó un libro en 8 días. Si hubiera leído 80 páginas diarias, ¿cuántos días habría tardado?

Aplicando la proporcionalidad inversa: $100\cdot 8=80x\Rightarrow x=\frac{100\cdot 8}{80}=10$. Habría tardado 10 días.

28. En un juego de ordenador se dan puntos de forma inversamente proporcional al tiempo que se tarda en resolver un acertijo. Jesús lo ha resuelto en 45 s y ha ganado 300 puntos. Cuando juega María, resuelve el mismo acertijo en 40 s, ¿cuántos puntos obtendrá?

Aplicando la proporcionalidad inversa: $45\cdot 300 = 40x \Rightarrow x = \frac{45\cdot 300}{40} = 337{,}5$. Obtendrá 337,5 puntos.

29. En una carrera benéfica reciben premios los tres primeros clasificados, de forma inversamente proporcional a la posición de llegada a la meta. En total se reparten 9460 €. ¿Qué cantidad corresponderá a cada uno?

Se trata de un reparto inversamente proporcional a 1, 2 y 3: $k = \frac{9460}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{9460}{\frac{11}{6}} = \frac{56\,760}{11} = 5160$.

El primero se lleva 5160 €, el segundo, $\frac{1}{2}\cdot 5160 = 2580$ € y el tercero, $\frac{1}{3}\cdot 5160 = 1720$ €.

30. Actividad resuelta.

31. Una imprenta trabajando 8 horas diarias, tarda 3 días en fabricar 6000 libros. Si trabaja 10 horas diarias, ¿cuántos días tardará en fabricar 5000 libros? Resuelve el problema por reducción a la unidad y por el método de la regla de tres.

- Reducción a la unidad:

8 h/día	$\Rightarrow$	3 días	$\Rightarrow$ 6000 libros
1 h/día	$\Rightarrow$	3 días	$\Rightarrow$ $6000 : 8 = 750$ libros
1 h/día	$\Rightarrow$	$3 : 750 = 0{,}004$ días	$\Rightarrow$ 1 libro
1 h/día	$\Rightarrow$	$0{,}004\cdot 5000 = 20$ días	$\Rightarrow$ 5000 libros
10 h/día	$\Rightarrow$	$20 : 10 = 2$ días	$\Rightarrow$ 5000 libros

Tardará 2 días.

- Regla de tres:

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Días		Horas/día		Libros
3	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	6000
x	$\longrightarrow$	10	$\longrightarrow$	5000

$$\frac{3}{x} = \frac{10}{8}\cdot\frac{6000}{5000} \Rightarrow x = \frac{3\cdot 8\cdot 5000}{10\cdot 6000} = 2 \text{ días}$$

32. En el huerto de Paco hay una plaga de voraces insectos. Cincuenta de ellos son capaces de atacar 225 plantas en 12 días. ¿Cuánto tardaría el doble de insectos en atacar el triple de plantas?

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Días		Insectos		Plantas
12	$\longrightarrow$	50	$\longrightarrow$	225
x	$\longrightarrow$	100	$\longrightarrow$	675

$$\frac{12}{x} = \frac{100}{50}\cdot\frac{225}{675} \Rightarrow x = \frac{12\cdot 50\cdot 675}{100\cdot 225} = 18 \text{ días}$$

33. **Un ganadero necesita 324 kg de pienso para alimentar a 21 vacas durante 7 días.**

a) **¿Durante cuánto tiempo podrá alimentar el ganadero a 15 vacas con 840 kg de pienso?**

b) **¿Cuántos kilos de pienso necesitaría para alimentar a 25 vacas durante 10 días?**

a)

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Tiempo		Vacas		Pienso
7 días	⟶	21 vacas	⟶	324 kg
x días	⟶	15 vacas	⟶	840 kg

$$\frac{7}{x}=\frac{15}{21}\cdot\frac{324}{840}\Rightarrow x=\frac{7\cdot 21\cdot 840}{15\cdot 324}=25,\overset{\frown}{407}$$, aproximadamente 25 días

b)

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad directa

Pienso		Vacas		Días
324 kg	⟶	21	⟶	7
x	⟶	25	⟶	10

$$\frac{324}{x}=\frac{21}{25}\cdot\frac{7}{10}\Rightarrow x=\frac{324\cdot 25\cdot 10}{21\cdot 7}=551,02$$, aproximadamente 551 kg

34. **Elige la respuesta correcta en cada caso.**

a) **La razón entre 25 y 100 es:**

A. $\frac{5}{10}$ $\frac{10}{5}$ **B. 4** **C.** $\frac{1}{4}$ **D.**

b) **La fracción que forma proporción con $\frac{2}{3}$ es:**

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{225}{300}$ $\frac{10}{15}$ **C.** $\frac{4}{9}$ **D.**

c) **La razón entre 40 y 88 es:**

A. **0** **B.** **Mayor que 1** **Menor que 1** **C. 1** **D.**

a) $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. La respuesta correcta es C. $\frac{1}{4}$.

b) $2\cdot 15=3\cdot 10=30$. La respuesta correcta es B. $\frac{10}{15}$.

c) Como 40< 88, la respuesta correcta es B. Menor que 1.

35. Encuentra el término que falta en cada una de las siguientes proporciones.

a) $\frac{10}{36}=\frac{x}{90}$ **b)** $\frac{10}{36}=\frac{90}{x}$ **c)** $\frac{20}{x}=\frac{15}{6}$ **d)** $\frac{12}{x}=\frac{x}{300}$

a) $\frac{10}{36}=\frac{x}{90}\Rightarrow x=\frac{10\cdot 90}{36}=25$

c) $\frac{20}{x}=\frac{15}{6}\Rightarrow x=\frac{20\cdot 6}{15}=8$

b) $\frac{10}{36}=\frac{90}{x}\Rightarrow x=\frac{36\cdot 90}{10}=324$

d) $\frac{12}{x}=\frac{x}{300}\Rightarrow x^2=12\cdot 300=3600\Rightarrow x=\pm 60$

36. Forma dos proporciones con los siguientes conjuntos de números.

a) 4, 5, 8, 10 **b)** 3, 6, 6, 12 **c)** 1, 5, 8, 40 **d)** 2, 9, 18, 1

a) $\frac{4}{5}=\frac{8}{10},\ \frac{4}{8}=\frac{5}{10}$ **b)** $\frac{3}{6}=\frac{6}{12},\ \frac{6}{3}=\frac{12}{6}$ **c)** $\frac{1}{5}=\frac{8}{40},\ \frac{1}{8}=\frac{5}{40}$ **d)** $\frac{1}{9}=\frac{2}{18},\ \frac{1}{2}=\frac{9}{18}$

37. Actividad resuelta.

38. Calcula el valor de la incógnita en las proporciones:

a) $\frac{2a}{15}=\frac{8}{6}$ **b)** $\frac{3+b}{9}=\frac{8}{12}$ **c)** $\frac{15}{4-c}=\frac{20}{8}$

a) $2a=\frac{8\cdot 15}{6}=20\Rightarrow a=10$ **b)** $3+b=\frac{8\cdot 9}{12}=6\Rightarrow b=3$ **c)** $4-c=\frac{15\cdot 8}{20}=6\Rightarrow c=-2$

39. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas, sabiendo que las magnitudes son directamente proporcionales.

a)

x	**28**	●	●	**10**	**1**	●
y	**12**	**6**	**18**	●	●	**1**

b)

x	**4**	●	**16**	●	●	**1**
y	**6**	**3**	●	**27**	**1**	●

a) La razón de proporcionalidad es $r=\frac{28}{12}=\frac{14}{6}=\frac{42}{18}=\frac{10}{\frac{30}{7}}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{\frac{7}{3}}{1}=2,\hat{3}$.

x	**28**	14	42	**10**	**1**	$\frac{7}{3}$
y	**12**	**6**	**18**	$\frac{30}{7}$	$\frac{3}{7}$	**1**

b) La razón de proporcionalidad es $r=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=\frac{16}{24}=\frac{18}{27}=\frac{\frac{2}{3}}{1}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=0,\hat{6}$.

x	**4**	2	**16**	18	$\frac{2}{3}$	**1**
y	**6**	**3**	24	**27**	**1**	$\frac{3}{2}$

40. **Dos magnitudes *A* y *B* son directamente proporcionales. Cuando *A* vale 3, el valor de *B* es 8. Calcula los valores indicados.**

a) La razón entre las magnitudes *A* y *B*.

b) El valor de *A* cuando *B* vale 1.

c) El valor de *B* cuando *A* vale 1.

d) La razón entre las magnitudes *B* y *A*.

a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{8}{3}$

41. **Al estudiar dos magnitudes directamente proporcionales, se han obtenido las siguientes igualdades.**

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{15}=\frac{12}{20}$$

a) Comprueba que las dos fracciones intermedias son equivalentes.

b) Forma una fracción cuyo numerador sea la suma de todos los numeradores anteriores, y cuyo denominador sea la suma de los denominadores. ¿Formará proporción con las anteriores? Compruébalo.

a) $6\cdot 15=9\cdot 10=90$

b) $\frac{3+6+9+12}{5+10+15+20}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$. Sí, forma proporción con las demás.

42. **Por 6 kg de naranjas se han pagado 14,4 €. ¿Cuánto costarían 5 kg de esas naranjas? ¿Y 17 kg? Resuélvelo por el método de reducción a la unidad y por el método de la regla de tres.**

- Reducción a la unidad:

  6 kg $\Rightarrow$ 14,4 €

  1 kg $\Rightarrow$ $14{,}4:6=2{,}4$ €

  5 kg $\Rightarrow$ $2{,}4\cdot 5=12$ €

  17 kg $\Rightarrow$ $2{,}4\cdot 17=40{,}8$ €

  Al comprar 5 kg costarían 12 € y 17 kg costarían 40,8 €.

- Regla de tres:

Proporcionalidad directa

Precio		Cantidad
14,4 €	$\longrightarrow$	6 kg
x	$\longrightarrow$	5 kg

$\frac{14{,}4}{x}=\frac{6}{5}\Rightarrow x=\frac{14{,}4\cdot 5}{6}=12$ €

Proporcionalidad directa

Precio		Cantidad
14,4 €	$\longrightarrow$	6 kg
x	$\longrightarrow$	17 kg

$\frac{14{,}4}{x}=\frac{6}{17}\Rightarrow x=\frac{14{,}4\cdot 17}{6}=40{,}8$ €

43. **Reparte 312 en partes directamente proporcionales a 15, 11 y 4.**

$r=\frac{312}{15+11+4}=\frac{312}{30}=10{,}4$

El reparto es $15\cdot 10{,}4=156$, $11\cdot 10{,}4=114{,}4$ y $4\cdot 10{,}4=41{,}6$.

44. **Un rollo de alambre de 1200 m se quiere dividir en tres partes que sean proporcionales a 4, 6 y 10. ¿Cuánto medirá cada parte?**

$r=\frac{1200}{4+6+10}=\frac{1200}{20}=60$

Las partes miden $4\cdot 60=240$, $6\cdot 60=360$ y $10\cdot 60=600$.

45. Reparte 1800 en partes directamente proporcionales a 1000, 2000 y 3000. A continuación, reparte la misma cantidad en partes directamente proporcionales a 1, 2 y 3. ¿Qué observas?

- Primer caso:

$$r = \frac{1800}{1000+2000+3000} = \frac{1800}{6000} = 0{,}3$$

El reparto es $1000 \cdot 0{,}3 = 300$, $2000 \cdot 0{,}3 = 600$ y $3000 \cdot 0{,}3 = 900$.

- Segundo caso:

$$r = \frac{1800}{1+2+3} = \frac{1800}{6} = 300$$

El reparto es $1 \cdot 300 = 300$, $2 \cdot 300 = 600$ y $3 \cdot 300 = 900$.

Los repartos coinciden.

46. Reparte 1020 en partes directamente proporcionales a $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$.

$$r = \frac{1020}{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}} = \frac{1020}{\frac{51}{40}} = \frac{1020 \cdot 40}{51} = 800$$

El reparto es $\frac{1}{2} \cdot 800 = 400$, $\frac{2}{5} \cdot 800 = 320$ y $\frac{3}{8} \cdot 800 = 300$.

47. Sonia ha trabajado el doble de horas que Elena, y Rosa ha trabajado el triple que las otras dos juntas. En total han cobrado 480 €.

¿Es posible repartir el dinero sin saber las horas que ha trabajado cada una?

Como se conoce la proporción entre las horas de trabajo de las tres, se puede hacer el reparto.

Por 1 h que trabajó Elena, Sonia trabajó 2 h, y Rosa, $3 \cdot (1+2) = 9$ h: $r = \frac{480}{2+1+9} = 40$

Elena recibirá 40 €, Sonia, $2 \cdot 40 = 80$ €, y Elena, $9 \cdot 40 = 360$ €.

48. Calcula los siguientes porcentajes.

a) 2,5 % de 18 — **c) 75 % de 29,6** — **e) 220 % de 50**

b) 17 % de 42 — **d) 0,4 % de 3,2** — **f) 47 % de 39**

a) $\frac{18 \cdot 2{,}5}{100} = 0{,}45$ **c)** $\frac{29{,}6 \cdot 75}{100} = 22{,}2$ **e)** $\frac{50 \cdot 220}{100} = 110$

c) $\frac{42 \cdot 17}{100} = 7{,}14$ **d)** $\frac{3{,}2 \cdot 0{,}4}{100} = 0{,}0128$ **f)** $\frac{39 \cdot 47}{100} = 18{,}33$

49. Expresa cada fracción en forma de porcentaje, de tanto por uno y de tanto por mil.

a) $\frac{4}{5}$ **c)** $\frac{18}{12}$ **e)** $\frac{7}{56}$

b) $\frac{126}{150}$ **d)** $\frac{102}{17}$ **f)** $\frac{1}{100}$

a) $\frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\,\% = 800\,‰$ **c)** $\frac{18}{12} = 1{,}5 = 150\,\% = 1500\,‰$ **e)** $\frac{7}{56} = 0{,}125 = 12{,}5\,\% = 125\,‰$

d) $\frac{126}{150} = 0{,}84 = 84\,\% = 840\,‰$ **d)** $\frac{102}{17} = 6 = 600\,\% = 6000\,‰$ **f)** $\frac{1}{100} = 0{,}01 = 1\,\% = 10\,‰$

50. **Indica en qué porcentaje aumenta o disminuye una cantidad al multiplicarla por los siguientes números.**

a) 0,78 **c) 1,05** **e) 100** **g) 0,004**

b) 0,64 **d) 1,21** **f) 1,10** **h) 0,01**

a) $100-78=22 \Rightarrow$ Disminuye un 22 %.

b) $100-64=36 \Rightarrow$ Disminuye un 36 %.

c) $105-100=5 \Rightarrow$ Aumenta un 5 %.

d) $121-100=21 \Rightarrow$ Aumenta un 21 %.

e) $10\,000-100=9900 \Rightarrow$ Aumenta un 9900 %.

f) $110-100=10 \Rightarrow$ Aumenta un 10 %.

g) $100-0,4=99,6 \Rightarrow$ Disminuye un 99,6 %.

h) $100-1=99 \Rightarrow$ Disminuye un 99 %.

51. **Aplica a cada cantidad la variación indicada.**

a) Aumenta 120 un 10 %. **c) Disminuye 12 un 17 %.**

b) Disminuye 348 un 20 %. **d) Aumenta 43 un 3 %.**

a) $120 \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)=120 \cdot 1,1=132$

b) $348 \cdot \left(1-\frac{20}{100}\right)=348 \cdot 0,8 = 278,4$

c) $12 \cdot \left(1-\frac{17}{100}\right)=12 \cdot 0,83=9,96$

d) $43 \cdot \left(1+\frac{3}{100}\right)=43 \cdot 1,03=44,29$

52. **Indica el porcentaje que representa cada cantidad.**

a) 64 de 256 **c) 12 de 30** **e) 0,05 de 1**

b) 1 200 000 de 3 000 000 **d) 11,6 de 48**

a) $\frac{64}{256}=0,25 \Rightarrow 25\ \%$

b) $\frac{1\,200\,000}{3\,000\,000}=0,4 \Rightarrow 40\ \%$

c) $\frac{12}{30}=0,4 \Rightarrow 40\ \%$

d) $\frac{11,6}{48}=0,241\widehat{6} \Rightarrow 24,1\widehat{6}\ \%$

e) $\frac{0,05}{1}=0,05 \Rightarrow 5\ \%$

53. **Un artículo tenía un precio de 120 €. Se aplica un descuento del 5 %, y al resultado se le suma el IVA (21 %).**

Calcula el precio final de dos formas distintas.

a) Calculando los descuentos y aumentos paso a paso.

b) Usando el índice de variación en cada paso.

a) El descuento del 5 % son $\frac{120}{100}=\frac{x}{5} \Rightarrow x=\frac{120 \cdot 5}{100}=6$ €. Por lo que el artículo cuesta $120-6=114$ €.

El IVA es $\frac{114}{100}=\frac{x}{21} \Rightarrow x=\frac{114 \cdot 21}{100}=23,94$ €.

El precio final es $114+23,94=137,94$ €.

b) $120 \cdot \left(1-\frac{5}{100}\right) \cdot \left(1+\frac{21}{100}\right)=120 \cdot 0,95 \cdot 1,21=137,94$ €

54. **Un centro médico tenía 800 vacunas contra la gripe. Si le quedan 128, ¿qué porcentaje ha gastado?**

$$\frac{800-128}{800}=\frac{672}{800}=0,84 \Rightarrow 84\,\%$$

Ha gastado el 84 %.

55. **¿Es posible disminuir una cantidad un 120 %? ¿Por qué?**

No es posible, no tiene sentido. No se puede rebajar una cantidad más del 100 %.

56. **A una cantidad se le aplica un aumento del 10 %, y el resultado que se obtiene es 40,7. ¿Cuál era la cantidad inicial?**

$x\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)=40{,}7\Rightarrow x\cdot 1{,}1=40{,}7\Rightarrow x=\frac{40{,}7}{1{,}1}=37$. La cantidad inicial era 37.

57. **Al disminuir un 15 % cierta cantidad se obtiene 1028,5.¿Qué cantidad se tenía al principio?**

$x\cdot\left(1-\frac{15}{100}\right)=1028{,}5\Rightarrow x\cdot 0{,}85=1028{,}5\Rightarrow x=\frac{1028{,}5}{0{,}85}=1210$. Al principio se tenía 1210.

58. **Actividad resuelta.**

59. **Calcula el resultado final de aplicar los siguientes porcentajes encadenados. Calcula el porcentaje de variación respecto del precio inicial.**

a) **Aumento del 3 % y aumento del 3 %**

b) **Aumento del 12 % y disminución del 15 %**

c) **Aumento del 25 % y disminución del 60 %**

d) **Disminución del 10 % y disminución del 15 %**

a) $\left(1+\frac{3}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)=1{,}03\cdot 1{,}03=1{,}0609\Rightarrow 106{,}09-100=6{,}09$. Aumenta un 6,09 %.

b) $\left(1+\frac{12}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{15}{100}\right)=1{,}12\cdot 0{,}85=0{,}952\Rightarrow 100-95{,}2=4{,}8$. Disminuye un 4,8 %.

c) $\left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{60}{100}\right)=1{,}25\cdot 0{,}4=0{,}5\Rightarrow 100-50=50$. Disminuye un 50 %.

d) $\left(1-\frac{10}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{15}{100}\right)=0{,}90\cdot 0{,}85=0{,}765\Rightarrow 100-76{,}5=23{,}5$. Disminuye un 23,5 %.

60. **Actividad resuelta.**

61. **Calcula la cantidad inicial en cada caso.**

a) **Después de un aumento del 12 % y una disminución del 24 %, se obtiene 306,432.**

b) **Después de dos rebajas del 15 % y del 12 %, se obtiene 112.**

c) **Después de una rebaja del 40 % y un aumento del 25 %, se obtiene 366.**

d) **Después de una rebaja del 10 %, un aumento del 20 % y una rebaja del 10 %, se obtiene un resultado final de 3888.**

a) $x\cdot\left(1+\frac{12}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{24}{100}\right)=306{,}432\Rightarrow x=\frac{306{,}432}{1{,}12\cdot 0{,}76}=360$

b) $x\cdot\left(1-\frac{15}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{12}{100}\right)=112\Rightarrow x=\frac{112}{0{,}85\cdot 0{,}88}=149{,}73$

c) $x\cdot\left(1-\frac{40}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{25}{100}\right)=366\Rightarrow x=\frac{366}{0{,}6\cdot 1{,}25}=488$

d) $x\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right)=3888\Rightarrow x=\frac{3888}{0{,}9\cdot 1{,}20\cdot 0{,}9}=4000$

62. Copia en tu cuaderno y completa las siguientes tablas, sabiendo que las magnitudes son inversamente proporcionales.

a)

x	**4**	●	**8**	**160**	**1**	●
y	**10**	**8**	●	●	●	**1**

b)

x	**5**	●	**50**	●	●	**1**
y	**3**	**2**	●	**30**	**1**	●

a) La constante de proporcionalidad inversa es: $k = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 8 \cdot 5 = 160 \cdot 0,25 = 1 \cdot 40 = 40 \cdot 1 = 40$

x	**4**	5	**8**	**160**	**1**	40
y	**10**	**8**	5	0,25	40	**1**

b) La constante de proporcionalidad inversa es: $k = 5 \cdot 3 = 7,5 \cdot 2 = 50 \cdot 0,3 = 0,5 \cdot 30 = 15 \cdot 1 = 1 \cdot 15 = 15$

x	**5**	7,5	**50**	0,5	15	**1**
y	**3**	**2**	0,3	**30**	**1**	15

63. Dos magnitudes *A* y *B* son inversamente proporcionales. Cuando *A* vale 4, *B* vale 9. Calcula los siguientes valores.

a) Valor de *A* si $B = 3$

b) Valor de *B* si $A = 12$

c) Valor de *A* si $B = 0,01$

d) Valor para el que $A = B$

a) $4 \cdot 9 = A \cdot 3 \Rightarrow A = \frac{36}{3} = 12$

b) $4 \cdot 9 = 12 \cdot B \Rightarrow B = \frac{36}{12} = 3$

c) $4 \cdot 9 = A \cdot 0,01 \Rightarrow A = \frac{36}{0,01} = 3600$

d) $4 \cdot 9 = A \cdot A \Rightarrow A^2 = 36 \Rightarrow A \pm 6$

64. Reparte de forma inversamente proporcional las cantidades indicadas.

a) 500, inversamente proporcional a 2 y 6.

b) 2220, inversamente proporcional 12, 15 y 18.

c) 1690, inversamente proporcional a 20, 15 y 10.

d) 31 500, inversamente proporcional a 5, 24 y 48.

a) $k = \frac{500}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = \frac{500}{\frac{4}{6}} = 750 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 750 = 375,\ \frac{1}{6} \cdot 750 = 125$

b) $k = \frac{2220}{\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18}} = \frac{2220}{\frac{37}{180}} = 10\,800 \Rightarrow \frac{1}{12} \cdot 10\,800 = 900,\ \frac{1}{15} \cdot 10\,800 = 720,\ \frac{1}{18} \cdot 10800 = 600$

c) $k = \frac{1690}{\frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10}} = \frac{1690}{\frac{13}{60}} = 7800 \Rightarrow \frac{1}{20} \cdot 7800 = 390,\ \frac{1}{15} \cdot 7800 = 520,\ \frac{1}{10} \cdot 7800 = 780$

d) $k = \frac{31\,500}{\frac{1}{5} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48}} = \frac{31\,500}{\frac{63}{240}} = 120\,000 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot 120\,000 = 24000,\ \frac{1}{24} \cdot 120\,000 = 5000,\ \frac{1}{48} \cdot 120\,000 = 2500$

65. **Si $x = 2y$, ¿cuánto le corresponde a *x* respecto de *y* en un reparto inversamente proporcional?**

Como *x* es el doble de *y*, le corresponde la mitad.

66. **Cuatro pintores tardan 6 horas en pintar una casa. ¿Cuántos días hubiesen tardado si solo hubiesen trabajado 3 pintores?**

Aplicando la proporcionalidad inversa: $4 \cdot 6 = 3x \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8$

Tardarían 8 horas, que equivalen a $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ días.

67. **El área de un rectángulo es igual a 144 cm^2.**

a) **¿Qué relación hay entre la base y la altura?**

b) **Calcula cinco valores posibles de su base y su altura.**

a) Si *x* es la base e *y* es la altura, la relación es $x \cdot y = 144$, que es de proporcionalidad inversa.

b)

x	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm
y	144 cm	72 cm	48 cm	36 cm	28,8 cm

68. **Las magnitudes *x* e *y* que aparecen en la tabla son directamente proporcionales.**

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**10**
y	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**20**

Si $z = \frac{1}{y}$, responde:

a) **¿Qué relación hay entre las magnitudes *y* y *z*?**

b) **Construye la tabla que relaciona *x* con *z*. ¿Qué relación hay entre ambas magnitudes?**

a) Son inversamente proporcionales.

b) También son inversamente proporcionales.

Como $\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow z = \frac{1}{y} = \frac{1}{2x} \Rightarrow x \cdot z = \frac{1}{2}$

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**10**
z	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

69. **Si dos magnitudes son inversamente proporcionales, ¿es posible calcular el valor de una cuando la otra vale 0? Justifica tu respuesta.**

No es posible. Si son inversamente proporcionales, su producto es constante, *k*, y si una fuese 0, el producto también sería 0.

70. Calcula el valor de *x* en las siguientes igualdades.

a) $\frac{12}{x}=\frac{6}{4}\cdot\frac{24}{15}$

b) $\frac{1}{x}=\frac{10}{18}\cdot\frac{30}{25}$

c) $\frac{10}{25}=\frac{14}{x}\cdot\frac{15}{21}$

d) $\frac{5}{x}=\frac{5}{16}\cdot\frac{24}{40}\cdot\frac{10}{3}$

a) $\frac{12}{x}=\frac{6}{4}\cdot\frac{24}{15}\Rightarrow x=\frac{12\cdot 4\cdot 15}{6\cdot 24}=5$

b) $\frac{1}{x}=\frac{10}{18}\cdot\frac{30}{25}\Rightarrow x=\frac{18\cdot 25}{10\cdot 30}=\frac{3}{2}$

c) $\frac{10}{25}=\frac{14}{x}\cdot\frac{15}{21}\Rightarrow x=\frac{25\cdot 14\cdot 15}{10\cdot 21}=25$

d) $\frac{5}{x}=\frac{5}{16}\cdot\frac{24}{40}\cdot\frac{10}{3}\Rightarrow x=\frac{5\cdot 16\cdot 40\cdot 3}{5\cdot 24\cdot 10}=8$

71. Una tuneladora, trabajando 8 horas al día abre un túnel de 2 km en 5 días. ¿Cuánto tardará en excavar 5 km trabajando 10 horas diarias?

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Días		h/día		km
5	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	2
x	$\longrightarrow$	10	$\longrightarrow$	5

$$\frac{5}{x}=\frac{10}{8}\cdot\frac{2}{5}\Rightarrow x=\frac{5\cdot 8\cdot 5}{10\cdot 2}=10\ \text{días}$$

72. Dos mecanógrafos han escrito un texto en 64 minutos a un ritmo de 30 palabras por minuto. ¿Cuántos mecanógrafos hacen falta para copiar el mismo texto en la mitad de tiempo y a un ritmo de 20 palabras por minuto?

Proporcionalidad inversa

Proporcionalidad inversa

Mecanógrafos		Minutos		Palabras/min
2	$\longrightarrow$	64	$\longrightarrow$	30
x	$\longrightarrow$	32	$\longrightarrow$	20

$$\frac{2}{x}=\frac{32}{64}\cdot\frac{20}{30}\Rightarrow x=\frac{2\cdot 64\cdot 30}{32\cdot 20}=6\ \text{mecanógrafos}$$

73. Resuelve las siguientes cuestiones y compara los resultados.

a) El 10 % de una cantidad es 36. ¿Cuál es la cantidad inicial?

b) ¿Qué cantidad es el 10 % de 36?

c) Al disminuir un 10 % una cantidad, el resultado es 36. ¿Cuál era esa cantidad?

d) Disminuye 36 un 10 %. ¿Qué cantidad se obtiene?

a) $x\frac{10}{100}=36\Rightarrow x=\frac{3600}{10}=360$

b) $36\cdot\frac{10}{100}=3{,}6$

c) $x\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right)=36\Rightarrow x\cdot 0{,}9=36\Rightarrow x=\frac{36}{0{,}9}=40$

d) $36\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right)=36\cdot 0{,}9=32{,}4$

Los enunciados de a) y b) podrían parecer similares, pero no lo son, ya que la operación a realizar es la contraria. Lo mismo ocurre con c) y d).

74. Analiza y contesta.

a) Si las magnitudes *A* y *B* son directamente proporcionales y las magnitudes *B* y *C* son directamente proporcionales, ¿qué relación de proporcionalidad hay entre las magnitudes *A* y *C*?

b) Si las magnitudes *A* y *B* son directamente proporcionales y las magnitudes *B* y *C* son inversamente proporcionales, ¿qué relación de proporcionalidad hay entre las magnitudes *A* y *C*?

a) Son directamente proporcionales.

Si $\frac{A}{B}=k_1$ y $\frac{B}{C}=k_2 \Rightarrow \frac{A}{C}=\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}=k_1\cdot k_2$

b) Son inversamente proporcionales.

Si $\frac{A}{B}=k_1$ y $B\cdot C=k_2 \Rightarrow A\cdot C=\frac{A}{B}\cdot B\cdot C=k_1\cdot k_2$

75. Una empresa organiza una campaña solidaria. Por cada 25 € que los clientes gasten en su tienda, la empresa donará un euro a una ONG.

Si un cliente ha gastado 72 € en esa tienda, ¿qué cantidad deberá donar la empresa? ¿Qué porcentaje del precio representa?

$\frac{1}{25}=\frac{x}{72} \Rightarrow x=\frac{72}{25}=2{,}88$

La empresa dona 2,88 €.

$\frac{72}{100}=\frac{2{,}88}{x} \Rightarrow x=\frac{2{,}88\cdot 100}{72}=4$

Representa el 4 % del precio.

76. Para tapar un ventanal de una oficina, el dueño ha comprado 18 cortinas de 0,6 m de ancho. Al final decide cambiarlas por otras más estrechas, de 45 cm de ancho. ¿Cuántas necesitará?

Aplicando la proporcionalidad inversa: $18\cdot 60=45x \Rightarrow x=\frac{18\cdot 60}{45}=24$

Necesitará 24 cortinas.

77. Durante una llamada de teléfono, la batería del móvil de Esteban se gasta de forma directamente proporcional a la duración de la llamada. En una conversación de cinco minutos la carga de la batería ha bajado un 3 %.

Si carga completamente la batería, ¿cuánto tiempo podrá estar hablando?

$\frac{3}{5}=\frac{100}{x} \Rightarrow x=\frac{100\cdot 5}{3}=\frac{500}{3}\text{ min}=166\text{ min }40\text{ s}$

Podrá hablar 166 min y 40 s.

78. Un equipo de fútbol tiene dos especialistas en el lanzamiento de penaltis.

- **María ha lanzado esta temporada 23 penaltis, de los que ha metido 20.**
- **Lucía ha lanzado 20 penaltis y ha metido 17.**

a) Calcula el porcentaje de acierto de cada jugadora.

b) ¿A cuál elegirías para lanzar un penalti?

a) María: $\frac{20\cdot 100}{23}=86{,}96\,\%$. Lucía: $\frac{17\cdot 100}{20}=85\,\%$.

b) María lanza ligeramente mejor.

79. Un granjero tiene comida suficiente para alimentar a sus 24 cerdos durante 30 días. Si vende cuatro cerdos, ¿cuánto tiempo podrá alimentar a los que le quedan?

Aplicando la proporcionalidad inversa: $24 \cdot 30 = 20x \Rightarrow x = \dfrac{24 \cdot 30}{20} = 36$

Podrá alimentarlos durante 36 días.

80. Cinco imprentas tardan tres horas en imprimir 100 000 periódicos. ¿Cuántas imprentas harán falta para imprimir el doble de periódicos en cinco horas?

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Imprentas		Horas		Periódicos
5	⟶	3	⟶	100 000
x	⟶	5	⟶	200 000

$\dfrac{5}{x} = \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{100\,000}{200\,000} \Rightarrow x = \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 200\,000}{5 \cdot 100\,000} = 6$ imprentas

81. Tres vecinos tienen que pagar 8100 € por unas obras en su edificio. El reparto se hace de forma directamente proporcional a la superficie de cada uno de los pisos.

Si el primero mide 70 m^2, el segundo mide 80 m^2 y el tercero mide 120 m^2, ¿cuánto tendrá que pagar cada uno de los vecinos?

$r = \dfrac{8100}{70 + 80 + 120} = \dfrac{8100}{270} = 30$

El primero pagará $30 \cdot 70 = 2100$ €, $30 \cdot 80 = 2400$ € y $30 \cdot 120 = 3600$ €.

82. Entre 8 amigos habéis comprado un regalo de cumpleaños y habéis aportado 12 € cada uno. A última hora, otros dos amigos os avisan de que quieren participar en el regalo.

a) ¿Qué cantidad pagaréis al final cada uno de los amigos?

b) ¿Cuánto tendrá que pagar cada uno de los dos últimos amigos a cada uno de los ocho primeros?

a) Aplicando la proporcionalidad inversa: $8 \cdot 12 = 10x \Rightarrow x = \dfrac{8 \cdot 12}{10} = 9{,}6$

Pagará 9,6 € cada uno.

b) Tendrán que pagar $9{,}6 : 8 = 1{,}2$ € a cada uno.

83. Tres cosechadoras en tres horas han segado un campo de 27 hectáreas. ¿Cuántas cosechadoras serán necesarias para segar en dos horas 36 hectáreas de un campo de trigo?

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Cosechadoras		Horas		Hectáreas
3	⟶	3	⟶	27
x	⟶	2	⟶	36

$\dfrac{3}{x} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{27}{36} \Rightarrow x = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 36}{2 \cdot 27} = 6$ cosechadoras

84. **El número de habitantes del pueblo donde veranea Samuel era de 5400 habitantes hace 10 años y ahora tiene 6480 habitantes.**

a) **¿Cuál ha sido el porcentaje de variación?**

b) **Si en los próximos años el porcentaje de crecimiento se mantiene, ¿cuántos habitantes llegará a tener el pueblo dentro de 5 años?**

a) $\frac{6480}{5400} = 1{,}2 \Rightarrow 120 - 100 = 20$. Aumentó un 20 % en 10 años.

b) En dos periodos de 5 años se ha multiplicado en total por 1,2. Llamando x a la variación cada 5 años, $x \cdot x = 1{,}2 \Rightarrow x = \sqrt{1{,}2}$. En 5 años habrá $6480 \cdot \sqrt{1{,}2} = 7098$ habitantes, aproximadamente.

85. **Para pavimentar 600 m de calle se precisan 8 trabajadores durante 5 días trabajando 8 h al día. En esos mismos 5 días otro grupo de 10 trabajadores deben pavimentar otro tramo de calle de 850 m.**

a) **¿Cuántas horas al día trabajarán?**

b) **¿Cuántos trabajadores harían falta para hacer el trabajo en 5 días trabajando 8 horas diarias?**

a) Como el número de días es el mismo, basta con utilizar estas magnitudes:

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Horas/día		Trabajadores		Metros
8	⟶	8	⟶	600
x	⟶	10	⟶	850

$\frac{8}{x} = \frac{10}{8} \cdot \frac{600}{850} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 8 \cdot 850}{10 \cdot 600} = 9{,}0\widehat{6}$, aproximadamente 9 horas diarias

b) Como el número de días es el mismo, basta con utilizar estas magnitudes:

Proporcionalidad directa

Trabajadores		Metros
8	⟶	600
x	⟶	850

$\frac{8}{x} = \frac{600}{850} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 850}{600} = 11{,}\widehat{3}$ .trabajadores.

Por tanto, harían falta 12 trabajadores.

86. **Las acciones de una compañía han subido un 18 % en 2015, pero han bajado un 12 % en 2016.**

a) **Si el precio inicial de la acción era de 25 €, ¿cuál es su precio final?**

b) **Si un inversor ha recibido 34,52 € por una acción, ¿a qué precio la adquirió?**

a) $25 \cdot \left(1 + \frac{18}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 25 \cdot 1{,}18 \cdot 0{,}88 = 25{,}96$ €

b) $x \cdot \left(1 + \frac{18}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 34{,}52 \Rightarrow x = \frac{34{,}52}{1{,}18 \cdot 0{,}88} = 33{,}24$ €

87. Cuatro hermanos compran un regalo a su madre, y lo pagan de forma inversamente proporcional a la edad de cada uno de ellos. José tiene 16 años, Carlos e Irene tienen 18 años cada uno y Silvia tiene 20 años. Si el regalo les costó 52 €, ¿cuánto pagó cada hermano?

$$k=\frac{52}{\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}}=\frac{52}{\frac{45+40+40+36}{720}}=\frac{37\,440}{161}=232,55$$

José paga $\frac{1}{16}\cdot 232,55=14,53$ €; Carlos e Irene, $\frac{1}{18}\cdot 232,55=12,92$ € cada uno, y Silvia, $\frac{1}{20}\cdot 232,55=11,63$ €.

88. Para empapelar una habitación se necesitan 40 rollos de papel de 680 cm de ancho. Si los rollos tuvieran un ancho de 0,34 m, ¿cuántos se necesitarían para empapelar la misma habitación?

Aplicando la proporcionalidad inversa: $40\cdot 680=34x\Rightarrow x=\frac{40\cdot 680}{34}=800$

Necesitarían 800 rollos.

89. Por 1200 garrafas de 5 L de aceite, un bodeguero ganó 28 800 €. ¿Cuántas garrafas de 3 L debería vender para obtener 12 240 €?

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Garrafas		Litros		Euros
1200	⟶	5	⟶	28 800
x	⟶	3	⟶	12 240

$$\frac{1200}{x}=\frac{3}{5}\cdot\frac{28\,800}{12\,240}\Rightarrow x=\frac{1200\cdot 5\cdot 12\,240}{3\cdot 28\,800}=850\text{ garrafas}$$

90. En una ciudad se ha contratado a cinco pintores para que decoren un muro de 2 m de alto y 15 m de largo en 3 horas. En el siguiente encargo tienen que pintar otro muro de 3 m de alto y 24 m de largo y cuentan con un pintor más en la cuadrilla. ¿Cuánto tardarán?

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Horas		Pintores		Superficie
3	⟶	5	⟶	$2\cdot 15=30$ m^2
x	⟶	6	⟶	$3\cdot 24=72$ m^2

$$\frac{3}{x}=\frac{6}{5}\cdot\frac{30}{72}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 5\cdot 72}{6\cdot 30}=6\text{ horas}$$

91. Actividad resuelta.

92. Una cantidad disminuye un 60 %. ¿En qué porcentaje debe aumentar para recuperar la cantidad inicial?

Al disminuir un 60 %, la cantidad se multiplicó por 0,4.

Se busca una variación *x* de forma que al aplicarla sobre esta cantidad, el resultado sea el inicial. Por tanto, el resultado de 0,4 · *x* tiene que ser 1.

$$x = \frac{1}{0,4} = 2,5$$

Esto representa un aumento de $2,5 - 1 = 1,5$. El porcentaje de aumento debe ser igual a un 150 %.

93. Una cantidad disminuyó un 10 %. ¿En qué porcentaje debe aumentar para obtener el triple de la cantidad inicial?

Al disminuir un 10 %, la cantidad se multiplicó por 0,9.

Se busca una variación *x* de forma que al aplicarla sobre esta cantidad, el resultado sea el triple del inicial. Por tanto, el resultado de 0,9 · *x* tiene que ser 3.

$$x = \frac{3}{0,9} = 3,\widehat{3}$$

Esto representa un aumento de $3,\widehat{3} - 1 = 2,\widehat{3}$ El porcentaje de aumento debe ser igual a un $233,\widehat{3}$ %

94. En cierta reunión hay un 80 % de chicas. Al cabo de un tiempo abandonan la reunión el 75 % de ellas. ¿Qué porcentaje de chicas queda ahora?

A. 5 % **B. 20 %** **C. 50 %** **D. 60 %**

Si inicialmente había *x* personas, 0,8*x* eran chicas y 0,2*x* eran chicos. Salen el 75 % de las chicas, por lo que quedan el 25 %, es decir, $0,25 \cdot 0,8x = 0,2x$. Queda el mismo número de chicas que de chicos.

La respuesta correcta es C. 50 %.

95. Un contenedor pesa 242 kg cuando está lleno y 188 kg cuando está medio lleno.

¿Cuántos kilos pesa cuando está vacío?

A. 94 **B. 168** **C. 134** **D. 54**

La mitad del peso del contendor es $242 - 188 = 54$ kg. Al vaciarse, el contenedor pesa $188 - 54 = 134$ kg.

La respuesta correcta es C.134.

96. María hace cada día de verano unos cuantos largos en la piscina. Un día, después de haber hecho un determinado número de largos, había completado el 20 % del total y, haciendo un largo más, completó el 25 %. ¿Cuántos largos hizo ese día?

A. 20 **B. 30** **C. 40** **D. 50**

Si un largo es el $25 - 20 = 5$ % del total, ese día hizo $\frac{100}{5} = 20$ largos.

La respuesta correcta es A. 20.

97. Antonio ha heredado una importante fortuna. Debe pagar el 20 % por un determinado impuesto, y después, un 10 % de lo que queda en otro impuesto.

Si en total paga 10 500 €, ¿cuál fue el total de la herencia?

A. 37 500 **B. 35 000** **C. 32 500** **D. 30 000**

Tras pagar los dos impuestos le queda $\left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72$, es decir, el 72 % de la cantidad inicial.

Por tanto, ha pagado un 28 %, de manera que $\frac{28}{100}x = 10\,500 \Rightarrow x = \frac{10\,500 \cdot 100}{28} = 37\,500$ €.

La respuesta correcta es A. 37 500.

98. Se contrató a 12 obreros para ejecutar una obra y al cabo de 8 días habían hecho sólo la quinta parte. ¿Cuántos obreros hubo que contratar para terminar la obra en 6 días más?

A. 52 **B. 48** **C. 32** **D. 16**

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Obreros		Días		Trabajo realizado
12	$\longrightarrow$	8	$\longrightarrow$	$\frac{1}{5}$
$12+x$	$\longrightarrow$	6	$\longrightarrow$	$\frac{4}{5}$

$$\frac{12}{12+x}=\frac{6}{8}\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}}\Rightarrow 12+x=\frac{12\cdot 8\cdot 4}{6\cdot 1}=64\Rightarrow x=52 \text{ obreros}$$

La respuesta correcta es A. 52

99. Un tren de mercancías de 1 km de largo circula a 20 kilómetros por hora (km/h). Si entra en un túnel de 1 km de largo a las 10 de la mañana, ¿a qué hora sale la cola del último vagón?

A. 10:03 **B. 10:05** **C. 10:06** **D. 10:20**

Desde que la locomotora entra en el túnel hasta que el último vagón sale, el tren recorrió 2 km. Como circula a 20 km/h, tarda $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$ de hora en salir, es decir, 6 minutos. Si entra a las 10:00, sale a las 10:06.

La respuesta correcta es C.10:06.

100. El presentador de unos informativos está comentando una noticia:

El precio de los percebes ha subido en el último año un 200 %, hasta doblar el precio que tenían el año pasado.

¿Es correcta esa afirmación?

No es correcta. Si sube un 200 %, el precio final es el $100+200=300$ % del precio inicial, luego se triplica.

101. En una clase, el profesor ha hecho cuatro preguntas a los alumnos, y les está dando los resultados.

—El 30 % de los alumnos han contestado bien a todas las preguntas, $\frac{3}{5}$ se equivocaron en una o dos y, por suerte, solo ocho alumnos han fallado tres o cuatro preguntas.

—Eso no es posible —contesta un alumno.

¿Puedes explicar por qué?

Si se suma $\frac{30}{100}+\frac{3}{5}=\frac{90}{100}$, los 8 alumnos restantes suponen un 10 % del total, por lo que la clase tendría 80 alumnos.

PONTE A PRUEBA

Las telas

Actividad resuelta.

Las fotocopias

Una papelería ofrece distintas tarifas a los clientes que quieren encargar fotocopias en blanco y negro, dependiendo del número de fotocopias que quieran hacer.

- **Si encargan menos de 10 fotocopias, cada una sale por 10 CENT.**
- **Si encargan entre 10 y 99 fotocopias, cada una sale por 6 CENT.**
- **Si encargan 100 fotocopias o más, cada una sale a 3 CENT.**

1. Teniendo en cuenta esta información, ¿son proporcionales el número de copias y el precio que hay que pagar?

2. Un cliente necesita hacer 9 copias de su DNI. El encargado le dice que por el mismo precio le puede hacer unas cuantas más. ¿Cuántas podrá hacer sin que le salga más caro que hacer 9 copias?

3. Otro cliente necesita una cantidad de copias mayor, 80 fotocopias. Viendo lo que le ha ocurrido al anterior, piensa que quizás le convenga encargar más, ya que le saldrán más o menos por el mismo precio. ¿Cuántas podrá encargar sin que le sea más caro que hacer 80 copias?

4. ¿A partir de qué número de fotocopias compensa hacer más de 100? ¿Cuál es el número máximo de fotocopias de más que se pueden obtener?

5. Las fotocopias en color llevan un recargo del 50 %. ¿Cambia eso la respuesta a alguna de las preguntas anteriores?

1. No son proporcionales. Por ejemplo, 5 copias cuestan 50 CENT, y el triple, 15 copias, cuestan $15 \cdot 6 = 90$ CENT, que no es el triple de 50.

2. Nueve copias cuestan $9 \cdot 10 = 90$ CENT. Si hace 10 o más, le salen a 6 CENT cada una, y por el mismo precio conseguirá $\frac{90}{6} = 15$ copias.

3. Como cada copia cuesta 6 CENT, en total pagará $80 \cdot 6 = 480$ CENT. Si hace más de 100, a 3 CENT cada una, podrá hacer $480 : 3 = 160$ copias, el doble de las que necesita.

4. Si hace 9 o menos, gastará como máximo $9 \cdot 10 = 90$ CENT, que es menos de lo que gastaría haciendo 100 copias.

Si hace 100 copias, gasta $100 \cdot 3 = 300$ CENT, que equivalen a realizar $\frac{300}{6} = 50$ copias.

Por tanto, si necesita más de 50, le conviene hacer más de 100.

El gasto máximo para menos de 100 copias son $99 \cdot 6 = 594$ CENT, que equivalen a $\frac{594}{3} = 198$ copias, por lo que el máximo de copias sobrantes será $198 - 99 = 99$.

5. Como todos los precios se multiplican por 1,5, las respuestas son las mismas.

Las notas de Tomás

Tomás está realizando un curso de alemán, en el que la nota final depende de varias notas parciales, que se puntúan también de 0 a 10.

- **El 10 % de la nota corresponde a las redacciones que ha entregado cada semana.**
- **El 10 % corresponde a las pruebas orales realizadas en clase.**
- **El 20 % se obtiene mediante pruebas cortas (exámenes de vocabulario, verbos…).**
- **El 15 % corresponde a las intervenciones en clase.**
- **El resto de la nota se obtiene a partir de las notas de los exámenes.**

1. ¿Cuántos puntos de la nota final puede obtener como máximo por las pruebas cortas?

2. En la primera evaluación, la nota de redacciones le supuso 0,7 puntos de la nota final. ¿Qué nota sacó sobre diez puntos?

3. En esa evaluación sacó un 6 en pruebas orales y un 8 en pruebas cortas. ¿Cuántos puntos sumó por esas dos notas?

4. En la siguiente evaluación, falló en alguna de las pruebas cortas, pero en el resto obtuvo buenas notas. Tuvo un 9 en redacciones, un 8,5 en pruebas orales, un 5,4 en pruebas cortas, y un 8 en intervenciones en clase. Su nota final fue 8,26. ¿Qué nota sacó en los exámenes?

1. El 20 % de la nota supone $10 \cdot \frac{20}{100} = 2$ puntos, como máximo.

2. Si la nota de redacciones corresponde al 10 %, $\frac{10}{100} = \frac{0,7}{x} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 0,7}{100} = 7$ .Sacó un 7.

3. Sumó $6 \cdot \frac{10}{100} + 8 \cdot \frac{20}{100} = 6 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,2 = 2,2$ puntos.

4. $9 \cdot \frac{10}{100} + 8,5 \cdot \frac{10}{100} + 5,4 \cdot \frac{20}{100} + 8 \cdot \frac{15}{100} + 0,45x = 0,9 + 0,85 + 1,08 + 1,2 + 0,45x = 4,03 + 0,45x = 8,26 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{8,26 - 4,03}{0,45} = 9,4$

Sacó un 9,4 en los exámenes.

AUTOEVALUACIÓN

1. Completa las tablas en tu cuaderno para que las magnitudes sean proporcionales:

x	**15**	**12**	**21**	●●●	**1**	●●●
y	●●●	**16**	●●●	**80**	●●●	**1**

x	**2**	●●●	**8**	**100**	**1**	●●●
y	●●●	**16**	●●●	**4**	●●●	**1**

Hay dos posibilidades para cada tabla: directa e inversa.

La razón de proporcionalidad es: $r = \frac{15}{20} = \frac{12}{16} = \frac{21}{28} = \frac{60}{80} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = 0{,}75$

x	**15**	**12**	**21**	60	**1**	$\frac{3}{4}$
y	20	**16**	28	**80**	$\frac{4}{3}$	**1**

La constante de proporcionalidad inversa es: $15 \cdot \frac{64}{5} = 12 \cdot 16 = 21 \cdot \frac{64}{7} = \frac{12}{5} \cdot 80 = 1 \cdot 192 = 192 \cdot 1 = 192$

x	**15**	**12**	**21**	$\frac{12}{5}$	**1**	192
y	$\frac{64}{5}$	**16**	$\frac{64}{7}$	**80**	192	**1**

La razón de proporcionalidad es: $r = \frac{2}{\frac{2}{25}} = \frac{400}{16} = \frac{8}{\frac{8}{25}} = \frac{100}{4} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = \frac{25}{1} = 25$

x	**2**	400	**8**	**100**	**1**	25
y	$\frac{2}{25}$	**16**	$\frac{8}{25}$	**4**	$\frac{1}{25}$	**1**

La constante de proporcionalidad inversa es: $2 \cdot 200 = 25 \cdot 16 = 8 \cdot 50 = 100 \cdot 4 = 1 \cdot 400 = 400 \cdot 1 = 400$

x	**2**	25	**8**	**100**	**1**	400
y	200	**16**	50	**4**	400	**1**

2. Cinco grifos llenan 160 botellas de agua en diez minutos. ¿Cuántas botellas llenarían ocho grifos en el mismo tiempo?

Las magnitudes son directamente proporcionales: $\frac{5}{160} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 160}{5} = 256$

Llenarían 256 botellas.

3. Tres amigos tardan 140 minutos en ordenar un trastero. ¿Cuánto tiempo tardarían cinco amigos?

Las magnitudes son inversamente proporcionales: $3 \cdot 140 = 5x \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 140}{5} = 84$. Tardarían 84 minutos.

4. Tres socios de una empresa invirtieron 3000, 5000 y 8800 €, respectivamente. La empresa ha obtenido unos beneficios de 5250 €, que se repartirán de forma directamente proporcional a la inversión inicial de cada socio. ¿Cuánto cobrará cada uno?

$$r = \frac{5250}{3000 + 5000 + 8800} = \frac{5250}{16\,800} = 0{,}3125$$

El reparto es $3000 \cdot 0{,}3125 = 937{,}5$ €, $5000 \cdot 0{,}3125 = 1562{,}5$ € y $8800 \cdot 0{,}3125 = 2750$ €.

5. Lorenzo reparte entre sus nietos 58 caramelos, de forma inversamente proporcional a sus edades, que son 6, 8 y 9 años. ¿Cuántos le corresponderán a cada uno?

$$k = \frac{58}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}} = \frac{58}{\frac{29}{72}} = 144$$

Les corresponden $\frac{1}{6} \cdot 144 = 24$, $\frac{1}{8} \cdot 144 = 18$ y $\frac{1}{9} \cdot 144 = 16$ caramelos.

6. En un pueblo hay 724 habitantes que proceden de otro país, lo que supone un 16 % de la población. ¿Cuántos habitantes tiene el pueblo?

$\frac{16}{100} = \frac{724}{x} \Rightarrow x = \frac{724 \cdot 100}{16} = 4525$. El pueblo tiene 4525 habitantes.

7. Varios amigos reservan un hotel para pasar sus vacaciones. Si reservan seis habitaciones durante doce noches, deben pagar 5796 € en total. Como les resulta un poco caro, deciden reservar solo cinco habitaciones y gastar 4025 €. ¿Cuántas noches podrán reservar?

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad inversa

Noches		Habitaciones		Euros
12	→	6	→	5796
x	→	5	→	4025

$$\frac{12}{x} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5796}{4025} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 6 \cdot 4025}{5 \cdot 5796} = 10 \text{ noches}$$

8. Para llenar una piscina se utilizan ocho surtidores, cada uno con un caudal de 60 L por minuto, que tardan 20 minutos en llenarla por completo. Si se quiere llenar esa misma piscina usando solo cinco surtidores en 30 minutos, ¿qué caudal debe tener cada surtidor?

Proporcionalidad inversa

Proporcionalidad inversa

Caudal (L/min)		Surtidores		Tiempo (min)
60	→	8	→	20
x	→	5	→	30

$$\frac{60}{x} = \frac{5}{8} \cdot \frac{30}{20} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 8 \cdot 20}{5 \cdot 30} = 64 \text{ L/min}$$

5 Expresiones algebraicas

1. Asocia en tu cuaderno cada frase a su expresión algebraica.

La suma de dos números seguidos	•	•	$3n-5$
El cuadrado de un número	•	•	$2\sqrt{n}$
La raíz cuadrada del doble de un número	•	•	$n+(n+1)$
El triple de un número menos cinco	•	•	n^2
El doble de la raíz cuadrada de un número	•	•	$\sqrt{2n}$

La suma de dos números seguidos: $n+(n+1)$

El cuadrado de un número: n^2

La raíz cuadrada del doble de un número: $\sqrt{2n}$

El triple de un número menos cinco: $3n-5$

El doble de la raíz cuadrada de un número: $2\sqrt{n}$

2. Escribe la expresión algebraica correspondiente a estas frases.

a) Los minerales que tiene Pilar, que son la mitad de minerales que tiene Lucía, que tiene *x*.

b) La cantidad de carne que compró Blanca, que es un cuarto de kilo más que la comprada por Pedro.

c) Alejandro tiene 20% de sus ahorros en una cuenta a plazo fijo.

a) $\frac{x}{2}$ **b).** $x+\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{20}{100}\cdot x=\frac{x}{5}$

3. Si *h* son los hectómetros cúbicos de agua que hay en un embalse en el mes de enero, escribe en lenguaje algebraico las siguientes afirmaciones:

a) En febrero había una sexta parte más de agua que en el mes anterior.

b) En mayo había el doble de hectómetros cúbicos que en febrero.

c) En agosto había la mitad cantidad de agua que en mayo más un tercio de lo de febrero.

a) $h+\frac{h}{6}=\frac{7h}{6}$ **b)** $2\cdot\left(h+\frac{h}{6}\right)=2\cdot\frac{7h}{6}=\frac{7h}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}\cdot\frac{7h}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7h}{6}=\frac{14h}{9}$

4. Actividad resuelta.

5. Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones para los valores que se indican.

a) $A(x)=3x+5$ **para *x* = 4**

b) $B(t)=t(t-1)$ **para *t* = 6**

c) $D(x,y)=3xy+5x-y$ **para *x* = 3, *y* = 5**

d) $E(x,y,z)=2x-\frac{3xz}{4}+4y^2$ **para *x* = 2, *y* = 0, *z* = 10**

a) $A(4)=3\cdot4+5=17$

b) $B(6)=6(6-1)=30$

c) $D(3,5)=3\cdot3\cdot5+5\cdot3-5=55$

d) $E(2,0,10)=2\cdot2-\frac{3\cdot2\cdot10}{4}+4\cdot0^2=-11$

6. Comprueba si las siguientes expresiones algebraicas se corresponden con el enunciado y corrige las falsas.

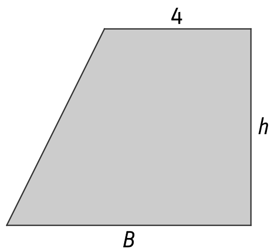
Enunciado	Expresión algebraica
Diez unidades más que el doble de un número	**2(x + 10)**
La tercera parte la suma de un número y su consecutivo	$\boldsymbol{\dfrac{x+(x+1)}{3}}$
Cinco veces un numero menos la mitad de su consecutivo	$\boldsymbol{5x-\dfrac{5x}{2}}$

Enunciado	Expresión algebraica
Diez unidades más que el doble de un número	2x +10
La tercera parte de la suma de un número y su consecutivo	$\boldsymbol{\dfrac{x+(x+1)}{3}}$
Cinco veces un numero menos la mitad de su consecutivo	$5x-\dfrac{x+1}{2}$

7. Los lados de la figura vienen dados en centímetros.

a) Escribe la expresión algebraica que permite calcular el área del trapecio en función de *B* y *h*.

b) Calcula el área del trapecio sabiendo que *B* = 10 cm y *h* = 8 cm.



a) $A(B,h)=\dfrac{(B+4)h}{2}$

b) $A(10,8)=\dfrac{(10+4)\cdot 8}{2}=56\text{ cm}^2$

8. Actividad interactiva.

9. ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son monomios? Indica su coeficiente, parte literal y grado.

a) $-7x^4y$ **c)** 9 **e)** $(5-3)x^3y^4$

b) $6\sqrt{x^3}$ **d)** $3x-2$ **f)** $\dfrac{3x^2z^6}{y^3}$

	Expresión	¿Monomio?	Coeficiente	Parte literal	Grado
a)	$-7x^4y$	Sí	−7	x^4y	4 + 1 = 5
b)	$6\sqrt{x^3}$	No	-	-	-
c)	9	Sí	9	No tiene	0
d)	$3x-2$	No	-	-	-
e)	$(5-3)x^3y^4=2x^3y^4$	Sí	2	x^3y^4	3 + 4 =7
f)	$\dfrac{3x^2z^6}{y^3}$	No	-	-	-

10. Halla las siguientes sumas y restas.

a) $13x-5x+17x+4x-20x$ **b)** $30t^3+(-5t^3)+9t^3-17t^3-(-8t^3)$ **c).** $\frac{2b^6}{9}-\frac{5}{6}b^6+\frac{17b^6}{8}$

a) $13x-5x+17x+4x-20x=(13-5+17+4-20)x=9x$

b) $30t^3+(-5t^3)+9t^3-17t^3-(-8t^3)=(30+(-5)+9-17-(-8))t^3=25t^3$

c) $\frac{2b^6}{9}-\frac{5}{6}b^6+\frac{17b^6}{8}=\left(\frac{2}{9}-\frac{5}{6}+\frac{17}{8}\right)b^6=\left(\frac{16}{72}-\frac{60}{72}+\frac{153}{72}\right)b^6=\frac{109}{72}b^6$

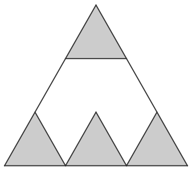
11. Realiza las siguientes operaciones.

a) $5\cdot 2x^7$ **b)** $\frac{5x^4}{2x^3}$ **c)** $\frac{-5}{3}x^7\cdot\frac{9}{10}x^4$ **d)** $(-2x^2)^2$

a) $10x^7$ **b)** $\frac{5x}{2}$ **c)** $\frac{-3}{2}x^{11}$ **d)** $4x^4$

12. Actividad resuelta.

13. Tomás ha dibujado la siguiente figura. Escribe el monomio que expresa el área de la parte sin colorear.



La figura se puede descomponer en nueve triángulos iguales, de los cuales cuatro aparecen coloreados.

Por tanto, si el área del triángulo grande es x, el área sin colorear es $\frac{5}{9}x$.

14. Determina el término principal, el coeficiente principal, el grado y el término independiente de los siguientes polinomios.

a) $9x^2-5x-\frac{1}{3}$ **c)** $-7x^{10}+x^9-4x^2$ **e)** $5x^4-6x^2+1$ **g)** $-\frac{2}{3}x^2+x-\frac{4}{9}$

b) $2x+11$ **d).** $x-x^2+x^3$ **f)** $-3x+4x^2-8+x^3$ **h)** $6x^2-8x$

	Polinomio	Término principal	Coeficiente principal	Grado	Término independiente
a)	$9x^2-5x-\frac{1}{3}$	$9x^2$	9	2	$-\frac{1}{3}$
b)	$2x+11$	$2x$	2	1	11
c)	$-7x^{10}+x^9-4x^2$	$-7x^{10}$	−7	10	0
d)	$x-x^2+x^3$	x^3	1	3	0
e)	$5x^4-6x^2+1$	$5x^4$	5	4	1
f)	$-3x+4x^2-8+x^3$	x^3	1	3	−8
g)	$-\frac{2}{3}x^2+x-\frac{4}{9}$	$-\frac{2}{3}x^2$	$\frac{-2}{3}$	2	$-\frac{4}{9}$
h)	$6x^2-8x$	$6x^2$	6	2	0

15. Halla el grado de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 5x - 7x^3 + 111$

c) $R(x) = 3x^4y^6 - x^2y^5 + 9x^7y^3$

d) $Q(x) = 2^4 \cdot x^7 - 5x^3 + 2^{20}$

d) $S(x) = 5x^2yz + 6x^3yz^5$

a) 3 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 9

16. Escribe un polinomio que cumpla las condiciones pedidas en cada caso.

a) Tiene una sola variable, su coeficiente principal es −1 y es de grado 3.

b) Es un polinomio completo en una sola variable de grado 4.

c) Es un polinomio incompleto en una sola variable de grado 2.

d) Todos sus coeficientes son iguales y todos sus términos tienen grado 4, y tiene al menos dos términos no semejantes.

Respuesta libre. Ejemplos:

a) $P(x) = -x^3$

c) $R(x) = x^2 + 5$

b) $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

d) $S(x,y) = x^3y + xy^3$

17. Actividad resuelta.

18. Ordena y completa los siguientes polinomios y escribe sus coeficientes.

a) $P(x) = 3 - x^3$

c) $R(x) = 1 + x + x^5 + x^2$

b) $Q(x) = 2x - x^4 + 2$

d) $S(x) = 2 + 3x^6$

a) $P(x) = -x^3 + 0x^2 + 0x + 3 \Rightarrow -1, 0, 0, 3$

b) $Q(x) = -x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x + 2 \Rightarrow -1, 0, 0, 2, 2$

c) $R(x) = x^5 + 0x^4 + 0x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow 1, 0, 0, 1, 1, 1$

d) $S(x) = 3x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 2 \Rightarrow 3, 0, 0, 0, 0, 0, 2$

19. Si $P(x) = 6x^2 + 6x - 5$ y $Q(x) = -3x^2 - 6x + 9$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) + Q(x)$

d) $P(x) + P(x)$

b) $Q(x) + P(x)$

e) $P(x) + P(x) + Q(x)$

c) $P(x) - Q(x)$

f) $P(x) + Q(x) + P(x)$

a) $P(x) + Q(x) = (6x^2 + 6x - 5) + (-3x^2 - 6x + 9) = 3x^2 + 4$

b) $Q(x) + P(x) = P(x) + Q(x) = 3x^2 + 4$

c) $P(x) - Q(x) = (6x^2 + 6x - 5) - (-3x^2 - 6x + 9) = 9x^2 + 12x - 14$

d) $P(x) + P(x) = (6x^2 + 6x - 5) + (6x^2 + 6x - 5) = 12x^2 + 12x - 10$

e) $P(x) + P(x) + Q(x) = [P(x) + P(x)] + Q(x) = 12x^2 + 12x - 10 + (-3x^2 - 6x + 9) = 9x^2 + 6x - 1$

f) $P(x) + Q(x) + P(x) = P(x) + P(x) + Q(x) = 9x^2 + 6x - 1$

20. Conociendo tres polinomios $P(x) = -5x^3 + 6x^2 + x - 8$, $Q(x) = 2x^3 + 4x^2 + 10x - 3$ y $R(x) = 3x^2 - 9x - 1$, realiza las operaciones indicadas.

a) $P(x)+Q(x)$ **c)** $Q(x)-P(x)$ **e)** $P(x)-[Q(x)+R(x)]$

b) $P(x)-Q(x)$ **d)** $P(x)-Q(x)+R(x)$ **f)** $R(x)-[P(x)-Q(x)]$

a) $P(x)+Q(x)=\left(-5x^3+6x^2+x-8\right)+\left(2x^3+4x^2+10x-3\right)=-3x^3+10x^2+11x-11$

b) $P(x)-Q(x)=\left(-5x^3+6x^2+x-8\right)-\left(2x^3+4x^2+10x-3\right)=-7x^3+2x^2-9x-5$

c) $Q(x)-P(x)=-\left[P(x)-Q(x)\right]=-\left(7x^3+2x^2-9x-5\right)=7x^3-2x^2+9x+5$

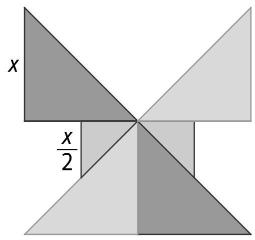
d) $P(x)-Q(x)+R(x)=[P(x)-Q(x)]+R(x)=\left(-7x^3+2x^2-9x-5\right)+\left(3x^2-9x-1\right)=-7x^3+5x^2-18x-6$

e) $P(x)-[Q(x)+R(x)]=[P(x)-Q(x)]-R(x)=\left(-7x^3+2x^2-9x-5\right)-\left(3x^2-9x-1\right)=-7x^3-x^2-4$

f) $R(x)-[P(x)-Q(x)]=\left(3x^2-9x-1\right)-\left(-7x^3+2x^2-9x-5\right)=7x^3+x^2+4$

21. Actividad resuelta.

22. Observa la figura e indica el polinomio que expresa su área.



La figura se puede descomponer como suma de tres triángulos equiláteros grandes y tres triángulos equiláteros pequeños.

La altura del triángulo grande se calcula usando el teorema de Pitágoras:

$$h=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{x^2-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

La altura del triángulo pequeño es la mitad de la del grande.

El área total es: $A(x)=3\dfrac{x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x}{2}+3\dfrac{\frac{x}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}x}{2}=3\dfrac{\sqrt{3}x^2}{4}+3\dfrac{\sqrt{3}x^2}{16}=\dfrac{15\sqrt{3}}{16}x^2$

23. Actividad interactiva.

24. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a) $7\cdot(x^3-3x^2+5x+1)$ **d)** $(-10x^3)\cdot(4x^3+7x-10)$

b) $(-2)\cdot(-8x^5-9x^2+6x+11)$ **e)** $\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot(12x^4+6x^3-4x^2+6x+12)$

c) $(-x^3)\cdot(-4x^{12}+x^7+5x^3+13x)$ **f)** $\frac{2x^2}{3}\cdot(9x^3+6x^2+12x)$

a) $7\cdot(x^3-3x^2+5x+1)=7x^3-21x^2+35x+7$

b) $(-2)\cdot(-8x^5-9x^2+6x+11)=16x^5+18x^2-12x-22$

c) $(-x^3)\cdot(-4x^{12}+x^7+5x^3+13x)=4x^{15}-x^{10}-5x^6-13x^4$

d) $(-10x^3)\cdot(4x^3+7x-10)=-40x^6-70x^4+100x^3$

e) $\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot(12x^4+6x^3-4x^2+6x+12)=6x^5+3x^4-2x^3+3x^2+6x$

f) $\frac{2x^2}{3}\cdot(9x^3+6x^2+12x)=6x^5+4x^4+8x^3$

25. **Multiplica los polinomios.**

a) $(5x^2 - 2x - 3) \cdot (x + 2)$

b) $(10x^3 - 4) \cdot (5x^6 - 2x^3 + 2)$

c) $(4x^2 + x - 3) \cdot (5x^2 - 7x + 2)$

d) $(9x^2 - 6x - 3) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)$

e) $(7x^2 + 8x - 12) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)$

a) $(5x^2 - 2x - 3) \cdot (x + 2) = 5x^3 + 10x^2 - 2x^2 - 4x - 3x - 6 = 5x^3 + 8x^2 - 7x - 6$

b) $(10x^3 - 4) \cdot (5x^6 - 2x^3 + 2) = 50x^9 - 20x^6 + 20x^3 - 20x^6 + 8x^3 - 8 = 50x^9 - 40x^6 + 28x^3 - 8$

c) $(4x^2 + x - 3) \cdot (5x^2 - 7x + 2) = 20x^4 - 28x^3 + 8x^2 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 15x^2 + 21x - 6 = 20x^4 - 23x^3 - 14x^2 + 23x - 6$

d) $(9x^2 - 6x - 3) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) = 9x^3 + 6x^2 - 6x^2 - 4x - 3x - 2 = 9x^3 - 7x - 2$

e) $(7x^2 + 8x - 12) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^2 + \frac{8}{3}x^2 + \frac{8}{6}x - 4x - 2 = \frac{7}{3}x^3 + \frac{23}{6}x^2 - \frac{8}{3}x - 2$

26. **Calcula las siguientes divisiones.**

a) $(x^3 - 7x^2 + 4x) : x$

b) $(6x^8 + 12x^5) : (3x^3)$

c) $(10x^4 + 20x^3 - 15x^2) : (5x)$

d) $(30x^6 - 25x^5 - 20x^4 + 5x^3) : (5x^3)$

e) $(-36x^{12} + 24x^8 - 48x^4) : (-12x^4)$

f) $(x^4 + 6x^3 - 7x^2) : (3x)$

a) $(x^3 - 7x^2 + 4x) : x = x^2 - 7x + 4$

b) $(6x^8 + 12x^5) : (3x^3) = 2x^5 + 4x^2$

c) $(10x^4 + 20x^3 - 15x^2) : (5x) = 2x^3 + 4x^2 - 3x$

d) $(30x^6 - 25x^5 - 20x^4 + 5x^3) : (5x^3) = 6x^3 - 5x^2 - 4x + 1$

e) $(-36x^{12} + 24x^8 - 48x^4) : (-12x^4) = 3x^8 - 2x^4 + 4$

f) $(x^4 + 6x^3 - 7x^2) : (3x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{7}{3}x$

27. **Actividad resuelta.**

28. **Realiza las siguientes operaciones con los polinomios $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$, $Q(x) = -2x^2 + 3x - 5$ y $R(x) = 2x^2 - 7x$.**

a) $2 \cdot P(x)$

b) $-3Q(x)$

c) $2P(x) - 3Q(x)$

d) $2P(x) + 3Q(x)$

e) $R(x) \cdot [Q(x) + P(x)]$

f) $R(x) \cdot Q(x) + R(x) \cdot P(x)$

g) $P(x) + Q(x) \cdot R(x)$

h) $P(x) - P(x) \cdot R(x)$

a) $2 \cdot (3x^2 - 5x + 2) = 6x^2 - 10x + 4$

b) $-3 \cdot (-2x^2 + 3x - 5) = 6x^2 - 9x + 15$

c) $(6x^2 - 10x + 4) - (6x^2 - 9x + 15) = -x - 11$

d) $(6x^2 - 10x + 4) + (6x^2 - 9x + 15) = 12x^2 - 19x + 19$

e) $(2x^2 - 7x) \cdot [(-2x^2 + 3x - 5) + (3x^2 - 5x + 2)] = (2x^2 - 7x) \cdot (x^2 - 2x - 3) = 2x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 21x$

f) $R(x) \cdot Q(x) + R(x) \cdot P(x) = R(x) \cdot [Q(x) + P(x)] = 2x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 21x$

g) $(3x^2 - 5x + 2) + [(-2x^2 + 3x - 5) \cdot (2x^2 - 7x)] = (3x^2 - 5x + 2) + (-4x^4 + 20x^3 - 31x^2 + 35x) = -4x^4 + 20x^3 - 28x^2 + 30x + 2$

h) $(3x^2 - 5x + 2) - [(3x^2 - 5x + 2) \cdot (2x^2 - 7x)] = (3x^2 - 5x + 2) - (6x^4 - 31x^3 + 39x^2 - 14x) = -6x^4 + 31x^3 - 36x^2 + 9x + 2$

29. **Desarrolla las siguientes potencias.**

a) $(2x + 5)^2$

b). $(3x^3 - 8x)^2$

c) $(2x^2 + 5x - 2)^2$

d) $(3x^3 - 2x^2)^3$

a) $(2x + 5)^2 = (2x + 5)(2x + 5) = 4x^2 + 10x + 10x + 25 = 4x^2 + 20x + 25$

b) $(3x^3 - 8x)^2 = (3x^3 - 8x)(3x^3 - 8x) = 9x^6 - 24x^4 - 24x^4 + 64x^2 = 9x^6 - 48x^4 + 64x^2$

c) $(2x^2 + 5x - 2)^2 = (2x^2 + 5x - 2)(2x^2 + 5x - 2) = 4x^4 + 20x^3 + 17x^2 - 20x + 4$

d) $(3x^3 - 2x^2)^3 = (3x^3 - 2x^2)(3x^3 - 2x^2)(3x^3 - 2x^2) = (9x^6 - 12x^5 + 4x^4)(3x^3 - 2x^2) = 27x^9 - 54x^8 + 36x^7 - 8x^6$

30. **Extrae factor común en las siguientes expresiones.**

a) $8x^3 - 16x^2 + 40x - 80$

b) $3x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 7x^2$

c) $25x^9 - 30x^6 + 5x^3$

d) $\frac{3}{7}x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{9}{7}$

a) $8x^3 - 16x^2 + 40x - 80 = 8(x^3 - 2x^2 + 5x - 10)$

b) $3x^5 - 6x^4 + 4x^3 - 7x^2 = x^2(3x^3 - 6x^2 + 4x - 7)$

c) $25x^9 - 30x^6 + 5x^3 = 5x^3(5x^6 - 6x^3 + 1)$

d) $\frac{3}{7}x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{9}{7} = \frac{3}{7}(x^2 - 2x + 3)$

31. **Actividad resuelta.**

32. Extrae factor común en las siguientes expresiones.

a) $2a^4b^5 - 18a^3b^{10}$

b) $16x^2y^7 - 8x^9y^6 + 20x^3y^8$

c) $24a^{30}b^{60}x^{80}y^{90} + 6a^{10}x^{40}$

a) $2a^4b^5 - 18a^3b^{10} = 2a^3b^5\left(a - 9b^5\right)$

b) $16x^2y^7 - 8x^9y^6 + 20x^3y^8 = 4x^2y^6\left(4y - 2x^7 + 5xy^2\right)$

c) $24a^{30}b^{60}x^{80}y^{90} + 6a^{10}x^{40} = 6a^{10}x^{40}\left(4a^{20}b^{60}x^{40}y^{90} + 1\right)$

33. A partir de los polinomios $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x - 6$ y $Q(x) = 6x^4 - 2x + 4$, responde las siguientes cuestiones sin efectuar el producto $P(x) \cdot Q(x)$.

a) ¿Cuántos términos tendrá el producto $P(x) \cdot Q(x)$ antes de reducir los términos semejantes?

b) ¿Cuál será el coeficiente principal del producto? ¿Y su grado?

c) ¿Cuál va a ser su término independiente?

d) Una vez reducidos los términos semejantes, ¿cuántos términos puede tener, como máximo, el polinomio resultante? ¿Puede tener menos?

a) Tendrá 4 · 3 = 12 términos.

b) El coeficiente principal será 2 · 6 = 12, y el grado, 3 + 4 = 7.

c) El término independiente será –6 · 4 = –24

d) Como es de grado 7, tendrá 8 términos como máximo. Al reducir términos semejantes, alguno puede anularse, podría tener menos de 8 términos (de hecho, al reducir desaparece el término de grado 1).

34. Actividad interactiva.

35. Desarrolla utilizando las identidades notables.

a) $(10x^8 - 2)^2$

b) $(6x^3 + 5x^2)^2$

c) $(4x^7 + x^4)(4x^7 - x^4)$

d) $\left(\frac{3}{4}x^4 + 8x^2\right)^2$

e) $\left(x + \frac{1}{10}x^{10}\right)\left(x - \frac{1}{10}x^{10}\right)$

f) $\left(\frac{2}{3}x^5 - \frac{3}{2}x^7\right)^2$

a) $(10x^8 - 2)^2 = 100x^{16} - 40x^8 + 4$

b) $(6x^3 + 5x^2)^2 = 36x^6 + 60x^5 + 25x^4$

c) $(4x^7 + x^4)(4x^7 - x^4) = 16x^{14} - x^8$

d) $\left(\frac{3}{4}x^4 + 8x^2\right)^2 = \frac{9}{16}x^8 + 12x^6 + 64x^4$

e) $\left(x + \frac{1}{10}x^{10}\right)\left(x - \frac{1}{10}x^{10}\right) = x^2 - \frac{1}{100}x^{20}$

f) $\left(\frac{2}{3}x^5 - \frac{3}{2}x^7\right)^2 = \frac{4}{9}x^{10} - 2x^{12} + \frac{9}{4}x^{14}$

36. **Utiliza las identidades notables y desarrolla.**

a) $(3x^4y^3+2x^5y^2)^2$ **c)** $(2bc-5ab^2)(2bc+5ab^2)$ **e)** $\left(\frac{m^2n}{6}+\frac{2m^2}{3}\right)^2$

b) $(x^2y+2x^3y^2)(x^2y-2x^3y^2)$ **d)** $\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^2x}{3}\right)^2$ **f)** $\left(\frac{2ax}{3}+\frac{3bx^2}{2}\right)^2$

a) $(3x^4y^3+2x^5y^2)^2=9x^8y^6+12x^9y^5+4x^{10}y^4$

b) $(x^2y+2x^3y^2)(x^2y-2x^3y^2)=x^4y^2-4x^6y^4$

c) $(2bc-5ab^2)(2bc+5ab^2)=4b^2c^2-25a^2b^4$

d) $\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^2x}{3}\right)^2=\frac{a^{10}}{9}-\frac{2a^7x}{9}+\frac{a^4x^2}{9}$

e) $\left(\frac{m^2n}{6}+\frac{2m^2}{3}\right)^2=\frac{m^4n^2}{36}+\frac{2m^4n}{9}+\frac{4m^4}{9}$

f) $\left(\frac{2ax}{3}+\frac{3bx^2}{2}\right)^2=\frac{4a^2x^2}{9}+2abx^3+\frac{9b^2x^4}{4}$

37. **Comprueba y corrige las igualdades erróneas.**

a) $(x-2x^2)^2=x^2-4x^3-4x^4$ **b)** $(x-y^2)(x+y^2)=x^2-y^4$ **c)** $\left(\frac{2}{3}x+5\right)^2=\frac{2}{3}x^2+\frac{20}{3}x+25$

a) $(x-2x^2)^2=x^2-4x^3+4x^4$ **b)** $(x-y^2)(x+y^2)=x^2-y^4$ **c)** $\left(\frac{2}{3}x+5\right)^2=\frac{4}{9}x^2+\frac{20}{3}x+25$

38. **Desarrolla, opera y simplifica.**

a) $(2x+3)^2-(2x-3)^2$ **b)** $(5x^2+2x)(5x^2-2x)-(5x^2-2x)^2$ **c)** $(a+b)^2-(a-b)^2+(a+b)(a-b)$

a) $(2x+3)^2-(2x-3)^2=4x^2+12x+9-\left(4x^2-12x+9\right)=24x$

b) $(5x^2+2x)(5x^2-2x)-(5x^2-2x)^2=25x^4-4x^2-\left(25x^4-20x^3+4x^2\right)=20x^3-8x^2$

c) $(a+b)^2-(a-b)^2+(a+b)(a-b)=a^2+2ab+b^2-\left(a^2-2ab+b^2\right)+a^2-b^2=a^2+4ab-b^2$

39. **Copia y completa en tu cuaderno las siguientes igualdades, utilizando las identidades notables.**

a) $(\bullet\, x+2)^2=4x^2+\bullet\, x+4$ **c)** $25x^8+20x^7+4x^6=(\bullet+\bullet)^2$

b) $(\bullet+3x)(\bullet-3x)=16x^8-\bullet$ **d)** $36x^6-\frac{49}{4}x^4=\left(6x^{\bullet}+\frac{\bullet}{\bullet}x^2\right)\left(6x^{\bullet}-\frac{\bullet}{\bullet}x^2\right)$

a) $(2x+2)^2=4x^2+8x+4$

b) $(4x^4+3x)(4x^4-3x)=16x^8-9x^2$

c) $25x^8+20x^7+4x^6=(5x^4+2x^3)^2$

d) $36x^6-\frac{49}{4}x^4=\left(6x^3+\frac{7}{2}x^2\right)\left(6x^3-\frac{7}{2}x^2\right)$

40. **Encuentra la identidad notable que corresponde a cada polinomio.**

a) x^2+2x+1 **c)** $9x^6-12x^5+4x^4$

b) $100x^4+100x^2+25$ **d)** $\frac{100}{49}x^2-\frac{1}{9}y^4$

a) $x^2+2x+1=(x+1)^2$

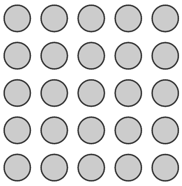
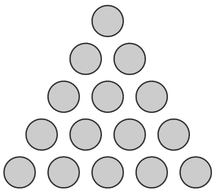
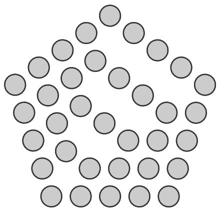
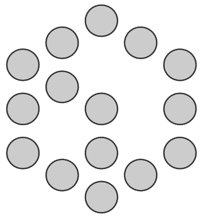
b) $100x^4+100x^2+25=\left(10x^2+5\right)^2$

c) $9x^6-12x^5+4x^4=\left(3x^3-2x^2\right)^2$

d) $\frac{100}{49}x^2-\frac{1}{9}y^4=\left(\frac{10}{7}x+\frac{1}{3}y^2\right)\left(\frac{10}{7}x-\frac{1}{3}y^2\right)$

41. **Actividad interactiva.**

42. **Indica el tipo de número que aparece en cada figura y calcula qué número es.**

a)  **b)**  **c)**  **d)** 

a) Cuadrado, $P(4,5)=5+\dfrac{5\cdot4\cdot2}{2}=25$

b) Triangular, $P(3,5)=5+\dfrac{5\cdot4\cdot1}{2}=15$

c) Pentagonal, $P(5,5)=5+\dfrac{5\cdot4\cdot3}{2}=35$

d) Hexagonal, $P(6,3)=3+\dfrac{3\cdot2\cdot4}{2}=15$

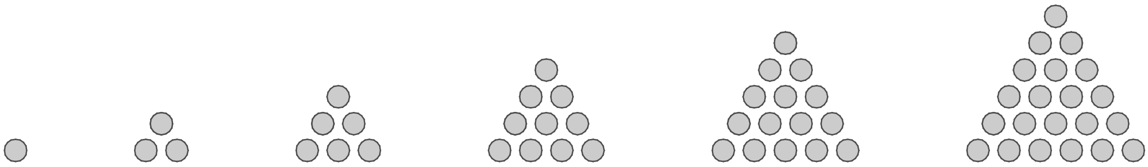
43. **Representa en tu cuaderno los números triangulares hasta llegar al de 10 unidades de lado.**

a) **Escribe la diferencia entre cada número triangular y el número triangular siguiente. ¿Qué observas?**

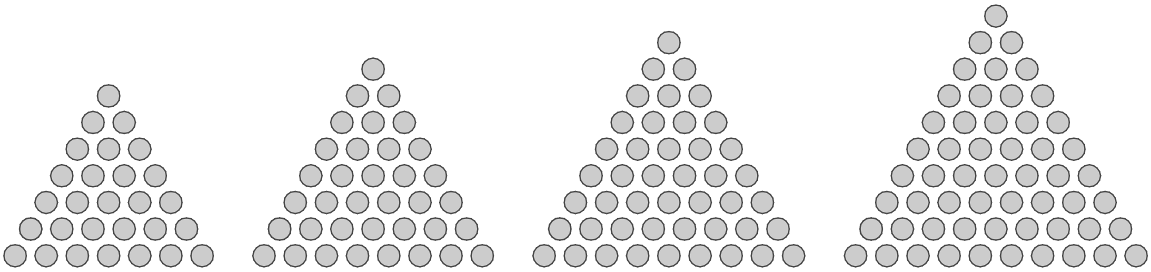
b) **Sin representarlo, ¿cuál será el siguiente número triangular?**

c) **Calcula la diferencia entre cada número y el que va dos posiciones hacia delante. ¿Cómo aumentan esas diferencias?**

d) **¿Cómo aumentan las diferencias entre números separados tres posiciones?**



$P(3,1)=1$ $P(3,2)=3$ $P(3,3)=6$ $P(3,4)=10$ $P(3,5)=15$ $P(3,6)=21$



$P(3,7)=28$ $P(3,8)=36$ $P(3,9)=45$ $P(3,10)=55$

a) $P(3,10)-P(3,9)=55-45=10$ $P(3,7)-P(3,6)=28-21=7$ $P(3,4)-P(3,3)=10-6=4$

$P(3,9)-P(3,8)=45-36=9$ $P(3,6)-P(3,5)=21-15=6$ $P(3,3)-P(3,2)=6-3=3$

$P(3,8)-P(3,7)=36-28=8$ $P(3,5)-P(3,4)=15-10=5$ $P(3,2)-P(3,1)=3-1=2$

Se obtienen los números triangulares.

b) $P(3,11)-P(3,10)=P(3,11)-55=11\Rightarrow P(3,11)=66$

c) $P(3,3)-P(3,1)=6-1=5$ $P(3,5)-P(3,3)=15-6=9$ $P(3,7)-P(3,5)=28-15=13$

$P(3,4)-P(3,2)=10-3=7$ $P(3,6)-P(3,4)=21-10=11$ $P(3,8)-P(3,6)=36-21=15$

Aumentan de 2 en 2.

d) $P(3,4)-P(3,1)=10-1=9$ $P(3,5)-P(3,2)=15-3=12$ $P(3,6)-P(3,3)=21-6=15$

Aumentan de 3 en 3.

44. Expresa en lenguaje algebraico.

a) La mitad de la suma de dos números consecutivos.

b) La suma de tres números consecutivos, si el mediano es *x*.

c) El doble de la edad que tenía una persona hace 20 años, si ahora tiene *x* años.

d) Los minutos que llevo haciendo ejercicio, si llevo *t* horas.

a) $\frac{x+(x+1)}{2}=\frac{2x+1}{2}$

b) $(x-1)+x+(x+1)=3x$

c) $2(x-20)=2x-40$

d) $60t$

45. Actividad resuelta.

46. En un pentágono, cada lado mide 3 cm más que el anterior. Expresa su perímetro mediante una expresión algebraica si el lado mediano mide *x*.

$P(x)=(x-6)+(x-3)+x+(x+3)+(x+6)=5x$

47. Actividad resuelta.

48. Dada la expresión algebraica $A(a,b,c)=2a^2b-3c$, calcula su valor numérico para los valores indicados.

a) $A(2,1,0)$ **b)** $A\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ **c)** $A(10,15,1000)$

a) $A(2,1,0)=2\cdot 2^2\cdot 1-3\cdot 0=8-0=8$

b) $A(a,b,c)=2\cdot 1^2\cdot\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{3}=1-1=0$

c) $A(10,15,1000)=2\cdot 10^2\cdot 15-3\cdot 1000=3000-3000=0$

49. Indica qué expresiones algebraicas son monomios.

a) -5 **c)** $9x^{-3}$ **e)** $\frac{2x^2}{y}$

b) $3x$ **d)** $\sqrt{3}x^7y$ **f)** $\frac{3x\cdot 5}{2}$

a) Sí es monomio. **c)** No es monomio. **e)** No es monomio.

b) Sí es monomio. **d)** Sí es monomio. **f)** Sí es monomio.

50. Copia la tabla en tu cuaderno y completa.

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
•••	$\frac{-1}{6}$	a^3b^8c	•••
$2^4x^4y^4z^4$	•••	•••	•••
•••	$\frac{-1}{6}$	•••	0

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
$\frac{-1}{6}a^3b^8c$	$\frac{-1}{6}$	a^3b^8c	12
$2^4x^4y^4z^4$	2^4	$x^4y^4z^4$	12
$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	No tiene	0

51. Indica el coeficiente, la parte literal y el grado de los siguientes monomios.

a) $\frac{2}{3}x^8y^4$ c) $9x^3y$ e) $-4x^3y^0z$

b) $\sqrt{3}$ d) $3^5x^5y^5z^5$ f) $\frac{16x^2}{5}$

	Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado
a)	$\frac{2}{3}x^8y^4$	$\frac{2}{3}$	x^8y^4	12
b)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	No tiene	0
c)	$9x^3y$	9	x^3y	4
d)	$3^5x^5y^5z^5$	3^5	$x^5y^5z^5$	15
e)	$-4x^3y^0z$	-4	x^3z	4
f)	$\frac{16x^2}{5}$	$\frac{16}{5}$	x^2	2

52. Escribe tres monomios semejantes a $-3x^2y$ y tres que no lo sean pero que estén formados por las mismas variables.

- Semejantes: x^2y , $3x^2y$, $2x^2y$.
- No semejantes: x^3y, $5xy^2$, $-3x^2y^2$

53. **Realiza las siguientes sumas y restas de monomios.**

a) $5a^3x^4 + 7x^4a^3 - 30x^4a^3 + 19a^3x^4$

b) $\frac{7}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{11}{3}x^4$

c) $\frac{13}{24}t^5 - \frac{5}{18}t^6 + \frac{7}{45}t^6$

a) $5a^3x^4 + 7x^4a^3 - 30x^4a^3 + 19a^3x^4 = x^4a^3$

b) $\frac{7}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{11}{3}x^4 = \frac{14}{3}x^4$

c) $\frac{13}{24}t^5 - \frac{5}{18}t^6 + \frac{7}{45}t^6 = \frac{13}{24}t^5 - \frac{11}{90}t^6$

54. **Realiza las siguientes operaciones con monomios y simplifica el resultado cuando sea posible.**

a) $(-7)\cdot(5x^6y^4)$

b) $(-5x^2)\cdot(4x^2)$

c) $(-6x^3)\cdot(2x)$

d) $\left(\frac{3}{4}x\right)\cdot\left(\frac{y}{3}\right)$

e) $(-2a^3b^5c)\cdot(7a^9c^3)$

f) $\left(\frac{4}{5}x^8y^7\right)\cdot\left(\frac{15}{14}x^6y^9\right)$

a) $-35x^6y^4$

b) $-20x^4$

c) $-12x^4$

d) $\frac{1}{4}xy$

e) $-14a^{12}b^5c^4$

f) $\frac{6}{7}x^{14}y^{16}$

55. **Calcula las siguientes potencias.**

a) $(-4x^4)^2$

b) $(-2x^{10})^3$

c) $(3^5x^9)^{10}$

d) $(-2a^3b^2)^2$

e) $(x^3y^5z)^{10}$

f) $(-a^9b^3c^6)^7$

a) $16x^8$

b) $-8x^{30}$

c) $3^{50}x^{90}$

d) $4a^6b^4$

e) $x^{30}y^{50}z^{10}$

f) $-a^{63}b^{21}c^{42}$

56. **Resuelve los siguientes cocientes entre monomios y simplifica.**

a) $\frac{81x^7}{9x^5}$

b) $\frac{-48x^9}{6x^9}$

c) $\frac{48x^7yz^3}{16x^7z^3}$

d) $\frac{5x^9y^4z^5}{20x^4y^4z^4}$

e) $\frac{8x^{40}}{4x^{20}}$

f) $\frac{36x^{120}y^{110}z^{100}}{48x^{10}y^{10}z}$

a) $9x^2$

b) -8

c) $3y$

d) $\frac{x^5z}{4}$

e) $2x^{20}$

f) $\frac{3}{4}x^{110}y^{100}z^{99}$

57. Indica el término principal, el coeficiente principal, el grado y término independiente de los siguientes polinomios:

a) $5x^4 - 6x^2 + 1$

b) $-3x + 4x^2 - 8 + x^3$

c) $6x^2 - 8x$

d) $-\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{4}{9}$

	Polinomio	Término principal	Coeficiente principal	Grado	Término independiente
a)	$5x^4 - 6x^2 + 1$	$5x^4$	5	4	1
b)	$-3x + 4x^2 - 8 + x^3$	x^3	1	3	–8
c)	$6x^2 - 8x$	$6x^2$	6	2	0
d)	$-\frac{2}{3}x^2 + x - \frac{4}{9}$	$\frac{-2}{3}x^2$	$\frac{-2}{3}$	2	$\frac{-4}{9}$

58. Escribe un polinomio que cumpla simultáneamente todas estas condiciones.

- **Es de grado 4.**
- **Su coeficiente principal es igual a su término independiente.**
- **No tiene términos de grados impares.**

Respuesta libre. Por ejemplo: $P(x) = x^4 + x^2 + 1$

59. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 3x^2 - 5x + 7$ **para $x = 2$**

b) $Q(x) = -5x^3 + 4x + 9$ **para $x = -1$**

c) $R(x, y) = 3x^2y - 5xy$ **para $x = 2$, $y = -1$**

d) $S(x, y, z) = 3x^2 - 2y^2 + 4z^2$ **para $x = 2$, $y = 0$, $z = -2$**

a) $P(2) = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 7 = 9$

b) $Q(-1) = -5(-1)^3 + 4(-1) + 9 = 10$

c) $R(2, -1) = 3 \cdot 2^2 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 \cdot (-1) = -2$

d) $S(2, 0, -2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot (-2)^2 = 28$

60. Se dice que un número *a* es una raíz del polinomio *P(x)* si el valor numérico del polinomio para *x* = *a* es cero, es decir, si *P(a)* = 0. Comprueba, en cada uno de los casos, si *x* = 2 y *x* = −2 son raíces del polinomio.

a) $P(x) = x^2 - 4$

b) $Q(x) = 5x^2 - 8x - 4$

c) $R(x) = x^3 - 6x - 4$

d) $S(x) = 2x^2 + 2x + 4$

a) $P(2) = 2^2 - 4 = 0$, $P(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$. Ambos son raíces.

b) $Q(2) = 5 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 4 = 0$, $Q(-2) = 5(-2)^2 - 8(-2) - 4 = 32$. Sólo *x* = 2 es raíz.

c) $R(2) = 2^3 - 6 \cdot 2 - 4 = -8$, $R(-2) = (-2)^3 - 6(-2) - 4 = 0$. Sólo *x* = −2 es raíz.

d) $S(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 16$, $S(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) + 4 = 8$. Ninguno es raíz.

61. **A partir de $P(x) = -4x^2 + 9x - 15$ y $Q(x) = 8x^2 - 8x - 19$, realiza las siguientes operaciones.**

a) $P(x)+Q(x)$

b) $P(x)-Q(x)$

c) $Q(x)+P(x)$

d) $Q(x)-P(x)$

e) $Q(x)+Q(x)$

f) $P(x)+(Q(x)+Q(x))$

g) $(P(x)+Q(x))+Q(x)$

h) $P(x)+P(x)+P(x)$

a) $\left(-4x^2+9x-15\right)+\left(8x^2-8x-19\right)=4x^2+x-34$

b) $\left(-4x^2+9x-15\right)-\left(8x^2-8x-19\right)=-12x^2+17x+4$

c) $Q(x)+P(x)=P(x)+Q(x)=4x^2+x-34$

d) $Q(x)-P(x)=-\left[P(x)-Q(x)\right]=-\left(-12x^2+17x+4\right)=12x^2-17x-4$

e) $Q(x)+Q(x)=2\cdot Q(x)=2\cdot\left(8x^2-8x-19\right)=16x^2-16x-38$

f) $\left(-4x^2+9x-15\right)+\left(16x^2-16x-38\right)=12x^2-7x-53$

g) $(P(x)+Q(x))+Q(x)=P(x)+(Q(x)+Q(x))=12x^2-7x-53$

h) $P(x)+P(x)+P(x)=3\cdot P(x)=3\cdot\left(-4x^2+9x-15\right)-12x^2+27x-45$

62. **A partir de los tres polinomios $P(x) = 8x^3 + x^2 + 10x - 2$, $Q(x) = -7x^3 - 4x^2 + 14x + 20$, $R(x) = 8x^2 + 5x - 3$, efectúa las operaciones indicadas.**

a) $P(x)+Q(x)$

b) $P(x)-Q(x)$

c) $Q(x)-P(x)$

d) $P(x)+Q(x)+R(x)$

e) $P(x)-Q(x)+R(x)$

f) $P(x)-\left[Q(x)+R(x)\right]$

g) $P(x)-Q(x)-R(x)$

h) $R(x)-\left[P(x)-Q(x)\right]$

a) $\left(8x^3+x^2+10x-2\right)+\left(-7x^3-4x^2+14x+20\right)=x^3-3x^2+24x+18$

b) $\left(8x^3+x^2+10x-2\right)-\left(-7x^3-4x^2+14x+20\right)=15x^3+5x^2-4x-22$

c) $Q(x)-P(x)=-\left[P(x)-Q(x)\right]=-\left(15x^3+5x^2-4x-22\right)=-15x^3-5x^2+4x+22$

d) $(8x^3+x^2+10x-2)+(-7x^3-4x^2+14x+20)+\left(8x^2+5x-3\right)=x^3+5x^2+29x+15$

e) $(8x^3+x^2+10x-2)-(-7x^3-4x^2+14x+20)+\left(8x^2+5x-3\right)=15x^3+13x^2+x-25$

f) $\left(8x^3+x^2+10x-2\right)-\left[\left(-7x^3-4x^2+14x+20\right)+\left(8x^2+5x-3\right)\right]=$

$=\left(8x^3+x^2+10x-2\right)-\left(-7x^3+4x^2+19x+17\right)=15x^3-3x^2-9x-19$

g) $P(x)-Q(x)-R(x)=P(x)-\left[Q(x)+R(x)\right]=15x^3-3x^2-9x-19$

h) $R(x)-\left[P(x)-Q(x)\right]=-\left[P(x)-Q(x)-R(x)\right]=-\left(15x^3-3x^2-9x-19\right)=-15x^3+3x^2+9x+19$

63. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a) $(-10)\cdot(5x^3+6x^2+11x-31)$

b) $(-2x)\cdot(x^3-x^2+7x+19)$

c) $(x^{10})\cdot(4x^6-4x^3+5x+20)$

d) $(-5x^{10})\left(-2x^3+6x^2-8x\right)$

e) $\left(\frac{3}{5}x^2\right)\cdot(10x^4-20x^3-40x^2+15x+5)$

f) $\left(\frac{-3x}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{9}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{4}{9}\right)$

a) $-50x^3-60x^2-110x+310)$

b) $-2x^4+2x^3-14x^2-38x$

c) $4x^{16}-4x^{13}+5x^{11}+20x^{10}$

d) $10x^{13}-30x^{12}+40x^{11}$

e) $6x^6-12x^5-24x^4+9x^3+3x^2$

f) $-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{3}x$

64. Calcula las siguientes multiplicaciones.

a) $(-3x^3+6x^2-x-4)\cdot(3x^2-5x)$

b) $(6x-9)\cdot(7x^3-2x^2+3x+8)$

c) $(5x^2-6x-7)\cdot(7x^2-6x-5)$

d) $(4x^2-x-3)\cdot\left(3x+\frac{1}{2}\right)$

e) $\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{6}x-2\right)\cdot\left(\frac{-1}{3}x+\frac{1}{2}\right)$

f) $\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}x\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{2}\right)$

a) $-9x^5+18x^4-3x^3-12x^2+15x^4-30x^3+5x^2+20x=-9x^5+33x^4-33x^3-7x^2+20x$

b) $42x^4-12x^3+18x^2+48x-63x^3+18x^2-27x-72=42x^4-75x^3+36x^2+21x-72$

c) $35x^4-30x^3-25x^2-42x^3+36x^2+30x-49x^2+42x+35=35x^4-72x^3-38x^2+72x+35$

d) $12x^3+2x^2-3x^2-\frac{1}{2}x-9x-\frac{3}{2}=12x^3-x^2-\frac{19}{2}x-\frac{3}{2}$

e) $-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{12}x+\frac{2}{3}x-1=-\frac{1}{4}x^3+\frac{31}{72}x^2+\frac{7}{12}x-1$

f) $\frac{2}{9}x^4-x^2+\frac{1}{27}x^3-\frac{1}{6}x=\frac{2}{9}x^4+\frac{1}{27}x^3-x^2-\frac{1}{6}x$

65. Actividad resuelta.

66. Realiza las siguientes divisiones.

a) $(6x^4-9x^3-12x^2+6x):(-3x)$

b) $(4x^6+20x^4-16x^2+24):4$

c) $(13x^7+2x^6-19x^5):(-x^3)$

d) $(24x^8-12x^7+48x^6+54x^5+6x^4):(6x^4)$

e) $\left(x^4+6x^3-7x^2\right):\left(\frac{-2}{5}\right)$

f) $\left(\frac{2}{3}x^4+\frac{3}{4}x^3-2x^2\right):\left(\frac{4}{3}x\right)$

a) $-2x^3+3x^2+4x-2$

b) $x^6+5x^4-4x^2+6$

c) $-13x^4-2x^3+19x^2$

d) $4x^4-2x^3+8x^2+9x+1$

e) $\frac{-5}{2}x^4-15x^3+\frac{35}{2}x^2$

f) $\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{16}x^2-\frac{3}{2}x$

67. **Dados los polinomios $P(x)=x^2-4x+9$, $Q(x)=-x^2+x-7$, $R(x)=3x^2-6$, realiza las siguientes operaciones.**

a) $4\cdot P(x)$

b) $-2\cdot Q(x)$

c) $4P(x)-2Q(x)$

d) $3Q(x)+2P(x)-3R(x)$

e) $\frac{1}{2}P(x)-\frac{1}{4}Q(x)$

f) $P(x)+Q(x)\cdot R(x)$

a) $4\cdot\left(x^2-4x+9\right)=4x^2-16x+36$

b) $-2\cdot\left(-x^2+x-7\right)=2x^2-2x+14$

c) $\left(4x^2-16x+36\right)+\left(2x^2-2x+14\right)=6x^2-18x+50$

d) $3\left(-x^2+x-7\right)+2\left(x^2-4x+9\right)-3\left(3x^2-6\right)=-3x^2+3x-21+2x^2-8x+18-9x^2+18=-10x^2-5x+15$

e) $\frac{1}{2}\left(x^2-4x+9\right)-\frac{1}{4}\left(-x^2+x-7\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)x^2+\left(\frac{-4}{2}-\frac{1}{4}\right)x+\left(\frac{9}{2}+\frac{7}{4}\right)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{25}{4}$

f) $x^2-4x+9+\left(-x^2+x-7\right)\cdot\left(3x^2-6\right)=x^2-4x+9-3x^4+6x^2+3x^3-6x-21x^2+42=-3x^4+3x^3-14x^2-10x+51$

68. **Saca factor común en las siguientes expresiones.**

a) $25x^3-50x^2+100x-200$

b) $35x^4-7x^3+15x^2+14x$

c) $16x^7-8x^6+24x^5+36x^3-88x$

d) $-6a^3b^5+21a^7b^2+48a^8b^2-33ab^5$

e) $60a^3b^5c^9-55a^4b^9c^3+45a^7b^7c^7+5a^2b$

a) $25x^3-50x^2+100x-200=25\left(x^3-2x^2+4x-8\right)$

b) $35x^4-7x^3+15x^2+14x=x\left(35x^3-7x^2+15x+14\right)$

c) $16x^7-8x^6+24x^5+36x^3-88x=4x\left(4x^6-2x^5+6x^4+9x^2-22\right)$

d) $-6a^3b^5+21a^7b^2+48a^8b^2-33ab^5=3ab^2\left(-2a^2b^3+7a^6+16a^7-11b^3\right)$

e) $60a^3b^5c^9-55a^4b^9c^3+45a^7b^7c^7+5a^2b=5a^2b\left(12ab^4c^9-11a^2b^8c^3+9a^5b^6c^7+1\right)$

69. **Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las identidades notables.**

a) $(5x^2-4)^2$

b) $(6x^7+x^2)(6x^7-x^2)$

c) $(10x^{10}+5)(10x^{10}-5)$

d) $(10x^{10}+5)^2$

e) $\left(\frac{2}{3}x^2-5\right)^2$

f) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^2$

a) $25x^4-40x^2+16$

b) $36x^{14}-x^4$

c) $100x^{20}-25$

d) $100x^{20}+100x^{10}+25$

e) $\frac{4}{9}x^4-\frac{20}{3}x^2+25$

f) $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2$

70. Utiliza las identidades notables para desarrollar las siguientes expresiones.

a) $(3a^2 - 7b)^2$

b) $(3a^4b - ab^2)(3a^4b + ab^2)$

c) $(8a^2b^3 + 4a^6b^3)^2$

d) $\left(\frac{3}{5}x^2y - 5yz^2\right)^2$

a) $9a^4 - 42a^2b + 49b^2$

b) $9a^8b^2 - a^2b^4$

c) $64a^4b^6 + 64a^8b^6 + 16a^{12}b^6$

d) $\frac{9}{25}x^4y^2 - 6x^2y^2z^2 + 25y^2z^4$

71. Simplifica las siguientes expresiones utilizando las identidades notables y operando.

a) $(3x^2 + 4)^2 - (4x^2 + 3)^2$

b) $(3x^4 - 5x)^2 - (5x - 3x^4)^2$

c) $(x + 1)^2 + (x + 1)(x - 1) - 2(x - 1)^2$

d) $x(4x - 6) - (2x + 3)^2 - 9$

a) $9x^4 + 24x^2 + 16 - \left(16x^4 + 24x^2 + 9\right) = -7x^4 + 7$

b) $9x^8 - 30x^5 + 25x^2 - \left(25x^2 - 30x^5 + 9x^8\right) = 0$

c) $x^2 + 2x + 1 + x^2 - 1 - 2\left(x^2 - 2x + 1\right) = 6x - 2$

d) $4x^2 - 6x - \left(4x^2 + 12x + 9\right) - 9 = -18x - 18$

72. Actividad resuelta.

73. Escribe en forma de potencia los siguientes polinomios utilizando las identidades notables.

a) $16x^2 + 8x + 1$

b) $36x^8 - 49x^4$

c) $100a^6 + 9a^4 - 60a^5$

d) $49x^8 - 81x^2$

e) $9x^6 + 9x^4 + 18x^5$

f) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{16}{25}$

g) $4x^2 - 4xy + y^2$

h) $16a^7b^5 + 16a^{14}$

a) $16x^2 + 8x + 1 = \left(4x + 1\right)^2$

b) $36x^8 - 49x^4 = \left(6x^4 + 7x^2\right)\left(6x^4 - 7x^2\right)$

c) $100a^6 + 9a^4 - 60a^5 = \left(10a^3 - 3a^2\right)^2$

d) $49x^8 - 81x^2 = \left(7x^4 + 9x\right)\left(7x^4 - 9x\right)$

e) $9x^6 + 9x^4 + 18x^5 = \left(3x^3 + 3x^2\right)^2$

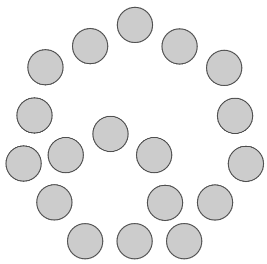
f) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{16}{25} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}\right)$

g) $4x^2 - 4xy + y^2 = \left(2x - y\right)^2$

h) $16a^7b^5 + 16a^{14}$. No es una identidad notable.

74. El número 18 es un número poligonal, pero no es triangular, cuadrado ni pentagonal. ¿De qué tipo es? Represéntalo en tu cuaderno.

Es heptagonal.



75. Suma dos números triangulares consecutivos y contesta las siguientes cuestiones.

a) ¿El resultado es un número triangular?

b) ¿Es un número poligonal?

c) ¿Qué ocurre si sumas dos números cuadrados? ¿Y dos números pentagonales?

a) Sumamos $P(3,2)=3$ y $P(3,3)=6$.

$P(3,3)+P(3,3)=6+3=9$. No es un número triangular.

b) Sí, es un número poligonal cuadrado. $P(4,3)=9$. Se observa:

$P(3,\text{n})+P(3,n+1)=(n+\frac{n\cdot(n-1)}{2})+(n+1+\frac{(n+1)\cdot n}{2})=2n+1+\frac{n^2-n+n^2+n}{2}=n^2+2n+1=(n+1)^2=P(4,n+1)$ co

n $n\in\mathbb{N}$.

c) Sumamos $P(4,2)=4$ y $P(4,3)=9$.

$P(4,3)+P(4,2)=9+4=13$. No es un número cuadrado pero sí es un número poligonal $P(13,2)=13$.

Sumamos $P(5,3)=12$ y $P(5,2)=5$.

$P(5,3)+P(5,2)=12+5=17$. No es un número pentagonal pero sí es número poligonal $P(17,2)=17$.

76. El número triangular de lado 5 es $1+2+3+4+5=15$. Halla el número triangular de lado 15.

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=120$

77. Encuentra todos los números menores que 30 que se pueden hallar sumando tres números triangulares distintos.

Los primeros números triangulares son:

$P(3,1)=1$	$P(3,3)=6$	$P(3,5)=15$	$P(3,7)=28$
$P(3,2)=3$	$P(3,4)=10$	$P(3,6)=21$	

Las sumas de tres distintos son:

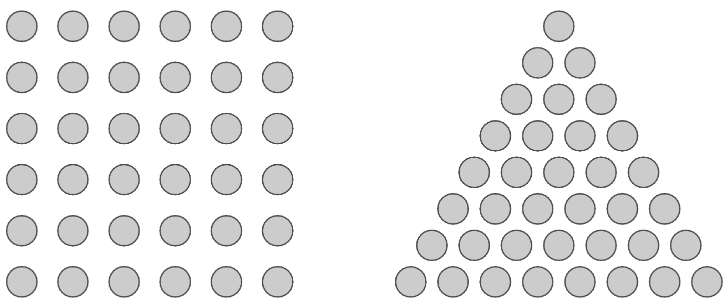
$1+3+6=10$	$1+3+15=19$	$3+6+15=24$	$1+6+21=28$
$1+3+10=14$	$3+6+10=19$	$1+3+21=25$	$3+10+15=28$
$1+6+10=17$	$1+6+15=22$	$1+10+15=26$	

78. Algunos números se pueden escribir como números poligonales de dos formas distintas. Por ejemplo, el 36 es un número cuadrado triangular.

a) Represéntalo de las dos formas.

b) Encuentra otro número cuadrado triangular.

a)



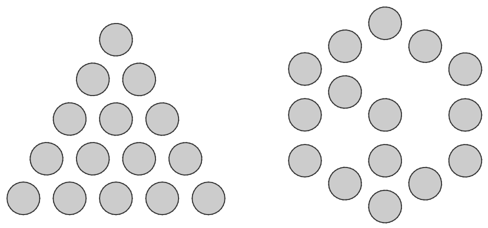
b) Otro número cuadrado triangular es el $P(3,49)=P(4,35)=1225$.

79. Calcula los 5 primeros números octogonales. ¿Cuál es el número octogonal de lado 20?

$P(8,1)=1$ $P(8,2)=8$ $P(8,3)=21$ $P(8,4)=40$ $P(8,5)=65$

El de lado 20 será $P(8,20)=20+\dfrac{20\cdot19\cdot6}{2}=1160$.

80. Hay muchos números que son triangulares y hexagonales al mismo tiempo, como se ve en el ejemplo:



Encuentra al menos dos de ellos y represéntalos en tu cuaderno. Para ello, empieza representando los primeros números hexagonales.

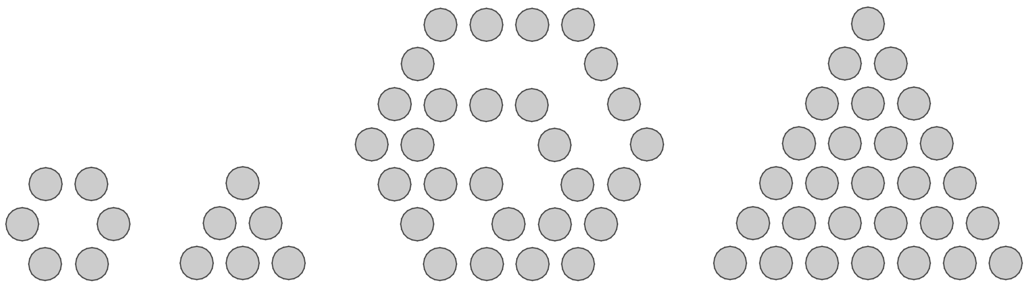
Los primeros números hexagonales son:

$P(6,1)=1$ $P(6,2)=6$ $P(6,3)=15$ $P(6,4)=28$

Los primeros números triangulares son:

$P(3,1)=1$ $P(3,3)=6$ $P(3,5)=15$ $P(3,7)=28$

Como el 15 aparece en el ejemplo, representamos 6 y 28.



81. Un número triangular se obtiene utilizando la siguiente fórmula:

$$A(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

Donde *n* es la longitud del lado de un triángulo equilátero, y *A* el número triangular que se obtiene a partir de él.

a) Calcula los números triangulares para valores de *n* menores que 10.

b) Calcula el número triangular de *n* = 50.

c) ¿Es 5000 el número triangular de longitud de lado igual a 100?

a) $A(1)=\dfrac{1\cdot2}{2}=1$ $A(4)=\dfrac{4\cdot5}{2}=10$ $A(7)=\dfrac{7\cdot8}{2}=28$

$A(2)=\dfrac{2\cdot3}{2}=3$ $A(5)=\dfrac{5\cdot6}{2}=15$ $A(8)=\dfrac{8\cdot9}{2}=36$

$A(3)=\dfrac{3\cdot4}{2}=6$ $A(6)=\dfrac{6\cdot7}{2}=21$ $A(9)=\dfrac{9\cdot10}{2}=45$

b) $A(50)=\dfrac{50\cdot51}{2}=1275$

c) $A(100)=\dfrac{100\cdot101}{2}=5050$. 5 000 no es el número triangular de lado igual a 100.

82. Los números poligonales se pueden obtener a partir de varias fórmulas.

$$P(d,n)=n+\frac{n(n-1)(d-2)}{2}$$

a) Utiliza la expresión algebraica para calcular los seis primeros números triangulares.

b) Utiliza la fórmula para calcular el número hexagonal de lado 12.

c) ¿Cuál es el número dodecagonal de lado 15?

d) ¿Cómo se puede obtener la fórmula de los números triangulares a partir de la fórmula de los poligonales?

a) $P(3,1)=1+\frac{1\cdot 0}{2}=1$ $\quad P(3,3)=3+\frac{3\cdot 2}{2}=6$ $\quad P(3,5)=5+\frac{5\cdot 4}{2}=15$

$P(3,2)=2+\frac{2\cdot 1}{2}=3$ $\quad P(3,4)=4+\frac{4\cdot 3}{2}=10$ $\quad P(3,6)=6+\frac{6\cdot 5}{2}=21$

b) $P(6,12)=12+\frac{12(12-1)(6-2)}{2}=12+\frac{12\cdot 11\cdot 4}{2}=276$

c) $P(12,15)=15+\frac{15(15-1)(12-2)}{2}=15+\frac{15\cdot 14\cdot 10}{2}=1065$

d) $P(3,n)=n+\frac{n(n-1)(3-2)}{2}=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2n+n(n-1)}{2}=\frac{2n+n^2-n}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$

83. El portal de la casa de Sandra es un número que se puede escribir como suma de dos números poligonales. Los dos números se representan como polígonos distintos, pero ambos tienen dos fichas por lado.

Calcula todos los valores menores que 30 que puede tener el portal de Sandra.

Calculamos los números poligonales de lado 2 menores que 30.

$$P(d,2)=2+\frac{2(2-1)(d-2)}{2}=d$$

Por tanto, el problema se transforma en calcular las maneras de sumar menos de 30 usando dos números distintos mayores o iguales que 3.

El portal de Sandra será, como mínimo, $7\,(3+4)$ y como máximo, 29 ($3+26$, por ejemplo).

Hay 23 posibilidades, todos los números entre 7 y 29.

84. ¿Es posible que la suma de dos polinomios de grado 3 sea un polinomio de grado 1? En caso afirmativo, pon un ejemplo.

Sí, por ejemplo, sumando x^3+x y $-x^3+1$.

$$(x^3+x)+(-x^3+1)=x+1$$

85. ¿Es posible que la resta de dos polinomios de grado 4 siga siendo de grado 4? ¿Y de grado 3? Pon un ejemplo de cada uno.

Sí, por ejemplo:

$$(2x^4+3x)-(x^4+x^2)=x^4-x^2+3x$$

$$(2x^4+3x)-(2x^4-x^3)=x^3+3x$$

86. **Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

a) **El grado de un producto de monomios es el producto de sus grados.**

b) **Al multiplicar dos polinomios de grado 3 se obtiene un polinomio de grado 6.**

c) **Para cualquier polinomio $P(x)$, el valor de $P(0)$ es igual al término independiente.**

d) **Dos polinomios distintos no pueden tener los mismos coeficientes.**

a) Falso, es la suma de sus grados. Por ejemplo, $x^2 \cdot x^5 = x^7$.

b) Verdadero, el grado del producto es la suma de los grados de los factores.

c) Verdadero, ya que todos los términos en los que aparece x se anulan.

d) Falso, por ejemplo, $2x+3$ y $3x+2$ tienen los mismos coeficientes, en distinto orden.

87. **Actividad resuelta.**

88. **Utiliza la fórmula del ejercicio anterior para hallar una fórmula para calcular $(a-b+c)^2$. Ten en cuenta que $(a+b+c)^2 = [a+(-b)+c]^2$.**

$(a-b+c)^2 = [a+(-b)+c]^2 = a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2ac + 2(-b)c = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$

89. **Deduce la fórmula del cubo de un binomio, $(a+b)^3$ ayudándote de $(a+b)^2(a+b)$.**

a) **A partir de la fórmula obtenida en el apartado anterior, halla $(a-b)^3$ aplicando que $(a+b)^3 = [a+(-b)]^3$.**

b) **¿Si calculas la potencia $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b)$ usando las identidades notables, obtienes el mismo resultado que en el apartado anterior?**

a) $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 + a^2(-b) + 2a^2(-b) + 2a(-b)^2 + (-b)^2 a + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

b) $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Se obtiene la misma fórmula.

90. **El matemático Carl F. Gauss demostró que cualquier número puede escribirse como suma de tres o menos números triangulares, que pueden repetirse. Por ejemplo, $8 = 1+1+6$.**

Escribe utilizando el método empleado por Gauss los números 12, 17 y 27.

$12 = 3+3+6$ $\quad$ $17 = 10+6+1$ $\quad$ $27 = 15+6+6$

91. **Cualquier número natural puede expresarse como suma de cuatro números al cuadrado o menos. Por ejemplo, 12 es igual a $9+1+1+1$, o también se puede hallar como $4+4+4$. Escribe los números 43, 87, 99 y 220 de esa forma.**

$43 = 25+9+9$ $\quad$ $87 = 81+4+1+1$ $\quad$ $99 = 81+9+9$ $\quad$ $220 = 196+16+4+4$

92. **Las identidades notables se pueden utilizar para realizar de forma sencilla algunas operaciones.**

$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 + 1^2 - 2\cdot 100\cdot 1 = 10000 + 1 - 200 = 9801$

$38\cdot 42 = (40-2)\cdot(40+2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596$

Utiliza las identidades notables para realizar de esa forma las siguientes operaciones, y comprueba los resultados.

a) 49^2 **c)** $12\cdot 28$ **e)** 81^2

b) $97\cdot 103$ **d)** $24\cdot 26$ **f)** 52^2

a) $49^2 = (50-1)^2 = 2500 + 1 - 100 = 2401$

b) $97\cdot 103 = (100-3)(100+3) = 100^2 - 3^2 = 10\,000 - 9 = 9991$

c) $12\cdot 28 = (20-8)(20+8) = 400 - 64 = 336$

d) $24\cdot 26 = (25-1)(25+1) = 25^2 - 1^2 = 625 - 1 = 624$

e) $81^2 = (80+1)^2 = 6400 + 1 + 160 = 6561$

f) $52^2 = (50+2)^2 = 2500 + 4 + 200 = 2704$

93. **En los casos siguientes, halla el valor o valores que hay que asignar a las letras para que el valor numérico de la expresión algebraica sea cero.**

a) $x - y$ **b)** $a^2 - 1$ **c)** $x - 2x$ **d)** $t^3 + 27$

a) $x - y = 0 \Rightarrow x = y$

b) $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

c) $x - 2x = -x = 0 \Rightarrow x = 0$

d) $t^3 + 27 = 0 \Rightarrow t^3 = -27 \Rightarrow t = -3$

94. **El espacio recorrido por un móvil en función del tiempo se obtiene mediante la siguiente expresión algebraica:** $S(t) = 4t + \frac{1}{5}t^2$ **, donde** t **se mide en segundos y** S **se mide en metros.**

a) **¿Qué tipo de expresión es?**

b) **Calcula la distancia recorrida a los 5, 10, 15 y 30 segundos.**

a) Es un polinomio de segundo grado.

b) $S(5) = 4\cdot 5 + \frac{1}{5}5^2 = 20 + 5 = 25\,\text{m}$

$S(10) = 4\cdot 10 + \frac{1}{5}10^2 = 40 + 20 = 60\,\text{m}$

$S(15) = 4\cdot 15 + \frac{1}{5}15^2 = 60 + 45 = 105\,\text{m}$

$S(30) = 4\cdot 30 + \frac{1}{5}30^2 = 120 + 180 = 300\,\text{m}$

95. **Un pintor contrata un futuro trabajo del siguiente modo: 50 € al iniciar el trabajo y 0,85 € por metro cuadrado pintado.**

a) **Expresa mediante una fórmula el coste del trabajo en función del número de metros cuadrados pintados.**

b) **Calcula, aplicando la fórmula, cuánto costaría pintar 300 m² de pared.**

c) **Si otro pintor cobra solo 0,87 € por metro cuadrado, ¿sería más económico?**

a) Si pinta x metros cuadrados, $c(x) = 50 + 0{,}85x$.

b) $c(300) = 50 + 0{,}85\cdot 300 = 50 + 255 = 305\,€$

c) $c'(300) = 0{,}87\cdot 300 = 261\,€$ .Sí, sería más económico.

96. Un coche consume 6,5 L de gasolina por cada 100 km recorridos.

a) ¿Cuánto consume por cada kilómetro recorrido?

b) Calcula el consumo si recorre 20 km, 50 km y 200 km.

c) Escribe una expresión algebraica que permita hallar el consumo de gasolina según los kilómetros recorridos *x*.

a) $6,5 : 100 = 0,065$ L

b) $20 \cdot 0,065 = 1,3$ L $50 \cdot 0,065 = 3,25$ L $200 \cdot 0,0625 = 13$ L

c) $c(x) = 0,065x$

97. Oiana tiene cuatro veces la de edad de su sobrina Lucía, que es 6 años mayor que su hermano León. Expresa de forma algebraica las edades de cada uno, en función de una sola variable *x*.

León $\Rightarrow x$ Lucía $\Rightarrow x+6$ Oiana $\Rightarrow 4(x+6)$

98. La piscina donde nada todos los días la abuela de Borja mide 50 m de largo y 25 m de ancho.

a) Halla la expresión que permite calcular el volumen de la piscina a partir de su profundidad *p*.

b) Halla el volumen de la piscina si tiene 2 m de profundidad.

c) Halla el volumen si la piscina solo tiene 1,5 m de profundidad.

a) $V(p) = 50 \cdot 25 \cdot p = 1250p$

b) $V(2) = 1250 \cdot 2 = 2500\ m^3$

c) $V(1,5) = 1250 \cdot 1,5 = 1875\ m^3$

99. El 25 % de la recaudación de un concierto benéfico se ha donado a una ONG que se encarga de construir escuelas en países que lo necesitan.

a) Escribe una expresión algebraica que permita calcular la cantidad donada dependiendo de la recaudación *x*. ¿Qué tipo de expresión algebraica has obtenido?

b) Utiliza la expresión obtenida para calcular la cantidad de dinero donada si se recaudaron 38 000 €.

a) $d(x) = \dfrac{25}{100}x = \dfrac{x}{4}$. Es un monomio.

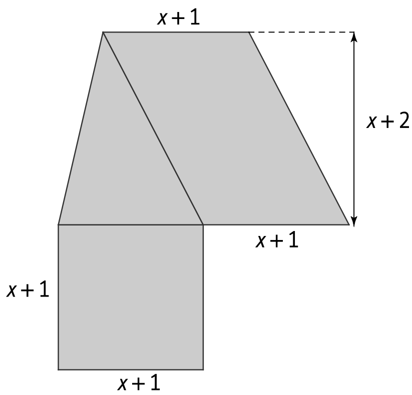
b) $d(38\,000) = \dfrac{38\,000}{4} = 9500$ €

100. La siguiente figura se puede descomponer en polígonos más sencillos.

a) Expresa el área de cada uno de los polígonos en función del valor *x*.

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que expresa el área total de la figura? Opera la expresión hasta obtener un polinomio de segundo grado.

c) Calcula el área para *x* = 3 m.

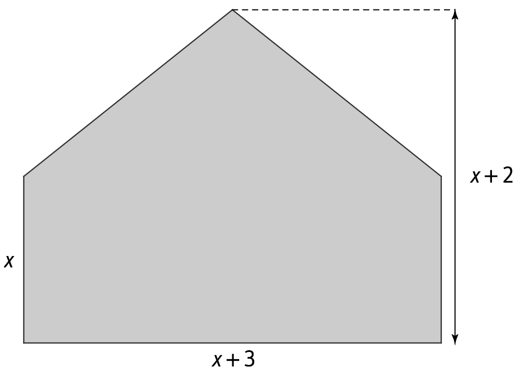


a) Triángulo: $\dfrac{(x+1)(x+2)}{2}$ Cuadrado: $(x+1)^2$ Romboide: $(x+1)(x+2)$

b) $A(x) = \dfrac{(x+1)(x+2)}{2} + (x+1)^2 + (x+1)(x+2) = \dfrac{x^2+2x+x+2}{2} + x^2+2x+1+x^2+2x+x+2 = \dfrac{5x^2+13x+8}{2}$

c) $A(3) = \dfrac{5 \cdot 3^2 + 13 \cdot 3 + 8}{2} = 46\ \text{m}^2$

101. **El área de la siguiente figura se puede calcular de varias formas en función de *x*.**



a) **Expresa el área como suma del área de un rectángulo más el área de un triángulo.**

b) **Expresa el área como diferencia del área de un rectángulo menos el área de dos triángulos.**

c) **Expresa el área como suma del área de dos trapecios.**

d) **Calcula el área para $x = 5$**

e) **¿Cuál puede ser el valor de *x* si el área vale 15? ¿Cómo lo has calculado? Compara tu respuesta con un compañero.**

a) $A(x)=x(x+3)+\dfrac{(x+3)\cdot 2}{2}=x^2+4x+3$

b) $A(x)=(x+3)(x+2)-2\cdot\dfrac{\frac{x+3}{2}\cdot 2}{2}=x^2+4x+3$

c) $A(x)=2\cdot\dfrac{(x+x+2)\frac{x+3}{2}}{2}=x^2+4x+3$

d) $A(5)=5^2+4\cdot 5+3=48$

e) Si $x^2+4x+3=15\Rightarrow x^2+4x-12=0$, que solo se cumple para $x=2$ o para $x=-6$. Como el lado debe ser un número positivo, $x=2$.

102. **Utiliza las identidades notables y el factor común para efectuar las siguientes operaciones.**

a) $(-3x^2-4)^2$

b) $(-5x+6)^2$

c) $(2x+5)(-2x+5)$

d) $(-2x-5)(-2x+5)$

a) $(-3x^2-4)^2=\left[(-1)(3x^2+4)\right]^2=(-1)^2(3x^2+4)^2=(3x^2+4)^2=9x^4+24x^2+16$

b) $(-5x+6)^2=\left[(-1)(5x-6)\right]^2=(5x-6)^2=25x^2-60x+36$

c) $(2x+5)(-2x+5)=(2x+5)(-1)(2x-5)=-((2x+5)(2x-5))=-(4x^2-25)=-4x^2+25$

d) $(-2x-5)(-2x+5)=(-1)(2x+5)(-1)(2x-5)=(2x+5)(2x-5)=4x^2-25$

103. **Si $a+1=b+2=c+3=d+4=a+b+c+d+5$, ¿Cuál es el valor de $a+b+c+d$?**

A. -5 B. $\dfrac{-10}{3}$ C. $-\dfrac{7}{3}$ D. $\dfrac{5}{3}$

Sumando las expresiones $(a+1)+(b+2)+(c+3)+(d+4)$ obtenemos:

$a+1+b+2+c+3+d+4=a+b+c+d+10$.

Por otro lado, como cada sumando es igual a $a+b+c+d+5$, obtenemos:

$$4\ (a+b+c+d+5)=(a+b+c+d+10)\Rightarrow 4\ (a+b+c+d)+20=(a+b+c+d)+10\Rightarrow a+b+c+d=\frac{-10}{3}$$

La respuesta correcta es B. $\dfrac{-10}{3}$.

104. **La edad de *Luis*, *T* años, es la suma de las edades de sus tres hijos. Hace *N* años, la edad de Luis era el doble de la suma de las edades de sus hijos en el aquel momento. ¿Cuál es el valor de T/N?**

A. 5 **B. 4** **C. 3** **D. 2**

Hace *N* años, las edades de sus hijos sumaban $T-3N$, y Luis tenía $T-N$.

Como $T-N=2(T-3N)=2T-6N \Rightarrow T=5N \Rightarrow \frac{T}{N}=5$.

La respuesta correcta es A. 5.

105. **Las letras *x* e *y* representan números y resulta que $8xy-12y+2x-3$ es siempre 0, valga lo que valga el número representado por *y*. ¿Qué número tiene que ser *x*?**

A. $\frac{-1}{4}$ **B. 3** **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Si $y=0$, entonces $8xy-12y+2x-3=2x-3$. Como esta expresión debe ser 0, entonces $2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$.

Y si $x=\frac{3}{2}$, entonces $8xy-12y+2x-3=12y-12y+3-3=12y-12y=0$ para cualquier valor de *y.*

La respuesta correcta es C. $\frac{3}{2}$.

106. **El cuadrado que observas es mágico; es decir, la suma de cada fila, columna y diagonal es la misma, y está formado por los nueve primeros números positivos, uno por casilla.**

$a+b$	$a-b+c$	$a-c$
$a-b-c$	a	$a+b+c$
$a+c$	$a+b-c$	$a-b$

El producto $a \cdot b \cdot c$ es:

A. 21 **B. 30** **C. 15** **D. 35**

Como $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ y la suma de cada fila, columna y diagonal es la misma, resulta $45:3=15$.

Sumando una de las diagonales, obtenemos: $(a+b)+a+(a-b)=15 \Rightarrow 3a=15 \Rightarrow a=5$.

Si *a*, *b*, *c* son números positivos, el mayor valor de su suma es $a+b+c=9 \Rightarrow 5+b+c=9 \Rightarrow b+c=4$.

Como *b* y *c* son dos números distintos $\Rightarrow b=1$ y $c=3$. De manera que $a \cdot b \cdot c=5 \cdot 3 \cdot 1=15$.

La respuesta correcta es C. 15.

107. **En cada una de estas operaciones se ha cometido al menos un error. ¿Sabrías decir cuáles? Corrígelas en tu cuaderno.**

a) $\mathbf{(3x^2+6x^5)^2=6x^4+36x^{10}+36x^7}$

b) $\mathbf{(8+6)^2=64+36}$

c) $\mathbf{(5x^3+7x^9)(5x^3-7x^9)=49x^{18}-25x^6}$

d) $\mathbf{30x^9-6x^8+12x^7+3x^6=3x^6(10x^3-2x^2+4x)}$

e) $\mathbf{(3x+6)^2=3(x+2)^2=3(x^2+4x+4)}$

a) $(3x^2+6x^5)^2=9x^4+36x^{10}+36x^7$

b) $(8+6)^2=64+36+2 \cdot 8 \cdot 6$

c) $(5x^3+7x^9)(5x^3-7x^9)=25x^6-49x^{18}$

d) $30x^9-6x^8+12x^7+3x^6=3x^6(10x^3-2x^2+4x+1)$

e) $(3x+6)^2=3^2(x+2)^2=9(x^2+4x+4)$

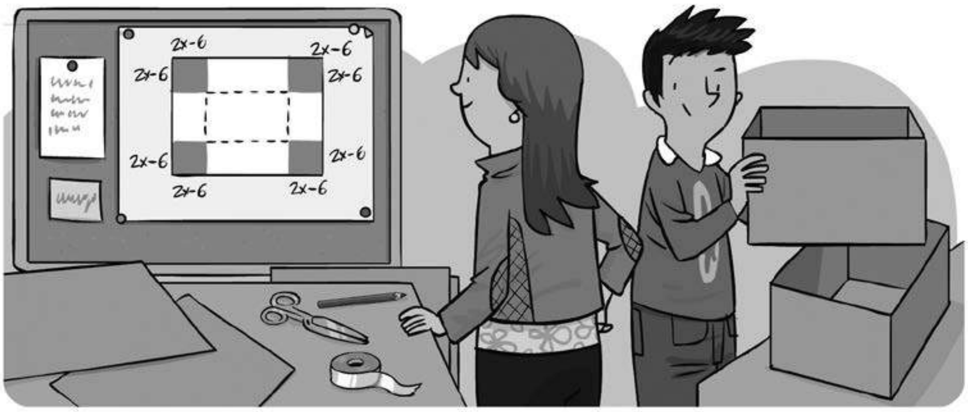
PONTE A PRUEBA

El examen

Actividad resuelta.

La caja

Para hacer una caja, Hugo y María recortan de una cartulina cuatro cuadrados de igual tamaño, uno de cada esquina.



El cuadrado que se recorta en cada esquina tiene el lado que aparece en la figura. La cartulina mide 18 cm por 14 cm.

1. **¿Cuánto tiene que valer *x* como mínimo?**
2. **Expresa la longitud de cada lado de la caja en función de *x*. ¿Cuánto puede valer *x* como máximo?**
3. **¿Cuánta superficie de cartón se utiliza para construir la caja si *x* es igual a 8?**
4. **Una vez recortados los cuadrados, se dobla la caja por las líneas discontinuas y se pega, formando la caja. Expresa su volumen en función de *x*.**
5. **Para *x* = 5, calcula el volumen de la caja.**

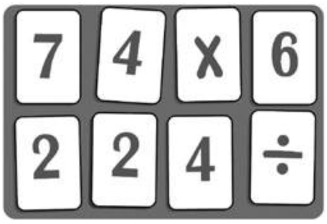
1. Como el cuadrado que se recorta debe tener un lado positivo, por tanto, $2x-6>0 \Rightarrow x>3\text{cm}$.
2. Los lados miden $18-2(2x-6)=30-4x$ y $14-2(2x-6)=26-4x$. Se debe cumplir que ambas medidas sean positivas, por tanto: $30-4x>0$ y $26-4x>0 \Rightarrow x<\dfrac{26}{4}$. Por lo que *x* debe ser menor que $\dfrac{26}{4}=6{,}5$ cm .
3. Si $x=8$ no se puede construir la caja, ya que habría que quitar $2\cdot(2\cdot 8-6)=20$ cm de cada lado y la cartulina mide 18 × 14 cm.
4. $V(x)=(30-4x)(26-4x)(2x-6)$
5. $V(5)=(30-4\cdot 5)(26-4\cdot 5)\cdot(2\cdot 5-6)=10\cdot 6\cdot 4=240\text{ cm}^3$

El concurso

En un concurso de televisión, hay que elegir entre tres cartas tapadas.

- **Si al destaparlas aparece un número, el concursante suma esa cantidad en cientos de puntos a su marcador.**
- **Si aparece un signo por, multiplica los puntos que tiene por 2.**
- **Si aparece un signo de división, la cantidad de puntos se divide entre 4.**
- **Si aparece un bufón, lo pierde todo.**

Jaime está jugando en el concurso y ha sacado las siguientes cartas.



1. Escribe la expresión algebraica que permite conocer los puntos que consiguió si tenía en el marcador una cantidad *P*.

2. Si empezó con 200 puntos, ¿cuántos obtuvo al final?

3. Jaime se queja, y el presentador le dice: "Si esas mismas cartas hubieran salido en otro orden, habrías obtenido menos puntos". Él responde: "Y en otro orden, hubiera ganado mucho más". ¿Cuántos podría haberse llevado como mínimo y como máximo? Escribe las expresiones correspondientes.

1. $T(p)=\left[(p+700+400)\cdot 2+600+200+200+400\right]:4=\left[(p+1100)\cdot 2+1400\right]:4=\dfrac{p+1800}{2}$

2. $T(200)=\dfrac{200+1800}{2}=1000$

3. El máximo se obtiene si la primera carta es la división y la última es la multiplicación:

$$\left(\frac{200}{4}+700+400+600+200+200+400\right)\cdot 2=2550\cdot 2=5100\ .$$

El mínimo se obtiene si la primera carta es la multiplicación y la última la división:

$$(200\cdot 2+700+400+600+200+200+400):4=2900:4=725$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Cuatro personas se suben en un ascensor. Expresa en lenguaje algebraico la suma de sus pesos, sabiendo que la primera pesa 10 kg más que la segunda, la segunda pesa 5 kg más que la tercera y las dos últimas pesan lo mismo.

Si x es el peso de las dos últimas personas (la tercera y cuarta persona), la suma es $(x+5+10)+(x+5)+x+x=4x+20$

2. Indica el término principal, el coeficiente principal, el grado y término independiente de los siguientes polinomios:

a) $-6x^2-6x+6$

b) $\frac{5}{3}x^4y^9z$

c) $5x^2-4x^5+87x-1$

d) $-5a^6b^2+3a^8b-5$

	Polinomio	Término principal	Coeficiente principal	Grado	Término independiente
a)	$-6x^2-6x+6$	$-6x^2$	−6	2	6
b)	$\frac{5}{3}x^4y^9z$	$\frac{5}{3}x^4y^9z$	$\frac{5}{3}$	14	0
c)	$5x^2-4x^5+87x-1$	$-4x^5$	−4	5	−1
d)	$-5a^6b^2+3a^8b-5$	$3a^8b$	3	9	−5

3. Realiza las siguientes operaciones con monomios y simplifica cuando sea posible.

a) $5x^7-8x^7-13x^7-(-6x^7)$

b) $6a^2b\cdot(-5a^3b^5)\cdot 2a^8$

c) $(-16a^6b^4c^2):(2a^3c^2)$

d) $(-10x^6y^8)^3$

a) $[5-8-13-(-6)]x^7=-10x^7$

b) $-60a^{13}b^6$

c) $-8a^3b^4$

d) $-1000x^{18}y^{24}$

4. Dados los siguientes polinomios $P(x)=11x^2-15x-5$, $Q(x)=-x^3+11x^2+6x$, calcula:

a) $P(x)+Q(x)$

b) $P(x)-Q(x)$

c) $5P(x)-2Q(x)$

d) $P(x)\cdot Q(x)$

a) $(11x^2-15x-5)+(-x^3+11x^2+6x)=-x^3+22x^2-9x-5$

b) $(11x^2-15x-5)-(-x^3+11x^2+6x)=x^3-21x-5$

c) $5(11x^2-15x-5)-2(-x^3+11x^2+6x)=55x^2-75x-25+2x^3-22x^2-12x=2x^3+33x^2-87x-25$

d) $(11x^2-15x-5)(-x^3+11x^2+6x)=-11x^5+121x^4+66x^3+15x^4-165x^3-90x^2+5x^3-55x^2-30x=$
$=-11x^5+136x^4-94x^3-145x^2-30x$

5. Utiliza las identidades notables para desarrollar los siguientes productos.

a) $(3x^{10}-5x^7)^2$

b) $(8x^4+6)^2$

c) $(7x^6+4x^4)(7x^6-4x^4)$

d) $\left(\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}\right)^2$

a) $(3x^{10}-5x^7)^2=9x^{20}-30x^{17}+25x^{14}$

b) $(8x^4+6)^2=64x^8+96x^4+36$

c) $(7x^6+4x^4)(7x^6-4x^4)=49x^{12}-16x^8$

d) $\left(\frac{3}{5}x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{25}x^2-\frac{3}{5}x+\frac{1}{4}$

6. **Extrae todos los factores comunes posibles.**

a) $6x^8 - 27x^6 + 45x^4 + 12x^3$

b) $24x^5y^4 + 48x^4y^2 - 56x^3y^7 - 64x^3y^6$

a) $3x^3\left(2x^5 - 9x^3 + 15x + 4\right)$

b) $8x^3y^2\left(3x^2y^2 + 6x - 7y^5 - 8y^4\right)$

7. **Simplifica las siguientes expresiones algebraicas.**

a) $(3x-5)^2 - 3x(3x-5) + 5(3x+5)$

b) $(4x^3)^2 - 4(2x^3+3)(2x^3-3)$

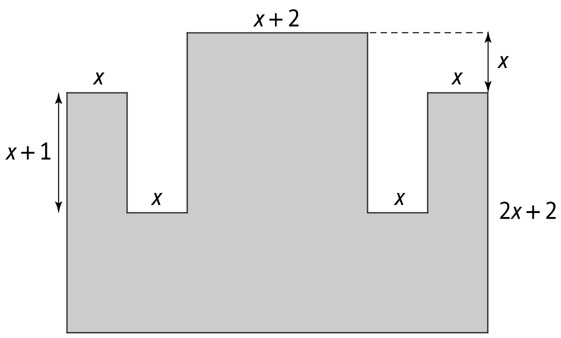
c) $(3a+b)^2 - (3b+a)^2 - 8(a+b)(a-b)$

a) $9x^2 - 30x + 25 - 9x^2 + 15x + 15x + 25 = 50$

b) $16x^6 - 4(4x^6 - 9) = 16x^6 - 16x^6 + 36 = 36$

c) $9a^2 + 6ab + b^2 - (9b^2 + 6ab + a^2) - 8(a^2 - b^2) = 9a^2 + 6ab + b^2 - 9b^2 - 6ab - a^2 - 8a^2 + 8b^2 = 0$

8. **Expresa en función de *x* el área de la figura, y opera hasta obtener un polinomio de segundo grado. Calcula su valor numérico para *x* =10 cm.**



$$A(x) = (2x + 2 + x)(x + 2 + 4x) - 2x^2 - 2x(x + 1 + x) = (3x + 2)(5x + 2) - 2x^2 - 2x(2x + 1) =$$
$$= 15x^2 + 6x + 10x + 4 - 2x^2 - 4x^2 - 2x = 9x^2 + 14x + 4$$

$$A(10) = 9 \cdot 10^2 + 14 \cdot 10 + 4 = 900 + 140 + 4 = 1044 \text{ cm}^2$$

6 Ecuaciones

1. Expresa cada enunciado usando igualdades algebraicas. Indica si son identidades o ecuaciones.

a) El perímetro de un rectángulo que mide 5 cm más de ancho que de largo, es igual a 22 cm.

b) El triple de un número más el doble del número, es cinco veces el número.

c) El cuadrado de un número es igual a la suma de los cuadrados de otros dos números.

a) $2x+2(x+5)=22$. Ecuación

b) $3x+2x=5x$. Identidad

c) $a^2=b^2+c^2$. Ecuación

2. Indica cuáles de las siguientes expresiones son identidades.

a) $\mathbf{7x^3-5x^3+9x^3=11x^3}$

b) $\mathbf{7x^3-5x^3+9x^3=0}$

c) $\mathbf{4x\cdot 5x=20x^2}$

d) $\mathbf{(2^n\cdot 2^5)^3\cdot 2=2^{3n}\cdot 2^{16}}$

a) $7x^3-5x^3+9x^3=(7-5+9)x^3=11x^3$. Identidad

b) $7x^3-5x^3+9x^3=(7-5+9)x^3=11x^3=0$. Ecuación

c) $4x\cdot 5x=20x^2$. Identidad

d) $(2^n\cdot 2^5)^3\cdot 2=\left(2^{n+5}\right)^3\cdot 2=2^{3n+15}\cdot 2=2^{3n+15+1}=2^{3n+16}=2^{3n}\cdot 2^{16}$. Identidad

3. Comprueba, en cada caso, que el valor de *x* propuesto es solución de la ecuación.

a) $\mathbf{3x^2-5x+2=0}$ **, para** $\mathbf{x=1}$

b) $\mathbf{2(3x-5)-4x=-6}$ **, para** $\mathbf{x=2}$

c) $\mathbf{\frac{x-1}{3}-2x=-7}$ **, para** $\mathbf{x=4}$

d) $\mathbf{3x^2+x-2=0}$ **, para** $\mathbf{x=\frac{2}{3}}$

a) $3\cdot 1^2-5\cdot 1+2=3-5+2=0$

b) $2(3\cdot 2-5)-4\cdot 2=2\cdot(6-5)-8=2-8=-6$

c) $\frac{4-1}{3}-2\cdot 4=\frac{3}{3}-8=1-8=-7$

d) $3\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)-2=3\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-2=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\frac{6}{3}=0$

4. Inventa el enunciado que se resuelva utilizando cada una de estas ecuaciones.

a) $\mathbf{3x+5=26}$

b) $\mathbf{5x-4=21}$

Respuesta abierta. Ejemplos:

a) Si al triple de la edad de Ana se le suma 5, el resultado es 26. ¿Cuántos años tiene Ana?

b) Halla un número que multiplicado por 5 sea 4 unidades mayor que 21.

5. Escribe una ecuación que se cumpla para $\mathbf{x=3}$ **.**

Respuesta abierta. Ejemplo: $x-3=0$.

6. Claudia tiene monedas de 1 € y de 2 €. En total tiene 10 monedas.

a) Expresa los datos del enunciado usando una ecuación. ¿Cuántas variables necesitas?

b) ¿Puedes encontrar más de una solución?

c) ¿Es posible que alguna de las soluciones sea negativa? ¿Y que sea decimal?

d) No todas las soluciones de la ecuación son válidas. ¿Por qué? Encuentra las soluciones que sirven.

a) $x+y=10$. Se necesitan dos variables.

b) Hay más de una solución: 1 y 9, 2 y 8, etc.

c) Son posibles ambos casos como solución de la ecuación, pero no tienen sentido como solución del problema.

d) Solo son soluciones válidas del problema cantidades enteras entre 0 y 10 (suponiendo que puede no tener monedas de 1 € o de 2 €).

Las soluciones serían 0 y 10, 1 y 9, 2 y 8, 3 y 7, 4 y 6, 5 y 5, 6 y 4, 7 y 3, 8 y 2, 9 y 1, 10 y 0.

7. Comprueba si las siguientes ecuaciones cuya solución es $x=3$ son equivalentes a $7x+1=22$.

a) $\mathbf{10x+3=3x+24}$

b) $\mathbf{2x+5x-8+9x=5(x+5)}$

c) $\mathbf{\frac{2x-5}{4}+\frac{x}{4}=1}$

d) $\mathbf{x^2-9=0}$

a) $10x+3=3x+24 \Rightarrow 10x-3x=24-3 \Rightarrow 7x=21 \Rightarrow x=3$. Sí es equivalente.

b) $2x+5x-8+9x=5(x+5) \Rightarrow 2x+5x-8+9x=5x+25 \Rightarrow 11x=33 \Rightarrow x=3$. Sí es equivalente.

c) $\frac{2x-5}{4}+\frac{x}{4}=1 \Rightarrow \frac{3x-5}{4}=1 \Rightarrow 3x-5=4 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$. Sí es equivalente.

d) $x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9} \Rightarrow x=3$ y $x=-3$. No es equivalente.

8. Escribe tres ecuaciones que sean equivalentes a $3x-5=7x+15$ usando las reglas de la suma y del producto.

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$3x-5=7x+15 \xrightarrow{+5} 3x=7x+20$

$3x-5=7x+15 \xrightarrow{-3x} -5=4x+15$

$3x-5=7x+15 \xrightarrow{-10} 3x-15=7x+5$

9. Escribe ecuaciones equivalentes a $2(3x-4)+7=4x+11$ realizando los siguientes pasos.

1.º Resta 7 en ambos miembros.

2.º Divide ambos miembros entre 2.

3.º Suma 4 en ambos miembros.

4.º Resta 2*x* en ambos miembros.

¿Qué resultado has obtenido?

1.º $2(3x-4)=4x+4$

2.º $3x-4=2x+2$

3.º $3x=2x+6$

4.º $x=6$

Se obtiene la solución de la ecuación: $x=6$.

10. Aplica la regla de la suma para encontrar la solución de estas ecuaciones.

a) $\mathbf{14 + x + 10 = 35}$

b) $\mathbf{18 + 2x - 8 = x - 25}$

c) $\mathbf{12 - x = 12 - 2x}$

d) $\mathbf{7 - 5x = 12 - 4x - 17}$

e) $\mathbf{2x - 5 + 3x = 6x - 6}$

f) $\mathbf{-3x + 7 - 10 = -4x + 5}$

g) $\mathbf{-1 + 10x = 11x + 8}$

h) $\mathbf{3x - 7 = 1 - x}$

a) $14 + x + 10 = 35 \Rightarrow 14 + x + 10 - 14 - 10 = 35 - 14 - 10 \Rightarrow x = 11$

a) $18 + 2x - 8 = x - 25 \Rightarrow 18 + 2x - 8 - 18 - x + 8 = x - 25 - 18 - x + 8 \Rightarrow x = -35$

b) $12 - x = 12 - 2x \Rightarrow 12 - x - 12 + 2x = 12 - 2x - 12 + 2x \Rightarrow x = 0$

c) $7 - 5x = 12 - 4x - 17 \Rightarrow 7 - 5x - 12 + 17 + 5x = 12 - 4x - 17 - 12 + 17 + 5x \Rightarrow 12 = x$

d) $2x - 5 + 3x = 6x - 6 \Rightarrow 2x - 5 + 3x - 2x - 3x + 6 = 6x - 6 - 2x - 3x + 6 \Rightarrow 1 = x$

e) $-3x + 7 - 10 = -4x + 5 \Rightarrow -3x + 7 - 10 + 4x - 7 + 10 = -4x + 5 + 4x - 7 + 10 \Rightarrow x = 8$

f) $-1 + 10x = 11x + 8 \Rightarrow -1 + 10x - 10x - 8 = 11x + 8 - 10x - 8 \Rightarrow -9 = x$

g) $3x - 7 = 1 - x \Rightarrow 3x - 7 + x + 7 = 1 - x + x + 7 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$. (Es necesario utilizar la regla del producto)

11. Utiliza la regla del producto para despejar x en las ecuaciones siguientes.

a) $\mathbf{3x = 18}$

b) $\mathbf{\frac{x}{2} = 8}$

c) $\mathbf{6x = 11}$

d) $\mathbf{-2x = \frac{1}{3}}$

e) $\mathbf{5 = 7x}$

f) $\mathbf{-\frac{3x}{7} = 12}$

g) $\mathbf{3x = -\frac{3}{7}}$

h) $\mathbf{-\frac{3x}{4} = -\frac{1}{4}}$

a) $x = \frac{18}{3} = 6$

b) $x = 2 \cdot 8 = 16$

c) $x = \frac{11}{6}$

d) $x = \frac{1}{-2 \cdot 3} = \frac{-1}{6}$

e) $\frac{5}{7} = x$

f) $x = \frac{12 \cdot 7}{-3} = -28$

g) $x = -\frac{3}{7 \cdot 3} = -\frac{1}{7}$

h) $\frac{3x}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

12. Utiliza las reglas de la suma y del producto para despejar el valor de x en cada caso.

a) $\mathbf{2x - 2 = 27}$

b) $\mathbf{3x - 11 = -2x - 6}$

c) $\mathbf{x - 9 = -7x + 3}$

d) $\mathbf{7x + 4 = 13 + 4x}$

e) $\mathbf{2x - 15 + 3 + 5x = -4x - 3x + 9}$

f) $\mathbf{2x - 4 - 7x - 3 = 5 - x - 16}$

a) $2x - 2 = 27 \Rightarrow 2x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{2}$

b) $3x - 11 = -2x - 6 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$

c) $x - 9 = -7x + 3 \Rightarrow 8x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

d) $7x + 4 = 13 + 4x \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

e) $2x - 15 + 3 + 5x = -4x - 3x + 9 \Rightarrow 14x = 21 \Rightarrow x = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$

f) $2x - 4 - 7x - 3 = 5 - x - 16 \Rightarrow -4x = -4 \Rightarrow x = 1$

13. Actividad resuelta.

14. Encuentra las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + x + 5 = 4x + x^2 - 2$

b) $7x^2 + 2 = 5x^2 + 10 + 2x^2$

c) $-2x^2 + 7 = -2x^2 - 1 + x$

d) $12x^2 + 4 = 2(6x^2 + x + 7)$

a) $x^2 + x + 5 = 4x + x^2 - 2 \Rightarrow x + 5 = 4x - 2 \Rightarrow 7 = 3x \Rightarrow \frac{7}{3} = x$

b) $7x^2 + 2 = 5x^2 + 10 + 2x^2 \Rightarrow 7x^2 + 2 = 7x^2 + 10 \Rightarrow 2 = 10$. No tiene solución.

c) $-2x^2 + 7 = -2x^2 - 1 + x \Rightarrow 7 = -1 + x \Rightarrow 8 = x$

d) $12x^2 + 4 = 2(6x^2 + x + 7) \Rightarrow 12x^2 + 4 = 12x^2 + 2x + 14 \Rightarrow 4 = 2x + 14 \Rightarrow -10 = 2x \Rightarrow -5 = x$

15. Actividad resuelta.

16. La solución de una ecuación es $x = -2$. Encuentra la ecuación, sabiendo que para resolverla se han seguido los siguientes pasos a partir de la ecuación inicial:

1.º Sumar en ambos miembros $3x - 5$.

2.º Dividir ambos por 3.

3.º Restar 5*x* en ambos miembros.

4.º Dividir ambos miembros por 2.

5.º Restar 2 a los dos miembros.

Se realizan las operaciones a la inversa:

5.º $x + 2 = -2 + 2 \Rightarrow x + 2 = 0$

4.º $2(x + 2) = 2 \cdot 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0$

3.º $2x + 4 + 5x = 0 + 5x \Rightarrow 7x + 4 = 5x$

2.º $3(7x + 4) = 3 \cdot 5x \Rightarrow 21x + 12 = 15x$

1.º $21x + 12 - (3x - 5) = 15x - (3x - 5) \Rightarrow 18x + 17 = 12x + 5$

17. Indica si las siguientes ecuaciones son de primer grado.

a) $3x - 1 + 2(5x + 6) = \frac{4}{3} - \frac{2x}{5}$

b) $\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x+2} = 5$

c) $3(x - 5) = 3(x - 2) - 9$

d) $x^2 + 5x - 9 = 6 + x^2 - 4x$

e) $3x^2 - 5x = 5(20 - x)$

f) $\frac{2x+2}{3} + \frac{x}{3} - \frac{5x-1}{4} = 0$

a) Sí es de primer grado.

b) No es de primer grado porque hay *x* en el denominador.

c) No es de primer grado (al resolver, se comprueba que es una identidad).

d) Sí es de primer grado (aplicando la regla de la suma desaparece el término de segundo grado).

e) No es de primer grado (simplificando resulta $3x^2 = 100$).

f) Sí es de primer grado.

18. **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.**

a) $5x+4=49$ **c)** $4x-5=7x+15$ **e)** $7x+7-x=4x+15+2x-8$

b) $3+8x=5x$ **d)** $3x+2-5x-7x+9=8x-1+7x$ **f)** $4x+9=5x-3-x+6$

a) $5x+4=49 \Rightarrow 5x=45 \Rightarrow x=9$

b) $3+8x=5x \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$

c) $4x-5=7x+15 \Rightarrow -3x=20 \Rightarrow x=-\dfrac{20}{3}$

d) $3x+2-5x-7x+9=8x-1+7x \Rightarrow -24x=-12 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$

e) $7x+7-x=4x+15+2x-8 \Rightarrow 0x=0$. Es una identidad.

f) $4x+9=5x-3-x+6 \Rightarrow 0x=-6$. No tiene solución.

19. **Resuelve estas ecuaciones de primer grado con paréntesis.**

a) $2(x-1)+3=9$ **d)** $3(6x-10)-5(2-4x)=25x-1$

b) $5x-4(2x-7)=13$ **e)** $2(7x-1)-3(3x-6)-5(11x+6)=196$

c) $6(2x-3)=10(2x-5)$

a) $2(x-1)+3=9 \Rightarrow 2x-2+3=9 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$

b) $5x-4(2x-7)=13 \Rightarrow 5x-8x+28=13 \Rightarrow -3x=-15 \Rightarrow x=5$

c) $6(2x-3)=10(2x-5) \Rightarrow 12x-18=20x-50 \Rightarrow -8x=-32 \Rightarrow x=4$

d) $3(6x-10)-5(2-4x)=25x-1 \Rightarrow 18x-30-10+20x=25x-1 \Rightarrow 13x=39 \Rightarrow x=3$

e) $2(7x-1)-3(3x-6)-5(11x+6)=196 \Rightarrow 14x-2-9x+18-55x-30=196 \Rightarrow -50x=210 \Rightarrow x=-\dfrac{21}{5}$

20. **Resuelve estas ecuaciones de primer grado con denominadores.**

a) $3x-\dfrac{1}{4}=2x+\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{6}$ **d)** $\dfrac{5x+7}{4}-\dfrac{2x+1}{3}=2$ **f)** $x-2-\dfrac{5x+7}{6}=\dfrac{10-4x}{9}$

b) $\dfrac{2x-3}{5}+1=4x+4$ **e)** $\dfrac{6-x}{5}+\dfrac{3x-1}{6}-\dfrac{2x+3}{4}=\dfrac{1}{12}$ **g)** $\dfrac{9x-1}{12}+\dfrac{6x+6}{8}-\dfrac{3x}{10}=\dfrac{16}{15}$

c) $\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{5x+7}{2}=-1$

a) $3x-2x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{4} \rightarrow x=\dfrac{1}{3}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{4-10+3}{12}=\dfrac{-3}{12}=\dfrac{-1}{4}$

b) $\dfrac{2x-3}{5}+1=4x+4 \rightarrow \dfrac{2x-3}{5}=4x+3 \rightarrow 2x-3=20x+15 \rightarrow x=-1$

c) $\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{5x+7}{2}=-1 \rightarrow 3x-1+5x+7=-2 \rightarrow 8x=-8 \rightarrow x=-1$

d) $\dfrac{5x+7}{4}-\dfrac{2x+1}{3}=2 \rightarrow \dfrac{15x+21}{12}-\dfrac{8x+4}{12}=\dfrac{24}{12} \rightarrow 15x+21-(8x+4)=24 \rightarrow 7x=7 \rightarrow x=1$

e) $\left(\dfrac{6-x}{5}+\dfrac{3x-1}{6}-\dfrac{2x+3}{4}\right)60=\dfrac{1}{12}60 \rightarrow 72-12x+30x-10-30x-45=5 \rightarrow x=\dfrac{-12}{-12}=1$

f) $x-2-\dfrac{5x+7}{6}=\dfrac{10-4x}{9} \rightarrow \dfrac{18x-36}{18}-\dfrac{15x+21}{18}=\dfrac{20-8x}{18} \rightarrow 18x-15x+8x=20+36+21 \rightarrow x=\dfrac{77}{11}=7$

g) $\dfrac{9x-1}{12}+\dfrac{6x+6}{8}-\dfrac{3x}{10}=\dfrac{16}{15} \rightarrow \dfrac{90x-10+90x+90-36x}{120}=\dfrac{128}{120} \rightarrow 144x=48 \rightarrow x=\dfrac{48}{144}=\dfrac{1}{3}$

21. Actividad resuelta.

22. Encuentra la solución de la ecuación en cada caso.

a) $\frac{2(3x+7)}{5}+\frac{5(x-3)}{2}=-1$ **b)** $\frac{3(4x+1)}{7}-\frac{6(x-3)}{5}=3$ **c)** $3(2x-4)+\frac{5x+1}{6}=\frac{1}{4}$

a) $\frac{2(3x+7)}{5}+\frac{5(x-3)}{2}=-1\Rightarrow\frac{6x+14}{5}+\frac{5x-15}{2}=-1\Rightarrow\frac{12x+28}{10}+\frac{25x-75}{10}=\frac{-10}{10}\Rightarrow 37x=37\Rightarrow x=1$

b) $\frac{3(4x+1)}{7}-\frac{6(x-3)}{5}=3\Rightarrow\frac{12x+3}{7}-\frac{6x-18}{5}=3\Rightarrow 5(12x+3)-7(6x-18)=3\cdot 5\cdot 7\Rightarrow 18x=-36\Rightarrow x=-2$

c) $3(2x-4)+\frac{5x+1}{6}=\frac{1}{4}\Rightarrow 6x-12+\frac{5x+1}{6}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{72x-144}{12}+\frac{10x+2}{12}=\frac{3}{12}\Rightarrow 82x=145\Rightarrow x=\frac{145}{82}$

23. Actividad resuelta.

24. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x(2x-5)-2(x^2-1)=12$ **b)** $\frac{x(2x-5)}{3}-\frac{4x^2-1}{6}=\frac{-29}{6}$

a) $x(2x-5)-2(x^2-1)=12\Rightarrow 2x^2-5x-2x^2+2=12\Rightarrow -5x=10\Rightarrow x=-2$

b) $\frac{2x^2-5x}{3}-\frac{4x^2-1}{6}=\frac{-29}{6}\Rightarrow\frac{4x^2-10x}{6}-\frac{4x^2-1}{6}=\frac{-29}{6}\Rightarrow 4x^2-10x-4x^2+1=-29\Rightarrow -10x=-30\Rightarrow x=3$

25. Julio ha ido de compras. En la primera tienda se ha gastado las dos terceras partes de su dinero, y en la segunda ha gastado las tres cuartas partes de lo que le quedaba. Para volver a casa le quedan solo 10 €. ¿Cuánto se ha gastado en total? ¿Cuánto gastó en cada tienda?

Llamamos x a la cantidad inicial.

En la primera tienda gastó $\frac{2}{3}x=\frac{2x}{3}$.

En la segunda gastó $\frac{3}{4}\left(x-\frac{2x}{3}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{x}{3}=\frac{x}{4}$.

Como le quedan 10 €, la ecuación que hay que resolver es:

$\frac{2x}{3}+\frac{x}{4}+10=x\Rightarrow\frac{8x}{12}+\frac{3x}{12}+\frac{120}{12}=x\Rightarrow 8x+3x+120=12x\Rightarrow 120=x\Rightarrow$ Salió con 120 €.

En la primera tienda se gastó: $\frac{2x}{3}=\frac{2\cdot 120}{3}=80$ €.

En la segunda tienda se gastó: $\frac{x}{4}=\frac{120}{4}=30$ €.

En total, se gastó: $80+30=110$ €.

26. Problema resuelto.

27. Tres amigos han trabajado en una obra, cobrando según las horas trabajadas. Alberto ha trabajado 2 horas más que Carolina, y Marcos ha trabajado el doble que los otros dos juntos.

a) Si en total han trabajado 48 horas, ¿cuántas horas trabajó cada uno de ellos?

b) Si por una hora de trabajo cobran 20 euros, ¿cuánto cobrará cada uno?

a) Como Carolina es la que ha trabajado menor tiempo, llamamos x al será el número de horas de trabajo de Carolina. Alberto ha trabajado $x+2$, y Marcos ha trabajado $2(x+x+2)=4x+4$.

$4x+4+x+2+x=48 \Rightarrow 6x+6=48 \Rightarrow 7x=42 \Rightarrow x=7$.

Carolina trabajó 7 horas, Alberto trabajó $x+2=7+2=9$ horas y Marcos trabajó $4x+4=4\cdot 7+4=32$ horas.

b) Carolina cobra $7\cdot 20=140$ €, Alberto, $9\cdot 20=180$ € y Marcos, $32\cdot 20=640$ €.

28. Problema resuelto.

29. Marisa tiene 43 años y tres hijos. El pequeño tiene 2 años menos que el mediano, y este tiene tres años menos que la mayor. Calcula sus edades sabiendo que dentro de 3 años la suma de las edades de los hijos será igual a la edad que tendrá la madre.

Llamamos x a la edad actual del hijo menor. El mediano tiene $x+2$, y la mayor $x+2+3=x+5$.

Dentro de tres años: $(x+3)+(x+2+3)+(x+5+3)=43+3 \Rightarrow 3x+16=46 \Rightarrow 3x=30 \Rightarrow x=10$

El pequeño tiene 10 años, el mediano tiene $x+2=10+2=12$ años y la mayor, $x+5=10+5=15$ años.

Comprobación: Dentro de 3 años tendrán 13, 15 y 18 años, y sumarán $13+15+18=46$ años, que será la edad de la madre.

30. En un concurso dan 5 puntos por cada respuesta correcta y quitan 3 puntos por cada fallo. Inma ha contestado a 25 preguntas, y lleva 69 puntos. ¿Cuántas ha acertado?

Si llamamos x al número de aciertos, tendrá $25-x$ fallos.

Por tanto, $5x-3(25-x)=69 \Rightarrow 5x-75+3x=69 \Rightarrow 8x=144 \Rightarrow x=18$

Inma ha acertado 18 preguntas.

Comprobación: Ha fallado $25-18=7$ respuestas. Por tanto, lleva $5\cdot 18-3\cdot 7=90-21=69$ puntos.

31. En el taller de Amparo hay coches y motos. En total son 40 vehículos. Al contar las ruedas, le salen 94 ruedas. ¿Cuántas motos hay?

Si llamamos x al número de motos, hay $40-x$ coches.

Como cada moto tiene 2 ruedas y cada coche tiene 4:

$2x+4(40-x)=94 \Rightarrow 2x+160-4x=94 \Rightarrow -2x=-66 \Rightarrow x=33$

Hay 33 motos y $40-x=40-33=7$ coches.

Comprobación: $2\cdot 33+4\cdot 7=66+28=94$

32. Ricardo ha pensado un número, le ha sumado 8, ha multiplicado el resultado por 2, ha restado 4 y ha restado el doble del número inicial. Al final ha obtenido 12. ¿Puedes decir qué número eligió?

Llamamos x al número que pensó Ricardo.

$(x+8)\cdot 2-4-2x=12 \Rightarrow 2x+16-4-2x=12 \Rightarrow 12=12$

No es posible saber el número, ya que se obtiene una identidad. Para cualquier número, el resultado de las operaciones de Ricardo es 12.

33. **Opera y expresa como una ecuación de segundo grado e indica si son completas o incompletas.**

a) $2x(3x-5)+7x(1-x)=-10$

b) $3x^2+x(5-3x)-42=6(x-7)$

c) $2x(5x-1)-6x^2+2(x-5)=0$

d) $3x+5x(x-1)+8x-7=-8$

e) $-4x(x-2)+3(x+7)=12$

a) $2x(3x-5)+7x(1-x)=-10 \Rightarrow 6x^2-10x+7x-7x^2+10=0 \Rightarrow -x^2-3x+10=0$. Completa.

b) $3x^2+x(5-3x)-42=6(x-7) \Rightarrow 3x^2+5x-3x^2-42-6x+42=0 \Rightarrow -x=0$. No es de segundo grado.

c) $2x(5x-1)-6x^2+2(x-5)=0 \Rightarrow 10x^2-2x-6x^2+2x-10=0 \Rightarrow 4x^2-10=0$. Incompleta.

d) $3x+5x(x-1)+8x-7=-8 \Rightarrow 3x+5x^2-5x+8x-7+8=0 \Rightarrow 5x^2+6x+1=0$. Completa.

e) $-4x(x-2)+3(x+7)=12 \Rightarrow -4x^2+8x+3x+21-12=0 \Rightarrow -4x^2+11x+9=0$. Completa.

34. **Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $x^2-16=0$

b) $5x^2-20=0$

c) $5x^2+20=0$

d) $3x^2+27=0$

e) $4x^2+100=0$

f) $4x^2-100=0$

a) $x^2=16 \Rightarrow x=\pm4$

b) $5x^2=20 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm2$

c) $5x^2=-20$. Sin solución

d) $3x^2=-27$. Sin solución

e) $4x^2=-100$. Sin solución

f) $4x^2=100 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm5$

35. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

a) $x^2+8x=0$

b) $x^2-8x=0$

c) $5x^2+30x=0$

d) $7x^2-28x=0$

e) $7x^2+12x=0$

f) $18x^2-9x=0$

a) $x(x+8)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-8$

b) $x(x-8)=0 \Rightarrow x=0,\ x=8$

c) $5x(x+6)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-6$

d) $7x(x-4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=4$

e) $x(7x+12)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-\frac{12}{7}$

f) $9x(2x-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\frac{1}{2}$

36. **Indica el número de soluciones de cada ecuación sin resolverlas.**

a) $x^2-5x+4=0$

b) $-2x^2+3x+5=0$

c) $4x^2-12x+9=0$

d) $3x^2-5x+8=0$

a) $(-5)^2-4\cdot1\cdot4=25-16=9>0$. Dos soluciones

b) $3^2-4\cdot(-2)\cdot5=9+40=49>0$. Dos soluciones

c) $(-12)^2-4\cdot4\cdot9=144-144=0$. Una solución

d) $(-5)^2-4\cdot3\cdot8=25-96=-71<0$. Sin solución

37. **Resuelve las siguientes ecuaciones.**

a) $3x^2-3x-18=0$
c) $-x^2-7x-10=0$
e) $9x^2-24x+16=0$
b) $-x^2-7x+10=0$
d) $x^2+8x+16=0$
f) $5x^2-7x-6=0$

a) $x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot3\cdot(-18)}}{2\cdot3}=\dfrac{3\pm\sqrt{225}}{6}=\dfrac{3\pm15}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3+15}{6}=3\\x=\dfrac{3-15}{6}=-2\end{cases}$

b) $x=\dfrac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot(-1)\cdot10}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{7\pm\sqrt{89}}{-2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7+\sqrt{89}}{-2}=\dfrac{-7-\sqrt{89}}{2}\\x=\dfrac{7-\sqrt{89}}{-2}=\dfrac{-7+\sqrt{89}}{2}\end{cases}$

c) $x=\dfrac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot(-1)\cdot(-10)}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{7\pm\sqrt{9}}{-2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7+3}{-2}=-5\\x=\dfrac{7-3}{-2}=-2\end{cases}$

d) $x=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}=\dfrac{-8\pm\sqrt{0}}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4$

e) $x=\dfrac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot9\cdot16}}{2\cdot9}=\dfrac{24\pm\sqrt{0}}{18}=\dfrac{24}{18}=\dfrac{4}{3}$

f) $x=\dfrac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot5\cdot(-6)}}{2\cdot5}=\dfrac{7\pm\sqrt{169}}{10}=\dfrac{7\pm13}{10}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{7+13}{10}=2\\x=\dfrac{7-13}{10}=-\dfrac{3}{5}\end{cases}$

38. **Halla la solución de las ecuaciones siguientes.**

a) $2x^2-6(2x-1)=1$
c) $3x^2-9x(2x+2)+4=7$
e) $(2-3x)^2+2(x-1)^2=0$
b) $x(4x-6)+1-4x=-5$
d) $(3x-1)^2=-(3x-1)(3x+1)$
f) $(1-x)^2+3x^2=1$

a) $2x^2-12x+6=1\Rightarrow 2x^2-12x+5=0\Rightarrow x=\dfrac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot2\cdot5}}{2\cdot2}=\dfrac{12\pm\sqrt{104}}{4}\Rightarrow\begin{cases}x=3+\dfrac{\sqrt{26}}{2}\\x=3-\dfrac{\sqrt{26}}{2}\end{cases}$

b) $4x^2-6x+1-4x=-5\Rightarrow 4x^2-10x+6=0\Rightarrow x=\dfrac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot4\cdot6}}{2\cdot4}=\dfrac{10\pm2}{8}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{10+2}{8}=\dfrac{3}{2}\\x=\dfrac{10-2}{8}=1\end{cases}$

c) $3x^2-18x^2-18x+4-7=0\Rightarrow -15x^2-18x-3=0\Rightarrow x=\dfrac{18\pm\sqrt{18^2-4\cdot(-15)\cdot(-3)}}{2\cdot(-15)}=\dfrac{18\pm12}{-30}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{18+12}{-30}=-1\\x=\dfrac{18-12}{-30}=\dfrac{-1}{5}\end{cases}$

d) $9x^2-6x+1=-\left(9x^2-1\right)\Rightarrow 18x^2-6x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$

e) $4-12x+9x^2+2x^2-4x+2=11x^2-16x+6=0\Rightarrow x=\dfrac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot11\cdot6}}{2\cdot11}=\dfrac{16\pm\sqrt{-8}}{22}$. Sin solución

f) $1-2x+x^2+3x^2-1=0\Rightarrow 4x^2-2x=0\Rightarrow 2x(2x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

39. **Actividad interactiva.**

40. **En un campo de fútbol, el largo mide 30 m más que el ancho, y el área mide 10 800 m^2. Con estos datos, averigua las dimensiones que tiene el campo de futbol.**

Llamamos x al ancho del campo de fútbol. El largo será $x + 30$.

El área será:

$$x(x+30)=10800 \Rightarrow x^2+30x-10800=0 \Rightarrow x=\frac{-30\pm\sqrt{900+4\cdot 1\cdot 10800}}{2\cdot 1}=\frac{-30\pm 210}{2}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-30+210}{2}=90 \\ x=\dfrac{-30-210}{2}=-120 \end{cases}$$

Como el ancho debe ser positivo, el campo mide 90 m de ancho y $90+30=120$ m de largo. El área es $90\cdot 120=10\,800\text{ m}^2$.

41. **En un triángulo de 22 cm^2 de área, la base es igual al doble de la altura más 3 cm. ¿Qué dimensiones tiene el triángulo?**

Si la altura es h, la base mide $2h+3$.

El área será:

$$\frac{(2h+3)\cdot h}{2}=22 \Rightarrow 2h^2+3h-44=0 \Rightarrow h=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-44)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm 19}{4}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3+19}{4}=4 \\ x=\dfrac{-3-19}{4}=-\dfrac{11}{2} \end{cases}$$

Como las dimensiones tienen que ser positivas, la altura mide 4 cm y la base $2\cdot 4+3=11$ cm.

El área es $\dfrac{4\cdot 11}{2}=22\text{ cm}^2$.

42. **Problema resuelto.**

43. La suma de los cuadrados de tres números consecutivos es 194. Calcúlalos de tres formas distintas:

- **Llamando *x* al menor de los tres.**
- **Llamando *x* al mediano.**
- **Llamando *x* al mayor.**

a) ¿Se obtiene la misma solución?

b) ¿Qué ecuación es más fácil de resolver?

- Los tres números son *x*, $x+1$ y $x+2$.

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=194 \Rightarrow x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=194 \Rightarrow 3x^2+6x-189=0 \Rightarrow x^2+2x-63=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-63)}}{2}=\frac{-2\pm16}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-2+16}{2}=7\\[2mm] x=\dfrac{-2-16}{2}=-9\end{cases}$$

La solución es 7, $x+1=8$ y $x+2=9$ o −9, $x+1=-8$ y $x+2=-7$.

- Los tres números son $x-1$, *x* y $x+1$.

$$(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=194 \Rightarrow x^2-2x+1+x^2+x^2+2x+1=194 \Rightarrow 3x^2+2=194 \Rightarrow x^2=64 \Rightarrow x=\pm8$$

La solución es $x-1=7$, 8 y $x+1=9$ o $x-1=-9$, −8 y $x+1=-7$.

- Los tres números son $x-2$, $x-1$ y *x*.

$$(x-2)^2+(x-1)^2+x^2=194 \Rightarrow x^2-4x+4+x^2-2x+1+x^2=194 \Rightarrow 3x^2-6x-189=0$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot3\cdot(-189)}}{2\cdot3}=\frac{6\pm48}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6+48}{6}=9\\[2mm] x=\dfrac{6-48}{6}=-7\end{cases}$$

La solución es $x-2=7$, $x-1=8$ y 9 o $x-2=-9$, $x-1=-8$ y −9.

a) Sí, aunque se obtienen ecuaciones distintas, la solución del problema es la misma.

b) Es más sencilla la segunda, llamando *x* al valor central.

44. La superficie de una colchoneta de gimnasia es de 84 m². El largo es el doble del ancho más 2 m. Calcula las dimensiones de la colchoneta.

Si el ancho es *x*, el largo es $2x+2$.

$$x(2x+2)=84 \Rightarrow 2x^2+2x-84=0 \Rightarrow x^2+x-42=0 \Rightarrow \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-42)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm13}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1+13}{2}=6\\[2mm] x=\dfrac{-1-13}{2}=-7\end{cases}$$

Solo tiene sentido la solución positiva. La colchoneta mide 6 m de ancho y $2\cdot6+2=14$ m de largo.

El área es $6\cdot14=84$ m².

45. Óscar ha colocado piezas de construcción cuadradas formando un cuadrado. Su primo le ha regalado 39 piezas más, de forma que ha podido colocarlas con las que tenía y formar un cuadrado de 3 piezas más de lado. ¿Cuántas piezas de construcción tenía Óscar al principio?

Si, antes del regalo, formaban un cuadrado de *x* piezas de lado, debe ocurrir que:

$$(x+3)^2=x^2+39 \Rightarrow x^2+6x+9=x^2+39 \Rightarrow 6x=30 \Rightarrow x=5.$$

Tenía $5\cdot5=25$ piezas al principio. Con las 39 piezas más formó un cuadrado de $25+39=64$, es decir, 8 piezas de lado, 3 más que al principio.

46. La suma de los cuadrados de dos números opuestos es 72. ¿Cuáles son esos números?

Los números serán *x* y –*x*.

$$x^2+(-x)^2=72\Rightarrow 2x^2=72\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=\pm 6$$

Los números son 6 y –6.

47. Martín ha dibujado el siguiente triángulo sobre la arena y ha calculado que tiene un área de 48 cm². Halla sus dimensiones si la base es el doble de la altura.

Si llamamos *x* a la altura, la base será 2*x* y se cumple:

$$\frac{2x\cdot x}{2}=48\Rightarrow x^2=48\Rightarrow x=\pm\sqrt{48}=\pm 6{,}93\ \text{cm}$$

Solo tiene sentido el valor positivo, por tanto, la base mide $6{,}93\cdot 2=13{,}86$ cm, aproximadamente.

48. El producto de dos números naturales es 176, y el primero es 5 unidades menor que el segundo. ¿De qué números se trata?

Si llamamos *n* al segundo número, el primero es $n-5$.

$$n\cdot(n-5)=176\Rightarrow n^2-5n-176=0\Rightarrow n=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot(-176)}}{2}=\frac{5\pm 27}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5+27}{2}=16\\ x=\dfrac{5-27}{2}=-11\end{cases}$$

Solo tiene sentido la solución natural. Los números son 16 y $16-5=11$.

49. ¿Puedes calcular las edades de los hijos de Arturo?

La mayor le saca dos años al menor, y el producto de sus edades es igual a la diferencia de los cuadrados de sus edades más 76.

Llamamos x a la edad del menor, por lo que $x+2$ es la edad del mayor.

Como no se especifica en qué orden se restan las edades, se plantean las dos posibilidades:

- Restamos al cuadrado de la edad de la mayor el cuadrado de la edad del menor:

$$x(x+2)=(x+2)^2-x^2+76\Rightarrow x^2+2x=x^2+4x+4-x^2+76\Rightarrow x^2-2x-80=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-80)}}{2}=\frac{2\pm 18}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2+18}{2}=10\\ x=\dfrac{2-18}{2}=-8\end{cases}$$

Solo tiene sentido el valor positivo. El menor tiene 10 años y la mayor, $x+2=12$ años.

Se cumple $10\cdot 12=12^2-10^2+76\Rightarrow 120=144-100+76$

- Restamos al cuadrado de la edad del menor el cuadrado de la edad de la mayor:

$$x(x+2)=x^2-(x+2)^2+76\Rightarrow x^2+2x=x^2-x^2-4x-4+76\Rightarrow x^2+6x-72=0$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot(-72)}}{2}=\frac{-6\pm 18}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-6+18}{2}=6\\ x=\dfrac{-6-18}{2}=-12\end{cases}$$

Solo tiene sentido el valor positivo. El menor tiene 6 años y la mayor, $x+2=8$ años.

Se cumple $6\cdot 8=6^2-8^2+76\Rightarrow 48=36-64+76$

50. Una piscina con forma de ortoedro tiene 100 m^3 de capacidad. El largo de la base es el doble del ancho, y la altura mide 2 m. ¿Qué dimensiones tiene la piscina?

Si llamamos x al ancho de la base, el largo mide $2x$.

Su capacidad es $x \cdot 2x \cdot 2 = 100 \Rightarrow 4x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 5$

Solo tiene sentido el valor positivo, por tanto, la piscina mide 5 m de ancho, $2 \cdot 5 = 10$ m de largo y 2 m de alto.

51. Con una cuerda de 20 m de longitud se ha construido un rectángulo de 21 m^2 de área. Calcula las dimensiones del rectángulo.

Llamamos x a la medida de la base, por tanto, la altura será la mitad del perímetro menos las dos bases $\dfrac{20-2x}{2} = 10 - x$.

El área es: $x(10-x) = 21 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2 \cdot 1} = \dfrac{10 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10+4}{2} = 7 \\ x = \dfrac{10-4}{2} = 3 \end{cases}$

Los lados miden 7 y 3 m.

52. La zona de aterrizaje en los helipuertos es una superficie circular. Si se aumenta el radio del círculo de un helipuerto 10 m, el área del círculo se cuadruplica. ¿Cuál es el área de la zona de aterrizaje inicial?

El área de un círculo en función del radio r es πr^2 .

$$\pi(r+10)^2 = 4 \cdot \pi r^2 \Rightarrow (r+10)^2 = 4 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 + 20r + 100 = 4r^2 \Rightarrow 3r^2 - 20r - 100 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-100)}}{2 \cdot 3} = \frac{20 \pm 40}{6} \Rightarrow \begin{cases} r = \dfrac{20+40}{6} = 10 \\ r = \dfrac{20-40}{6} = -\dfrac{10}{3} \end{cases}$$

Solo tiene sentido el valor positivo. Por tanto, el radio inicial era 10 m, y el área inicial, $\pi \cdot 10^2 = 314$ m^2.

53. Indica si las siguientes expresiones algebraicas son identidades o ecuaciones.

a) $5x - 9x + 4x = 0$

b) $4(3x^2) = 12x^2$

c) $(x+2)^2 = x^2 + 4$

d) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{5x-3}{6}$

e) $(a-b)^2 = b^2 + a^2 - 2ab$

f) $6x^3 - 12x^2 + 3x = 3x(2x^2 - 4x + 1)$

a) $5x - 9x + 4x = 0x = 0$. Identidad

b) $4(3x^2) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 = 12x^2$. Identidad

c) $(x+2)^2 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4 \Rightarrow 4x = 0$. Ecuación

d) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{3x-3}{6} + \dfrac{2x}{6} = \dfrac{5x-3}{6}$. Identidad

e) $(a-b)^2 = b^2 + a^2 - 2ab$. Identidad

f) $6x^3 - 12x^2 + 3x = 3x(2x^2 - 4x + 1)$. Identidad

54. **Escribe en cada caso la ecuación correspondiente.**

a) **La suma de dos números distintos es igual a 6.**

b) **La suma de dos números consecutivos es igual a 7.**

c) **Si a un número se le suma 3 y se divide el resultado entre 2, el resultado es 10.**

d) **Si al cuadrado de un número se le resta la tercera parte del número, el resultado es 34.**

a) $x+y=6$

b) $x+(x+1)=7$

c) $\frac{x+3}{2}=10$

d) $x^2-\frac{x}{3}=34$

55. **Comprueba en cada caso si el valor propuesto es solución de la ecuación.**

a) $2x-8+3(3x-1)=0$, $x=1$

b) $\frac{x-1}{3}-\frac{x+2}{5}=0$, $x=-2$

c) $\frac{x-1}{3}-\frac{x+2}{5}=0$, $x=2$

d) $\frac{2(3x-1)^2}{5}-\frac{x-4}{2}=11$, $x=2$

e) $\frac{2(3x-1)^2}{5}-\frac{x-4}{2}=11$, $x=-2$

a) $2\cdot1-8+3(3\cdot1-1)=2-8+3\cdot2=0$. $x=1$ sí es solución.

b) $\frac{-2-1}{3}-\frac{-2+2}{5}=\frac{-3}{3}-0=-1\neq0$. $x=-2$ no es solución.

c) $\frac{2-1}{3}-\frac{2+2}{5}=\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{5}{15}-\frac{12}{15}=\frac{-7}{15}\neq0$. $x=2$ no es solución.

d) $\frac{2(3\cdot2-1)^2}{5}-\frac{2-4}{2}=\frac{2\cdot25}{5}-\frac{-2}{2}=10-(-1)=11$. $x=2$ sí es solución.

e) $\frac{2(3\cdot(-2)-1)^2}{5}-\frac{-2-4}{2}=\frac{2\cdot49}{5}+3=\frac{294}{15}+\frac{45}{15}=\frac{339}{15}\neq11$. $x=-2$ no es solución.

56. **Indica si las siguientes ecuaciones son equivalentes a $2x-3=7$.**

a) $3x-3=8$

b) $7x+9=5x+19$

c) $x^2-25=0$

d) $\frac{2}{3}x-1=\frac{14}{6}$

e) $\frac{2}{3}(x-1)=\frac{14}{6}$

f) $2x\cdot10-3\cdot10=7\cdot100$

La solución de la ecuación $2x-3=7$ es $x=5$. Serán equivalentes las que tengan únicamente esta solución.

a) $3\cdot5-3=12\neq8$. No es equivalente.

b) $7\cdot5+9=44=5\cdot5+19$. Sí es equivalente.

c) $x^2-25=0\rightarrow x=\pm5$. No es equivalente.

d) $\frac{2}{3}\cdot5-1=\frac{10}{3}-1=\frac{7}{3}=\frac{14}{6}$. Sí es equivalente.

e) $\frac{2}{3}(5-1)=\frac{2}{3}\cdot4=\frac{8}{3}\neq\frac{14}{6}$. No es equivalente.

f) $2\cdot5\cdot10-3\cdot10=70\neq7\cdot100$. No es equivalente.

57. **Escribe tres ecuaciones equivalentes a $5x-6=12-4x$, utilizando solo la regla de la suma, solo la regla del producto y una combinación de ambas, respectivamente.**

Respuesta modelo:

$5x=18-4x$ $\qquad$ $10x-12=24-8x$ $\qquad$ $10x=36-8x$

58. **Actividad resuelta.**

59. **Escribe una ecuación de primer grado en la que haya siete términos y que tenga la solución indicada en cada caso.**

a) $x=3$ $\qquad$ **c)** $x=0$ $\qquad$ **e)** $x=\frac{-5}{2}$

b) $x=-5$ $\qquad$ **d)** $x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ **f)** $x=\frac{-5}{6}$

Respuesta modelo:

a) $x=3 \Rightarrow x+2x+5-1=3+2x+5-1 \Rightarrow x+2x+4=3+2x+5-1$

b) $x=-5 \Rightarrow x+3x+4-2=-5+3x+4-2 \Rightarrow x+3x+2=-5+3x+4-2$

c) $x=0 \Rightarrow x+2x+3x+4=2x+3x+4$

d) $x=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow 2x+1+2x+3=1+1+2x+3 \Rightarrow 2x+1+2x+3=2+2x+3$

e) $x=\frac{-5}{2} \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow 2x-x+8-5x=-5-x+8-5x \Rightarrow x+8-5x=-5-x+8-5x$

f) $x=\frac{-5}{6} \Rightarrow 6x=-5 \Rightarrow 6x-3x-7-4=-5-3x-7-4 \Rightarrow 6x-3x-7-4=-5-3x-11$

60. **Escribe una ecuación que tenga como solución $x=3$, y que cumpla las siguientes condiciones:**

- **En el primer miembro debe aparecer el sumando $4x$, y en el segundo, el término –9.**
- **En total tiene que haber cinco términos, dos con x y tres sin x.**
- **Uno de los términos con x debe llevar un coeficiente negativo.**
- **En la ecuación no debe aparecer el número 3.**

Respuesta modelo: $4x-2x=7+8-9$

61. **Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.**

a) $2x-3=8x+21$ $\qquad$ **d)** $16x+24-32x=40x-32$

b) $3x-2+11x+19=23x-45-11x-6$ $\qquad$ **e)** $16x-9-41x=13-15x+34$

c) $23x-93+9x+99-12x=99-12x+x$ $\qquad$ **f)** $48x-15+17x+122=113-13x-5$

a) $2x-3=8x+21 \Rightarrow -6x=24 \Rightarrow x=-4$

b) $3x-2+11x+19=23x-45-11x-6 \Rightarrow 3x+11x-23x+11x=-45-6+2-19 \Rightarrow 2x=-68 \Rightarrow x=-34$

c) $23x-93+9x+99-12x=99-12x+x \Rightarrow 23x+9x-12x+12x-x=99+93-99 \Rightarrow 31x=93 \Rightarrow x=3$

d) $16x+24-32x=40x-32 \Rightarrow 16x-32x-40x=-32-24 \Rightarrow -56x=-56 \Rightarrow x=1$

e) $16x-9-41x=13-15x+34 \Rightarrow 16x-41x+15x=13+34+9 \Rightarrow -10x=56 \Rightarrow x=\frac{-28}{5}$

f) $48x-15+17x+122=113-13x-5 \Rightarrow 48x+17x+13x=113-5+15-122 \Rightarrow 78x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{78}$

62. Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones con paréntesis.

a) $3(5x-1)-7x=2x+9$

b) $10(2x-3)-7(4x-6)=2-6x$

c) $x-2(2-3x)=9+5(3x-1)$

d) $3(3x-1)-5(4x-2)+9(2-x)=15$

e) $3(2x-8)-6(x-7)=18$

f) $2(1-3x)-7(4x-6)=17(2-2x)$

a) $3(5x-1)-7x=2x+9 \Rightarrow 15x-3-7x=2x+9 \Rightarrow 6x=12 \Rightarrow x=2$

b) $10(2x-3)-7(4x-6)=2-6x \Rightarrow 20x-30-28x+42=2-6x \Rightarrow -2x=-10 \Rightarrow x=5$

c) $x-2(2-3x)=9+5(3x-1) \Rightarrow x-4+6x=9+15x-5 \Rightarrow -8x=8 \Rightarrow x=-1$

d) $3(3x-1)-5(4x-2)+9(2-x)=15 \Rightarrow 9x-3-20x+10+18-9x=15 \Rightarrow -20x=-10 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

e) $3(2x-8)-6(x-7)=18 \Rightarrow 6x-24-6x+42=18 \Rightarrow 0x=0$. Identidad

f) $2(1-3x)-7(4x-6)=17(2-2x) \Rightarrow 2-6x-28x+42=34-34x \Rightarrow 0x=-10$. No tiene solución.

63. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado, en las que aparecen denominadores.

a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}-\frac{x}{9}=7$

b) $\frac{x-3}{2}+\frac{2x-5}{2}=5$

c) $\frac{7x-1}{2}-\frac{4x-6}{2}=7$

d) $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x+8}{6}=\frac{17}{12}$

e) $\frac{x+1}{4}-\frac{x-2}{6}+\frac{3x-3}{5}=\frac{34}{10}$

f) $\frac{x-2}{3}-\frac{5x-4}{6}=\frac{-45x}{90}$

a) $\frac{x}{3}+\frac{x}{6}-\frac{x}{9}=7 \Rightarrow \frac{6x}{18}+\frac{3x}{18}-\frac{2x}{18}=\frac{126}{18} \Rightarrow 7x=126 \Rightarrow x=\frac{126}{7}=18$

b) $\frac{x-3}{2}+\frac{2x-5}{2}=5 \Rightarrow x-3+2x-5=10 \Rightarrow 3x=18 \Rightarrow x=6$

c) $\frac{7x-1}{2}-\frac{4x-6}{2}=7 \Rightarrow 7x-1-(4x-6)=14 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$

d) $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x+8}{6}=\frac{17}{12} \Rightarrow \frac{15x-3}{12}-\frac{6x+16}{12}=\frac{17}{12} \Rightarrow 15x-3-(6x+16)=17 \Rightarrow 9x=36 \Rightarrow x=4$

e) $\frac{x+1}{4}-\frac{x-2}{6}+\frac{3x-3}{5}=\frac{34}{10} \Rightarrow \frac{15x+15}{60}-\frac{10x-20}{60}+\frac{36x-36}{60}=\frac{204}{60} \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x+15-(10x-20)+36x-36=204 \Rightarrow 41x=205 \Rightarrow x=5$

f) $\frac{x-2}{3}-\frac{5x-4}{6}=\frac{-45x}{90} \Rightarrow \frac{30x-60}{90}-\frac{75x-60}{90}=\frac{-45x}{90} \Rightarrow 30x-60-(75x-60)=-45x \Rightarrow x=0$

64. **Calcula la solución de cada una de las ecuaciones siguientes.**

a) $\frac{2(3x-1)}{3}+\frac{5x-6}{6}=\frac{138}{9}$

b) $\frac{2x-8}{5}+\frac{3(x+2)}{6}=3$

c) $\frac{5(2x-1)}{3}-\frac{x+4}{3}=2$

d) $\frac{3(2x-8)}{4}-2(6-4x)=\frac{5}{2}$

e) $\frac{3(2x+2)}{10}-\frac{7(2x-5)}{15}-\frac{x-6}{6}=\frac{29}{15}$

f) $\frac{3(5x-1)}{2}-\frac{7(3x-4)}{3}=\frac{1}{6}-\frac{11(x-1)}{6}$

g) $\frac{2(x+3)}{5}+\frac{3(x-6)}{2}=\frac{2}{5}+\frac{10(2x+1)}{6}$

a) $\frac{6x-2}{3}+\frac{5x-6}{6}=\frac{138}{9}\Rightarrow\frac{36x-12}{18}+\frac{15x-18}{18}=\frac{276}{18}\Rightarrow 51x=306\Rightarrow x=6$

b) $\frac{2x-8}{5}+\frac{3x+6}{6}=3\Rightarrow\frac{12x-48}{30}+\frac{15x+30}{30}=\frac{90}{30}\Rightarrow 27x=108\Rightarrow x=4$

c) $\frac{10x-5}{3}-\frac{x+4}{3}=2\Rightarrow 10x-5-(x+4)=6\Rightarrow 9x=15\Rightarrow x=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}$

d) $\frac{6x-24}{4}-12+8x=\frac{5}{2}\Rightarrow 6x-24-48+32x=10\Rightarrow 38x=82\Rightarrow x=\frac{82}{38}=\frac{41}{19}$

e) $\frac{6x+6}{10}-\frac{14x-35}{15}-\frac{x-6}{6}=\frac{29}{15}\Rightarrow\frac{36x+36}{60}-\frac{56x-140}{60}-\frac{10x-60}{60}=\frac{116}{60}\Rightarrow -30x=-120\Rightarrow x=4$

f) $\frac{15x-3}{2}-\frac{21x-28}{3}=\frac{1}{6}-\frac{11x-11}{6}\Rightarrow\frac{45x-9}{6}-\frac{42x-56}{6}=\frac{-11x+12}{6}\Rightarrow 14x=-35\Rightarrow x=\frac{-35}{14}=\frac{-5}{2}$

g) $\frac{2x+6}{5}+\frac{3x-18}{2}=\frac{2}{5}+\frac{20x+10}{6}\Rightarrow\frac{12x+36}{30}+\frac{45x-270}{30}=\frac{12}{30}+\frac{100x+50}{30}\Rightarrow -43x=296\Rightarrow x=\frac{-296}{43}$

65. **Transforma las siguientes ecuaciones en ecuaciones de primer grado y resuélvelas.**

a) $2x(x-3)-5x^2=6(5-x)-3(4-2x+x^2)$

b) $\frac{x^2-1}{2}-\frac{3x-2x^2}{4}=x^2-7$

c) $6(1-5x+4x^2)-7(2+3x+5x^2)=8-49x-11x^2$

d) $(2x-3)^2-(2x+3)(2x-3)=2x-10$

e) $\frac{x^2-5x}{4}+\frac{2x^2-19}{6}=\frac{7x^2+4x}{12}$

f) $3x^2(3x^2-2)-9(x^4-5x^2+3)=13(3x^2+2x-2)$

g) $\frac{7x(3x-7)}{6}-\frac{2(7x^2-1)}{4}=\frac{-1}{2}$

h) $\frac{-3x(x+5)}{5}+\frac{\frac{9}{5}x^2-2}{3}=7$

a) $2x(x-3)-5x^2=6(5-x)-3(4-2x+x^2)\Rightarrow 2x^2-6x-5x^2=30-6x-12+6x+3x^2\Rightarrow -6x=18\Rightarrow x=-3$

b) $\frac{2x^2-2}{4}-\frac{3x-2x^2}{4}=\frac{4x^2-28}{4}\Rightarrow 2x^2-2-(3x-2x^2)=4x^2-28\Rightarrow -3x=-26\Rightarrow x=\frac{26}{3}$

c) $6-30x+24x^2-14-21x-35x^2=8-49x-11x^2\Rightarrow -2x=16\Rightarrow x=-8$

d) $4x^2-12x+9-(4x^2-9)=2x-10\Rightarrow 4x^2-12x+9-4x^2+9=2x-10\Rightarrow -14x=-28\Rightarrow x=2$

e) $\frac{3x^2-15x}{12}+\frac{4x^2-38}{12}=\frac{7x^2+4x}{12}\Rightarrow -19x=38\Rightarrow x=-2$

f) $9x^4-6x^2-9x^4+45x^2-27=39x^2+26x-26\Rightarrow -1=26x\Rightarrow x=\frac{-1}{26}$

g) $\frac{21x^2-49x}{6}-\frac{14x^2-2}{4}=\frac{-1}{2}\Rightarrow\frac{42x^2-98x}{12}-\frac{42x^2-6}{12}=\frac{-6}{12}\Rightarrow -98x=-12\Rightarrow x=\frac{6}{49}$

h) $\frac{-3x^2-15x}{5}+\frac{9x^2-10}{5\cdot 3}=7\Rightarrow\frac{-9x^2-45x}{15}+\frac{9x^2-10}{15}=\frac{105}{15}\Rightarrow -45x=115\Rightarrow x=-\frac{23}{9}$

66. **Escribe las expresiones en forma de ecuación de segundo grado, e indica si son completas o incompletas.**

a) $\mathbf{3x(x-2)-5x-4=-5x+5}$

b) $\mathbf{10+3x(2x-5)-2(4x^2-3x-1)=1}$

c) $\mathbf{\frac{2x^2-5}{3}-\frac{x^2+4}{4}=-1}$

d) $\mathbf{6x(-3x+5)+14(x^2-3)=6(x-7)}$

a) $3x^2-6x-5x-4=-5x+5 \Rightarrow 3x^2-6x-9=0$. Completa

b) $10+6x^2-15x-8x^2+6x+2=1 \Rightarrow -2x^2-9x+11=0$. Completa

c) $\frac{8x^2-20}{12}-\frac{3x^2+12}{12}=\frac{-12}{12} \Rightarrow 5x^2-20=0$. Incompleta

d) $-18x^2+30x+14x^2-42=6x-42 \Rightarrow -4x^2+24x=0$. Incompleta

67. **Encuentra la solución de las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.**

a) $\mathbf{5x^2-80=0}$

b) $\mathbf{16+4x^2=0}$

c) $\mathbf{1-9x^2=0}$

d) $\mathbf{5+2x^2=3x^2-11}$

e) $\mathbf{3(x^2-2)+18=0}$

f) $\mathbf{10x^2-23x=-23x+90}$

a) $5x^2-80=0 \Rightarrow 5x^2=80 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$

a) $16+4x^2=0 \Rightarrow 4x^2=-16$. No tiene solución.

b) $1-9x^2=0 \Rightarrow 1=9x^2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{9} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{3}$

c) $5+2x^2=3x^2-11 \Rightarrow 16=x^2 \Rightarrow x=\pm 4$

d) $3(x^2-2)+18=0 \Rightarrow 3x^2-6+18=0 \Rightarrow 3x^2=12 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

e) $10x^2-23x=-23x+90 \Rightarrow 10x^2=90 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

68. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin usar la fórmula.**

a) $\mathbf{x^2-7x=0}$

b) $\mathbf{8x-4x^2=0}$

c) $\mathbf{11x^2+44x=0}$

d) $\mathbf{4x^2-9x=0}$

e) $\mathbf{50x^2+25x=0}$

f) $\mathbf{6x^2-3x=3(7x^2-4x)}$

a) $x^2-7x=0 \Rightarrow x(x-7)=0 \Rightarrow x=0,\ x=7$

b) $8x-4x^2=0 \Rightarrow 4x(2-x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$

c) $11x^2+44x=0 \Rightarrow 11x(x+4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-4$

d) $4x^2-9x=0 \Rightarrow x(4x-9)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\frac{9}{4}$

e) $50x^2+25x=0 \Rightarrow 25x(2x+1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\frac{-1}{2}$

f) $6x^2-3x=3(7x^2-4x) \Rightarrow 6x^2-3x=21x^2-12x \Rightarrow 15x^2-9x=0 \Rightarrow 3x(5x-3)=0 \Rightarrow x=0, x=\frac{3}{5}$

69. **Actividad resuelta.**

70. Opera y calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $(x+5)(2x-4)=0$

b) $(3x-12)(5x+35)=0$

c) $(2x+4)(2x-1)=0$

d) $(3x-2)(5x-2)=0$

e) $(4x-1)(10x-1)=0$

f) $(36x-45)(28x+4)=0$

a) $\begin{cases} x+5=0 \Rightarrow x=-5 \\ 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-12=0 \Rightarrow x=4 \\ 5x+35=0 \Rightarrow x=-7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+4=0 \Rightarrow x=-2 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{3} \\ 5x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{4} \\ 10x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{10} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 36x-45=0 \Rightarrow x=\dfrac{45}{36}=\dfrac{5}{4} \\ 28x+4=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4}{28}=\dfrac{-1}{7} \end{cases}$

71. Sin resolverlas, indica el número de soluciones de cada ecuación.

a) $3x^2+7x+5=0$

b) $3x^2+8x+5=0$

c) $-5x^2+x+1=0$

d) $10x^2-20x+10=0$

a) $7^2-4\cdot3\cdot5=-11<0$. Ninguna solución

b) $8^2-4\cdot3\cdot5=4>0$. Dos soluciones

c) $1^2-4\cdot(-5)\cdot1=21>0$. Dos soluciones

d) $20^2-4\cdot10\cdot10=0$. Una solución

72. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $2x^2+6x-8=0$

b) $x^2+5x+6=0$

c) $-x^2+8x-16=0$

d) $6x^2-5x-1=0$

e) $6x^2+x-1=0$

f) $2x^2+3x+6=0$

a) $x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2+4\cdot2\cdot(-8)}}{2\cdot2}=\dfrac{-6\pm10}{4}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-6+10}{4}=1 \\ x=\dfrac{-6-10}{4}=-4 \end{cases}$

b) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\dfrac{-5\pm1}{2}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-5+1}{2}=-2 \\ x=\dfrac{-5-1}{2}=-3 \end{cases}$

c) $x=\dfrac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot(-1)\cdot(-16)}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-8\pm0}{-2}=\dfrac{-8}{-2}=4$

d) $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot6\cdot(-1)}}{2\cdot6}=\dfrac{5\pm7}{12}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{5+7}{12}=1 \\ x=\dfrac{5-7}{12}=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$

e) $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot6\cdot(-1)}}{2\cdot6}=\dfrac{-1\pm5}{12}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-1+5}{12}=\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3} \\ x=\dfrac{-1-5}{12}=\dfrac{-6}{12}=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$

f) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot2\cdot6}}{2\cdot2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-39}}{4}$. No tiene solución.

73. Actividad resuelta.

74. **Calcula en cada caso los valores de *k* para los que la ecuación tiene una única solución, y resuélvela.**

a) $2x^2-20x+k=0$

b) $kx^2+12x+18=0$

c) $x^2+kx+25=0$

d) $9x^2-2x+k=0$

a) $20^2-4\cdot 2\cdot k=0 \Rightarrow k=\frac{400}{8}=50,\ x=\frac{20}{2\cdot 2}=5$

b) $12^2-4\cdot k\cdot 18=0 \Rightarrow k=\frac{144}{72}=2;\ x=\frac{-12}{2\cdot 2}=-3$

c) $k^2-4\cdot 1\cdot 25=0 \Rightarrow k^2=100 \Rightarrow \begin{cases} k=10 \Rightarrow x=\frac{-10}{2\cdot 1}=-5 \\ k=-10 \Rightarrow x=\frac{10}{2\cdot 1}=5 \end{cases}$

d) $2^2-4\cdot 9\cdot k=0 \Rightarrow k=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};\ x=\frac{2}{2\cdot 9}=\frac{1}{9}$

75. **Comprueba que la solución de la ecuación es correcta.**

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{5x-10}{7}=\frac{-1}{2},\ x=2$

b) $6x-5+3(2x-1)=0,\ x=\frac{1}{6}$

c) $\frac{3x+5}{4}-\frac{x+2}{3}=1,\ x=-1$

a) $\frac{2-3}{2}-\frac{5\cdot 2-10}{7}=\frac{-1}{2}-\frac{0}{7}=\frac{-1}{2}$, $x=2$ es la solución correcta.

b) $6\cdot\frac{1}{6}-5+3\left(2\cdot\frac{1}{6}-1\right)=1-5+3\left(\frac{1}{3}-1\right)=-4+(1-3)\neq 0$, $x=\frac{1}{6}$ no es la solución correcta.

c) $\frac{3(-1)+5}{4}-\frac{(-1)+2}{3}=\frac{2}{4}-\frac{1}{3}=\frac{6}{12}-\frac{4}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\neq 1$, $x=-1$ no es la solución correcta.

76. **Opera y encuentra las soluciones de cada ecuación.**

a) $3x(2x-5)-7(x+3)=-41$

b) $\frac{2x(x-3)}{3}-\frac{x(7-x)}{4}=\frac{2-x}{6}$

c) $(3x-5)^2-(3x+5)^2=4+4(3x+5)(3x-5)$

d) $\frac{(2x-1)^2}{3}-\frac{x^2-5}{8}=\frac{7}{2}$

a) $6x^2-15x-7x-21+41=0 \Rightarrow 6x^2-22x+20=0 \Rightarrow 3x^2-11x+10=0$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4\cdot 3\cdot 10}}{2\cdot 3}=\frac{11\pm 1}{6}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{11+1}{6}=2 \\ x=\frac{11-1}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\end{cases}$$

b) $\frac{2x^2-6x}{3}-\frac{7x-x^2}{4}=\frac{2-x}{6}\Rightarrow\frac{8x^2-24x}{12}-\frac{21x-3x^2}{12}=\frac{4-2x}{12}\Rightarrow 8x^2-24x-21x+3x^2-4+2x=0\Rightarrow 11x^2-43x-4=0$

$$x=\frac{43\pm\sqrt{43^2-4\cdot 11\cdot(-4)}}{2\cdot 11}=\frac{43\pm 45}{22}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{43+45}{22}=4 \\ x=\frac{43-45}{22}=\frac{-1}{11}\end{cases}$$

c) $9x^2-30x+25-\left(9x^2+30x+25\right)=4+4\cdot\left(9x^2-25\right)\Rightarrow -60x=4+36x^2-100\Rightarrow 36x^2+60x-96=0\Rightarrow 3x^2+5x-8=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 3\cdot(-8)}}{2\cdot 3}=\frac{-5\pm 11}{6}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{-5+11}{6}=1 \\ x=\frac{-5-11}{6}=\frac{-8}{3}\end{cases}$$

d) $\frac{4x^2-4x+1}{3}-\frac{x^2-5}{8}=\frac{7}{2}\Rightarrow\frac{32x^2-32x+8}{24}-\frac{3x^2-15}{24}=\frac{84}{24}\Rightarrow 32x^2-32x+8-\left(3x^2-15\right)-84=0\Rightarrow 29x^2-32x-61=0$

$$x=\frac{32\pm\sqrt{32^2-4\cdot 29\cdot(-61)}}{2\cdot 29}=\frac{32\pm\sqrt{90}}{58}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{32+90}{58}=\frac{61}{29} \\ x=\frac{32-90}{58}=-1\end{cases}$$

77. A partir de la solución $x = 5$, utiliza las reglas de la suma y del producto para obtener una ecuación equivalente, de forma que en ambos miembros aparezcan términos con x y también términos independientes.

Respuesta modelo:

$x = 5 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow 3x + x - x - 5 + 5 = 15 + x - x - 5 + 5 \Rightarrow 4x - x = 10 + 5$

78. Inventa el enunciado que se resuelva utilizando cada una de estas ecuaciones.

a) $3x + 5 = 26$ **b)** $5x - 4 = 21$ **c)** $35 - 2x = 24$ **d)** $21 + 2x = 27$

Respuesta modelo:

a) Al sumar 5 al triple de la edad de Darío, se obtiene la edad de su tía, 26 años. ¿Cuántos años tiene Darío?

b) Un artesano empaqueta los vasos de un pedido en cajas de 5, pero durante el transporte se rompen 4 vasos. Si quedan 21 vasos, ¿cuántos cajas empaquetó?

c) El precio de una raqueta con funda es de 35 €. Hay una oferta que, al comprar otra raqueta, se descuenta a esta el doble del precio de la funda. Si la segunda raqueta cuesta 24 €, ¿cuánto vale la funda?

d) Alrededor de una mesa rectangular, de 2 m de ancho, quieren dejar un espacio de 21 m^2. Si necesitan 27 m^2 en total, ¿cuánto mide el largo de la mesa?

79. La suma de tres números consecutivos es igual al doble del mayor más uno. ¿De qué números se trata?

Si el menor es *x*, los otros serán $x + 1$ y $x + 2$.

$x + x + 1 + x + 2 = 2(x + 2) + 1 \Rightarrow 3x + 3 = 2x + 4 + 1 \Rightarrow 3x + 3 = 2x + 5 \Rightarrow x = 2$

Los números son 2, 3 y 4.

80. En una frutería hay el doble de manzanas que de peras, y el triple de uvas que de manzanas. En total hay 441 frutas. Calcula cuántas hay de cada clase.

Llamamos *x* a la cantidad menor, el número de peras. Hay 2*x* manzanas y $3 \cdot 2x = 6x$ uvas.

$x + 2x + 6x = 441 \Rightarrow 9x = 441 \Rightarrow x = \dfrac{441}{9} = 49$.

Hay 49 peras, $2 \cdot 49 = 98$ manzanas y $6 \cdot 49 = 294$ uvas.

81. Un granjero tenía unas cuantas gallinas en su corral. Por un agujero de la valla se escapó la tercera parte, y dos tercios de las que quedaban se las comió un lobo.

Cuando el granjero se dio cuenta, cambió las 18 gallinas que le quedaban a otro corral. ¿Cuántas gallinas había al principio?

Si al principio había *x* gallinas, se escaparon $\dfrac{x}{3}$, y el lobo se comió $\dfrac{2}{3}\left(x - \dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2x}{3} = \dfrac{4x}{9}$.

$\dfrac{x}{3} + \dfrac{4x}{9} + 18 = x \Rightarrow \dfrac{3x}{9} + \dfrac{4x}{9} + \dfrac{162}{9} = \dfrac{9x}{9} \Rightarrow 3x + 4x + 162 = 9x \Rightarrow 162 = 2x \Rightarrow x = 81$

Había 81 gallinas. Se escaparon $\dfrac{81}{3} = 27$, y el lobo se comió $\dfrac{4 \cdot 81}{9} = 36$, con lo que quedaron $81 - 27 - 36 = 18$.

82. Raquel, Ramón y Rosa están contando el dinero que tienen para ver si les llega para ir al cine. Raquel tiene 7 € más que Ramón, y Rosa tiene 5 € más que el doble de la suma de las cantidades de sus amigos. Si en total tienen 50 €, ¿cuánto dinero tiene cada uno?

Si *x* es el dinero de Ramón, Raquel tiene $x + 7$, y Rosa, $2 \cdot (x + x + 7) + 5 = 4x + 14 + 5 = 4x + 19$.

$x + x + 7 + 4x + 19 = 50 \Rightarrow 6x = 24 \rightarrow x = 4$

Ramón tiene 4 €, Raquel tiene $4 + 7 = 11$ € y Rosa tiene $4 \cdot 4 + 19 = 35$ €.

83. **Reyes ha pensado un número y ha dividido el número resultante de aumentarlo en 42 unidades entre 3. Ha obtenido el número inicial disminuido en 20 unidades. ¿Cuál es el número que había pensado?**

$$\frac{x+42}{3} = x-20 \Rightarrow x+42 = 3x-60 \Rightarrow 102 = 2x \Rightarrow x = 51$$

Pensó el número 51.

84. **Un periodista ha escrito la crónica de un partido de baloncesto, en el que el equipo local ha sufrido una aplastante derrota. Las dos séptimas partes del artículo están dedicadas a elogiar al árbitro; las tres cuartas partes del resto, a elogiar al entrenador, y las 15 líneas restantes, a elogiar a los jugadores. ¿Cuántas líneas tiene el artículo?**

Llamamos x al número de líneas totales. Dedica $\frac{2}{7}x$ a elogiar al árbitro y $\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{7}x\right)$ al entrenador.

$$\frac{2}{7}x+\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{7}x\right)+15 = x \Rightarrow \frac{2}{7}x+\frac{3}{4}\left(\frac{5}{7}x\right)+15 = x \Rightarrow \frac{2x}{7}+\frac{15x}{28}+15 = x \Rightarrow \frac{8x}{28}+\frac{15x}{28}+\frac{420}{28} = \frac{28x}{28} \Rightarrow 420 = 5x \Rightarrow x = 84$$

El artículo tiene 84 líneas.

85. **En un concesionario han rebajado los precios de tres coches. El coche rojo cuesta 2000 € más que el verde, y el coche azul cuesta 9500 €.**

La semana pasada se han vendido 7 coches rojos, 4 coches azules y 9 coches verdes, y se han recaudado 192 800€. ¿Qué precio tiene cada coche?

Si el verde cuesta x, el rojo cuesta $x+2000$.

$$7(x+2000)+4\cdot 9500+9x = 192\,800 \Rightarrow 7x+14000+38\,000+9x = 192\,800 \Rightarrow 16x = 140\,800 \Rightarrow x = 8800$$

El coche verde cuesta 8800 €, y el rojo, $8800+2000 = 10\,800$ €.

86. **En el castillo de un malvado hechicero hay una alta torre, con un gran número de escalones. La escalera está protegida de forma que solo aquel que adivine cuántos escalones tiene podrá subirla. Por suerte, al pie de la escalera hay una pista:**

Si a mis escalones le sumas la mitad de ellos y le restas la sexta parte obtendrás 200 más.

Un aventurero consiguió encontrar la solución del acertijo y subir a la torre. ¿Cuál era la solución?

Llamando x al número de escalones, la mitad son $\frac{x}{2}$ y la sexta parte, $\frac{x}{6}$

$$x+\frac{x}{2}-\frac{x}{6} = x+200 \Rightarrow \frac{3x}{6}-\frac{x}{6} = 200 \Rightarrow \frac{2x}{6} = 200 \Rightarrow x = 600$$

La escalera tiene 600 escalones.

87. **Problema resuelto.**

88. **Dentro de un cuadrado se dibuja otro cuadrado cuyo lado mide 7 m menos que el del cuadrado mayor, de forma que la diferencia entre las áreas de ambos cuadrados es igual a 231 m^2. Calcula la longitud del lado del cuadrado mayor.**

Si el lado del cuadrado mayor mide x, el lado del menor mide $x-7$.

$$x^2-(x-7)^2 = 231 \Rightarrow x^2-(x^2-14x+49) = 231 \Rightarrow 14x-49 = 231 \Rightarrow 14x = 280 \Rightarrow x = 20$$

El lado del cuadrado mayor mide 20 m.

89. Una botella de refresco tiene el doble de capacidad que otra. De cada botella se sacan 20 cL, y la cantidad que queda en la mayor es seis veces la que queda en la pequeña. Calcula la capacidad de ambas botellas.

Llamamos x a la capacidad de la botella pequeña. Por tanto, la capacidad de la grande es $2x$.

$2x-20=6(x-20)\Rightarrow 2x-20=6x-120\Rightarrow -4x=-100\Rightarrow x=25$

La capacidad de la botella pequeña es 25 cL, y la de la grande, $2\cdot 25=50$ cL.

90. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 28 cm, y cada uno de los lados mayores mide 3,5 cm más que el lado menor. ¿Cuánto miden sus lados?

Llamamos x al lado menor. Por tanto, cada uno de los lados mayores mide $x+3,5$.

$x+2(x+3,5)=28\Rightarrow x+2x+7=28\Rightarrow 3x+7=28\Rightarrow 3x=21\Rightarrow x=7$

El lado menor mide 7 cm y cada uno de los otros mide $7+3,5=10,5$ cm.

91. Los tres ángulos de un triángulo suman siempre 180º. En un triángulo, el ángulo intermedio es igual al triple del menor y el menor es la quinta parte del mayor. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Si el ángulo menor mide x, el intermedio mide $3x$ y, el mayor, $5x$.

$x+3x+5x=180\Rightarrow 9x=180\Rightarrow x=20$

Los ángulos miden 20º, $3\cdot 20=60º$ y $5\cdot 20=100º$.

92. En un torneo de voleibol, cada equipo lleva ocho jugadores y un entrenador. Si en total hay 108 personas, ¿cuántos entrenadores hay y cuántos jugadores participan en el torneo?

Llamamos x al número de equipos.

$(8+1)x=108\Rightarrow 9x=108\Rightarrow x=12$

Hay 12 entrenadores y $12\cdot 8=96$ jugadores.

93. Problema resuelto.

94. Un perfumista mezcla dos esencias, *A* y *B*, con las que elabora un perfume. La primera cuesta 40 €/L, y la segunda cuesta 60 €/L.

a) ¿Qué cantidad debe tomar de cada una para producir cinco litros de la mezcla, de forma que cada litro de perfume valga exactamente 52 euros?

b) ¿Y para conseguir 100 mL de mezcla a ese precio?

a) Si llamamos x a los litros de esencia *A*, necesitan $5-x$ litros de esencia *B*.

$40x+60(5-x)=52\cdot 5\Rightarrow 40x+300-60x=260\Rightarrow -20x=-40\Rightarrow x=2$

Necesitan 2 L de esencia *A* y $5-2=3$ L de esencia *B*.

b) Se puede plantear una ecuación similar a la anterior, pero no es necesario. Teniendo en cuenta el resultado anterior, se necesitan $\frac{2}{5}$ de esencia *A* y $\frac{3}{5}$ de esencia *B*, es decir, $\frac{2}{5}\cdot 100=40$ mL y $\frac{3}{5}\cdot 100=60$ mL, respectivamente.

95. El litro de un lavavajillas cuesta 1,5 €. Para ahorrar, el dueño de una empresa de limpieza añade agua (que no le cuesta nada) a las botellas que tiene, y consigue tener en total 90 L y que le salgan a 1 €/L. Calcula cuántos litros de lavavajillas tenía.

Llamamos x a la cantidad de lavavajillas que tenía. Como lo único que le ha costado dinero es el lavavajillas:

$1,5x=90\cdot 1\Rightarrow x=60$

Compró 60 L de lavavajillas.

96. Por parejas, coged dos trozos de cuerda o hilo de la misma longitud. Uno de los miembros de la pareja debe construir un cuadrado y el otro un rectángulo de forma que cumplan estas condiciones:

- **El lado mayor del rectángulo debe ser 5 cm mayor que el lado del cuadrado, y el lado menor debe medir 4 cm.**
- **La diferencia entre el área del cuadrado y el área del rectángulo debe ser de 25 cm^2.**

¿Qué longitud de cuerda necesitáis? Comprobad que los cuadriláteros que habéis construido cumplen las condiciones pedidas.

Si x es el lado del cuadrado, el área del rectángulo es $4(x+5)$ y el área del cuadrado, x^2.

Como el problema no especifica cuál de las dos figuras es mayor:

- Si el cuadrado tiene mayor

área: $x^2-4(x+5)=25 \Rightarrow x^2-4x-45=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-45)}}{2\cdot1}=\dfrac{4\pm14}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4+14}{2}=9\\ x=\dfrac{4-14}{2}=-5\end{cases}$

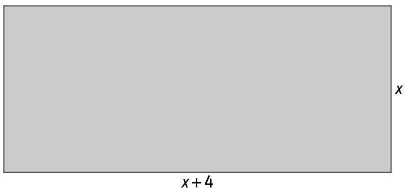
La solución negativa no tiene sentido, por tanto, se necesitan dos cuerdas de $9\cdot4=36$ cm.

- Si el cuadrado tiene menor área:

$4(x+5)-x^2=25 \Rightarrow -x^2+4x-5=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-5)}}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-4\pm\sqrt{-4}}{-2}$

No tiene solución.

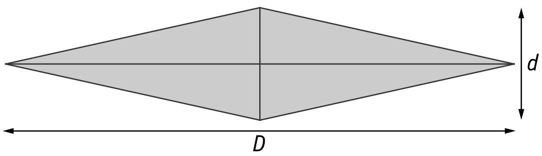
97. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su área es de 77 cm^2.



$$x(x+4)=77 \Rightarrow x^2+4x-77=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-77)}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm18}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-4+18}{2}=7\\ x=\dfrac{-4-18}{2}=-11\end{cases}$$

Solo es válida la solución positiva. Los lados miden 7 y $7+4=11$ cm.

98. El área del rombo que aparece en la figura es 130 cm^2. Calcula la longitud de ambas diagonales si la diagonal mayor mide 5,5 cm más que la menor.



$$\frac{(x+5,5)x}{2}=130 \Rightarrow x^2+5,5x-260=0 \Rightarrow x=\frac{-5,5\pm\sqrt{5,5^2-4\cdot1\cdot(-260)}}{2\cdot1}=\frac{-5,5\pm32,71}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-5,5+32,71}{2}=13,61\\ x=\dfrac{-5,5-32,71}{2}=-19,11\end{cases}.$$

Solo tiene sentido la solución positiva. La diagonal menor mide 13,61 cm, y la mayor mide $13,61+5,5=19,11$ cm.

99. Carlos ha fabricado teselas de cartulina para construir mosaicos cuadrados. Si coloca un número determinado de teselas en cada lado del cuadrado, le sobran 116 teselas. En cambio, si en cada lado pone el doble de las que había antes menos una tesela, le faltan 45 teselas para construir el siguiente cuadrado. ¿Cuántas teselas ha fabricado Carlos?

Llamamos x al lado del cuadrado menor.

$$x^2+116=(2x-1)^2-45 \Rightarrow x^2+116=4x^2-4x+1-45 \Rightarrow 3x^2-4x-160=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-160)}}{2\cdot 3}=\frac{4\pm 44}{6}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4+44}{6}=8 \\ x=\dfrac{4-44}{6}=-\dfrac{20}{3} \end{cases}$$

Solo es válida la solución positiva, $x=8$. Tenía $8^2+116=180$ teselas.

100. Se lanza una jabalina de forma que la altura en un instante t es $-2t^2+12t+7$. En un determinado momento, el proyectil se encuentra a una altura de 67 m.

a) ¿Cuánto tiempo ha transcurrido?

b) ¿Hay más de una solución posible?

a) $-2t^2+12t+7=67 \Rightarrow -2t^2+12t-60=0 \Rightarrow t^2-6t+30=0 \rightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=1 \end{cases}$

$$t=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 30}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{-84}}{2}$$

El problema no tiene solución.

b) El problema no tiene solución.

101. Isa viene en bici al instituto y quiere llegar a una cierta hora. Si viene a 20 km/h llega 3 minutos tarde, y si viene a 30 km/h llega 3 minutos antes. ¿A qué velocidad, en km/h, tiene que venir para llegar justo a la que quiere?

A. 25 **B. 24** **C. 23** **D. 22**

Para llegar a tiempo debe tardar t horas.

$$20\left(t+\frac{3}{60}\right)=30\left(t-\frac{3}{60}\right)\Rightarrow 20\left(\frac{60t}{60}+\frac{3}{60}\right)=30\left(\frac{60t}{60}-\frac{3}{60}\right)\Rightarrow 2(60t+3)=3(60t-3)\Rightarrow 120t+6=180t-9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60t=15\Rightarrow t=\frac{15}{60}=15 \text{ min}$$

Si llamamos v a la velocidad a la que quiere ir:

$$20\cdot(15+3)=v\cdot 15\Rightarrow v=\frac{360}{15}\Rightarrow v=24 \text{ km/h}$$.

La respuesta correcta es B. 24

102. En un viaje de turismo, Esther llevó x €. Al cambiarlos por la moneda del país, el mon, recibió 10 mons por cada 7 €. Si después de gastar 60 mons tenía aún x mons, ¿cuál es la suma de las cifras de x?

A. 5 **B. 6** **C. 7** **D. 8**

Recibió $\frac{10}{7}x$ mons.

$$\frac{10x}{7}-60=x\Rightarrow 10x-420=7x\Rightarrow 3x=420\Rightarrow x=140 \text{ €.}$$

La respuesta correcta es A. 5.

103. **En un grupo de estudiantes, el 40 % son chicas. Dos chicas cambian de grupo y llegan dos chicos nuevos, resultando ahora que el 30 % son chicas. ¿Cuántas chicas había inicialmente en el grupo?**

A. 4 **B. 6** **C. 8** **D. 10**

Si había x personas en total, $0{,}4x$ eran chicas y $0{,}6x$ eran chicos.

Con los cambios no varía el total de personas ya que se cambian dos chicas por dos chicos:

$0{,}4x - 2 = 0{,}3x \Rightarrow 0{,}1x = 2 \Rightarrow x = 20$

Inicialmente había $0{,}4 \cdot 20 = 8$ chicas.

La respuesta correcta es A. 8

104. **Cuando desplazamos la coma cuatro lugares a la derecha en cierto número decimal positivo, resulta un número que es el cuádruple del inverso del número dado. ¿Qué número es el dado?**

A. 0,0002 **B. 0,002** **C. 0,02** **D. 0,2**

Desplazar la coma a la derecha equivale a multiplicar por 10.000.

$$10\,000x = 4 \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 10\,000x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{10\,000}} = \pm\frac{2}{100} = \pm 0{,}02\,.$$

Como el número que se pide es decimal positivo, la respuesta correcta es C. 0,02.

105. **En una bolsa hay más bolas azules que rojas. Echamos bolas rojas hasta que las azules sean un tercio del total. Luego, echamos bolas amarillas hasta que las azules sean un quinto del total. Finalmente, doblamos el número de bolas azules. ¿Qué fracción del total son ahora azules?**

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{2}{5}$

Tras la primera operación hay n bolas azules y $2n$ bolas rojas de un total de $3n$ bolas.

Al echar las bolas amarillas, n debe ser $\frac{1}{5}$ del total, luego hemos echado $2n$ bolas amarillas y hay $5n$ bolas en total.

Doblar el número de bolas azules equivale a echar n, con lo que en total hay $2n$ bolas azules de $6n$ bolas.

La respuesta es C. $\frac{1}{3}$.

Encuentra el error

106. **Belén ha resuelto una ecuación de primer grado, pero al comprobar la solución se da cuenta de que ha cometido algún error. Estos son sus cálculos:**

$$3(2x + 5) - 5x + 6 = 2x + 6$$

"Simplifico un 6 que aparece sumando a la izquierda y un 6 que aparece sumando a la derecha".

$$3(2x + 5) - 5x + \cancel{6} = 2x + \cancel{6}$$

"Simplifico un 2x que aparece sumando a la izquierda y un 2x que aparece sumando a la derecha".

$$3(\cancel{2x} + 5) - 5x = \cancel{2x}$$

"Resuelvo".

$$15 - 5x = 0 \Rightarrow -5x = -15 \Rightarrow x = \frac{-15}{-5} = 3$$

Encuentra el error y halla la solución correcta.

El error se encuentra en el segundo paso. No se puede simplificar el $2x$ de la izquierda, ya que, al estar dentro del paréntesis, va multiplicado por 3.

La solución es $3(2x + 5) - 5x = 2x \Rightarrow 6x + 15 - 5x = 2x \Rightarrow -x = -15 \Rightarrow x = 15$

PONTE A PRUEBA

Alquiler de DVD

Actividad resuelta.

La persecución

Un avestruz se ha percatado de que un guepardo duerme sobre la rama de un árbol y huye despavorida a una velocidad de 90 km/h antes de que este se despierte.

El guepardo se despierta 10 segundos después y ve al avestruz alejarse en el horizonte. Inmediatamente, sale en su persecución a 120 km/h.

Como el guepardo va a más velocidad, terminará alcanzando al avestruz, pero si el avestruz llega a una zona de sabana donde se puede camuflar, se librará del guepardo.

1. Si el guepardo tarda *t* minutos en alcanzar al avestruz, ¿cuánto tiempo llevará el avestruz huyendo?

A. 10 segundos B. *t* minutos C. (*t* +10) minutos D. (*t* +10) segundos E. $\left(t+\frac{1}{6}\right)$ **minutos**

2. Cuando el guepardo alcance al avestruz, habrán recorrido la misma distancia. Plantea y resuelve la ecuación correspondiente.

3. Si la zona de sabana está a 2 km, ¿logrará el avestruz escapar?

1. Como 10 segundos son $\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$ minutos, la respuesta es E. $\left(t+\frac{1}{6}\right)$ minutos.

2. Pasamos ambas velocidades a km/min:

$$90\,\text{km/h}=\frac{90}{60}\text{km/min}=1{,}5\ \text{km/min}\,;\ 120\ \text{km/h}=\frac{120}{60}\text{km/min}=2\ \text{km/min}$$

$$1{,}5\left(t+\frac{1}{6}\right)=2t\Rightarrow\frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{6}\right)=2t\Rightarrow\frac{3t}{2}+\frac{1}{4}=2t\Rightarrow 6t+1=8t\Rightarrow -2t=-1\Rightarrow t=\frac{1}{2}\text{min}$$

3. El avestruz ha recorrido $2\cdot\frac{1}{2}=1$ km solamente, no escapará del guepardo.

Romeo y Julieta 2.0

Dos enamorados están mandándose mensajes románticos a través del móvil.

Romeo se despide de la conversación enviando a Julieta el siguiente mensaje:

Julieta, para expresarle más afecto, responde así:

Entonces Romeo responde con más emoticonos añadiendo dos más. De esta forma, continúan mandándose mensajes, hasta llegar al final, cuando uno de los dos decide terminar la conversación y dar las buenas noches.

El último mensaje romántico enviado tiene 15 veces el icono **.**

1. **¿Cuántos iconos tiene el mensaje 4? ¿Y el mensaje 5?**
2. **¿Cuántas veces hay que sumar 2 iconos al primer mensaje para llegar al cuarto mensaje? ¿Y al quinto? ¿Y al décimo?**
3. **¿Qué ecuación representa el número de emoticonos utilizados en función del número de mensaje que se esté enviando?**
4. **Calcula el lugar que ocupa el último mensaje romántico.**
5. **¿Qué ecuación indica el número de iconos totales utilizados en todos los mensajes que se han enviado?**

1. Construimos una tabla con los datos:

n.º de mensaje	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
n.º de emoticonos	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	…

El mensaje 4 tiene 9 emoticonos y el quinto, 11.

2. Para llegar al cuarto mensaje, $9 = 3+2+2+2$, por tanto hay que sumar tres veces dos emoticonos.

Para llegar al quinto mensaje, $11 = 3+2+2+2+2$, por tanto hay que sumar cuatro veces dos emoticonos.

Para llegar al décimo mensaje, hay que sumar nueve veces dos emoticonos.

3. $3+2(n-1) = 2n+1$

4. El último mensaje romántico enviado tiene 15 veces el icono, de manera que

$15 = 3+2(n-1) \Rightarrow 15 = 3+2n-2 \Rightarrow 14 = 2n \Rightarrow n = 7$

5. $S_n = \dfrac{3+2n+1}{2} \cdot n = n^2 + 2n$

AUTOEVALUACIÓN

1. Comprueba si $x = 2$, $x = -1$ y $x = 0$ son soluciones de estas ecuaciones.

a) $3x - 5(2x-1) = 9 - 3x$ **b)** $\dfrac{2x+5}{8} - \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{-1}{24}$ **c)** $3x^2 - 3x - 6 = 0$

a) $3\cdot 2 - 5(2\cdot 2 - 1) = 9 - 3\cdot 2 \Rightarrow 6 - 5\cdot 3 = 9 - 6 \Rightarrow 6 - 15 = 3 \Rightarrow -9 \neq 3$, $x = 2$ no es solución.

$3(-1) - 5(2(-1)-1) = 9 - 3(-1) \Rightarrow -3 + 15 = 9 + 3 \Rightarrow 12 = 12$, $x = -1$ sí es solución.

$3\cdot 0 - 5(2\cdot 0 - 1) = 9 - 3\cdot 0 \Rightarrow 6 \neq 9$, $x = 0$ no es solución.

b) $\dfrac{2\cdot 2+5}{8} - \dfrac{2+2}{3} = \dfrac{9}{8} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{27}{24} - \dfrac{32}{24} = \dfrac{-5}{24} \neq \dfrac{-1}{24}$, $x = 2$ no es solución.

$\dfrac{-2+5}{8} - \dfrac{-1+2}{3} = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{9}{24} - \dfrac{8}{24} = \dfrac{1}{24} \neq \dfrac{-1}{24}$, $x = -1$ no es solución.

$\dfrac{5}{8} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{15}{24} - \dfrac{16}{24} = \dfrac{-1}{24}$, $x = 0$ sí es solución.

c) $3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 - 6 = 12 - 6 - 6 = 0$, $x = 2$ sí es solución.

$3\cdot(-1)^2 - 3\cdot(-1) - 6 = 3 + 3 - 6 = 0$, $x = -1$ sí es solución.

$-6 \neq 0$, $x = 0$ no es solución.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones.

b) $6(3x-2) - 5(2x+1) = 4x - 14$ **b)** $\dfrac{x-9}{8} - \dfrac{2x-7}{10} = \dfrac{x-2}{2}$ **c)** $\dfrac{4(3x-2)}{3} - \dfrac{5(8x-5)}{4} = \dfrac{5}{3}$

a) $6(3x-2) - 5(2x+1) = 4x - 14 \Rightarrow 18x - 12 - 10x - 5 = 4x - 14 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{x-9}{8} - \dfrac{2x-7}{10} = \dfrac{x-2}{2} \Rightarrow \dfrac{5x-45}{40} - \dfrac{8x-28}{40} = \dfrac{20x-40}{40} \Rightarrow 5x - 45 - (8x-28) = 20x - 40 \Rightarrow -23x = -23 \Rightarrow x = 1$

c) $\dfrac{4(3x-2)}{3} - \dfrac{5(8x-5)}{4} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \dfrac{12x-8}{3} - \dfrac{40x-25}{4} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \dfrac{48x-32}{12} - \dfrac{120x-75}{12} = \dfrac{20}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 48x - 32 - (120x - 75) = 20 \Rightarrow -72x = -23 \Rightarrow x = \dfrac{23}{72}$

3. Calcula las soluciones de las ecuaciones:

a) $5x^2 - 80 = 0$ **c)** $3x^2 = 0$

b) $4x^2 - 4 = 0$ **d)** $8x^2 + 24x = 0$

a) $5x^2 - 80 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 80 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$

b) $4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

c) $3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

d) $8x^2 + 24x = 0 \Rightarrow 8x(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

4. **Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.**

a) $\mathbf{2x^2 - 12x - 14 = 0}$ **b)** $\mathbf{-30x^2 + 50x + 20 = 0}$

a) $2x^2 - 12x - 14 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4\cdot 2\cdot(-14)}}{2\cdot 2} = \dfrac{12 \pm 16}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{12+16}{4} = 7 \\ x = \dfrac{12-16}{4} = -1 \end{cases}$

b) $-30x^2 + 50x + 20 = 0 \Rightarrow -3x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot(-3)\cdot 2}}{2\cdot(-3)} = \dfrac{-5 \pm 7}{-6} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-5+7}{-6} = \dfrac{-1}{3} \\ x = \dfrac{-5-7}{-6} = 2 \end{cases}$

5. **En una torre se han usado distintos materiales. En la parte inferior se ha usado el material más pesado, hasta una altura igual a la cuarta parte de la altura de la torre. La parte central, que equivale a las dos terceras partes de lo que queda, se construye con un material menos pesado, y los 10 metros que quedan se construyen con un material muy ligero. ¿Cuánto mide la torre?**

Llamamos x a la altura total de la torre.

$$\frac{x}{4} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{x}{4}\right) + 10 = x \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{4} + 10 = x \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{x}{2} + 10 = x \Rightarrow x + 2x + 40 = 4x \Rightarrow x = 40$$

La torre mide 40 m.

6. **En una carrera han participado 10 atletas. El primero recibe 7 puntos más que el segundo, este recibe 4 puntos más que el tercero, y este recibe 2 puntos más que el cuarto. Todos los demás reciben los mismos puntos que el cuarto clasificado. Si en total se repartieron 71 puntos, ¿cuántos recibió cada atleta?**

Si llamamos x a los puntos que recibe el cuarto atleta, el tercer atleta recibe $x+2$, el segundo, $x+2+4$ y el primero, $x+2+4+7$

$$(x+2+4+7) + (x+2+4) + (x+2) + x\cdot 7 = 71 \Rightarrow 10x + 21 = 71 \Rightarrow 10x = 50 \Rightarrow x = 5$$

El primero recibió $5+2+4+7=18$ puntos, el segundo, $5+2+4=11$ puntos, el tercero, $5+2=7$ puntos y cada uno de los demás recibió 5 puntos.

7. **A un número se le suman 6 unidades, se eleva al cuadrado y se resta el triple del número inicial. El resultado obtenido es 148. ¿Cuál era el número?**

Llamamos x al número.

$$(x+6)^2 - 3x = 148 \Rightarrow x^2 + 12x + 36 - 3x = 148 \Rightarrow x^2 + 9x - 112 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot 1\cdot(-112)}}{2\cdot 1} = \frac{-9 \pm 23}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-9+23}{2} = 7 \\ x = \dfrac{-9-23}{2} = -16 \end{cases}$$

El número era 7 o −16.

7 Sistemas de ecuaciones

1. Indica la ecuación lineal con dos incógnitas que representa cada caso.

a) La resta de dos números es igual a –5.

b) Tengo 11 € en monedas de 1 € y 2 €.

c) Hay 60 alumnos de excursión entre alumnos de 2.º y 3.º de ESO.

a) $x - y = -5$ **b)** $x + 2y = 11$ **c)** $x + y = 60$

2. Completa en tu cuaderno la tabla de soluciones correspondiente a cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $3x + y = 7$

x	**0**	**1**	**2**	**–5**	**•**	**•**
y	**•**	**•**	**•**	**•**	**10**	**–2**

b) $x - 4y = 1$

x	**5**	**9**	**2**	**•**	**0**	**•**
y	**•**	**•**	**•**	**0**	**•**	**3**

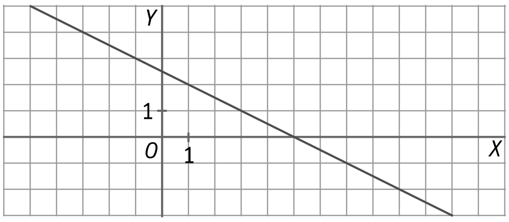
a) $3x + y = 7$

x	**0**	**1**	**2**	**–5**	–1	3
y	7	4	1	22	**10**	**–2**

b) $x - 4y = 1$

x	**5**	**9**	**2**	1	**0**	13
y	1	2	$\frac{1}{4}$	**0**	$-\frac{1}{4}$	**3**

3. Encuentra en la gráfica de $2x + 4y = 10$ tres soluciones con valores de x e y enteros. Comprueba que cumplen la ecuación.



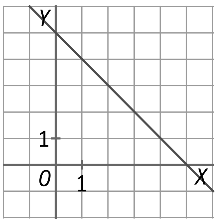
Respuesta modelo:

$(x = 1,\ y = 2) \Rightarrow 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 10$ $(x = 3,\ y = 1) \Rightarrow 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 10$ $(x = 5,\ y = 0) \Rightarrow 2 \cdot 5 + 4 \cdot 0 = 10$

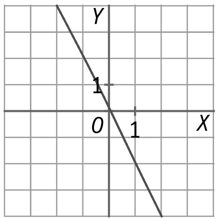
4. **Representa en una gráfica las soluciones de estas ecuaciones.**

a) $x+y=5$ **b)** $2x+y=0$ **c)** $x-2y=1$

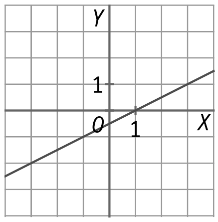
a)



b)



c)



5. **Para una fiesta de carnaval se han comprado botellas de refrescos de 2 L y de 1,5 L. En total hay 29 L. ¿Cuántas botellas de cada tipo hay?**

Si x son las botellas de 2 L e y las de 1,5 L, la ecuación es $2x+1{,}5y=29$.

Como x e y deben ser números naturales, las posibles soluciones son:

x	1	4	7	10	13
y	18	14	10	6	2

6. **Actividad resuelta.**

7. **Indica cuáles de los siguientes sistemas son de ecuaciones lineales.**

a) $\begin{cases} 3x+11y=67 \\ 5x-3y=5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+3\sqrt{y}=14 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -2x+y=\sqrt{9} \\ x-\sqrt{16}y=8 \end{cases}$

a) Sí, es un sistema de ecuaciones lineales, ya que sus dos ecuaciones son de primer grado.

b) No es un sistema de ecuaciones lineales, ya que aparece $\sqrt{y}$ y, por tanto, no es de primer grado.

c) Sí, es un sistema de ecuaciones lineales, ya que sus dos ecuaciones son de primer grado: $\begin{cases} -2x+y=3 \\ x-4y=8 \end{cases}$.

8. **Indica las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes de cada sistema.**

a) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x+9y=10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2}=y \\ x-\dfrac{y}{3}=5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}+\dfrac{4y}{3}=5 \\ x-7y=-10 \end{cases}$

	Incógnitas	Coeficientes	Términos independientes
a)	x, y	2, 3, 4, 9	8, 10
b)	x, y	$\frac{1}{2}, -1, 1, \frac{-1}{3}$	0, 5
c)	x, y	$\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, 1, -7$	5, –10

9. Indica si la pareja de valores es solución o no de cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ 2x+5y=16 \end{cases}$ $(x=3,\ y=2)$

b) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-\frac{2}{3}y=\frac{1}{2} \end{cases}$ $(x=3,\ y=-2)$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-2y=-4 \\ 2x-\frac{y}{3}=1 \end{cases}$ $(x=-4,\ y=-27)$

a) $\begin{cases} 3\cdot 3-2=9-2=7 \\ 2\cdot 3+5\cdot 2=6+10=16 \end{cases} \Rightarrow (x=3,\ y=2)$. Sí es solución.

b) $\begin{cases} 2\cdot 3-2=6-2=4 \\ 3-\frac{2}{3}\cdot(-2)=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}\neq\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (x=3,\ y=-2)$. No es solución.

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}(-4)-2(-27)=-2+54=52\neq-4 \\ 2(-4)-\frac{-27}{3}=-8+9=1 \end{cases} \Rightarrow (x=-4,\ y=-27)$. No es solución.

10. Indica qué sistemas son equivalentes a $\begin{cases} 3x+y=10 \\ x+3y=6 \end{cases}$ con solución $(x=3,\ y=1)$.

A. $\begin{cases} 3x+y=10 \\ 3x+9y=18 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 3x+y=10 \\ 2x+4y=16 \end{cases}$ C. $\begin{cases} \frac{3x}{2}+\frac{y}{2}=5 \\ \frac{x}{2}-\frac{3y}{2}=3 \end{cases}$

Es equivalente la opción A, ya que la segunda ecuación se obtiene al multiplicar por 3 la segunda ecuación original.

La opción B no es equivalente, ya que no se cumple la solución: $(2\cdot 3+4\cdot 1=10\neq 16)$.

La opción C no es equivalente, porque no se cumple la solución: $\left(\frac{3}{2}-\frac{3\cdot 1}{2}=0\neq 3\right)$.

11. Escribe dos sistemas equivalentes a $\begin{cases} 6x-10y=2 \\ 6x+3y=15 \end{cases}$, realizando las operaciones indicadas en cada caso.

a) Cambiando la segunda ecuación por la suma de ambas.

b) Cambiando la primera ecuación por el resultado de multiplicar la primera por 3 y sumarle el doble de la segunda.

a) $\begin{cases} 6x-10y=2 \\ (6x-10y)+(6x+3y)=2+15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-10y=2 \\ 12x-7y=17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3\cdot(6x-10y)+2\cdot(6x+3y)=3\cdot 2+2\cdot 15 \\ 6x+3y=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x-24y=36 \\ 6x+3y=15 \end{cases}$

12. Encuentra dos sistemas equivalentes a cada uno de los siguientes.

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ 12x + 24y = 72 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 9y = 5 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 30x - 10y = 70 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$

Respuesta modelo:

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 5} \begin{cases} 15x - 5y = 35 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases} \xrightarrow{\text{suma de ecuaciones}} \begin{cases} 17x = 51 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 9y = 5 \\ x + 5y = 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{suma de ecuaciones}} \begin{cases} 14y = 14 \\ x + 5y = 9 \end{cases} \xrightarrow{\text{resta de ecuaciones}} \begin{cases} x - 9y = -5 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ 12x + 24y = 72 \end{cases} \xrightarrow{:3} \begin{cases} x - y = 1 \\ 12x + 24y = 72 \end{cases} \xrightarrow{:12} \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 30x - 10y = 70 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases} \xrightarrow{:10} \begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 5y = 16 \end{cases} \xrightarrow{\text{suma de ecuaciones}} \begin{cases} 3x - y = 7 \\ 5x + 4y = 23 \end{cases}$

13. Relaciona cada sistema de la primera columna con su equivalente de la segunda e indica las operaciones realizadas.

A. $\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 2 \end{cases}$

I. $\begin{cases} 2x + 6y = 48 \\ 3x + 7y = 58 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} + 2y = 16 \\ x + y = 10 \end{cases}$

II. $\begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{6} = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

A.–II. $\Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \xrightarrow{:6} \\ x - y = 2 \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{6} = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

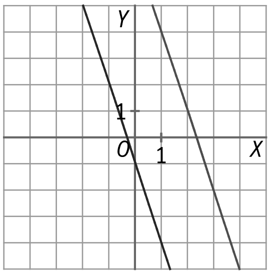
B.–I. $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{3} + 2y = 16 \\ x + y = 10 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 3} \begin{cases} 2x + 6y = 48 \\ x + y = 10 \end{cases} \xrightarrow{\text{suma de ecuaciones}} \begin{cases} 2x + 6y = 48 \\ 3x + 7y = 58 \end{cases}$

14. **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas e indica el número de soluciones que tiene cada uno.**

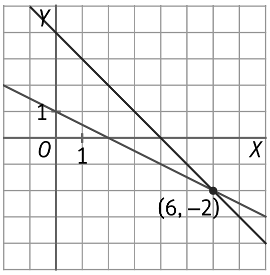
a) $\begin{cases} 3x+y=7 \\ -3x-y=1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+2y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x-3y=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=9 \\ 4x+2y=18 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x-y=1 \\ 3x-3y=-3 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

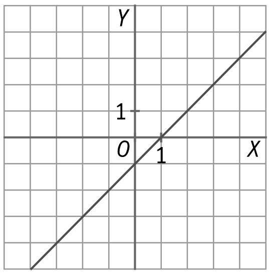
a) Sin solución



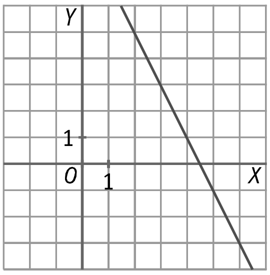
c) Solución única: $(x=6,\ y=-2)$



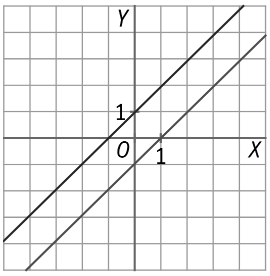
e) Infinitas soluciones



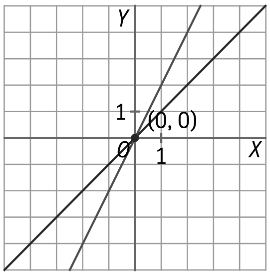
b) Infinitas soluciones



d) Sin solución



f) Solución única: $(x=0,\ y=0)$



15. **Las soluciones de un sistema pueden no ser números enteros. Resuelve los siguientes sistemas gráficamente.**

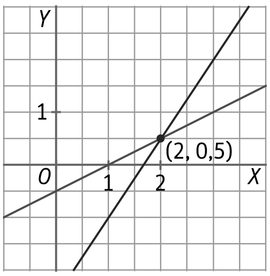
a) **Gradúa ambos ejes de 0,5 en 0,5.**

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ -3x+2y=-5 \end{cases}$$

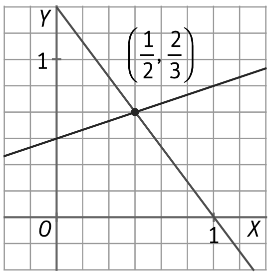
b) **Gradúa cada eje de modo que cada unidad esté dividida en sextos.**

$$\begin{cases} 4x+3y=4 \\ -2x+6y=3 \end{cases}$$

a) Solución: $(x=2,\ y=0{,}5)$



b) Solución: $\left(x=\frac{1}{2},\ y=\frac{2}{3}\right)$



16. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x-3y=9 \\ 4x-3y=18 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x-5y=-10 \\ 6x+y=2 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 9x-2y=20 \\ 5x-6y=16 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x+y=4 \\ 9x-8y=17 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ 5x-7y=-1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x-7y=5 \\ 2x+5y=13 \end{cases}$

a) Solución: $(x=3,\ y=-2)$

$$\begin{cases} x-3y=9 \Rightarrow x=9+3y \Rightarrow x=9+3\cdot(-2)=3 \\ 4x-3y=18 \Rightarrow 4(9+3y)-3y=18 \Rightarrow 36+12y-3y=18 \Rightarrow 9y=-18 \Rightarrow y=-2 \end{cases}$$

b) Solución: $(x=1,\ y=-1)$

$$\begin{cases} 5x+y=4 \Rightarrow y=4-5x \Rightarrow y=4-5=-1 \\ 9x-8y=17 \Rightarrow 9x-8(4-5x)=17 \Rightarrow 9x-32+40x=17 \Rightarrow 49x=49 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

c) Solución: $(x=0,\ y=2)$

$$\begin{cases} 4x-5y=-10 \Rightarrow 4x-5(2-6x)=-10 \Rightarrow 4x-10+30x=-10 \Rightarrow 34x=0 \Rightarrow x=0 \\ 6x+y=2 \Rightarrow y=2-6x \Rightarrow y=2-6\cdot 0=2 \end{cases}$$

d) Solución: $(x=4,\ y=3)$

$$\begin{cases} 2x-3y=-1 \Rightarrow x=\dfrac{3y-1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{3\cdot 3-1}{2}=4 \\ 5x-7y=-1 \Rightarrow 5\dfrac{3y-1}{2}-7y=-1 \Rightarrow \dfrac{15y-5}{2}-\dfrac{14y}{2}=\dfrac{-2}{2} \Rightarrow 15y-5-14y=-2 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

e) Solución: $(x=2,\ y=-1)$

$$\begin{cases} 9x-2y=20 \Rightarrow y=\dfrac{9x-20}{2}=\dfrac{9\cdot 2-20}{2}=-1 \\ 5x-6y=16 \Rightarrow 5x-6\dfrac{9x-20}{2}=16 \Rightarrow 5x-27x+60=16 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

f) Solución: $(x=4,\ y=1)$

$$\begin{cases} 3x-7y=5 \Rightarrow x=\dfrac{7y+5}{3}=\dfrac{7\cdot 1+5}{3}=4 \\ 2x+5y=13 \Rightarrow 2\dfrac{7y+5}{3}+5y=13 \Rightarrow \dfrac{14}{3}y+\dfrac{10}{3}+\dfrac{15}{3}y=\dfrac{39}{3} \Rightarrow 14y+10+15y=39 \Rightarrow 29y=29 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

17. Opera y resuelve cada uno de los sistemas siguientes por el método de sustitución.

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{6y+3}{6}=-2 \\ -9x+2y=11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(1-x)-4(3y-2)=22 \\ -5x+7y=-7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2(6x-4)}{4}+\dfrac{3(y-1)}{6}=0 \\ 3(2x-y)-(6x+3y)=6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -4x+3y=\dfrac{90+7x}{2} \\ 10x-6y=-78-2x \end{cases}$

a) Solución: $\left(x=-\dfrac{11}{7},\ y=-\dfrac{11}{7}\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{2}-\dfrac{6y+3}{6}=-2 \\ -9x+2y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6x-9}{6}-\dfrac{6y+3}{6}=\dfrac{-12}{6} \\ -9x+2y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-6y=0 \\ -9x+2y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-6y=0 \Rightarrow x=y \\ -9x+2y=11 \Rightarrow -7x=11 \Rightarrow x=-\dfrac{11}{7}=y \end{cases}$$

b) Solución: $(x=0,\ y=-1)$

$$\begin{cases} 2(1-x)-4(3y-2)=22 \\ -5x+7y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2x-12y+8=22 \\ -5x+7y=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x-12y=12 \\ -5x+7y=-7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{12y}{2}-\dfrac{12}{2}=-6y-6 \Rightarrow x=-6(-1)-6=0 \\ -5x+7y=-7 \Rightarrow -5(-6y-6)+7y=-7 \Rightarrow 30y+30+7y=-7 \Rightarrow 37y=-37 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

c) Solución: $(x=1,\ y=-1)$

$$\begin{cases} \dfrac{2(6x-4)}{4}+\dfrac{3(y-1)}{6}=0 \\ 3(2x-y)-(6x+3y)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6x-4}{2}+\dfrac{y-1}{2}=0 \\ 6x-3y-6x-3y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x-4+y-1=0 \\ -6y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+y=5 \Rightarrow 6x-1=5 \Rightarrow x=1 \\ -6y=6 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

d) Solución: $(x=-4,\ y=5)$

$$\begin{cases} -4x+3y=\dfrac{90+7x}{2} \\ 10x-6y=-78-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{8x}{2}+\dfrac{6y}{2}=\dfrac{90+7x}{2} \\ 10x-6y=-78-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8x+6y=90+7x \\ 12x-6y=-78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -15x+6y=90 \\ 12x-6y=-78 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -15x+6y=90 \\ 12x-6y=-78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+2y=30 \\ 2x-y=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+2(2x+13)=30 \Rightarrow -5x+4x+26=30 \Rightarrow -x=4 \Rightarrow x=-4 \\ y=2x+13 \Rightarrow y=2(-4)+13=-8+13=5 \end{cases}$$

18. Resuelve los siguientes sistemas por igualación.

a) $\begin{cases} x+2y=6 \\ x-2y=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y=7 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 7x-2y=32 \\ 2x-7y=-23 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 8x-2y=5 \\ 6x-5y=2 \end{cases}$

Comprueba los resultados gráficamente en el caso de los sistemas con solución entera.

a) Solución: $(x=4, y=1)$

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ x-2y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-2y \\ x=2+2y \end{cases} \Rightarrow 6-2y=2+2y \Rightarrow 4y=4 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=2+2\cdot 1=4$$

b) Solución: $(x=3, y=4)$

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 5x-2y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7-y \\ x=\dfrac{7+2y}{5} \end{cases} \Rightarrow 7-y=\frac{7+2y}{5} \Rightarrow 35-5y=7+2y \Rightarrow 7y=28 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x=7-4=3$$

c) Solución: $(x=6, y=5)$

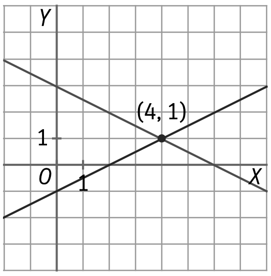
$$\begin{cases} 7x-2y=32 \\ 2x-7y=-23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{32+2y}{7} \\ x=\dfrac{7y-23}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{32+2y}{7}=\frac{7y-23}{2} \Rightarrow 64+4y=49y-161 \Rightarrow 45y=225 \Rightarrow y=5 \Rightarrow x=\frac{32+10}{7}=6$$

d) Solución: $\left(x=\dfrac{3}{4}, y=\dfrac{1}{2}\right)$

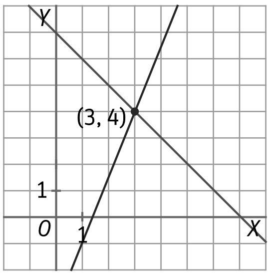
$$\begin{cases} 8x-2y=5 \\ 6x-5y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{8x-5}{2} \\ y=\dfrac{6x-2}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{8x-5}{2}=\frac{6x-2}{5} \Rightarrow 40x-25=12x-4 \Rightarrow 28x=21 \Rightarrow x=\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{8\cdot\frac{3}{4}-5}{2}=\frac{1}{2}$$

Comprobación mediante representación gráfica de los sistemas con solución entera:

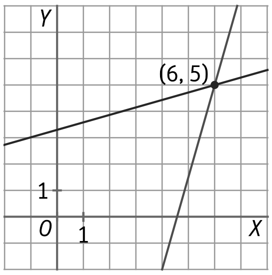
a)



b)



c)



19. Resuelve por igualación los siguientes sistemas de dos formas distintas, primero despejando *x* y luego despejando *y*.

a) $\begin{cases} 7x+2y=3 \\ 5x-2y=9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x-4y=4 \\ 6x-5y=4 \end{cases}$

a) Solución: $(x=1, y=-2)$

$$\begin{cases} 7x+2y=3 \\ 5x-2y=9 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3-2y}{7}=\frac{9+2y}{5} \Rightarrow 15-10y=63+14y \Rightarrow 24y=-48 \Rightarrow y=\frac{-48}{24}=-2 \Rightarrow x=\frac{3-2(-2)}{7}=1$$

$$\begin{cases} 7x+2y=3 \\ 5x-2y=9 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{3-7x}{2}=\frac{5x-9}{2} \Rightarrow 3-7x=5x-9 \Rightarrow 12x=12 \Rightarrow x=1 \rightarrow y=\frac{3-7\cdot 1}{2}=-2$$

b) Solución: $\left(x=\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases} 8x-4y=4 \\ 6x-5y=4 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{4y+4}{8}=\frac{5y+4}{6} \Rightarrow 24y+24=40y+32 \Rightarrow 16y=-8 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)+4}{8}=\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} 8x-4y=4 \\ 6x-5y=4 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{8x-4}{4}=\frac{6x-4}{5} \Rightarrow 40x-20=24x-16 \Rightarrow 16x=4 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\frac{8\cdot\frac{1}{4}-4}{4}=-\frac{1}{2}$$

20. Resuelve el sistema $\begin{cases} 15x+6y=9 \\ -10x-4y=-6 \end{cases}$ por el método de igualación. ¿Qué ocurre?

$$\begin{cases} 15x+6y=9 \\ -10x-4y=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{9-15x}{6} \\ y=\dfrac{9-15x}{6}=\dfrac{6-10x}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{9-15x}{6}=\frac{6-10x}{4} \Rightarrow 36-60x=36-60x \Rightarrow 0=0$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

21. **Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción.**

a) $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -2x+3y=-3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-4y=8 \\ -2x+3y=5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 10x-7y=-4 \\ 15x+11y=37 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 6x-25y=-1 \\ 8x-5y=27 \end{cases}$

a) Solución: $(x=3, y=1)$

$$\begin{cases} 3x-4y=5 \xrightarrow{\cdot 2} \\ -2x+3y=-3 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} 6x-8y=10 \\ -6x+9y=-9 \end{cases} \Rightarrow y=1 \Rightarrow 3x-4\cdot 1=5 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x=3$$

b) Solución: $(x=44, y=31)$

$$\begin{cases} 3x-4y=8 \xrightarrow{\cdot 2} \\ -2x+3y=5 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} 6x-8y=16 \\ -6x+9y=15 \end{cases} \Rightarrow y=31 \Rightarrow 3x-4\cdot 31=8 \Rightarrow 3x=132 \Rightarrow x=44$$

c) Solución: $(x=1, y=2)$

$$\begin{cases} 10x-7y=-4 \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ 15x+11y=37 \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} -30x+21y=12 \\ 30x+22y=74 \end{cases} \Rightarrow 43y=86 \Rightarrow y=2 \Rightarrow 10x-7\cdot 2=-4 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$$

d) Solución: $(x=4, y=1)$

$$\begin{cases} 6x-25y=-1 \\ 8x-5y=27 \xrightarrow{\cdot(-5)} \end{cases} \begin{cases} 6x-25y=-1 \\ -40x+25y=-135 \end{cases} \Rightarrow -34x=-136 \Rightarrow x=4 \Rightarrow 6\cdot 4-25y=-1 \Rightarrow 25y=25 \Rightarrow y=1$$

22. **Actividad resuelta.**

23. **Aplica el método de reducción para resolver cada sistema. Indica si no tienen solución, si tienen infinitas soluciones o si tienen solo una.**

a) $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -6x+8y=10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ -6x+8y=-10 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -8x+12y=24 \\ 6x-9y=18 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 16x-20y=-5 \\ -12x+15y=4 \end{cases}$

a) Sin solución.

$$\begin{cases} 3x-4y=5 \xrightarrow{\cdot 2} \\ -6x+8y=10 \end{cases} \begin{cases} 6x-8y=10 \\ -6x+8y=10 \end{cases} \Rightarrow 0=20$$

b) Infinitas soluciones.

$$\begin{cases} 3x-4y=5 \xrightarrow{\cdot 2} \\ -6x+8y=-10 \end{cases} \begin{cases} 6x-8y=10 \\ -6x+8y=-10 \end{cases} \Rightarrow 0=0$$

c) Sin solución.

$$\begin{cases} -8x+12y=24 \xrightarrow{\cdot 3} \\ 6x-9y=18 \xrightarrow{\cdot 4} \end{cases} \begin{cases} -24x+36y=72 \\ 24x-36y=72 \end{cases} \Rightarrow 0=144$$

d) Sin solución.

$$\begin{cases} 16x-20y=-5 \xrightarrow{\cdot 3} \\ -12x+15y=4 \xrightarrow{\cdot 4} \end{cases} \begin{cases} 48x-60y=-15 \\ -48x+60y=16 \end{cases} \Rightarrow 0=1$$

24. **Resuelve los siguientes sistemas usando el método de reducción doble.**

a) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x+5y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-2y=-3 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 12x-15y=-4 \\ 16x+10y=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x-5y=-1 \\ 3x+7y=-2 \end{cases}$

a) Solución: $\left(x=\frac{8}{19}, y=-\frac{1}{19}\right)$

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ 3x+5y=1 \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} -6x+9y=-3 \\ 6x+10y=2 \end{cases} \Rightarrow 19y=-1 \Rightarrow y=\frac{-1}{19}$$

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \xrightarrow{\cdot 5} \\ 3x+5y=1 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} 10x-15y=5 \\ 9x+15y=3 \end{cases} \Rightarrow 19x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{19}$$

b) Solución: $\left(x=-\frac{1}{2}, y=\frac{3}{4}\right)$

$$\begin{cases} 3x-2y=-3 \xrightarrow{\cdot(-2)} \\ 2x+4y=2 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} -6x+4y=6 \\ 6x+12y=6 \end{cases} \Rightarrow 16y=12 \Rightarrow y=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} 3x-2y=-3 \xrightarrow{\cdot 2} \\ 2x+4y=2 \end{cases} \begin{cases} 6x-4y=-6 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \Rightarrow 8x=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2}$$

c) Solución: $\left(x=\frac{13}{72}, y=\frac{37}{90}\right)$

$$\begin{cases} 12x-15y=-4 \xrightarrow{\cdot(-4)} \\ 16x+10y=7 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} -48x+60y=16 \\ 48x+30y=21 \end{cases} \Rightarrow 90y=37 \Rightarrow y=\frac{37}{90}$$

$$\begin{cases} 12x-15y=-4 \xrightarrow{\cdot 2} \\ 16x+10y=7 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} 24x-30y=-8 \\ 48x+30y=21 \end{cases} \Rightarrow 72x=13 \Rightarrow x=\frac{13}{72}$$

d) Solución: $\left(x=\frac{-17}{22}, y=\frac{1}{22}\right)$

$$\begin{cases} x-5y=-1 \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ 3x+7y=-2 \end{cases} \begin{cases} -3x+15y=3 \\ 3x+7y=-2 \end{cases} \Rightarrow 22y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{22}$$

$$\begin{cases} x-5y=-1 \xrightarrow{\cdot 7} \\ 3x+7y=-2 \xrightarrow{\cdot 5} \end{cases} \begin{cases} 7x-35y=-7 \\ 15x+35y=-10 \end{cases} \Rightarrow 22x=-17 \Rightarrow x=\frac{-17}{22}$$

25. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales eliminando previamente paréntesis y denominadores.

a) $\begin{cases} \frac{x-3}{2}-\frac{y+1}{6}=-2 \\ -9x+2y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5(2x-1)-3(3y+2)=-1 \\ -4x+7y=-4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \frac{2(3x-1)}{3}+\frac{3(4y+1)}{4}=\frac{1}{12} \\ 3(2x-y)-5(x+4y)=6 \end{cases}$

a) Solución: $(x=1, y=5)$

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2}-\frac{y+1}{6}=-2 \\ -9x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-9}{6}-\frac{y+1}{6}=\frac{-12}{6} \\ -9x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=-2 \\ -9x+2y=1 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 6x-2y=-4 \\ -9x+2y=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x=-3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 3\cdot 1-y=-2 \Rightarrow y=5$$

b) Solución: $(x=1, y=0)$

$$\begin{cases} 5(2x-1)-3(3y+2)=-1 \\ -4x+7y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x-5-9y-6=-1 \\ -4x+7y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x-9y=10 \xrightarrow{\cdot 2} \\ -4x+7y=-4 \xrightarrow{\cdot 5} \end{cases} \begin{cases} 20x-18y=20 \\ -20x+35y=-20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17y=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1$$

c) Solución: $\left(x=\frac{18}{49}, y=-\frac{12}{49}\right)$

$$\begin{cases} \frac{2(3x-1)}{3}+\frac{3(4y+1)}{4}=\frac{1}{12} \\ 3(2x-y)-5(x+4y)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{24x-8}{12}+\frac{36y+9}{12}=\frac{1}{12} \\ 6x-3y-5x-20y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24x+36y=0 \\ x-23y=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 24x+36y=0 \xrightarrow{:12} \\ x-23y=6 \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{cases} \begin{cases} 2x+3y=0 \\ -2x+46y=-12 \end{cases} \Rightarrow 49y=-12 \Rightarrow y=\frac{-12}{49} \Rightarrow 2x+3\cdot\left(\frac{-12}{49}\right)=0 \Rightarrow x=\frac{18}{49}$$

26. La suma de dos números es 14. Añadiendo 1 al mayor se obtiene el doble del menor. ¿Cuáles son los dos números?

Llamamos x al número mayor e y al menor.

$$\begin{cases} x+y=14 \\ x+1=2y \end{cases} \Rightarrow x=14-y=2y-1 \Rightarrow 15=3y \Rightarrow y=5 \Rightarrow x=14-5=9$$

Comprobamos que $9+5=14$ y que $9+1=10=2\cdot 5$.

Los números son 9 y 5.

27. Hace dos años, la edad de Ana era la quinta parte de la edad de su padre. Dentro de siete años, sus edades sumarán 66 años. Calcula sus edades actuales.

Llamamos x a la edad de Ana e y a la de su padre.

$$\begin{cases} x-2=\frac{y-2}{5} \\ (x+7)+(y+7)=66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-10=y-2 \\ x+y=52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-y=8 \\ x+y=52 \end{cases} \Rightarrow 6x=60 \Rightarrow x=10 \Rightarrow 10+y=52 \Rightarrow y=42$$

Ana tiene 10 años, y su padre, 42. Hace dos años, Ana tenía $10-2=8$, y su padre, $40=5\cdot 8$. Dentro de siete años tendrán $10+7=17$ y $42+7=49$, que suman $17+49=66$.

28. Tengo monedas en dos huchas. En total tengo 24 monedas. Si paso 5 monedas de una hucha a otra, tendré las mismas en ambas huchas. ¿Cuántas monedas hay en cada hucha?

Llamamos *x* a la cantidad de monedas de la hucha que tiene más e *y* a la cantidad de monedas de la otra hucha.

$$\begin{cases} x+y=24 \\ x-5=y+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=24 \\ x-y=10 \end{cases} \Rightarrow 2x=34 \Rightarrow x=17 \Rightarrow 17+y=24 \Rightarrow y=7$$

En una hucha hay 17 monedas, y en la otra hay 7. Si se pasan 5 de la primera a la segunda, habrá $17-5=7+5=12$ monedas en cada hucha.

29. En una churrería venden churros y porras. Miguel ha comprado 15 churros y 12 porras para sus compañeros, por los que ha pagado en total 6,60 €. Después ha recordado que hoy venían algunos invitados, y ha comprado 5 churros y 7 porras más, que le han costado 3,10 €. Calcula el precio de un churro y el de una porra.

Llamamos *x* al precio de un churro e *y* al de una porra.

$$\begin{cases} 15x+12y=6{,}6 \xrightarrow{:(-3)} \\ 5x+7y=3{,}1 \end{cases} \begin{cases} -5x-4y=-2{,}2 \\ 5x+7y=3{,}1 \end{cases} \Rightarrow 3y=0{,}9 \Rightarrow y=0{,}3 \Rightarrow 5x+7\cdot 0{,}3=3{,}1 \Rightarrow x=0{,}2$$

Cada churro cuesta 0,20 €, y cada porra, 0,30 €. Lo comprobamos: $\begin{cases} 15\cdot 0{,}2+12\cdot 0{,}3=3+3{,}6=6{,}6 \\ 5\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}3=1+2{,}1=3{,}1 \end{cases}$

30. Un vendedor mezcla dos variedades de café. El kilo de la primera variedad cuesta 3,60 €, y el kilo de la segunda cuesta la mitad. Quiere preparar en total 20 kg de mezcla y que le salga a 2,43 €/kg. ¿Qué cantidad debe poner de cada variedad?

Llamamos *x* a la cantidad de café de 3,60 €/kg e *y* a la cantidad de café de 2,43 €/kg.

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 3{,}6x+1{,}8y=20\cdot 2{,}43 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=20 \xrightarrow{\cdot(-1{,}8)} \\ 3{,}6x+1{,}8y=48{,}6 \end{cases} \begin{cases} -1{,}8x-1{,}8y=-36 \\ 3{,}6x+1{,}8y=48{,}6 \end{cases} \Rightarrow 1{,}8x=12{,}6 \Rightarrow x=7 \Rightarrow 7+y=20 \Rightarrow y=13$$

Pondrá 7 kg de café de 3,60 €/kg y 13 kg de café de 2,43 €/kg. Le costarán $3{,}6\cdot 7+1{,}8\cdot 13=25{,}2+23{,}4=48{,}60$ €.

31. Para elaborar un chocolate se mezcla cacao al 90 % de pureza con otro más suave, al 50 %. Se quiere conseguir un kilo de chocolate que tenga una pureza del 75 %. ¿Qué cantidad hay que poner de cada variedad?

Llamamos *x* a la cantidad de cacao al 90 % e *y* a la cantidad de cacao al 50 %.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 0{,}9x+0{,}5y=0{,}75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ 0{,}9x+0{,}5(1-x)=0{,}75 \Rightarrow 0{,}9x+0{,}5-0{,}5x=0{,}75 \Rightarrow 0{,}4x=0{,}25 \Rightarrow x=0{,}625 \Rightarrow y=1-0{,}625=0{,}375 \end{cases}$$

Se necesitan 625 g de cacao al 90 % y 375 g de cacao al 50 %.

32. Los habitantes del planeta *X* tienen seis ojos, tres en cada cabeza. Los habitantes del planeta *Y* solo tienen cuatro ojos y una cabeza. En una convención entre habitantes de ambos planetas pudimos contar 34 cabezas y 114 ojos. ¿Cuántos habitantes había de cada planeta?

Llamamos *x* al número de habitantes del planeta *X* e *y* al número de habitantes del planeta *Y*.

$$\begin{cases} 2x+y=34 \xrightarrow{\cdot(-2)} \\ 6x+4y=114 \xrightarrow{:2} \end{cases} \begin{cases} -4x-2y=-68 \\ 3x+2y=57 \end{cases} \Rightarrow -x=-11 \Rightarrow x=11 \Rightarrow 2\cdot 11+y=34 \Rightarrow y=12$$

Hay 11 habitantes del planeta *X* y 12 del planeta *Y*.

Suman $11\cdot 2+12=34$ cabezas y $11\cdot 6+12\cdot 4=66+48=114$ ojos.

33. Halla el valor de la incógnita que falta en las siguientes ecuaciones.

a) $3x + y = 7$, si $x = 4$

b) $x - 8y = 3$, si $x = 5$

c) $6x - 7y = 13$, si $x = 1$

d) $4x + 7y = 5$, si $x = \frac{-2}{3}$

a) $3 \cdot 4 + y = 7 \Rightarrow 12 + y = 7 \Rightarrow y = -5$

b) $5 - 8y = 3 \Rightarrow -8y = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$

c) $6 \cdot 1 - 7y = 13 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = -1$

d) $4 \cdot \frac{-2}{3} + 7y = 5 \Rightarrow -8 + 21y = 15 \Rightarrow 21y = 23 \Rightarrow y = \frac{23}{21}$

34. Completa en tu cuaderno la tabla correspondiente a cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $3x + 2y = 5$

x	1	–1	3	2	•	•
y	•	•	•	•	4	2

b) $2x - 3y = -2$

x	1	•	2	5	•	•
y	•	0	•	•	2	–2

c) $\frac{x}{2} + y = 6$

x	•	0	2	8	•	20
y	8	•	•	•	0	•

a) $3x + 2y = 5$

x	1	–1	3	2	–1	$\frac{1}{3}$
y	1	4	–2	$-\frac{1}{2}$	4	2

b) $2x - 3y = -2$

x	1	–1	2	5	2	–4
y	$\frac{4}{3}$	0	2	4	2	–2

c) $\frac{x}{2} + y = 6$

x	–4	0	2	8	12	20
y	8	6	5	2	0	–4

35. Construye la tabla de valores correspondiente a cada ecuación.

a) $-3x+y=6$ **c)** $2x+2y=8$ **e)** $x-\frac{1}{2}y=4$

b) $5x-y=0$ **d)** $x+2y=1$ **f)** $5x-4y=9$

a) $-3x+y=6$

x	–2	–1	0	1	2
y	0	3	6	9	12

d) $x+2y=1$

x	–2	–1	0	1	2
y	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

b) $5x-y=0$

x	–2	–1	0	1	2
y	–10	–5	0	5	10

e) $x-\frac{1}{2}y=4$

x	–2	–1	0	1	2
y	–12	–10	–8	–6	–4

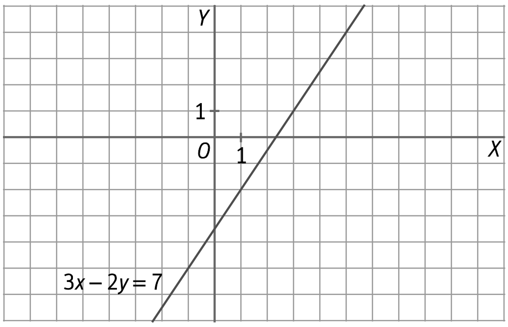
c) $2x+2y=8$

x	–2	–1	0	1	2
y	6	5	4	3	2

f) $5x-4y=9$

x	–2	–1	0	1	2
y	$-\frac{19}{4}$	$-\frac{14}{4}$	$-\frac{9}{4}$	–1	$\frac{1}{4}$

36. A partir de la gráfica de $3x-2y=7$, encuentra tres soluciones con valores de *x* e *y* enteros. Comprueba que cumplen la ecuación.



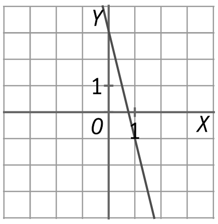
Respuesta modelo: $(-1,-5)$, $(1,-2)$ y $(3,\ 1)$.

$3\cdot(-1)-2\cdot(-5)=-3+10=7$ $3\cdot 1-2\cdot(-2)=3+4=7$ $3\cdot 3-2\cdot 1=9-2=7$

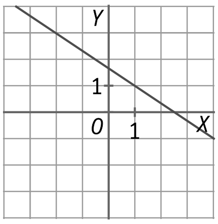
37. **Representa gráficamente las soluciones de las siguientes ecuaciones.**

a) $4x + y = 3$ **b)** $3x - y = -3$ **c)** $2x + 3y = 5$ **d)** $5x - 4y = 9$

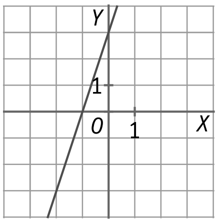
a) $4x + y = 3$



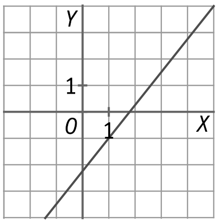
c) $2x + 3y = 5$



b) $3x - y = -3$



d) $5x - 4y = 9$



38. **Indica cuáles de los siguientes sistemas son de ecuaciones lineales.**

a) $\begin{cases} 2xy + 5y = 14 \\ x - 4xy = 25 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y - 9x = 11 \\ 7y + 3x = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 8 = 14 \\ 2x - 5y = -8 \end{cases}$

a) No es un sistema de ecuaciones lineales, ya que ninguna de las ecuaciones es de primer grado al aparecer el producto de las dos incógnitas.

b) Sí, es un sistema de ecuaciones lineales, ya que sus dos ecuaciones son de primer grado.

c) Sí, es un sistema de ecuaciones lineales, ya que sus dos ecuaciones son de primer grado.

39. **Indica las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes de los sistemas de ecuaciones.**

a) $\begin{cases} -5x + 3y = -11 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + \dfrac{6}{7}y = 13 \\ \dfrac{x}{3} - y = -9 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \dfrac{y}{4} = 3 \\ 3x = 6 - \dfrac{y}{3} \end{cases}$

	Incógnitas	Coeficientes	Términos independientes
a)	x, y	–5, 3, 4, –3	–11, 10
b)	x, y	$2, \frac{6}{7}, \frac{1}{3}, -1$	13, –9
c)	x, y	$0, \frac{1}{4}, 3, \frac{1}{3}$	3, 6

40. **Comprueba si los siguientes pares de valores son solución del sistema de ecuaciones** $\begin{cases} 2x - 8y = 4 \\ -4x + y = 7 \end{cases}$.

a) $(x = 4,\ y = 0)$ **b)** $(x = 2,\ y = 0)$ **c)** $(x = -2,\ y = -1)$ **d)** $(x = 6,\ y = 1)$

a) $\begin{cases} 2\cdot 4 - 8\cdot 0 = 8 \neq 4 \\ -4\cdot 4 + 0 = -16 \neq 7 \end{cases}$ $(x = 4,\ y = 0)$ No es solución.

b) $\begin{cases} 2\cdot 2 - 8\cdot 0 = 4 \\ -4\cdot 2 + 0 = -8 \neq 7 \end{cases}$ $(x = 2,\ y = 0)$ No es solución.

c) $\begin{cases} 2(-2) - 8(-1) = -4 + 8 = 4 \\ -4(-2) + (-1) = 8 - 1 = 7 \end{cases}$ $(x = -2,\ y = -1)$ Sí es solución.

d) $\begin{cases} 2\cdot 6 - 8\cdot 1 = 12 - 8 = 4 \\ -4\cdot 6 + 1 = -24 + 1 = -23 \neq 7 \end{cases}$ $(x = 6,\ y = 1)$ No es solución

41. **Actividad resuelta.**

42. **Copia y completa en tu cuaderno los siguientes sistemas, de forma que la solución sea** $(x = 3,\ y = -2)$.

a) $\begin{cases} 5x - 2y = \bullet \\ 4x + y = \bullet \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + \bullet y = -5 \\ \bullet x - 3y = 27 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5\cdot 3 - 2(-2) = 15 + 4 = 19 \\ 4\cdot 3 + (-2) = 12 - 2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 2y = 19 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3 + \bullet(-2) = -5 \Rightarrow \bullet = \dfrac{-5-3}{-2} = \dfrac{-8}{-2} = 4 \\ \bullet\cdot 3 - 3(-2) = 27 \Rightarrow \bullet = \dfrac{27-6}{3} = \dfrac{21}{3} = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = -5 \\ 7x - 3y = 27 \end{cases}$

43. **Encuentra un sistema de ecuaciones lineales equivalente a cada uno de los siguientes.**

a) $\begin{cases} 12x + 16y = 20 \\ -3x - 6y = -9 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -10x + 15y = -25 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \\ 4(x - 1) - 2y = 7 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 12x + 16y = 20 \xrightarrow{:4} \\ -3x - 6y = -9 \xrightarrow{:(-3)} \end{cases} \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -10x + 15y = -25 \xrightarrow{:(-5)} \\ x = 2y - 1 \end{cases} \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x = 2y - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -2x + y = -2 \xrightarrow{\text{suma de ecuaciones}} \end{cases} \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \xrightarrow{\cdot 6} \\ 4(x - 1) - 2y = 7 \end{cases} \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 4(x - 1) - 2y = 7 \end{cases}$

44. **Indica qué operaciones se han realizado en cada sistema de ecuaciones para obtener el equivalente.**

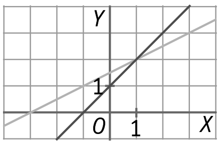
a) $\begin{cases} 12x - 36y = 12 \\ 3x - 7y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 6x - 14y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 8x - 5y = 5 \\ 9x + 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8x}{5} - y = 1 \\ 17x - y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 12x - 36y = 12 \xrightarrow{:12} \\ 3x - 7y = 5 \xrightarrow{\cdot 2} \end{cases} \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 6x - 14y = 10 \end{cases}$

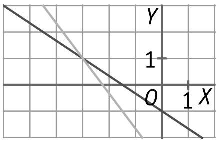
b) $\begin{cases} 8x - 5y = 5 \xrightarrow{:5} \\ 9x + 4y = -4 \xrightarrow{\text{suma de ecuaciones}} \end{cases} \begin{cases} \dfrac{8x}{5} - y = 1 \\ 17x - y = 1 \end{cases}$

45. **Escribe la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones.**

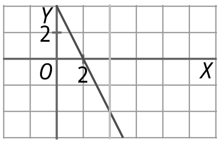
a)



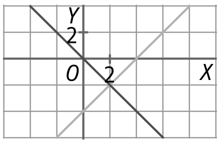
b)



c)



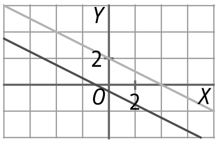
d)



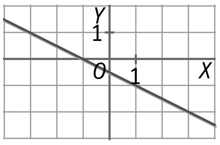
a) $(x = 1,\ y = 2)$ **b)** $(x = -3,\ y = 1)$ **c)** $(x = 4,\ y = -4)$ **d)** $(x = 2,\ y = -2)$

46. **Indica de qué tipo son los siguientes sistemas de ecuaciones.**

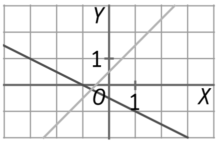
a)



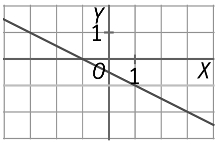
b)



c)



d)

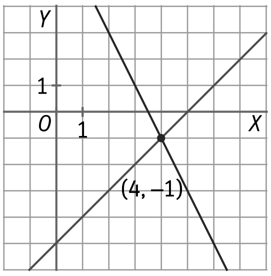


a) Sin solución **b)** Infinitas soluciones **c)** Solución única **d)** Solución única

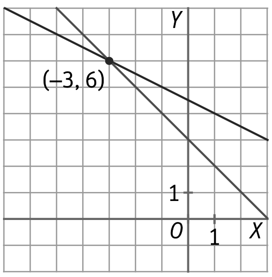
47. **Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.**

a) $\begin{cases} \mathbf{2x + y = 7} \\ \mathbf{x - y = 5} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \mathbf{x + y = 3} \\ \mathbf{x + 2y = 9} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \mathbf{x + 2y = 3} \\ \mathbf{x - y = -3} \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \mathbf{2x - 3y = 0} \\ \mathbf{x - y = 1} \end{cases}$

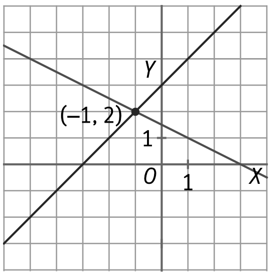
a) Solución: $(x = 4,\ y = -1)$



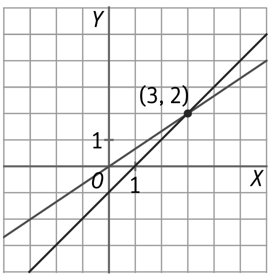
b) Solución: $(x = -3,\ y = 6)$



c) Solución: $(x = -1,\ y = 2)$



d) Solución: $(x = 3,\ y = 2)$



48. **Actividad resuelta.**

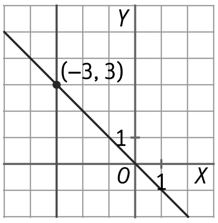
49. **Encuentra la solución de los siguientes sistemas y compruébala gráficamente.**

a) $\begin{cases} x = -3 \\ x + y = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x = 6 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 4 \\ -3x + y = -2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x = -4 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

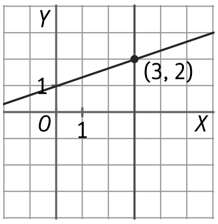
a) Solución: $(x = -3,\ y = 3)$

$\begin{cases} x = -3 \\ x + y = 0 \Rightarrow -3 + y = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$



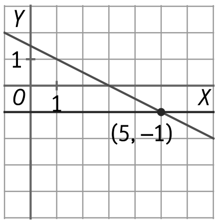
c) Solución: $(x = 3,\ y = 2)$

$\begin{cases} 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ -3 + 3y = 3 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$



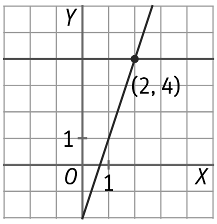
e) Solución: $(x = 5,\ y = -1)$

$\begin{cases} x + 2(-1) = 3 \Rightarrow x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$



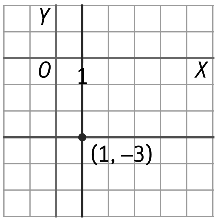
b) Solución: $(x = 2,\ y = 4)$

$\begin{cases} y = 4 \\ -3x + 4 = -2 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$



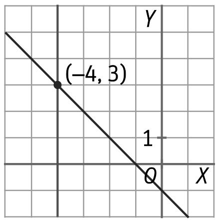
d) Solución: $(x = 1,\ y = -3)$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$

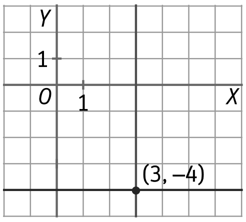


f) Solución: $(x = -4,\ y = 3)$

$\begin{cases} x = -4 \\ -(-4) - y = 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$



50. **Resuelve gráficamente el sistema** $\begin{cases} 2x = 6 \\ 3y = -12 \end{cases}$**. ¿Cómo son las rectas que aparecen?**



Las rectas son paralelas a los ejes de coordenadas.

51. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de sustitución.

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y = 19 \\ 2x + 7y = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ -3x + 6y = -15 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x - 6y = 0 \\ 10x - 21y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 2x - 8y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -10x + 3y = -2 \\ 4x - y = 8 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 12x - 36y = 24 \\ 3x - 7y = 6 \end{cases}$

a) Solución: $(x = \frac{3}{2}, y = \frac{-5}{2})$

$$\begin{cases} x - y = 4 \Rightarrow x - 4 = y \\ 3x - y = 7 \Rightarrow 3x - (x-4) = 7 \Rightarrow 3x - x + 4 = 7 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} - 4 = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

b) Sin solución

$$\begin{cases} x - 4y = 5 \Rightarrow x = 5 + 4y \\ 2x - 8y = 6 \Rightarrow 2(5+4y) - 8y = 6 \Rightarrow 10 + 8y - 8y = 6 \Rightarrow 10 = 6 \end{cases}$$

c) Solución: $(x = 6,\ y = -1)$

$$\begin{cases} 3x - y = 19 \Rightarrow y = 3x - 19 \\ 2x + 7y = 5 \Rightarrow 2x + 7(3x - 19) = 5 \Rightarrow 2x + 21x - 133 = 5 \Rightarrow 23x = 138 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 3 \cdot 6 - 19 = -1 \end{cases}$$

d) Solución: $(x = 11,\ y = 36)$

$$\begin{cases} -10x + 3y = -2 \Rightarrow -10x + 3(4x - 8) = -2 \Rightarrow -10x + 12x - 24 = -2 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11 \Rightarrow y = 4 \cdot 11 - 8 = 36 \\ 4x - y = 8 \Rightarrow y = 4x - 8 \end{cases}$$

e) Infinitas soluciones

$$\begin{cases} 2x - 4y = 10 \Rightarrow x = \dfrac{10 + 4y}{2} = 5 + 2y \\ -3x + 6y = -15 \Rightarrow -3(5 + 2y) + 6y = -15 \Rightarrow -15 - 6y + 6y = -15 \Rightarrow -15 = -15 \end{cases}$$

f) Solución: $(x = 1,\ y = -2)$

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \Rightarrow y = \dfrac{4x - 8}{2} = 2x - 4 \\ 5x + 3y = -1 \Rightarrow 5x + 3(2x - 4) = -1 \Rightarrow 5x + 6x - 12 = -1 \Rightarrow 11x = 11 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \end{cases}$$

g) Solución: $(x = 0,\ y = 0)$

$$\begin{cases} x - 6y = 0 \Rightarrow x = 6y \\ 10x - 21y = 0 \Rightarrow 10 \cdot 6y - 21y = 0 \Rightarrow 60y - 21y = 0 \Rightarrow 39y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 6 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

h) Solución: $(x = 2,\ y = 0)$

$$\begin{cases} 12x - 36y = 24 \Rightarrow x = \dfrac{24 + 36y}{12} \Rightarrow x = 2 + 3y \\ 3x - 7y = 6 \Rightarrow 3(2 + 3y) - 7y = 6 \Rightarrow 6 + 9y - 7y = 6 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2 + 3 \cdot 0 = 2 \end{cases}$$

52. **Resuelve por el método de sustitución los sistemas siguientes.**

a) $\begin{cases} 6x - 5y = 7 \\ -3x + 2y = 6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ -2x + 2y = 5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 4x - 3y = 9 \\ -2x + 6y = 6 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 20x - 13y = 1 \\ -4x + 3y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} -8x + 5y = -2 \\ 6x - 7y = 8 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x - 4y = 7 \\ -3x + 5y = 6 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 12x - 18y = 30 \\ 27x + 9y = 18 \end{cases}$

Comprueba gráficamente las soluciones de los sistemas con valores de *x* e *y* enteros.

a) Solución: $\left(x = \frac{-44}{3}, y = -19\right)$

$$\begin{cases} 6x - 5y = 7 \Rightarrow 6x - 5 \cdot \frac{6+3x}{2} = 7 \Rightarrow 12x - 30 - 15x = 14 \Rightarrow x = \frac{-44}{3} \Rightarrow y = \frac{6 + 3 \cdot \frac{-44}{3}}{2} = -19 \\ -3x + 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{6+3x}{2} \end{cases}$$

b) Solución: $(x = -3, y = -5)$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \Rightarrow 3x - 2(2x+1) = 1 \Rightarrow 3x - 4x - 2 = 1 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 2 \cdot (-3) + 1 = -5 \\ -4x + 2y = 2 \Rightarrow y = 2x + 1 \end{cases}$$

c) Solución: $\left(x = \frac{-23}{4}, y = \frac{-13}{4}\right)$

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \Rightarrow 3x - 5 \cdot \frac{5+2x}{2} = -1 \Rightarrow 6x - 25 - 10x = -2 \Rightarrow x = \frac{-23}{4} \Rightarrow y = \frac{5 + 2 \cdot \frac{-23}{4}}{2} = \frac{-13}{4} \\ -2x + 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5+2x}{2} \end{cases}$$

d) Solución: $(x = -1, y = -2)$

$$\begin{cases} -8x + 5y = -2 \Rightarrow y = \frac{8x-2}{5} \\ 6x - 7y = 8 \Rightarrow 6x - 7 \cdot \frac{8x-2}{5} = 8 \Rightarrow 30x - 56x + 14 = 40 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = \frac{8 \cdot (-1) - 2}{5} = -2 \end{cases}$$

e) Solución: $\left(x = 4, y = \frac{7}{3}\right)$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 9 \Rightarrow 4 \cdot (3y - 3) - 3y = 9 \Rightarrow 12y - 12 - 3y = 9 \Rightarrow y = \frac{7}{3} \Rightarrow x = 3 \cdot \frac{7}{3} - 3 = 4 \\ -2x + 6y = 6 \Rightarrow x = 3y - 3 \end{cases}$$

f) Solución: $\left(x = \frac{-59}{2}, y = \frac{-33}{2}\right)$

$$\begin{cases} 2x - 4y = 7 \Rightarrow x = \frac{4y+7}{2} \\ -3x + 5y = 6 \Rightarrow -3 \cdot \frac{4y+7}{2} + 5y = 6 \Rightarrow -12y - 21 + 10y = 12 \Rightarrow y = \frac{-33}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot \frac{-33}{2} + 7}{2} = \frac{-59}{2} \end{cases}$$

g) Solución: $\left(x = \frac{81}{8}, y = \frac{31}{2}\right)$

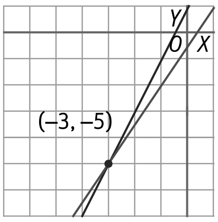
$$\begin{cases} 20x - 13y = 1 \Rightarrow 20x - 13 \cdot \frac{4x+6}{3} = 1 \Rightarrow 60x - 52x - 78 = 3 \Rightarrow x = \frac{81}{8} \Rightarrow y = \frac{4 \cdot \frac{81}{8} + 6}{3} = \frac{31}{2} \\ -4x + 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{4x+6}{3} \end{cases}$$

h) Solución: $(x=1, y=-1)$

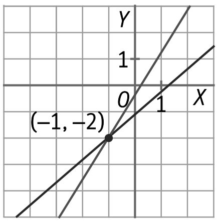
$$\begin{cases} 12x-18y=30 \\ 27x+9y=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x-18y=30 \Rightarrow 12x-18(2-3x)=30 \Rightarrow 12x-36+54x=30 \Rightarrow 66x=66 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=2-3\cdot 1=-1 \\ y=\dfrac{18-27x}{9}=2-3x \end{cases}$$

Comprobación mediante representación gráfica de los sistemas con solución entera:

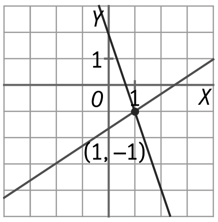
b)



d)



h)



53. **Utiliza el método de sustitución para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

I) $\begin{cases} 2x-4y=8 \\ -3x+6y=5 \end{cases}$ **II)** $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$

a) **¿Qué solución tiene cada sistema?**

b) **Comprueba los resultados resolviéndolos de manera gráfica.**

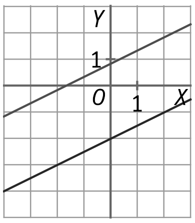
a) I) Sin solución

$$\begin{cases} 2x-4y=8 \Rightarrow x=2y+4 \\ -3x+6y=5 \Rightarrow -3\cdot(2y+4)+6y=5 \Rightarrow -12=5 \end{cases}$$

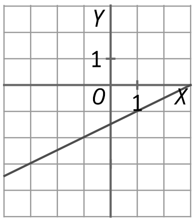
II) Infinitas soluciones

$$\begin{cases} x-2y=3 \Rightarrow x=2y+3 \\ 2x-4y=6 \Rightarrow 2\cdot(2y+3)-4y=6 \Rightarrow 6=6 \end{cases}$$

b) **I)**



II)



54. Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de igualación.

a) $\begin{cases} x+y=4 \\ -2x+y=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 6x-y=7 \\ 4x+y=3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x+5y=12 \\ 4x-3y=-2 \end{cases}$ g) $\begin{cases} -6x-15y=9 \\ 2x+5y=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-7y=9 \\ x-6y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x+5y=4 \\ x-7y=-2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 5x+3y=27 \end{cases}$ h) $\begin{cases} -6x-15y=7 \\ 4x+10y=6 \end{cases}$

a) Solución: $(x=1, y=3)$

$$\begin{cases} x+y=4 \\ -2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4-x \\ y=1+2x \end{cases} \Rightarrow 4-x=1+2x \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=4-1=3$$

b) Solución: $(x=-47, y=-8)$

$$\begin{cases} x-7y=9 \\ x-6y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=9+7y \\ x=1+6y \end{cases} \Rightarrow 9+7y=1+6y \Rightarrow y=-8 \Rightarrow x=9+7\cdot(-8)=-47$$

c) Solución: $(x=1, y=-1)$

$$\begin{cases} 6x-y=7 \\ 4x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=6x-7 \\ y=3-4x \end{cases} \Rightarrow 6x-7=3-4x \Rightarrow 10x=10 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=6\cdot 1-7=-1$$

d) Solución: $(x=-9, y=-1)$

$$\begin{cases} -x+5y=4 \\ x-7y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5y-4 \\ x=7y-2 \end{cases} \Rightarrow 5y-4=7y-2 \Rightarrow -2=2y \Rightarrow y=-1 \Rightarrow x=5(-1)-4=-9$$

e) Solución: $(x=1, y=2)$

$$\begin{cases} 2x+5y=12 \\ 4x-3y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{12-5y}{2} \\ x=\dfrac{3y-2}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{12-5y}{2}=\frac{3y-2}{4} \Rightarrow \frac{24-10y}{4}=\frac{3y-2}{4} \Rightarrow 26=13y \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=\frac{12-5\cdot 2}{2}=1$$

f) Solución: $(x=3, y=4)$

$$\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 5x+3y=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4x}{3} \\ y=\dfrac{27-5x}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{4x}{3}=\frac{27-5x}{3} \Rightarrow 9x=27 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=\frac{4\cdot 3}{3}=4$$

g) Infinitas soluciones

$$\begin{cases} -6x-15y=9 \\ 2x+5y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-15y-9}{6} \\ x=\dfrac{-5y-3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{-15y-9}{6}=\frac{-5y-3}{2} \Rightarrow \frac{-15y-9}{6}=\frac{-15y-9}{6}$$

h) Sin solución

$$\begin{cases} -6x-15y=7 \\ 4x+10y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-7-15y}{6} \\ x=\dfrac{6-10y}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{-7-15y}{6}=\frac{6-10y}{4} \Rightarrow -14-30y=18-30y \Rightarrow 0=32$$

55. Utiliza el método de igualación para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x-4y=3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x+5y=3 \\ 6x+11y=-6 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -3x+6y=-2 \\ 4x-7y=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x-5y=2 \\ 5x-6y=-4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 6x+4y=7 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 8x+15y=10 \\ 6x+12y=11 \end{cases}$

Comprueba gráficamente las soluciones de los sistemas con valores de *x* e *y* enteros.

a) Solución: $(x=5, y=3)$

$$\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 3x-4y=3 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3y+1}{2}=\frac{4y+3}{3} \Rightarrow 9y+3=8y+6 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=\frac{3\cdot 3+1}{2}=5$$

b) Solución: $(x=-32, y=-26)$

$$\begin{cases} 4x-5y=2 \\ 5x-6y=-4 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5y+2}{4}=\frac{6y-4}{5} \Rightarrow 25y+10=24y-16 \Rightarrow y=-26 \Rightarrow x=\frac{5\cdot(-26)+2}{4}=-32$$

c) Solución: $(x=21, y=-12)$

$$\begin{cases} 3x+5y=3 \\ 6x+11y=-6 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{3-5y}{3}=\frac{-11y-6}{6} \Rightarrow 6-10y=-11y-6 \Rightarrow y=-12 \Rightarrow x=\frac{3-5\cdot(-12)}{3}=21$$

d) Solución: $\left(x=\frac{-17}{2}, y=\frac{29}{2}\right)$

$$\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 6x+4y=7 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1-3y}{5}=\frac{7-4y}{6} \Rightarrow 6-18y=35-20y \Rightarrow y=\frac{29}{2} \Rightarrow x=\frac{1-3\cdot\frac{29}{2}}{5}=\frac{-17}{2}$$

e) Solución: $\left(x=\frac{-20}{3}, y=\frac{-11}{3}\right)$

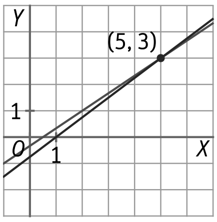
$$\begin{cases} -3x+6y=-2 \\ 4x-7y=-1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{6y+2}{3}=\frac{7y-1}{4} \Rightarrow 24y+8=21y-3 \Rightarrow y=\frac{-11}{3} \Rightarrow x=\frac{6\cdot\frac{-11}{3}+2}{3}=\frac{-20}{3}$$

f) Solución: $\left(x=\frac{-15}{2}, y=\frac{14}{3}\right)$

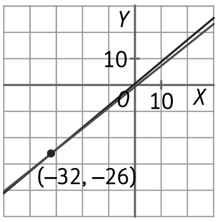
$$\begin{cases} 8x+15y=10 \\ 6x+12y=11 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{10-15y}{8}=\frac{11-12y}{6} \Rightarrow 60-90y=88-96y \Rightarrow y=\frac{14}{3} \Rightarrow x=\frac{10-15\cdot\frac{14}{3}}{8}=\frac{-15}{2}$$

Comprobación mediante representación gráfica de los sistemas con solución entera:

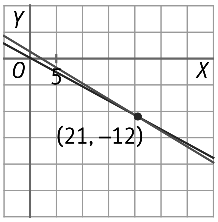
a)



b)



c)



56. **Resuelve los siguientes sistemas utilizando el método de reducción.**

a) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x - 5y = 3 \\ 4x + 10y = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x - 3y = 8 \\ 5x + 8y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x - 7y = 5 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -6x - 15y = 9 \\ 4x + 10y = -6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 7x - 9y = 0 \\ 11x + 12y = 0 \end{cases}$

a) Solución: $\left(x = \frac{3}{2}, y = \frac{-5}{2}\right)$

$$\begin{cases} x - y = 4 \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ 3x - y = 7 \end{cases} \begin{cases} -x + y = -4 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} - y = 4 \Rightarrow y = \frac{-5}{2}$$

b) Solución: $(x = 3, y = 1)$

$$\begin{cases} 4x - 7y = 5 \xrightarrow{\cdot(-1)} \\ 4x - 6y = 6 \end{cases} \begin{cases} -4x + 7y = -5 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow 4x - 6 \cdot 1 = 6 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$$

c) Sin solución

$$\begin{cases} -2x - 5y = 3 \xrightarrow{\cdot 2} \\ 4x + 10y = 6 \end{cases} \begin{cases} -4x - 10y = 6 \\ 4x + 10y = 6 \end{cases} \Rightarrow 0 = 12$$

d) Infinitas soluciones

$$\begin{cases} -6x - 15y = 9 \xrightarrow{\cdot 2} \\ 4x + 10y = -6 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} -12x - 30y = 18 \\ 12x + 30y = -18 \end{cases} \Rightarrow 0 = 0$$

e) Solución: $(x = 2, y = 0)$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 8 \xrightarrow{\cdot 8} \\ 5x + 8y = 10 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} 32x - 24y = 64 \\ 15x + 24y = 30 \end{cases} \Rightarrow 47x = 94 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 4 \cdot 2 - 3y = 8 \Rightarrow -3y = 0 \Rightarrow y = 0$$

f) Solución: $(x = 0, y = 0)$

$$\begin{cases} 7x - 9y = 0 \xrightarrow{\cdot 4} \\ 11x + 12y = 0 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} 28x - 36y = 0 \\ 33x + 36y = 0 \end{cases} \Rightarrow 61x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 7 \cdot 0 - 9y = 0 \Rightarrow y = 0$$

57. **Resuelve los siguientes sistemas usando el método de reducción doble.**

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ 8x - 11y = 17 \end{cases}$ e) $\begin{cases} -3x + 6y = 2 \\ 4x + 7y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 7x - 5y = 2 \\ 5x - 3y = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ 6x + 4y = 7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x + 6y = 1 \\ 4x + 9y = 2 \end{cases}$

Comprueba gráficamente las soluciones de los sistemas con valores de *x* e *y* enteros.

a) Solución: $\left(x = 3, y = \frac{7}{2}\right)$

$$\begin{cases} 5x - 4y = 1 \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ 3x - 2y = 2 \xrightarrow{\cdot 5} \end{cases} \begin{cases} -15x + 12y = -3 \\ 15x - 10y = 10 \end{cases} \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} 5x - 4y = 1 \\ 3x - 2y = 2 \xrightarrow{\cdot(-2)} \end{cases} \begin{cases} 5x - 4y = 1 \\ -6x + 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow -x = -3 \Rightarrow x = 3$$

b) Solución: $\left(x = \frac{9}{4}, y = \frac{11}{4}\right)$

$$\begin{cases} 7x - 5y = 2 \xrightarrow{\cdot(-5)} \\ 5x - 3y = 3 \xrightarrow{\cdot 7} \end{cases} \begin{cases} -35x + 25y = -10 \\ 35x - 21y = 21 \end{cases} \Rightarrow 4y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{4}$$

$$\begin{cases} 7x - 5y = 2 \xrightarrow{\cdot 3} \\ 5x - 3y = 3 \xrightarrow{\cdot(-5)} \end{cases} \begin{cases} 21x - 15y = 6 \\ -25x + 15y = -15 \end{cases} \Rightarrow -4x = -9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

c) Solución: $\left(x=\frac{5}{3}, y=\frac{-1}{3}\right)$

$$\begin{cases}3x+3y=4 \xrightarrow{\cdot 8} \\ 8x-11y=17 \xrightarrow{\cdot(-3)}\end{cases}\begin{cases}24x+24y=32 \\ -24x+33y=-51\end{cases} \Rightarrow 57y=-19 \Rightarrow y=\frac{-1}{3}$$

$$\begin{cases}3x+3y=4 \xrightarrow{\cdot 11} \\ 8x-11y=17 \xrightarrow{\cdot 3}\end{cases}\begin{cases}33x+33y=44 \\ 24x-33y=51\end{cases} \Rightarrow 57x=95 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$$

d) Solución: $\left(x=-\frac{59}{10}, y=\frac{53}{5}\right)$

$$\begin{cases}2x+3y=20 \xrightarrow{\cdot 3} \\ 6x+4y=7 \xrightarrow{\cdot(-1)}\end{cases}\begin{cases}6x+9y=60 \\ -6x-4y=-7\end{cases} \Rightarrow 5y=53 \Rightarrow y=\frac{53}{5}$$

$$\begin{cases}2x+3y=20 \xrightarrow{\cdot 4} \\ 6x+4y=7 \xrightarrow{\cdot(-3)}\end{cases}\begin{cases}8x+12y=80 \\ -18x-12y=-21\end{cases} \Rightarrow -10x=59 \Rightarrow x=\frac{-59}{10}$$

e) Solución: $\left(x=-\frac{4}{9}, y=\frac{1}{9}\right)$

$$\begin{cases}-3x+6y=2 \xrightarrow{\cdot 4} \\ 4x+7y=-1 \xrightarrow{\cdot 3}\end{cases}\begin{cases}-12x+24y=8 \\ 12x+21y=-3\end{cases} \Rightarrow 45y=5 \Rightarrow y=\frac{1}{9}$$

$$\begin{cases}-3x+6y=2 \xrightarrow{\cdot(-7)} \\ 4x+7y=-1 \xrightarrow{\cdot 6}\end{cases}\begin{cases}21x-42y=-14 \\ 24x+42y=-6\end{cases} \Rightarrow 45x=-20 \Rightarrow x=\frac{-4}{9}$$

f) Solución: $\left(x=-1, y=\frac{2}{3}\right)$

$$\begin{cases}3x+6y=1 \xrightarrow{\cdot(-4)} \\ 4x+9y=2 \xrightarrow{\cdot 3}\end{cases}\begin{cases}-12x-24y=-4 \\ 12x+27y=6\end{cases} \Rightarrow 3y=2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases}3x+6y=1 \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ 4x+9y=2 \xrightarrow{\cdot 2}\end{cases}\begin{cases}-9x-18y=-3 \\ 8x+18y=4\end{cases} \Rightarrow x=-1$$

58. Al resolver un sistema gráficamente se han obtenido las siguientes tablas de valores. ¿Cuál es la solución?

$y=3x-7$	**x**	**−1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
	y	**−10**	**−7**	**−4**	**−1**	**2**	**5**
$y=-2x+8$	**x**	**−1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
	y	**10**	**8**	**6**	**4**	**2**	**0**

La solución es $(x=3,\ y=2)$.

59. **Escribe un sistema de ecuaciones cuya única solución sea $(x=4,\ y=-7)$.**

Respuesta modelo: $\begin{cases} x+y=-3 \\ x-y=11 \end{cases}$

60. **Escribe un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones y que se verifique para $(x=-10,\ y=19)$.**

Respuesta modelo: $\begin{cases} x+y=9 \\ 2x+2y=18 \end{cases}$

61. **Escribe una ecuación que junto con $3x-y=9$ forme un sistema que:**

a) **Tenga una sola solución.**

b) **Tenga infinitas soluciones.**

c) **No tenga solución.**

Respuesta modelo:

a) $x+y=9$

Solución: $(x=0, y=9)$

$$\begin{cases} x+y=9 \\ 3x-y=9 \end{cases} \Rightarrow 4x=18 \Rightarrow x=\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}+y=9 \Rightarrow y=\frac{9}{2}$$

b) $6x-2y=18$

$$\begin{cases} 6x-2y=18 \\ 3x-y=9 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 6x-2y=18 \\ -6x+2y=-18 \end{cases} \Rightarrow 0=0$$

c) $3x-y=0$

$$\begin{cases} 3x-y=0 \\ 3x-y=9 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{cases} -3x+y=0 \\ 3x-y=9 \end{cases} \Rightarrow 0=9$$

62. **Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución, igualación y reducción.**

a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 6y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} -3x + 7y = 13 \\ 6x + 4y = -8 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 5x - 7y = -1 \end{cases}$

a) Solución: $(x = 2, y = 1)$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ y + 1 + 6y = 8 \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x = 8 - 6y \end{cases} \Rightarrow y + 1 = 8 - 6y \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1 + 1 = 2$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 6y = 8 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{cases} -x + y = -1 \\ x + 6y = 8 \end{cases} \Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$$

b) Solución: $\left(x = \frac{-13}{4}, y = -3\right)$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5y + 2}{4} \\ 4 \cdot \frac{5y + 2}{4} - 6y = 5 \Rightarrow 5y + 2 - 6y = 5 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot (-3) + 2}{4} = \frac{-13}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5y + 2}{4} \\ x = \frac{5 + 6y}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{5y + 2}{4} = \frac{5 + 6y}{4} \Rightarrow 5y + 2 = 5 + 6y \Rightarrow y = -3 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot (-3) + 2}{4} = \frac{-13}{4}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{cases} 4x - 5y = 2 \\ -4x + 6y = -5 \end{cases} \Rightarrow y = -3 \Rightarrow 4x - 5(-3) = 2 \Rightarrow 4x = -13 \Rightarrow x = \frac{-13}{4}$$

c) Solución: $(x = -2, y = 1)$

$$\begin{cases} -3x + 7y = 13 \\ 6x + 4y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7y - 13}{3} \\ 6 \cdot \frac{7y - 13}{3} + 4y = -8 \Rightarrow 14y - 26 + 4y = -8 \Rightarrow 18y = 18 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 1 - 13}{3} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x + 7y = 13 \\ 6x + 4y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7y - 13}{3} \\ x = \frac{-4y - 8}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{7y - 13}{3} = \frac{-4y - 8}{6} \Rightarrow 14y - 26 = -4y - 8 \Rightarrow 18y = 18 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 1 - 13}{3} = -2$$

$$\begin{cases} -3x + 7y = 13 \\ 6x + 4y = -8 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} -6x + 14y = 26 \\ 6x + 4y = -8 \end{cases} \Rightarrow 18y = 18 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow -3x + 7 \cdot 1 = 13 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2$$

d) Solución: $\left(x = \frac{-34}{37}, y = \frac{-19}{37}\right)$

$$\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 5x - 7y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6y - 4 \\ 5(-6y - 4) - 7y = -1 \Rightarrow -30y - 20 - 7y = -1 \Rightarrow -37y = 19 \Rightarrow y = \frac{-19}{37} \Rightarrow x = -6 \cdot \frac{-19}{37} - 4 = \frac{-34}{37} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 5x - 7y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6y - 4 \\ x = \frac{7y - 1}{5} \end{cases} \Rightarrow -6y - 4 = \frac{7y - 1}{5} \Rightarrow -30y - 20 = 7y - 1 \Rightarrow -37y = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-19}{37} \Rightarrow x = -6 \cdot \frac{-19}{37} - 4 = \frac{-34}{37}$$

$$\begin{cases} x + 6y = -4 \\ 5x - 7y = -1 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-5)} \begin{cases} -5x - 30y = 20 \\ 5x - 7y = -1 \end{cases} \Rightarrow -37y = 19 \Rightarrow y = \frac{-19}{37} \Rightarrow x + 6\frac{-19}{37} = -4 \Rightarrow x = \frac{-34}{37}$$

63. Simplifica y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método que creas que es más adecuado.

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-5}{3}-\dfrac{3y-4}{3}=\dfrac{-1}{3} \\ y=x+5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-15=3(y+2) \\ 7(x-4)=-1-5y \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4(2x-y)-7(2y+x)=-36 \\ -2(x+2)-7y=-18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(5x-2)-7(2y+3)=2 \\ 2(3x-y)-23=3(4-9x) \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{3x-7}{4}-\dfrac{2y+1}{6}=0 \\ \dfrac{x+2}{5}-\dfrac{5y+4}{3}=-2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{5(x-3)}{4}-\dfrac{3(2y+1)}{10}=\dfrac{6-7(x+y+1)}{8} \\ 6x-5(2y-7)=21 \end{cases}$

a) Solución: $(x=-15, y=-10)$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5}{3}-\dfrac{3y-4}{3}=\dfrac{-1}{3} \Rightarrow 2x-5-(3y-4)=-1 \Rightarrow 2x-3y=0 \\ y=x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=0 \\ y=x+5 \end{cases}$$

Por sustitución:

$$\begin{cases} 2x-3y=0 \Rightarrow 2x-3(x+5)=0 \Rightarrow 2x-3x-15=0 \Rightarrow x=-15 \Rightarrow y=-15+5=-10 \\ y=x+5 \end{cases}$$

b) Solución: $(x=6, y=-3)$

$$\begin{cases} 2x-15=3(y+2) \\ 7(x-4)=-1-5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-15=3y+6 \\ 7x-28=-1-5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=21 \\ 7x+5y=27 \end{cases}$$

Por reducción:

$$\begin{cases} 2x-3y=21 \xrightarrow{\cdot 5} \\ 7x+5y=27 \xrightarrow{\cdot 3} \end{cases} \begin{cases} 10x-15y=105 \\ 21x+15y=81 \end{cases} \Rightarrow 31x=186 \Rightarrow x=6 \Rightarrow 2\cdot 6-3y=21 \Rightarrow y=-3$$

c) Solución: $(x=0, y=2)$

$$\begin{cases} 4(2x-y)-7(2y+x)=-36 \\ -2(x+2)-7y=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-4y-14y-7x=-36 \\ -2x-4-7y=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-18y=-36 \\ -2x-7y=-14 \end{cases}$$

Por reducción:

$$\begin{cases} x-18y=-36 \xrightarrow{\cdot 2} \\ -2x-7y=-14 \end{cases} \begin{cases} 2x-36y=-72 \\ -2x-7y=-14 \end{cases} \Rightarrow -43y=-86 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x-18\cdot 2=-36 \Rightarrow x=0$$

d) Solución: $(x=1, y=-1)$

$$\begin{cases} 3(5x-2)-7(2y+3)=2 \\ 2(3x-y)-23=3(4-9x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x-6-14y-21=2 \\ 6x-2y-23=12-27x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x-14y=29 \\ 33x-2y=35 \end{cases}$$

Por reducción:

$$\begin{cases} 15x-14y=29 \\ 33x-2y=35 \xrightarrow{\cdot(-7)} \end{cases} \begin{cases} 15x-14y=29 \\ -231x+14y=-245 \end{cases} \Rightarrow -216x=-216 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 33\cdot 1-2y=35 \Rightarrow y=-1$$

e) Solución: $(x=3, y=1)$

$$\begin{cases}\dfrac{3x-7}{4}-\dfrac{2y+1}{6}=0\\ \dfrac{x+2}{5}-\dfrac{5y+4}{3}=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{9x-21}{12}-\dfrac{4y+2}{12}=0\\ \dfrac{3x+6}{15}-\dfrac{25y+20}{15}=\dfrac{-30}{15}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x-4y=23\\ 3x-25y=-16\end{cases}$$

Por igualación:

$$\begin{cases}x=\dfrac{23+4y}{9}\\ x=\dfrac{25y-16}{3}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{23+4y}{9}=\dfrac{25y-16}{3}\Rightarrow 23+4y=75y-48\Rightarrow y=1\Rightarrow x=\dfrac{23+4\cdot 1}{9}=3$$

f) Solución: $\left(x=\dfrac{354}{229}, y=\dfrac{533}{229}\right)$

$$\begin{cases}\dfrac{5(x-3)}{4}-\dfrac{3(2y+1)}{10}=\dfrac{6-7(x+y+1)}{8}\\ 6x-5(2y-7)=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5x-15}{4}-\dfrac{6y+3}{10}=\dfrac{6-7x-7y-7}{8}\\ 6x-10y+35=21\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{50x-150}{40}-\dfrac{24y+12}{40}=\dfrac{30-35x-35y-35}{40}\\ 6x-10y=-14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}85x+11y=157\\ 3x-5y=-7\end{cases}$$

Por reducción:

$$\begin{cases}85x+11y=157\xrightarrow{\cdot 5}\\ 3x-5y=-7\xrightarrow{\cdot 11}\end{cases}\begin{cases}425x+55y=785\\ 33x-55y=-77\end{cases}\Rightarrow 458x=708\Rightarrow x=\dfrac{354}{229}\Rightarrow 3\dfrac{354}{229}-5y=-7\Rightarrow y=\dfrac{533}{229}$$

64. Dos números suman 102 y el primero es 36 unidades menor que el segundo. Calcula ambos números.

Llamamos x e y a los dos números.

$$\begin{cases}x+y=102\\ x=y-36\end{cases}\Rightarrow(y-36)+y=102\Rightarrow 2y-36=102\Rightarrow 2y=138\Rightarrow y=69\Rightarrow x=69-36=33$$

Los números son 33 y 69.

65. Dos números suman 51. Si a la tercera parte del primero le restamos la sexta parte del segundo, el resultado obtenido es 1. Halla los dos números.

Llamamos x e y a los dos números.

$$\begin{cases}x+y=51\\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=51\\ \dfrac{2x}{6}-\dfrac{y}{6}=\dfrac{6}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=51\\ 2x-y=6\end{cases}\Rightarrow 3x=57\Rightarrow x=19\Rightarrow 19+y=51\Rightarrow y=32$$

Los números son 19 y 32.

66. La suma de dos números es 385. Si a la tercera parte del número mayor le sumamos el triple del número menor, el resultado es 131. ¿De qué números se trata?

Llamamos x al número mayor e y al número menor.

$$\begin{cases}x+y=385\\ \dfrac{x}{3}+3y=131\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=385\\ x+9y=393\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=385-y\\ x=393-9y\end{cases}\Rightarrow 385-y=393-9y\Rightarrow 8y=8\Rightarrow y=1\Rightarrow x=385-1=384$$

Los números son 384 y 1.

67. **El cajero de un supermercado cuenta los billetes que hay en la caja al final del día.**

Cuando termina de contar los billetes de 20 y de 50 €, tiene un total de 55 billetes que suman 1430 €. ¿Cuántos billetes de cada tipo hay en la caja?

Llamamos x a los billetes de 20 € e y a los de 50 €.

$$\begin{cases} x+y=55 \\ 20x+50y=1430 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=55-y \\ 20x+50y=1430 \end{cases} \Rightarrow 20(55-y)+50y=1430 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1100-20y+50y=1430 \Rightarrow 30y=330 \Rightarrow y=11 \Rightarrow x=55-11=44$$

Tiene 44 billetes de 20 € y 11 de 50 €.

68. **Teniendo en cuenta que una garrafa de aceite equivale a cinco botellas y que tres garrafas y siete botellas de aceite suman 11 L, ¿qué capacidad tiene cada garrafa y botella de aceite?**

Llamamos x a la capacidad de la garrafa e y a la de la botella.

$$\begin{cases} x=5y \\ 3x+7y=11 \end{cases} \Rightarrow 3\cdot 5y+7y=11 \Rightarrow 15y+7y=11 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=5\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

La garrafa tiene una capacidad de $\frac{5}{2}=2{,}5$ L, y la botella, de $\frac{1}{2}=0{,}5$ L.

69. **Paloma ha vendido 50 docenas de huevos en el mercado en un día. Por la mañana los ha vendido a 3 € la docena. Por la tarde, como los huevos ya no están tan frescos, los ha vendido a 2 € la docena. En total ha obtenido 138 €. ¿Cuántas docenas ha vendido por la mañana?**

Llamamos x al número de docenas que vendió por la mañana e y a las que vendió por la tarde.

$$\begin{cases} x+y=50 \\ 3x+2y=138 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=50-x \\ 3x+2y=138 \end{cases} \Rightarrow 3x+2(50-x)=138 \Rightarrow 3x+100-2x=138 \Rightarrow x=38 \Rightarrow y=50-38=12$$

Vendió 38 docenas por la mañana y 12 por la tarde.

70. **En la juguetería hay una exposición de bicicletas y triciclos. En total hay 45 vehículos, que suman 107 ruedas. ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos hay?**

Llamamos x al número de bicicletas e y al número de triciclos.

$$\begin{cases} x+y=45 \\ 2x+3y=107 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} -2x-2y=-90 \\ 2x+3y=107 \end{cases} \Rightarrow y=17 \Rightarrow x+17=45 \Rightarrow x=28$$

Hay 28 bicicletas y 17 triciclos.

71. **Por la mezcla de 8 L y 3 L de vino de distinta calidad se han pagado 30 €. Calcula el precio de cada tipo de vino sabiendo que comprando un litro de cada uno hay que pagar 5 €.**

Llamamos x al precio del litro del primer vino e y al precio del segundo.

$$\begin{cases} 8x+3y=30 \\ x+y=5 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-3)} \begin{cases} 8x+3y=30 \\ -3x-3y=-15 \end{cases} \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3 \Rightarrow 3+y=5 \Rightarrow y=2$$

El precio del litro del primer vino es de 3 €, y el del segundo, de 2 €.

72. **El dueño de una cafetería ha comprado leche a 0,75 €/L. Preparar un litro de café cuesta 1,75 €.**

a) **¿Cuántos litros de café y cuántos litros de leche deberá mezclar para que 20 L de café con leche le cuesten 23 €?**

b) **¿A cuánto le sale el litro de café con leche?**

a) Llamamos x a los litros de café e y a los litros de leche.

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 1{,}75x+0{,}75y=23 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 4} \begin{cases} x+y=20 \\ 7x+3y=92 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=20-x \\ 7x+3y=92 \end{cases} \Rightarrow 7x+3(20-x)=92 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x+60-3x=92 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=20-8=12$$

Mezclará 8 L de café y 12 L de leche.

b) El litro de café con leche sale a $\dfrac{23}{8+12}=\dfrac{23}{20}=1{,}15$ €.

73. **Problema resuelto.**

74. **Hace cuatro años, las edades de un padre y su hija sumaban 46 años. Dentro de tres años sumarán 60 años.**

a) **Plantea un sistema usando esos datos. ¿Hay suficientes datos para resolver el problema?**

b) **Resuelve el problema, sabiendo además que el padre tiene 36 años más que la hija.**

a)

	Hace 4 años	Ahora	Dentro de 3 años
Edad del padre	$x-4$	x	$x+3$
Edad de la hija	$y-4$	y	$y+3$

$$\begin{cases} x-4+y-4=46 \\ x+3+y+3=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=54 \\ x+y=54 \end{cases}$$

Se obtienen dos ecuaciones equivalentes a $x+y=54$; por tanto, faltan datos para resolver el problema.

b) $\begin{cases} x+y=54 \Rightarrow y+36+y=54 \Rightarrow 2y=18 \Rightarrow y=9 \Rightarrow x=9+36=45 \\ x=y+36 \end{cases}$

El padre tiene 45 años, y la hija, 9.

75. **En un concurso canino, el número de perros hembra supera en 25 al de machos. Son descalificados 10 machos y 10 hembras, y queda exactamente el doble de hembras que de machos. ¿Cuántos perros de cada sexo había al comenzar el concurso?**

Llamamos x al número de hembras e y al de machos.

$$\begin{cases} x=y+25 \\ x-10=2(y-10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+25 \\ x-10=2y-20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y+25 \\ x=2y-10 \end{cases} \Rightarrow y+25=2y-10 \Rightarrow y=35 \Rightarrow x=35+25=60$$

Había 60 hembras y 35 machos.

76. **En una balanza, el peso de uno de los platillos es igual a dos tercios del peso del otro, pero si pasamos 70 gramos de uno a otro, la balanza queda en equilibrio. ¿Cuánto peso había inicialmente en cada platillo?**

Llamamos x al peso del primer platillo e y al del segundo.

$$\begin{cases} x=\dfrac{2y}{3} \\ x+70=y-70 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ x-y=-140 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-2)} \begin{cases} 3x-2y=0 \\ -2x+2y=280 \end{cases} \Rightarrow x=280 \Rightarrow 280=\dfrac{2y}{3} \Rightarrow y=420$$

Había 280 gramos en el primer platillo y 420 gramos en el segundo.

77. Problema resuelto.

78. Un número de cuatro cifras es capicúa, es decir, se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Al intercambiar las dos últimas cifras, el número aumenta 45 unidades. Calcula el número, sabiendo que sus cuatro cifras suman 14.

El número será de la forma *xyyx*, es decir, $1000x+100y+10y+x$.

$$\begin{cases}(1000x+100y+10y+x)+45=(1000x+100y+10x+y)\\2x+2y=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9x-9y=45\\2x+2y=14\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}9x-9y=45\xrightarrow{:9}\\2x+2y=14\xrightarrow{:2}\end{cases}\begin{cases}x-y=5\\x+y=7\end{cases}\Rightarrow 2x=12\Rightarrow x=6\Rightarrow 6-y=5\Rightarrow y=1$$

El número es 6116.

79. Problema resuelto.

80. Por una camisa y una falda hay que pagar 92 €. La falda tiene una rebaja del 10 %, y la camisa, del 25 %, y el precio final se queda en 79,80 €. Calcula el precio inicial de la camisa y de la falda.

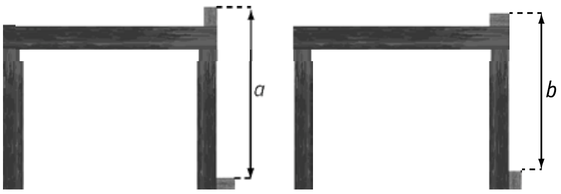
Llamamos *x* al precio de la camisa e *y* al de la falda.

$$\begin{cases}x+y=92\\0{,}75x+0{,}9y=79{,}8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=92-y\\0{,}75x+0{,}9y=79{,}8\end{cases}\Rightarrow 0{,}75(92-y)+0{,}9y=79{,}8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 69-0{,}75y+0{,}9y=79{,}8\Rightarrow 0{,}15y=10{,}8\Rightarrow y=72\Rightarrow x=92-72=20$$

La camisa costaba 20 €, y la falda, 72 €.

81. Utilizando una mesa colocamos dos bloques idénticos de madera como se muestra en la figura. Las longitudes *a* y *b* son, respectivamente, 64 y 56 cm.



¿Cuál es la altura de la mesa?

A. 25 **B. 24** **C. 23** **D. 60**

Llamamos *x* a la longitud del lado corto del bloque, *y* a la longitud del lado largo, y *h* a la altura de la mesa,

$$\begin{cases}h+y-x=64\\h+x-y=56\end{cases}\xrightarrow{\text{Suma de ecuaciones}}2h=120\Rightarrow h=60\,\text{cm}$$

La respuesta correcta es D. 60.

82. Si sabemos que $\frac{b}{a}=2$ y $\frac{c}{b}=3$, ¿cuál es el cociente de $a+b$ entre $b+c$?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{3}{8}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{2}{3}$

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=2\Rightarrow b=2a\\c=3b=6a\end{cases}\Rightarrow\frac{a+b}{b+c}=\frac{a+2a}{2a+6a}=\frac{3a}{8a}=\frac{3}{8}$$

La respuesta es B. $\frac{3}{8}$.

83. **¿Para qué valores de *m* resulta que el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = mx + 3 \\ y = (2m-1)x + 4 \end{cases}$ tiene solución?**

A. **Para todo *m***   **B.** **Para todo $m \neq \frac{1}{2}$**   **C.** **Para todo $m \neq 0$**   **D.** **Para todo $m \neq 1$**

$$\begin{cases} y = mx + 3 \\ y = (2m-1)x + 4 \end{cases} \Rightarrow mx + 3 = (2m-1)x + 4 \Rightarrow mx + 3 = 2mx - x + 4 \Rightarrow -1 = mx - x \Rightarrow -1 = (m-1)x$$

Para poder despejar *x*: $x \Rightarrow m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$.

La respuesta es D. Para todo $m \neq 1$.

Encuentra el error

84. **Dos amigos que pasean por el zoo mantienen la siguiente conversación.**

— **Mira, ahí hay unas grullas, y detrás de ellas hay unas cuantas cebras.**

— **¿Cuántas?**

— **Así, a simple vista, yo diría que hay 37 cabezas y 87 patas.**

— **Si todos los animales están sanos, creo que tienes que ir al oculista…**

¿Quién lleva razón?

Si todos los animales tienen un número par de patas, no es posible que la suma de las patas sea impar. El amigo que contó las patas cometió un error.

85. **Carmen ha resuelto un sistema de ecuaciones por el método de reducción.**

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{5(4y-6)}{10} = 4 \\ -2x + 5y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - \dfrac{\cancel{5}(4y-6)}{\cancel{5} \cdot 2} = 4 \\ -2x + 5y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - (2y-3) = 4 \\ -2x + 5y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 3 = 4 \\ -2x + 5y = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ -2x + 5y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 3y = 6 \Rightarrow y = 2$$

¿Es correcta su solución?

Comete un error en la última suma. $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ -2x + 5y = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{Sumando}} 3y = 8 \Rightarrow y = \dfrac{8}{3}$.

Además, no ha calculado *x*, por lo que su solución está incompleta.

$$2x - 2 \cdot \frac{8}{3} = 1 \Rightarrow 2x = 1 + \frac{16}{3} \Rightarrow 2x = \frac{19}{3} \Rightarrow x = \frac{19}{6}$$

PONTE A PRUEBA

Juegos de cartas

Actividad resuelta

Las cuentas de Clara

Clara ha ido al supermercado a comprar bebidas. Se ha llevado 18 latas de refresco de naranja y 7 latas de refresco de limón.

Más tarde, se ha dado cuenta de que no tenía suficientes bebidas, y ha vuelto a comprar 15 latas de naranja y 14 latas de limón.

Cuando ha llegado a casa, su padre le ha preguntado el precio de cada lata, pero Clara no lo recordaba. Por suerte, ha apuntado lo que ha gastado cada vez:

La primera compra le costó 10,14 €.

Por la segunda compra pagó 11,88 €.

1. **Su padre le dice que puede resolver este problema sin usar ecuaciones. ¿Qué pasos seguirías?**
2. **¿Es posible que las dos bebidas cuesten lo mismo?**
3. **Clara le dice que lo que ha hecho es resolver un sistema de ecuaciones. ¿Qué sistema es y qué método ha utilizado?**

1. Como 18 latas de naranja y 7 latas de limón cuestan 10,14 €, $18 \cdot 2 = 36$ latas de naranja y $14 \cdot 2 = 28$ latas de limón cuestan el doble, es decir, $10{,}14 \cdot 2 = 20{,}28$ €.

   Como en la segunda compra se lleva 14 latas de limón, si restamos resulta que $36 - 15 = 21$ latas de naranja cuestan $20{,}28 - 11{,}88 = 8{,}40$ €. Por tanto, una lata de naranja cuesta $8{,}40 : 21 = 0{,}40$ €.

   Como 18 latas de naranja y 7 de limón cuestan 10,14 euros, las 7 latas de limón cuestan $10{,}14 - 18 \cdot 0{,}4 = 2{,}94$ €; por tanto, cada lata de limón cuesta $2{,}94 : 7 = 0{,}42$ €.

2. No es posible, ya que por $18 + 7 = 25$ latas pagó 10,14 €, y por $15 + 14 = 29$ pagó 11,88 €, y $\dfrac{10{,}14}{25} \neq \dfrac{11{,}88}{29}$.

3. Si llamamos x al número de latas de naranja e y al número de latas de limón,

$$\begin{cases} 18x + 7y = 10{,}14 \xrightarrow{\cdot 2} \\ 15x + 14y = 11{,}88 \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{cases} \begin{cases} 36x + 14y = 20{,}28 \\ -15x - 14y = -11{,}88 \end{cases} \Rightarrow 21x = 8{,}4 \Rightarrow x = 0{,}4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 \cdot 0{,}4 + 7y = 10{,}14 \Rightarrow 7{,}2 + 7y = 10{,}14 \Rightarrow 7y = 2{,}94 \Rightarrow y = 0{,}42$$

Ha usado el método de reducción.

En el laboratorio

En un laboratorio están realizando dos tipos de experimentos, mezclando diferentes líquidos con porcentajes de alcohol distintos.

- **Experimento A**

  El líquido de la primera probeta contiene un 32 % de alcohol, y el de la segunda, un 65 %.

  Quieren mezclarlos de manera que en la tercera probeta se consiga que haya una mezcla de 390 mL con el 51 % de alcohol.

  ¿Cuántos litros del líquido de la segunda probeta son necesarios?

- **Experimento B**

  El líquido de la primera probeta contiene un 49 % de alcohol, y el de la segunda, un 80 %.

  Quieren mezclarlos de manera que en la tercera probeta se consiga que haya una mezcla de 600 mL con el 61 % de alcohol.

  ¿Cuántos litros del líquido de la primera probeta son necesarios?

- **Experimento A**

  Llamamos *x* a los litros de líquido de la primera probeta e *y* a los litros de líquido de la segunda.

  $$\begin{cases} x+y=0,39 \\ 0,32x+0,65y=0,51\cdot 0,39 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y=0,39 \\ 0,32x+0,65y=0,1989 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-0,32)} \begin{cases} -0,32x-0,32y=-0,1248 \\ 0,32x+0,65y=0,1989 \end{cases} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow 0,33y=0,0741 \Rightarrow y=0,22\widehat{45}$$

  Necesita 0,225 litros de líquido de la segunda probeta.

- **Experimento B**

  Llamamos x a los litros de líquido de la primera probeta e y a los litros de líquido de la segunda.

  $$\begin{cases} x+y=0,6 \\ 0,49x+0,8y=0,6\cdot 0,61 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0,6 \\ 0,49x+0,8y=0,366 \end{cases} \xrightarrow{\cdot(-0,8)} \begin{cases} -0,8x-0,8y=-0,48 \\ 0,49x+0,8y=0,366 \end{cases} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow -0,31x=-0,114 \Rightarrow x=0,367774...$$

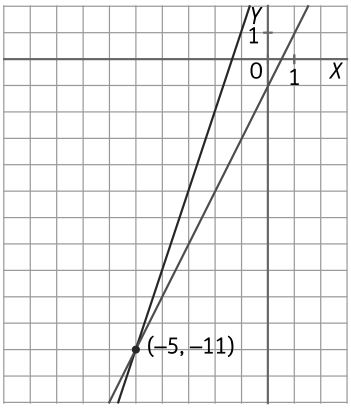
  Necesita 0,368 litros de líquido de la primera probeta.

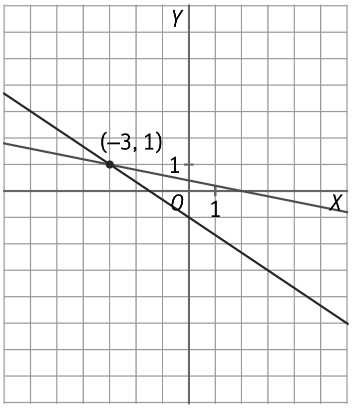
AUTOEVALUACIÓN

1. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -3x + y = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases}$

a) Solución: $(x = -5,\ y = -11)$ **b)** Solución: $(x = -3,\ y = 1)$





2. Indica el número de soluciones que tiene cada sistema de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 6x - 4y = 8 \\ -9x + 6y = -12 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ y = 5 \end{cases}$

a) Infinitas soluciones

$$\begin{cases} 6x - 4y = 8 \xrightarrow{:2} \\ -9x + 6y = -12 \xrightarrow{:(-3)} \end{cases} \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

b) Una solución: $(x = 4, y = 5)$

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \Rightarrow 3x - 5 = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7+5}{3} = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$

3. Resuelve los siguientes sistemas usando el método que prefieras.

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 6x - y = 16 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 2y = -3 \\ -3x + 6y = 5 \end{cases}$

a) Solución: $(x = 3, y = 2)$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 9 \\ 6x - y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 3y = 9 \Rightarrow 5x - 3(6x - 16) = 9 \Rightarrow 5x - 18x + 48 = 9 \Rightarrow -13x = -39 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 6 \cdot 3 - 16 = 2 \\ y = 6x - 16 \end{cases}$$

b) Solución: $\left(x = \dfrac{-14}{15}, y = \dfrac{11}{30}\right)$

$$\begin{cases} 4x + 2y = -3 \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ -3x + 6y = 5 \end{cases} \begin{cases} -12x - 6y = 9 \\ -3x + 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow -15x = 14 \Rightarrow x = \frac{-14}{15}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = -3 \xrightarrow{\cdot 3} \\ -3x + 6y = 5 \xrightarrow{\cdot 4} \end{cases} \begin{cases} 12x + 6y = -9 \\ -12x + 24y = 20 \end{cases} \Rightarrow 30y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{30}$$

4. **Simplifica y resuelve el siguiente sistema.**

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2}{4} - \dfrac{3y+4}{6} = \dfrac{-8}{3} \\ 4y - 5x = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x+2}{4} - \dfrac{3y+4}{6} = \dfrac{-8}{3} \\ 4y - 5x = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9x+6}{12} - \dfrac{6y+8}{12} = \dfrac{-32}{12} \\ 4y - 5x = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x - 6y = -30 \xrightarrow{:3} \\ -5x + 4y = 18 \end{cases} \begin{cases} 3x - 2y = -10 \\ -5x + 4y = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = -10 \xrightarrow{\cdot 2} \\ -5x + 4y = 18 \end{cases} \begin{cases} 6x - 4y = -20 \\ -5x + 4y = 18 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 3\cdot(-2) - 2y = -10 \Rightarrow -2y = -4 \Rightarrow y = 2$$

Solución: $(x = -2, y = 2)$

5. **Jorge ha comprado varios libros y cuadernos para este curso. En total ha comprado 20 artículos y se ha gastado 256 €. Sabiendo que un libro cuesta 20 € y un cuaderno cuesta 4 €, calcula cuántos cuadernos y cuántos libros ha comprado.**

Llamamos x al número de libros e y al número de cuadernos.

$$\begin{cases} x + y = 20 \xrightarrow{\cdot(-5)} \\ 20x + 4y = 256 \xrightarrow{:4} \end{cases} \begin{cases} -5x - 5y = -100 \\ 5x + y = 64 \end{cases} \Rightarrow -4y = -36 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow x + 9 = 20 \Rightarrow x = 11$$

Compró 9 cuadernos y 11 libros.

6. **La suma de dos números es igual a 145. Si al primer número se le resta el doble del segundo, el resultado obtenido es 10. ¿Cuáles son los dos números?**

Llamamos x al primer número e y al segundo.

$$\begin{cases} x + y = 145 \\ x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 145 - y \\ x = 10 - 2y \end{cases} \Rightarrow 145 - y = 10 + 2y \Rightarrow y = 45 \rightarrow x = 145 - 45 = 100$$

Los números son 100 y 45.

7. **Hace dos años, la tortuga de Estela tenía cuatro veces la edad de su dueña, y dentro de cuatro años, Estela tendrá la tercera parte de la edad de su tortuga. ¿Cuáles son las edades actuales de Estela y su tortuga?**

	Hace 2 años	Ahora	Dentro de 4 años
Edad de Estela	$x-2$	x	$x+4$
Edad de la tortuga	$y-2$	y	$y+4$

$$\begin{cases} y - 2 = 4(x-2) \\ x + 4 = \dfrac{1}{3}(y+4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2 = 4x - 8 \\ 3x + 12 = y + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - y = 6 \\ 3x - y = -8 \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{cases} \begin{cases} 4x - y = 6 \\ -3x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 14 \Rightarrow 4\cdot 14 - y = 6 \Rightarrow y = 50$$

Estela tiene 14 años, y su tortuga, 50.

8. **Un químico dispone de dos garrafas de ácido, una con una concentración del 5 % y otra con una concentración del 30 %. ¿Qué cantidad habrá que poner de cada garrafa para conseguir un litro de mezcla con una concentración del 10 %?**

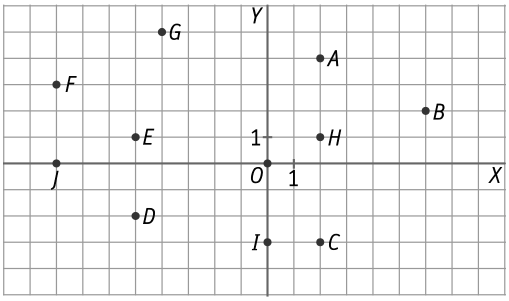
Llamamos x a los litros de la primera garrafa e y a los de la segunda.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 0{,}05x + 0{,}3y = 0{,}1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 0{,}05x + 0{,}3(1-x) = 0{,}1 \Rightarrow 0{,}05x + 0{,}3 - 0{,}3x = 0{,}1 \Rightarrow -0{,}25x = -0{,}2 \Rightarrow x = 0{,}8 \Rightarrow y = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 \end{cases}$$

Hay que mezclar 0,8 litros de la primera con 0,2 litros de la segunda.

8 Funciones

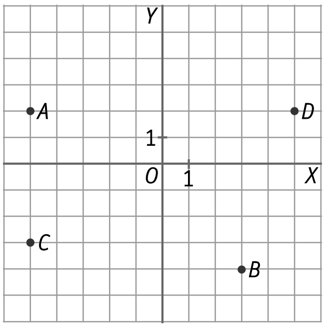
1. Escribe las coordenadas de los puntos representados.



$A(2,\ 4)$	$C(2, -3)$	$E(-5,\ 1)$	$G(-4,\ 5)$	$I(0, -3)$	$O(0,\ 0)$
$B(6,\ 2)$	$D(-5, -2)$	$F(-8,\ 3)$	$H(2,\ 1)$	$J(-8,\ 0)$	

2. Represente en el plano cartesiano los siguientes puntos e indica en qué cuadrante están.

a) $\boldsymbol{A(-5,\ 2)}$ **b)** $\boldsymbol{B(3, -4)}$ **c)** $\boldsymbol{C(-5, -3)}$ **d)** $\boldsymbol{D(5,\ 2)}$



a) 2.º cuadrante

b) 4.º cuadrante

c) 3.er cuadrante

d) 1.er cuadrante

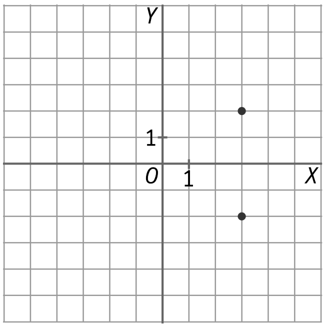
3. Dibuja en un plano cartesiano puntos que cumplan las siguientes condiciones.

a) Dos puntos con la misma abscisa y ordenadas opuestas.

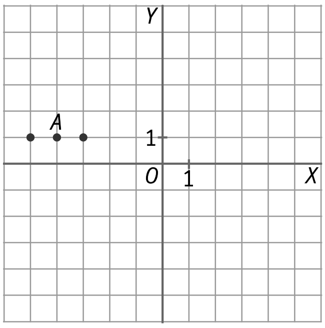
b) Dos puntos que estén a la misma distancia del punto *A*(–4, 1).

Respuesta modelo:

a) $(3,\ 2)$ y $(3, -2)$



b) $(-3,\ 1)$ y $(-5, 1)$



4. Cinco amigos han ordenado sus fechas de nacimiento:

1.°	**Óscar**	**23 de marzo**
2.°	**Clara**	**10 de junio**
3.°	**Fermín**	**7 de julio**
4.°	**Laura**	**10 de julio**
5.°	**Raúl**	**23 de agosto**

Representa con diagramas de Venn las correspondencias:

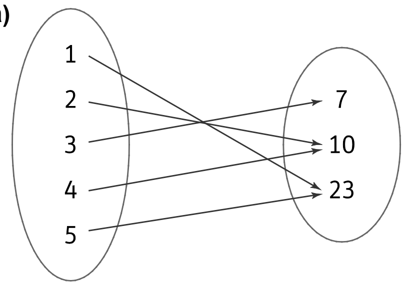
a) Asocia a cada número de orden su día de nacimiento.

b) Asocia a cada número de orden su mes de nacimiento.

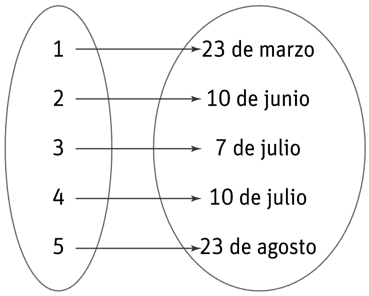
c) Asocia a cada número de orden su fecha.

¿Alguna correspondencia es una función?

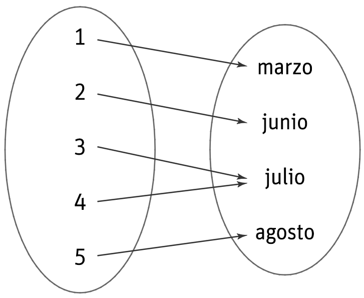
a)



c)



b)



Las tres son funciones, ya que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde solo uno del conjunto final.

5. Se define la correspondencia que asigna a cada atleta de una carrera las cifras de su número de dorsal; por ejemplo, al número 23 le corresponden las cifras 2 y 3.

a) ¿Hay algún elemento del conjunto final al que corresponda más de un elemento del inicial?

b) ¿Se trata de una función?

a) La cifra 2 se corresponde tanto con el dorsal 23 como con el dorsal 32..

b) No, como consecuencia del apartado anterior, ya que a cada elemento del conjunto inicial no le corresponde un único valor del conjunto final.

6. Los alumnos de una clase se ordenan según su número de lista. Indica si las siguientes correspondencias son funciones.

a) A cada número de lista se le asigna el número de hermanos.

b) A cada número se le asigna su DNI.

c) A cada número se le asigna su estatura.

a) Sí, es una función, ya que a cada alumno le corresponde un único número de hermanos.

b) Sí, es una función, puesto que a cada alumno le corresponde un único DNI.

c) Sí, es una función, porque a cada alumno le corresponde una única estatura.

7. Dos magnitudes están relacionadas mediante la fórmula $y = 2x - 3$.

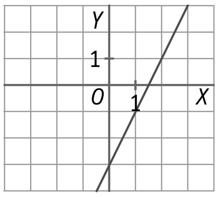
a) Construye la tabla de valores correspondiente.

b) Representa la gráfica.

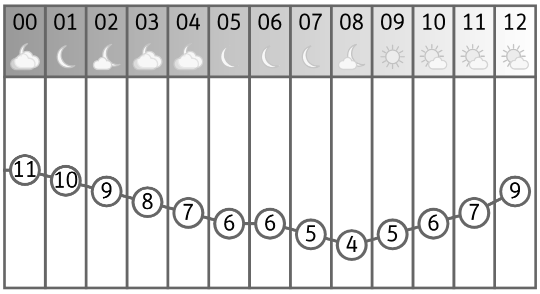
a)

x	–2	–1	0	1	2	3
y	–7	–5	–3	–1	1	3

b)



8. Xiomara está consultando las temperaturas previstas en su ciudad en la web de la Agencia Estatal de Meteorología (AEMET).



a) Construye una tabla de valores con los datos de la imagen.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿Qué temperatura había a las seis de la mañana?

d) ¿A qué hora la temperatura bajó de 10 ºC?

a)

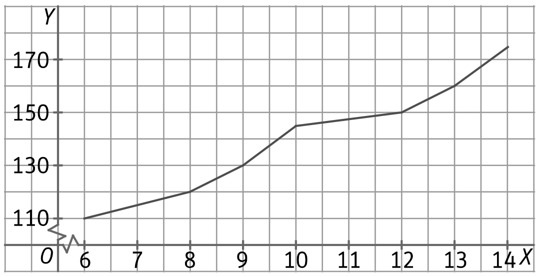
Hora	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
Temperatura (ºC)	11	10	9	8	7	6	6	5	4	5	6	7	9

b) La variable independiente es la hora, y la variable dependiente es la temperatura.

c) A las seis de la mañana había 6 ºC.

d) A partir de las dos de la mañana.

9. En la siguiente gráfica se recogen los datos de la estatura de Sergio entre los 6 y los 14 años. Observa y contesta:



a) ¿Cuánto medía cuando tenía 6 años? ¿Y cuando tenía 10 años?

b) ¿A qué edad superó los 1,5 m de altura?

c) ¿En algún momento su estatura permanece constante?

d) Construye la tabla de valores asociada.

a) A los 6 años medía 110 cm, y a los 10, 145 cm.

b) Superó los 1,5 m a los 12 años.

c) No, siempre crece.

d)

Edad (años)	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Altura (cm)	110	115	120	130	145	148	150	160	175

10. La base de un rectángulo mide 2 cm más que su altura.

a) Si x es la altura del rectángulo, ¿cuánto mide su base?

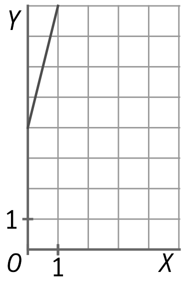
b) Si y es el perímetro del rectángulo, escribe la fórmula que permite obtener el perímetro a partir de la altura.

c) Representa en unos ejes de coordenadas la relación entre el perímetro y la altura de esos rectángulos.

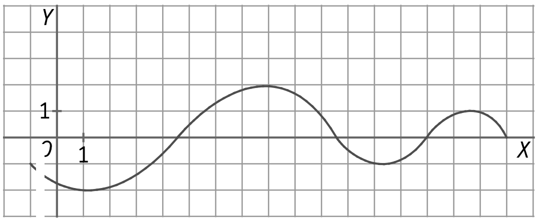
a) Su base mide $x+2$.

b) El perímetro es $y=2x+2(x+2)=4x+4 \Rightarrow y=4x+4$.

c)



11. Indica el dominio y el recorrido de la función $f(x)$.



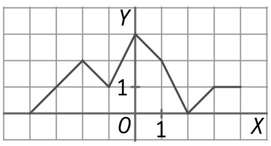
Dominio: $D(f)=[-1, 17]$

Recorrido: $R(f)=[-2, 2]$

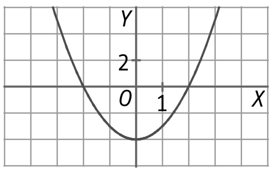
12. Actividad resuelta.

13. Indica si las siguientes gráficas representan una función. En caso afirmativo, indica su dominio y recorrido.

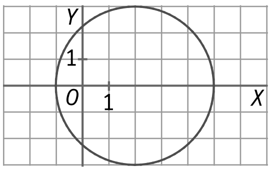
a)



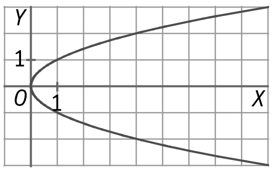
c)



b)



d)



a) Sí es una función. Su dominio es $D(f)=[-4, 4]$ y su recorrido es $R(f)=[0, 3]$.

b) No es una función, ya que, por ejemplo, a $x=2$ le corresponden dos valores, $y=3$ e $y=-3$.

c) Sí es una función. Su dominio es $D(f)=[-3, 3]$ y su recorrido es $R(f)=[-4, 4]$.

d) No es una función, ya que, por ejemplo, a $x=1$ le corresponden dos valores, $y=1$ e $y=-1$.

14. Un comerciante tiene una tabla que le ayuda a calcular el precio de los kilogramos de manzanas que vende.

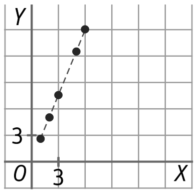
Manzanas (kg)	1	2	3	5	6
Precio (€)	2,5	5	7,5	12,5	15

a) ¿La relación entre la cantidad de fruta vendida y el beneficio obtenido es una función?

b) Representa gráficamente los datos de la tabla e indica su dominio y recorrido si el máximo valor que toma la variable independiente es 6.

a) Sí es una función, ya que a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*.

b) Si suponemos que se pueden vender cantidades fraccionarias (como 2,5 kg), es posible unir los puntos.

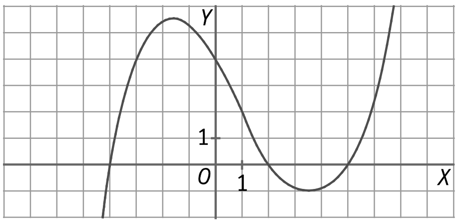


Dominio: $D(f) = [1,\ 6]$

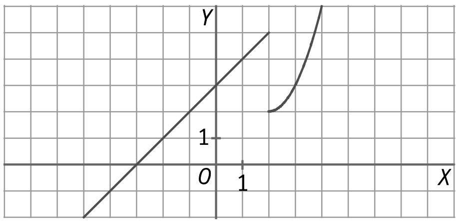
Recorrido: $R(f) = [2{,}5,\ 15]$

15. Indica si las funciones son continuas o discontinuas, y, en su caso, los puntos de discontinuidad. Halla los puntos de corte con los ejes de cada función.

a)



b)

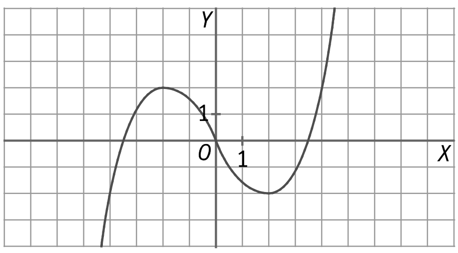


a) Es continua. Puntos de corte con el eje *X*: $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$ y $(5,\ 0)$. Punto de corte con el eje *Y*: $(0,\ 4)$.

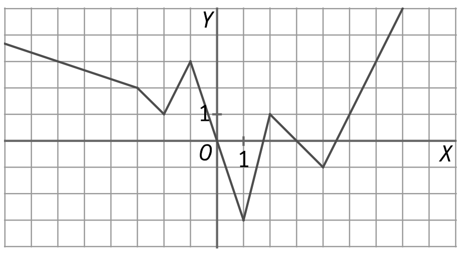
b) Es discontinua en $x = 2$. Punto de corte con el eje *X*: $(-3,\ 0)$. Punto de corte con el eje *Y*: $(0,\ 3)$.

16. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de las siguientes funciones y encuentra los máximos y mínimos.

a)



b)



a) Creciente: de $x = -4$ a $x = -2$ y de $x = 2$ a $x = 4$. Decreciente: de $x = -2$ a $x = 2$.

Máximo relativo: $(-2,\ 2)$. Mínimo relativo: $(2,\ -2)$.

b) Decreciente: de $x = -7$ a $x = -2$, de $x = -1$ a $x = 1$ y de $x = 2$ a $x = 4$. Creciente: de $x = -2$ a $x = -1$, de $x = 1$ a $x = 2$ y de $x = 4$ a $x = 7$.

Máximos relativos: $(-1,\ 3)$ y $(2,\ 1)$. Mínimo absoluto: $(1,\ -3)$. Mínimos relativos: $(-2,\ 1)$ y $(4,\ -1)$.

17. Representa las funciones a partir de las tablas y comprueba si se trata de una función lineal.

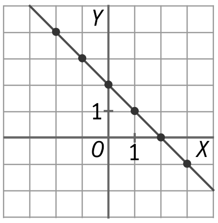
a)

x	–2	–1	0	1	2	3
y	4	3	2	1	0	–1

b)

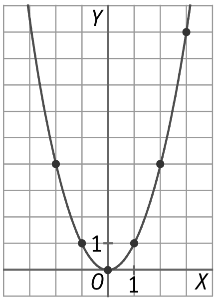
x	–2	–1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4	9

a)



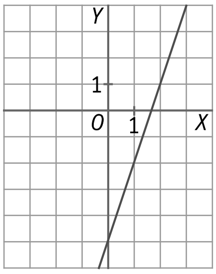
Es una línea recta, sí es una función lineal.

b)



No es una función lineal, no es una línea recta.

18. Representa en unos ejes de coordenadas la función $y = 3x - 5$ y comprueba que es una función lineal.



Como se trata de una recta, es una función lineal, cuya pendiente es 3 y la ordenada en el origen es –5.

19. Sin representarlas, indica si las siguientes funciones son crecientes, decrecientes o constantes.

a) $f(x) = 10x - 43$

b) $f(x) = x + 13$

c) $f(x) = -43$

d) $f(x) = -8x + 15$

e) $f(x) = 0$

f) $f(x) = 15 - 8x$

a) $m = 10 > 0 \Rightarrow$ creciente

b) $m = 1 > 0 \Rightarrow$ creciente

c) $m = 0 \Rightarrow$ constante

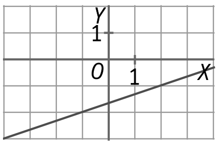
d) $m = -8 < 0 \Rightarrow$ decreciente

e) $m = 0 \Rightarrow$ constante

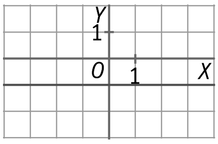
f) $m = -8 < 0 \Rightarrow$ decreciente

20. Indica el signo de la pendiente y de la ordenada en el origen en cada gráfica.

a)



b)



a) $m > 0$, $n < 0$

b) $m = 0$, $n < 0$

21. Calcula en cada caso la pendiente de la recta que pasa por los puntos indicados.

a) $A(5,\ 1)$ y $B(7, -7)$

b) $A(-1, 3)$ y $B(4,\ 23)$

c) $A(1,\ 1)$ y $B(-3, 9)$

d) $A(0, 4)$ y $B(4, -32)$

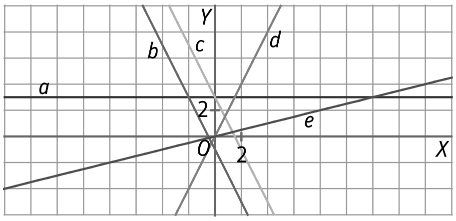
a) $m = \dfrac{-7-1}{7-5} = \dfrac{-8}{2} = -4$

b) $m = \dfrac{23-3}{4-(-1)} = \dfrac{20}{5} = 4$

c) $m = \dfrac{9-1}{-3-1} = \dfrac{8}{-4} = -2$

d) $m = \dfrac{-32-4}{4-0} = \dfrac{-36}{4} = -9$

22. Asocia cada una de las rectas con la ecuación correspondiente.



A. $y = -2x + 3$

B. $y = 3$

C. $y = 2x$

D. $y = \dfrac{1}{4}x$

E. $y = -2x - 1$

A. *c*

B. *a*

C. *d*

D. *e*

E. *b*

23. Dibuja una recta en cada caso que cumpla las condiciones pedidas.

a) **Recta creciente, ordenada en el origen positiva.**

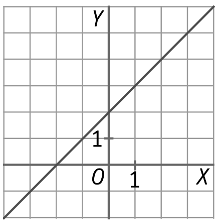
b) **Función de proporcionalidad directa, decreciente.**

c) **Función constante que pasa por $A(0,\ 3)$.**

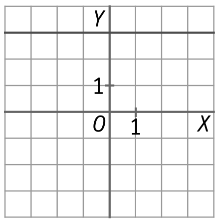
d) **Función lineal creciente que pasa por $A(0,\ 4)$.**

Respuesta modelo:

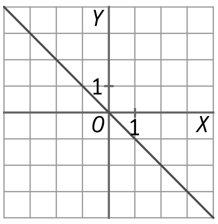
a) $y = x + 2$



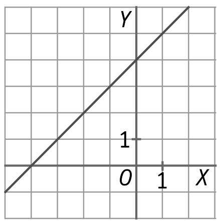
c) $y = 3$



b) $y = -x$



d) $y = x + 4$



24. Actividad resuelta.

25. Estudia si los puntos $A(2,\ 7)$ y $B(11, -10)$ pertenecen a la recta $y = 4x - 1$.

Un punto pertenece a una recta si verifica su ecuación:

$4 \cdot 2 - 1 = 8 - 1 = 7 \Rightarrow A(2,\ 7)$ pertenece a la recta.

$4 \cdot 11 - 1 = 43 \neq -10 \Rightarrow B(11,\ -10)$ no pertenece a la recta.

26. Calcula la ecuación de cada recta a partir de los siguientes datos.

a) Pasa por $A(1,\ 4)$ y $B(5, -4)$.

b) Su pendiente es 6 y pasa por $(2, -5)$.

c) Pasa por $(-1, -4)$ y su ordenada en el origen es $\frac{2}{3}$.

a) $m = \frac{-4-4}{5-1} = -2 \Rightarrow y = -2x + n$. Como pasa por $(1,\ 4)$, sustituimos este punto en la ecuación:

$4 = -2 + n \Rightarrow n = 6$. La recta es $y = -2x + 6$.

b) $y = 6x + n$. Como pasa por $(2, -5)$, sustituimos este punto en la ecuación: $-5 = 6 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -17$.

La recta es $y = 6x - 17$.

c) $y = mx + \frac{2}{3}$. Como pasa por $(-1,\ -4)$, sustituimos este punto en la ecuación:

$-4 = m(-1) + \frac{2}{3} \Rightarrow m = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ $-5 = 6 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -17$. La recta es $y = \frac{14}{3}x + \frac{2}{3}$.

27. Sabemos que una recta tiene por pendiente $\frac{1}{3}$ y su ordenada en el origen es $\frac{-5}{4}$. ¿De qué recta se trata?

La recta es $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{4}$.

28. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas.

a) $\begin{cases} r: y = 3x - 2 \\ s: y = -3x - 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: y = \frac{6}{9}x + 6 \\ s: y = \frac{26}{39}x + \frac{3}{5} \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} r: y = 7x - 2 \\ s: y = 7x + 8 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} r: y = \frac{10}{15}x + 6 \\ s: y = \frac{-24}{36}x + \frac{30}{5} \end{cases}$

a) Son secantes, pues sus pendientes son distintas, 3 y –3.

b) Son paralelas, ya que tienen la misma pendiente, $\frac{6}{9} = \frac{26}{39} = \frac{2}{3}$.

c) Son paralelas, ya que la pendiente de ambas es 7.

d) Son secantes, pues sus pendientes son distintas, $\frac{10}{15} \neq \frac{-24}{36}$.

29. Actividad resuelta.

30. Halla la ecuación de la recta en cada caso.

a) Paralela a $y = -7x + 11$ por $A(-3, 15)$ **b) Paralela a $y = 3x - 6$ por $A\left(\frac{2}{3}, -1\right)$**

a) Como es paralela a $y = -7x + 11$, la pendiente es $m = -7$; por tanto, $y = -7x + n$. Como pasa por $A(-3, 15)$, $15 = -7\cdot(-3) + n \Rightarrow n = -6$. La recta es $y = -7x - 6$.

b) Como es paralela a $y = 3x - 6$, la pendiente es $m = 3$; por tanto, $y = 3x + n$. Como pasa por $A\left(\frac{2}{3}, -1\right)$, $-1 = 3\cdot\frac{2}{3} + n \Rightarrow n = -3$. La recta es $y = 3x - 3$.

31. Dos magnitudes *x* e *y* son inversamente proporcionales, y el valor de su constante *k* de proporcionalidad inversa es 2.

a) Escribe la ecuación de la función.

b) Construye una tabla de valores, dando a *x* cinco valores positivos y cinco valores negativos.

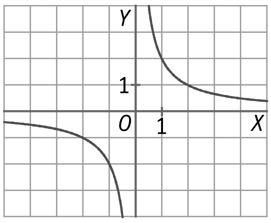
c) A partir de los datos de la tabla, esboza la gráfica de la función.

a) $y = \frac{2}{x}$

b)

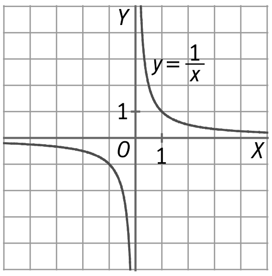
x	–5	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5
y	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-2}{3}$	–1	–2	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

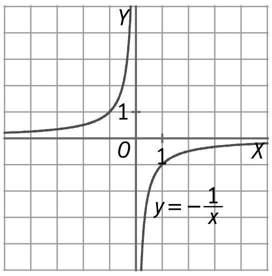
c)



32. Elabora una tabla de valores para la función $y = \frac{1}{x}$, y otra para la función $y = \frac{-1}{x}$, dando a la variable independiente valores positivos y negativos, y observa sus gráficas.

¿Qué relación observas entre las dos funciones?





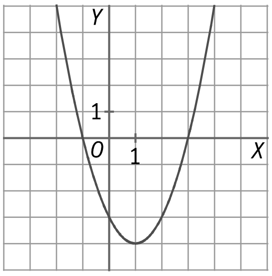
x	–5	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	–1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

x	–5	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5
$y = \frac{-1}{x}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	–1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{5}$

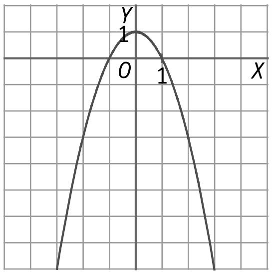
Para el mismo valor de *x* toman valores de *y* opuestos.

33. Escribe las coordenadas del vértice y de los puntos de corte con los ejes de cada parábola.

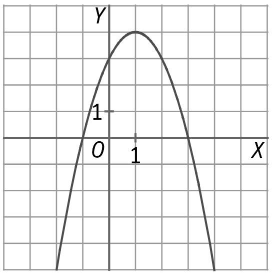
a)



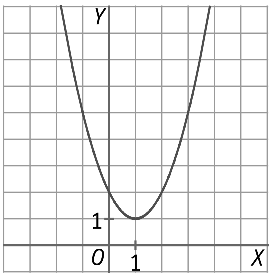
c)



b)



d)



a) Vértice: $(1,-4)$. Puntos de corte con el eje *X*: $(-1,0)$ y $(3,0)$. Punto de corte con el eje *Y*: $(0,-3)$

b) Vértice: $(1,4)$. Puntos de corte con el eje *X*: $(-1,0)$ y $(3,0)$. Punto de corte con el eje *Y*: $(0,3)$

c) Vértice: $(0,1)$. Puntos de corte con el eje *X*: $(-1,0)$ y $(1,0)$. Punto de corte con el eje *Y*: $(0,1)$

d) Vértice: $(1,1)$. No hay puntos de corte con el eje *X*. Punto de corte con el eje *Y*: $(0,2)$

34. Indica hacia dónde se abren las ramas de las siguientes parábolas, sin representarlas.

a) $y = 3x^2 - 5x$

b) $y = -2x^2 + 7x + 1$

c) $y = 3x - 5x^2 + 2$

d) $y = 6 - x - x^2$

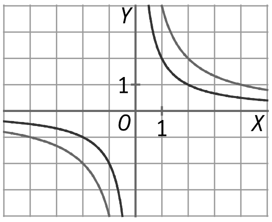
a) Como $3 > 0 \Rightarrow$ Hacia arriba

b) Como $-2 < 0 \Rightarrow$ Hacia abajo

c) Como $-5 < 0 \Rightarrow$ Hacia abajo

d) Como $-1 < 0 \Rightarrow$ Hacia abajo

35. En la gráfica aparecen representadas las funciones $y = \frac{2}{x}$ e $y = \frac{4}{x}$.



a) Identifica qué gráfica corresponde a cada una de las funciones. Para ello, busca un punto de cada una de ellas y comprueba qué ecuación verifica.

b) A la vista de las gráficas, cuando el valor de la constante de proporcionalidad es mayor, ¿la hipérbola está más separada o más cerca de los ejes?

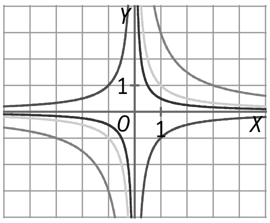
a) Para $x = 2$, $y = \frac{2}{x} = 1$ e $y = \frac{4}{2} = 2$. Por tanto, $y = \frac{2}{x}$ es la función de color rojo e $y = \frac{4}{x}$ es la azul.

b) Cuando es mayor, la hipérbola está más separada.

36. Asigna a cada ecuación su gráfica.

A. $y = \dfrac{1}{x}$ **C.** $y = \dfrac{-1}{x}$

B. $y = \dfrac{3}{x}$ **D.** $y = \dfrac{0,5}{x}$



Seguimos el criterio de que cuando el valor de la constante de proporcionalidad es mayor, la hipérbola está más separada de los ejes.

A. Verde   **B.** Naranja   **C.** Roja   **D.** Violeta

37. Actividad resuelta.

38. Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes parábolas.

a) $y = x^2 - 5x + 4$ **b)** $y = x^2 - 4x + 4$ **c)** $y = x^2 + 4$ **d)** $y = -2x^2 + 5x - 3$

a) Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow (1,\ 0)\ y\ (4,\ 0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $y = 4 \Rightarrow (0,\ 4)$

b) Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2{,}0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $y = 4 \Rightarrow (0,\ 4)$

c) Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{-4} \Rightarrow$ No tiene solución; por tanto, no corta el eje *Y*.

Punto de corte con el eje *Y*: $y = 4 \Rightarrow (0,\ 4)$

d) Puntos de corte con el eje *X*: $-2x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-3)}}{2\cdot(-2)} = \dfrac{-5 \pm 1}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2},\ 0\right) y\ (1,\ 0)$

Punto de corte con el eje *Y*: $y = -3 \Rightarrow (0,\ -3)$

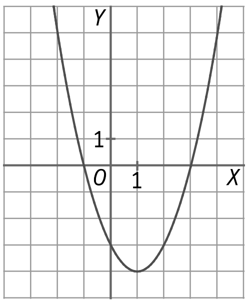
39. Haz una tabla de valores de la función $y = x^2 - 2x - 3$, desde $x = 4$ hasta $x = -4$. A la vista de la tabla, ¿puedes indicar los puntos de corte y el vértice de la parábola? Dibuja su gráfica de forma aproximada.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	21	12	5	0	–3	–4	–3	0	5

El vértice es el punto donde los valores de *y* pasan de decrecer a crecer: $(1,\ -4)$.

Punto de corte con el eje *Y*: $x = 0 \Rightarrow (0,\ -3)$

Puntos de corte con el eje *X*: $y = 0 \Rightarrow (-1,\ 0)$ y $(3,\ 0)$



40. En un concurso se obtienen 100 € si se pasa la primera fase, y 150 € por cada pregunta acertada en la segunda fase.

a) Realiza una tabla en la que se relacione el número de aciertos en la segunda fase y la cantidad total obtenida. Calcula al menos seis valores.

b) Representa gráficamente los datos de la tabla anterior. Utiliza en el eje *Y* una escala que vaya de 50 en 50 €.

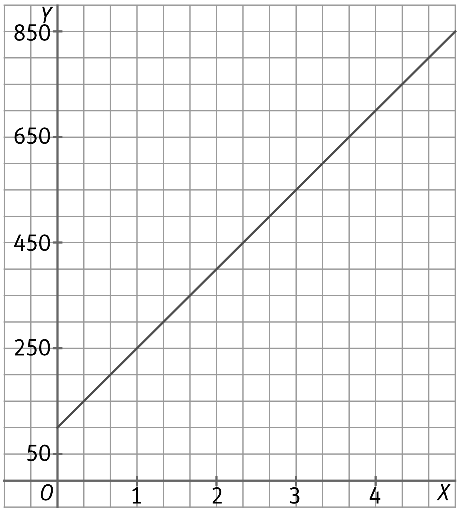
c) ¿Qué tipo de función corresponde a esa gráfica?

d) Obtén la ecuación de la función. ¿Cuál fue el número de aciertos de un concursante que se llevó un premio de 2650 €?

a)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	100	250	400	550	700	850	1000

b)



c) Es una función lineal.

d) La ecuación es $y = 100 + 150x$. El número de aciertos fue $2650 = 100 + 150x \Rightarrow x = \frac{2550}{150} = 17$.

41. Unos obreros están colocando postes a lo largo de una carretera, con una separación de 5 m entre cada poste y el siguiente.

a) Construye una tabla de valores en la que aparezca el número de postes que hay que colocar dependiendo de la longitud de la carretera.

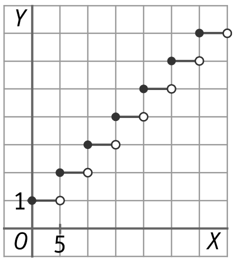
b) Representa gráficamente los valores de la tabla. ¿Qué tipo de función se obtiene?

c) Escribe la ecuación de la función.

a)

x	0	5	10	15	20	25	30
y	1	2	3	4	5	6	7

b)



Es una función discontinua.

c) El valor de *y* sería la parte entera de dividir la longitud de la carretera entre 5 y sumarle 1: $y = \left[\frac{x}{5} + 1\right]$.

42. Si se abre un grifo de forma que salgan 6 L de agua por minuto, tarda 35 minutos en llenar una bañera.

a) Calcula cuánto tardará en llenarla si se abre el grifo para que vierta 10 L por minuto.

b) Completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

Caudal (L/min)	1	2	3	6	10	12
Tiempo (min)	●	●	●	●	●	●

c) ¿Qué tipo de función es?

d) Esboza la gráfica con los datos, colocando el tiempo en el eje *X*.

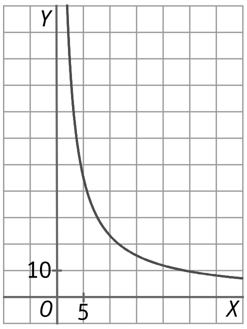
a) $6 \cdot 35 = 10 \cdot t \Rightarrow t = 21$ min

b) La constante de proporcionalidad inversa es $k = 6 \cdot 35 = 210$.

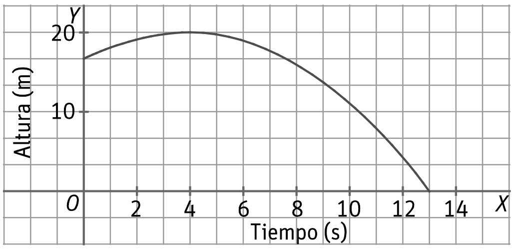
Caudal (L/min)	1	2	3	6	10	12
Tiempo (min)	210	105	70	35	21	17,5

c) Es una función de proporcionalidad inversa.

d)



43. Una flecha sigue una trayectoria parabólica. La gráfica que describe la altura del proyectil en función del tiempo es la siguiente.



a) ¿Cuál es la altura desde la que se lanza la flecha?

b) ¿Cuánto tarda en llegar al suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

d) ¿Hay algún momento en el que esté exactamente a 10 m de altura?

e) ¿Cuánto tiempo está subiendo?

a) Se lanza a $\frac{5}{6} \cdot 20 = 16,\widehat{6}$ m, aproximadamente, a 16,67 m

b) Tarda 13 s.

c) La altura máxima es 20 m.

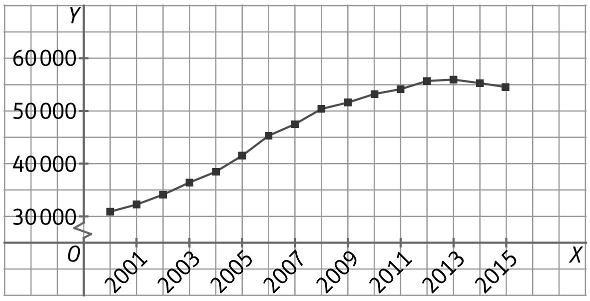
d) Está a 10 m algo después del segundo 10.

e) Está subiendo 4 s.

44. En la siguiente gráfica aparece la evolución de la población de Arganda del Rey entre los años 2000 y 2015.

a) Explica brevemente la evolución de la población de Arganda del Rey entre esas fechas.

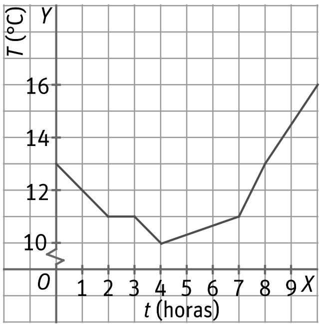
b) En 1998 había solo 325 extranjeros censados en Arganda. En 2015 había, según los datos del Ayuntamiento, un 22,26 % de población inmigrante. A partir de la gráfica, ¿cuántos inmigrantes vivían en Arganda en 2015, aproximadamente?



a) La población crece bastante entre los años 2000 y 2013, hasta llegar casi a duplicarse, y a partir de este año desciende ligeramente.

b) Como en 2015 había unos 55 000 habitantes, la población inmigrante era de unos $0{,}2226 \cdot 55\,000 = 12\,243$ habitantes.

45. Santiago ha medido la temperatura en su jardín cada hora. Describe la evolución de la temperatura en el jardín a partir de la gráfica.

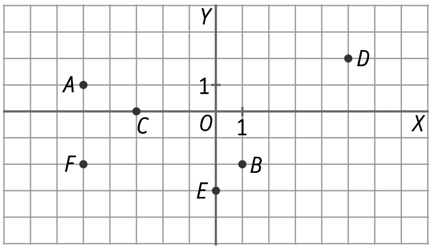


A medianoche, la temperatura era de 13 ºC. Desciende hasta las dos de la mañana, y permanece constante durante una hora.

A lo largo de la hora siguiente baja un grado más, hasta alcanzar la temperatura mínima de 10 ºC a las cuatro de la mañana.

Después empieza a aumentar hasta las siete, y a partir de esa hora crece más rápidamente, hasta alcanzar los 16 ºC a las diez de la mañana.

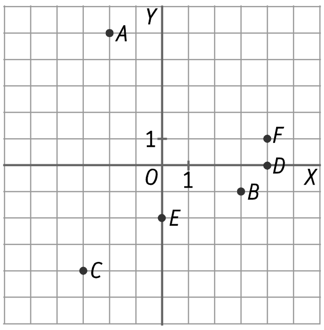
46. Escribe las coordenadas de los puntos representados en la gráfica.



$A(-5,\ 1)$	$D(5,\ 2)$
$B(1,\ -2)$	$E(0,\ -3)$
$C(-3,\ 0)$	$F(-5,\ -2)$

47. Representa los siguientes puntos e indica en qué cuadrante se encuentra cada uno de ellos.

a) $\boldsymbol{A(-2,\ 5)}$	**c)** $\boldsymbol{C(-3,\ -4)}$	**e)** $\boldsymbol{E(0,\ -2)}$
b) $\boldsymbol{B(3,\ -1)}$	**d)** $\boldsymbol{D(4,\ 0)}$	**f)** $\boldsymbol{F(4,\ 1)}$



a) 2.º cuadrante

b) 4.º cuadrante

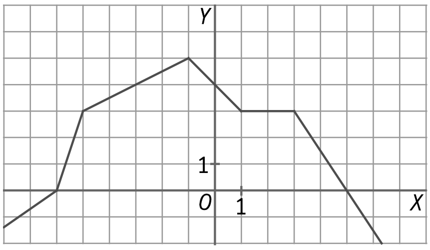
c) 3.er cuadrante

d) Entre 1.º y 4.º cuadrante

e) Entre 3.º y 4.º cuadrante

f) 1.er cuadrante

48. **Escribe** las **coordenadas de cinco puntos que pertenezcan a la gráfica.**



Respuesta modelo:

$(-6, 0)$ $(3, 3)$

$(-5, 3)$ $(5, 0)$

$(-1, 5)$

49. **La fórmula de una función es** $y = x^3 - 1$.

a) Completa en tu cuaderno la siguiente tabla.

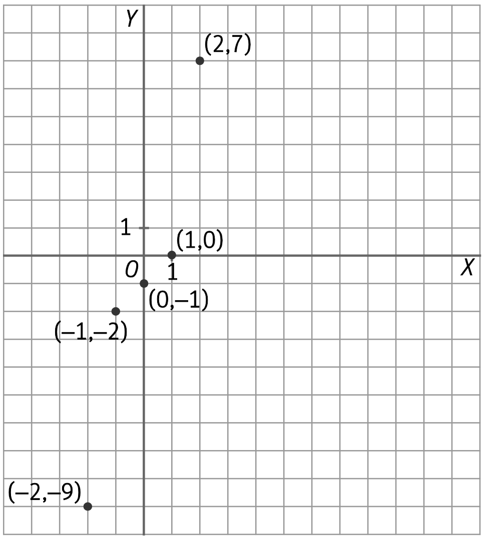
x	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**
y	●	●	●	●	●

b) Dibuja los puntos de la tabla. ¿Están alineados?

a)

x	**–2**	**–1**	**0**	**1**	**2**
y	–9	–2	–1	0	7

b)



No están alineados.

50. **Obtén la fórmula que permite obtener el perímetro de un cuadrado a partir de la longitud del lado.**

a) Construye una tabla de valores. ¿Tiene sentido dar valores negativos? ¿Y fraccionarios?

b) Representa la gráfica.

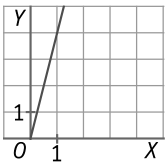
Si x es la longitud del lado, la fórmula para hallar el perímero es $y = 4x$.

a)

x	1	2	3	4	5
y	4	8	6	16	20

)
No tiene sentido dar valores negativos, puesto que la medida de longitud no es negativa, pero sí tiene sentido dar valores fraccionarios.

b)



51. Justifica en tu cuaderno si las siguientes correspondencias son funciones.

a) A cada número natural se le asigna la suma de sus cifras.

b) A cada número natural se le asignan sus divisores.

c) Al DNI de cada persona se le asigna su número de móvil.

d) A la edad de cada persona se le asigna su peso.

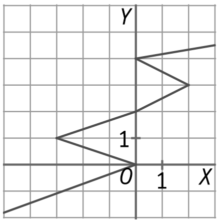
a) Sí es una función, puesto que a cada número le corresponde un único valor.

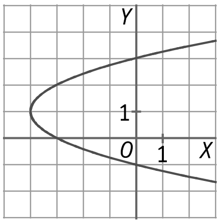
b) No es una función, puesto que a todo número natural le corresponden varios valores. Por ejemplo, al 4 le corresponden 3 valores, 1, 2, 4.

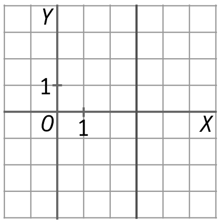
c) No es una función, puesto que una persona puede tener más de un número móvil, o no tener ninguno.

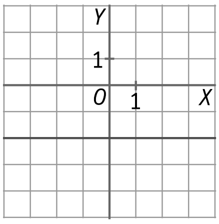
d) No es una función, puesto que dos personas de la misma edad pueden tener pesos distintos.

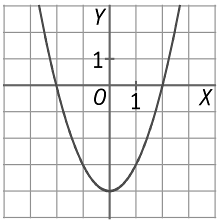
52. Explica si las gráficas representan funciones o no.

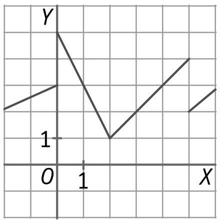
a)


c)


e)


b)


d)


f)


a) No es una función, ya que, por ejemplo, a $x = -3$ le corresponden dos valores, $y = 1$ e $y = -1$.

b) Es una función, ya que a cada valor de *x* le corresponde solo uno de *y*.

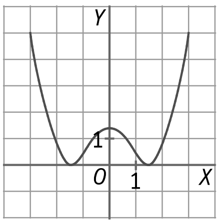
c) No es una función, ya que, por ejemplo, a $x = 0$ le corresponden dos valores, $y = 3$ e $y = -1$.

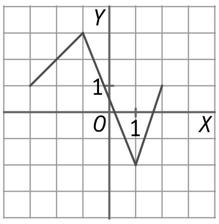
d) Es una función, ya que a cada valor de *x* le corresponde solo uno de *y*.

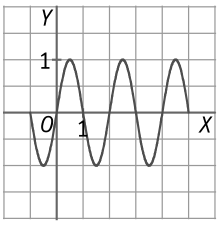
e) No es una función, ya que a un solo valor de *x* le corresponden infinitos valores de *y*.

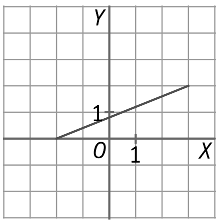
f) Es una función, ya que a cada valor de *x* le corresponde solo uno de *y*.

53. Indica el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a)


c)


b)


d)


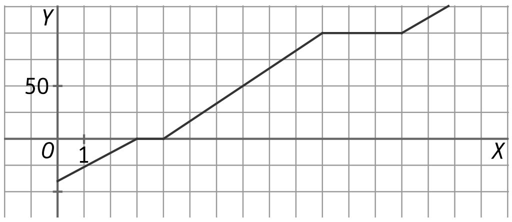
a) $D(f) = [-3,\ 3]$ $R(f) = [0,\ 5]$

c) $D(f) = [-3,\ 2]$ $R(f) = [-2,\ 3]$

b) $D(f) = [-1,\ 5]$ $R(f) = [-1,\ 1]$

d) $D(f) = [-2,\ 3]$ $R(f) = [0,\ 2]$

54. Se ha elaborado una gráfica con los datos que se han recogido al aplicar calor a un bloque de hielo hasta que se evapora completamente.



a) Indica en qué eje se representa la temperatura (ºC) y el tiempo (minutos). ¿Cuál es la variable dependiente?

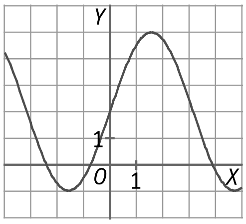
b) Antes de cambiar completamente de estado, permanece un tiempo constante. ¿Cuándo se producen dichas fases?

a) El eje *Y* representa la temperatura (ºC), y el eje *X*, el tiempo (minutos). La variable dependiente es la temperatura.

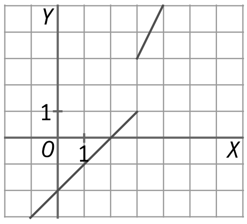
b) Entre los minutos 3 y 4, y entre los minutos 10 y 13.

55. Explica si las siguientes funciones son continuas. En las que no lo sean, indica los puntos de discontinuidad.

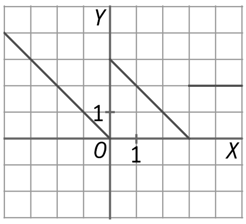
a)



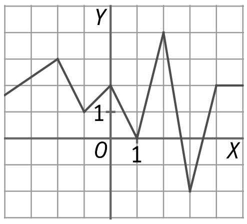
c)



b)



d)



a) Continua.

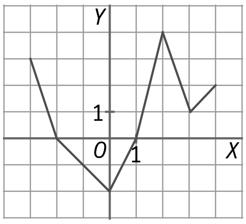
b) Discontinua en $x = 0$ y en $x = 3$.

c) Discontinua en $x = 3$.

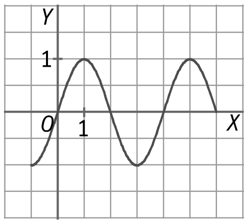
d) Continua.

56. Indica los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos de cada una de las siguientes funciones.

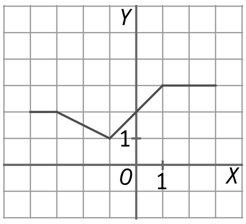
a)



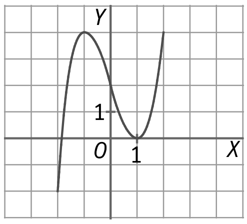
c)



b)



d)



a) Puntos de corte con el eje *X*: $(-2,\ 0)$ y $(1,\ 0)$. Punto de corte con el eje *Y*: $(0, -2)$

Decreciente de $x = -3$ a $x = 0$ y de $x = 2$ a $x = 3$. Creciente de $x = 0$ a $x = 2$ y de $x = 3$ a $x = 4$

Máximo absoluto: $(2,\ 4)$. Mínimo relativo: $(3,\ 1)$. Mínimo absoluto: $(0,\ -2)$

b) No hay puntos de corte con el eje *X*. Punto de corte con el eje *Y*: $(0, 2)$

Decreciente de $x=-3$ a $x=-1$. Creciente de $x=-1$ a $x=1$. Constante de $x=-4$ a $x=-3$ y de $x=1$ a $x=3$

Mínimo absoluto: $(-1, -2)$

c) Puntos de corte con el eje *X*: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 0)$ y $(6, 0)$. Punto de corte con el eje *Y*: $(0, 0)$

Decreciente de $x=1$ a $x=3$ y de $x=5$ a $x=6$. Creciente de $x=-1$ a $x=1$ y de $x=3$ a $x=5$

Máximos relativos: $(1, 1)$ y $(5, 1)$. Mínimo relativo: $(3, -1)$

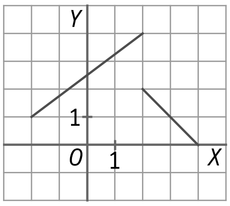
d) Puntos de corte con el eje *X*: $(-1{,}9\ ;\ 0)$ y $(1, 0)$. Punto de corte con el eje *Y*: $(0, 2)$

Decreciente de $x=-1$ a $x=1$. Creciente de $x=-2$ a $x=-1$ y de $x=1$ a $x=2$

Máximo relativo: $(-1, 4)$. Mínimo relativo: $(1, 0)$

57. Dibuja una función cuyo dominio sea $(-2, 4)$ y que tenga una discontinuidad.

Respuesta modelo:



58. Estudia si los puntos $A(5, -8)$ y $B(-3, -7)$ pertenecen a cada una de las siguientes rectas.

a) $y = 2x - 2$ **b)** $y = 2x - 1$ **c)** $y = 2 - 2x$ **d)** $y = \frac{-59}{8} - \frac{x}{8}$

a) $2\cdot 5 - 2 = 8 \neq -8 \Rightarrow$ *A* no pertenece. $2\cdot(-3) - 2 = -8 \neq -7 \Rightarrow$ *B* no pertenece.

b) $2\cdot 5 - 1 = 9 \neq -8 \Rightarrow$, *A* no pertenece. $2\cdot(-3) - 1 = -7 \Rightarrow$ *B* sí pertenece.

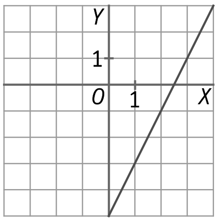
c) $2 - 2\cdot 5 = -8 \Rightarrow$ *A* sí pertenece. $2 - 2\cdot(-3) = 8 \neq -7 \Rightarrow$ *B* no pertenece.

d) $\frac{-59}{8} - \frac{5}{8} = -\frac{64}{8} = -8 \Rightarrow$ *A* sí pertenece. $\frac{-59}{8} - \frac{-3}{8} = \frac{-56}{8} = -7 \Rightarrow$ *B* sí pertenece.

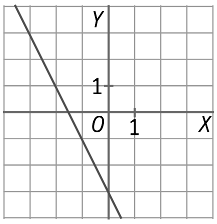
59. Indica la pendiente y la ordenada en el origen de cada una de estas funciones y represéntalas.

a) $y = 2x - 5$ **b)** $y = -2x - 3$ **c)** $y = 4 - 3x$ **d)** $y = \frac{1}{2}x - 1$

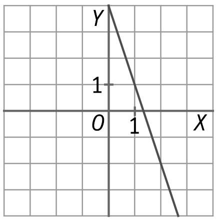
a) $m=2, n=-5$



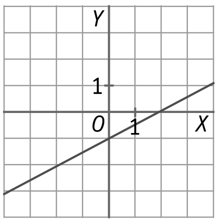
b) $m=-2, n=-3$



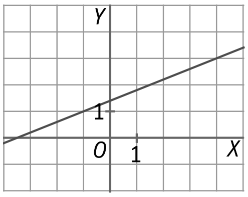
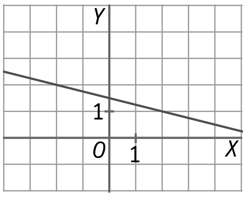
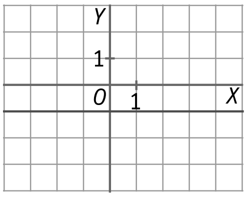
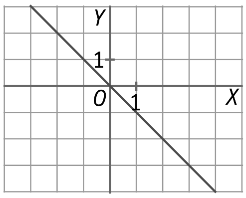
c) $m=-3, n=4$



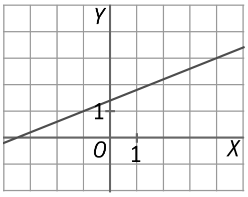
d) $m=\frac{1}{2}, n=-1$

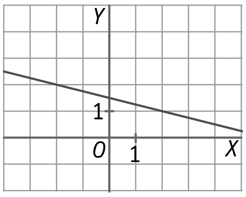


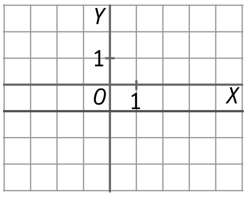
60. Asocia cada gráfica con la opción correspondiente.

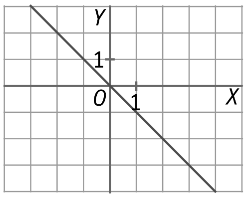





$m = 0$ y $n < 0$ | $m < 0$ y $n > 0$ | $m > 0$ y $n > 0$ | $m < 0$ y $n = 0$


$m > 0$ y $n > 0$

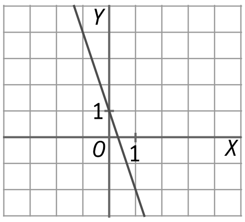

$m < 0$ y $n > 0$


$m = 0$ y $n < 0$


$m < 0$ y $n = 0$

61. Actividad resuelta.

62. Calcula la pendiente y la ordenada de la función a partir de la gráfica.



La ordenada en el origen es $n = 1$.

Como la recta pasa por $(-1, 4)$ y $(0, 1)$, su pendiente es $m = \dfrac{1-4}{0-(-1)} = -3$.

63. Calcula la función a partir de los datos indicados.

a) Su pendiente es 3 y su ordenada en el origen es –8.

b) Su pendiente es –1 y pasa por el punto (0, 1).

c) Su pendiente es 4 y pasa por (–6, 12).

d) Pasa por los puntos (–5, 3) y (0, –7).

e) Pasa por los puntos (1, –3) y (4, 18).

a) La función es $y = 3x - 8$.

b) $y = -x + n \Rightarrow 1 = -0 + n \Rightarrow n = 1 \Rightarrow$ La función es $y = -x + 1$.

c) $y = 4x + n \Rightarrow 12 = 4 \cdot (-6) + n \Rightarrow n = 36 \Rightarrow$ La función es $y = 4x + 36$.

d) $n = -7$ y $m = \dfrac{-7-3}{0-(-5)} = \dfrac{-10}{5} = -2 \Rightarrow$ La función es $y = -2x - 7$.

e) $m = \dfrac{18-(-3)}{4-1} = \dfrac{21}{3} = 7 \Rightarrow y = 7x + n \Rightarrow -3 = 7 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -10 \Rightarrow$ La función es $y = 7x - 10$.

64. Halla la ecuación de la función de proporcionalidad directa cuya gráfica es paralela a $y = -3x + 5$.

Como es paralela, tiene la misma pendiente $m = -3$, y como es de proporcionalidad directa, pasa por (0, 0), luego su ecuación es $y = -3x$.

65. Halla la ecuación de la recta paralela a $y = 5 - 3x$ que cumpla la condición pedida en cada caso.

a) Su ordenada en el origen es -3.

b) Pasa por el punto $(0, 7)$.

c) Pasa por el punto $(7, -4)$.

d) Tiene la misma ordenada en el origen que $y = 6 - 4x$.

Como es paralela, en todos los casos tiene la misma pendiente, $m = -3$.

a) $y = -3x - 3$

b) $y = -3x + 7$

c) $y = -3x + n \Rightarrow -4 = -3 \cdot 7 + n \Rightarrow n = 17 \Rightarrow y = -3x + 17$

d) $n = 6 \Rightarrow y = -3x + 6$

66. Actividad resuelta.

67. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos indicados de dos maneras distintas.

a) $(-2, 2)$ **y** $(2, 14)$

b) $(3, -7)$ **y** $(7, 40)$

c) $(0, 4)$ **y** $(5, -6)$

d) $(1, 3)$ **y** $(3, 12)$

a) $m = \dfrac{14-2}{2-(-2)} = \dfrac{12}{4} = 3 \Rightarrow y = 3x + n \Rightarrow 2 = 3 \cdot (-2) + n \Rightarrow n = 8 \Rightarrow y = 3x + 8$

$$\begin{cases} 2 = -2m + n \\ 14 = 2m + n \end{cases} \Rightarrow 16 = 2n \Rightarrow n = 8 \Rightarrow 14 = 2m + 8 \Rightarrow m = \frac{14-8}{2} = 3 \Rightarrow y = 3x + 8$$

b) $m = \dfrac{40-(-7)}{7-3} = \dfrac{47}{4} \Rightarrow y = \dfrac{47}{4}x + n \Rightarrow -7 = 3 \cdot \dfrac{47}{4} + n \Rightarrow n = \dfrac{-169}{4} \Rightarrow y = \dfrac{47}{4}x - \dfrac{169}{4}$

$$\begin{cases} -7 = 3m + n \\ 40 = 7m + n \end{cases} \Rightarrow 47 = 4m \Rightarrow m = \frac{47}{4} \Rightarrow y = \frac{47}{4}x + n \Rightarrow -7 = \frac{47}{4} \cdot (-3) + n \Rightarrow n = \frac{-169}{4} \Rightarrow y = \frac{47}{4}x - \frac{169}{4}$$

c) $n = 4,\ m = \dfrac{-6-4}{5-0} = -2 \Rightarrow y = -2x + 4$

$$\begin{cases} 4 = 0m + n \\ -6 = 5m + n \end{cases} \Rightarrow n = 4 \Rightarrow m = \frac{-6-4}{5} = -2 \Rightarrow y = -2x + 4$$

d) $m = \dfrac{12-3}{3-1} = \dfrac{9}{2} \Rightarrow y = \dfrac{9}{2}x + n \Rightarrow 3 = \dfrac{9}{2} + n \Rightarrow n = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{9}{2}x - \dfrac{3}{2}$

$$\begin{cases} 3 = m + n \\ 12 = 3m + n \end{cases} \Rightarrow 9 = 2m \Rightarrow m = \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{2}x + n \Rightarrow 3 = \frac{9}{2} + n \Rightarrow n = \frac{-3}{2} \Rightarrow y = \frac{9}{2}x - \frac{3}{2}$$

68. Dibuja una función que cumpla las condiciones pedidas en cada caso.

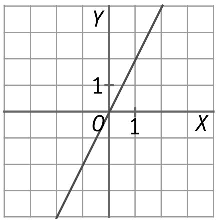
a) Es una función creciente y de proporcionalidad directa.

b) Es una función lineal y decreciente.

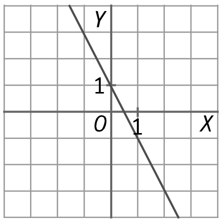
c) Es una función lineal, creciente y pasa por $A(1, -7)$.

Respuesta modelo:

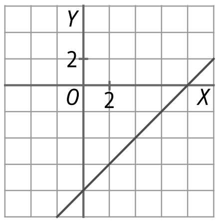
a)



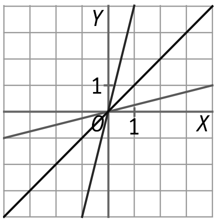
b)



c)



69. Dibuja en los mismos ejes cartesianos las rectas $y = 4x$ e $y = \frac{1}{4}x$. A continuación, dibuja la recta $y = x$. ¿Cómo son las dos primeras rectas respecto de la tercera?



Las rectas $y = 4x$ e $y = \frac{1}{4}x$ son simétricas respecto de $y = x$.

70. Actividad resuelta.

71. Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas sin representarlas gráficamente sobre un mismo plano cartesiano.

a) $\begin{cases} r: y - 4 = -8(x+2) \\ s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{-16} \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: y = 3(x+2) - 5x \\ s: y - 1 = \dfrac{9x-7}{3} \end{cases}$

a) $\begin{cases} r: y - 4 = -8(x+2) \Rightarrow y = 4 - 8x - 16 \Rightarrow y = -8x - 12 \\ s: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+5}{-16} \Rightarrow -16x + 48 = 2y + 10 \Rightarrow -16x + 38 = 2y \Rightarrow y = -8x + 19 \end{cases}$

En ambos casos la pendiente es –8; por tanto, son rectas paralelas.

b) $\begin{cases} r: y = 3(x+2) - 5x \Rightarrow y = 3x + 6 - 5x \Rightarrow y = -2x + 6 \\ s: y - 1 = \dfrac{9x-7}{3} \rightarrow y = 1 + 3x - \dfrac{7}{3} \Rightarrow y = 3x - \dfrac{4}{3} \end{cases}$

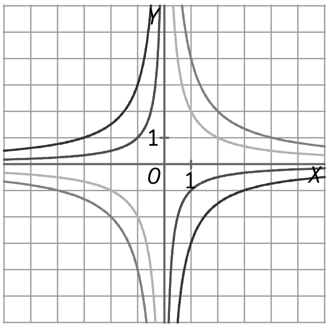
Son rectas secantes.

72. Indica cuáles de las siguientes funciones son inversas.

a) $y = \frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{x}{2}$ **c)** $10y = x$ **d)** $y = -\frac{1}{5}x$

Solo es inversa a) $y = \frac{1}{x}$.

73. Relaciona cada ecuación con la gráfica del plano cartesiano correspondiente.



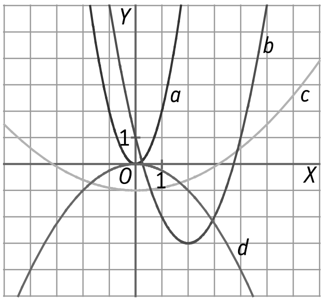
A. $y = \frac{2}{x}$ **C.** $y = \frac{4}{x}$

B. $y = \frac{-1}{x}$ **D.** $y = \frac{-3}{x}$

A. Verde **C.** Naranja

B. Roja **D.** Violeta

74. Asocia cada función con su gráfica, teniendo en cuenta su forma y los puntos de corte con los ejes.



A. $y = 0{,}1x^2 - 1$ **C.** $y = x^2 - 4x + 1$

B. $y = 2x^2$ **D.** $y = -\frac{1}{4}x^2$

A. *c* **C.** *b*

B. *a* **D.** *d*

75. ¿Una función lineal es continua? ¿Y una función cuadrática? ¿Y una función de proporcionalidad inversa? Explica por qué en cada caso.

Las funciones lineal y cuadrática son continuas, sus gráficas respectivas (recta y parábola) no presentan saltos.

La función de proporcionalidad inversa no es continua en $x = 0$.

76. Al calcular la ecuación de la recta que pasa por $(2, 3)$ y $(5, 18)$ se toman los puntos en ese orden. ¿Se obtendrá la misma ecuación si se toman en el orden contrario?

Sí, se obtendrá la misma ecuación. Al calcular la pendiente, en el primer caso se obtiene $m = \frac{18-3}{5-2} = \frac{15}{3} = 5$, y en el segundo, $m = \frac{-15}{-3} = 5$. Para calcular *n* se puede usar también cualquiera de los puntos, no influye el orden.

77. Calcula la ecuación de cada recta a partir de los datos indicados.

a) La ordenada en el origen es 4 y pasa por $(1, 2)$.

b) Pasa por $A(2, -3)$ y $B(4, -11)$.

c) Es paralela a $y = -2x - 5$ por $A(4, 1)$.

a) $y = mx + 4 \Rightarrow 2 = m \cdot 1 + 4 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y = -2x + 4$

b) $m = \frac{-11-(-3)}{4-2} = \frac{-8}{2} = -4 \Rightarrow y = -4x + n \Rightarrow -3 = -4 \cdot 2 + n \Rightarrow n = 5 \Rightarrow y = -4x + 5$

c) $m = -2 \Rightarrow y = -2x + n \Rightarrow 1 = -2 \cdot 4 + n \Rightarrow n = 9 \Rightarrow y = -2x + 9$

78. Estudia si los puntos $A(2, 5)$, $B(4, 13)$ y $C(74, 293)$ están alineados, hallando la ecuación de la recta que pasa por *A* y *B* y comprobando si *C* pertenece a la misma.

Hallamos la recta que pasa por *A* y *B*: $m = \frac{13-5}{4-2} = 4 \Rightarrow y = 4x + n \Rightarrow 5 = 4\cdot 2 + n \Rightarrow n = -3 \Rightarrow y = 4x - 3$.

Comprobamos si *C* pertenece a ella: $4\cdot 74 - 3 = 296 - 3 = 293$.

A, *B* y *C* están alineados.

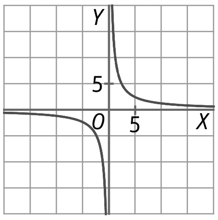
79. El producto de dos números es 12.

a) Calcula la función que permite obtener un número a partir del otro.

b) ¿De qué tipo es la función? Esboza su gráfica.

a) $y = \frac{12}{x}$

b) Es una función de proporcionalidad inversa**.**

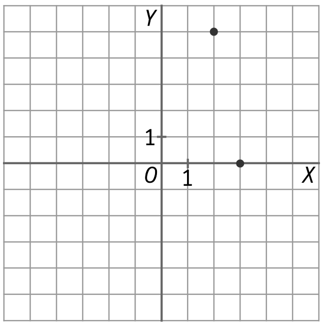


80. Una parábola tiene el vértice en (2, 5) y corta el eje *X* en (3, 0).

a) Representa ambos puntos. ¿Qué forma tiene la parábola?

b) Halla el otro punto de corte con el eje *X*.

a) Tiene las ramas abiertas hacia abajo.



b) Como la parábola tiene el eje de simetría en $x = 2$, el otro punto de corte es (1, 0).

81. Halla la ecuación de la recta paralela a $y = -3x + 6$ con ordenada en el origen igual a la de la recta $y = -x - 2$.

Si es paralela a $y = -3x + 6$, su pendiente es $m = -3$. Su ordenada en el origen es la misma que la de $y = -x - 2$, $n = -2$. La recta es $y = -3x - 2$.

82. Si se conocen dos puntos de una parábola que tengan la misma ordenada, se puede calcular la abscisa de su vértice, ya que es la media de las de esos dos puntos. La parábola $y = x^2 - 6x + 5$ corta el eje *X* en (1, 0) y en (5, 0). ¿Cuáles serán las coordenadas de su vértice?

La media de 1 y 5 es $x = \frac{1+5}{2} = 3 \Rightarrow y = 3^2 - 6\cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$.

El vértice es el punto (3, –4).

83. Julia realiza un cuestionario a sus alumnos en clase, y por cada respuesta correcta les suma 0,1 puntos, hasta un máximo de 2 puntos.

a) Construye la tabla de valores y calcula la fórmula de la función que relaciona las respuestas correctas con la puntuación obtenida.

b) ¿Cuál es el número máximo de respuestas que se pueden dar, si no se pueden sacar más de 2 puntos?

a) Llamamos *x* a las respuestas correctas e *y* a la puntuación obtenida.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2

La función es $y = 0{,}1x$.

b) Se pueden dar un máximo de 20 respuestas correctas.

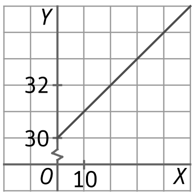
84. Alquilar un coche cuesta 30 €, a lo que hay que sumarle 10 € por cada 100 km recorridos.

a) Escribe la función que permite calcular el coste del alquiler en función de los kilómetros recorridos.

b) Representa la gráfica de la función.

a) $y = 30 + 10 \cdot \dfrac{x}{100} \Rightarrow y = \dfrac{1}{10}x + 30$

b)



85. Un comercial cobra un sueldo fijo mensual de 600 €, más el 10 % de las ventas que realice.

a) Escribe la función que permite calcular el salario mensual en relación con el dinero que han supuesto sus ventas.

b) ¿De qué tipo de función se trata?

c) Si el vendedor quiere ganar al menos 1000 €, ¿cuáles tienen que ser sus ventas?

d) El mes pasado ganó 1700 €. ¿Cuál fue el importe de sus ventas?

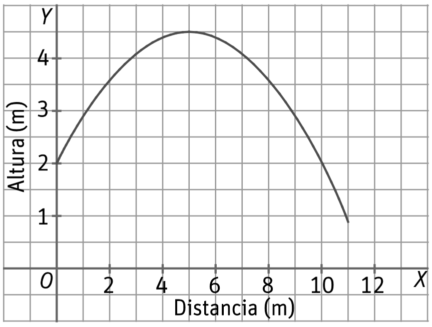
a) Si *x* son las ventas e *y* el salario mensual, $y = 600 + \dfrac{x}{10}$.

b) Es una función lineal.

c) $1000 = 600 + \dfrac{x}{10} \Rightarrow 400 = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 4000$. Debe obtener 4000 € en ventas.

d) $1700 = 600 + \dfrac{x}{10} \Rightarrow 1100 = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 11\,000$. El importe de sus ventas fue de 11 000 €.

86. Daniel tira una pelota a su primo Jesús por encima de una valla.



a) ¿Desde qué altura lanzó la pelota?

b) ¿Jesús pudo cogerla antes de que cayera?

c) ¿A qué distancia estaban los dos?

a) Desde 2 m de altura.

b) Sí, la cogió a 1 m de altura.

c) Estaban a 11 m de distancia.

87. Un biólogo tiene varios cultivos en su laboratorio. El aire acondicionado se estropeó, y el termómetro de la sala ha recogido los datos que aparecen en la gráfica.

a) Describe los cambios de temperatura entre las 12.00 y las 21.00.

b) ¿Cuál fue la temperatura máxima? ¿Y la mínima?

c) La alarma del laboratorio suena si la temperatura supera los 23 ºC. ¿Cuánto tiempo estuvo sonando, aproximadamente?

a) La temperatura empezó a subir antes de las 12.00, primero lentamente y luego más deprisa, hasta alcanzar un máximo de 27 ºC a las 16.00.

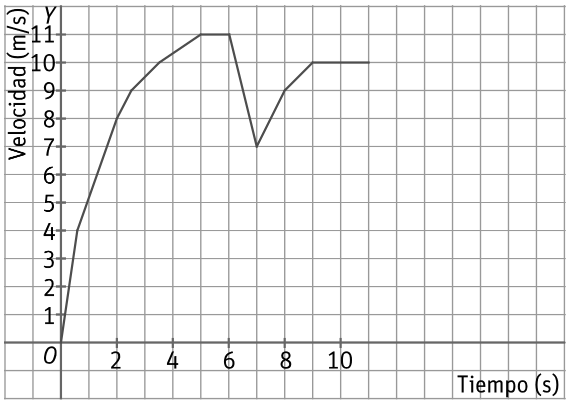
Después, la temperatura bajó hasta alcanzar los 20 ºC a las 17.00 y siguió descendiendo durante la siguiente hora de manera más suave, con lo que a las 18.00 había 19 ºC.

Hasta las 19.00, la temperatura subió hasta los 22 ºC. En ese momento se produjo otro descenso en la temperatura del laboratorio, hasta llegar a los 21 ºC a las 20.00.

b) Se alcanzó un máximo de 27 ºC y un mínimo de 19 ºC.

c) Estuvo sonando durante una hora y media aproximadamente.

88. Después de cada entrenamiento, el entrenador de un corredor de 100 m lisos le muestra unas gráficas en las que se refleja su velocidad durante la carrera.



a) ¿Qué ocurre en los primeros segundos de carrera?

b) ¿Cuánto tarda en alcanzar su velocidad máxima? ¿Cuál es esa velocidad?

c) Explica la gráfica a partir de los seis segundos. ¿Qué crees que puede haber ocurrido?

d) ¿Cuánto tarda en recorrer los 100 metros?

a) Es la etapa de mayor aceleración.

b) Tarda cinco segundos en alcanzar los 11 m/s.

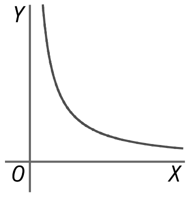
c) Por alguna razón (un tropezón, por ejemplo) pierde velocidad, tarda un segundo en recuperarse y volver a acelerar, aunque no llega a recuperar su velocidad máxima.

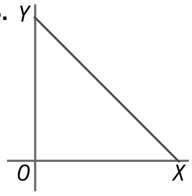
d) Tarda 11 segundos.

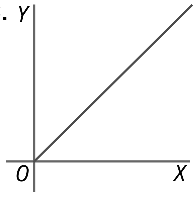
89. Varios amigos alquilan una casa rural por 300 €. Encuentra la función que relaciona el número de amigos y la cantidad que tendrá que pagar cada uno.

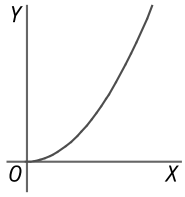
Si x es el número de amigos e y la cantidad que tendrá que pagar cada uno: $y = \dfrac{300}{x}$.

90. ¿Qué gráfica representa las dimensiones de un rectángulo de área igual a 12 cm²?

A. 

B. 

C. 

D. 

Si x e y son las medidas de los lados del rectángulo, su área será $xy = 12 \Rightarrow y = \frac{x}{12}$.

La respuesta correcta es A.

91. El punto de corte de las rectas $y = 3x - 5$ e $y = -4x + 2$ es:

A. $(-1, 2)$ **B.** $(-1, -2)$ **C.** $(1, 2)$ **D.** $(1, -2)$

$3x - 5 = -4x + 2 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3 \cdot 1 - 5 = -2$

La respuesta correcta es D. $(1, -2)$.

92. Si el punto (x, –4) está en la recta que pasa por los puntos (0, 8) y (–4, 0), el valor de x es:

A. –2 **B.** 2 **C.** –8 **D.** –6

La pendiente de la recta es $m = \frac{0-8}{-4-0} = 2 \Rightarrow$ La recta es $y = 2x + 8$.

Para el punto $(x, -4) \Rightarrow -4 = 2x + 8 \Rightarrow -12 = 2x \Rightarrow x = -6$

La respuesta correcta es D. –6.

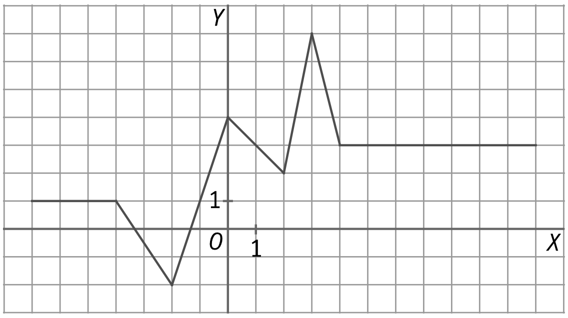
93. Las rectas $y = 4x - 4a$ e $y = 0{,}25x + b$ se cortan en el punto (1, 2). ¿Cuál es el valor de $a + b$?

A. 0,5 **B.** 1,75 **C.** 2,25 **D.** 2,5

$$\begin{cases} 2 = 4 \cdot 1 - 4a \Rightarrow -2 = -4a \Rightarrow a = 0{,}5 \\ 2 = 0{,}25 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1{,}75 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2{,}25$$

La respuesta correcta es C. 2,25.

94. Pablo está describiendo una función a partir de su gráfica, pero ha cometido algunos errores. Encuentra tres errores en la descripción y corrígelos.



- **El dominio va de –6 a 7.**
- **El recorrido es [–2, 7].**
- **Corta los ejes en tres puntos.**
- **Decrece de –4 a –2 y crece de –2 a 4.**
- **Tiene dos extremos absolutos y dos extremos relativos.**
- **Tiene un máximo absoluto en 7.**
- **El mínimo absoluto es (–2, –2).**

- El dominio va de –7 a 11.
- Decrece de –4 a –2 y crece de –2 a 0.
- Tiene un máximo absoluto en x = 3.

PONTE A PRUEBA

Velocidad de un coche de carreras

Actividad resuelta.

El gimnasio

José tiene cerca de su casa dos gimnasios con distintas ofertas y no sabe a cuál de los dos acudir para ejercitarse.

Gimnasio A	Gimnasio B
Cuota de inscripción: 40 €. Cuota mensual: 20 €. Se pagan los primeros seis meses por adelantado. (Ese dinero no se devuelve, aunque el cliente se dé de baja). A partir de ahí, se paga mes a mes.	Sin cuota de inscripción. Cuota mensual: 40 €. Se pagan los primeros tres meses por adelantado. (No se devuelve el dinero). Después se paga mes a mes.

1. **¿Cuánto pagará, como mínimo, si se apunta al primer gimnasio? ¿Y si se apunta al segundo?**
2. **¿Cuál de las dos ofertas le resulta más rentable si piensa ir durante todo el año?**
3. **José no sabe cuántos meses terminará yendo al gimnasio este año. Estudia qué oferta le resulta más económica, hasta un máximo de 12 meses.**

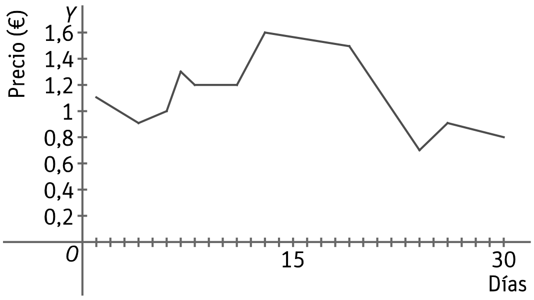
1. Aunque no vaya, pagará $40 + 6 \cdot 20 = 160$ € en el gimnasio A, y $40 \cdot 3 = 120$ € en el gimnasio B.
2. Por 12 meses paga 40 + 20 · 12 = 280 € en el gimnasio A y $40 \cdot 12 = 480$ € en el gimnasio B. El A es más rentable.
3. Como en cada gimnasio hay que pagar por adelantado un número distinto de meses, lo más cómodo es hacer una tabla comparativa del total pagado en cada uno.

Meses	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	160	160	160	160	160	160	160	180	200	220	240	260	280
B	120	120	120	120	160	200	240	280	320	360	400	440	480

Hasta tres meses es más barato el gimnasio B. Si va cuatro meses, salen por el mismo precio, y a partir del quinto mes es más barato el gimnasio A.

La Bolsa

En la gráfica aparece el precio de las acciones de una compañía en la Bolsa a lo largo de un mes.



1. **¿Es la gráfica de una función? Identifica las variables dependiente e independiente.**
2. **Describe la evolución del precio de las acciones.**
3. **Mónica compró 1000 acciones el día 6 y las vendió el día 19. ¿Cuánto dinero ganó o perdió?**
4. **Ángel compró 1250 acciones el día 13 y vendió 750 el día 24, y el resto, el día 26. ¿Cuánto dinero ganó o perdió?**
5. **¿Cuál es el mayor beneficio que se podría haber sacado negociando con 2000 acciones?**

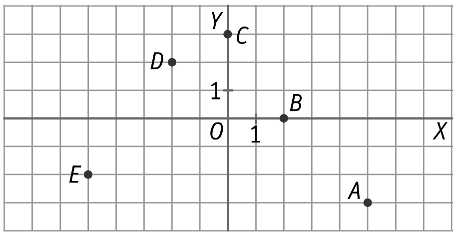
1. Sí, es la gráfica de una función. La variable dependiente es el precio, y la independiente, el tiempo.
2. El precio ha variado bastante en ese mes, tendiendo al alza en la primera quincena y descendiendo en la segunda. A final de mes, las acciones cuestan unos 30 céntimos menos que al principio.
3. El día 6, las acciones costaban 1 €, por lo que gastó 1000 €. El día 19 estaban a 1,50 €, así que las vendió por $1000 \cdot 1{,}5 = 1500$ €. En total ganó $1500 - 1000 = 500$ €.
4. Ángel compró 1250 acciones a 1,50 € y vendió 750 a 0,70 € y 500 a 0,90 €. Por tanto,

   $-1250 \cdot 1{,}5 + 750 \cdot 0{,}7 + 500 \cdot 0{,}9 = -1875 + 525 + 450 = -900$

   Perdió 900 €.
5. Comprándolas el día 4 a 0,90 € y vendiéndolas el día 13 a 1,60 €, se ganan $(1{,}6 - 0{,}9) \cdot 2000 = 0{,}7 \cdot 2000 = 1400$ €.

AUTOEVALUACIÓN

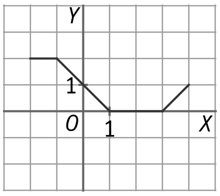
1. Escribe las coordenadas de los puntos representados.



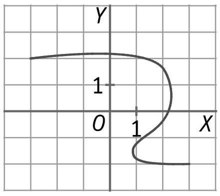
$A(5,-3)$ $B(2,0)$ $C(0,3)$ $D(-2,2)$ $E(-5,-2)$

2. ¿Representan funciones las gráficas siguientes? Indica el dominio y recorrido en caso afirmativo.

a)



b)



a) Sí es una función. Su dominio es $D(f)=[-2,4]$, y su recorrido, $R(f)=[0,2]$.

b) No es una función, ya que, por ejemplo, a $x=1$ le corresponden dos valores de *y*.

3. Dos magnitudes están relacionadas mediante la siguiente fórmula: $y=3x-1$.

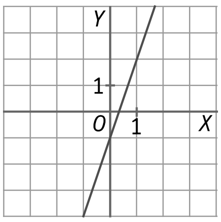
a) Construye la tabla de valores correspondiente.

b) Representa la gráfica.

a)

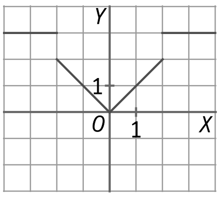
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–10	–7	–4	–1	2	5	8

b)

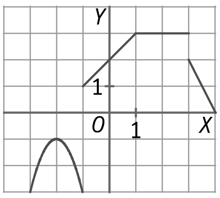


4. Estudia puntos de discontinuidad de estas funciones.

a)



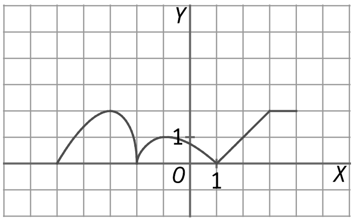
b)



a) Es discontinua en $x=-2$ y $x=2$.

b) Es discontinua en $x=-1$ y $x=3$.

5. Estudia el dominio, el crecimiento, el decrecimiento y los extremos de la siguiente función.



$D(f) = [-5,\ 4]$

Creciente: de $x = -5$ a $x = -3$, de $x = -2$ a $x = -1$ y de $x = 1$ a $x = 3$

Decreciente: de $x = -3$ a $x = -2$ y de $x = -1$ a $x = 1$

Constante: de $x = 3$ a $x = 4$

Máximo relativo: $(-3,\ 2)$ y $(-1,\ 1)$. Mínimo relativo: $(-2,\ 0)$ y $(1,\ 0)$

6. Indica la posición relativa de las siguientes rectas, escribiéndolas en forma explícita.

a) $\begin{cases} \boldsymbol{r: 3x - y + 7 = 0} \\ \boldsymbol{s: y = \dfrac{-1}{3}x + 7} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \boldsymbol{r: 5x - 4y + 9 = 0} \\ \boldsymbol{s: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{5}} \end{cases}$

a) $\begin{cases} r: 3x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 3x + 7 \\ s: y = \dfrac{-1}{3}x + 7 \end{cases}$

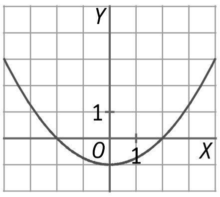
Son rectas secantes.

b) $\begin{cases} r: 5x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{9}{4} \\ s: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+3}{5} \Rightarrow y + 3 = \dfrac{5}{4}(x-1) \Rightarrow y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{17}{4} \end{cases}$

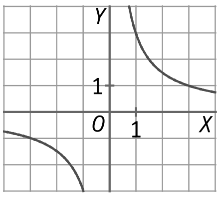
Tienen la misma pendiente $m = \dfrac{5}{4} \Rightarrow$ son paralelas.

7. Estudia las características de las siguientes funciones.

a)



b)



a) Función cuadrática, abierta hacia arriba, con el vértice en (0, –1), que corta el eje *X* (–2, 0) y (2, 0) y el eje *Y* en (0, –1).

b) Función de proporcionalidad inversa. Como pasa por (1, 3), se deduce que $y = \dfrac{3}{x}$.

8. Un *pendrive* tiene una velocidad de transferencia de datos de 10 MB/s. Al empezar a copiar datos, el *pendrive* tenía ya 150 MB de datos. Construye una tabla de valores relacionando el tiempo transcurrido y el tamaño almacenado, en las unidades adecuadas. ¿Qué función relaciona ambas variables?

***x* (s)**	0	1	2	3	4	5	6
***y* (MB)**	150	160	170	180	190	200	210

La función es $y = 150 + 10x$.

9 Medidas. Teorema de Pitágoras

1. Indica algún instrumento de medida que consideres adecuado para cada una de las siguientes situaciones.

a) Amueblar una habitación.

b) Darle jarabe para la tos a un niño pequeño.

c) Obtener las marcas obtenidas en unos juegos escolares que incluyen salto de longitud, de altura y lanzamiento de peso.

d) Duración de una canción de tu artista favorito.

e) Saber si las maletas cumplen los requisitos para poder subirlas al avión.

a) Cinta métrica

b) Jeringa

c) Cinta métrica

d) Cronómetro

e) Báscula

2. Propón tres ejemplos de situaciones en los que es necesario dar una medida exacta y tres ejemplos en los que una estimación sería suficiente.

Medida exacta:

- La masa de una bolsa de naranjas de la frutería.
- La cantidad de jarabe que debe tomar un enfermo.
- El tiempo que tarda un ciclista en recorrer una etapa.

Medida estimada:

- La masa de la mochila de un excursionista.
- La distancia entre las farolas de la calle.
- El tiempo que tarda en llegar un autobús a la parada.

3. Arturo quiere estimar el tiempo que va a tardar en montar en la montaña rusa. Para ello observa que la fila avanza unos 10 m cada 5 minutos.

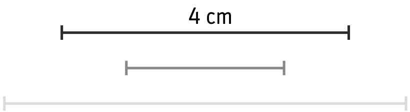
a) ¿Cuánto tiempo le falta para montar si hay 60 m hasta el comienzo de la fila?

b) ¿Cuántas personas hay delante de Arturo si estima que hay 6 por cada metro?

a) Le faltan $60:10\cdot 5=30$ minutos, es decir, media hora.

b) Hay $60\cdot 6=360$ personas delante de Arturo.

4. Fíjate en el primer segmento y estima la medida de los otros dos segmentos.



Mide los segmentos con una regla y calcula el error que has cometido con tu estimación.

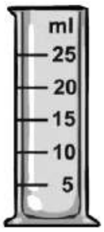
Segmento corto: 2 cm estimados y 2,2 cm reales. Error: $E_A=|2{,}2-2|=0{,}2\Rightarrow E_R=\dfrac{0{,}2}{2{,}2}=0{,}09\Rightarrow 9{,}09\,\%$

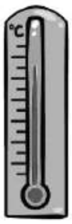
Segmento largo: 6 cm estimados y 5,6 cm reales. Error: $E_A=|5{,}6-6|=0{,}4\Rightarrow E_R=\dfrac{0{,}4}{5{,}6}=0{,}0714\Rightarrow 7{,}14\,\%$

5. **Para medir el tiempo se ha utilizado un reloj digital de un segundo de precisión y un cronómetro que es capaz de apreciar hasta la décima de segundo. Indica una cota del error que se comete al realizar medidas con cada aparato.**

Reloj digital: E < 1 s　　　　Cronómetro: E < 0,1 s

6. **Indica la medida que marca cada aparato de medida y señala la cota del error cometido en cada una de ellas.**





Probeta: capacidad; E < 5 ml

Peso: masa; E < 100 g

Termómetro: temperatura; E < 0,5ºC

7. **Un palmo de Jorge mide entre 16 y 17 cm. Ha medido su pupitre y ha contado 3 palmos. ¿Entre qué dos valores estará comprendida la verdadera medida del pupitre? ¿Cuál es el error máximo de la estimación?**

La verdadera medida estará comprendida entre $16\cdot 3=48$ y $17\cdot 3=51$ cm.

El error máximo de estimación es $|51-48|=3$ cm.

8. **Expresa las siguientes medidas en forma incompleja en la unidad que se indica en cada caso**.

a) **6° 12' 24" en grados**　　　　**c)** **3 h 45 min 23 s en minutos**

b) **12 h 20 min 15 s en segundos**　　　　**d)** **35° 5' 45" en minutos**

a) $6°\ 12'\ 24''=6+12:60+24:3600=6+0,2+0,00\widehat{6}=6,20\widehat{6}°$

b) $12\text{ h }20\text{ min }15\text{ s}=12\cdot 3600+20\cdot 60+15=43\,200+1200+15=44\,415\text{ s}$

c) $3\text{ h }45\text{ min }23\text{ s}=3\cdot 60+45+23:60=180+45+0,38\widehat{3}=225,38\widehat{3}\text{ min}$

d) $35°\ 5'\ 45''=35\cdot 60+5+45:60=2100+5+0,75=2105,75'$

9. **Expresa en forma compleja las siguientes medidas de tiempo y ángulos.**

a) **2,5 horas**　　　　**c)** **195 min**

b) **57,34°**　　　　**d)** **480,35"**

a) $2,5\text{ horas}=2\text{ h }30\text{ min}$　　　　**c)** $195\text{ min}=3\text{ h }15\text{ min}$

b) $57,34°=57°\ 20'\ 24''$　　　　**d)** $480,35''=8'\ 0,35''$

10. **Una película dura 172,3 minutos. ¿Le dará tiempo a Jesús a verla si tiene 2 horas y media libres?**

$2\text{ horas y media }=2\cdot 60+30=150\text{ min}$

Como 150 min < 172,3 min, a Jesús no le dará tiempo a ver la película.

11. **Realiza las siguientes operaciones.**

a) **12 h 12 min 50 s + 25 h 12 min 45 s**　　　　**c)** **6 · (1 h 10 min 23 s)**

b) **66° 25' 12" − 26° 45' 12"**　　　　**d)** **(56° 14' 15") : 3**

a) 12 h 12 min 50 s + 25 h 12 min 45 s = 37 h 25 min 35 s

b) $66°\ 25'\ 12''-26°\ 45'\ 12''=39°\ 40'$

c) $6\cdot(1\text{ h }10\text{ min }23\text{ s})=7\text{ h }2\text{ min }18\text{ s}$

d) $(56°\ 14'\ 15''):3=18°\ 44'\ 45''$

12. ¿Cuánto miden los dos ángulos que se obtienen al trazar la bisectriz del ángulo $A = 61° \ 20' \ 12''$?

La bisectriz divide un ángulo en dos ángulos iguales: $61° \ 20' \ 12'' : 2 = 30° \ 40' \ 6''$.

Los ángulos que se obtienen miden $30° \ 40' \ 6''$.

13. Elia ha anotado el tiempo que tarda en llegar el tren.

Lunes	**10 min 35 s**
Martes	**8,52 min**
Miércoles	**755 s**
Jueves	**5 min 55 s**
Viernes	**10,35 min**

a) ¿Qué día ha tenido que esperar más tiempo?

b) ¿Cuánto tiempo ha esperado en total esta semana?

a) Pasamos todos los tiempos a la misma unidad:

$10 \text{ min } 35 \text{ s} = 635 \text{ s}$ $\quad$ $8{,}52 \text{ min} = 511{,}2 \text{ s}$

$5 \text{ min } 55 \text{ s} = 355 \text{ s}$ $\quad$ $10{,}35 \text{ min} = 621 \text{ s}$

El miércoles fue el día que esperó más tiempo el tren.

b) En total ha esperado $635 + 511{,}2 + 755 + 355 + 621 = 2877{,}2 \text{ s} = 47 \text{ min } 57{,}2 \text{ s}$.

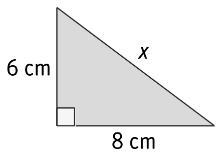
14. Actividad resuelta

15. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 cm, y uno de los catetos, 12 cm. ¿Cuánto mide el otro cateto?

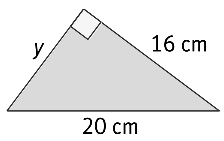
El otro cateto mide $a = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9$ cm.

16. Calcula el lado desconocido de los siguientes triángulos rectángulos.

a)



b)



a) $x = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ cm

b) $y = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ cm

17. ¿Cuáles de los siguientes tríos de números son ternas pitagóricas?

A. 32, 40, 50 $\quad$ **B. 12, 35, 37** $\quad$ **C. 15, 20, 25** $\quad$ **D. 10, 200, 41**

A. $32^2 + 40^2 = 1024 + 1600 = 2624 \neq 50^2$. No es una terna pitagórica.

B. $12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369 = 37^2$. Sí es una terna pitagórica

C. $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2$. Sí es una terna pitagórica

D. $10^2 + 41^2 = 100 + 1681 = 1781 \neq 200^2$. No es una terna pitagórica.

18. Clasifica los siguientes triángulos.

a) $\boldsymbol{a = 11,\ b = 60,\ c = 61}$ $\quad$ **b)** $\boldsymbol{a = 8,\ b = 4,\ c = 8}$ $\quad$ **c)** $\boldsymbol{a = 15,\ b = 18,\ c = 8}$

a) $a^2 = 121,\ b^2 = 3600,\ c^2 = 3721 \Rightarrow 3721 = 121 + 3600 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$. Triángulo rectángulo

b) $a^2 = 64,\ b^2 = 16,\ c^2 = 64 \Rightarrow 64 < 64 + 16 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$. Triángulo acutángulo

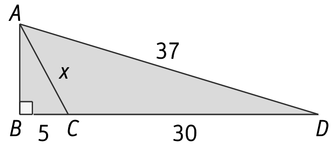
c) $a^2 = 225,\ b^2 = 324,\ c^2 = 64 \Rightarrow 324 > 225 + 64 \Rightarrow b^2 > a^2 + c^2$. Triángulo obtusángulo

19. Averigua el perímetro de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden 20 cm cada uno.

El lado que falta coincide con la hipotenusa: $h = \sqrt{20^2+20^2} = \sqrt{800} = 28{,}28$ cm

El perímetro es $P = 20+20+28{,}28 = 68{,}28\text{cm}$

20. Halla la longitud del lado desconocido, *x*.



El lado $\overline{AB}$ es el cateto menor del triángulo *ABD*:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2} = \sqrt{37^2-(5+30)^2} = \sqrt{1369-1225} = \sqrt{144} = 12$$

El *x* es la hipotenusa del triángulo *ABC*:

$$x = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$$

21. Dos lados de un triángulo miden 6 cm y 10 cm. ¿Cuánto puede medir el tercer lado para que el triángulo sea obtusángulo? ¿Y para que sea acutángulo?

Para que tengamos un triángulo, el tercer lado *a* debe verificar (tanto si es el lado mayor como si no) que $10-6 < a < 10+6$

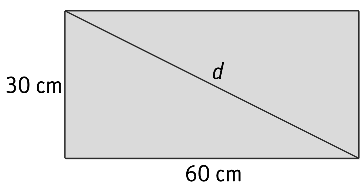
Para que sea obtusángulo:

- Si *a* es el lado mayor: $a^2 > 6^2+10^2 = 36+100 = 136 \to a > \sqrt{136} \to a > 11{,}66$ cm y $a < 16$ cm
- Si *a* no es el lado mayor: $10^2 > a^2+6^2 = a^2+36 \to 100-36 > a^2 \to \sqrt{64} > a \to 8 > a \to a < 8\text{cm}$ y $a > 4$ cm

Para que sea acutángulo:

- Si *a* es el lado mayor: $a^2 < 6^2+10^2 = 36+100 = 136 \to a < \sqrt{136} \to a < 11{,}66\text{cm}$ y. $a \geq 10$ cm
- Si *a* no es el lado mayor: $10^2 < a^2+6^2 = a^2+36 \to \sqrt{100-36} < a \to \sqrt{64} < a \to 8 < a \to a > 8\text{cm}$ .y $a < 10$ cm

22. ¿Cuánto mide la diagonal de este rectángulo?



La diagonal divide el rectángulo en dos triángulos rectángulos y coincide con la hipotenusa.

$$d = \sqrt{30^2+60^2} = \sqrt{900+3600} = \sqrt{4500} = 67{,}08\text{cm}$$

23. Calcula la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 3 cm.

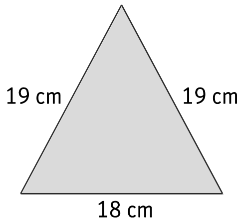
La diagonal divide el cuadrado en dos triángulos rectángulos iguales y coincide con la hipotenusa.

$$d = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 4{,}24\text{cm}$$

24. Si la diagonal de un cuadrado mide 12 cm, ¿Cuánto mide su lado?

$$12 = \sqrt{l^2+l^2} = \sqrt{2\cdot l^2} = \sqrt{2}\,l \Rightarrow l = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\cdot\sqrt{2} = 8{,}49\text{cm}$$

25. Calcula el área del siguiente triángulo isósceles.



Para calcular el área necesitamos conocer la altura del triángulo. Por ser isósceles, la altura sobre el lado desigual lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$$h=\sqrt{19^2-\left(\frac{18}{2}\right)^2}=\sqrt{19^2-9^2}=\sqrt{280}=16{,}73\,\text{cm}$$

Por tanto, el área del triángulo es: $A=\dfrac{18\cdot 16{,}73}{2}=150{,}57\,\text{cm}^2$.

26. Calcula la altura de un triángulo equilátero de 9 cm de lado. ¿Cuánto vale su área?

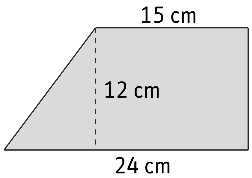
Por ser equilátero, cualquier altura lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$$h=\sqrt{9^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{9^2-4{,}5^2}=\sqrt{60{,}75}=7{,}79\,\text{cm}$$

El área del triángulo es: $A=\dfrac{9\cdot 7{,}79}{2}=35{,}06\,\text{cm}^2$.

27. Actividad resuelta

28. Calcula el perímetro de este trapecio.



Uno de los lados que faltan tiene igual longitud que la altura, 12 cm. El otro coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados miden 12 y $24-15=9$ cm. Por tanto, mide $\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=15$ cm.

El perímetro del trapecio es: $P=15+12+24+15=66$ cm.

29. Calcula el perímetro de un trapecio isósceles cuyas bases miden 8 cm y 14 cm y su altura mide 4 cm.

Como el trapecio es isósceles, los lados que faltan son iguales y coinciden con la hipotenusa del triángulo rectángulo, cuyos lados miden 4 cm y $\dfrac{14-8}{2}=3$ cm. Por tanto, miden $\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=5$ cm.

El perímetro del trapecio es: $P=8+14+2\cdot 5=32$ cm.

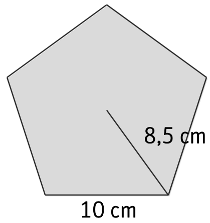
30. Un cuadrado de lado 7 cm está inscrito en una circunferencia. ¿Cuánto mide su radio?

La diagonal del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia y forma un triángulo rectángulo.

$d=\sqrt{7^2+7^2}=7\cdot\sqrt{2}=9{,}90$ cm.

Por tanto, el radio de la circunferencia mide: $9{,}90:2=4{,}95$ cm.

31. Calcula la apotema del siguiente pentágono regular.



La apotema, el radio y la mitad de un lado forman un triángulo rectángulo. Por tanto, la apotema mide:

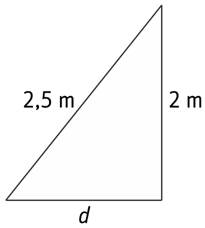
$\sqrt{8,5^2-\left(\frac{10}{2}\right)^2}=\sqrt{72,25-25}=6,87$ cm.

32. Calcula la medida de los lados iguales de un triángulo isósceles cuya altura mide 6 cm, y su base, 16 cm.

Por ser isósceles, la altura sobre el lado desigual lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

Por tanto, cada uno de los lados iguales mide: $\sqrt{6^2+\left(\frac{16}{2}\right)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$ cm.

33. La altura del muro del jardín de Ana es de 2 m. ¿A qué distancia del muro debe colocar una escalera de 2,5 m para que su extremo superior coincida exactamente con el punto más alto del muro?

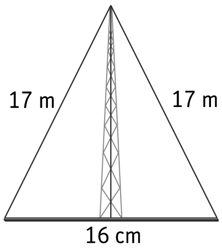


La escalera, el muro y la línea de tierra forman un triángulo rectángulo.

La distancia a la que debe colocar la escalera coincide con el cateto menor.

$d=\sqrt{2,5^2-2^2}=\sqrt{6,25-4}=1,5$ m

34. Una antena de telefonía está sujeta al suelo con dos cables iguales de 17 m de longitud. Si los cables están fijos a la misma distancia de la antena y entre ellos distan 16 cm, ¿cuál es la altura de la antena?



Los cables y el suelo forman un triángulo isósceles, de manera que la antena lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

Por tanto, la antena tendrá una altura de:

$h=\sqrt{17^2-\left(\frac{16}{2}\right)^2}=\sqrt{289-64}=15$ m

35. Lola ha preparado una empanada rectangular de 25 cm × 15 cm. Si la va a colocar en una fuente circular, ¿cuál debe ser el radio mínimo de la fuente para que la empanada no se salga?

La diagonal de la empanada coincide con el diámetro de la fuente y forma un triángulo rectángulo.

Por tanto, el radio mínimo es: $\frac{\sqrt{25^2+15^2}}{2}=\frac{\sqrt{625+225}}{2}=\frac{29,15}{2}=14,58$ cm.

36. Sergio ha instalado una piscina octogonal en el jardín y quiere colocar una valla a su alrededor. Si la apotema del octógono regular mide 2,77 m y el radio, 3 m, ¿qué longitud de valla necesita?

La apotema, el radio y la mitad de un lado forman un triángulo rectángulo.

Por tanto, el lado mide: $2\cdot\sqrt{3^2-2,77^2}=2\cdot\sqrt{9-7,6729}=2\cdot 1,15=2,30$ m.

Necesitará $8\cdot 2,30=18,4$ m de valla.

37. Actividad interactiva

38. Se ha medido la longitud de un lápiz y se ha obtenido un valor de 19,2 cm. La cota del error cometido es de 1 mm. ¿Entre qué dos valores estará la verdadera longitud del lápiz?

Como $|V_{real} - 19,2| = 0,1$, los valores de la longitud real del lápiz estarán entre $V_{real} = 19,1$ cm y $V_{real} = 19,3$ cm.

39. ¿Cuánto mide el segmento?

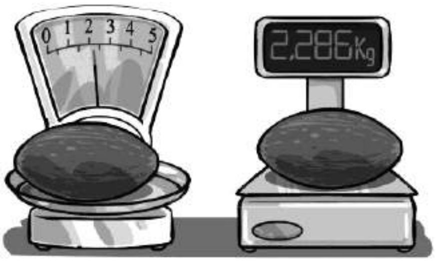
Indica la cota del error y entre qué dos valores se encuentra la verdadera longitud del segmento.

El segmento mide 6,8 cm.

La cota de error es E < 1 mm.

La verdadera longitud del segmento está entre 6,7 y 6,9 cm.

40. Calcula el error absoluto y relativo que se comete al usar la primera báscula en lugar de la segunda.



$$E_A = |2,286 - 2,250| = 0,036$$

$$E_R = \frac{0,036}{2,286} = 0,016 \Rightarrow 1,6\%$$

41. Calcula el error absoluto y relativo en cada caso.

a) En un centro educativo hay 956 alumnos, pero el director ha dicho que hay un millar.

b) La valla del jardín mide exactamente 1,52 m, aunque los vecinos dicen que mide un metro y medio.

c) En la receta pone que en un vaso caben 200 g de harina, pero al pesarlo he obtenido 206 g.

d) En la etiqueta de la bolsa de naranjas pone 1 kg, aunque la báscula marca 985 g.

a) $E_A = |956 - 1000| = 44 \Rightarrow E_R = \frac{44}{956} = 0,046 \Rightarrow 4,6\%$

b) $E_A = |1,52 - 1,50| = 0,02 \Rightarrow E_R = \frac{0,02}{1,52} = 0,013 \Rightarrow 1,3\%$

c) $E_A = |200 - 206| = 6 \Rightarrow E_R = \frac{6}{200} = 0,03 \Rightarrow 3\%$

d) $E_A = |1000 - 985| = 15 \Rightarrow E_R = \frac{15}{1000} = 0,015 \Rightarrow 1,5\%$

42. Estima los metros cuadrados que tiene tu clase. Hazlo contando pasos de aproximadamente un metro. Después y con la ayuda de una cinta métrica, comprueba si tu estimación es buena o mala.

Calcula el error absoluto y relativo cometido.

Respuesta libre

43. Con una regla graduada, Elena ha medido el largo y el ancho de un folio y ha obtenido 29,7 cm y 21 cm, respectivamente. La cota del error es de 1 mm. ¿Entre qué dos valores se encontrará el área del folio, en centímetros cuadrados? Indica la cota del error cometido.

Como $|V_{real} - 29,7| = 0,1$, los valores del largo del folio estarán entre $V_{real} = 29,6$ cm y $V_{real} = 29,8$ cm.

Como $|V_{real} - 21| = 0,1$, los valores del ancho del folio estarán entre $V_{real} = 20,9$ cm y $V_{real} = 21,1$ cm.

El área del folio estará entre $29,6 \cdot 20,9 = 618,64$ cm^2 y $29,8 \cdot 21,1 = 628,78$ cm^2.

La cota del error cometido será: $E = 628,78 - 618,64 = 10,14$ cm^2.

44. Pasa a segundos las siguientes cantidades de tiempo dadas en forma compleja.

a) 5 h 22 min 25 s **c) 2 h 2 min 44 s**

b) 123 h 48 min 59 s **d) 42 h 22 min 13 s**

a) $5 \text{ h } 22 \text{ min } 25 \text{ s} = 5 \cdot 3600 + 22 \cdot 60 + 25 = 18000 + 1320 + 25 = 19345 \text{ s}$

b) $123 \text{ h } 48 \text{ min } 59 \text{ s} = 123 \cdot 3600 + 48 \cdot 60 + 59 = 442800 + 2880 + 59 = 445739 \text{ s}$

c) $2 \text{ h } 2 \text{ min } 44 \text{ s} = 2 \cdot 3600 + 2 \cdot 60 + 44 = 7200 + 120 + 44 = 7364 \text{ s}$

d) $42 \text{ h } 22 \text{ min } 13 \text{ s} = 42 \cdot 3600 + 22 \cdot 60 + 13 = 151\,200 + 1320 + 13 = 152533 \text{ s}$

45. Pasa a segundos las siguientes medidas de ángulos en forma compleja.

a) 15° 12' 35" **c) 205° 2' 13"**

b) 125° 42' 39" **d) 300° 30' 30"**

a) $15^\circ\ 12'\ 35'' = 15 \cdot 3600 + 12 \cdot 60 + 35 = 54000 + 720 + 35 = 54755''$

b) $125^\circ\ 42'\ 39'' = 125 \cdot 3600 + 42 \cdot 60 + 39 = 450000 + 2520 + 39 = 452559''$

c) $205^\circ\ 2'\ 13'' = 205 \cdot 3600 + 2 \cdot 60 + 13 = 738000 + 120 + 13 = 738133''$

d) $300^\circ\ 30'\ 30'' = 300 \cdot 3600 + 30 \cdot 60 + 30 = 1\,080000 + 1800 + 30 = 1\,081\,830''$

46. Actividad resuelta

47. Expresa en minutos 1 h 13 min 14 s.

$1 \text{ h } 13 \text{ min } 14 \text{ s} = 1 \cdot 60 + 13 + 14 : 60 = 60 + 13 + 0{,}2\widehat{3} = 73{,}2\widehat{3} \text{ min}$

48. Pasa a forma compleja las siguientes cantidades de tiempo.

a) 4025 s **c) 390 min** **e) 417 min 180 s**

b) 10 250 s **d) 4250 min** **f) 170 min 600 s**

a) $4025 \text{ s} = 1 \text{ h } 7 \text{ min } 5 \text{ s}$ **c)** $390 \text{ min} = 6 \text{ h } 30 \text{ min}$ **e)** $417 \text{ min } 180 \text{ s} = 7 \text{ h}$

b) $10250 \text{ s} = 2 \text{ h } 50 \text{ min } 50 \text{ s}$ **d)** $4250 \text{ min} = 70 \text{ h } 50 \text{ min}$ **f)** $170 \text{ min } 600 \text{ s} = 3 \text{ h}$

49. Pasa a forma compleja las siguientes amplitudes de ángulos.

a) 1025" **c) 1250"** **e) 100' 1200"**

b) 400" **d) 12 900"** **f) 590' 600"**

a) $1025'' = 17'\ 5''$ **c)** $1250'' = 20'\ 50''$ **e)** $100'\ 1200'' = 2^\circ$

b) $400'' = 6'\ 40''$ **d)** $12\,900'' = 3^\circ\ 35'$ **f)** $590'\ 600'' = 10^\circ$

50. Realiza las siguientes operaciones con medidas de tiempo.

a) 42 h 13 min 42 s + 15 h 25 min 35 s **c) 3 · (16 h 23 min 45 s)**

b) 12 h 41 min 4 s − 10 h 50 min 59 s **d) (61 h 33 min 24 s) : 4**

a) $42 \text{ h } 13 \text{ min } 42 \text{ s} + 15 \text{ h } 25 \text{ min } 35 \text{ s} = 57 \text{ h } 39 \text{ min } 17 \text{ s}$

b) $12 \text{ h } 41 \text{ min } 4 \text{ s} - 10 \text{ h } 50 \text{ min } 59 \text{ s} = 1 \text{ h } 50 \text{ min } 5 \text{ s}$

c) $3 \cdot (16 \text{ h } 23 \text{ min } 45 \text{ s}) = 49 \text{ h } 11 \text{ min } 15 \text{ s}$

d) $(61 \text{ h } 33 \text{ min } 24 \text{ s}) : 4 = 15 \text{ h } 23 \text{ min } 21 \text{ s}$

51. Realiza las siguientes operaciones con ángulos.

a) $25° \, 22' \, 37'' + 15° \, 43' \, 58''$

b) $56° \, 13' \, 22'' - 16° \, 35' \, 23''$

c) $5 \cdot (13° \, 26' \, 28'')$

d) $(177° \, 57' \, 55'') : 7$

a) $25° \, 22' \, 37'' + 15° \, 43' \, 58'' = 41° \, 6' \, 35''$

b) $56° \, 13' \, 22'' - 16° \, 35' \, 23'' = 39° \, 37' \, 59''$

c) $5 \cdot (13° \, 26' \, 28'') = 67° \, 12' \, 20''$

d) $(177° \, 57' \, 55'') : 7 = 25° \, 25' \, 25''$

52. Calcula y simplifica.

a) $13 \text{ h } 15 \text{ min } 19 \text{ s} - 2 \cdot (5 \text{ h } 13 \text{ min } 44 \text{ s})$

b) $4 \cdot (2 \text{ h } 22 \text{ min } 14 \text{ s}) + 3 \cdot (4 \text{ h } 10 \text{ min } 4 \text{ s})$

c) $10 \cdot (1 \text{ h } 23 \text{ s} - 43 \text{ min } 3 \text{ s})$

d) $8 \cdot (42° \, 13' \, 45'') + (13° \, 25' \, 11'')$

e) $2 \cdot (148° \, 23' \, 58'') - 3 \cdot (51° \, 22' \, 6'')$

f) $5 \cdot (12° \, 3' \, 3'' + 59' \, 59'')$

g) $[4 \cdot (25° \, 15' \, 23'') + (7° \, 40')] : 3$

a) $13 \text{ h } 15 \text{ min } 19 \text{ s} - 2 \cdot (5 \text{ h } 13 \text{ min } 44 \text{ s}) = 13 \text{ h } 15 \text{ min } 19 \text{ s} - 10 \text{ h } 27 \text{ min } 28 \text{ s} = 2 \text{ h } 47 \text{ min } 51 \text{ s}$

b) $4 \cdot (2 \text{ h } 22 \text{ min } 14 \text{ s}) + 3 \cdot (4 \text{ h } 10 \text{ min } 4 \text{ s}) = 9 \text{ h } 28 \text{ min } 56 \text{ s} + 12 \text{ h } 30 \text{ min } 12 \text{ s} = 21 \text{ h } 59 \text{ min } 8 \text{ s}$

c) $10 \cdot (1 \text{ h } 23 \text{ s} - 43 \text{ min } 3 \text{ s}) = 10 \cdot (17 \text{ min } 20 \text{ s}) = 2 \text{ h } 53 \text{ min } 20 \text{ s}$

d) $8 \cdot (42° \, 13' \, 45'') + (13° \, 25' \, 11'') = 337° \, 50' + 13° \, 25' \, 11'' = 351° \, 15' \, 11''$

e) $2 \cdot (148° \, 23' \, 58'') - 3 \cdot (51° \, 22' \, 6'') = 296° \, 47' \, 56'' - 154° \, 6' \, 18'' = 142° \, 41' \, 38''$

f) $5 \cdot (12° \, 3' \, 3'' + 59' \, 59'') = 5 \cdot (13° \, 3' \, 2'') = 65° \, 15' \, 10''$

g) $[4 \cdot (25° \, 15' \, 23'') + (7° \, 40')] : 3 = [(101° \, 1' \, 32'') + (7° \, 40')] : 3 = (108° \, 41' \, 32'') : 3 = 36° \, 13' \, 50''$

53. Dados los ángulos $A = 20° \, 54' \, 40''$, $B = 45° \, 35' \, 20''$ y $C = 15° \, 30' \, 45''$, calcula:

a) $A + B + C$

b) $A + B - C$

c) $2A + 3B$

d) $4(A + B) - C$

e) $3A - B + 2C$

f) $(A + B) : 4$

a) $20° \, 54' \, 40'' + 45° \, 35' \, 20'' + 15° \, 30' \, 45'' = 82° \, 45''$

b) $20° \, 54' \, 40'' + 45° \, 35' \, 20'' - 15° \, 30' \, 45'' = 50° \, 59' \, 15''$

c) $2 \cdot (20° \, 54' \, 40'') + 3 \cdot (45° \, 35' \, 20'') = 41° \, 49' \, 20'' + 136° \, 46' = 178° \, 35' \, 20''$

d) $4 \cdot (20° \, 54' \, 40'' + 45° \, 35' \, 20'') - 15° \, 30' \, 45'' = 4 \cdot (66° \, 30') - 15° \, 30' \, 45'' = 266° - 15° \, 30' \, 45'' = 250° \, 29' \, 15''$

e) $3 \cdot (20° \, 54' \, 40'') - 45° \, 35' \, 20'' + 2 \cdot (15° \, 30' \, 45'') = 62° \, 44' - 45° \, 35' \, 20'' + 31° \, 1' \, 30'' = 48° \, 10' \, 10''$

f) $(20° \, 54' \, 40'' + 45° \, 35' \, 20'') : 4 = (66° \, 30') : 4 = 16° \, 37' \, 30''$

54. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno, donde *a* representa la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo y *b* y *c*, la medida de los catetos.

a **(cm)**	***b*** **(cm)**	***c*** **(cm)**
●	**12**	**35**
●	**112**	**15**
●	**28**	**45**
45	**27**	●
61	●	**11**
65	**56**	●

$a=\sqrt{12^2+35^2}=\sqrt{144+1225}=\sqrt{1369}=37$

$a=\sqrt{112^2+15^2}=\sqrt{12544+225}=\sqrt{12769}=113$

$a=\sqrt{28^2+45^2}=\sqrt{784+2025}=\sqrt{2809}=53$

$c=\sqrt{45^2-27^2}=\sqrt{2025-729}=\sqrt{1296}=36$

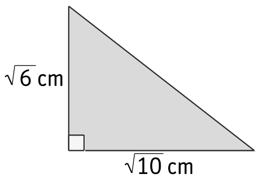
$b=\sqrt{61^2-11^2}=\sqrt{3721-121}=\sqrt{3600}=60$

$c=\sqrt{65^2-56^2}=\sqrt{4225-3136}=\sqrt{1089}=33$

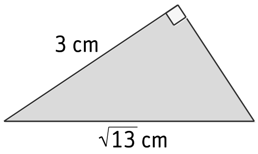
a **(cm)**	***b*** **(cm)**	***c*** **(cm)**
37	**12**	**35**
113	**112**	**15**
53	**28**	**45**
45	**27**	36
61	60	**11**
65	**56**	33

55. Calcula la medida del lado que falta en cada caso.

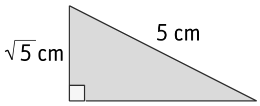
a)



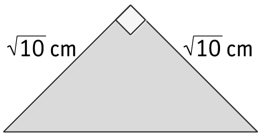
c)



b)



d)



a) $h=\sqrt{\sqrt{6}^2+\sqrt{10}^2}=\sqrt{6+10}=\sqrt{16}=4\text{ cm}$

b) $c=\sqrt{5^2-\sqrt{5}^2}=\sqrt{25-5}=\sqrt{20}=4{,}47\text{ cm}$

c) $c=\sqrt{\sqrt{13}^2-3^2}=\sqrt{13-9}=\sqrt{4}=2\text{ cm}$

d) $h=\sqrt{\sqrt{10}^2+\sqrt{10}^2}=\sqrt{10+10}=\sqrt{20}=4{,}47\text{ cm}$

56. Clasifica los siguientes triángulos en rectángulos, acutángulos u obtusángulos.

a) $a = 9$ **cm,** $b = 12$ **cm y** $c = 15$ **cm**

b) $a = 10$ **cm,** $b = 15$ **cm y** $c = 20$ **cm**

c) $a = 2$ **cm,** $b = 12$ **cm y** $c = 12$ **cm**

d) $a = 45$ **cm,** $b = 28$ **cm y** $c = 53$ **cm**

e) $a = 4$ **cm,** $b = \sqrt{7}$ **cm y** $c = \sqrt{9}$ **cm**

a) $a^2 = 81$, $b^2 = 144$, $c^2 = 225 \Rightarrow 225 = 81 + 144 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$. Triángulo rectángulo

b) $a^2 = 100$, $b^2 = 225$, $c^2 = 400 \Rightarrow 400 > 100 + 225 \Rightarrow c^2 > a^2 + b^2$. Triángulo obtusángulo

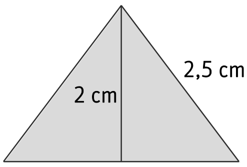
c) $a^2 = 4$, $b^2 = 144$, $c^2 = 144 \Rightarrow 144 < 4 + 144 \Rightarrow c^2 < a^2 + b^2$. Triángulo acutángulo

d) $a^2 = 2025$, $b^2 = 784$, $c^2 = 2809 \Rightarrow 2809 = 2025 + 784 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$. Triángulo rectángulo

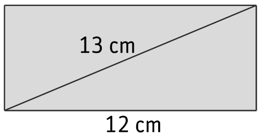
e) $a^2 = 16$, $b^2 = 7$, $c^2 = 9 \Rightarrow 16 = 7 + 9 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$. Triángulo rectángulo

57. Halla los lados desconocidos de las siguientes figuras.

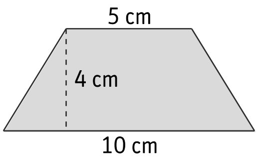
a)



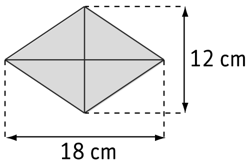
c)



b)



d)



a) Por ser un triángulo isósceles, la altura sobre el lado desigual lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$l = 2 \cdot \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = 2 \cdot \sqrt{6{,}25 - 4} = 2 \cdot \sqrt{2{,}25} = 3$ cm

b) Como el trapecio es isósceles, los lados que faltan son iguales y coinciden con la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma la altura.

$$l = \sqrt{4^2 + \left(\frac{10-5}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 6{,}25} = \sqrt{22{,}25} = 4{,}72 \text{ cm}$$

c) La diagonal divide el rectángulo en dos triángulos rectángulos iguales cuyo cateto menor coincide con el lado del rectángulo.

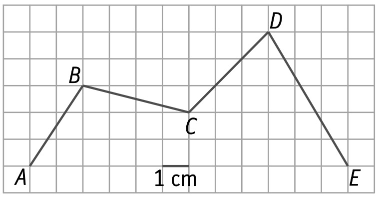
$l = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$ cm

d) Las diagonales dividen el rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales cuya hipotenusa coincide con el lado.

$$l = \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = 10{,}82 \text{ cm}$$

58. Actividad resuelta

59. Halla la longitud de la línea poligonal de la figura.



Cada tramo de la línea poligonal coincide con la hipotenusa de un triángulo:

$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} = 3{,}61 \text{ cm}$

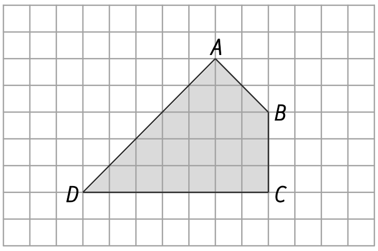
$\overline{BC} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} = 4{,}12 \text{ cm}$

$\overline{CD} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 4{,}24 \text{ cm}$

$\overline{DE} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} = 5{,}83 \text{ cm}$

La línea poligonal mide: $3{,}61 + 4{,}12 + 4{,}24 + 5{,}83 = 17{,}8 \text{ cm}$.

60. Si cada cuadradito tiene 1 dm de lado, calcula el perímetro del cuadrilátero de la figura.



Las longitudes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ se obtienen mediante el teorema de Pitágoras:

$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2{,}83 \text{ dm}$

$\overline{AD} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7{,}07 \text{ dm}$

El perímetro mide: $2{,}83 + 3 + 7 + 7{,}07 = 19{,}9 \text{ dm}$.

61. Halla las medidas desconocidas en estos triángulos equiláteros.

a) Halla la altura si el lado mide 3 cm.

b) Halla el lado si la altura mide 3 cm.

a) Como el triángulo es equilátero, la altura será lo divide en dos triángulos rectángulos iguales cuya hipotenusa mide 3 cm.

$$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - 2{,}25} = \sqrt{6{,}75} = 2{,}60 \text{ cm}$$

b) El lado será la hipotenusa de cualquiera de los dos triángulos rectángulos en que la altura divide al triángulo equilátero.

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4}l^2 = h^2 \Rightarrow l^2 = \frac{4}{3}h^2 \Rightarrow l = \frac{2}{\sqrt{3}}h = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = 3{,}46 \text{ cm}$$

62. Calcula la altura de un triángulo isósceles cuyo perímetro mide 36 m, y su base, 10 m.

Cada uno de los lados iguales del triángulo mide: $l = \frac{36-10}{2} = \frac{26}{2} = 13$ cm.

La altura sobre el lado desigual divide al triángulo en dos triángulos rectángulos iguales. Por tanto:

$$h = \sqrt{13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

63. Halla el perímetro y el área del cuadrado circunscrito a una circunferencia de radio 5 cm.

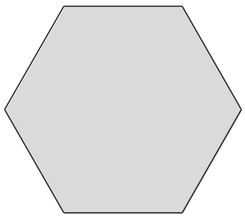
La diagonal del cuadrado coincide con el diámetro de la circunferencia. A su vez, la diagonal divide el cuadrado en dos triángulos rectángulos iguales. Por tanto:

$$(5 \cdot 2)^2 = l^2 + l^2 = 2 \cdot l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{5^2 \cdot 2^2}{2} \Rightarrow l = 5 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}$$

El área y el perímetro del cuadrado miden:

$$A = \left(5 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 25 \cdot 2 = 50 \text{ cm}^2 \qquad P = 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = 20 \cdot \sqrt{2} = 28{,}28 \text{ cm}$$

64. Halla el perímetro y el área de un hexágono regular de lado 6 cm.



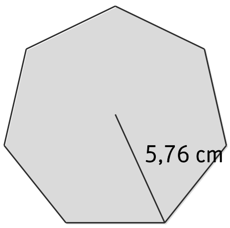
El perímetro mide: $P = 6 \cdot 6 = 36$ cm.

Para calcular el área se necesita conocer la apotema. La apotema, el radio y la mitad de un lado forman un triángulo rectángulo. En el caso del hexágono regular, el radio coincide con el lado, de manera que:

$$a = \sqrt{6^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 5{,}20 \text{ cm}$$

Por tanto, el área del hexágono mide: $A = \frac{36 \cdot 5{,}20}{2} = 93{,}6 \text{ cm}^2$

65. Halla el perímetro y el área del heptágono regular de la figura.



El perímetro mide: $P = 5 \cdot 7 = 35$ cm.

La apotema, el radio y la mitad de un lado forman un triángulo rectángulo, de manera que:

$$a = \sqrt{5{,}76^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{33{,}17 - 6{,}25} = \sqrt{26{,}92} = 5{,}18 \text{ cm}$$

Por tanto, el área del heptágono mide: $A = \frac{35 \cdot 5{,}18}{2} = 90{,}65 \text{ cm}^2$

66. Halla el perímetro y el área de un rombo cuyas diagonales miden 15 cm y 8 cm, respectivamente.

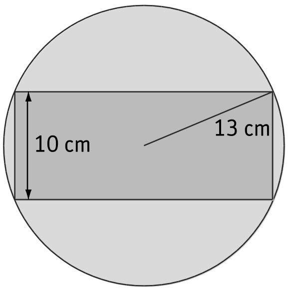
Las diagonales dividen el rombo en cuatro triángulos rectángulos cuyas hipotenusas coinciden con los lados del rombo.

$$l=\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2}=\sqrt{56,25+16}=\sqrt{72,25}=8,5 \text{ cm}$$

El perímetro y el área del rombo miden:

$$P=4\cdot 8,5=34 \text{ cm} \qquad A=\frac{15\cdot 8}{2}=60 \text{ cm}^2$$

67. En una circunferencia de 13 cm de radio inscribimos un rectángulo de 10 cm de altura. Calcula el perímetro del rectángulo.



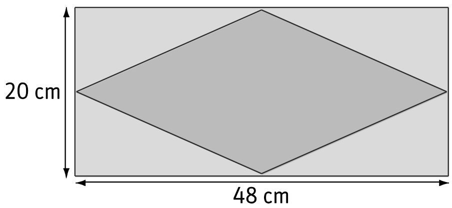
La diagonal del rectángulo coincide con el diámetro de la circunferencia. A su vez, la diagonal divide el rectángulo en dos triángulos rectángulos iguales. Por tanto:

$$l=\sqrt{(2\cdot 13)^2-10^2}=\sqrt{676-100}=24 \text{ cm}$$

El perímetro y el área del rectángulo miden:

$$P=2\cdot 10+2\cdot 24=20+48=68 \text{ cm} \qquad A=24\cdot 10=240 \text{ cm}^2$$

68. Halla el perímetro del rombo de la figura sabiendo que sus vértices están situados en los puntos medios del rectángulo.



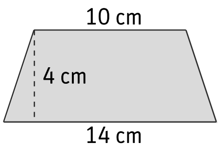
Las diagonales del rombo coinciden con los lados del rectángulo. A su vez, dichas diagonales dividen el rombo en cuatro triángulos rectángulos cuyas hipotenusas coinciden con los lados del rombo:

$$l=\sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2+\left(\frac{48}{2}\right)^2}=\sqrt{100+576}=\sqrt{676}=26 \text{ cm}$$

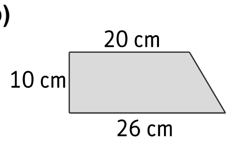
El perímetro del rombo mide: $P=4\cdot 26=104 \text{ cm}$.

69. Calcula el perímetro y el área de cada uno de los siguientes trapecios.

a)



b)



a) Como el trapecio es isósceles, los lados que faltan son iguales y coinciden con la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma la altura.

$$l=\sqrt{4^2+\left(\frac{14-10}{2}\right)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=4{,}47\text{ cm}$$

El perímetro y el área del rectángulo miden:

$$P=2\cdot 4{,}47+10+14=32{,}94\text{ cm} \qquad A=\frac{(14+10)\cdot 4}{2}=48\text{ cm}^2$$

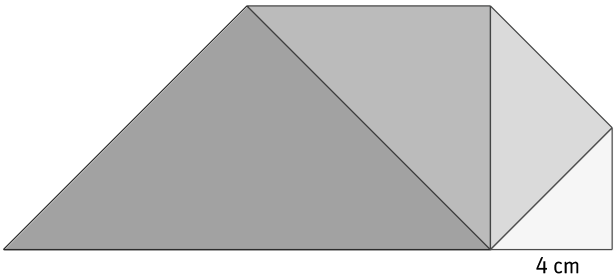
b) El lado que falta coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por la altura.

$$l=\sqrt{10^2+(26-20)^2}=\sqrt{100+36}=\sqrt{136}=11{,}66\text{ cm}$$

El perímetro y el área del rectángulo serán:

$$P=26+10+20+11{,}66=67{,}66\text{ cm} \qquad A=\frac{(26+20)\cdot 10}{2}=230\text{ cm}^2$$

70. Todos los triángulos de la figura son rectángulos e isósceles.



Calcula la hipotenusa del triángulo mayor.

La hipotenusa de cada triángulo es el lado del triángulo contiguo, por tanto:

$$h_1=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{2\cdot 4^2}=4\cdot\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$h_2=\sqrt{\left(4\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(4\cdot\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2\cdot\left(4\cdot\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2\cdot 4^2\cdot 2}=\sqrt{2^2\cdot 4^2}=\sqrt{8^2}=8\text{ cm}$$

$$h_3=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{2\cdot 8^2}=8\cdot\sqrt{2}\text{ cm}$$

$$h_2=\sqrt{\left(8\cdot\sqrt{2}\right)^2+\left(8\cdot\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2\cdot\left(8\cdot\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2\cdot 8^2\cdot 2}=\sqrt{2^2\cdot 8^2}=\sqrt{16^2}=16\text{ cm}$$

71. De un triángulo se conocen dos de sus ángulos, que miden $A=45°\ 23'\ 13''$ y $B=65°\ 44'\ 50''$.

a) Calcula la medida del tercer ángulo, C .

b) Expresa el resultado en forma compleja y no compleja utilizando únicamente grados.

a) La suma de los ángulos de un triángulo es de 180º. Por tanto:

$$C=180-\left(A+B\right)=180°-(45°\ 23'\ 13''+65°\ 44'\ 50'')=180°-111°\ 8'\ 3''=68°\ 51'\ 57''$$

b) En forma incompleja: $C=68°\ 51'\ 57''=(68+51:60+57:3600)°=(68+0{,}85+0{,}016)°=68{,}87°$.

72. El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 44° 45' 33".

a) Calcula la medida de los ángulos iguales y exprésala en forma compleja.

b) Expresa el resultado solo en minutos.

a) La suma de los ángulos de un triángulo es de 180°. Como el triángulo es isósceles hay dos ángulos iguales, B de manera que:

$$B = \frac{180° - A}{2} = \frac{180° - 44°\ 45'\ 33''}{2} = \frac{135°\ 14'\ 27''}{2} = 67°\ 37'\ 13''$$

b) $B = 67°\ 37'\ 13'' = (67 \cdot 60 + 37 + 13:60)' = (4020 + 37 + 0{,}22)' = 4057{,}22'$

73. Dos de los ángulos de un triángulo miden $A = 34°\ 15'\ 50''$ y $B = 55°\ 44'\ 10''$.

a) ¿Cuánto mide el tercer ángulo?

b) Si los dos lados menores miden 3,5 cm y 5 cm, ¿cuánto mide el lado mayor?

a) La suma de los ángulos de un triángulo es de 180°. Por tanto:

$$C = 180 - (A + B) = 180° - (34°\ 15'\ 50'' + 55°\ 44'\ 10'') = 180° - 90° = 90°$$

b) Como uno de los ángulos es recto, mide 90°, el triángulo es rectángulo. Por tanto, el lado mayor corresponde a la hipotenusa:

$$h_1 = \sqrt{3{,}5^2 + 5^2} = \sqrt{12{,}25 + 25} = \sqrt{37{,}25} = 6{,}10 \text{ cm}$$

74. Un ángulo de un paralelogramo mide 44° 23' 15". ¿Cuánto miden los otros ángulos?

Un paralelogramo es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales y paralelos entre sí dos a dos. Por tanto, habrá otro ángulo que mida 44° 23' 15" y los otros dos ángulos serán iguales entre sí.

Además, la suma de todos los ángulos es de 360°, de manera que cada uno de los dos ángulos restantes mide:

$$\frac{360° - 2 \cdot (44°\ 45'\ 33'')}{2} = \frac{360° - 89°\ 31'\ 6''}{2} = \frac{270°\ 28'\ 54''}{2} = 135°\ 14'\ 27''$$

75. Se sabe que la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados es $(n-2) \cdot 180°$.

a) Calcula la medida de cada uno de los ángulos de un pentágono regular.

b) Calcula, en grados, minutos y segundos, la medida de cada uno de los ángulos de un heptágono regular.

a) $\dfrac{[(5-2) \cdot 180°]}{5} = \dfrac{3 \cdot 180°}{5} = \dfrac{540°}{5} = 108°$

b) $\dfrac{[(7-2) \cdot 180°]}{7} = \dfrac{5 \cdot 180°}{7} = \dfrac{900°}{7} = 128°\ 34'\ 17''$

76. En la compraventa de un terreno rectangular, el comprador va a pagar 500 € por cada metro cuadrado del mismo.

a) ¿Crees que sería adecuado realizar una estimación de las medidas del campo mediante pasos y considerando que cada paso mide aproximadamente un metro?

b) Si han contado 35 pasos × 25 pasos, ¿cuál será el precio a pagar por el terreno?

c) Al medir el terreno con un distanciómetro, han obtenido unas medidas de 33,28 m × 24,6 m. ¿Cuál será el precio del terreno ahora?

a) Respuesta libre

b) El precio estimado a pagar será: $35 \times 25 \times 500 = 437\,500$ €.

c) El precio exacto a pagar será: $33{,}28 \times 24{,}6 \times 500 = 409\,344$ €.

77. Manuela ha medido con una cinta métrica la distancia que separa la entrada al jardín de la puerta de su casa y ha obtenido un valor de 7,5 m.

Sin embargo, mediante un GPS topográfico ha comprobado que la verdadera distancia es de 7,43 m. ¿Cuáles son los errores absoluto y relativo de su primera medida?

$E_A = |7,43 - 7,5| = 0,07 \Rightarrow E_R = \dfrac{0,07}{7,43} = 0,009 \Rightarrow 0,9\%$

78. Se ha medido con un teodolito la elevación angular de una estrella y se ha obtenido 69° 14' 15". Escribe este valor en grados.

$69°\ 14'\ 15'' = 69 + 14 : 60 + 15 : 3600 = 69,2375°$

79. El coste de la conexión a Internet en cierto comercio abierto al público es de 1,25 € cada hora. ¿Cuánto deberemos pagar si hemos estado conectados durante 1 h 25 min 40 s?

$1\text{ h }25\text{ min }40\text{ s} = 1 + 25 : 60 + 40 : 3600 = 1,43\text{h}$. Deberemos pagar: $1,43 \cdot 1,25 = 1,7875 \Rightarrow 1,79\text{ €}$.

80. Carlos quiere construir un soporte para una estantería con forma de triángulo rectángulo.

a) ¿Podrá hacerlo con tres listones de 11,5 cm, 25,2 cm y 28 cm?

b) ¿Cuánto deberá cortar uno de los listones para poder construirlo?

a) Como forma un triángulo rectángulo, y cumple: $11,5^2 + 25,2^2 < 28^2 \Rightarrow 1132,25 + 635,04 < 784$, sí podrá hacerlo.

b) Para construirlo se debe cumplir: $11,5^2 + 25,2^2 = 132,25 + 635,04 = 767,29 = 27,7^2$, por tanto el deberá cortarlo $28 - 27,7 = 0,3\text{cm}$

81. La ventana de la habitación de Isabel mide 1,2 m de alto y 60 cm de ancho. Isabel quiere decorarla utilizando dos tiras de vinilo adhesivo de 1,5 m de largo. ¿Podrá colocar los vinilos uniendo los vértices opuestos de la ventana?

Al colocar cada vinilo en la diagonal de la ventana, formará un triángulo rectángulo con los lados de la ventana. Por tanto, cada tira medirá:

$h = \sqrt{1,2^2 + 0,6^2} = \sqrt{1,44 + 0,36} = \sqrt{1,8} = 1,34\text{m}$. Como 1,34 m < 1,5 m, sí podrá colocar los vinilos.

82. El tamaño de las televisiones se expresa normalmente midiendo su diagonal en pulgadas.

a) Si una pulgada equivale a 2,54 cm, ¿cuántas pulgadas tiene un televisor cuya pantalla mide 70 cm de largo por 40 cm de alto?

b) De un televisor se sabe que tiene 50 pulgadas, pero no las medidas de sus lados. Indica cuales de las siguientes medidas son posibles:

A. 117 cm × 49,4 cm B. 1 m × 50 cm C. 1,5 m × 50 cm D. 89,8 cm × 89,8 cm

Entre las medidas posibles, ¿cuál crees que corresponde a un televisor? ¿Por qué?

a) Se calcula la diagonal mediante el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{70^2 + 40^2} = \sqrt{4900 + 1600} = \sqrt{6500} = 80,62\text{cm} \Rightarrow 80,62 : 2,54 = 31,74 \simeq 32\text{pulgadas}$$

b) Calculamos la medida en centímetros: $50 \cdot 2,54 = 127\text{cm}$ y comprobamos cuáles serían posibles:

A. $h = \sqrt{117^2 + 49,4^2} = \sqrt{13689 + 2440,36} = \sqrt{16129,36} = 127\text{cm}$

B. $h = \sqrt{100^2 + 50^2} = \sqrt{10000 + 2500} = \sqrt{12500} = 111,8\text{cm}$

C. $h = \sqrt{150^2 + 50^2} = \sqrt{22500 + 2500} = \sqrt{25000} = 158,11\text{cm}$

D. $h = \sqrt{89,8^2 + 89,8^2} = \sqrt{8064,04 + 8064,04} = \sqrt{16\,128,08} = 127\text{cm}$

Corresponde a un televisor la opción A., porque se ajusta a la medida dada y es de forma rectangular.

83. Actividad resuelta

84. Un avión tarda 1 h 15 min en recorrer 1250 km.

a) ¿Cuánto tardará en recorrer 6500 km?

b) ¿Qué distancia recorre en 3 h 20 min?

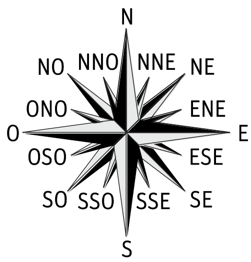
a) Expresamos el tiempo en forma incompleja: $1\text{h }15\text{ min} = 1\cdot 60+15 = 60+15 = 75\text{ min}$.

En recorrer 6500 km tarda: $\dfrac{75\text{ min}}{1250\text{ km}} = \dfrac{x\text{ min}}{6500\text{ km}} \Rightarrow x = \dfrac{75\cdot 6500}{1250} = 390\text{ min}$

b) Expresamos el tiempo en forma incompleja: $3\text{h }20\text{ min} = 3\cdot 60+20 = 180+20 = 200\text{ min}$.

En 3 h 20 min recorre: $\dfrac{75\text{ min}}{1250\text{ km}} = \dfrac{200\text{ min}}{x\text{ km}} \Rightarrow x = \dfrac{1250\cdot 200}{75} = 3333,\hat{3}\text{ km}$

85. ¿Qué ángulo forma la dirección norte con la dirección noreste? ¿Y con la dirección nornoroeste? Expresa los resultados lo más aproximadamente posible.



Con la dirección noreste: $360° : 8 = 45°$

Con la dirección nornoroeste: $360° : 16 = 22°\ 30'$

86. Llamamos mes lunar al tiempo que tarda la Luna en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra. Si el mes lunar dura 29 días 12 horas 44 minutos y 3 segundos:

a) ¿Cuántos segundos dura un mes lunar?

b) ¿Cuánto tiempo tarda la Luna en dar cinco vueltas completas alrededor de la Tierra?

c) ¿Cuánto tardará la Luna en pasar de luna nueva a cuarto creciente?

a) $29\text{ días }12\text{ h }44\text{ min }3\text{ s} = 29\cdot 24\cdot 3600+12\cdot 3600+44\cdot 60+3 = 2\,505\,600+43\,200+2640+3 = 2\,551\,443\text{ s}$

b) $(29\text{ días }12\text{ h }44\text{ min }3\text{ s})\cdot 5 = 147\text{ días }15\text{ h }40\text{ min }15\text{ s}$

c) $(29\text{ días }12\text{ h }44\text{ min }3\text{ s}) : 4 = 7\text{ días }9\text{ h }11\text{ min}$

87. Un reloj se retrasa 32 s cada día.

a) ¿Cuánto se retrasará en una semana? ¿Y en 30 días?

b) ¿Qué hora marcará justo cuando comience el día 12 de febrero si al comenzar el 1 de enero se puso en hora?

a) En una semana se retrasará: $32\cdot 7 = 224\text{ s} = 3\text{ min }44\text{ s}$.

En treinta días se retrasará: $32\cdot 30 = 960\text{ s} = 16\text{ min}$.

b) Del 1 de enero al inicio del 12 de febrero transcurren 42 días. Por tanto, se retrasará:

$32\cdot 42 = 1344\text{ s} = 22\text{ min }24\text{ s}$

En lugar de marcar las 24 h, indicará las: $24\text{ h} - 22\text{ min }44\text{ s} = 23\text{ h }37\text{ min }16\text{ s}$.

88. Elena anda en una hora 5 km, y Javier, 4 km.

a) Si salen a la vez, del mismo sitio y en la misma dirección, ¿a qué distancia se encontrarán uno de otro después de 2 h 40 min 25 s?

b) Si salen a la vez del mismo sitio y en direcciones perpendiculares, ¿a qué distancia se encontrarán uno del otro después de 45 min 20 s?

a) Expresamos el tiempo en segundos: $2\text{h }40\text{ min }25\text{s} = 2\cdot 3600 + 40\cdot 60 + 25 = 7200 + 2400 + 25 = 9625\text{s}$.

Elena recorre: $\dfrac{3600\text{ s}}{5\text{ km}} = \dfrac{9625\text{ s}}{x\text{ km}} \Rightarrow x = \dfrac{5\cdot 9625}{3600} = 13{,}37\text{ km}$.

Javier recorre: $\dfrac{3600\text{ s}}{4\text{ km}} = \dfrac{9625\text{ s}}{x\text{ km}} \Rightarrow x = \dfrac{4\cdot 9625}{3600} = 10{,}69\text{ km}$.

Se encuentran a $13{,}37 - 10{,}69 = 2{,}68\text{ km}$.

b) Expresamos el tiempo en segundos: $45\text{ min }20\text{s} = 45\cdot 60 + 20 = 2700 + 20 = 2720\text{s}$.

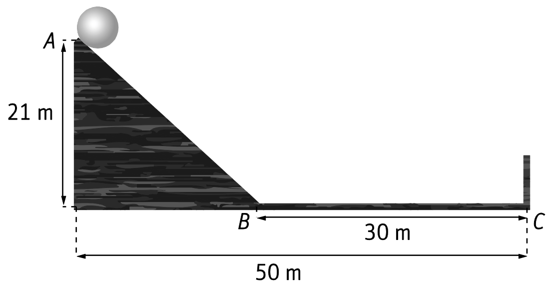
Elena recorre: $\dfrac{3600\text{ s}}{5\text{ km}} = \dfrac{2720\text{ s}}{x\text{ km}} \Rightarrow x = \dfrac{5\cdot 2720}{3600} = 3{,}78\text{ km}$.

Javier recorre: $\dfrac{3600\text{ s}}{4\text{ km}} = \dfrac{2720\text{ s}}{x\text{ km}} \Rightarrow x = \dfrac{4\cdot 2720}{3600} = 3{,}02\text{ km}$.

Como salen en direcciones perpendiculares, la distancia entre ellos será la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de 3,78 km y 3,02 km:

$$h = \sqrt{3{,}78^2 + 3{,}02^2} = \sqrt{14{,}29 + 9{,}12} = \sqrt{23{,}41} = 4{,}84\text{ km}$$

89. La bola de la figura cae desde el punto *A*, pasa por *B* y llega a *C*, donde rebota para recorrer aún la mitad del trayecto que ya ha efectuado.



Halla la distancia total que recorre.

La bola recorre el tramo $\overline{AB}$, el tramo $\overline{BC}$ y la mitad del tramo ya recorrido, $\overline{AB} + \overline{BC}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{21^2 + (50-30)^2} = \sqrt{441 + 400} = 29\text{ m}$$

$$\overline{BC} = 30\text{ m}$$

$$\frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2} = \frac{29 + 30}{2} = 29{,}5\text{ m}$$

La distancia que recorre es: $29 + 30 + 29{,}5 = 88{,}5\text{ m}$.

90. Alicia vive en una urbanización, parte de la cual aparece representada en la figura, y quiere ir desde el punto *A* hasta el punto *B*.

a) Calcula la mínima distancia que tendría que recorrer si no hubiera edificios.

b) Calcula la distancia que recorre siguiendo el camino marcado en verde.

c) Calcula la distancia que recorre siguiendo el camino marcado en amarillo.

a) La distancia mínima será la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de 11 y 7 cuadrados de la cuadrícula:

$h = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170} = 13{,}04$

El lado de cada recuadro de la cuadrícula representa $12 : 2 = 6$ m, la distancia será: $13{,}04 \cdot 6 = 78{,}23$ m

b) Se suman los distintos tramos del camino y la distancia será: $(0{,}5 + 7{,}5 + 6 + 3{,}5 + 0{,}5) \cdot 6 = 18 \cdot 6 = 108$ m.

c) Cada tramo del camino corresponde a la hipotenusa de un triángulo rectángulo:

Primer tramo: $h = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} = 2{,}24$

Segundo tramo: $h = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} = 2{,}24$

Tercer tramo: $h = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} = 4{,}12$

Cuarto tramo: $h = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} = 2{,}24$

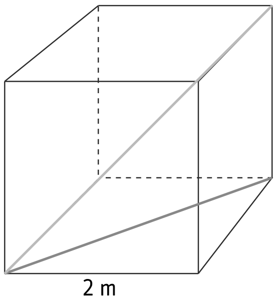
Quinto tramo: $h = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} = 3{,}16$

La distancia total será: $(3 \cdot 2{,}24 + 4{,}12 + 3{,}16) \cdot 6 = 14 \cdot 6 = 84$ m

91. Una habitación tiene forma de cubo de 2 m de lado. En la misma esquina hay dos hormigas, una de tierra y la otra voladora.

- **La hormiga de tierra se desplaza por la diagonal del suelo de la habitación hasta la esquina opuesta.**
- **La hormiga voladora, va hasta la esquina opuesta de la habitación por el camino más corto.**

Haz un croquis de la situación y calcula la distancia que recorre cada hormiga.



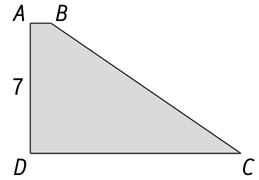
La hormiga de tierra sigue la diagonal de uno de los lados del cubo, que divide en dos triángulos rectángulos de catetos de 2 m.

Recorrerá una distancia de: $h = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2{,}83$ m .

La hormiga voladora sigue la diagonal del cubo, que coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo de cateto menor de 2 m y cateto mayor 2,83 m.

Recorrerá una distancia de: $h = \sqrt{2^2 + 2{,}83^2} = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12} = 3{,}46$ m .

92. En el trapecio rectángulo de la figura resulta que $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}$. ¿Cuál es el valor de $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$?



A. 12 **B. 12,25** **C. 12,5** **D. 12,75**

Aplicando el teorema de Pitágoras: $\overline{BC}^2 = 7^2 + \left(\overline{CD} - \overline{AB}\right)^2 = 7^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AB}$

Por otro lado, como $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}$, al elevar al cuadrado: $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + 2\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AB} = \overline{BC}^2$

Igualando ambas expresiones:

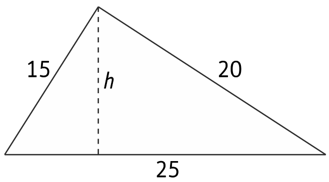
$$7^2 + \overline{CD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AB} = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + 2\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AB} \Rightarrow 7^2 - 2\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AB} = 2\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AB} \Rightarrow \overline{CD}\cdot\overline{AB} = \frac{7^2}{4} \Rightarrow \overline{CD}\cdot\overline{AB} = 12{,}25$$

La respuesta correcta es B. 12,25.

93. Los lados de un triángulo son 15, 20 y 25. ¿Cuál es la longitud de la altura más corta?

A. 6 **B. 12** **C. 12,5** **D. 13**

Como se cumple que $25^2 = 20^2 + 15^2$, se trata de un triángulo rectángulo. Dos de las alturas coinciden con los catetos, por tanto, miden 15 y 20. Si calculamos el área: $A = \frac{20\cdot 15}{2} = 150$

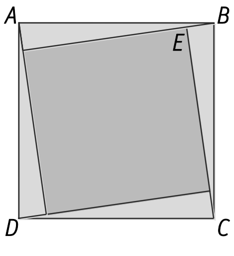


La altura que falta es la perpendicular al lado que mide 25. Si calculamos el área con esta altura: $A=\frac{25\cdot h}{2}$.

Igualando ambas expresiones: $\frac{25\cdot h}{2} = 150 \Rightarrow h = \frac{150\cdot 2}{25} = 12$

La respuesta correcta es B. 12.

94. Si el cuadrado *ABCD* tiene $\sqrt{50}$ cm de lado y $\overline{BE} = 1$ cm, ¿cuál es el área del cuadrado?



A. 25 **B. 32** **C. 36** **D. 40**

Cada uno de los cuatro triángulos que se forman son rectángulos de hipotenusa $\sqrt{50}$ cm. Por tanto, el lado del cuadrado interior está dado por: $\sqrt{50}^2 = \sqrt{(l+1)^2 + 1^2} \Rightarrow 50 = (l+1)^2 + 1 \Rightarrow (l+1)^2 = 49 \Rightarrow l = 6\,\text{cm}$.

El área del cuadrado es: $A = l^2 = 6^2 = 36\,\text{cm}^2$

La respuesta correcta es C. 36.

95. Un triángulo de lados proporcionales a 3, 4 y 5, está inscrito en una circunferencia de radio 3 cm. ¿Cuál es el área del círculo?

A. 12 **B. 5π** **C. 8,64** **D. 10**

Si consideramos *c* la constante de proporcionalidad, se cumple:

$(5c)^2 = (4c)^2 + (3c)^2 \Rightarrow 5^2c^2 = 4^2c^2 + 3^2c^2 \Rightarrow 5^2c^2 = (4^2 + 3^2)c^2 \Rightarrow 25 = 16+9$. Por tanto, se trata de un triángulo rectángulo.

La hipotenusa de un triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia coincide con el diámetro de esta. De manera que $2 \cdot 3 = 5c \Rightarrow c = \frac{6}{5} = 1{,}2$.

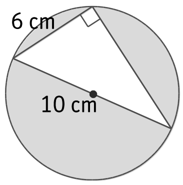
Los lados del triángulo son: 6 cm, $4c = 4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$ cm y $3c = 3 \cdot 1{,}2 = 3{,}6$ cm.

El área del triangulo es: $A = \frac{3{,}6 \cdot 4{,}8}{2} = 8{,}64$ cm^2.

La respuesta correcta es C. 8,64.

Encuentra el error

96. Un triángulo rectángulo está inscrito en un círculo, como muestra la figura. ¿Cuál es el área de la zona coloreada?



Para hallar la medida del otro cateto del triángulo, y poder calcular su área, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$x = \sqrt{10^2 + 6^2} = 11{,}66 \text{ cm} \qquad A = \frac{11{,}66 \cdot 6}{2} = 34{,}98 \text{ cm}^2$$

El área de la zona sombreada es igual al área del círculo menos el área del triángulo.

$$A = \pi \cdot 5^2 - 34{,}98 = 43{,}56 \text{ cm}^2$$

Sin embargo, el área de la zona coloreada es 54,54 cm^2. ¿Dónde está el error?

El error se encuentra en la aplicación del teorema de Pitágoras, ya que se ha calculado el cateto mayor como si fuera la hipotenusa:

$x = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

$A_{\text{triángulo}} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ cm^2

$A_{\text{coloreada}} = \pi \cdot 5^2 - 24 = 54{,}54$ cm^2

PONTE A PRUEBA

La noria

Actividad resuelta

Barcos de vela

La gran mayoría del comercio mundial se realiza por mar gracias a buques cisterna, graneleros y buques portacontenedores. La mayoría de estos barcos utilizan diesel.

Los ingenieros pretenden utilizar la energía eólica para sustentar los barcos. Su propuesta consiste en enganchar velas cometa a los barcos y utilizar el poder del viento para reducir el consumo de diesel y el impacto del combustible sobre el medio ambiente.

1. **Aproximadamente, ¿qué longitud debe tener la cuerda de la vela cometa para tirar del barco en un ángulo de 45° y estar a una altura vertical de 150 m?**

   A. 173 m **B. 212 m** **C. 285 m** **D. 300 m**

   La longitud de la cuerda coincide con la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles (tiene dos ángulos de 45º):

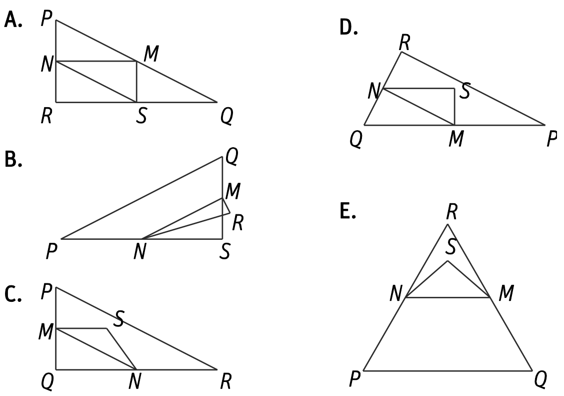
   $h = \sqrt{150^2 + 150^2} = \sqrt{45000} = 212{,}13\,\text{m}$.

   La respuesta correcta es B. 212 m.

Triángulos

1. **Indica cuáles de estas figuras cumplen todas las características siguientes:**

- **El triángulo *PQR* es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en *R*.**
- **El lado *RQ* es menor que el lado *PR*.**
- ***M* es el punto medio del lado *PQ* y *N* es el punto medio del lado *QR*.**
- ***S* es un punto del interior del triángulo.**
- **El segmento *MN* es mayor que el segmento *MS*.**

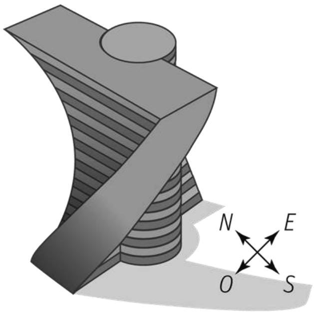


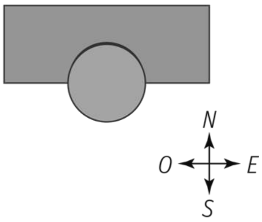
- El triángulo *PQR* es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en *R*. → No la cumplen B. (los puntos *P*, *Q* y *R* no forman un triángulo), C. (el ángulo recto está en *Q*) ni E. (el triángulo que forman *P*, *Q* y *R* no es rectángulo).
- El lado *RQ* es menor que el lado *PR*. → No la cumple A. (el lado *RQ* es mayor que el lado *PR)*.
- *M* es el punto medio del lado *PQ* y *N* es el punto medio del lado *QR*. → La cumple D.
- *S* es un punto del interior del triángulo. → La cumple D.
- El segmento *MN* es mayor que el segmento *MS*. → La cumple D.

La respuesta correcta es D.

El edificio retorcido

En la arquitectura moderna los edificios a menudo tienen formas inusuales. La imagen siguiente muestra un modelo diseñado por ordenador de un “edificio retorcido” y un plano de la planta baja. Los puntos cardinales muestran la orientación del edificio.

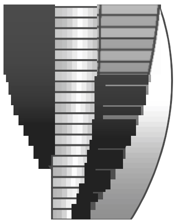




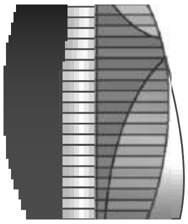
- **En la planta baja del edificio está la entrada principal y un espacio para tiendas. Encima de la planta baja hay 20 plantas de viviendas.**
- **El plano de cada planta es similar al de la planta baja, pero la orientación de cada planta es ligeramente distinta a la de la planta inmediatamente inferior.**
- **En el cilindro se encuentran el hueco del ascensor y un rellano para cada planta.**

1. **Si cada planta tiene una altura entre 2,5 m y 3 m, calcula la altura total del edificio en metros. ¿Cuál es la cota de error cometida?**

2. **Las imágenes siguientes son vistas laterales del edificio retorcido.**



Vista 1



Vista 2

a) **¿Desde qué dirección se ha obtenido la vista lateral 1?**

A. **Desde el norte.** **C. Desde el este.**

B. **Desde el oeste.** **D. Desde el sur.**

b) **¿Desde qué dirección se ha obtenido la vista lateral 2?**

A. **Desde el noroeste.** **C.Desde el suroeste.**

B. **Desde el nordeste.** **D. Desde el sureste.**

3. **Cada planta de viviendas tiene una “torsión” de 3° 30' con respecto a la planta anterior. ¿Qué ángulo formará la última planta (la 20.ª por encima de la planta baja) con la planta baja?**

Copia en tu cuaderno el plano de la planta baja y representa sobre ella la última planta del edificio.

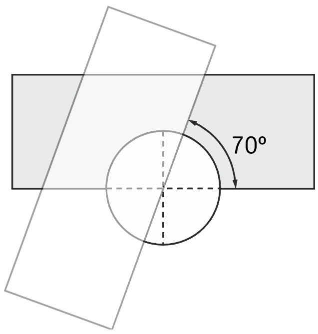
1. El edificio tiene una planta de entrada y tiendas y 20 plantas de viviendas. Su altura estará entre $21 \cdot 2{,}5 = 52{,}5$ m y $21 \cdot 3 = 63$ m.

La cota de error cometida será: $E < 21 \cdot |3 - 2{,}5| = 10{,}5$ m.

2. **a)** La respuesta correcta es C. Desde el este.

b) La respuesta correcta es D. Desde el sureste.

3. El ángulo de la 20.ª planta será: $(3° \, 30') \cdot 20 = 70°$.



AUTOEVALUACIÓN

1. Juan ha estimado en 12 min lo que ha tardado en ir de su casa al polideportivo. Calcula el error absoluto y relativo cometido sabiendo que ha salido a las 10 h 55 min y ha llegado a las 11 h 6 min.

Si sale a las 10 h 55 min y llega a las 11 h 6 min, en realidad tarda 11 min.

El error cometido será: $E_A = |11-12| = 1 \Rightarrow E_R = \frac{1}{11} = 0{,}09 \Rightarrow 9\%$

2. Pasa a forma compleja las siguientes medidas de ángulos.

a) 81 344" **b) 250'**

a) $81\,344'' = 22^\circ\ 35'\ 44''$ **b)** $250' = 4^\circ\ 10'$

3. Realiza las siguientes operaciones con medidas en sistema sexagesimal.

a) $33^\circ\ 23'\ 44'' + 12^\circ\ 40'\ 20''$

b) 22 h 31 min 40 s − 12 h 43 min 40 s

c) (2 h 33 min 12 s) · 3

d) $(254^\circ\ 59'\ 24'') : 6$

a) $33^\circ\ 23'\ 44'' + 12^\circ\ 40'\ 20'' = 46^\circ\ 4'\ 4''$

b) 22 h 31 min 40 s − 12 h 43 min 40 s = 9h 48 min

c) (2 h 33 min 12 s) · 3 = 7 h 39 min 36 s

d) $(254^\circ\ 59'\ 24'') : 6 = 42^\circ\ 29'\ 54''$

4. En un triángulo rectángulo isósceles, la medida de cada uno de los dos catetos iguales es de 20 cm.

a) Calcula la medida de la hipotenusa.

b) Calcula el valor del perímetro.

c) Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa.

a) El valor de la hipotenusa es $h = \sqrt{20^2 + 20^2} = 20 \cdot \sqrt{2} = 28{,}28$ cm .

b) El perímetro será: $P = 20 + 20 + 28{,}28 = 68{,}28$ cm .

c) Como es isósceles, la altura sobre la hipotenusa lo divide en dos triángulos rectángulos iguales.

$$h = \sqrt{20^2 - \left(\frac{20 \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{400 - 200} = \sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2} = 14{,}14 \text{ cm}$$

5. De los siguientes triángulos, uno es rectángulo; otro, acutángulo, y otro, obtusángulo. Estudia cuál es cada uno de ellos.

a) $\boldsymbol{a = 40\,\text{cm}}$, $\boldsymbol{b = 60\,\text{cm}}$, $\boldsymbol{c = 40\,\text{cm}}$

b) $\boldsymbol{a = 12\,\text{cm}}$, $\boldsymbol{b = 20\,\text{cm}}$, $\boldsymbol{c = 16\,\text{cm}}$

c) $\boldsymbol{a = 7{,}5\,\text{cm}}$, $\boldsymbol{b = 25\,\text{cm}}$, $\boldsymbol{c = 25\,\text{cm}}$

a) $a^2 = 1600$, $b^2 = 3600$, $c^2 = 1600 \Rightarrow 3600 > 1600 + 1600 \Rightarrow b^2 > a^2 + c^2$. Triángulo obtusángulo

b) $a^2 = 144$, $b^2 = 400$, $c^2 = 256 \Rightarrow 400 = 144 + 256 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$. Triángulo rectángulo

c) $a^2 = 56{,}25$, $b^2 = 625$, $c^2 = 625 \Rightarrow 625 < 56{,}25 + 625 \Rightarrow b^2 < a^2 + c^2$. Triángulo acutángulo

6. Un rectángulo tiene de perímetro 240 m y su altura es de 20 m. Calcula la medida de su diagonal .

Dos de los lados del rectángulo miden 20 m cada uno, de manera que los otros dos lados iguales entre sí miden:

$$240 = 20 + 20 + l + l \Rightarrow l = \frac{200}{2} = 100 \text{ m} .$$

La diagonal divide el rectángulo en dos triángulos rectángulos iguales cuya hipotenusa coincide con la diagonal:

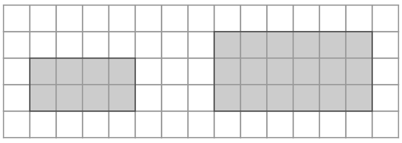
$$h = \sqrt{20^2 + 100^2} = \sqrt{400 + 10\,000} = 101{,}98 \text{ m}$$

10 Semejanza

1. **Actividad resuelta.**

2. **Dibuja dos rectángulos de modo que su base sea exactamente el doble que su altura. ¿Son semejantes las figuras que has dibujado? ¿Cuál es la razón de semejanza?**

Por ejemplo, dibujamos:



Sí, ambas figuras son semejantes porque sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados, proporcionales.

Su razón de semejanza es: $k = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

3. **Se ha ampliado una fotografía que medía 10 cm × 15 cm a 16 cm × 24 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza aplicada en la ampliación?**

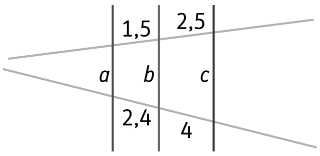
Su razón de semejanza es: $k = \frac{16}{10} = \frac{24}{15} = 1{,}6$

4. **Las medidas de un rectángulo son 5 y 10 cm. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior si su lado mayor mide 5 cm.**

Calculamos la razón de semejanza: $k = \frac{10}{5} = 2$

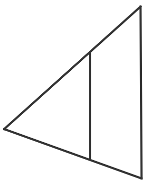
El otro lado del segundo rectángulo mide: $\frac{5}{2} = 2{,}5$ cm

5. **Las rectas *a* y *b* del dibujo son paralelas. Comprueba utilizando el teorema de Tales si también lo es la recta *c*.**



$\frac{1{,}5}{2{,}4} = \frac{2{,}5}{4} = 0{,}625 \Rightarrow$ *c* también es paralela a *a* y *b*.

6. **Indica qué medidas se corresponden con la figura.**



A. **2; 1,2; 1,6; 0,8**

B. **1,5; 0,9; 1,2; 0,72**

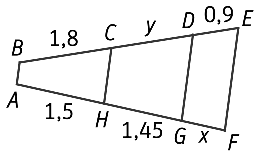
C. **2; 4; 3; 9**

D. **1,5; 1; 1,25; 2**

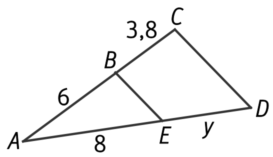
$\frac{1{,}5}{1{,}2} = \frac{0{,}9}{0{,}72} = 1{,}25 \Rightarrow$ La respuesta correcta es B. 1,5; 0,9; 1,2; 0,72.

7. Calcula la longitud de los segmentos desconocidos.

a)



b)

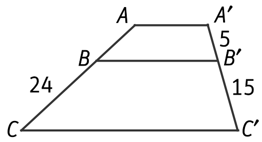


a) $\frac{1{,}8}{1{,}5}=\frac{y}{1{,}45}=\frac{0{,}9}{x}\Rightarrow x=\frac{1{,}5\cdot 0{,}9}{1{,}8}=0{,}75$ e $y=\frac{1{,}45\cdot 1{,}8}{1{,}5}=1{,}74$

b) $\frac{6}{8}=\frac{3{,}8}{y}\Rightarrow y=5{,}07$

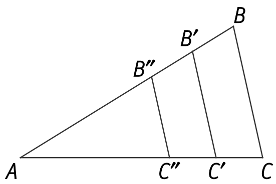
8. Calcula la longitud del segmento *AC* de la figura.

Compara tu respuesta con un compañero, ¿habéis seguido los mismos pasos?



$\frac{24}{15}=\frac{AC}{5+15}\Rightarrow AC=\frac{24\cdot 20}{15}=32$

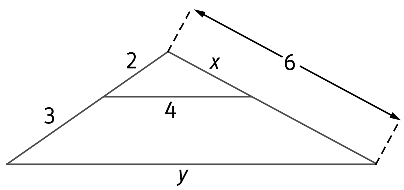
9. Explica por qué los triángulos que aparecen en la siguiente figura son triángulos en posición de Tales.



Los triángulos *ABC*, *AB'C*' y *AB"C"* están en posición de Tales porque tienen un vértice común, *A*, y los lados *BC*, *B'C'* y *B"C"* opuestos son paralelos.

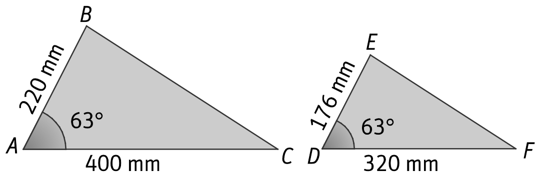
10. Actividad resuelta.

11. Calcula la longitud de los lados desconocidos *x* e *y* del siguiente triángulo.



$\frac{6}{x}=\frac{2+3}{2}=\frac{y}{4}\Rightarrow x=\frac{2\cdot 6}{5}=2{,}4$ $y=\frac{4\cdot 5}{2}=10$

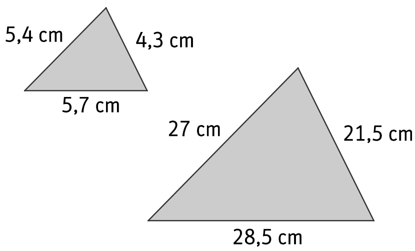
12. Comprueba, aplicando los criterios de semejanza, si los siguientes triángulos son semejantes.



Aplicamos el 2.° criterio de semejanza: $\widehat{A} = \widehat{D} = 25°$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \frac{220}{176} = \frac{400}{320} = 1{,}25$

Por tanto, los dos triángulos son semejantes.

13. Comprueba si estos triángulos son semejantes.



Aplicamos el 3.^er^ criterio de semejanza: $\frac{5{,}4}{27} = \frac{4{,}3}{21{,}5} = \frac{5{,}7}{28{,}5} = 0{,}2$

Por tanto, los dos triángulos son semejantes.

14. Actividad resuelta.

15. Isabel está aburrida esperando a una amiga al lado de una farola y observa que su sombra mide 40 cm, y la de la farola, 60 cm. Si ella mide 1,6 m, ¿cuál es la altura de la farola?

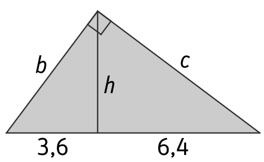
Los triángulos que forman Isabel y su sombra y la farola y su correspondiente sombra son semejantes. Por tanto:

$$\frac{1{,}6}{0{,}4} = \frac{h}{0{,}6} \Rightarrow h = \frac{1{,}6 \cdot 0{,}6}{0{,}4} = 2{,}4\text{ m}$$

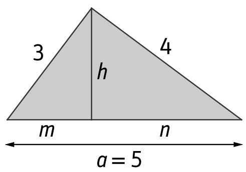
16. Actividad interactiva.

17. Aplica primero el teorema del cateto y luego el de la altura para calcular las medidas desconocidas en cada caso.

a)



b)



a) Aplicamos el teorema del cateto: $b^2 = 3{,}6 \cdot (3{,}6 + 6{,}4) = 36 \Rightarrow b = \sqrt{36} = 6$

$$c^2 = 6{,}4 \cdot (3{,}6 + 6{,}4) = 64 \Rightarrow c = \sqrt{64} = 8$$

Por el teorema de la altura: $h^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4 = 23{,}04 \Rightarrow h = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$

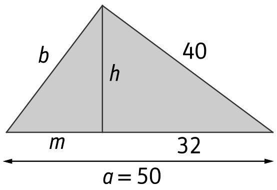
b) Si aplicamos el teorema del cateto: $3^2 = m \cdot 5 \Rightarrow m = \frac{9}{5} = 1{,}8$

$$4^2 = n \cdot 5 \Rightarrow n = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

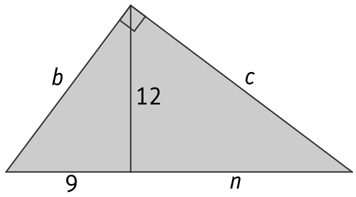
Mediante el teorema de la altura: $h^2 = 1{,}8 \cdot 3{,}2 = 5{,}76 \Rightarrow h = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$

18. Aplica los teoremas de la altura y del cateto y halla las medidas desconocidas en ambos casos.

a)



b)



a) Aplicamos el teorema del cateto: $b^2 = (50 - 32) \cdot 50 = 900 \Rightarrow b = \sqrt{900} = 30$

Por el teorema de la altura: $h^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4 = 23{,}04 \Rightarrow h = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$

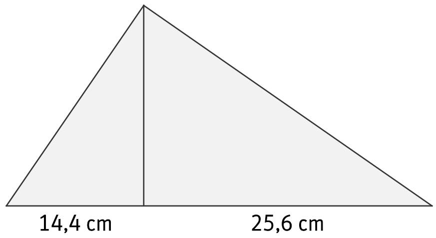
b) Mediante el teorema de la altura: $12^2 = 9 \cdot n \Rightarrow n = \dfrac{144}{9} = 16$

Aplicamos el teorema del cateto: $b^2 = 9 \cdot (9 + 16) = 225 \Rightarrow b = \sqrt{225} = 15$

$$c^2 = 16 \cdot (9 + 16) = 400 \Rightarrow c = \sqrt{400} = 20$$

19. En un triángulo rectángulo la hipotenusa queda dividida en dos segmentos de 14,4 cm y 25,6 cm al trazar la altura sobre la hipotenusa.

a) Dibuja en tu cuaderno el triángulo con sus medidas correspondientes.



a) Calcula la medida de la altura sobre la hipotenusa y el valor de los catetos.

Aplicamos el teorema de la altura: $h^2 = 14{,}4 \cdot 25{,}6 = 368{,}64 \Rightarrow h = \sqrt{368{,}64} = 19{,}2$

Por el teorema del cateto: $b^2 = 14{,}4 \cdot (14{,}4 + 25{,}6) = 576 \Rightarrow b = \sqrt{576} = 24$

$$c^2 = 25{,}6 \cdot (14{,}4 + 25{,}6) = 1024 \Rightarrow c = \sqrt{1024} = 32$$

20. Actividad resuelta.

21. En un triángulo rectángulo los catetos miden 24 cm y 7 cm, respectivamente.

a) ¿Cuánto mide la hipotenusa?

b) ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?

c) Calcula el área del triángulo.

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras: $a^2 = 24^2 + 7^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow a = \sqrt{625} = 25\text{ cm}$

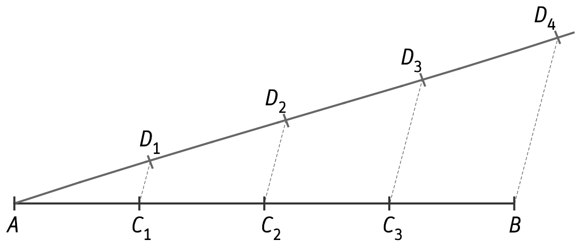
b) Por el teorema del cateto: $7^2 = m \cdot 25 \Rightarrow m = \dfrac{49}{25} = 1{,}96\text{ cm}$

$$24^2 = n \cdot 25 \Rightarrow n = \frac{576}{25} = 23{,}04\text{ cm}$$

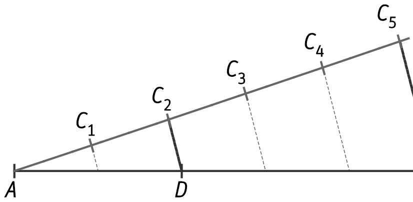
Mediante el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 1{,}96 \cdot 23{,}04 = 45{,}1584 \Rightarrow h = \sqrt{45{,}1584} = 6{,}72\text{ cm}$

c) El área mide: $A = \dfrac{25 \cdot 6{,}72}{2} = 84\text{ cm}^2$

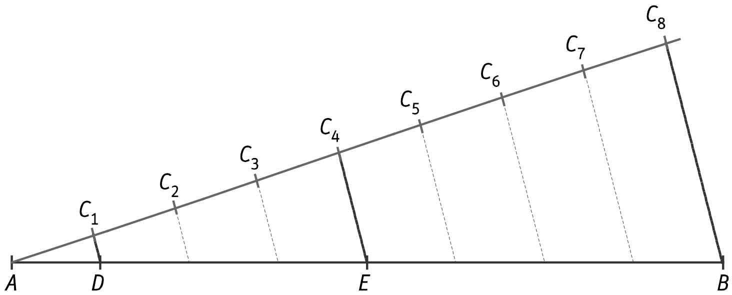
22. **Divide un segmento de 7 cm de longitud en cuatro partes iguales.**



23. **Divide un segmento de 6 cm de longitud en dos partes proporcionales a 2 y 3.**

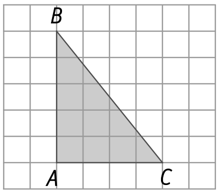


24. **Divide un segmento de 10 cm de longitud en tres partes proporcionales a 1, 3 y 4.**

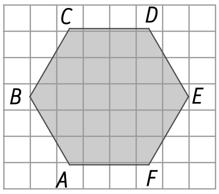


25. **Construye polígonos semejantes a los siguientes con razón de semejanza $\frac{2}{3}$ en tu cuaderno.**

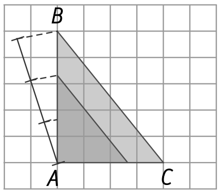
a)



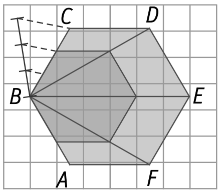
b)



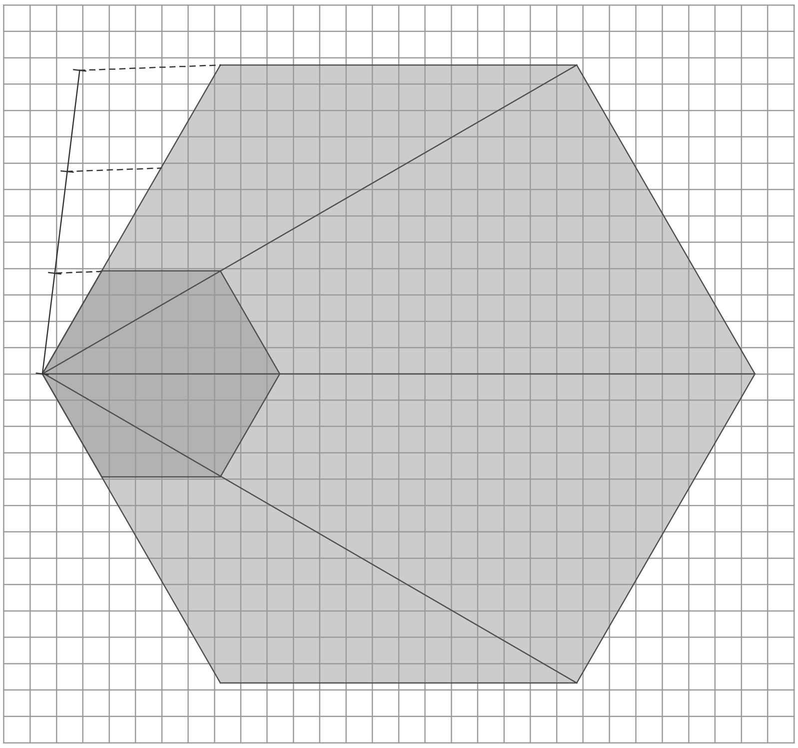
a)



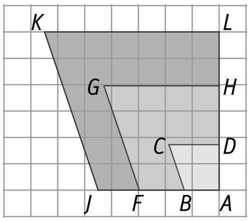
b)



26. Dibuja en tu cuaderno un hexágono regular de 5 cm de lado y construye otro semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{1}{3}$.



27. Indica la razón de semejanza de las siguientes parejas de figuras.



a) Los cuadriláteros *ABCD* y *AFGH*.

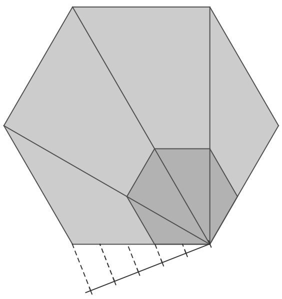
b) Los cuadriláteros *ABCD* y *AJKL*.

c) Los cuadriláteros *AFGH* y *AJKL*.

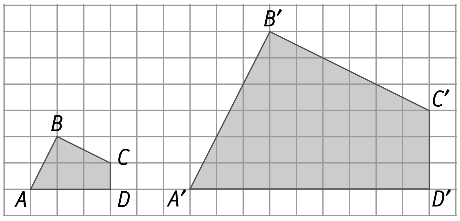
a) $k = \frac{AD}{AH} = \frac{\frac{7}{4}}{4} = \frac{7}{16}$ b) $k = \frac{AD}{AL} = \frac{\frac{7}{4}}{6} = \frac{7}{24}$ c) $k = \frac{AH}{AL} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

28. En un concierto quieren reservar $\frac{2}{5}$ de la pista a las personas de movilidad reducida. La pista tiene forma de hexágono regular y la zona reservada debe quedar lo más cerca posible del escenario, que está en uno de los lados del hexágono.

Dibuja en tu cuaderno un esquema de la pista del concierto y de la zona reservada.



29. Comprueba si las siguientes figuras son semejantes.



a) Calcula la medida de los lados, el perímetro y el área de cada figura.

b) Comprueba la relación que existe entre la razón de semejanza y las razones de los perímetros y de las áreas.

a) Para calcular los lados inclinados en la cuadrícula, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$AB=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$; $BC=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$; CD = 1; DA = 3

$A'B'=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}$; $B'C'=\sqrt{3^2+36^2}=\sqrt{45}$; $C'D'$ = 3; DA = 9

Los perímetros son:

$P_{ABCD}=\sqrt{5}+\sqrt{5}+1+3=2\sqrt{5}+4$ $\qquad$ $P_{A'B'C'D'}=\sqrt{45}+\sqrt{45}+3+9=2\sqrt{45}+12$

Para calcular el área, descomponemos la figura y formamos un cuadrado de lado 2, en el primer caso, y de lado 6, en el segundo:

$A_{ABCD}=4$ $\qquad$ $A_{A'B'C'D'}=36$

b) $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DA}{D'A'}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}=\frac{1}{3}=\frac{3}{9}\Rightarrow k=\frac{1}{3}$$

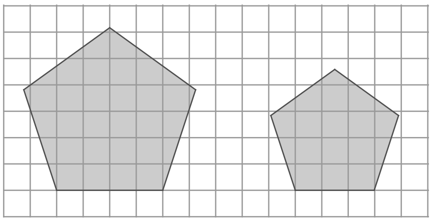
$$\frac{P_{ABCD}}{P_{A'B'C'D'}}=\frac{2\sqrt{5}+4}{2\sqrt{45}+12}=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{45}+6}=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3^2\cdot 5}+6}=\frac{\sqrt{5}+2}{3\cdot\sqrt{5}+6}=\frac{\sqrt{5}+2}{3\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{A'B'C'D'}}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$$

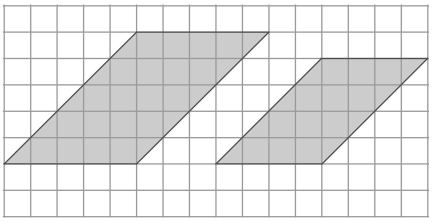
La razón de los perímetros coincide con la razón de semejanza y la de las áreas coincide con el cuadrado.

30. Halla la razón de semejanza entre estas figuras. ¿Cuál es la razón entre sus perímetros? ¿Y entre sus áreas?

a)



b)



a) La razón de semejanza entre las figuras es $k=\frac{3}{4}$, entre los perímetros es $k=\frac{3}{4}$ y entre las áreas es $k^2=\frac{9}{16}$.

b) La razón de semejanza entre las figuras es $k=\frac{4}{5}$, entre los perímetros es $k=\frac{4}{5}$ y entre las áreas es $k^2=\frac{16}{25}$.

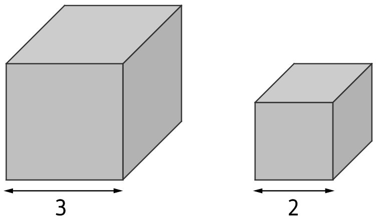
31. El perímetro de un hexágono regular mide 36 cm. ¿Cuál será el perímetro de otro hexágono regular si la razón de semejanza entre ambos es 5?

$$\frac{36}{P'}=5\Rightarrow P'=\frac{36}{5}=7{,}2\text{ cm}$$

32. El área de un cuadrado es de 16 cm². ¿Cuál será el área de otro cuadrado si la razón de semejanza entre ambos cuadrados es 2?

$$\frac{16}{A'} = 2^2 = 4 \Rightarrow A' = 4 \text{ cm}^2$$

33. Calcula la razón de semejanza entre estos cubos.



¿Cuál será la razón entre volúmenes?

La razón de semejanza entre las figuras es $k = \frac{3}{2}$ .y entre los volúmenes es $k^3 = \frac{27}{8}$.

34. El volumen de una pirámide es de 125 cm³. ¿Cuál será el volumen de otra pirámide semejante a esta si la razón de semejanza es 2,5?

$$\frac{125}{V'} = 2{,}5^3 = 15{,}625 \Rightarrow V' = 8 \text{ cm}^3$$

35. Actividad resuelta.

36. Los lados de un cuadrilátero miden 4, 7, 9 y 12 cm y su área es de 100 cm².

a) Halla la medida de los lados de un cuadrilátero semejante al anterior cuyo perímetro sea 48 cm.

b) ¿Cuál será la razón de las áreas entre los cuadriláteros?

a) Calculamos la razón de semejanza:

$$k = \frac{P}{P'} = \frac{48}{4+7+9+12} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Los lados miden: $4 \cdot 1{,}5 = 6\,\text{cm}$; $7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5\,\text{cm}$; $9 \cdot 1{,}5 = 13{,}5\,\text{cm}$ y $12 \cdot 1{,}5 = 18\,\text{cm}$

b) La razón entre las áreas es $k^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$.

37. Jorge y Elena han preparado un cartel de 40 cm × 25 cm para anunciar la fiesta de final de curso. Como piensan que les ha quedado un poco pequeño, hacen una fotocopia ampliada un 25 %.

a) Halla las nuevas dimensiones del cartel.

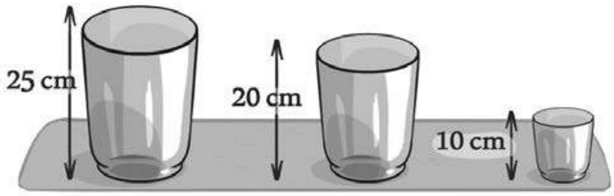
b) Comprueba que la relación de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

a) La razón de semejanza es $k = 1{,}25$.

Las nuevas dimensiones son: $40 \cdot 1{,}25 = 50\,\text{cm}$ y $25 \cdot 1{,}25 = 31{,}25\,\text{cm}$

b) $\frac{A_{\text{ampliado}}}{A_{\text{original}}} = \frac{50 \cdot 31{,}25}{40 \cdot 25} = \frac{1562{,}5}{1000} = 1{,}5625 = 1{,}25^2 = k^2$

38. Una vajilla contiene tres tipos de vasos de diferentes tamaños, pero semejantes entre sí.



a) Calcula las razones de semejanza entre el vaso grande y el mediano y entre el vaso mediano y el pequeño.

b) Si el vaso mediano tiene un volumen de 256 cm³. Calcula los volúmenes de los otros dos vasos.

a) $k_{grande-mediano} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ $\qquad k_{mediano-pequeño} = \frac{20}{10} = 2$

b) $\frac{V_{grande}}{V_{mediano}} = k^3 \Rightarrow \frac{V_{grande}}{256} = 1{,}25^3 \Rightarrow V_{grande} = 500 \text{ cm}^3$

$\frac{V_{mediano}}{V_{pequeño}} = k^3 \Rightarrow \frac{256}{V_{pequeño}} = 2^3 \Rightarrow V_{pequeño} = 32 \text{ cm}^3$

39. Actividad interactiva.

40. Para representar cada una de las siguientes situaciones, indica si utilizarías un mapa, un plano o una maqueta.

a) La disposición de los asientos en un teatro.

b) Una locomotora de vapor.

c) La forma de llegar desde tu ciudad al pueblo de un amigo.

d) Los ríos y sus afluentes europeos.

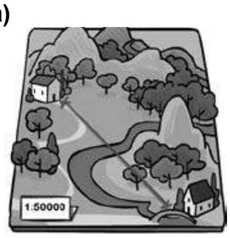
e) Las conexiones internas de uno de los microchips de tu ordenador.

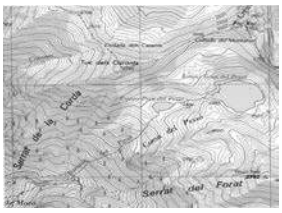
f) Las salidas de incendio de un hospital.

a) Maqueta **c)** Mapa **e)** Plano

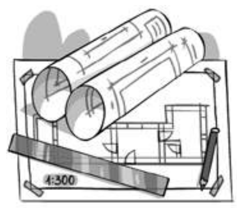
b) Maqueta **d)** Mapa **f)** Plano

41. ¿Qué tipo de representación es cada una de las siguientes?

a)


b)


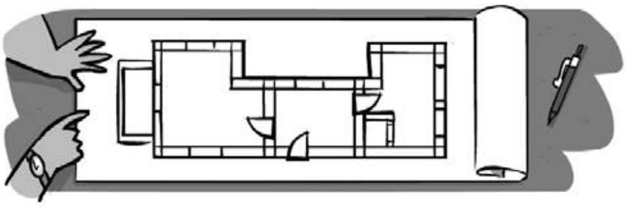
c)


d)


a) Plano **b)** Mapa **c)** Mapa **d)** Plano

42. Actividad resuelta.

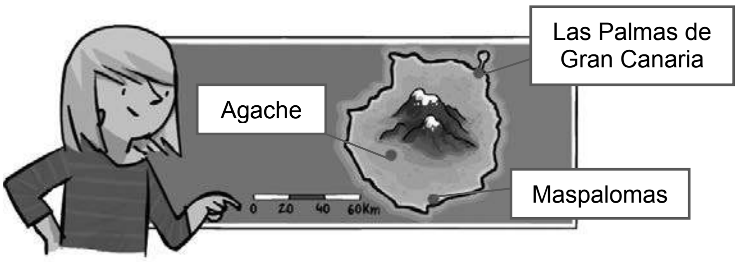
43. Fíjate en este plano de un comercio, mide con ayuda de una regla y calcula las dimensiones de cada estancia si la escala es 1:300.



De izquierda a derecha:

- En el plano: $1{,}2 \text{ x } 1{,}1 \text{ cm} \Rightarrow$ En la realidad: $1{,}2 \cdot 300 \text{ x } 1{,}1 \cdot 300 \text{ cm} = 360 \text{ x } 330 \text{ cm} = 3{,}6 \text{ x } 3{,}3 \text{ m}$
- En el plano: $0{,}9 \text{ x } 0{,}9 \text{ cm} \Rightarrow$ En la realidad: $0{,}9 \cdot 300 \text{ x } 0{,}9 \cdot 300 \text{ cm} = 270 \text{ x } 270 \text{ cm} = 2{,}7 \text{ x } 2{,}7 \text{ m}$
- En el plano: $1{,}2 \text{ x } 0{,}8 \text{ cm} \Rightarrow$ En la realidad: $1{,}2 \cdot 300 \text{ x } 0{,}8 \cdot 300 \text{ cm} = 360 \text{ x } 240 \text{ cm} = 3{,}6 \text{ x } 2{,}4 \text{ m}$

44. El siguiente mapa representa la isla de Gran Canaria.



Halla la distancia en línea recta entre la capital, Las palmas de Gran Canaria y los municipios de Maspalomas y Agache.

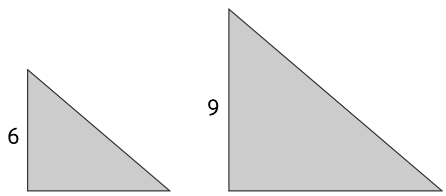
Según la escala, 0,4 cm en el mapa equivalen a 20 km en la realidad. Por tanto, la escala es 1:5 000.

Las Palmas de Gran Canaria – Agache: 1,35 cm en el mapa $\Rightarrow 1{,}35 \cdot 5\,000\,000 = 6\,750\,000 \text{ cm} = 67{,}5 \text{ km}$ en la realidad.

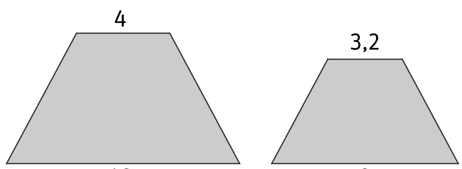
Las Palmas de Gran Canaria – Maspalomas: 1,5 cm en el mapa $\Rightarrow 1{,}5 \cdot 5\,000\,000 = 7\,500\,000 \text{ cm} = 75 \text{ km}$ en la realidad.

45. Comprueba si las siguientes figuras son semejantes entre sí. Justifica tu respuesta en cada caso.

a)



b)



a) $\frac{9}{6} = \frac{10{,}5}{7} = 1{,}5$. Sí es semejante, ya que sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados, proporcionales.

b) $\frac{4}{3{,}2} = \frac{10}{8} = 1{,}25$. Sí es semejante, ya que sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados, proporcionales.

46. ¿Son semejantes todos los hexágonos regulares? Un hexágono regular tiene por lado 4 cm. Calcula el lado de otro hexágono regular con razón de semejanza respecto al anterior de 3,5.

Sí, todos los hexágonos regulares son semejantes, ya que sus ángulos son iguales, y sus lados, proporcionales.

$\frac{l}{4} = 3{,}5 \Rightarrow l = 4 \cdot 3{,}5 = 14 \text{ cm}$

47. Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos. Estudia, en cada caso, si son o no semejantes. En caso afirmativo, determina la razón de semejanza.

a) $a = 2$; $b = 4$ y $c = 5$ — $a' = 8$; $b' = 16$ y $c' = 20$

b) $a = 3$; $b = 4$ y $c = 6$ — $a' = 4,5$; $b' = 6$ y $c' = 8,5$

c) $a = 2,5$; $b = 5,5$ y $c = 7$ — $a' = 7,5$; $b' = 16,5$ y $c' = 21$

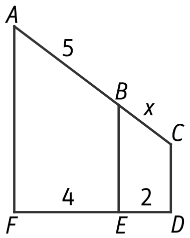
a) $\frac{a}{a'} = \frac{2}{8} = \frac{b}{b'} = \frac{4}{16} = \frac{c}{c'} = \frac{5}{20} \Rightarrow k = \frac{1}{4} = 0,25$

b) $\frac{a}{a'} = \frac{3}{4,5} = \frac{b}{b'} = \frac{4}{6} \neq \frac{c}{c'} = \frac{6}{8,5} \Rightarrow$ No son proporcionales.

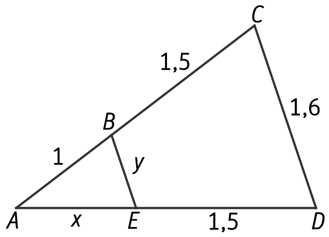
c) $\frac{a}{a'} = \frac{2,5}{7,5} = \frac{b}{b'} = \frac{5,5}{16,5} = \frac{c}{c'} = \frac{7}{21} \Rightarrow k = \frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$

48. Calcula el valor de los segmentos desconocidos en cada una de las siguientes representaciones.

a)



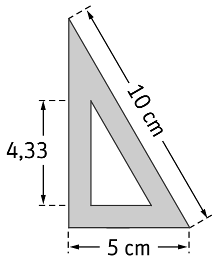
b)



a) $\frac{5}{4} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 2}{4} = 2,5$

b) $\frac{1}{x} = \frac{1,5}{1,5} \Rightarrow x = 1 \qquad \frac{1+1,5}{1,6} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1,6}{2,5} = 0,64$

49. Comprueba que los dos triángulos que forman el cartabón de la figura son proporcionales. Calcula la medida de todos los lados e indica la razón de semejanza.



Mediante el teorema de Pitágoras calculamos el cateto que falta del triángulo mayor:

$c = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 8,66$ cm

La razón de semejanza es: $k = \frac{8,66}{4,33} = 2$

Los lados que faltan del triángulo menor miden:

$\frac{10}{h} = 2 \Rightarrow h = 5$ cm (hipotenusa) $\qquad \frac{5}{c} = 2 \Rightarrow c = 2,5$ cm (cateto)

50. Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos semejantes. Calcula, en cada caso, la razón de semejanza y los valores de los lados desconocidos.

a) $a = 3$, $b = 4$, $c = 6$ — $a' = 4,5$, $b' = x$, $c' = y$

b) $a = x$, $b = 4$, $c = 3$ — $a' = 2$, $b' = 2$, $c' = y$

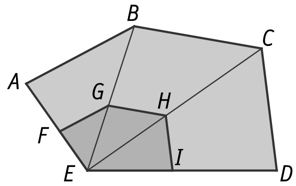
c) $a = x$, $b = y$, $c = 8$ — $a' = 12$, $b' = 20$, $c' = 25$

a) $\frac{a}{a'} = \frac{3}{4,5} = \frac{b}{b'} = \frac{4}{x} = \frac{c}{c'} = \frac{6}{y} \qquad \frac{3}{4,5} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 4,5}{3} = 6 \qquad \frac{3}{4,5} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = \frac{6 \cdot 4,5}{3} = 9$

b) $\frac{a}{a'} = \frac{x}{2} = \frac{b}{b'} = \frac{4}{2} = \frac{c}{c'} = \frac{3}{y} \qquad \frac{x}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \qquad \frac{4}{2} = \frac{3}{y} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot 2}{4} = 1,5$

c) $\frac{a}{a'} = \frac{x}{12} = \frac{b}{b'} = \frac{y}{20} = \frac{c}{c'} = \frac{8}{25} \qquad \frac{x}{12} = \frac{8}{25} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 12}{25} = 3,84 \qquad \frac{y}{20} = \frac{8}{25} \Rightarrow y = \frac{8 \cdot 20}{25} = 6,4$

51. **Del polígono *ABCDE* de la siguiente figura se conocen las medidas:**



***AB* = 27 mm** **CD = 30 mm** ***EA* = 25 mm**

***BC* = 30 mm** ***DE* = 45 mm**

Si el polígono *EFGHI* es semejante al anterior e *IE* = 2 cm:

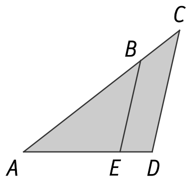
a) Calcula la razón de semejanza de los dos polígonos.

b) Halla los lados desconocidos de *EFGHI*.

a) $k=\dfrac{DE}{IE}=\dfrac{4,5}{2}=2,25$

b) $FG=\dfrac{2,7}{2,25}=1,2\,\text{cm}$ $HI=\dfrac{3}{2,25}=1,\widehat{3}\,\text{cm}$ $EF=\dfrac{2,5}{2,25}=1,\widehat{1}\,\text{cm}$ $GH=\dfrac{3}{2,25}=1,\widehat{3}\,\text{cm}$

52. **En la figura, los lados *CD* y *BE* son paralelos. Se sabe que:**



***AB* = 3** ***AE* = 2** ***BC* = 1** ***BE* = 2**

a) ¿Cómo son los triángulos *ABE* y *ACD*?

b) Calcula las medidas de los segmentos *AD*, *ED* y *CD*.

c) ¿Cuál es la razón de semejanza?

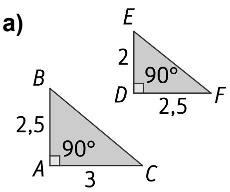
a) Como los lados *CD* y *BE* son paralelos, los triángulos tienen dos ángulos iguales, por tanto, por el 1.er criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

b) $\dfrac{3}{2}=\dfrac{3+1}{AD}\Rightarrow AD=\dfrac{4\cdot 2}{3}=2,\widehat{6}$ $\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{ED}\Rightarrow ED=\dfrac{2}{3}=0,\widehat{6}$ $\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{CD}\Rightarrow CD=2,\widehat{6}$

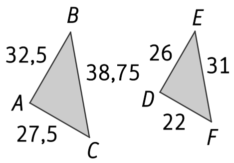
c) $k=\dfrac{3}{4}=0,75$

53. **Estudia si los siguientes pares de triángulos son o no semejantes.**

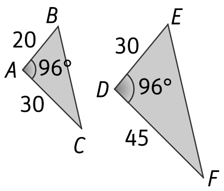
a)



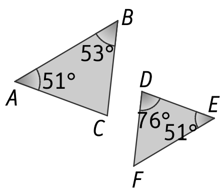
c)



b)



d)



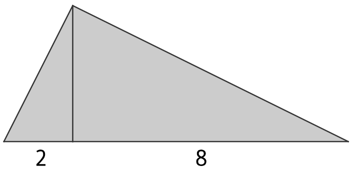
a) $\dfrac{2,5}{2}=1,25\neq\dfrac{3}{2,5}=1,2$. Aunque tienen un ángulo correspondiente igual, los lados que lo forman no son proporcionales, por tanto, por el 2.º criterio de semejanza, no son triángulos semejantes.

b) $\dfrac{20}{30}=\dfrac{30}{45}=0,\widehat{6}$. Tienen un ángulo correspondiente igual y los lados que lo forman son proporcionales, por tanto, por el 2.º criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

c) $\dfrac{32,5}{26}=\dfrac{38,75}{31}=\dfrac{27,5}{22}=1,25$. Como todos los lados son proporcionales, por el 3.er criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

d) Calculamos el ángulo que falta en el triángulo *ABC*: $180-(51+53)=76^{\circ}$. Como tienen tres ángulos iguales, son triángulos semejantes.

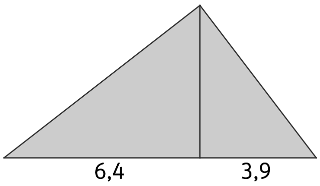
54. Calcula la altura y el área del siguiente triángulo rectángulo.



Por el teorema de la altura: $h^2 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow h = 4$

El área es: $A = \dfrac{(2+8) \cdot 4}{2} = 20$

55. Halla la longitud de los lados del triángulo rectángulo siguiente.



Por el teorema del cateto:

$b^2 = 6{,}4 \cdot (6{,}4 + 3{,}9) = 65{,}92 \Rightarrow b = 8{,}12$

$c^2 = 3{,}9 \cdot (6{,}4 + 3{,}9) = 40{,}17 \Rightarrow b = 6{,}34$

56. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm y uno de sus catetos mide 12 cm.

a) Halla la medida del otro cateto.

b) Si trazamos la altura sobre la hipotenusa, ¿cuánto miden las dos partes en que queda dividida? ¿Cuánto mide esta altura?

c) Calcula el área del triángulo rectángulo de dos formas diferentes. ¿Obtienes el mismo resultado?

a) Por el teorema de Pitágoras: $b = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = 16$ cm

b) Por el teorema del cateto, cada una de las partes de la hipotenusa mide:

$16^2 = m \cdot 20 \Rightarrow m = 12{,}8$ cm $\qquad 12^2 = n \cdot 20 \Rightarrow n = 7{,}2$ cm

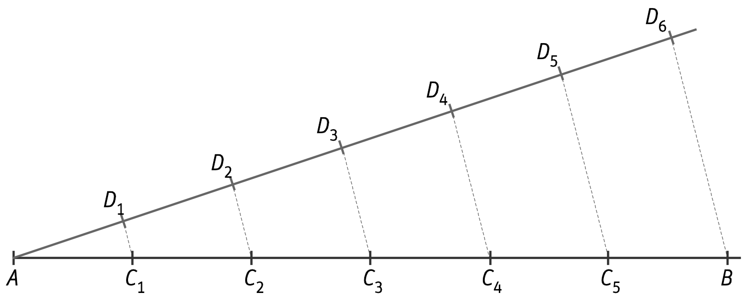
Por el teorema de la altura: $h^2 = 12{,}8 \cdot 7{,}2 = 92{,}16 \Rightarrow h = 9{,}6$ cm

c) Si tomamos la hipotenusa como base: $A = \dfrac{20 \cdot 9{,}6}{2} = 96 \text{ cm}^2$

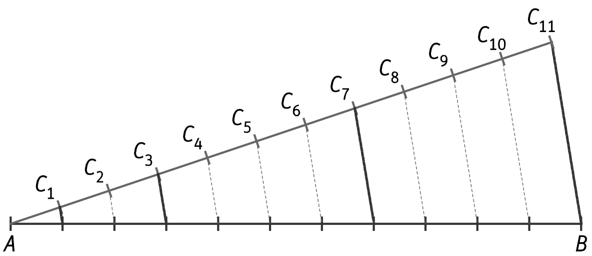
Si tomamos el cateto mayor como base: $A = \dfrac{16 \cdot 12}{2} = 96 \text{ cm}^2$

Sí, se obtiene el mismo resultado.

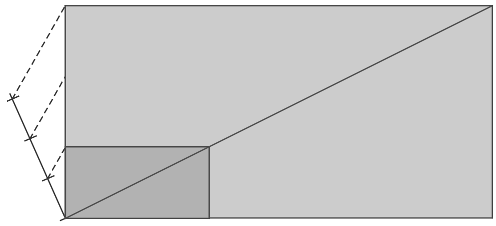
57. Divide un segmento de 10 cm de longitud en seis partes iguales.



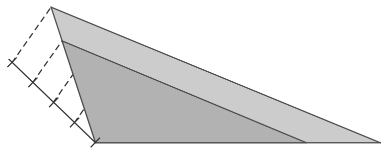
58. Divide un segmento de 8 cm de longitud en cuatro partes proporcionales a 1, 2, 4 y 4.



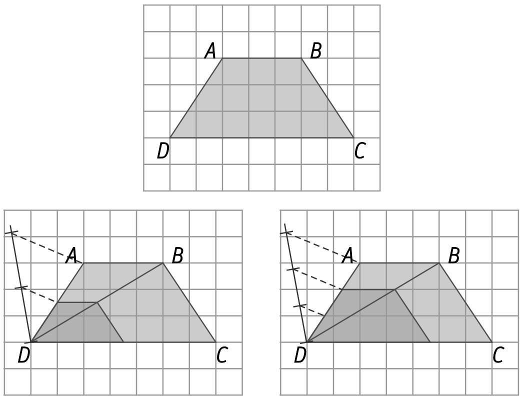
59. Construye en tu cuaderno un rectángulo de medidas 3 cm × 6 cm y, después, otro semejante al anterior con razón de semejanza $\frac{1}{3}$.



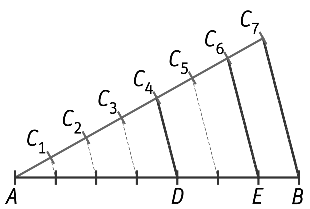
60. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 2 cm, 4 cm y 5 cm. Luego, construye otro triángulo semejante al anterior, con razón de semejanza 0,75.



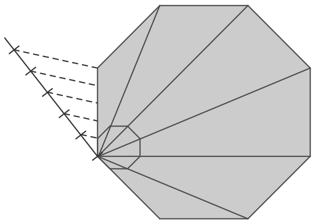
61. Construye en tu cuaderno dos polígonos semejantes al de la figura con razones de semejanza $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.



62. Divide un segmento de 4 cm en tres partes de forma que la primera sea el doble que la segunda, y esta, el doble que la tercera.

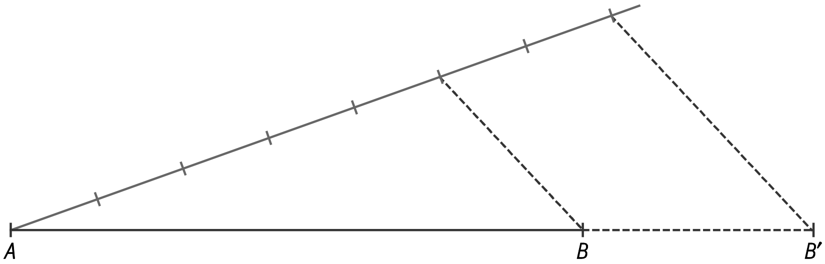


63. Dibuja en tu cuaderno un octógono regular y a continuación, construye otro semejante a este, cuyos lados sean un 20 % más pequeños. Comprueba, midiendo, que mantienen la razón de semejanza.

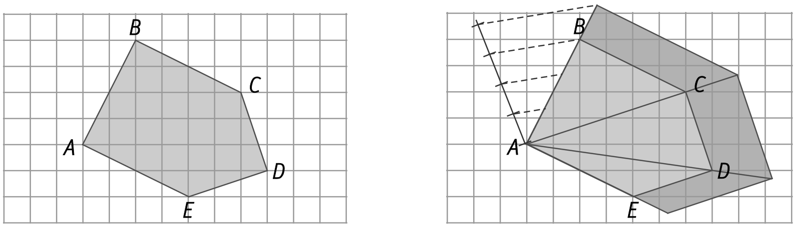


64. Actividad resuelta.

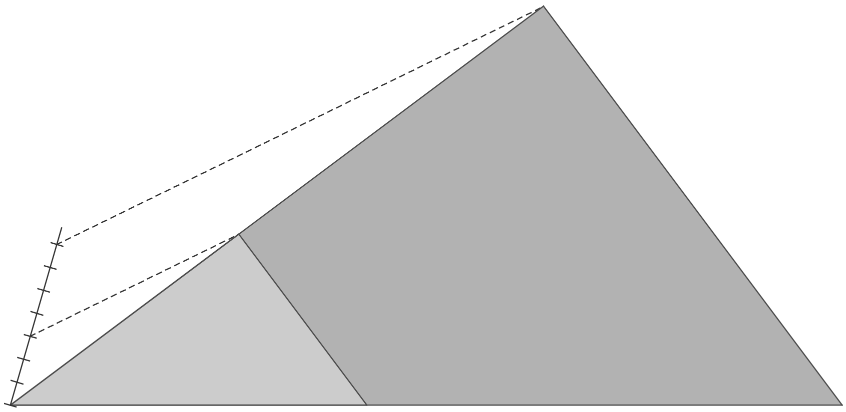
65. Dibuja un segmento en tu cuaderno de 8 cm de longitud y, a continuación, construye otro segmento semejante al primero, con razón de semejanza $\frac{7}{5}$.



66. Construye en tu cuaderno un polígono semejante al de la figura con razón de semejanza $\frac{4}{3}$.



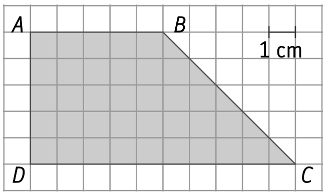
67. Dibuja en tu cuaderno un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 5 cm. Luego, construye otro triángulo semejante al anterior, con razón de semejanza $\frac{7}{3}$.



68. Dado el cuadrilátero de la figura:

d) Halla la medida de sus cuatro lados y su perímetro.

e) Dibuja un cuadrilátero de 44 cm de perímetro y semejante al anterior.



f) $AB = 5\text{ cm}$ $\quad BC = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7{,}07\text{ cm}$

$CD = 10\text{ cm}$ $\quad DA = 5\text{ cm}$

$P = 5 + 7{,}07 + 10 + 5 = 27{,}07\text{ cm}$

Como los cuadriláteros son semejantes, la razón de semejanza es: $k = \frac{P'}{P} = \frac{44}{27{,}07} = 1{,}63$

Los lados del nuevo cuadrilátero miden:

$A'B' = 5 \cdot 1{,}63 = 8{,}15\text{ cm}$ $\quad B'C' = 7{,}07 \cdot 1{,}63 = 11{,}52\text{ cm}$

$C'D' = 10 \cdot 1{,}63 = 16{,}3\text{ cm}$ $\quad D'A' = 5 \cdot 1{,}63 = 8{,}15\text{ cm}$

69. Un pentágono tiene tres lados que miden 5 cm, otro mide 4 cm y el último mide 6 cm. Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior, con perímetro de 37,5 cm.

Los pentágonos son semejantes, por tanto, sus perímetros también lo son. La razón de semejanza es:

$$k = \frac{P'}{P} = \frac{37{,}5}{5+5+5+4+6} = \frac{3}{2}$$

Los lados miden: $5 \cdot \frac{3}{2} = 7{,}5\text{ cm}$ $\quad 4 \cdot \frac{3}{2} = 6\text{ cm}$ $\quad 6 \cdot \frac{3}{2} = 9\text{ cm}$

70. Las medidas de un rectángulo son 3 cm y 5 cm. Calcula las medidas de otro rectángulo semejante al anterior, tal que su área mida 135 cm^2.

Como los rectángulos son semejantes, se cumple:

$$k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{135}{15} = 9 \Rightarrow k = 3$$

Los lados miden: $3 \cdot 3 = 9\text{ cm}$ $\quad 3 \cdot 5 = 15\text{ cm}$

71. Los lados de un pentágono miden 4 cm, 3 cm, 3 cm, 5 cm y 5 cm, respectivamente, y su área mide 25 cm^2. Calcula los lados de otro pentágono semejante al anterior con área de 100 cm^2.

Los pentágonos son semejantes, por tanto, se cumple:

$$k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{100}{25} = 4 \Rightarrow k = 2$$

Los lados miden:

$4 \cdot 2 = 8\text{ cm}$ $\quad 3 \cdot 2 = 6\text{ cm}$ $\quad 3 \cdot 2 = 6\text{ cm}$ $\quad 5 \cdot 2 = 10\text{ cm}$ $\quad 5 \cdot 2 = 10\text{ cm}$

72. Un triángulo rectángulo tiene catetos de medidas 3 y 4 cm. Halla la hipotenusa de otro triángulo semejante al anterior sabiendo que el área de este segundo triángulo es de 24 cm^2.

Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa del primer triángulo mide: $h = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5\text{ cm}$

Como los triángulos son semejantes, se cumple:

$$k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{24}{\frac{3 \cdot 4}{2}} = \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow k = 2$$

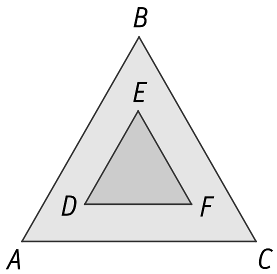
La hipotenusa del segundo triángulo mide: $h' = 5 \cdot 2 = 10\text{ cm}$.

73. Las áreas de dos cuadriláteros semejantes son 18 m^2 y 28,125 m^2, respectivamente. ¿Cuánto mide el perímetro del menor si el del mayor es de 22,5 m?

Los cuadriláteros son semejantes, por tanto la razón de semejanza es: $k^2 = \dfrac{A}{A'} = \dfrac{28{,}125}{18} = 1{,}5625 \Rightarrow k = 1{,}25$

El perímetro del menor mide: $1{,}25 = \dfrac{22{,}5}{P'} \Rightarrow P' = 18$

74. Los triángulos *ABC* y *DEF* son equiláteros. Si el área del mayor es de 6,93 cm^2 y el lado del menor mide 2 cm, ¿cuál es la razón de semejanza?



Calculamos la altura del triángulo menor por medio del teorema de Pitágoras:

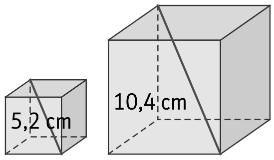
$$h = \sqrt{2^2 - \frac{2}{2}} = \sqrt{4-1} = 1{,}73\,\text{cm}$$

El área del triángulo menor es: $A = \dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = 1{,}73\,\text{cm}^2$

Como los triángulos son semejantes, se cumple: $k^2 = \dfrac{A'}{A} = \dfrac{6{,}93}{1{,}73} = 4 \Rightarrow k = 2$

75. Las diagonales de dos cubos miden 5,2 cm y 10,4 cm, respectivamente.

Si el volumen del primero es de 27 cm^3, ¿cuál es el volumen del segundo?



Como los cubos son semejantes, se cumple: $k = \dfrac{d'}{d} = \dfrac{10{,}4}{5{,}2} = 2$

$$k^3 = \frac{V'}{27} = 8 \Rightarrow V' = 216$$

76. En un mapa se indica que la escala es 1:5000.

a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la realidad representada?

a) Si la distancia entre dos ciudades en ese mapa es de 7,3 cm, ¿cuál será la distancia real que las separa? Da el resultado en kilómetros.

a) La razón de semejanza es $k = 5000$.

b) La distancia es $\dfrac{1}{5000} = \dfrac{7{,}3}{d} \Rightarrow d = 7{,}3\cdot 5000 = 36\,500\ \text{cm} = 0{,}365\ \text{km}$.

77. La altura de un edificio es de 30 m. Se quiere construir una maqueta con escala 1:200. ¿Cuál será la altura de ese edificio en la maqueta?

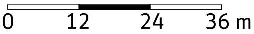
La razón de semejanza es $k = \dfrac{1}{200} = 0{,}005$.

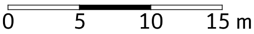
La altura es $h = \dfrac{30}{200} = 0{,}15\,\text{m}$.

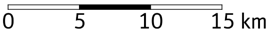
78. La distancia entre dos ciudades es de 350 km y la distancia que las separa en un mapa es de 7 cm. ¿Cuál es la escala de dicho mapa?

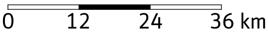
$$E = \frac{7}{35\,000\,000} = \frac{1}{5\,000\,000} \Rightarrow 1:5\,000\,000$$

79. Relaciona cada escala gráfica con cada una de las escalas numéricas.

I.


III.


II.


IV.


A. 1:500 000 **B. 1:500** **C. 1:1 200 000** **D. 1:1200**

I. $E=\frac{3}{3600}=\frac{1}{1200}$. La respuesta correcta es D.1:1200.

II. $E=\frac{3}{1\,500\,000}=\frac{1}{500\,000}$. La respuesta correcta es A.1:500 000.

III. $E=\frac{3}{1500}=\frac{1}{500}$. La respuesta correcta es B.1:500.

IV. $E=\frac{3}{3\,600\,000}=\frac{1}{1\,200\,000}$. La respuesta correcta es C.1:1 200 000.

80. La distancia entre dos ciudades representadas en un mapa de escala 1:50 000 es de 10 cm. Calcula la distancia que separa a dichas ciudades en otro mapa de escala 1:125 000.

La distancia real entre las dos ciudades es: $\frac{1}{50\,000}=\frac{10}{d_{real}} \Rightarrow d_{real}=500\,000$ cm

La distancia en el segundo mapa es: $\frac{1}{125\,000}=\frac{d_{mapa}}{500\,000} \Rightarrow d_{mapa}=\frac{500\,000}{125\,000}=4\,\text{cm}$

81. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Todos los rectángulos son semejantes.

c) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

d) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.

e) Todos los triángulos isósceles son semejantes.

f) Todos los triángulos rectángulos e isósceles son semejantes.

a) Cierto. Todos sus ángulos son iguales, como los lados de un mismo cuadrado también son iguales, podemos asegurar que son proporcionales a los de otro cuadrado.

b) Falso. Sus ángulos son iguales pero no podemos asegurar que sus lados sean proporcionales.

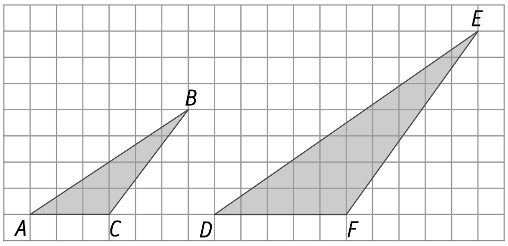
c) Cierto. Los triángulos equiláteros tienen los tres lados iguales y, por tanto, los tres ángulos. Cumplen el 1.^{er} criterio de semejanza de triángulos.

d) Falso. Como son triángulos rectángulos, solo podemos asegurar que tienen un ángulo igual, el recto. No cumplen ningún criterio de semejanza.

e) Falso. Solo sabemos que tienen dos de sus lados iguales. No cumplen ningún criterio de semejanza.

f) Cierto. Por ser rectángulos tienen un ángulo igual y, por ser isósceles, los lados que lo forman también son iguales en un mismo triángulo y, por tanto, son proporcionales entre triángulos. Cumplen el 2.^{o} criterio de semejanza de triángulos.

82. Con la ayuda del teorema de Pitágoras, calcula los lados de los triángulos *ABC* y *DEF* y comprueba si son semejantes.



$AB=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=7{,}21$ $\quad BC=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ $\quad AC=3$

$DE=\sqrt{10^2+7^2}=\sqrt{149}=12{,}21$ $\quad EF=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}=8{,}60$ $\quad DF=5$

$\frac{DE}{AB}=\frac{12{,}21}{7{,}21}=1{,}69\neq\frac{EF}{BC}=\frac{8{,}60}{5}=1{,}72\neq\frac{DF}{AC}=\frac{5}{3}=1{,}\widehat{6}\Rightarrow$ No son semejantes.

83. Un edificio de cinco plantas de igual altura proyecta, en cierto instante, una sombra de 22 m. Calcula la altura de cada planta si se sabe que en ese mismo momento un árbol de 3 m de altura proyecta una sombra de 4,5 m.

Los triángulos que forman el edificio y su sombra y el árbol y su correspondiente sombra son semejantes. Por tanto: $\frac{3}{4{,}5}=\frac{h}{22}\Rightarrow h=\frac{3\cdot 22}{4{,}5}=14{,}\widehat{6}$ m

Cada planta mide: $14{,}\widehat{6}:5=2{,}9\widehat{3}$ m

84. El cuarto de Javier es un rectángulo de dimensiones 3,15 m × 3,78 m. ¿Qué dimensiones tendrá su representación en un plano con escala 1:21?

$\frac{1}{21}=\frac{d_1}{3{,}15}\Rightarrow d_1=\frac{3{,}15}{21}=0{,}15\text{ m}=15\text{ cm}$ $\quad \frac{1}{21}=\frac{d_2}{3{,}78}\Rightarrow d_2=\frac{3{,}78}{21}=0{,}18\text{ m}=18\text{ cm}$

85. Las dimensiones de un jardín rectangular en un plano de escala 1:125 son 24 cm y 32 cm.

a) Calcula las dimensiones reales del jardín y expresa los resultados en metros.

b) Calcula el perímetro y el área del jardín.

a) $\frac{1}{125}=\frac{24}{d_1}\Rightarrow d_1=24\cdot 125=3000\text{ cm}=30\text{ m}$ $\quad \frac{1}{125}=\frac{32}{d_2}\Rightarrow d_2=32\cdot 125=4000\text{ cm}=40\text{ m}$

b) $P=30\cdot 2+40\cdot 2=60+80=140$ m $\quad A=30\cdot 40=1200\text{ m}^2$

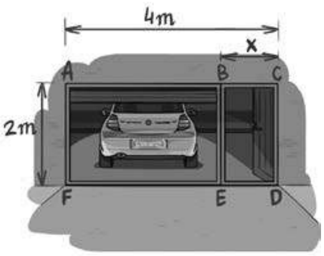
86. La distancia entre Badajoz y Lisboa en línea recta es de 230 km. Calcula la distancia que separa ambas ciudades en un mapa con escala 1:1 200 000.

$\frac{1}{1200000}=\frac{d}{230}\Rightarrow d=\frac{230}{1200000}=0{,}000192\text{ km}=19{,}2\text{ cm}$

87. Se ha realizado una maqueta de 25 cm de la estatua de un parque para colocarla en el centro de exposiciones del colegio. Calcula la escala de la maqueta si la altura real de esa estatua es de 2 m.

$E=\frac{25}{200}=\frac{1}{8}\Rightarrow$ La escala es 1:8.

88. Se quiere colocar una puerta de garaje en la entrada de una casa, que tenga un acceso para los vehículos y otro para los peatones, como se muestra en la figura.



a) Calcula el valor del lado *x* para que los rectángulos *ACDF* y *BCDE* sean semejantes.

b) Halla las áreas de los rectángulos anteriores y comprueba la relación que existe entre su razón y la razón de semejanza.

c) Comprueba si el rectángulo *ABEF* es también semejante a los anteriores.

a) Para que los rectángulos sean semejantes: $\frac{4}{2}=\frac{2}{x}\Rightarrow x=1$ m

b) $A_{ACDF}=4\cdot 2=8\text{ m}^2$ $\quad$ $A_{BCDE}=2\cdot 1=2\text{ m}^2$

$k=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$ $\quad$ $\frac{8}{2}=4=k^2$

La razón de las áreas coincide con el cuadrado de la razón de semejanza.

c) Las dimensiones del rectángulo *ABEF* son 2 m x 3 m. Por tanto, la razón de proporcionalidad es: $k=\frac{3}{2}=1{,}5\neq 2\Rightarrow$ No es semejante a los anteriores.

89. Un triángulo isósceles tiene 10 cm de base y 20 cm de altura.

a) Calcula el perímetro de dicho triángulo y del que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados.

b) Halla la relación entre las áreas de los dos triángulos.

a) Calculamos los lados iguales mediante el teorema de Pitágoras: $l=\sqrt{20^2+\left(\frac{10}{2}\right)^2}=\sqrt{425}=20{,}62\text{ cm}$.

$P=20{,}62+20{,}62+10=51{,}23\text{ cm}$

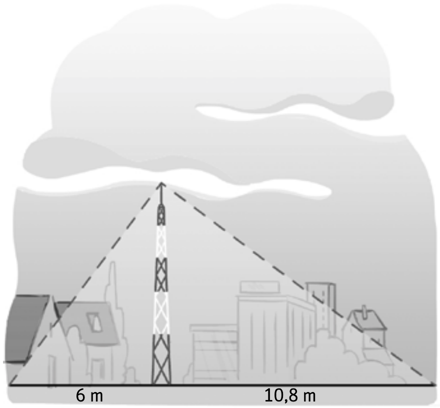
Al ser trazados desde el punto medio del triángulo inicial, los lados del nuevo triángulo miden la mitad.

$P'=\frac{20{,}62}{2}+\frac{20{,}62}{2}+\frac{10}{2}=25{,}62\text{ cm}$

b) $A=\frac{10\cdot 20}{2}=100\text{ cm}^2$ $\quad$ $A'=\frac{5\cdot 10}{2}=25\text{ cm}^2$

La relación entre las áreas es: $\frac{A'}{A}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

90. Una antena telefónica se encuentra sujeta al suelo por dos cables tensores que forman un ángulo recto. Los cables se encuentran anclados al suelo en dos puntos alineados con la base de la antena y que distan de ella 6 y 10,8 m.



a) Calcula la altura de la antena.

b) Halla la longitud de los cables.

a) Por el teorema de la altura:

$h^2=6\cdot 10{,}8=64{,}8\Rightarrow h=8{,}05$ m

b) Aplicando el teorema del cateto:

$b^2=6\cdot(6+10{,}8)=100{,}8\Rightarrow b=10{,}04$ m

$c^2=10{,}8\cdot(6+10{,}8)=181{,}44\Rightarrow c=13{,}47$ m

91. Actividad resuelta.

92. Tres latas de tomate tienen forma semejante y sus alturas respectivas son de 20 cm, 25 cm y 40 cm. Si el volumen de la lata mediana es de 250 cm³, halla los volúmenes de las otras dos latas.

$$k_{\text{grande - mediana}} = \frac{40}{25} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \qquad k_{\text{mediana - pequeña}} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

$$\frac{V_{\text{grande}}}{V_{\text{mediana}}} = 1{,}6^3 \Rightarrow \frac{V_{\text{grande}}}{250} = 4{,}096 \Rightarrow V_{\text{grande}} = 1024\ \text{cm}^3$$

$$\frac{V_{\text{mediana}}}{V_{\text{pequeña}}} = 1{,}25^3 \Rightarrow \frac{250}{V_{\text{pequeña}}} = 1{,}953 = \Rightarrow V_{\text{pequeña}} = 128\ \text{cm}^3$$

93. Una empresa de vehículos fabrica dos camiones semejantes para transporte de carburantes.

- **Las alturas respectivas son de 2 m y 2,5 m.**
- **La superficie de material necesaria para construir el depósito del camión menor es de 18 m².**
- **El volumen del depósito del camión mayor es de 48 kL.**

Calcula el área necesaria para construir el depósito mayor y el volumen del depósito menor.

$$k = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$$

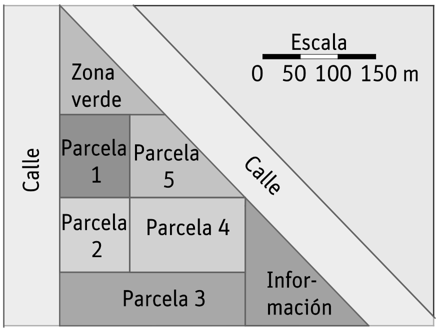
$$\frac{A_{\text{menor}}}{A_{\text{mayor}}} = k^2 \Rightarrow \frac{18}{A_{\text{mayor}}} = 0{,}8^2 \Rightarrow A_{\text{mayor}} = \frac{18}{0{,}64} = 28{,}125\ \text{m}^2$$

$$\frac{V_{\text{menor}}}{V_{\text{mayor}}} = k^3 \Rightarrow \frac{V_{\text{menor}}}{48} = 0{,}8^3 \Rightarrow V_{\text{menor}} = 24{,}576\ \text{kL}$$

94. Van a replantar una parte de un parque siguiendo este plano.

a) Halla las dimensiones de cada parcela.

b) Calcula la superficie que ocupa la zona de información y la zona verde.



a) La escala es $E = \dfrac{1{,}5\ \text{cm}}{15000\ \text{cm}} = \dfrac{1}{10000}$.

Por tanto, una vez obtenidas las medidas en el plano en centímetros, para calcular las dimensiones reales, multiplicamos por 10 000 y las expresamos en metros.

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="2">Dimensiones en el plano (cm)</th><th colspan="2">Dimensiones en la realidad (m)</th></tr>
<tr><th>base</th><th>altura</th><th>base</th><th>altura</th></tr>
<tr><td>Zona verde</td><td>1,5</td><td>1,6</td><td>150</td><td>160</td></tr>
<tr><td>Parcela 1</td><td>1</td><td>1,2</td><td>100</td><td>120</td></tr>
<tr><td>Parcela 2</td><td>1</td><td>1</td><td>100</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Parcela 3</td><td>2,6</td><td>0,75</td><td>260</td><td>75</td></tr>
<tr><td>Parcela 4</td><td>1,6</td><td>1</td><td>160</td><td>100</td></tr>
<tr><td>Parcela 5</td><td>0,5 | 1,6</td><td>1,2</td><td>50 | 160</td><td>120</td></tr>
<tr><td>Información</td><td>1,7</td><td>1,75</td><td>170</td><td>175</td></tr>
</table>

b) Zona verde: $A_{\text{plano}} = \dfrac{1{,}5 \cdot 1{,}6}{2} = 1{,}2\ \text{cm}^2 \qquad A_{\text{real}} = \dfrac{150 \cdot 160}{2} = 12000\ \text{m}^2$

Información: $A_{\text{plano}} = \dfrac{1{,}7 \cdot 1{,}75}{2} = 1{,}4875\ \text{cm}^2 \qquad A_{\text{real}} = \dfrac{170 \cdot 175}{2} = 14875\ \text{m}^2$

95. En un mapa de escala 1:50 000, la distancia que separa los dos extremos de un camino recto es de 6,5 cm. ¿Cuánto tiempo tardará una persona en realizar dicho camino andando a una velocidad de 5 km por hora?

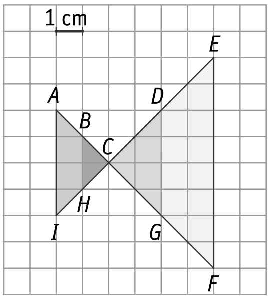
Calculamos la longitud real del camino.

$$\frac{1}{50\,000}=\frac{6,5}{d}\Rightarrow d=6,5\cdot 50\,000=325\,000\text{ cm}=3,25\text{ km}$$

Como en 1 h recorre 5 km, en recorrer 3,25 km tardará:

$$\frac{1\text{ h}}{5\text{ km}}=\frac{x}{3,25\text{ km}}\Rightarrow x=\frac{3,25}{5}=0,65\text{ h}=39\text{ min}$$

96. El siguiente esquema corresponde al diseño de un logotipo.



a) Indica alguna razón que demuestre que los triángulos *CEF* y *BCH* son semejantes.

b) Comprueba si los trapecios *ABHI* y *DEFG* son o no semejantes.

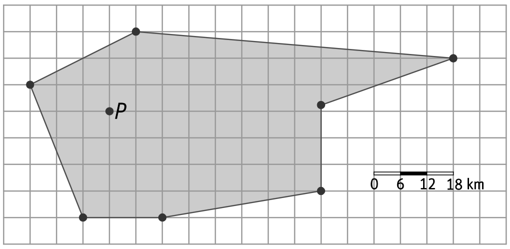
c) Calcula la razón de las áreas de los trapecios *ABHI* y *DEFG*.

a) Tienen un ángulo igual (que tiene su vértice en el punto *C*), y los lados que lo forman son proporcionales. Por el 2.º criterio de semejanza, son triángulos semejantes.

b) $\frac{DG}{BH}=\frac{4}{2}=\frac{EF}{AI}=\frac{8}{4}\Rightarrow$ Son semejantes con razón de semejanza $k=2$.

c) Como son figuras semejantes: $\frac{A_{DEFG}}{A_{ABHI}}=k^2=4$

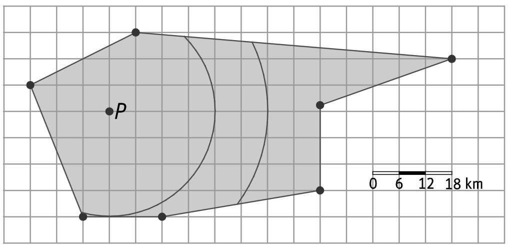
97. El plano siguiente representa una zona donde se quieren colocar molinos para la generación de energía eléctrica renovable.



Los molinos deben estar situados a más de 24 km y a menos de 36 km del punto *P*. Copia el plano en tu cuaderno y señala la zona donde pueden ir ubicados los molinos.

Según la representación gráfica de la escala, 6 km corresponden al lado del cuadrado que forma la cuadrícula. Por tanto:

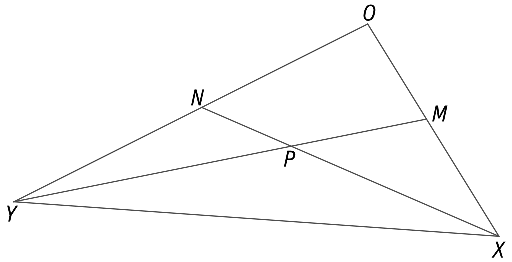
$24\text{ km}=4\cdot 6\text{ km}\Rightarrow 4\text{ cuadrados}$ $\qquad$ $36\text{ km}=6\cdot 6\text{ km}\Rightarrow 6\text{ cuadrados}$



98. El triángulo rectángulo *XOY* tiene un ángulo recto en el vértice *O* y los puntos *M* y *N* son los puntos medios de los catetos *OX* y *OY* respectivamente. Si *XN* = 19 e *YM* = 22, ¿cuál es el valor de *XY*?

A. 24 **B. 26** **C. 28** **D. 30**

El punto *P* divide a cada uno de los segmentos *XN y YM en dos partes* de manera que *NP* y *MP* miden la mitad que *PX* y *PY* respectivamente.



Por tanto, los triángulos *MNP* y *XPY*, por el 2.º criterio de semejanza, son semejantes con razón *k* = 2 y, además, se cumple que $XY = 2 \cdot MN$.

Por otro lado, aplicamos el teorema de Pitágoras:

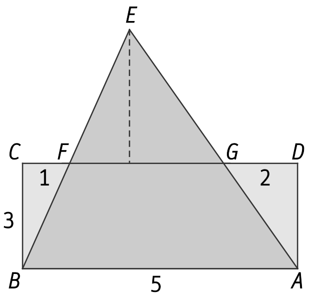
$OM^2 = YM^2 - OY^2 \Rightarrow OM^2 = 22^2 - OY^2$ $ON^2 = XN^2 - OX^2 \Rightarrow ON^2 = 19^2 - OX^2$

Como $MN^2 = OM^2 + ON^2$ se obtiene: $MN^2 = 22^2 - OY^2 + 19^2 - OX^2 = 22^2 + 19^2 - \left(OX^2 + OY^2\right)$

Sustituimos por XY: $\left(\dfrac{XY}{2}\right)^2 = 22^2 + 19^2 - XY^2 \Rightarrow XY^2 = \dfrac{4}{5}\left(22^2 + 19^2\right) = 676 \Rightarrow XY = 26$

La respuesta correcta es B. 26.

99. En el rectángulo *ABCD*, *AB* = 5 y *BC* = 3. Marcamos en el lado *CD* los puntos *F* y *G* con *CF* = 1 y *GD* = 2. Si las rectas *AF* y *BG* se cortan en *E*, ¿cuál es el área del triángulo *AEB*?



A. **10**

B. $\mathbf{\dfrac{21}{2}}$

C. **12**

D. $\mathbf{\dfrac{25}{2}}$

Los triángulos *AEB* y *GEF* son semejantes en posición de Tales.

Como $FG = 5 - (2+1) = 2$, la razón de semejanza es $k = \dfrac{5}{2}$.

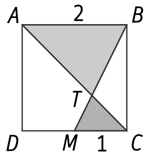
Se cumple que $\dfrac{A_{ABE}}{A_{GFE}} = k^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4}$ y que

$A_{ABE} = A_{ABFG} + A_{GFE} = \dfrac{5+2}{2} \cdot 3 + A_{GFE} = \dfrac{21}{2} + A_{GFE}$

Por tanto, $\dfrac{\dfrac{21}{2} + A_{GFE}}{A_{GFE}} = \dfrac{25}{4} \Rightarrow A_{GFE} = 2$ y $A_{ABE} = \dfrac{21}{2} + 2 = \dfrac{25}{2}$

La respuesta correcta es D. $\dfrac{25}{2}$.

100. El lado del cuadrado *ABCD* de la figura mide 2 cm. Si *M* es el punto medio del lado *CD*, el área del triángulo *TMD* es:



A. $\frac{1}{3}$ **cm²** **C.** $\frac{2}{7}$ **cm²**

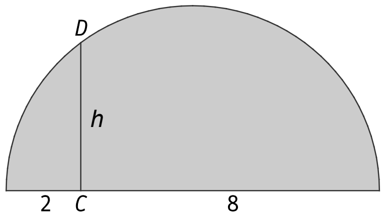
B. $\frac{1}{4}$ **cm²** **D.** $\frac{3}{10}$ **cm²**

Se observa que los triángulos *TMC* y *ABT* son semejantes con razón de semejanza $k = \frac{1}{2}$. Por tanto, la altura desde *T* hasta *AB* es el doble que la altura desde *T* hasta *MC*, siendo ésta un tercio de 2. Entonces, $A_{TMD} = \frac{1 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$ cm².

La respuesta correcta es A. $\frac{1}{3}$ cm².

Encuentra el error

101. Calcula el valor de *h* en la siguiente figura.



El diámetro de la semicircunferencia mide 10 cm, por lo que el radio mide 5 cm.

Como el segmento *CD* une el diámetro con un punto cualquiera de la circunferencia: *h* = 5 cm

¿Dónde está el error? Calcula la solución correcta.

El segmento *CD* no es un radio de la circunferencia, ya que no parte del centro.

Si unimos el punto *D* con ambos extremos del diámetro, obtenemos un triángulo rectángulo del cual, *h* es la altura.

Por el teorema de la altura: $h^2 = m \cdot n = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow h = 4$ cm

PONTE A PRUEBA

La ley del cuadrado cubo

Actividad resuelta

Superficie de un continente

A continuación, se presenta un mapa de La Antártida.

Estima el área de la Antártida utilizando la escala que acompaña al mapa. Muestra cómo has hecho los cálculos y explica cómo has hecho tu estimación.

(Puedes descargarte el mapa de smSaviadigital.com y dibujar sobre él, si te es útil para hacer la estimación.)

(Prueba PISA 2003)

La escala numérica del mapa es 1:100 000 000.

Para estimar dibujamos un cuadrado que contenga la superficie del mapa y medimos el lado: 5,7 cm. Por tanto, el lado en la realidad mide: $5{,}7 \cdot 100\,000\,000 = 570\,000\,000 \text{ cm} = 5\,700 \text{ km}$.

Y la superficie estimada será de $5\,700^2 = 32\,490\,000 \text{ km}^2$.

También se puede resolver de forma estimada dibujando un rectángulo, un círculo o sumando áreas estimadas de varias figuras geométricas regulares.

Pizzas

Una *pizzería* sirve dos *pizzas* redondas del mismo grosor y de diferente tamaño.

- **La más pequeña tiene un diámetro de 30 cm y cuesta 30 €.**
- **La mayor tiene un diámetro de 40 cm y cuesta 40 €.**

¿Qué *pizza* tiene mejor precio? Muestra tu razonamiento.

(Prueba PISA 2003)

Para comprobarlo calculamos el precio por centímetro cuadrado de cada *pizza*.

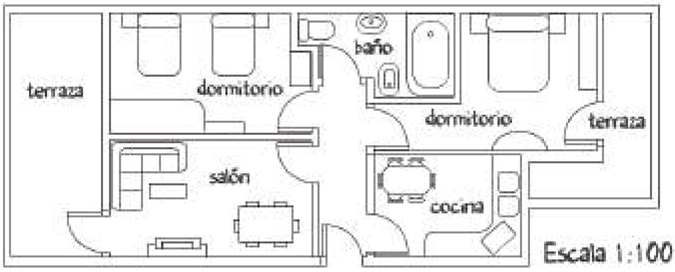
– *Pizza* pequeña: $\dfrac{30}{\pi \cdot 15^2} = \dfrac{30}{706{,}86} = 0{,}04 \text{ €/cm}^2$

– *Pizza* grande: $\dfrac{40}{\pi \cdot 20^2} = \dfrac{40}{1256{,}68} = 0{,}03 \text{ €/cm}^2$

El precio por centímetro cuadrado de la *pizza* grande es menor que el de la *pizza* pequeña. Tiene mejor precio la *pizza* grande.

Compra de un apartamento

Este es el plano del apartamento que los padres de Mónica quieren comprar a una agencia inmobiliaria.



Para calcular la superficie total del apartamento (incluidas la terraza y las paredes) puedes medir el tamaño de cada habitación, calcular la superficie de cada una y sumar todas las superficies.

No obstante, existe un método más eficaz para calcular la superficie total en el que sólo tienes que medir 4 longitudes. Señala en el plano anterior las cuatro longitudes necesarias para calcular la superficie total del apartamento.

Las cuatro longitudes son:

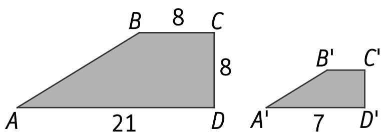
- El ancho total del apartamento, de terraza a terraza: 7,6 cm.
- El alto total del apartamento (la pared más larga de la terraza de la izquierda): 3 cm.
- El ancho mayor de la terraza de la derecha: 1,5 cm
- El alto que le falta a la terraza de la derecha para completar el plano como un rectángulo: 0,7 cm

El área del apartamento mide: $A = 7,6 \cdot 3 - 1,5 \cdot 0,7 = 22,8 - 1,05 = 21,75\,\text{cm}^2$ en el plano.

En la realidad mide: $A = 21,75 \cdot 10000 = 217\,500\,\text{cm}^2 = 21,75\,\text{m}^2$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Las siguientes figuras son semejantes.



a) Halla la medida del lado *AB*.

b) Calcula la medida de los lados *A'B'*, *B'C'* y *C'D'*.

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$AB = \sqrt{(21-8)^2 + 8^2} = \sqrt{13^2 + 8^2} = \sqrt{233} = 15{,}26$.

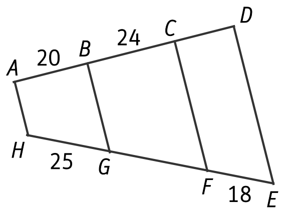
b) Calculamos la razón de semejanza: $k = \dfrac{A'D'}{AD} = \dfrac{7}{21} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'B'}{15{,}26} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow A'B' = 5{,}09$

$\dfrac{B'C'}{BC} = \dfrac{B'C'}{8} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow B'C' = 2{,}67$

$\dfrac{C'D'}{CD} = \dfrac{C'D'}{8} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow C'D' = 2{,}67$

2. Observa la siguiente figura y calcula *GF* y *CD*.



$\dfrac{AB}{HG} = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$ $\qquad$ $\dfrac{24}{GF} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow GF = 30$ $\qquad$ $\dfrac{CD}{18} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow CD = 14{,}4$

3. Comprueba, si las siguientes parejas de triángulos son o no semejantes.

a) Uno de lados 12, 9 y 4 y el otro, 12, 27 y 36

b) Uno con ángulos 43° y 67°, y el otro, 70° y 67°

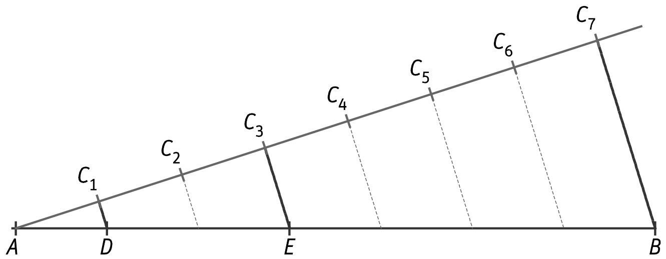
a) $\dfrac{12}{4} = \dfrac{27}{9} = \dfrac{36}{12} = 3$. Son semejantes.

b) El ángulo que falta en el primer triángulo mide: $180^\circ - (43^\circ + 67^\circ) = 110^\circ$.

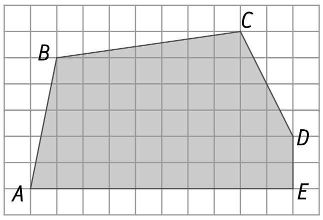
El ángulo que falta en el segundo triángulo mide: $180^\circ - (70^\circ + 67^\circ) = 43^\circ$.

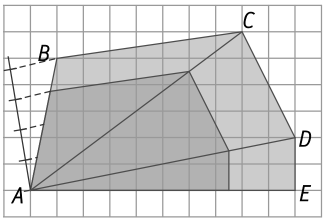
Son semejantes.

4. Divide un segmento de 9 cm de longitud en tres partes proporcionales a 1, 2 y 4.



5. Dibuja un polígono semejante al de la figura con razón de semejanza $\frac{3}{4}$.





6. La sombra de una casa de 21 m de altura es de 28 m. ¿Qué sombra proyectará en ese momento un árbol de 3 m de alto?

Los triángulos que forman la casa y su sombra y el árbol y su correspondiente sombra son semejantes. Por tanto:

$$\frac{21}{28} = \frac{3}{h} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 28}{21} = 4 \text{ m}$$

7. La distancia entre dos ciudades en un mapa de escala de 1:50 000 es de 4 cm. Calcula la distancia que separa dichas ciudades en otro mapa de escala 1:120 000.

La distancia real entre las ciudades es: $\frac{1}{50\,000} = \frac{4}{d} \Rightarrow d = 4 \cdot 50\,000 = 200\,000 \text{ cm}$

La distancia en el segundo mapa es: $\frac{1}{120\,000} = \frac{d}{200\,000} \Rightarrow d = \frac{200\,000}{120\,000} = 1,\hat{6} \text{ cm}$

8. Un coche que mide de largo 2,7 m en la realidad y su maqueta 15 cm. ¿Cuál es la escala de la maqueta?

$$E = \frac{15}{270} = \frac{1}{18}$$

La escala es 1:18.

11 Cuerpos geométricos

ANALIZA Y CONTESTA

¿Qué cuerpos geométricos tridimensionales conoces?

Respuesta libre.

¿Cuáles relacionarías con los huesos en forma de barra y el Toblerone que se mencionan en el texto?

El hueso de barra se relaciona con el ortoedro, y el Toblerone, con el prisma triangular.

En el texto se afirma que solo existen cinco cuerpos geométricos con caras idénticas formadas por polígonos regulares. ¿Sabes cuáles son?

Los cinco cuerpos geométricos con caras idénticas formadas por polígonos regulares son los poliedros regulares o sólidos platónicos: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Observa los dados de la imagen. ¿Crees que son sólidos platónicos? ¿Por qué?

Los dados de la imagen no son sólidos platónicos porque todas sus caras no son polígonos regulares e idénticos.

INVESTIGA Y PON EN COMÚN

Muchos juegos utilizan dados para poder jugar como en el juego de Ur. ¿Lo conoces? ¿Cómo se utiliza el dado en ese juego?

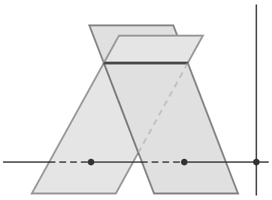
En el juego de Ur se utilizan tres dados con forma de tetraedro, cada uno de ellos con dos vértices marcados y dos vértices sin marcar. En cada tirada, la cantidad de vértices marcados que quedan hacia arriba determina la puntuación.

¿Existen juegos actuales en los que se usen dados especiales con formas distintas de la del clásico dado cúbico?

Respuesta modelo: en los juegos de rol.

Actividades propuestas

1. **Identifica en el siguiente dibujo los elementos geométricos que aparecen.**



Aparecen dos planos secantes y una recta que los corta. Además hay dos rectas perpendiculares.

2. **Indica si los siguientes elementos determinan un único plano del espacio.**

a) **Tres puntos alineados.**

b) **Los tres vértices de un triángulo.**

c) **Cuatro puntos cualesquiera.**

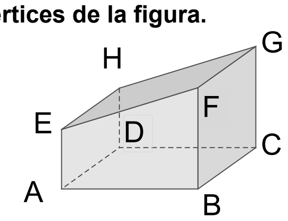
a) Por tres puntos alineados pasan infinitos planos.

b) Tres puntos no alineados determinan un único plano.

c) Cuatro puntos en el espacio no siempre son coplanarios y, por tanto, no siempre determinan un plano.

3. Actividad resuelta.

4. Nombra tres caras, tres aristas y tres vértices de la figura.



Indica las posiciones relativas:

a) Entre las aristas señaladas.

b) Entre las caras señaladas.

c) Entre las aristas y las caras señaladas.

Caras: *ABFE*, *EFGH*, *HDCG* Aristas: *EA*, *AB*, *BF* Vértices: *A*, *B*, *C*

a) *EA* y *AB* son perpendiculares, *EA* y *BF* son paralelas y *AB* y *BF* son perpendiculares.

b) *ABFE* y *EFGH* son secantes, *ABFE* y *HDCG* son paralelas y *EFGH* y *HDCG* son secantes.

c) *EA*, *AB* y *BF* están contenidas en *ABFE*, cortan al plano que contiene a la cara *EFGH* y son paralelas a *HDCG*.

5. Actividad resuelta.

6. Dibuja ángulos diedros con las siguientes amplitudes.

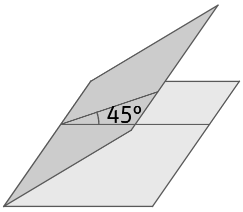
a) 45º

b) 135º

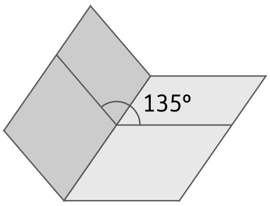
c) 180º

d) 330º

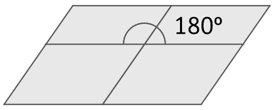
a)



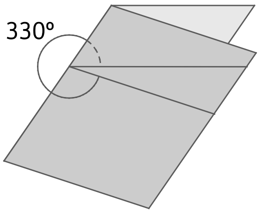
b)



c)



d)



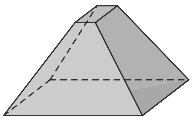
7. Calcula los ángulos complementario y suplementario de un ángulo diedro de 78º 35' de amplitud.

Complementario: 90º – 78º 35' = 11º 25' Suplementario: 180º – 78º 35' = 101º 25'

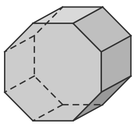
8. Actividad interactiva.

9. Cuenta las caras, aristas y vértices de los siguientes poliedros y comprueba que cumplen el teorema de Euler.

a)



b)



a) 6 caras, 12 aristas y 8 vértices ⇒ Se cumple el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 14$.

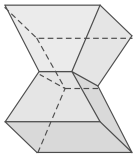
b) 10 caras, 24 aristas y 16 vértices ⇒ Se cumple el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 26$.

10. Comprueba que los poliedros regulares verifican el teorema de Euler.

Poliedros regulares	Caras C	Aristas A	Vértices V	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	6	4	8	8
Hexaedro o cubo	6	12	8	14	14
Octaedro	8	12	6	14	14
Dodecaedro	12	30	20	32	32
Icosaedro	20	30	12	32	32

Todos los poliedros regulares verifican el teorema de Euler porque $C + V = A + 2$.

11. ¿El siguiente poliedro es convexo? Comprueba si cumple el teorema de Euler.



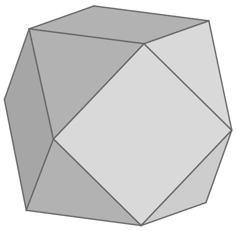
El poliedro es cóncavo.

Tiene 10 caras, 20 aristas y 12 vértices. Por tanto, verifica el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 22$.

12. Dibuja un cuboctaedro cortando las esquinas de un cubo por los planos que definen los puntos medios de los tres lados que concurren en cada vértice.

a) ¿Cómo son las caras del cuboctaedro?

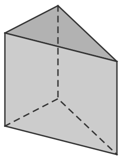
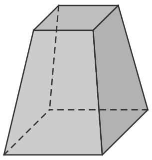
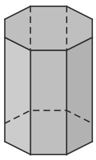
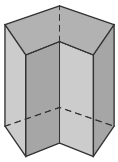
b) ¿Es un poliedro arquimediano?



a) El cuboctaedro tiene 14 caras: 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros.

b) El cuboctaedro es un poliedro semirregular o arquimediano porque sus caras son polígonos regulares, aunque no todos iguales, y en todos sus vértices concurren los mismos polígonos en el mismo orden.

13. Di cuáles de los siguientes poliedros son prismas y, en caso afirmativo, clasifícalos.

a)  **b)**  **c)**  **d)** 

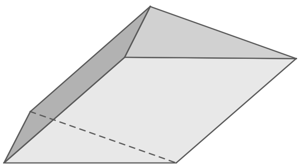
a) Prisma triangular recto, convexo e irregular.

b) No es un prisma.

c) Prisma octogonal recto, convexo y regular.

d) Prisma hexagonal recto, cóncavo e irregular.

14. Dibuja en tu cuaderno un prisma triangular oblicuo e irregular.



15. Calcula el área total y el volumen de un prisma regular hexagonal de 6 cm de altura, sabiendo que el lado de la base mide 4 cm, y su apotema, 3,5 cm.

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = p \cdot h + p \cdot a_b = 4 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 3{,}5 = 228 \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \dfrac{4 \cdot 6 \cdot 3{,}5}{2} \cdot 6 = 252 \text{ cm}^3$

16. Halla el área total y lateral de un cubo de arista *a* cm.

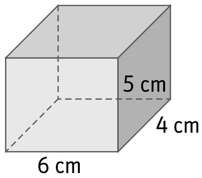
$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 4 \cdot a \cdot a + 2a^2 = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2 \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = a^2 \cdot a = a^3 \text{ cm}^3$

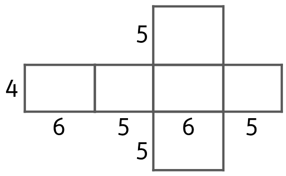
17. Dibuja un ortoedro de dimensiones 4, 5 y 6 cm.

a) Dibuja su desarrollo plano indicando las dimensiones del mismo.

b) Calcula sus áreas lateral y total.



a)

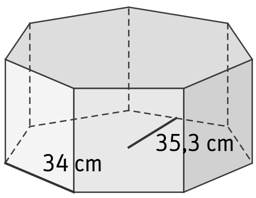


b) $A_{lateral} = 2 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 = 100 \text{ cm}^2$

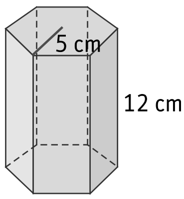
$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 100 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 148 \text{ cm}^2$

18. Calcula el volumen de los siguientes prismas.

a)



b)



a) $A_{base} = \dfrac{7 \cdot 34 \cdot 35{,}3}{2} = 4200{,}7 \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = 4200{,}7 \cdot 34 = 142\,823{,}8 \text{ cm}^3$

b) Para hallar el área de la base, calculamos la apotema de la base utilizando el teorema de Pitágoras, y aplicando que en un hexágono regular el radio mide lo mismo que el lado:

$a_b^2 = 5^2 - 2{,}5^2 = 18{,}75 \Rightarrow a_b = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33 \text{ cm}$

$A_{base} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95 \text{ cm}^2 \Rightarrow V = A_{base} \cdot h = 64{,}95 \cdot 12 = 779{,}4 \text{ cm}^3$

19. Una piscina de 10 m x 6 m se ha cubierto con una capa de hielo de 3 cm de espesor. ¿Cuántos litros de hielo hay?

$V = 10 \cdot 6 \cdot 0{,}03 = 1{,}8 \text{ m}^3 = 1800 \text{ dm}^3 = 1800 \text{ L}$

20. Una empresa fabrica envases de medio litro de base cuadrada. ¿Cuánto cartón se necesita para cada envase?

0,5 L = 0,5 dm^3 = 500 cm^3

Llamamos *a* a la medida del lado de la base, en centímetros, y *h* a la altura del envase, en centímetros.

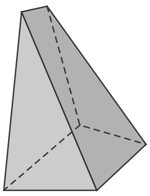
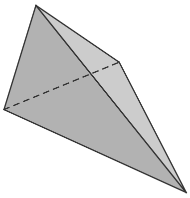
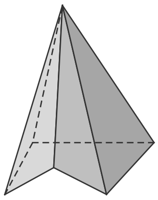
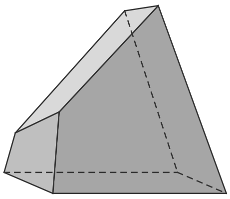
$V = a^2 \cdot h = 500 \text{ cm}^3 \Rightarrow h = \dfrac{500}{a^2}$

La cantidad de cartón necesaria para cada envase es:

$A_{total} = 2a^2 + 4ah = 2a^2 + 4a \cdot \dfrac{500}{a^2} = 2a^2 + \dfrac{2000}{a} = \dfrac{2a^3 + 2000}{a} \text{ cm}^2$

21. Actividad interactiva.

22. Di cuáles de los siguientes poliedros son pirámides y, en caso afirmativo, clasifícalas.

a)

b)

c)

d)


a) No es una pirámide.

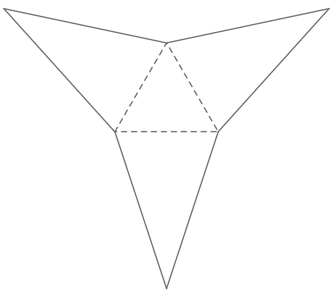
b) Pirámide triangular recta, convexa y regular.

c) Pirámide pentagonal recta, cóncava e irregular.

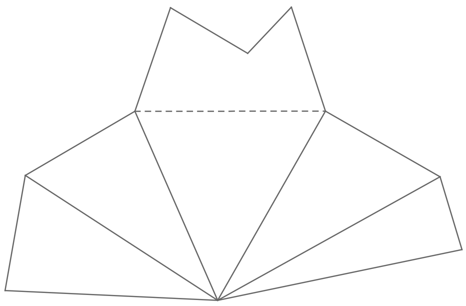
d) No es una pirámide.

23. Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano de las pirámides de la actividad anterior.

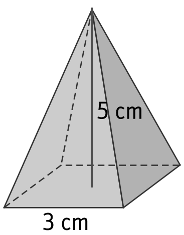
Pirámide triangular

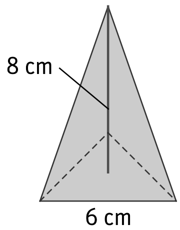


Pirámide pentagonal



24. Calcula el área total y el volumen de estas pirámides.

a)


b)


a) Para hallar el área lateral, calculamos la apotema de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras:

$a_p^2 = 5^2 + 1{,}5^2 = 27{,}25 \Rightarrow a_p = \sqrt{27{,}25} = 5{,}22 \text{ cm}$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5{,}22 + 3^2 = 40{,}32 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{9 \cdot 5}{3} = 15 \text{ cm}^3$

b) Para hallar el área de la base, calculamos la altura de la base utilizando el teorema de Pitágoras:

$h_b^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow h_b = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm} \Rightarrow A_{base} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6 \text{ cm}^2$

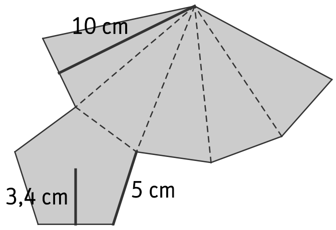
Para hallar el área lateral, calculamos la apotema de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras, y sabiendo que la apotema de un triángulo equilátero de lado 6 cm mide $a_b = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6 = 1{,}73 \text{ cm}$:

$a_p^2 = 8^2 + 1{,}73^2 = 67 \Rightarrow a_p = \sqrt{67} = 8{,}19 \text{ cm}$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8{,}19 + 15{,}6 = 89{,}31 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{15{,}6 \cdot 8}{3} = 41{,}6 \text{ cm}^3$

25. Calcula el área total y el volumen de esta pirámide.



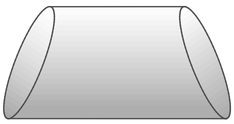
$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 + \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 3{,}4}{2} = 167{,}5 \text{ cm}^2$

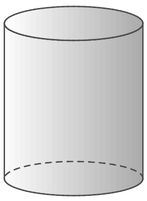
Para hallar el volumen, calculamos la altura de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:

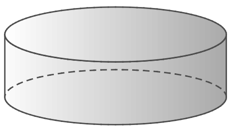
$h^2 = 10^2 - 3{,}4^2 = 88{,}44 \text{ cm}^2 \Rightarrow h = \sqrt{88{,}44} = 9{,}4 \text{ cm}$

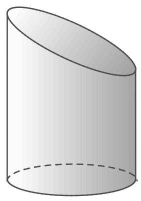
El volumen de la pirámide es: $V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{42{,}5 \cdot 9{,}4}{3} = 133{,}17 \text{ cm}^3$.

26. Indica cuáles de las siguientes figuras son cilindros y, en caso afirmativo, señala sus elementos.

a) 

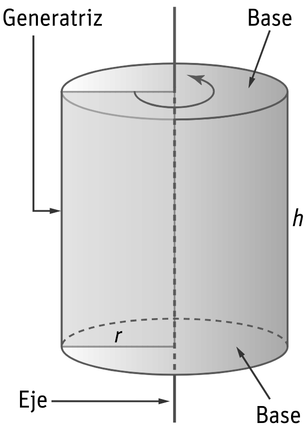
b) 

c) 

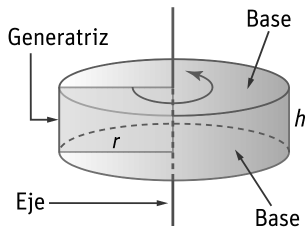
d) 

a) No es un cilindro. **b)** Cilindro recto **c)** Cilindro recto **d)** No es un cilindro.

b)



c)



27. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) La superficie lateral de un cilindro es un rectángulo.

b) Los cilindros oblicuos son cuerpos de revolución.

c) Los cilindros son poliedros de tres caras.

d) Las bases de los cilindros siempre son círculos.

e) La generatriz siempre es igual a la altura.

a) Falsa. Por ejemplo, la superficie lateral de un cilindro oblicuo no es un rectángulo.

b) Falsa. Un cilindro oblicuo es el resultado de cortar un cilindro recto por dos planos paralelos entre sí y que no sean perpendiculares ni paralelos al eje del cilindro recto.

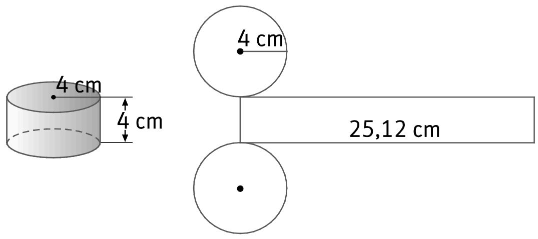
c) Falsa. Un cilindro es un cuerpo redondo, no un poliedro.

d) Falsa. Por ejemplo, las bases de un cilindro oblicuo son elipses.

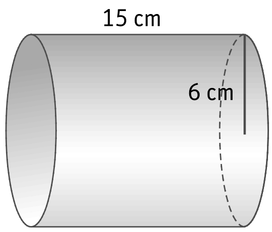
e) Verdadera.

28. Dibuja en tu cuaderno un cilindro cuyo radio de la base y altura midan 4 cm. Dibuja también su desarrollo calculando, previamente, las dimensiones del rectángulo que representa su superficie lateral.

La altura del rectángulo de la base es $h = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 25{,}12$ cm.



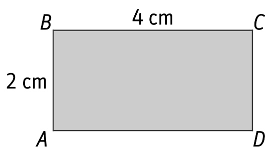
29. Calcula el área total y el volumen de este cilindro.



$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 15 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 = 791{,}28 \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 15 = 1695{,}6 \text{ cm}^3$

30. Calcula el área lateral de los cilindros que se generan al girar el rectángulo alrededor del lado *AB* y alrededor del lado *AD*. ¿Son iguales? ¿Y sus volúmenes?



Alrededor del lado *AB*:

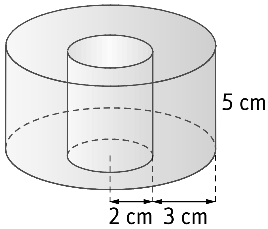
$A_{lateral} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 2 = 16\pi \text{ cm}^2$ y $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 128\pi \text{ cm}^3$

Alrededor del lado *AD*:

$A_{lateral} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi \text{ cm}^2$ y $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi \text{ cm}^3$

Las áreas laterales de los cilindros que se generan en ambos casos son iguales. Los volúmenes son distintos, ya que el volumen del cilindro que se genera al girar el rectángulo alrededor del lado *AB* es 8 veces mayor que el volumen del cilindro que se genera al girar el rectángulo alrededor del lado *AD*.

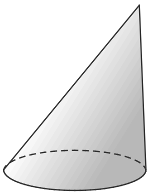
31. Calcula el volumen de esta arandela.



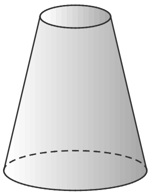
$V_{arandela} = V_{cilindro\ grande} - V_{\text{cilindro pequeño}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 - \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 105 \cdot 3{,}14 = 329{,}7\ \text{cm}^3$

32. Indica cuáles de las siguientes figuras son conos y, en caso afirmativo, señala sus elementos.

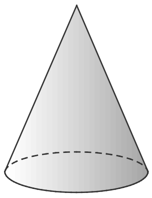
a)



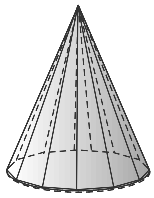
b)



c)

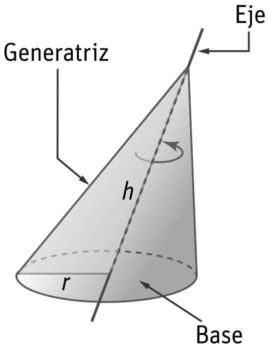


d)

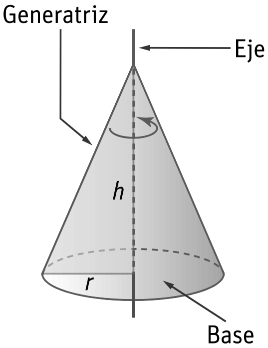


a) Cono oblicuo. **b)** Tronco de cono. **c)** Cono recto. **d)** No es un cono.

a)



c)



33. Di si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.

a) La superficie lateral de un cono es un triángulo.

b) Los conos son poliedros de dos caras.

c) Con un mismo triángulo rectángulo se pueden obtener dos conos distintos.

a) Falsa. La superficie lateral de un cono recto es un sector circular.

b) Falsa. Un cono es un cuerpo redondo, no un poliedro.

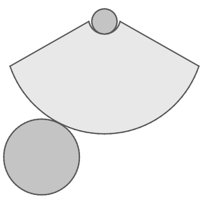
c) Verdadera. Al girar, sobre cada cateto, un triángulo rectángulo cuyos catetos sean distintos, se generan dos conos diferentes.

34. Calcula el radio de la base de un cono si su altura mide 4 cm, y su generatriz, 5 cm.

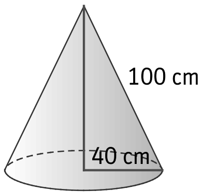
Llamando *r* al radio de la base, y aplicando el teorema de Pitágoras:

$r^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow r = \sqrt{9} = 3$ cm

35. Dibuja el desarrollo de un tronco de cono de 4 cm de altura, 3 cm de radio mayor y 1 cm de radio menor.



36. Calcula el área total y el volumen del siguiente cono.



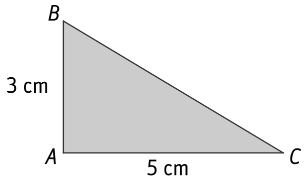
$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi rg + \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 40 \cdot 100 + 3{,}14 \cdot 40^2 = 17\,584\ \text{cm}^2$

Para calcular el volumen, hallamos la altura del cono aplicando el teorema de Pitágoras:

$h^2 = 100^2 - 40^2 = 8400 \Rightarrow h = \sqrt{8400} = 91{,}65$ cm

El volumen del cono es $V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 91{,}65}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 1600 \cdot 91{,}65}{3} = 153\,483{,}2\ \text{cm}^3$.

37. Halla el área lateral, el área total y el volumen del cono que se genera al girar el triángulo rectángulo alrededor del cateto *AB*.

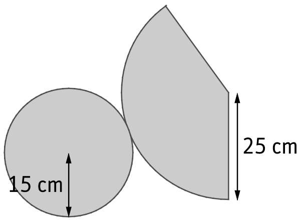


Hallamos la generatriz, g, del cono aplicando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow g = \sqrt{34} = 5{,}83$ cm

$A_{lateral} = \pi rg = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5{,}83 = 91{,}53\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 91{,}53 + \pi \cdot 5^2 = 91{,}53 + 3{,}14 \cdot 5^2 = 170{,}03\ \text{cm}^2$

El volumen del cono es $V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 3}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 25 \cdot 3}{3} = 78{,}5\ \text{cm}^3$.

38. Calcula el área lateral y el volumen del cono correspondiente a este desarrollo plano.



$A_{lateral} = \pi rg = 3{,}14 \cdot 15 \cdot 25 = 1177{,}5\ \text{cm}^2$

Hallamos la altura, h, del cono aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow h = \sqrt{400} = 20$ cm.

El volumen del cono es $V = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 20}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 225 \cdot 20}{3} = 4710\ \text{cm}^3$.

39. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La esfera es un poliedro de una sola cara.

b) El radio del ecuador coincide con el radio de la esfera.

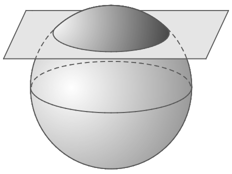
c) Si una circunferencia gira alrededor de uno de sus diámetros, genera una superficie esférica.

a) Falsa. La esfera es un cuerpo redondo.

b) Verdadera.

c) Verdadera.

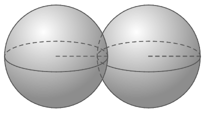
40. Dibuja un plano que corte a una esfera. ¿Qué figura geométrica determina la intersección? ¿En qué partes queda dividida la esfera?



La intersección del plano y la esfera determinan un círculo.

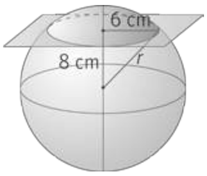
La esfera queda dividida en dos casquetes esféricos.

41. Dibuja dos superficies esféricas ambas de radio 5 cm y tales que sus centros disten 8 cm. ¿Qué línea determina su intersección?



La intersección de las dos superficies esféricas es una circunferencia.

42. Halla el radio de esta superficie esférica.



Aplicando el teorema de Pitágoras: $r^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow r = \sqrt{100} = 10$ cm.

43. Calcula el área de las esferas cuyo radio se indica.

a) **2 cm** **b)** **4,75 dm** **c)** **0,5 m**

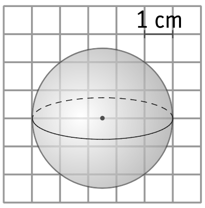
a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 50{,}24$ cm^2

b) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}75^2 = 283{,}4$ dm^2

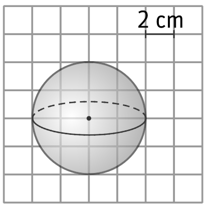
c) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5^2 = 3{,}14$ m^2

44. Halla el área de las siguientes superficies esféricas.

a)



b)



a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 = 78{,}5$ cm^2 **b)** $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 200{,}96$ cm^2

45. Calcula la superficie de la cáscara de una naranja de diámetro 4,5 cm.

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}25^2 = 63{,}585$ cm^2

46. Calcula el volumen del cuerpo geométrico que se genera al girar un semicírculo de radio 3 cm alrededor de su diámetro.

Se genera una esfera de radio 3 cm $\Rightarrow V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 3^3}{3} = 113{,}04$ cm^3.

47. Calcula la superficie y el volumen de una esfera de diámetro 8 centímetros.

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 200{,}96$ cm^2 y $V = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 4^3}{3} = 268$ cm^3.

48. Halla el volumen de una semiesfera de radio 3 metros.

$V = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3\cdot 2} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 3^3}{6} = 56{,}52$ cm^3.

49. El diámetro del planeta Marte mide 6795 km.

a) ¿Cuánto mide su superficie?

b) ¿Cuál es su volumen?

a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 3397{,}5^2 = 144\,980\,158{,}5$ km^2

b) $V = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 3397{,}5^3}{3} = 1{,}64 \cdot 10^{11}$ km^3

50. Actividad resuelta.

51. Si una pelota de tenis tiene un radio de 3,3 cm y una pelota de baloncesto tiene un diámetro de 24 cm, ¿cuántas veces es mayor el volumen de la pelota de baloncesto que el de la de tenis?

Calculamos el volumen de cada cuerpo:

$V_{tenis} = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 3{,}3^3}{3} = 150{,}46$ cm^3 y $V_{baloncesto} = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 12^3}{3} = 7234{,}56$ cm^3

Como $\dfrac{7234{,}56}{150{,}46} = 48{,}08$, el volumen de la pelota de baloncesto es aproximadamente 48,08 veces el de la pelota de tenis.

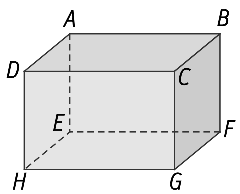
52. La superficie de la Tierra se divide en 24 husos horarios imaginarios. Halla el área de un huso horario terrestre. El radio medio de la Tierra es de 6370 kilómetros.

La superficie de la Tierra es $A_{\text{Tierra}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6370^2 = 510\,000\,000$ km^2.

Por tanto, la superficie de cada huso será de $\dfrac{510\,000\,000}{24} = 21\,250\,000$ km^2.

53. Actividad interactiva.

54. Observa la figura e indica:



a) Dos planos paralelos y dos planos secantes.

b) Dos rectas paralelas, dos rectas secantes y dos rectas que se crucen.

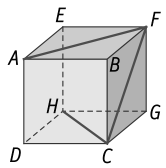
c) Una recta paralela a un plano y una recta secante a un plano.

a) Los planos determinados por *ABCD* y *EFGH* son paralelos, y los determinados por *ABFE* y *ABCD* son secantes.

b) *AB* y *CD* son rectas paralelas, *AB* y *BF* son rectas secantes y *AB* y *FG* son rectas que se cruzan.

c) La recta *BC* es paralela al plano *EFGH*, y la recta *BF* corta en *F* al plano *EFGH*.

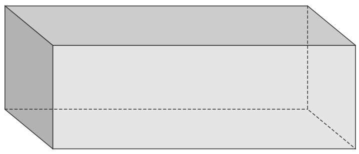
55. En el cubo de vértices *ABCDEFGH* se consideran las diagonales *AF*, *FC* y *CH* de tres de sus caras.



Indica la posición relativa de dichas diagonales con la cara determinada por los vértices *C*, *H* y *G*.

AF es paralela a *CHG*, *FC* corta a *CHG* en *C*, y *CH* está contenida en *CHG*.

56. ¿Cuántos ángulos diedros tiene el ortoedro de la figura? ¿Cuánto miden?



Un poliedro tiene tantos ángulos diedros como aristas.

Por tanto, el ortoedro tiene 12 ángulos diedros. Todos ellos son de 90º.

57. Sabiendo que las amplitudes de los ángulos diedros $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son $\widehat{A}$ = 30º 25' 20'', $\widehat{B}$ = 45º 35' 40'', $\widehat{C}$ = 20º 15' 30'', calcula:

a) $\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C}$ **b)** $2\widehat{A}-\widehat{B}+\widehat{C}$ **c)** $3\widehat{A}-\widehat{B}+4\widehat{C}$ **d)** $4\widehat{A}-2\widehat{B}-\widehat{C}$

a) $\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C}=$ 30º 25' 20'' + 45º 35' 40'' – 20º 15' 30'' = 55º 45' 30''

b) $2\widehat{A}-\widehat{B}+\widehat{C}$ = 2 · (30º 25' 20'') – 45º 35' 40'' + 20º 15' 30'' = 35º 30' 30''

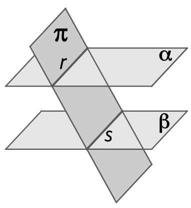
c) $3\widehat{A}-\widehat{B}+4\widehat{C}$ = 3 · (30º 25' 20'') – 45º 35' 40'' + 4 · (20º 15' 30'') = 126º 42' 20''

d) $4\widehat{A}-2\widehat{B}-\widehat{C}$ = 4 · (30º 25' 20'') – 2 · (45º 35' 40'') 4 – 20º 15' 30'' = 10º 14' 30''

58. Dibuja dos planos paralelos y un tercer plano que corte los dos primeros en sendas rectas *r* y *s*.

a) ¿Cómo son entre sí las rectas *r* y *s*?

b) ¿Cómo son los ángulos diedros que se forman?



a) Las rectas *r* y *s* son paralelas.

b) Los ángulos diedros que se forman son iguales.

59. Se sabe que los planos α y β son paralelos, que la recta *r* pertenece al plano α y que la recta *s* pertenece al plano β.

a) ¿Son necesariamente paralelas las rectas *r* y *s*?

b) ¿Puede haber algún caso en el que las rectas *r* y *s* sean secantes?

a) Las rectas *r* y *s* no son necesariamente paralelas; pueden ser dos rectas que se cruzan.

b) Para las rectas *r* y *s* solo pueden darse dos casos: o son paralelas o son rectas que se cruzan.
En ningún caso pueden ser rectas secantes, ya que el punto de corte pertenecería a los dos planos, y estos son paralelos.

60. Completa la siguiente tabla, en la que aparece el número de caras, vértices y aristas de varios poliedros convexos.

	Caras	Aristas	Vértices
Poliedro 1	**8**	**12**	●●●
Poliedro 2	●●●	**30**	**20**
Poliedro 3	**4**	●●●	**4**

	Caras	Aristas	Vértices
Poliedro 1	**8**	**12**	6
Poliedro 2	12	**30**	**20**
Poliedro 3	**4**	6	**4**

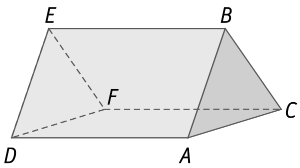
61. Si se denomina el orden de un vértice en un poliedro al número de aristas que concurren en él, copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

	Caras	Orden de los vértices
Tetraedro	**4**	●●●
Cubo	●●●	**3**
Octaedro	●●●	●●●
Dodecaedro	●●●	●●●
Icosaedro	●●●	●●●

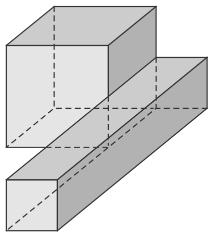
	Caras	Orden de los vértices
Tetraedro	**4**	3
Cubo	6	**3**
Octaedro	8	4
Dodecaedro	12	3
Icosaedro	20	5

62. Dibuja, de forma aproximada, un poliedro en el que tres de los ángulos diedros sean de 60º.

Se trata de un prisma triangular recto cuyas bases son triángulos equiláteros.



63. Cuenta el número de caras, de vértices y de aristas del poliedro de la figura.



¿Verifica el teorema de Euler?

El poliedro tiene 10 caras, 15 vértices y 21 aristas.

No verifica el teorema de Euler porque $C + V = 25 \neq A + 2 = 23$.

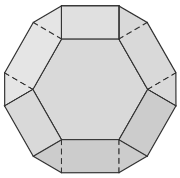
64. Si se considera un octaedro y los puntos que dividen sus lados en tres partes iguales, se corta mediante planos determinados por estos puntos y se prescinde de las esquinas formadas, se obtiene el poliedro denominado octaedro truncado.

a) ¿Qué polígonos forman sus caras?

b) ¿Por qué se trata de un poliedro semirregular?

c) ¿Se trata de un poliedro cóncavo o convexo?

d) Comprueba que verifica el teorema de Euler.



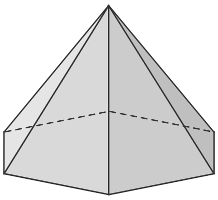
a) El octaedro truncado tiene 14 caras: 8 hexágonos regulares y 6 cuadrados.

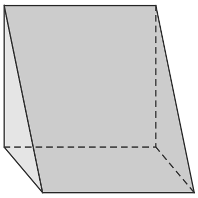
b) El octaedro truncado es un poliedro semirregular o arquimediano porque sus caras son polígonos regulares, aunque no todos iguales, y en todos sus vértices concurren los mismos polígonos en el mismo orden.

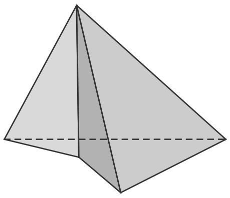
c) El octaedro truncado es un poliedro convexo.

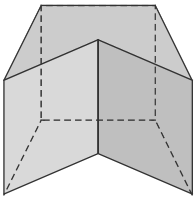
d) El poliedro tiene 14 caras, 24 vértices y 36 aristas. Verifica el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 38$.

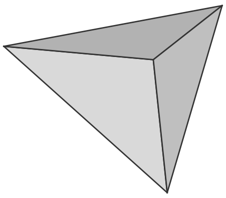
65. Clasifica los siguientes prismas y pirámides.

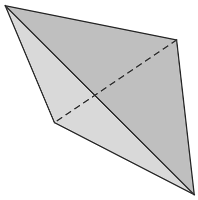
a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

f) 

a) Pirámide hexagonal recta, convexa e irregular.

b) Prisma pentagonal recto, cóncavo e irregular.

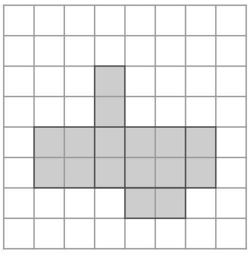
c) Prisma triangular recto, convexo e irregular.

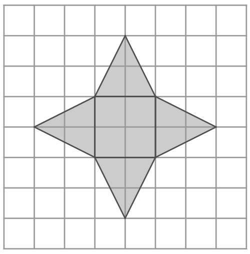
d) Pirámide triangular recta, convexa y regular.

e) Pirámide cuadrangular oblicua, cóncava e irregular.

f) Pirámide triangular oblicua, convexa e irregular.

66. Clasifica las figuras correspondientes a los siguientes desarrollos.

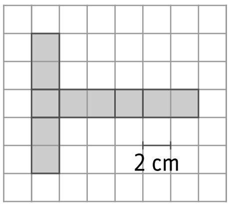
a) 

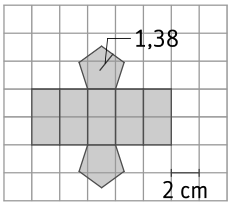
b) 

a) Ortoedro

b) Pirámide cuadrangular regular

67. Calcula el área total de los cuerpos geométricos que admiten los siguientes desarrollos planos.

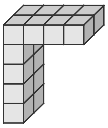
a) 

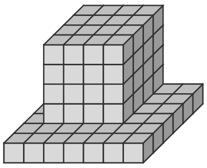
b) 

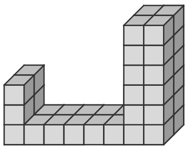
a) $A_{total} = 10 \cdot 2^2 = 40\ \text{cm}^2$

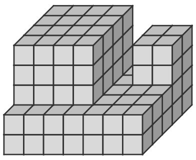
b) $A_{total} = 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 2 \cdot 1{,}38}{2} + 10 \cdot 4 = 53{,}8\ \text{cm}^2$

68. Los siguientes cuerpos geométricos están formados por bloques cúbicos de 1 cm de arista. Calcula el volumen de cada uno de ellos.

a) 

c) 

b) 

d) 

a) $V = 16\ \text{cm}^3$

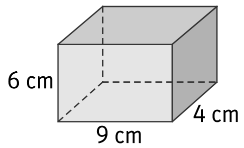
b) $V = 6 + 10 + 24 = 40\ \text{cm}^3$

c) $V = 42 + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 42 + 64 = 106\ \text{cm}^3$

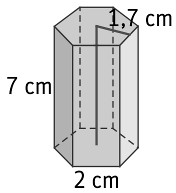
d) $V = 7 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 70 + 8 + 48 = 126\ \text{cm}^3$

69. Calcula el área total y el volumen de los siguientes prismas.

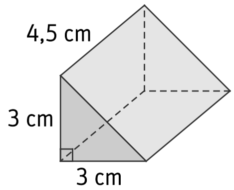
a)



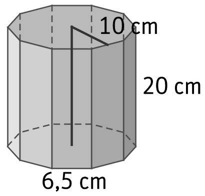
b)



c)



d)



a) $A_{total} = 2 \cdot 9 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 228 \text{ cm}^2$

$V = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216 \text{ cm}^3$

b) $A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = p \cdot h + p \cdot a_b = 2 \cdot 6 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \cdot 1{,}7 = 104{,}4 \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \dfrac{2 \cdot 6 \cdot 1{,}7}{2} \cdot 7 = 71{,}4 \text{ cm}^3$

c) Calculamos el lado desconocido de la base, x, aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \text{ cm} \Rightarrow x = \sqrt{18} = 4{,}24 \text{ cm}$

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = (3 + 3 + 4{,}24) \cdot 4{,}5 + 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 3}{2} = 55{,}08 \text{ cm}^2$

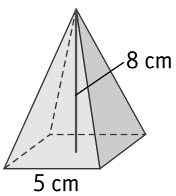
$V = A_{base} \cdot h = \dfrac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4{,}5 = 20{,}25 \text{ cm}^3$

d) $A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = p \cdot h + p \cdot a_b = 6{,}5 \cdot 10 \cdot 20 + 6{,}5 \cdot 10 \cdot 10 = 1950 \text{ cm}^2$

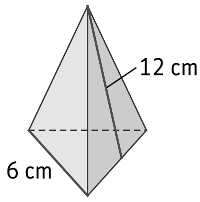
$V = A_{base} \cdot h = \dfrac{6{,}5 \cdot 10 \cdot 10}{2} \cdot 20 = 6500 \text{ cm}^3$

70. Calcula el área total y el volumen de las siguientes pirámides.

a)



b)



a) Para hallar el área lateral, calculamos la apotema de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras:

$a_p^2 = 8^2 + 2{,}5^2 = 70{,}25 \Rightarrow a_p = \sqrt{70{,}25} = 8{,}38 \text{ cm}$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8{,}38 + 5^2 = 108{,}8 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{5^2 \cdot 8}{3} = 66{,}67 \text{ cm}^3$

b) Para hallar el área de la base, calculamos la altura de la base utilizando el teorema de Pitágoras:

$h_b^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow h_b = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm} \Rightarrow A_{base} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6 \text{ cm}^2$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 12 + 15{,}6 = 123{,}6 \text{ cm}^2$

Para hallar el volumen, calculamos la altura de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras, y sabiendo que la apotema de un triángulo equilátero de lado 6 cm mide $a_b = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6 = 1{,}73 \text{ cm}$:

$h^2 = 12^2 - 1{,}73^2 = 141 \Rightarrow h = \sqrt{141} = 11{,}87 \text{ cm}$

$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{15{,}6 \cdot 11{,}87}{3} = 61{,}72 \text{ cm}^3$

71. Calcula el volumen de una pirámide de altura 3 cm cuya base es un cuadrado de lado 4 cm.

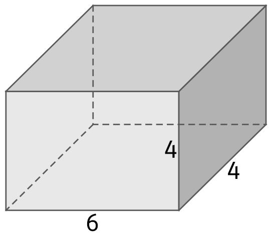
$V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot 3}{3} = 16 \text{ cm}^3$

72. Dibuja en tu cuaderno un paralelepípedo de dimensiones de la base 4 y 6 cm, y 4 cm de altura.

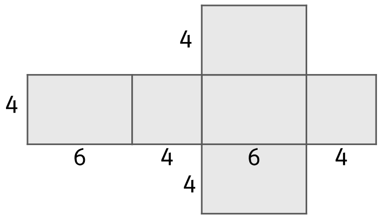
a) Dibuja su desarrollo plano indicando las dimensiones del mismo.

b) Calcula el área lateral y total.

c) Calcula su volumen.



a)



b) $A_{lateral} = 2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 80 \Rightarrow A_{total} = 80 + 2 \cdot 4 \cdot 6 = 128 \text{ cm}^2$

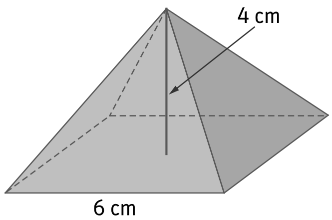
c) $V = 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96 \text{ cm}^3$

73. Dibuja una pirámide regular con base un cuadrado de lado 6 cm y de altura 4 cm.

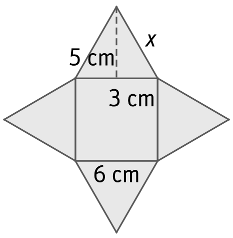
a) Dibuja su desarrollo plano indicando las dimensiones del mismo.

b) Calcula el área lateral y total.

c) Calcula su volumen.



a)



b) Para hallar el área lateral, calculamos la apotema de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras:

$a_p^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow a_p = \sqrt{25} = 5 \text{ cm} \Rightarrow A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 + 6^2 = 96 \text{ cm}^2$

c) $V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{6^2 \cdot 4}{3} = 48 \text{ cm}^3$

74. Calcula el área total y el volumen de un cubo sabiendo que el perímetro de la base es de 24 dm.

El lado del cubo mide $a = \frac{24}{4} = 6$ dm. Por tanto, $A_{total} = 6 \cdot 6^2 = 216$ dm^3 y $V = 6^3 = 216$ dm^3.

75. La base de un ortoedro es un rectángulo de 18 dm de perímetro, siendo sus medidas una el doble de la otra. La tercera medida del ortoedro es igual al triple de la menor de la base. A partir de estos datos, calcula el volumen del ortoedro.

Llamamos x y $2x$ a las medidas del rectángulo de la base:

$2x + 2 \cdot 2x = 18 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$

El rectángulo de la base tiene dimensiones 3 x 6 cm. Y, por tanto, la tercera medida del ortoedro es 9 cm.

El ortoedro tiene dimensiones 3 cm, 6 cm y 9 cm.

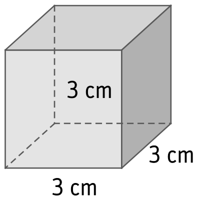
Por tanto, el volumen del ortoedro es $V = 3 \cdot 6 \cdot 9 = 162$ cm^3.

76. Dibuja en tu cuaderno e indica las dimensiones en cada caso:

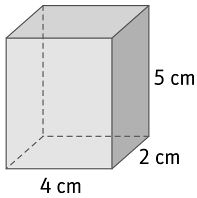
a) Un cubo de 27 cm^3 de volumen.

b) Un ortoedro de 40 cm^3 de volumen.

a) La medida del lado es $a = \sqrt[3]{27} = 3$ cm.



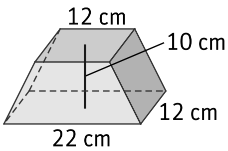
b) Ortoedro de dimensiones 2 cm, 4 cm y 5 cm.



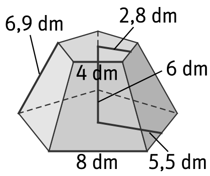
77. Actividad resuelta.

78. Halla el área total y el volumen de los siguientes troncos de pirámide.

a)



b)



a) Calculamos el fondo de la base superior, x, puesto que las dos bases son semejantes:

$$\frac{22}{12} = \frac{12}{x} \Rightarrow 22x = 144 \Rightarrow x = \frac{144}{22} = 6{,}55 \text{ cm}$$

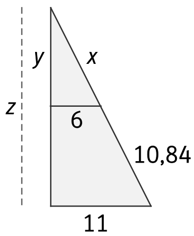
Hallamos la medida de la arista lateral, a, aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 = 10^2 + 5^2 \Rightarrow a = 11{,}18$ cm.

Calculamos la altura, h, de las caras laterales cuyas bases miden 12 cm y 6,55 cm, aplicando el teorema de Pitágoras: $11{,}18^2 = h^2 + 2{,}73^2 \Rightarrow h = 10{,}84$ cm.

$$A_{total} = A_{base\ superior} + A_{base\ inferior} + A_{lateral} = 12 \cdot 6{,}55 + 22 \cdot 12 + 2 \cdot \frac{(22+12) \cdot 10}{2} + 2 \cdot \frac{(12+6{,}55) \cdot 10{,}84}{2} =$$

$= 78{,}6 + 264 + 340 + 201{,}08 = 883{,}68$ cm^2

Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen de la pirámide completa.



Para hallar la altura de la pirámide, utilizamos la semejanza de triángulos.

$$\frac{x}{6} = \frac{x+10{,}84}{11} \Rightarrow 11x = 6x + 65{,}04 \Rightarrow 5x = 65{,}04 \Rightarrow x = 13 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, $y^2 = 13^2 - 6^2 \Rightarrow y = 11{,}53$ cm.

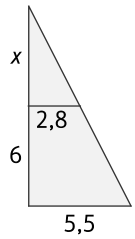
Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras, $z^2 = (10{,}84 + 13)^2 - 11^2 \Rightarrow z = 21{,}15$ cm.

Por tanto, $V_{tronco} = \frac{22 \cdot 12 \cdot 21{,}15}{3} - \frac{12 \cdot 6{,}55 \cdot 11{,}53}{3} = 1559{,}11$ cm^3

b) Calculamos la altura de la cara lateral, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 6{,}9^2 - 2^2 \Rightarrow h = 6{,}6$ dm.

$$A_{total} = A_{base\ superior} + A_{base\ inferior} + A_{lateral} = \frac{4\cdot 5\cdot 2{,}8}{2} + \frac{8\cdot 5\cdot 5{,}5}{2} + \frac{(8+4)\cdot 6{,}6}{2}\cdot 5 = 28 + 110 + 198 = 336 \text{ dm}^2$$

Para hallar el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen de la pirámide completa.



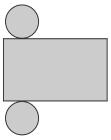
Para hallar la altura de la pirámide, utilizamos la semejanza de triángulos.

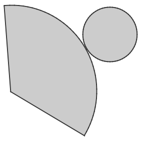
$$\frac{x}{2{,}8} = \frac{x+6}{5{,}5} \Rightarrow 5{,}5x = 2{,}8x + 16{,}8 \Rightarrow 2{,}7x = 16{,}8 \Rightarrow x = 6{,}22 \text{ dm}$$

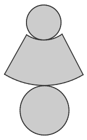
Por tanto, la altura de la pirámide completa es de 12,22 dm.

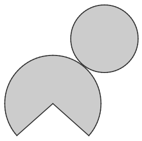
$$V_{tronco} = \frac{110\cdot 12{,}22}{3} - \frac{28\cdot 6{,}22}{3} = 390 \text{ dm}^3$$

79. Clasifica las figuras correspondientes a los siguientes desarrollos.

a) 

b) 

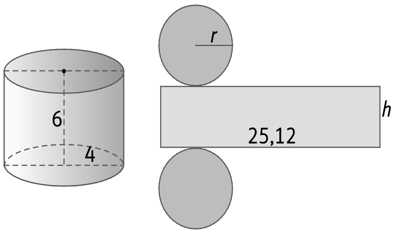
c) 

d) 

a) Cilindro **b)** Cono **c)** Tronco de cono **d)** Cono

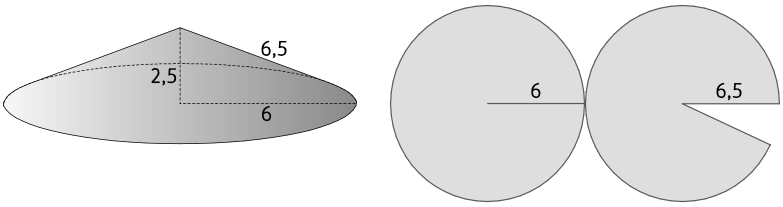
80. Dibuja en tu cuaderno un cilindro que tenga de radio de la base 4 cm y de altura 6 cm. Dibuja su desarrollo e indica las dimensiones del mismo.

$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 25{,}12$ cm

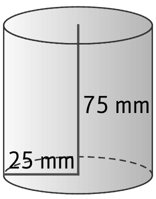


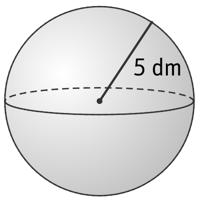
81. Dibuja un cono de radio de la base 6 cm y altura 2,5 cm. Calcula la medida de su generatriz. Dibuja su desarrollo e indica las dimensiones del mismo.

Llamando g a la generatriz del cono, y aplicando el teorema de Pitágoras, $g^2 = 2{,}5^2 + 6^2 = 42{,}25 \Rightarrow g = 6{,}5$ cm.



82. Calcula la superficie y el volumen de los siguientes cuerpos redondos.

a) 

b) 

a) $A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 2 \cdot \pi \cdot 25 \cdot 75 + 2 \cdot \pi \cdot 25^2 = 15\,700 \text{ mm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot 25^2 \cdot 75 = 147\,187{,}5 \text{ mm}^3$

b) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 = 314 \text{ dm}^2$ y $V = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 5^3}{3} = 523{,}33 \text{ dm}^3$

83. Calcula el área lateral y total de un cilindro de radio de la base 45 dam y de altura 50 dam.

$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 45 \cdot 50 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 45 \cdot 50 = 14\ 130\ \text{dam}^2 \Rightarrow A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 14\ 130 + 2 \cdot \pi \cdot 45^2 =$
$= 14\ 130 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 45^2 = 26\ 847\ \text{dam}^2$

84. Un cono tiene por radio de la base 33 m y por generatriz 65 m. Calcula su área total y su volumen.

$A_{lateral} = \pi \cdot 33 \cdot 65 = 3{,}14 \cdot 33 \cdot 65 = 6735{,}3\ \text{m}^2 \Rightarrow A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 6735{,}3 + \pi \cdot 33^2 = 6735{,}3 + 3{,}14 \cdot 33^2 =$
$= 10\ 154{,}76\ \text{m}^2$

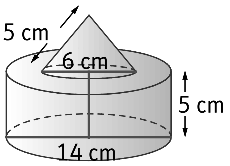
Calculamos la altura del cono, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 65^2 - 33^2 = 3136 \Rightarrow h = 56$ m

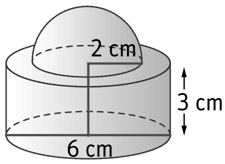
$$V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 33^2 \cdot 56}{3} = 63\ 862{,}30\ \text{m}^3$$

85. Calcula cuántos litros caben en una esfera de radio 125 mm.

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 125^3}{3} = 8\ 177\ 083{,}33\ \text{mm}^3 \approx 8{,}18\ \text{dm}^3 = 8{,}18\ \text{L}$$

86. Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a)


b)


a) Calculamos la altura del cono, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow h = 4$ cm.

El volumen del cuerpo geométrico es $V = V_{cilindro} + V_{cono} = \pi \cdot 7^2 \cdot 5 + \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 5 + \dfrac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} =$

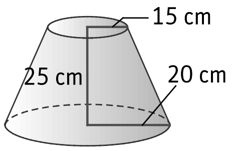
$= 806{,}98\ \text{cm}^3$.

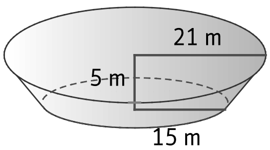
b) El volumen del cuerpo geométrico es $V = V_{cilindro} + V_{semiesfera} = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 + \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 2^3}{3 \cdot 2} = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 3 + \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^3}{3 \cdot 2} =$

$= 101{,}53\ \text{cm}^3$.

87. Actividad resuelta.

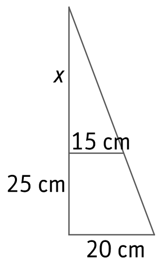
88. Halla el volumen de los siguientes troncos de cono.

a)


b)


a) Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen del cono completo.

Para hallar la altura del cono, utilizamos la semejanza de triángulos.



$\dfrac{x}{15} = \dfrac{x + 25}{20} \Rightarrow 20x = 15x + 375 \Rightarrow 5x = 375 \Rightarrow x = 75$ cm

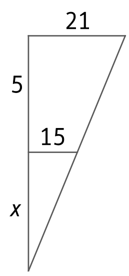
Por tanto, la altura del cono completo es de 100 cm.

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 100}{3} - \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 75}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 20^2 \cdot 100}{3} - \frac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 75}{3} = 24\ 204\ \text{cm}^3$$

b) Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen del cono completo.

Para hallar la altura del cono, utilizamos la semejanza de triángulos.



$\dfrac{x}{15} = \dfrac{x + 5}{21} \Rightarrow 21x = 15x + 75 \Rightarrow 6x = 75 \Rightarrow x = 12{,}5$ m

Por tanto, la altura del cono completo es de 17,5 m.

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot 21^2 \cdot 17{,}5}{3} - \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 12{,}5}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 21^2 \cdot 17{,}5}{3} - \frac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 12{,}5}{3} = 5133{,}9\ \text{m}^3$$

89. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) **Si un punto pertenece a una recta y a un plano, la recta está contenida en el plano.**

b) **Si dos planos son perpendiculares a una recta, son paralelos entre sí.**

c) **Los poliedros que tienen dos caras paralelas iguales son, con seguridad, prismas.**

d) **No existe ninguna pirámide triangular cóncava.**

e) **El número de caras de una pirámide siempre es impar.**

f) **Al cortar un cono por dos planos paralelos a la base, se obtiene un tronco de cono.**

a) Falsa. La recta puede ser secante al plano en ese punto.

b) Verdadera.

c) Falsa. Por ejemplo, el antiprisma pentagonal tiene dos caras paralelas iguales, pero sus caras laterales no son paralelogramos.

d) Verdadera.

e) Falsa. Por ejemplo, el tetraedro tiene cuatro caras.

f) Verdadera.

90. Una diagonal de un poliedro es un segmento que une dos de sus vértices que no pertenecen a la misma cara. ¿Cómo son las diagonales en los poliedros convexos? ¿Y en los cóncavos?

En los poliedros convexos, las diagonales quedan siempre en su interior.

En los poliedros cóncavos, por lo menos una de las diagonales tiene una parte en el exterior.

91. Calcula el área total de un tetraedro si cada una de sus aristas mide 25 centímetros.

Todas las caras del tetraedro son triángulos equiláteros de lado 25 cm.

Calculamos la altura de una cara, aplicando el teorema de Pitágoras:

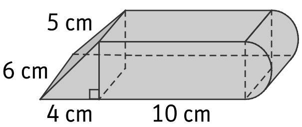
$h^2 = 25^2 - 12{,}5^2 = 468{,}75$ cm $\Rightarrow h = \sqrt{468{,}75} = 21{,}65$ cm

El área de una cara será $A = \dfrac{25 \cdot 21{,}65}{2} = 270{,}63$ cm^2.

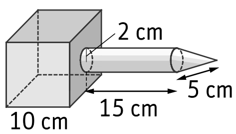
Por tanto, el área total del tetraedro es $A_{total} = 270{,}63 \cdot 4 = 1082{,}52$ cm^2.

92. Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a)



b)



a) $V = V_{prisma\ triangular} + V_{ortoedro} + \dfrac{V_{cilindro}}{2}$

Calculamos la altura del prisma triangular, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow h = 3$ cm.

$V_{prisma\ triangular} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} \cdot 6 = 36$ cm^3 $\quad V_{ortoedro} = 10 \cdot 6 \cdot 3 = 180$ cm^3 $\quad \dfrac{V_{cilindro}}{2} = \dfrac{3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 6}{2} = 21{,}20$ cm^3

El volumen del cuerpo es $V = V_{prisma\ triangular} + V_{ortoedro} + \dfrac{V_{cilindro}}{2} = 36 + 180 + 21{,}20 = 237{,}2$ cm^3.

b) $V = V_{cono} + V_{cilindro} + V_{cubo}$

Calculamos la altura del cono, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Rightarrow h = 4{,}58$ cm.

$V_{cono} = \dfrac{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 4{,}58}{3} = 19{,}17$ cm^3 $\quad V_{cilindro} = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 15 = 188{,}4$ cm^3 $\quad V_{cubo} = 10^3 = 1000$ cm^3

El volumen del cuerpo es $V = V_{cono} + V_{cilindro} + V_{cubo} = 19{,}17 + 188{,}4 + 1000 = 1207{,}57$ cm^3.

93. Un cilindro macizo está inscrito en una esfera de radio 50 cm. Calcula el volumen que queda libre entre el cilindro y la esfera si se sabe que la altura del cilindro es de 80 cm.

$V = V_{esfera} - V_{cilindro}$

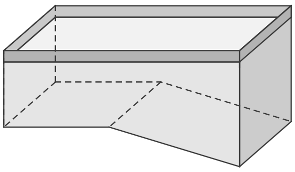
Calculamos el radio de la base del cilindro, aplicando el teorema de Pitágoras:

$r^2 = 50^2 - 40^2 = 900 \Rightarrow r = \sqrt{900} = 30$ cm

$V_{esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 50^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 50^3}{3} = 523\,333{,}33 \text{ cm}^3$ $\qquad V_{cilindro} = \pi \cdot 30^2 \cdot 80 = 3{,}14 \cdot 30^2 \cdot 80 = 226\,080 \text{ cm}^3$

El volumen del cuerpo es $V = V_{esfera} - V_{cilindro} = 523\,333{,}33 - 226\,080 = 297\,253{,}23 \text{ cm}^3$.

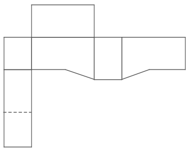
94. En la figura aparece un croquis que representa una piscina.



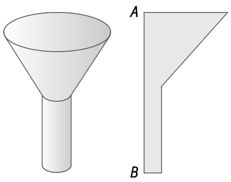
Clasifica la forma geométrica que tiene y elabora un desarrollo plano de la misma.

Se trata de un prisma pentagonal, recto y cóncavo.

Su desarrollo plano puede ser:



95. Dibuja un polígono tal que al girar alrededor de uno de sus lados dé como resultado el embudo de la figura.



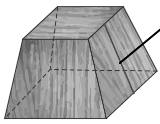
Al girar la figura plana alrededor del lado *AB* se obtiene el embudo.

96. Las dimensiones de una papelera cilíndrica son 20 cm de diámetro y 31 cm de altura. Calcula la superficie de material que se ha necesitado para fabricarla.

$A_{lateral} = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 31 = 1946{,}8 \text{ cm}^2$ y $A_{base\ inferior} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314 \text{ cm}^2$

Se han necesitado $A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 1946{,}8 + 314 = 2260{,}8 \text{ cm}^2$ de material.

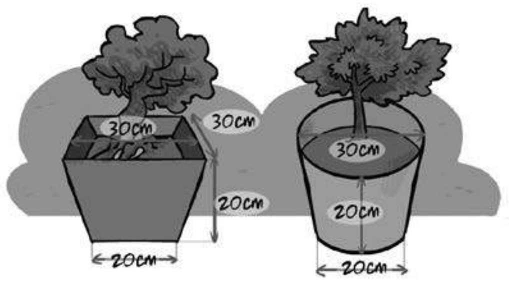
97. Calcula cuántos metros cuadrados de madera se necesitan para construir el podio representado en la figura si no tiene base inferior, es decir, se apoya directamente sobre el suelo.



$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{3{,}75 + 5{,}25}{2} \cdot 4{,}5 = 81 \text{ m}^2$ y $A_{base\ superior} = 3{,}75^2 = 14{,}06 \text{ m}^2$

Se necesitan $A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 81 + 14{,}06 = 95{,}06 \text{ m}^2$ de madera.

98. Las figuras representan macetas. ¿En cuál de ellas hay que echar más tierra para llenarla?



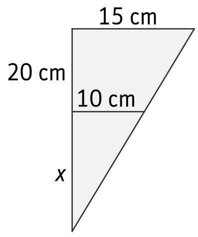
Para calcular la cantidad de tierra que hay que echar en cada maceta, calculamos los volúmenes de ambas.

1.ª maceta: tronco de pirámide

Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen de la pirámide completa.

Para hallar la altura de la pirámide, utilizamos la semejanza de triángulos.

$\frac{x}{10} = \frac{x+20}{15} \Rightarrow 15x = 10x + 200 \Rightarrow 5x = 200 \Rightarrow x = 40$ cm



Por tanto, la altura de la pirámide completa es de 60 cm.

El volumen del tronco de pirámide es, por tanto:

$$V_{tronco} = \frac{30^2 \cdot 60}{3} - \frac{20^2 \cdot 40}{3} = 12\,666{,}67 \text{ cm}^3$$

2.ª maceta: tronco de cono

Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen del cono completo.

Para hallar la altura del cono, utilizamos la semejanza de triángulos. Los triángulos en posición de Tales que se forman son los mismos que en el caso anterior.

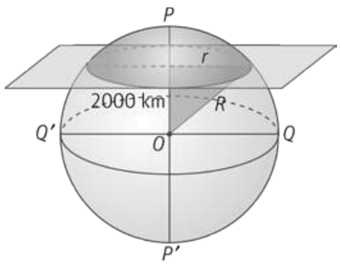
Por tanto, la altura del cono completa es de 60 cm, y la altura del cono sobrante, de 40 cm.

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 60}{3} - \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 40}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 225 \cdot 60}{3} - \frac{3{,}14 \cdot 100 \cdot 40}{3} = 9948{,}38 \text{ cm}^3$$

Luego para llenar las macetas, hay que echar más tierra en la que tiene forma de tronco de pirámide.

99. En la figura se representa el paralelo terrestre determinado por la intersección con un plano que dista del centro de la Tierra 2000 km.



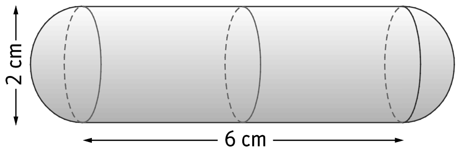
Calcula el radio de dicho paralelo tomando como radio medio terrestre 6371 km.

Calculamos el radio del paralelo, aplicando el teorema de Pitágoras:

$r^2 = R^2 - 2000^2 \Rightarrow r^2 = 6371^2 - 2000^2 = 36\,589\,641 \Rightarrow r = \sqrt{36\,589\,641} = 6048{,}94$ km

El radio del paralelo es, aproximadamente, de 6049 km.

100. Para almacenar cierto medicamento contra las inflamaciones óseas de caballos, se quieren construir cápsulas con forma de cilindro y semiesferas en sus extremos tal y como muestra la figura.



Calcula la cantidad de superficie que se precisa para construir cada cápsula, así como su volumen en cm^3.

La cantidad de superficie que se precisa para construir cada cápsula es:

$A_{total} = A_{lateral\ cilindro} + A_{esfera} = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 50{,}24$ cm^2

El volumen de cada cápsula es $V_{total} = V_{cilindro} + V_{esfera} = \pi \cdot 1^2 \cdot 6 + \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 1^3}{3} = 3{,}14 \cdot 6 + \dfrac{4 \cdot 3{,}14}{3} = 23{,}03$ cm^3.

101. El papel que rodea una lata de conservas mide 14 cm de base y 4 cm de altura. ¿Cuál es el volumen de la lata?

Calculamos el radio de la base de la lata, sabiendo que el papel que la rodea mide 14 cm de base:

$14 = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow r = \dfrac{14}{2 \cdot 3{,}14} = 2{,}23$ cm

El volumen de la lata es $V = \pi \cdot 2{,}23^2 \cdot 4 = 3{,}14 \cdot 5{,}3824 \cdot 4 = 62{,}46$ cm^3.

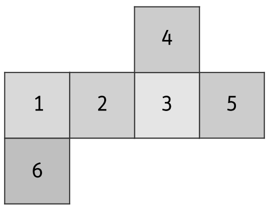
102. A cada una de las caras de un cubo de lado 1 cm le pegamos una pirámide cuadrangular en la que cada arista mide también 1 cm, obteniendo una especie de sólido estrellado. ¿Cuántas aristas tiene este nuevo sólido estrellado?

A. 28 **B. 24** **C. 48** **D. 36**

Originariamente hay 12 aristas, que se mantienen. Además, en cada una de las 6 caras, añadimos 4 aristas nuevas; es decir, añadimos 24 aristas. Por tanto, en total el nuevo sólido estrellado tiene 12 + 24 = 36 aristas.

La respuesta correcta es la D.

103. Si formamos un cubo con el siguiente desarrollo y multiplicamos los tres números de las tres caras que concurren en cada vértice, ¿cuál es el mayor producto que podemos obtener?



A. 60 **B. 72** **C. 90** **D. 120**

El mayor producto que podemos obtener es cuando concurren en un vértice las caras numeradas con 3, 5 y 6, en cuyo caso el producto de los números es $3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$.

La respuesta correcta es la C.

104. Un bote cilíndrico de bolas de tenis contiene tres bolas perfectamente ajustadas. ¿Qué proporción del volumen del bote está ocupado por las bolas?

A. $\dfrac{2\pi}{3}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** $\dfrac{\pi}{4}$ **D.** $\dfrac{3}{4}$

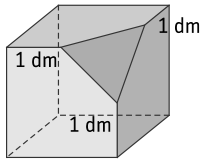
Llamando r al radio de cada bola, el cilindro tendrá radio r y altura $6r$.

Por tanto, $V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot 6r = 6\pi r^3$ y $V_{bolas} = 3 \cdot \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 4\pi r^3$

La proporción del volumen ocupado por las bolas es $\dfrac{4\pi r^3}{6\pi r^3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

La respuesta correcta es la B.

105. En un vértice de un cubo de 2 dm de arista damos un corte y queda la figura que ves. ¿Cuál es el área, en decímetros cuadrados, de lo que queda de cubo?



A. $\frac{29}{2}$ **B.** $\frac{71}{2}$ **C.** 21 **D.** $\frac{45}{2}$

La figura resultante tiene tres caras que son cuadrados de lado 2 dm y otras tres caras que son pentágonos, obtenidos al quitar a un cuadrado de lado 2 dm un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1 dm.

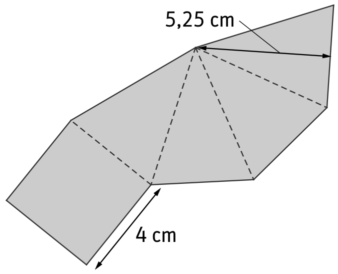
$A_{cara\ cuadrada} = 2^2 = 4$ dm^2 $A_{cara\ pentagonal} = 2^2 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{7}{2}$ dm^2

Por tanto, el área total de la figura será $A_{total} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{45}{2}$ dm^2.

La respuesta correcta es la D.

Encuentra el error

106. Paula ha calculado el volumen de la pirámide que se construye a partir del desarrollo plano que aparece a continuación.



$$V_{pirámide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot 5{,}25}{3} = 28 \text{ cm}^3$$

¿Dónde está el error?

El error está en confundir la altura de la pirámide con la altura de la cara lateral o apotema de la pirámide. Además no se está calculando el área total, sino el volumen, y la unidad del volumen es cm^3.

Para calcular el volumen de esta pirámide, primero se tiene que hallar su altura, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5{,}25^2 - 2^2 = 23{,}56 \Rightarrow h = 4{,}85$ cm

Por tanto, $V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot 4{,}85}{3} = 25{,}87 \text{ cm}^3$

PONTE A PRUEBA

El tejado

Actividad resuelta.

Vuelo espacial

La estación espacial *Mir* permaneció en órbita 15 años y durante este tiempo dio aproximadamente 86 500 vueltas alrededor de la Tierra. La permanencia más larga de un astronauta en la *Mir* fue de 680 días. La *Mir* daba vueltas alrededor de la Tierra a una altura aproximada de 400 km. El diámetro de la Tierra mide aproximadamente 12 700 km y su circunferencia es de alrededor de 40 000 km (π × 12 700). Calcula aproximadamente la distancia total recorrida por la *Mir* durante sus 86 500 vueltas mientras estuvo en órbita. Redondea el resultado a las decenas de millón.

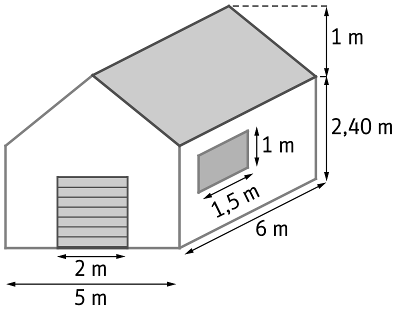
(Prueba PISA 2012)

El diámetro de la estación *Mir* es 12 700 + 2 · 400 = 13 500 km. Por tanto, la longitud de la órbita *Mir* es 13 500π.

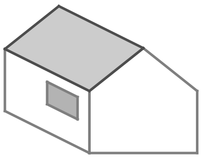
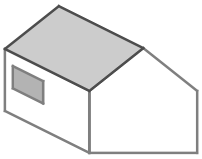
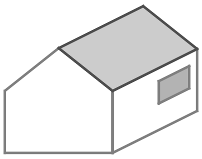
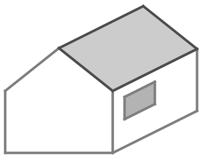
En total, la distancia recorrida por la *Mir* durante 86 500 vueltas fue 13 500π · 86 500 = 3 668 594 821 km; es decir, aproximadamente 3670 millones de kilómetros.

El garaje

La gama *básica* de un fabricante de garajes incluye modelos de una sola ventana y una sola puerta. Jorge elige el siguiente modelo de la gama *básica*. A continuación se muestra la posición de la ventana y de la puerta.



1. **Las siguientes ilustraciones muestran distintos modelos de la gama *básica* vistos desde la parte posterior. Solo una de las ilustraciones se corresponde con el modelo anterior elegido por Jorge. ¿Qué modelo eligió Jorge?**

A.

B.

C.

D.


El modelo que eligió Jorge fue el B.

2. **Calcula la superficie de material necesaria para construir la estructura del garaje, sin tener en cuenta la puerta y la ventana.**

Para calcular el área del tejado, calculamos primero la base del rectángulo del mismo aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 1^2 + 2{,}5^2 = 7{,}25 \Rightarrow x = 2{,}69$ m.

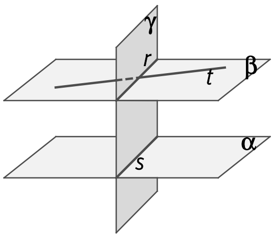
Como el tejado está formado por dos secciones rectangulares idénticas, $A_{tejado} = 2 \cdot 2{,}69 \cdot 6 = 32{,}38$ m^2.

$$A_{total} = A_{tejado} + A_{trasera} + A_{frontal} + A_{lateral} + A_{lateral\ ventana} = 32{,}38 + \left(5 \cdot 2{,}40 + \frac{1 \cdot 5}{2}\right) + \left(5 \cdot 2{,}40 + \frac{1 \cdot 5}{2} - 2^2\right) + 6 \cdot 2{,}40 +$$
$$+ (6 \cdot 2{,}40 - 1 \cdot 1{,}5) = 32{,}38 + 14{,}5 + 10{,}5 + 14{,}4 + 12{,}9 = 84{,}68 \text{ m}^2$$

Se necesitarán 84,69 m^2 de material.

AUTOEVALUACIÓN

1. **En la siguiente figura, indica:**



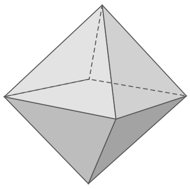
a) **Dos planos paralelos.**
b) **Dos planos secantes.**
c) **Dos rectas paralelas.**
d) **Dos rectas secantes.**
e) **Dos rectas que se cruzan.**
f) **Una recta paralela a un plano.**
g) **Una recta contenida en un plano.**

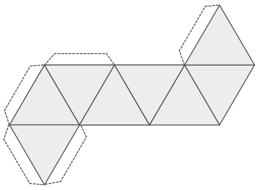
a) Los planos α y β.
b) Los planos α y γ.
c) Las rectas *r* y *s*.
d) Las rectas *r* y *t*.
e) Las rectas *s* y *t*.
f) La recta *t* es paralela al plano α.
g) La recta *t* está contenida en el plano β.

2. **Un ángulo diedro tiene una amplitud de 55º 30'. ¿Cuánto medirá su ángulo diedro complementario?**

   90º – 55º 30' = 34º 30'

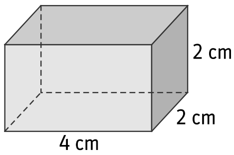
3. **Dibuja un octaedro regular y su desarrollo. Indica el número de caras, aristas y vértices que tiene, y comprueba que verifica el teorema de Euler.**

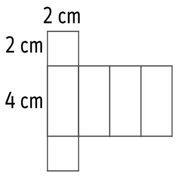




   El octaedro regular tiene 8 caras, 6 vértices y 12 aristas. Cumple el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 14$.

4. **Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total y el volumen del prisma de la figura.**

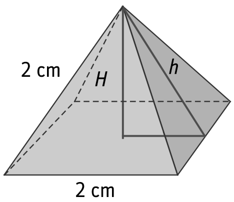




   $A_{total} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 40$ cm^2

   $V = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ cm^3

5. **La pirámide de la figura tiene por base un cuadrado de lado 2 cm y los triángulos que forman las cuatro caras laterales son equiláteros.**



   a) **Halla la altura *h* de cada una de las caras laterales y la altura *H* de la pirámide.**

   b) **Calcula el área y el volumen de la pirámide.**

   a) Aplicando el teorema de Pitágoras:

   $h^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3} = 1{,}73$ cm $\qquad H^2 = h^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow H = \sqrt{2} = 1{,}41$ cm

   b) $A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1{,}73 + 2^2 = 10{,}92$ cm^2 y $V = \frac{A_{base} \cdot H}{3} = \frac{2^2 \cdot 1{,}41}{3} = 1{,}88$ cm^3

6. **Un cono tiene 4 cm de radio de la base y 3 cm de altura. Calcula su área total y su volumen.**

   Hallamos la generatriz del cono aplicando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow g = \sqrt{25} = 5$ cm.

   $A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi r g + \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 5 + 3{,}14 \cdot 4^2 = 113{,}04$ cm^2 y $V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 16 \cdot 3}{3} = 50{,}24$ cm^3

7. **¿Es posible desarrollar en el plano una esfera? Calcula el área y el volumen de una esfera de 10 cm de diámetro.**

   La esfera no admite ningún tipo de desarrollo plano; por tanto, no es posible desarrollar en el plano una esfera.

   $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 25 = 314$ cm^2 y $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^3}{3} = 523{,}33$ cm^3

12 Estadística

ANALIZA Y SACA CONCLUSIONES

¿Cómo interpretas la definición de estadística que da el autor en la primera estrofa? ¿Cómo definirías tú lo que es la estadística?

Como una herramienta que permite hacer una estimación de las características de una población.

La estadística es una rama de las matemáticas que se encarga de estudiar determinadas características de una población y que nos permite extraer conclusiones sobre la misma.

¿Qué es el promedio? ¿Hay situaciones en las que no tenga sentido calcular el promedio? Pon algún ejemplo.

El promedio es el cociente entre la suma de diferentes valores y la cantidad de valores que se suman.

Carece de sentido considerar el promedio cuando estudiamos valores no numéricos. Por ejemplo, si preguntamos por el color del pelo de unos alumnos de 2.º de ESO, las posibles respuestas son *moreno*, *castaño*, *pelirrojo* o *rubio*. En este caso no tiene sentido calcular el promedio.

REFLEXIONA Y PON EN COMÚN

En los estudios y datos que proporciona la estadística, ¿juega un papel importante la interpretación que se haga de ellos? ¿Muestran la realidad fielmente?

La interpretación que se hace de los datos juega un papel relevante. Dependiendo del ámbito en que se realice el estudio, una visión sesgada de los resultados del mismo puede hacer que se obtengan interpretaciones casi opuestas.

Por ejemplo, las estadísticas afirman que el paro se ha reducido a 4 000 000 de desempleados. Para el Gobierno es un gran dato, ya que gracias a sus reformas están consiguiendo reducir el paro. Sin embargo, para la oposición, lo que muestra esta estadística es que tenemos un paro enorme y que las medidas del Ejecutivo no están teniendo el resultado prometido.

Y TÚ, ¿QUÉ OPINAS?

Para “hacer la cuenta general”, la estadística precisa recoger gran cantidad de datos. En la actualidad, el uso de internet y las redes sociales ha favorecido que esta recogida de datos sea masiva. ¿Crees que es realista utilizar las redes sociales para recoger datos? ¿Son fiables los datos recogidos? Debate con tus compañeros.

En mi opinión, los datos recogidos de las redes sociales no son fiables. Los perfiles falsos, la creación de múltiples perfiles por parte de un único usuario o el anonimato son factores que hacen que los datos que se recogen en las redes sociales no resulten muy realistas y carezcan de la seguridad suficiente para obtener conclusiones fiables.

Actividades propuestas

1. **Antes de sacar al mercado un nuevo zumo, se selecciona a 500 personas para estudiar su aceptación. ¿Cuáles son la población, la muestra y los individuos del estudio?**

   La población es el conjunto de las personas entre las que se seleccionan aquellas sobre las que se va a estudiar la aceptación del zumo. La muestra son las 500 personas seleccionadas para el estudio, y los individuos son cada una de las personas que realizan el estudio.

2. **Indica si la muestra que se ha seleccionado en cada caso es representativa y de qué tipo es la variable estudiada:**

   a) **Para conocer el número de SMS que se envían al día en un barrio se ha preguntado a 100 personas menores de 25 años y a 20 mayores de 25.**

   b) **Para conocer los gustos musicales de los alumnos de un instituto se ha preguntado a 10 alumnos de cada curso.**

   a) No se trata de una muestra representativa puesto que se seleccionan para el estudio cinco veces más de personas de la población menores de 25 años que mayores de 25. Es una variable estadística cuantitativa discreta.

   b) Es una muestra representativa porque se ha seleccionado el mismo número de alumnos en todos los cursos. Se trata de una variable estadística cualitativa.

3. **Una asociación ecologista ha realizado una encuesta sobre el medio de transporte que utiliza la población habitualmente para ir a trabajar. Las preguntas son:**

1. Sexo

2. Edad

3. Medio de transporte habitual (coche, metro, bus, bici, etc.)

4. Distancia de casa al lugar de trabajo

5. Tiempo de viaje en horas

Indica el tipo de cada una de las variables estudiadas.

Cualitativa: 1, 3

Cuantitativa discreta: 2, 5

Cuantitativa continua: 4

4. **Se ha preguntado a 25 personas cuántas veces han ido al cine en el último mes. Las respuestas han sido las siguientes:**

1, 0, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 0, 2, 1, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 4, 1, 3, 2, 3, 0, 1

a) ¿De qué tipo es la variable?

b) Elabora una tabla de frecuencias.

c) ¿Cuál es el valor de la variable más frecuente?

a) Variable cuantitativa discreta.

b)

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	5	0,20	5	0,20
1	8	0,32	5 + 8 = 13	0,52
2	6	0,24	13 + 6 = 19	0,76
3	4	0,16	19 + 4 = 23	0,92
4	2	0,08	23 + 2 = 25	1
	N = 25	1		

c) El valor de la variable más frecuente es 1.

5. **El número de portátiles Normal, Premium y Supra reparados en los últimos siete días por un servicio técnico son:**

N, P, P, S, P, S, P, N, S, S, S, N, N, P,

P, N, S, P, P, S, N, P, N, P, P, N, P, N, N, S

a) ¿De qué tipo es la variable estudiada?

b) Presenta los datos en una tabla de frecuencias.

c) ¿Qué ordenadores parecen ser los más defectuosos?

a) Variable cualitativa.

b)

Tipo de portátil	f_i	h_i	F_i	H_i
Normal	10	0,33	10	0,33
Premium	12	0,40	10 + 12 = 22	0,73
Supra	8	0,27	22 + 8 = 30	1
	N = 30	1		

c) Los ordenadores más defectuosos son los de la clase Premium.

6. En la siguiente tabla se recoge el país de procedencia de los alumnos Erasmus que han llegado a una universidad de la ciudad:

País	f_i
Francia	7
Inglaterra	28
Alemania	27
Italia	14
Grecia	9
Rusia	12
Suecia	12

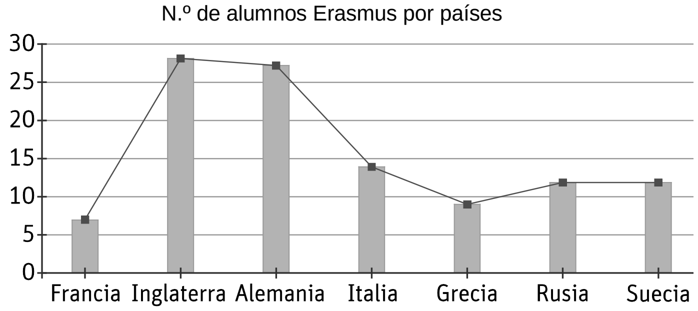
a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Representa estos datos mediante un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.

a)

País	f_i	h_i	F_i	H_i
Francia	7	0,064	7	0,064
Inglaterra	28	0,257	7 + 28 = 35	0,321
Alemania	27	0,248	35 + 27 = 62	0,569
Italia	14	0,128	62 + 14 = 76	0,697
Grecia	9	0,083	76 + 9 = 85	0,780
Rusia	12	0,110	85 + 12 = 97	0,890
Suecia	12	0,110	97 + 12 = 109	1
	N = 109	1		

b)



7. Las 24 notas del último examen de matemáticas realizado por los alumnos de 2.º de ESO han sido las siguientes:

Suspenso: 3 Aprobado: 5 Bien: 4

Notable: 7 Sobresaliente: 5

a) Construye la tabla de frecuencias asociada.

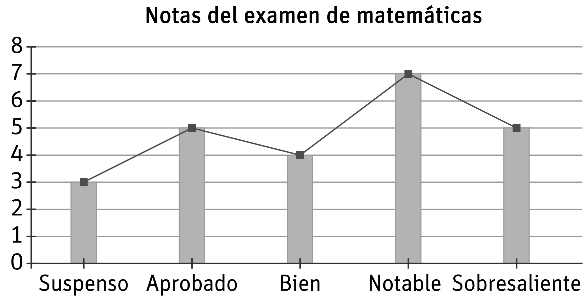
b) Representa la distribución en un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias.

c) Representa los datos en un diagrama de sectores.

a)

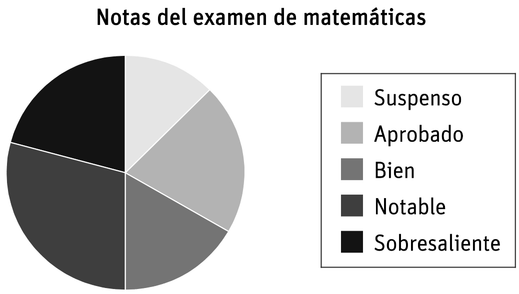
Nota	f_i	h_i	F_i	H_i
Suspenso	3	0,125	3	0,125
Aprobado	5	0,208	3 + 5 = 8	0,333
Bien	4	0,167	8 + 4 = 12	0,500
Notable	7	0,292	12 + 7 = 19	0,792
Sobresaliente	5	0,208	19 + 5 = 24	1
	N = 24	1		

b)



c)

Nota	f_i	h_i	Amplitud del sector
Suspenso	3	0,125	$0{,}125 \cdot 360^o = 45^o$
Aprobado	5	0,208	$0{,}208 \cdot 360^o = 74{,}88^o$
Bien	4	0,167	$0{,}167 \cdot 360^o = 60{,}12^o$
Notable	7	0,292	$0{,}292 \cdot 360^o = 105{,}12^o$
Sobresaliente	5	0,208	$0{,}208 \cdot 360^o = 74{,}88^o$
	N = 24	1	360º



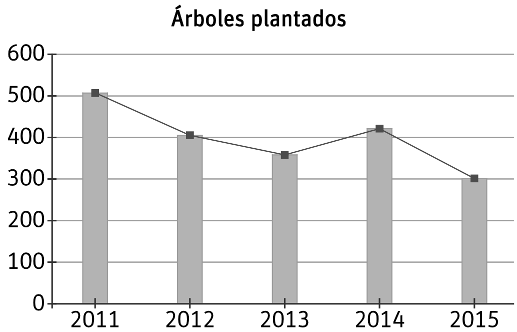
8. **Con el fin de preservar la riqueza de nuestros bosques, se ha llevado a cabo una política de plantación de árboles en los últimos años:**

Año	2011	2012	2013	2014	2015
N.º de árboles	510	405	356	421	298

a) Representa estos datos mediante un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.

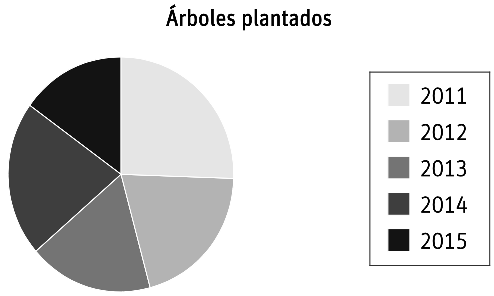
b) Construye el diagrama de sectores de los datos asociados.

a)



b)

Árboles	f_i	h_i	Amplitud del sector
2011	510	0,256	$0{,}256 \cdot 360^o = 92{,}16^o$
2012	405	0,204	$0{,}204 \cdot 360^o = 73{,}44^o$
2013	356	0,179	$0{,}179 \cdot 360^o = 64{,}44^o$
2014	421	0,212	$0{,}212 \cdot 360^o = 76{,}32^o$
2015	298	0,150	$0{,}150 \cdot 360^o = 54^o$
	1990	1	



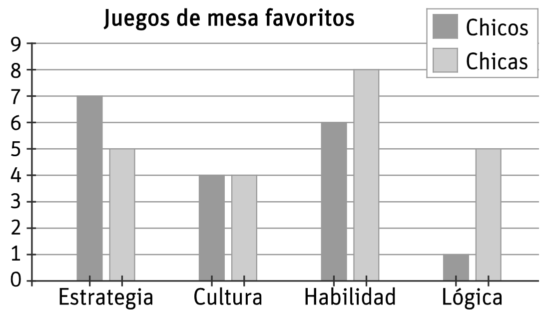
9. La siguiente tabla muestra los datos recogidos al preguntar a 40 alumnos sobre su tipo de juego de mesa favorito:

Juego de mesa	Chicas	Chicos
Estrategia	**5**	**7**
Cultura	**4**	**4**
Habilidad	**8**	**6**
Lógica	**5**	**1**

a) Haz un diagrama de barras, con diferentes barras para chicos y chicas.

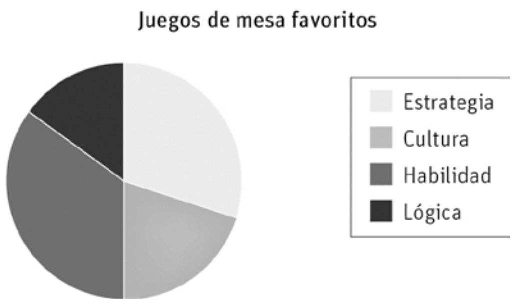
b) Representa los resultados totales en un diagrama de sectores.

a)

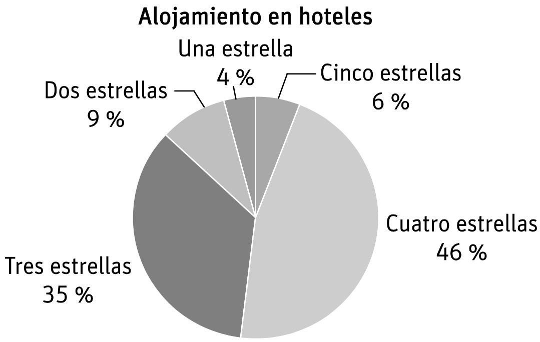


b) Realizamos una nueva tabla con los datos totales:

Juego de mesa	Total	h_i	Amplitud del sector
Estrategia	12	0,30	$0{,}3 \cdot 360^o = 108^o$
Cultura	8	0,20	$0{,}2 \cdot 360^o = 72^o$
Habilidad	14	0,35	$0{,}35 \cdot 360^o = 126^o$
Lógica	6	0,15	$0{,}15 \cdot 360^o = 54^o$



10. Los 92 000 turistas que el año pasado visitaron nuestras playas se alojaron en hoteles según este gráfico.



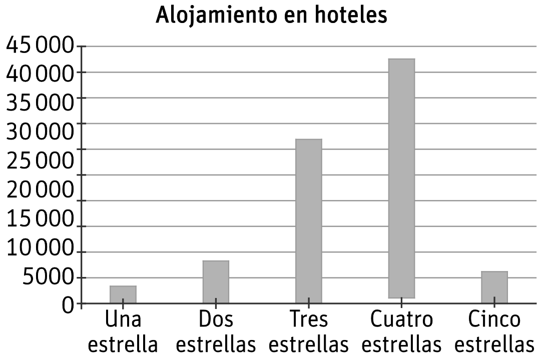
a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Representa los datos en un diagrama de barras.

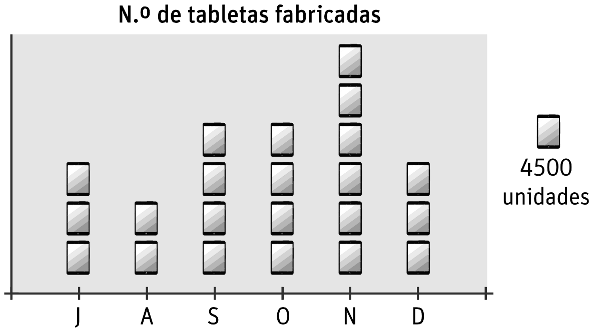
a)

Hotel	f_i	h_i	F_i	H_i
Una estrella	4 % de 92 000 = 3680	0,04 (4 %)	3680	0,04
Dos estrellas	9 % de 92 000 = 8280	0,09 (9 %)	11 960	0,13
Tres estrellas	35 % de 92 000 = 32 200	0,35 (35 %)	44 160	0,48
Cuatro estrellas	46 % de 92 000 = 42 320	0,46 (46 %)	86 480	0,94
Cinco estrellas	6 % de 92 000 = 5520	0,06 (6 %)	92 000	1
	N = 92 000	1		

b)



11. El número de tabletas que se han producido en una fábrica a lo largo de los últimos seis meses del año viene representado a través del siguiente pictograma:



a) Construye la tabla de frecuencias de los datos representados.

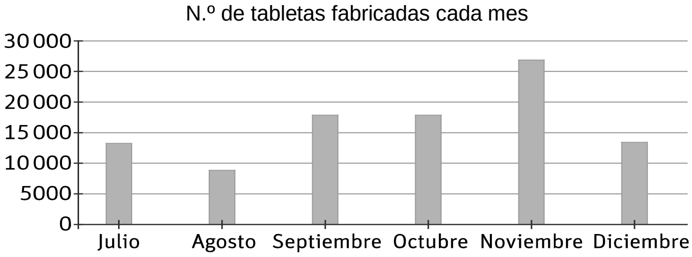
b) Representa los datos en un diagrama de barras.

c) Representa los datos en un diagrama de sectores.

a)

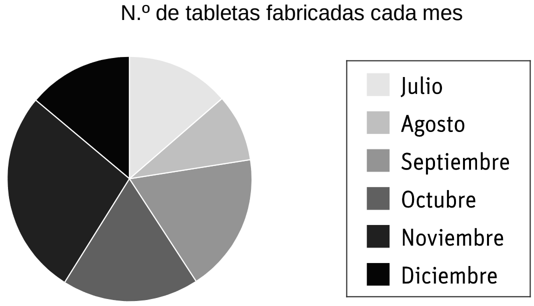
Meses	f_i	h_i	F_i	H_i
Julio	4500 · 3 = 13 500	0,136	13 500	0,136
Agosto	4500 · 2 = 9000	0,091	22 500	0,227
Septiembre	4500 · 4 = 18 000	0,182	40 500	0,409
Octubre	4500 · 4 = 18 000	0,182	58 500	0,591
Noviembre	4500 · 6 = 27 000	0,273	85 500	0,864
Diciembre	4500 · 3 = 13 500	0,136	99 000	1
	N = 99 000	1		

b)



c)

Meses	f_i	h_i	Amplitud del sector
Julio	13 500	0,136	$0,136 \cdot 360^\circ = 48,96^\circ$
Agosto	9000	0,091	$0,091 \cdot 360^\circ = 32,76^\circ$
Septiembre	18 000	0,182	$0,182 \cdot 360^\circ = 65,52^\circ$
Octubre	18 000	0,182	$0,182 \cdot 360^\circ = 65,52^\circ$
Noviembre	27 000	0,273	$0,273 \cdot 360^\circ = 98,28^\circ$
Diciembre	13 500	0,136	$0,136 \cdot 360^\circ = 48,96^\circ$
	N = 99 000	1	



12. Los días al mes que salen a correr varias personas son:

Edad	f_i
[0, 5)	8
[5, 10)	11
[10, 15)	15
[15, 20)	9
[20, 25)	5

a) Completa la tabla de frecuencias.

b) ¿Cuántos corredores corren entre 5 y 20 días?

a)

Edad	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[0, 5)	2,5	8	0,167	8	0,167
[5, 10)	7,5	11	0,229	19	0,396
[10, 15)	12,5	15	0,313	34	0,709
[15, 20)	17,5	9	0,188	43	0,897
[20, 25)	22,5	5	0,104	48	1
		N = 48	1		

b) Para determinar cuántas personas corren entre 5 y 20 días debemos sumar las frecuencias absolutas de los intervalos [5, 10), [10, 15) y [15, 20). Por tanto, 11 + 15 + 9 = 35 personas corren entre 5 y 20 días.

13. Los kilogramos de masa al nacer de 24 niños son:

1,9	**3,5**	**2,8**	**2,1**	**1,8**	**3,6**	**4,1**	**4,2**
2,7	**3**	**2,7**	**2**	**3,2**	**3,3**	**4,2**	**2,2**
3,6	**2,1**	**2,8**	**1,8**	**3,5**	**3,7**	**3,1**	**3,4**

a) Agrupa los datos de 0,5 en 0,5 y elabora la tabla.

b) ¿Cuántos bebés han pesado más de 3 kg?

a) Como el dato más pequeño es 1,9 kg y el más grande es 4,2 kg, vamos a considerar intervalos de amplitud 0,5 comenzando por 1,5 y finalizando en 4,5. Así, debemos determinar la cantidad de bebés cuyo peso al nacer se encuentra en cada uno de los intervalos.

Peso	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[1,5, 2)	1,75	3	0,125	3	0,125
[2, 2,5)	2,25	4	0,167	7	0,292
[2,5, 3)	2,75	4	0,167	11	0,459
[3, 3,5)	3,25	5	0,208	16	0,667
[3,5, 4)	3,75	5	0,208	21	0,875
[4, 4,5)	4,25	3	0,125	24	1
		N = 24	1		

b) Debemos contar los bebés cuyo peso se encuentra en los intervalos [3, 3,5), [3,5, 4) y [4, 4,5).

Así, 5 + 5 + 3 = 13 bebés han pesado más de 3 kg al nacer.

14. El número de fotografías que ha hecho Gorka con su teléfono móvil durante los 20 días que ha estado de intercambio en París han sido:

31	**60**	**57**	**49**	**29**	**14**	**63**	**38**	**50**	**19**
48	**23**	**28**	**19**	**21**	**22**	**36**	**18**	**46**	**27**

a) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 10 y haz la tabla de frecuencias.

b) ¿Cuál es la marca de clase más frecuente?

c) ¿Cuántos días ha hecho menos de 40 fotos?

a) Puesto que el menor número de fotos en un día es 14, y el mayor, 63, vamos a agrupar los datos en intervalos de longitud 10 comenzando en 10 y finalizando en 70. Por tanto, tenemos que determinar el número de días cuya cantidad de fotos se encuentra en cada intervalo.

N.º de fotos	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[10, 20)	15	4	0,20	4	0,20
[20, 30)	25	6	0,30	10	0,50
[30, 40)	35	3	0,15	13	0,65
[40, 50)	45	3	0,15	16	0,80
[50, 60)	55	2	0,10	18	0,90
[60, 70)	65	2	0,10	20	1
		N = 20	1		

b) La marca de clase más frecuente es aquella que tiene el término f_i (frecuencia absoluta) más grande. Por tanto, la marca de clase con mayor frecuencia es 25.

c) El número de días que ha hecho menos de 40 fotos se obtiene sumando las frecuencias absolutas correspondientes a los intervalos [10, 20), [20, 30) y [30, 40). Por tanto, 4 + 6 + 3 = 13 días hizo menos de 40 fotos.

15. Al realizar el inventario de un almacén se han pesado todos los paquetes que se encuentran en existencias:

Masa (kg)	f_i
[0, 10)	**9**
[10, 20)	**12**
[20, 30)	**14**
[30, 40)	**3**
[40, 50)	**1**

a) Completa la tabla de frecuencias e indica las marcas de clase.

b) ¿Cuántos paquetes pesan menos de 30 kg?

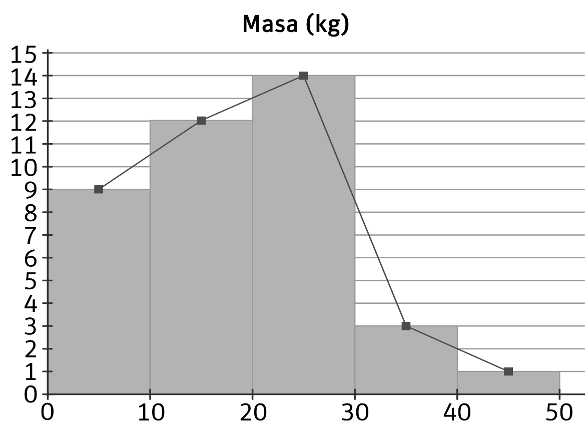
c) Representa los datos en un histograma y construye su polígono de frecuencias.

a)

Masa (kg)	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[0, 10)	5	9	0,231	9	0,231
[10, 20)	15	12	0,308	21	0,539
[20, 30)	25	14	0,359	35	0,898
[30, 40)	35	3	0,077	38	0,975
[40, 50)	45	1	0,026	39	1
		N = 39	1		

b) Tenemos que sumar la frecuencia absoluta asociada a los intervalos [0, 10), [10, 20) y [20, 30). Por tanto, 9 + 12 + 14 = 35 paquetes pesan menos de 30 kg.

c)



16. Las estaturas en centímetros de los 30 alumnos de una clase son:

148	**149**	**150**	**150**	**151**	**152**
151	**153**	**154**	**148**	**155**	**156**
146	**151**	**160**	**158**	**149**	**155**
153	**161**	**148**	**152**	**158**	**156**
150	**153**	**157**	**148**	**161**	**150**

a) Agrupa los datos en cuatro intervalos de amplitud 5.

b) Elabora la tabla de frecuencias.

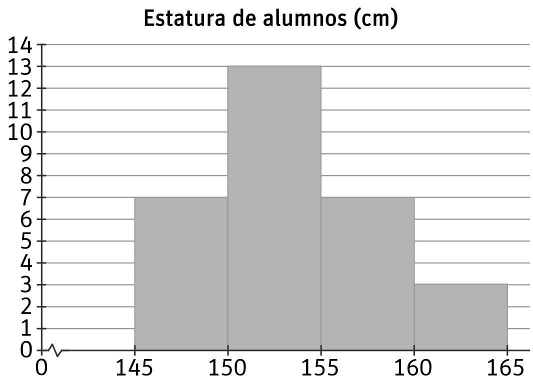
c) Representa el histograma.

a) Puesto que el menor de los datos es 146 cm, y el mayor, 161 cm, para agruparlos en cuatro intervalos de amplitud 5 vamos a considerar los intervalos [145, 150), [150, 155), [155, 160) y [160, 165).

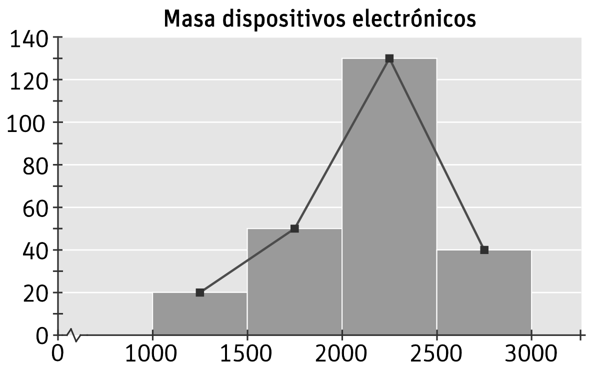
b)

Estatura (cm)	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[145, 150)	147,5	7	0,23	7	0,23
[150, 155)	152,5	13	0,43	20	0,66
[155, 160)	157,5	7	0,23	27	0,89
[160, 165)	162,5	3	0,1	30	1
		N = 30	1		

c)



17. En el histograma se representa la masa de diferentes marcas y modelos de dispositivos electrónicos:



a) Elabora la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

b) ¿Cuántos dispositivos tienen una masa menor de 1 kg?

a)

Masa (gramos)	Marca de clase, x_i	f_i	h_i
[1000, 1500)	1250	20	0,083
[1500, 2000)	1750	50	0,208
[2000, 2500)	2250	130	0,542
[2500, 3000)	2750	40	0,167
		N = 240	1

b) Como la masa de todos los dispositivos electrónicos representados en este histograma es superior a 1000 gramos, ninguno de ellos tiene una masa menor de 1 kg.

18. **En un reconocimiento médico se ha determinado el nivel de calcio en sangre de varios pacientes:**

9,7	**9,6**	**8,2**	**7,1**	**7,8**	**9,8**	**8,9**	**10,1**
10	**8,5**	**8,9**	**9,1**	**9,5**	**9,6**	**10**	**7,6**
8,3	**8,3**	**8,4**	**10,1**	**10,2**	**9,3**	**9,4**	**9,4**
9,5	**7,7**	**8,1**	**8,6**	**8,1**	**8**	**9,2**	**9**
9,9	**8,8**	**8,8**	**7,9**	**7,6**	**8,4**	**8,5**	**9,5**
9,1	**9,4**	**9,9**	**10,2**	**8,6**	**9,6**	**9,5**	**10**

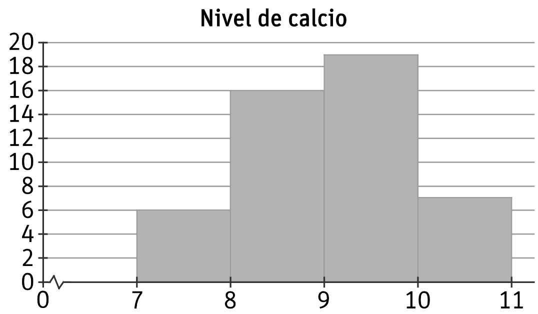
a) **Construye la tabla de frecuencias de datos agrupados.**

b) **Representa los datos en un histograma.**

a) El menor nivel de calcio en sangre es 7,1, y el mayor, 10,2. Por tanto, y puesto que no nos dicen nada al respecto, vamos a agrupar los datos en intervalos de amplitud 1 comenzando en 7 y finalizando en 11.

Calcio en sangre	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[7, 8)	8,5	6	0,125	6	0,125
[8, 9)	9,5	16	0,333	22	0,458
[9, 10)	10,5	19	0,396	41	0,854
[10, 11)	11,5	7	0,146	48	1
		N = 48	1		

b)



19. **Las alturas de los miembros de la familia Vera son:**

	Madre	Padre	Hugo	Eva	Fran	Ada
Altura	175	180	165	150	150	156

Calcula la moda, la media y la mediana.

La moda se corresponde con la estatura que tiene mayor frecuencia. En este caso, M_0 = 150, que coincide con las alturas de Eva y Fran.

Para calcular la media de las alturas, dividiremos la suma de todas las alturas entre el número de miembros de la familia.

$$\bar{x} = \frac{175+180+165+150+150+156}{6} = \frac{976}{6} = 162{,}66...$$

Para determinar la mediana, ordenaremos los datos de menor a mayor. Posteriormente, puesto que tenemos un número par de datos, la mediana es la media aritmética de los dos datos centrales.

150, 150, 156, 165, 175, 180

$$M = \frac{156+165}{2} = 160{,}5$$

20. **Actividad resuelta.**

21. En un campeonato de baile, la nota de cada ejercicio se calcula eliminando la puntuación más baja y la más alta de las dadas por los jueces y haciendo la media de las restantes. Las puntuaciones de los jueces a un bailarín han sido:

8,9 9,2 9,6 8,8 9,4 9,8 9,5

a) ¿Qué nota sacará el bailarín? ¿Sería favorable si se hiciese la media con todas las calificaciones?

b) ¿Y si la nota más baja y la más alta valieran el doble?

a) Para calcular la nota del bailarín, eliminamos la puntuación más baja y la más alta. En este caso eliminamos las puntuaciones 8,8 y 9,8. Por tanto, la nota obtenida por el bailarín es:

$$\frac{8,9+9,2+9,6+9,4+9,5}{5}=\frac{46,6}{5}=9,32$$

Calculemos ahora la nota considerando todas las notas obtenidas:

$$\frac{8,9+9,2+9,6+8,8+9,4+9,8+9,5}{7}=\frac{65,2}{7}=9,314$$

En este caso no resulta favorable para el bailarín considerar todas las notas.

b) Supongamos ahora que la nota más baja vale 8,8 · 2 = 17,6, y la más alta, 9,8 · 2 = 19,8. Entonces, la nota obtenida por el bailarían será:

$$\frac{8,9+9,2+9,6+17,6+9,4+19,6+9,5}{7}=\frac{83,8}{7}=11,971$$

En el caso de que las notas más baja y más alta valieran el doble, la nota del bailarín aumentaría considerablemente.

22. En un concurso de debates se valoran cuatro aspectos con distintos pesos: con 4 el respeto, con 3 la comunicación, con 2 la claridad de las ideas y con 1 el lenguaje gestual. El equipo A obtuvo 8, 7, 8 y 6 puntos, respectivamente, en cada categoría, y el equipo B, 7, 10, 8 y 5 puntos. ¿Quién ganó el debate?

En este caso, como cada uno de los aspectos que se valoran en el concurso de debates tiene un peso asignado, debemos calcular la puntuación media ponderada de cada uno de los equipos.

Media A: $\frac{4\cdot 8+3\cdot 7+2\cdot 8+1\cdot 6}{4+3+2+1}=\frac{75}{10}=7,5$

Media B: $\frac{4\cdot 7+3\cdot 10+2\cdot 8+1\cdot 5}{4+3+2+1}=\frac{79}{10}=7,9$

Por tanto, el equipo B ganó el debate.

23. Actividad resuelta.

24. Las notas, sobre 100 puntos, obtenidas por los aspirantes presentados a una oposición han sido:

Nota	**[0, 20)**	**[20, 40)**	**[40, 60)**	**[60, 80)**	**[80, 100]**
f_i	**5**	**28**	**52**	**65**	**30**

a) Halla el intervalo modal, la media y el intervalo mediano.

b) ¿Cuántos aspirantes han obtenido una nota por encima de la media? ¿Y por encima del intervalo mediano?

Nota	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[0, 20)	10	5	0,028	5	0,028
[20, 40)	30	28	0,156	33	0,184
[40, 60)	50	52	0,289	85	0,473
[60, 80)	70	65	0,361	150	0,834
[80, 100]	90	30	0,166	180	1
		N = 180	1		

a) El intervalo modal es el intervalo con mayor frecuencia. En este caso, el intervalo [60, 80).

La media se calcula a partir de las marcas de clase de cada uno de los intervalos:

$$\frac{10\cdot 5+30\cdot 28+50\cdot 52+70\cdot 65+90\cdot 30}{180}=\frac{10740}{180}=59,666...$$

Por último, puesto que tenemos 180 datos, el intervalo mediano será aquel en el que se encuentran los datos que ocupan las posiciones centrales, es decir, los datos que ocupan los lugares 90 y 91. En el caso que nos ocupa, ambos datos se encuentran en el intervalo [60, 80), por lo que se trata del intervalo mediano.

b) Puesto que la media es 59,666…, podemos considerar que nos están preguntando por los aspirantes cuyas notas se encuentran en los intervalos [60, 80) y [80, 100]. Por tanto, la cantidad de aspirantes que han obtenido una nota superior a la media es 65 + 30 = 95.

Por otro lado, puesto que el intervalo mediano es [60, 80), los aspirantes que han sacado una nota por encima del intervalo mediano son los que se encuentran en el intervalo [80, 100], es decir, 30 aspirantes.

25. Actividad interactiva.

26. En la siguiente tabla se recogen las estaturas, en centímetros, de los jugadores de dos equipos de baloncesto de la ciudad:

Equipo	J1	J2	J3	J4	J5
A	**190**	**192**	**195**	**198**	**200**
B	**180**	**185**	**195**	**210**	**200**

a) Calcula la media y la mediana.

b) Calcula el recorrido y la desviación media.

c) Calcula la varianza y la desviación típica.

d) ¿Qué conclusiones puedes sacar en vista de los resultados obtenidos para cada equipo?

a) Media *A*: $\frac{190+192+195+198+200}{5}=\frac{975}{5}=195$ Media *B*: $\frac{180+185+195+210+200}{5}=\frac{970}{5}=194$

Mediana *A*: 195 Mediana *B*: 195

b) **Equipo *A*:**

x_i	$x_i-\bar{x}$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$(x_i-\bar{x})^2$
190	–5	5	25
192	–3	3	9
195	0	0	0
198	3	3	9
200	5	5	25
		16	68

Equipo *B*:

x_i	$x_i-\bar{x}$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$(x_i-\bar{x})^2$
180	–14	14	196
185	–9	9	81
195	1	1	1
210	16	16	256
200	6	6	36
		46	570

Recorrido *A*: 200 – 190 = 10 Recorrido *B*: 210 – 180 = 30

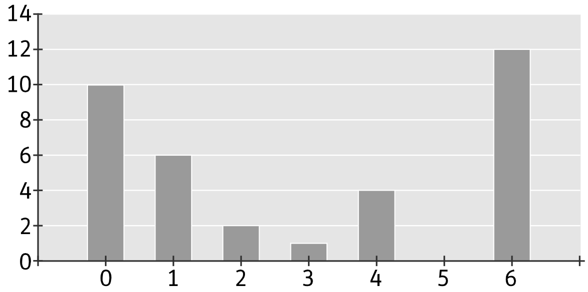
Desviación media *A*: $\frac{16}{5}=3,2$ Desviación media *B*: $\frac{46}{5}=9,2$

c) Varianza *A*: $s^2=\frac{68}{5}=13,6$ Varianza *B*: $s^2=\frac{570}{5}=114$

Desviación típica *A*: $s=\sqrt{13,6}=3,69$ Desviación típica *B*: $s=\sqrt{114}=10,68$

d) La media y la mediana del equipo *A* coinciden, mientras que las del equipo *B* son distintas. Además, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica son más grandes para el equipo *B* que para el equipo *A*. Por tanto, podemos concluir que las estaturas de los jugadores del equipo *A* se encuentran más próximas a la media, mientras que las del equipo *B* están más dispersas.

27. Observa los datos representados:



a) Construye la tabla de frecuencias y calcula la media.

b) Calcula los parámetros de dispersión.

a)

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
0	10	0,286	10	0,286
1	6	0,171	16	0,457
2	2	0,057	18	0,514
3	1	0,029	19	0,543
4	4	0,114	23	0,657
5	0	0	23	0,657
6	12	0,343	35	1
	N = 35	1		

Media:

$$\frac{0\cdot 10+1\cdot 6+2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 4+5\cdot 0+6\cdot 12}{35}=\frac{101}{35}=2{,}886$$

b)

x_i	$x_i-\bar{x}$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$(x_i-\bar{x})^2$
0	–2,886	2,886	8,329
1	–1,886	1,886	3,557
2	–0,886	0,886	0,785
3	0,114	0,114	0,013
4	1,114	1,114	1,241
5	2,114	2,114	4,469
6	3,114	3,114	9,697
		12,114	28,091

Desviación media: $\dfrac{12{,}114}{7}=1{,}731$

Varianza: $s^2=\dfrac{28{,}091}{7}=4{,}013$

Desviación típica: $s=\sqrt{4{,}013}=2{,}003$

28. Para hacer un estudio sobre la calidad de la prensa escrita de una ciudad de 1 000 000 de habitantes se han seleccionado 2000 personas, de las cuales 150 tienen estudios superiores, y el resto, estudios medios. Además, 995 son mayores de 45 años, y el resto, menores.

a) Indica cuáles son la población y la muestra del estudio.

b) ¿La muestra seleccionada con respecto al nivel de estudios es representativa? ¿Y con respecto a la edad?

a) La población está formada por el millón de habitantes de la ciudad, mientras que la muestra son las 2000 personas que han sido seleccionadas para realizar el estudio.

b) La muestra no es representativa respecto al nivel de estudios, puesto que se seleccionan muchas más personas con estudios medios que con estudios superiores.

Sin embargo, respecto a la edad, se trata de una muestra representativa, dado que prácticamente la mitad son mayores de 45 años, y la otra mitad, menores.

29. En un formulario para matricularse en un curso de informática se pide completar varios campos donde figuran las siguientes variables.

a) Edad.

b) País de nacimiento.

c) Programas informáticos que maneja.

d) Número de dispositivos informáticos que utiliza.

e) Tipo de dispositivos informáticos que utiliza.

¿De qué tipo es cada una de las variables?

a) Variable cuantitativa discreta

b) Variable cualitativa

c) Variable cualitativa

d) Variable cuantitativa discreta

e) Variable cualitativa

30. Indica si cada una de las variables que aparecen a continuación son cualitativas o cuantitativas, y en ese caso, si son continuas o discretas.

a) Número de asistentes a un festival de música cada año.

b) Precio de la entrada al festival cada año.

c) Tipo de música de los grupos que tocan en el festival.

d) Número de grupos que actúan en el festival cada año.

a) Variable cuantitativa discreta

b) Variable cuantitativa continua

c) Variable cualitativa

d) Variable cuantitativa discreta

31. El número de personas que habitan en cada una de las viviendas de un edificio es:

4	**4**	**2**	**1**	**2**	**2**	**4**	**4**	**2**	**3**
4	**3**	**2**	**5**	**2**	**4**	**5**	**3**	**6**	**4**
2	**1**	**3**	**2**	**2**	**1**	**4**	**4**	**5**	**2**
1	**1**	**4**	**3**	**3**	**2**	**2**	**1**	**2**	**1**

a) ¿De qué tipo es la variable estadística estudiada?

b) Elabora una tabla de frecuencias a partir de los datos recogidos.

c) ¿Cuál es el valor de la variable más frecuente?

a) Variable cuantitativa discreta

b)

Personas por vivienda	f_i	h_i	F_i	H_i
1	7	0,175	7	0,175
2	13	0,325	20	0,500
3	6	0,150	26	0,650
4	10	0,250	36	0,900
5	3	0,075	39	0,975
6	1	0,025	40	1
	$N = 40$	1		

c) El valor de la variable más frecuente es el 2.

32. Para analizar los resultados de la evaluación de un curso de 2.º de ESO, el tutor ha realizado un recuento de las asignaturas suspendidas de cada alumno. Los resultados son:

4	**4**	**2**	**1**	**2**	**2**	**4**	**4**	**2**	**3**
4	**3**	**2**	**5**	**2**	**4**	**5**	**3**	**6**	**4**
2	**1**	**3**	**2**	**2**	**1**	**4**	**4**	**5**	**2**

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) El alumno puede pasar de curso si tiene menos de tres asignaturas suspendidas. ¿Qué porcentaje de alumnos estarían en esa situación?

a)

Asignaturas suspendidas	f_i	h_i	F_i	H_i
1	3	0,100	3	0,100
2	10	0,333	13	0,433
3	4	0,133	17	0,566
4	9	0,300	26	0,866
5	3	0,100	29	0,966
6	1	0,034	30	1
	$N = 30$	1		

b) Los alumnos que tienen menos de tres asignaturas suspendidas son aquellos que han suspendido una o dos asignaturas. Por tanto, 3 + 10 = 13 alumnos pueden pasar de curso (este valor puede obtenerse observando el segundo dato de la columna de frecuencias absolutas acumuladas, F_i).

El porcentaje de alumnos en esta situación es del $\frac{13}{30} \cdot 100 = 43{,}3\,\%$ (este valor puede obtenerse observando el segundo dato de la columna de las frecuencias relativas acumuladas, H_i).

33. Se ha medido el ritmo cardiaco de un grupo de personas en estado de reposo obteniéndose los siguientes resultados:

Pulsaciones	f_i
[50, 60)	**5**
[60, 70)	**12**
[70, 80)	**14**
[80, 90)	**8**
[90, 100)	**9**
[100, 110)	**2**

a) Completa la tabla de frecuencias e indica las marcas de clase.

b) Si un ritmo cardiaco normal se encuentra entre las 60 y 100 pulsaciones por minuto, ¿cuántas personas se encuentran fuera de la normalidad?

a)

Pulsaciones	Marcas de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[50, 60)	55	5	0,10	5	0,10
[60, 70)	65	12	0,24	17	0,34
[70, 80)	75	14	0,28	31	0,62
[80, 90)	85	8	0,16	39	0,78
[90, 100)	95	9	0,18	48	0,96
[100, 110)	105	2	0,04	50	1
		$N = 50$			

b) Las personas que se encuentran fuera de la normalidad son aquellas cuyas pulsaciones se encuentran en los intervalos [50, 60) y [100, 110). Por tanto, 5 + 2 = 7 personas tienen un ritmo cardiaco fuera de lo normal.

34. Un estudio estadístico sobre la duración, en horas, de la batería de varios móviles ha arrojado los siguientes datos:

18 20 22 19 21 21 20 24

24 18 23 22 19 24 22

a) Construye una tabla de frecuencias.

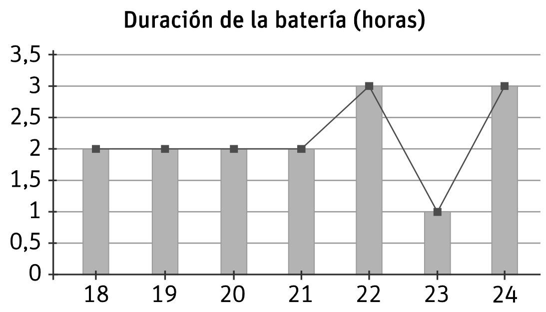
b) Representa los datos en un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.

c) Representa los datos en un diagrama de sectores.

a)

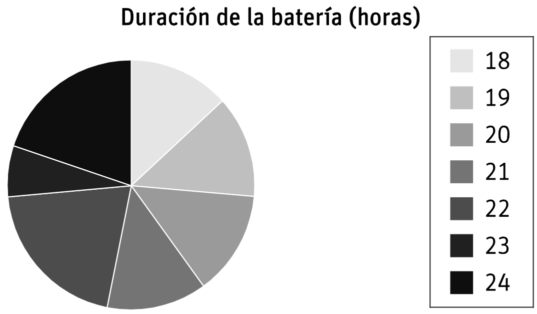
Duración (horas)	f_i	h_i	F_i	H_i
18	2	0,133	2	0,133
19	2	0,133	4	0,266
20	2	0,133	6	0,399
21	2	0,133	8	0,532
22	3	0,200	11	0,732
23	1	0,067	12	0,8
24	3	0,200	15	1
	N = 15	1		

b)



c)

Duración (horas)	f_i	h_i	Amplitud del sector
18	2	0,133	48º
19	2	0,133	48º
20	2	0,133	48º
21	2	0,133	48º
22	3	0,200	72º
23	1	0,068	24º
24	3	0,200	72º
	N = 15	1	



35. **El número de ausencias laborales en una empresa de 24 empleados en un año ha sido:**

2	**1**	**3**	**4**	**2**	**3**	**1**	**3**	**1**	**4**	**0**	**0**
3	**3**	**4**	**3**	**0**	**3**	**2**	**1**	**0**	**0**	**4**	**2**

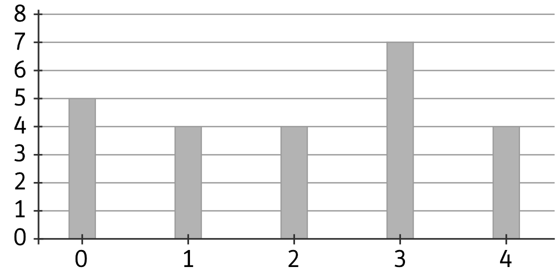
a) **Representa los datos en un diagrama de barras y en un diagrama de sectores.**

b) **¿Qué porcentaje de empleados se ha ausentado menos de dos días?**

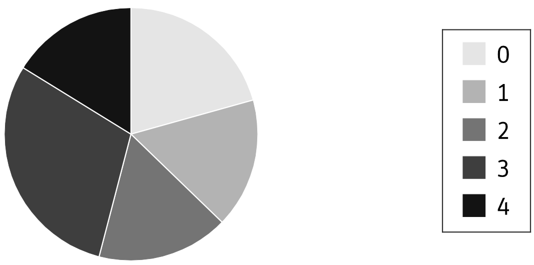
a)

Ausencias laborales	f_i	h_i	F_i	H_i	Amplitud del sector
0	5	0,208	5	0,208	75º
1	4	0,167	9	0,375	60º
2	4	0,167	13	0,542	60º
3	7	0,291	20	0,833	105º
4	4	0,167	24	1	60º
	N = 24	1			

Ausencias laborales



Ausencias laborales



b) Los empleados que se han ausentado menos de dos días son aquellos que lo han hecho 0 o 1 días. Así, para determinar el porcentaje de empleados que se ausentaron menos de dos días debemos observar el segundo dato de la columna de las frecuencias relativas acumuladas, H_i, es decir, un 37,5 %.

36. **El tiempo, en minutos, que han tardado ciertos atletas en completar una carrera ha sido:**

98	**100**	**105**	**102**	**95**	**89**	**110**
99	**95**	**94**	**94**	**89**	**86**	**85**
81	**121**	**80**	**90**	**100**	**103**	**103**
106	**108**	**113**	**112**	**111**	**94**	**92**
87	**86**	**86**	**114**	**108**	**108**	**101**

a) **Agrupa los datos en intervalos de amplitud 5.**

b) **Elabora la tabla de frecuencias.**

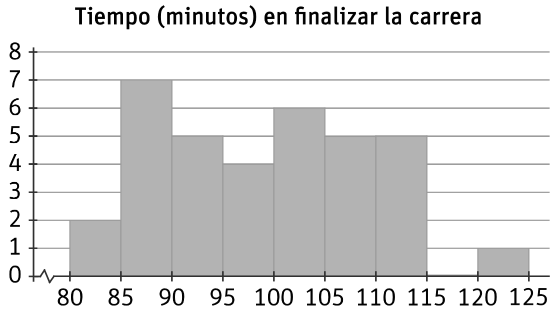
c) **Representa el histograma.**

a) Puesto que el menor de los datos es 80 minutos, y el mayor, 121 minutos, vamos a agrupar los datos en intervalos de amplitud 5 que comiencen por 80 y finalicen en 125.

b)

Tiempo (minutos)	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[80, 85)	82,5	2	0,057	2	0,057
[85, 90)	87,5	7	0,200	9	0,257
[90, 95)	92,5	5	0,143	14	0,400
[95, 100)	97,5	4	0,114	18	0,514
[100, 105)	102,5	6	0,171	24	0,685
[105, 110)	107,5	5	0,143	29	0,828
[110, 115)	112,5	5	0,143	34	0,971
[115, 120)	117,5	0	0	34	0,971
[120, 125)	122,5	1	0,029	35	1
		N = 35	1		

c)



37. Entre un grupo de estudiantes se ha hecho una prueba de ortografía consistente en escribir un texto dictado. El número de faltas cometidas por cada uno se recoge en el siguiente gráfico.

a) Construye una tabla de frecuencias.

b) Si la prueba se aprueba con menos de tres faltas de ortografía, ¿cuántos alumnos la han superado?

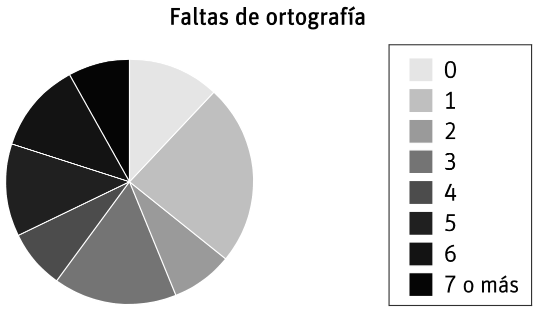
c) Construye un diagrama de sectores a partir de los datos.

a)

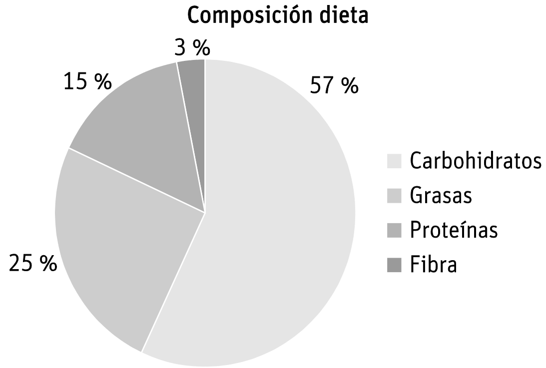
Faltas de ortografía	f_i	h_i	F_i	H_i	Amplitud del sector
0	3	0,12	3	0,12	43,2º
1	6	0,24	9	0,36	86,4º
2	2	0,08	11	0,44	28,8º
3	4	0,16	15	0,60	57,6º
4	2	0,08	17	0,68	28,8º
5	3	0,12	20	0,80	43,2º
6	3	0,12	23	0,92	43,2º
7 o más	2	0,08	25	1	28,8º
	$N = 25$	1			

b) Si la prueba se aprueba con menos de tres faltas de ortografía, debemos contar el número de estudiantes que tuvieron 0, 1 o 2 faltas de ortografía. Así, 3 + 6 + 2 = 11 alumnos superaron la prueba (también se puede mirar el tercer dato de la columna de las frecuencias absolutas acumuladas, F_i).

c)



38. Según las recomendaciones sobre aportaciones a la dieta (*RDA, Recommended Dietary Allowances*) publicadas por la Academia Nacional de Ciencias de EE. UU., una dieta equilibrada debería tener la siguiente composición:



Si el total de calorías diarias debe ser de 2100:

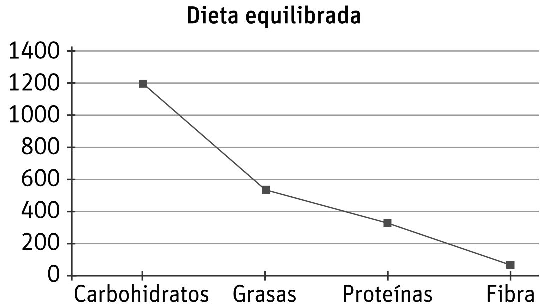
a) Construye una tabla de frecuencias asociada al gráfico.

b) Representa los datos en un polígono de frecuencias.

a)

Dieta	f_i	h_i	F_i	H_i
Carbohidratos	57 % de 2100 = 1197	0,57 (57 %)	1197	0,57
Grasas	25 % de 2100 = 525	0,25 (25 %)	1722	0,82
Proteínas	15 % de 2100 = 315	0,15 (15 %)	2037	0,97
Fibra	3 % de 2100 = 63	0,03 (3 %)	2100	1
	N = 2100	1		

b)



39. En una encuesta sobre hábitos alimenticios se han recogido los siguientes datos sobre el número de piezas de fruta que se consumen diariamente.

Piezas	0	1	2	3	4	5
f_i	14	22	18	10	6	2

a) Halla la moda, la media y la mediana.

b) Representa los datos en un diagrama de sectores.

a)

Piezas de fruta	f_i	h_i	F_i	H_i	Amplitud del sector
0	14	0,194	14	0,194	70º
1	22	0,306	36	0,500	110º
2	18	0,250	54	0,750	90º
3	10	0,139	64	0,889	50º
4	6	0,083	70	0,972	30º
5	2	0,028	72	1	10º
	N = 72	1			

La moda es el dato de mayor frecuencia absoluta. Por tanto, M_0 = 1.

Media: $\frac{0\cdot 14+1\cdot 22+2\cdot 18+3\cdot 10+4\cdot 6+5\cdot 2}{72}=\frac{122}{72}=1{,}69$ piezas de fruta diarias

Puesto que tenemos una cantidad par de datos, 72, la mediana se obtiene como la media de los datos centrales, es decir, de los datos que ocupan las posiciones 36 y 37. Observando la columna de las frecuencias absolutas acumuladas, tenemos que el dato 36 vale 1, mientras que el dato 37 vale 2, por lo que la mediana será la media entre 1 y 2, es decir, M = 1,5.

b)

40. El número de viajes que ha realizado un coche grúa de una empresa pública a lo largo de la semana ha sido:

L	M	X	J	V	S	D
6	7	6	4	3	10	12

Y los realizados por una empresa privada:

L	M	X	J	V	S	D
3	0	5	6	7	9	11

Para cada empresa:

a) Halla la desviación media y el rango.

b) Calcula la varianza y la desviación típica.

c) ¿Qué empresa tiene valores menos dispersos?

a) Media (empresa pública): $\frac{6+7+6+4+3+10+12}{7}=\frac{48}{7}=6{,}86$ viajes diarios

Media (empresa privada): $\frac{3+0+5+6+7+9+11}{7}=\frac{41}{7}=5{,}86$ viajes diarios

Empresa pública:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$
6	–0,86	0,86	0,7396
7	0,14	0,14	0,0196
6	–0,86	0,86	0,7396
4	–2,86	2,86	8,1796
3	–3,86	3,86	14,8996
10	3,14	3,14	9,8596
12	5,14	5,14	26,4196
		16,86	60,8572

Desviación media: $\frac{16,86}{7} = 2,41$

Rango: 12 – 3 = 9

Empresa privada:

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$
3	–2,86	2,86	8,1796
0	–5,86	5,86	34,3396
5	–0,86	0,86	0,7396
6	0,14	0,14	0,0196
7	1,14	1,14	1,2996
9	3,14	3,14	9,8596
11	5,14	5,14	26,4196
		19,14	80,8572

Desviación media: $\frac{19,14}{7} = 2,73$

Rango: 11 – 0 = 11

b) **Empresa pública:**

Varianza: $s^2 = \frac{60,8572}{7} = 8,69$

Desviación típica: $s = \sqrt{8,69} = 2,95$

Empresa privada:

Varianza: $s^2 = \frac{80,8572}{7} = 11,55$

Desviación típica: $s = \sqrt{11,55} = 3,40$

c) La empresa pública tiene los valores menos dispersos, puesto que todos los parámetros de dispersión que hemos calculado son más pequeños (desviación media, rango, varianza y desviación típica).

41. Un pediatra hace un estudio sobre la edad, en meses, a la que los bebés comienzan a caminar y obtiene los siguientes datos de 12 bebés: 12, 13, 12, 11, 15, 12, 13, 10, 14, 11, 12 y 13 meses.

a) Halla la moda y la media de los datos.

b) Calcula la mediana.

c) Halla la desviación media.

d) Calcula la varianza y la desviación típica.

a) Moda: $M_0 = 12$ meses

Media: $\bar{x} = \frac{1 \cdot 10 + 2 \cdot 11 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 13 + 1 \cdot 14 + 1 \cdot 15}{12} = \frac{148}{12} = 12,33$ meses

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$
10	1	–2,33	2,33	5,4289
11	2	–1,33	1,33	1,7689
12	4	–0,33	0,33	0,1089
13	3	0,67	0,67	0,4489
14	1	1,67	1,67	2,7889
15	1	2,67	2,67	7,1289
			9	17,6734

b) La mediana es la media de los datos que ocupan las posiciones centrales, es decir, la media de los datos que ocupan los puestos 6 y 7. Puesto que ambos datos valen 12, *M* = 12.

c) Desviación media: $\frac{9}{12} = 0,75$

d) Varianza: $s^2 = \frac{17,6734}{12} = 1,47$

Desviación típica: $s = \sqrt{1,47} = 1,21$

42. En el colegio de Lola, su profesora de matemáticas puntúa los exámenes de 0 a 100. Lola tiene una media de 60 puntos de sus primeros cuatro exámenes y en el quinto examen sacó 80 puntos.

a) ¿Cuál es la media de las notas de Lola después de los cinco exámenes?

b) Si el último examen es global y vale un 60 %, ¿qué nota final ha obtenido?

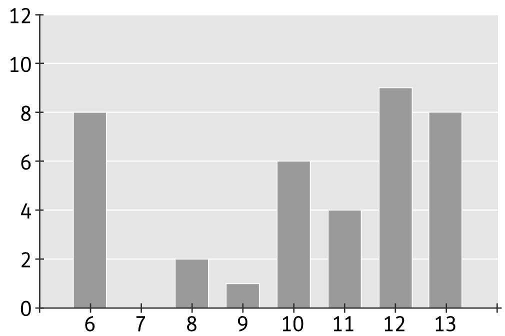
a) Después de los cinco exámenes, la nota media de los cuatro primeros cuenta 4/5 de la nota, mientras que la nota del último examen cuenta 1/5. Por tanto, debemos calcular una media ponderada de las notas.

Media: $\overline{x} = \dfrac{0{,}8 \cdot 60 + 0{,}2 \cdot 80}{0{,}8 + 0{,}2} = 64$

b) La nota final también se calcula haciendo una media ponderada.

Nota final: $\dfrac{0{,}4 \cdot 60 + 0{,}6 \cdot 80}{0{,}4 + 0{,}6} = 72$

43. Determina la media, la mediana y la moda de los datos representados en el siguiente diagrama de barras.



a) Construye la tabla de frecuencias asociada.

b) Halla el recorrido y la desviación media.

c) Calcula la varianza y la desviación típica.

d) Construye el diagrama de sectores asociado a los datos.

a)

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i	Amplitud del sector
6	8	0,21	8	0,21	75,6º
7	0	0	8	0,21	0º
8	2	0,0526	10	0,2626	18,9º
9	1	0,0263	11	0,2889	9,4º
10	6	0,1578	17	0,4467	56,8º
11	4	0,105	21	0,5517	37,9º
12	9	0,23684	30	0,79	85,2º
13	8	0,21	38	1	75,6º
	N = 38	1			

Media: $\overline{x} = \dfrac{6 \cdot 8 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 6 + 11 \cdot 4 + 12 \cdot 9 + 13 \cdot 8}{38} = \dfrac{389}{38} = 10{,}24$

Mediana: M = 11

Moda: $M_0 = 12$

b)

x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
6	–4,24	4,24	17,9776
7	–3,24	3,24	10,4976
8	–2,24	2,24	5,0176
9	–1,24	1,24	1,5376
10	–0,24	0,24	0,0576
11	0,76	0,76	0,5776
12	1,76	1,76	3,0976
13	2,76	2,76	7,6176
		16,48	46,3808

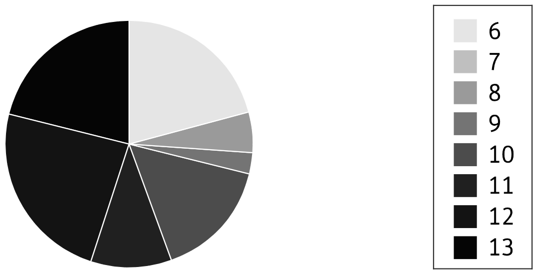
Recorrido: 13 – 6 = 7

Desviación media: $\dfrac{16{,}48}{38} = 0{,}43$

c) Varianza: $s^2 = \dfrac{46,3808}{38} = 1,22$

Desviación típica: $s = \sqrt{1,22} = 1,1$

d)



44. El ahorro a lo largo de un año conseguido por varias familias de una urbanización viene expresado en la siguiente tabla.

Ahorro (€)	N.º de familias
[0, 600)	**11**
[600, 1200)	**15**
[1200, 1800)	**25**
[1800, 2400)	**39**
[2400, 3000)	**10**

a) Halla el intervalo modal y la media.

b) Representa el histograma y el polígono de frecuencias.

a)

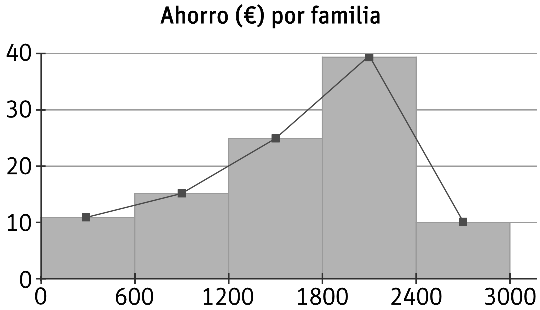
Ahorro (€)	Marca de clase, x_i	N.º de familias
[0, 600)	300	11
[600, 1200)	900	15
[1200, 1800)	1500	25
[1800, 2400)	2100	39
[2400, 3000)	2700	10
		N = 100

El intervalo modal es el intervalo de mayor frecuencia, es decir, [1800, 2400).

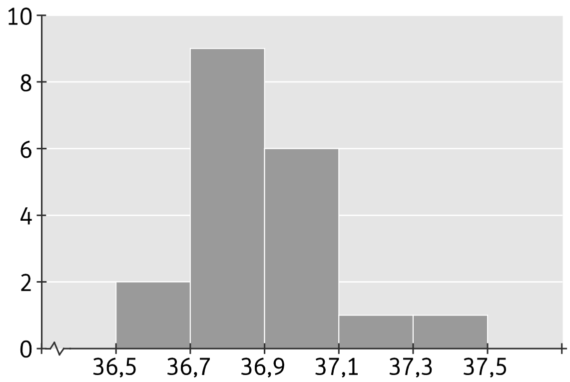
Para calcular la media, vamos a tener en cuenta la marca de clase de cada intervalo.

Media: $\bar{x} = \dfrac{300 \cdot 11 + 900 \cdot 15 + 1500 \cdot 25 + 2100 \cdot 39 + 2700 \cdot 10}{100} = \dfrac{163200}{100} = 1632$ €

b)



45. En el siguiente histograma se representa la temperatura corporal habitual de un grupo de personas.



a) Construye la tabla de frecuencias asociada.

b) Calcula el intervalo modal.

c) Halla la media y el intervalo mediano.

d) ¿Cuál es el recorrido o rango de los datos?

a)

Temperatura corporal	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[36,5, 36,7)	36,6	2	0,11	2	0,11
[36,7, 36,9)	36,8	9	0,47	11	0,58
[36,9, 37,1)	37	6	0,32	17	0,90
[37,1, 37,3)	37,2	1	0,05	18	0,95
[37,3, 37,5)	37,4	1	0,05	19	1
		N = 19	1		

b) Intervalo modal: [36,7, 36,9)

c) Media: $\overline{x} = \dfrac{36{,}6 \cdot 2 + 36{,}8 \cdot 9 + 37 \cdot 6 + 37{,}2 \cdot 1 + 37{,}4 \cdot 1}{19} = \dfrac{701}{19} = 36{,}89$

Intervalo mediano: [36,7, 36,9)

d) Recorrido: 37,4 – 36,6 = 0,8

46. ¿Cuál es la media de todos los números de cinco cifras que pueden formarse con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 8 utilizando en cada número los cinco dígitos?

A. 48 000 **B. 53 332,8** **C. 49 999,5** **D. 55 555**

En primer lugar, la cantidad de números de cinco cifras que podemos formar con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 8 es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Nos debemos centrar ahora en determinar cuánto vale la suma de todos ellos.

Los números de cinco cifras que podemos formar son de la forma *abcde*, donde *a*, *b*, *c*, *d* y *e* pueden tomar los valores 1, 3, 5, 7 y 8. El valor de cada número de la forma *abcde* es:

$$abcde = a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e \cdot 1$$

Además, cada coeficiente (*a*, *b*, *c*, *d* y *e*) toma el valor de cada uno de los dígitos (1, 3, 5, 7 y 8) en 24 ocasiones. Por tanto, la suma de todos los números de cinco cifras que podemos formar con los dígitos 1, 3, 5, 7 y 8 es:

$$24 \cdot (1+3+5+7+8) \cdot (10000+1000+100+10+1) = 24 \cdot 24 \cdot 11111 = 24^2 \cdot 11111$$

Finalmente, la media de todos estos números es:

$$\overline{x} = \frac{24^2 \cdot 11111}{120} = \frac{24^2 \cdot 11111}{24 \cdot 5} = \frac{24 \cdot 11111}{5} = 53332{,}8$$

La respuesta correcta es la B.

47. Si la media aritmética de 10 enteros positivos es 5, ¿cuál es el mayor valor posible que puede tomar alguno de ellos?

A. 50 **B. 5** **C. 41** **D. 25**

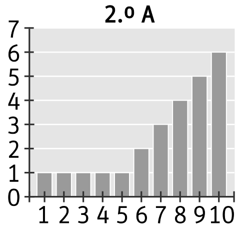
Para obtener el mayor número posible que puede tomar alguno de los números que verifican las condiciones dadas, los otros nueve números deben tomar el menor número posible. Por tanto, como tienen que ser números enteros y positivos, vamos a suponer que nueve de ellos valen 1 y calculemos el valor del décimo número para que la media de todos ellos sea 5. Llamaremos a este número *n*. Así,

$$\frac{9\cdot 1+n}{10}=5\Rightarrow 9+n=5\cdot 10\Rightarrow n=50-9=41$$

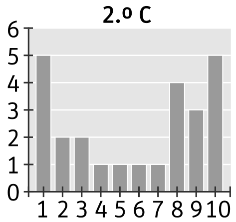
La solución es la C.

48. Las notas de cuatro grupos diferentes de 2.º de ESO vienen representadas en cuatro gráficos distintos. ¿En qué grupo la media y la mediana se diferencian menos?

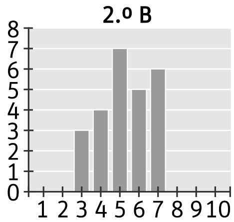
A.



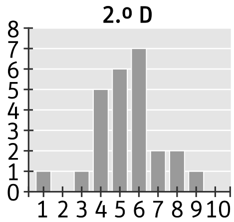
B.



C.



D.



En todos los grupos de 2.º de ESO hay 25 alumnos, por lo que para calcular la mediana nos debemos fijar en la nota del alumno 13.

2.º A:

Mediana: 8

Media: $\bar{x}=\frac{1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1+4\cdot 1+5\cdot 1+6\cdot 2+7\cdot 3+8\cdot 4+9\cdot 5+10\cdot 6}{25}=\frac{185}{25}=7,4$

2.º B:

Mediana: 5

Media: $\bar{x}=\frac{1\cdot 0+2\cdot 0+3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 7+6\cdot 5+7\cdot 6+8\cdot 0+9\cdot 0+10\cdot 0}{25}=\frac{132}{25}=5,28$

2.º C:

Mediana: 7

Media: $\bar{x}=\frac{1\cdot 5+2\cdot 2+3\cdot 2+4\cdot 1+5\cdot 1+6\cdot 1+7\cdot 1+8\cdot 4+9\cdot 3+10\cdot 5}{25}=\frac{146}{25}=5,84$

2.º D:

Mediana: 5

Media: $\bar{x}=\frac{1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 1+4\cdot 5+5\cdot 6+6\cdot 7+7\cdot 2+8\cdot 2+9\cdot 1+10\cdot 0}{25}=\frac{135}{25}=5,4$

El grupo en el que menos se diferencian la media y la mediana es 2.º B.

49. En un conjunto finito de números enteros positivos no todos iguales, ¿qué afirmación de las siguientes es siempre verdadera?

A. La media es un número entero.

B. El rango es positivo.

C. La media es un número natural.

D. La mediana es un número entero.

A. FALSA

La media de 1 y 2 es 1,5, que no es un número entero.

B. VERDADERA

Supongamos que b es el mayor entero positivo del conjunto y que a es el menor entero positivo. Entonces se tiene que b – a > 0, es decir, el rango es siempre positivo.

C. FALSA

La media de 1 y 2 es 1,5, que no es un número natural.

D. FALSA

Consideremos el conjunto {1, 2, 3, 4}, formado por cuatro números enteros positivos. Como hay un número par de datos, la mediana es la media de los datos que ocupan las posiciones centrales, es decir, la media de 2 y 3. Por tanto, la mediana es 2,5, que no es un número entero.

50. Ali tiene que calcular la media de estas 10 alturas:

170, 165, 178, 175, 160, 165, 166, 172, 162 y 165 cm.

Para ello, utiliza la siguiente estrategia:

1. Busca la moda de las estaturas: 165.

2. Resta 165 a todas las alturas y obtiene:

5, 0, 13, 10, –5, 0, 1, 7, –3, 0

3. Halla la media de estos números:

Media: 2,8

4. Suma este valor a 165:

165 + 2,8 = 167,8 cm

Si la media obtenida es correcta, ¿crees que funcionará siempre? ¿Por qué?

Veamos, en primer lugar, si esta media coincide con la media aritmética habitual.

$$\overline{x} = \frac{170+165+178+175+160+165+166+172+162+165}{10} = \frac{1678}{10} = 167{,}8 \text{ cm}$$

En este caso particular, ambas medias coinciden. Comprobemos que es cierto en general.

Sean $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de n datos cuya moda es M_0. La media aritmética de estos datos es:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Veamos ahora que la media del conjunto de datos $\{x_1 - M_0, x_2 - M_0, \ldots, x_n - M_0\}$ coincide con la diferencia entre la media de los datos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y la moda.

$$\frac{(x_1 - M_0) + (x_2 - M_0) + \ldots + (x_n - M_0)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n - nM_0}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - \frac{nM_0}{n} = \overline{x} - M_0$$

Así, podemos afirmar que el método descrito en este ejercicio para calcular la media de un conjunto de datos funciona siempre.

PONTE A PRUEBA

Las pirámides de población

Problema resuelto

Respaldo al presidente

En Estadistancia se realizaron varios sondeos de opinión para conocer el nivel de respaldo al presidente en las próximas elecciones. Cuatro periódicos hicieron sondeos por separado en toda la nación. Los resultados de los sondeos de los cuatro periódicos se muestran a continuación:

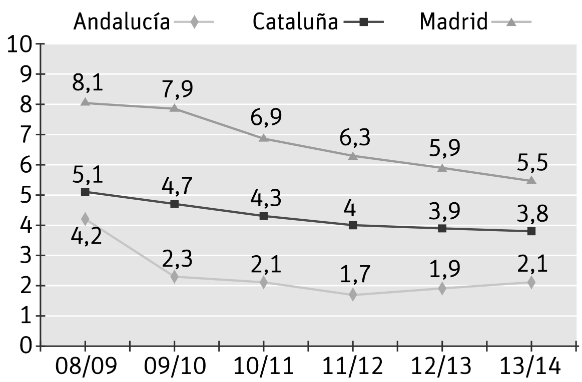
Periódico 1:	**Periódico 2:**	**Periódico 3:**	**Periódico 4:**
36,5 %	41,0 %	39,0 %	44,5 %
Fecha: 6 de enero	Fecha: 20 de enero	Fecha: 20 de enero	Fecha: 20 de enero
Muestra: 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto.	Muestra: 500 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto.	Muestra: 1000 ciudadanos elegidos al azar y con derecho a voto	Muestra: 1000 lectores que llamaron por teléfono para votar

Si las elecciones se celebraran el 25 de enero, ¿cuál de los resultados de los periódicos sería la mejor predicción del nivel de apoyo al presidente? Da dos razones que justifiquen tu respuesta.

Los resultados del periódico 3. Se encuentra entre los tres periódicos con la fecha de sondeo más próxima a las elecciones (20 de enero), utiliza la mayor cantidad de personas para la muestra junto al periódico 4 (1000 personas) y además es la muestra más representativa por tratarse de ciudadanos con derecho a voto elegidos al azar.

Disponibilidad de ordenadores

Según datos del INE (Instituto Nacional de Estadística), el número de alumnos por ordenador destinado a tareas de enseñanza-aprendizaje en las comunidades de Andalucía, Cataluña y Madrid desde el curso 2008/09 al 2013/14 viene dado por este gráfico.



1. **¿Cuántos alumnos por ordenador había en Andalucía en el curso 2010/11? ¿Cuántos en Madrid?**

   Andalucía (2010/11) = 2,1　　Madrid (2010/11) = 6,9

2. **¿Cuánto ha disminuido el número de alumnos por ordenador en estos años en Cataluña?**

   5,1 – 3,8 = 1,3

   En Cataluña han pasado de 5,1 alumnos por ordenador en el curso 2008/09 a 3,8 en el curso 2013/14.

3. **En el curso 2013/14, ¿qué comunidad tenía una posición más favorable?**

   Andalucía, puesto que era la comunidad con menos alumnos por ordenador.

4. **¿Qué comunidad ha tenido una mejor evolución relativa?**

   Madrid: $\frac{8,1-5,5}{8,1}=\frac{2,6}{8,1}=0,32$　　Andalucía: $\frac{4,2-2,1}{4,2}=\frac{2,1}{4,2}=0,5$　　Cataluña: $\frac{5,1-3,8}{5,1}=\frac{1,3}{5,1}=0,25$

   Por tanto, la comunidad con mejor evolución relativa es Andalucía.

AUTOEVALUACIÓN

1. En un equipo de fútbol, el número de tarjetas amarillas acumuladas por cada uno de los jugadores que componen el equipo es:

1 1 0 0 0 2 3 1 4 2

3 2 2 1 1 0 0 3 1 2

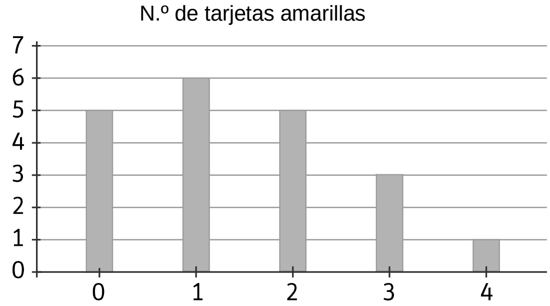
a) Escribe la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

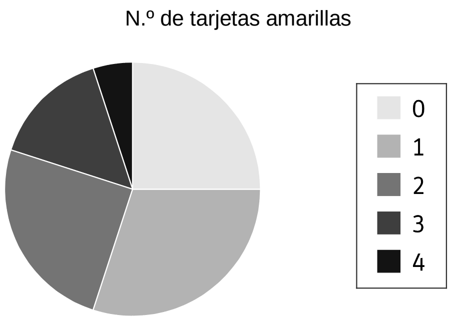
b) Dibuja el diagrama de barras y el de sectores.

a)

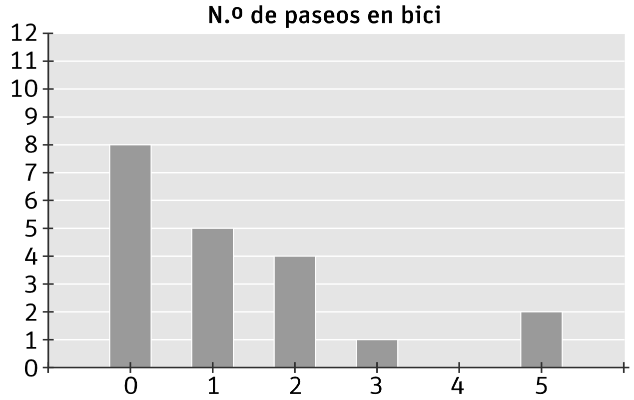
Tarjetas amarillas	f_i	h_i	F_i	H_i	Amplitud del sector
0	5	0,25	5	0,25	90º
1	6	0,30	11	0,55	108º
2	5	0,25	16	0,80	90º
3	3	0,15	19	0,95	54º
4	1	0,05	20	1	18º
	N = 20	1			

b)





2. En el gráfico siguiente se recoge el número de veces que un grupo de alumnos ha montado en bici en el último mes.



a) **Haz una tabla de frecuencias con estos datos.**

b) **Construye el diagrama de sectores.**

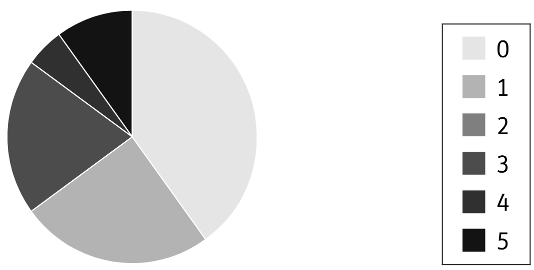
c) **Calcula la media.**

d) **Halla la mediana y la moda.**

a)

Paseos en bici	f_i	h_i	F_i	H_i	Amplitud del sector
0	8	0,40	8	0,40	144°
1	5	0,25	13	0,65	90°
2	4	0,20	17	0,85	72°
3	1	0,05	18	0,90	18°
4	0	0	18	0,90	0°
5	2	0,10	20	1	36°
	N = 20	1			

b) N.º de paseos en bici



c) Media: $\bar{x} = \dfrac{0\cdot 8 + 1\cdot 5 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 + 5\cdot 2}{20} = \dfrac{26}{20} = 1{,}3$

d) Puesto que tenemos un número par de datos, la mediana coincide con la media de los datos que ocupan las dos posiciones centrales, es decir, de los datos que ocupan las posiciones 10 y 11. En ambos casos, el dato toma el valor 1, por lo que la mediana es $M = 1$.

La moda coincide con el dato de mayor frecuencia absoluta. Por tanto, $M_0 = 0$.

3. **Estas son las marcas, en segundos, de los atletas que han participado en una carrera de 400 m:**

48,6	**49,2**	**50,1**	**50,1**	**50,1**	**50,4**	**51**
51,8	**51,8**	**51,9**	**52**	**52,2**	**52,6**	**53,28**
49,2	**50,1**	**50,3**	**50,6**	**49,8**	**49,7**	**48,7**
49	**50,2**	**50,5**	**50,7**	**51,1**	**49,2**	**49,6**

a) Agrupa los datos en intervalos de amplitud 0,5 y elabora la tabla de frecuencias.

b) Calcula el intervalo modal y la media.

c) Representa los datos en un histograma y en un polígono de frecuencias.

a)

Tiempo (segundos)	Marca de clase, x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[48,5, 49)	48,75	2	0,071	2	0,071
[49, 49,5)	49,25	4	0,142	6	0,213
[49,5, 50)	49,75	3	0,1065	9	0,3195
[50, 50,5)	50,25	7	0,25	16	0,5695
[50,5, 51)	50,75	3	0,1065	19	0,676
[51, 51,5)	51,25	2	0,071	21	0,747
[51,5, 52)	51,75	3	0,1065	24	0,8535
[52, 52,5)	52,25	2	0,071	26	0,9245
[52,5, 53)	52,75	1	0,03775	27	0,96225
[53, 53,5)	53,25	1	0,03775	28	1
		N = 28	1		

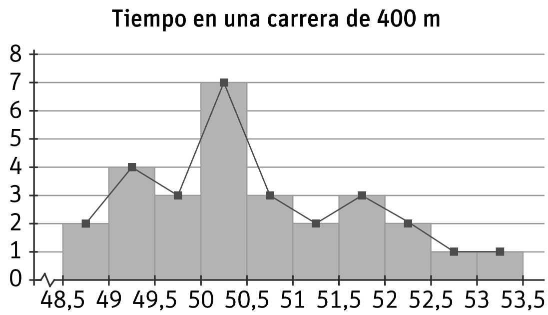
b) El intervalo modal es el intervalo con mayor frecuencia absoluta. En este caso, [50, 50,5).

Para calcular la media, vamos a tener en cuenta la marca de clase de cada intervalo.

$$\overline{x} = \frac{48{,}75 \cdot 2 + 49{,}25 \cdot 4 + 49{,}75 \cdot 3 + 50{,}25 \cdot 7 + 50{,}75 \cdot 3 + 51{,}25 \cdot 2 + 51{,}75 \cdot 3 + 52{,}25 \cdot 2 + 52{,}75 \cdot 1 + 53{,}25 \cdot 1}{28} =$$

$$= \frac{1416}{28} = 50{,}57$$

c)



4. En una empresa, la antigüedad en años de la plantilla de 50 trabajadores viene dada por la tabla:

Años	1	2	3	4	5	6	7	8
Empleados	7	6	4	7	8	9	5	4

a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Calcula la mediana y la moda.

c) Calcula la media.

a)

Años	f_i	h_i	F_i	H_i
1	7	0,14	7	0,14
2	6	0,12	13	0,26
3	4	0,08	17	0,34
4	7	0,14	24	0,48
5	8	0,16	32	0,64
6	9	0,18	41	0,82
7	5	0,10	46	0,92
8	4	0,08	50	1
	N = 50	1		

b) Como tenemos un número par de datos, la mediana se calcula como la media de los datos que ocupan las posiciones 25 y 26. En este caso, ambos datos valen 5, por lo que la mediana es M = 5 años.

La moda se corresponde con el dato de mayor frecuencia. Por tanto, M_0 = 6 años.

c) Media: $\overline{x} = \frac{1\cdot 7 + 2\cdot 6 + 3\cdot 4 + 4\cdot 7 + 5\cdot 8 + 6\cdot 9 + 7\cdot 5 + 8\cdot 4}{50} = \frac{220}{50} = 4{,}4$ años

5. Los minutos que hablan al día por teléfono los miembros de dos familias son:

Familia 1	75	65	71	56	59	63	70
Familia 2	93	90	70	69	68	72	71

Calcula la desviación media y la desviación típica de cada conjunto de datos.

Familia 1

x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
75	9,4	9,4	88,36
65	–0,6	0,6	0,36
71	5,4	5,4	29,16
56	–9,6	9,6	92,16
59	–6,6	6,6	43,56
63	–2,6	2,6	6,76
70	4,4	4,4	19,36
		38,6	279,72

Media:

$$\overline{x} = \frac{75+65+71+56+59+63+70}{7} = \frac{459}{7} = 65{,}6$$

Desviación media: $\frac{38{,}6}{7} = 5{,}5$

Desviación típica: $s = \sqrt{\frac{279{,}72}{7}} = \sqrt{39{,}96} = 6{,}3$

Familia 2

x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$
93	16,9	16,9	285,61
90	13,9	13,9	193,21
70	–6,1	6,1	37,21
69	–7,1	7,1	50,41
68	–8,1	8,1	65,61
72	–4,1	4,1	16,81
71	–5,1	5,1	26,01
		61,3	674,87

Media:

$$\overline{x} = \frac{93+90+70+69+68+72+71}{7} = \frac{533}{7} = 76{,}1$$

Desviación media: $\frac{61{,}3}{7} = 8{,}8$

Desviación típica: $s = \sqrt{\frac{674{,}87}{7}} = \sqrt{96{,}41} = 9{,}8$

13 Probabilidad

ANALIZA Y CONTESTA

El mago no sabe qué moneda voltea en cada ocasión. Puede cambiar una cruz por una cara, o al revés, en cinco ocasiones, pero sin saber qué está pasando. ¿Es realmente un fenómeno que depende del azar?

Seleccionar la moneda que va a voltear el mago es un fenómeno que depende del azar. Sin embargo, el volteo en sí de la moneda no depende del azar, puesto que se sabe que si una moneda es cara, pasará a ser cruz y viceversa.

¿Por qué cuenta el número de caras y cruces que aparecen al final?

Porque tras los cinco volteos, con independencia de entre cuántas monedas se han repartido dichos volteos, siempre se obtiene la misma configuración, hay tres monedas iguales y otra distinta (tres caras y una cruz, o bien tres cruces y una cara). Por este motivo, si tapamos una moneda al azar, siguiendo el paso cuatro del truco de magia podemos “adivinar” si la moneda que tapamos es cara o cruz.

REFLEXIONA Y PON EN COMÚN

Repite varias veces el truco y descubre el misterio por ti mismo. ¿Funcionaría el truco si al principio hubiese tres caras y tres cruces? ¿Y si hubiese cuatro?

No, el truco no funciona en ninguno de los nuevos casos. Se puede comprobar que existen configuraciones de las monedas en ambos casos que no verifican las propiedades dadas en el apartado 4 del truco de magia.

Ejemplo: Supongamos que tenemos tres caras y tres cruces, CCCXXX. Si volteamos cada una de las caras una vez y una de las cruces dos veces, realizamos cinco volteos y la configuración que obtenemos es XXXXXX. En este caso, tapando una de ellas obtenemos todo cruces, pero la moneda que estamos tapando también es cruz, en contradicción con el apartado 4 del truco de magia, que afirma que dicha moneda tapada debe ser cara.

Actividades propuestas

1. Actividad resuelta.

2. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.

a) Tirar un tótem al aire y que caiga de pie.

b) Anotar el horario de salida del tren de la estación.

c) Reproducir una canción de una lista de música.

d) Extraer una carta de la baraja y medir su anchura.

e) Lanzar un dado jugando al parchís.

a) Experimento aleatorio.

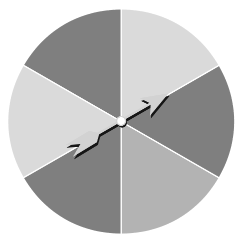
b) Experimento determinista. El horario está determinado por el servicio de trenes.

c) Experimento aleatorio.

d) Experimento determinista. Todas las cartas de la baraja tienen la misma anchura.

e) Experimento aleatorio.

3. Escribe el espacio muestral que se obtiene al hacer girar la aguja de la siguiente ruleta.



El espacio muestral es E = {rojo, verde, morado}.

4. Extraemos sin mirar una carta de una baraja española de 40 cartas.

a) ¿Cuántos resultados posibles hay? Describe el espacio muestral.

b) Si miramos solo el número sin importar el palo, ¿cuál es el espacio muestral?

a) 40 resultados posibles.

Si consideramos O = oros, B = bastos, E = espadas y C = copas, el espacio muestral es el siguiente:

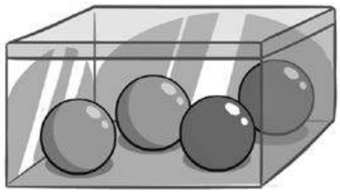
E = {1O, 2O, 3O, 4O, 5O, 6O, 7O, 10O, 11O, 12O, 1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, 10B, 11B, 12B, 1E, 2E, 3E, 4E, 5E, 6E, 7E, 10E, 11E, 12E, 1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, 10C, 11C, 12C}

b) 10 resultados posibles. *E* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12}

5. Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos utilizando una tabla de doble entrada o un diagrama de árbol.

a) Lanzar dos dados y sumar los resultados.

b) Extraer tres bolas de la siguiente urna.



a) En este caso utilizaremos una tabla de doble entrada para determinar el espacio muestral.

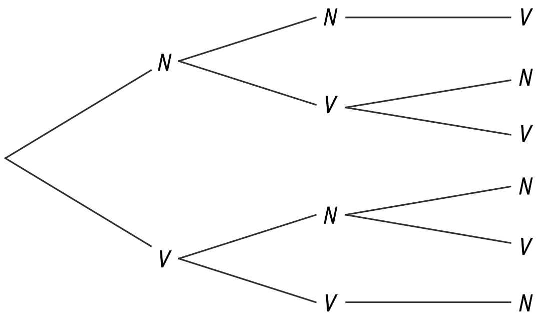
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

b) Teniendo en cuenta el número de bolas de cada color que tenemos en la urna y que se extraen tres bolas, el diagrama de árbol de este experimento aleatorio queda como sigue:

N = extraer una bola naranja

V = extraer una bola verde



El espacio muestral es *E* = {N-N-V, N-V-N, N-V-V, V-N-N, V-N-V, V-V-N}.

6. Existen dados con la forma de todos los poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

a) Describe el espacio muestral asociado al lanzamiento de cada uno de los dados anteriores.

b) Lanzamos un dado cúbico y un dado tetraédrico a la vez. Describe mediante una tabla de doble entrada el espacio muestral.

a) Tetraedro (4 caras): $E = \{1, 2, 3, 4\}$

Cubo (6 caras): $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Octaedro (8 caras): $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Dodecaedro (12 caras): $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Icosaedro (20 caras): $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

b) Como se lanza un dado cúbico (seis caras) y otro dado tetraédrico (cuatro caras), el espacio muestral de este experimento aleatorio estará formado por los siguientes elementos:

	1	**2**	**3**	**4**
1	1-1	1-2	1-3	1-4
2	2-1	2-2	2-3	2-4
3	3-1	3-2	3-3	3-4
4	4-1	4-2	4-3	4-4
5	5-1	5-2	5-3	5-4
6	6-1	6-2	6-3	6-4

E = {1 - 1, 1 - 2, 1 - 3, 1 - 4, 2 - 1, 2 - 2, 2 - 3, 2 - 4, 3 - 1, 3 - 2, 3 - 3, 3 - 4, 4 - 1, 4 - 2, 4 - 3, 4 - 4, 5 - 1, 5 - 2, 5 -3, 5 - 4, 6 - 1, 6 - 2, 6 - 3, 6 - 4}

7. En el experimento de sacar una carta de una baraja española:

a) Describe un suceso posible.

b) Describe un suceso imposible.

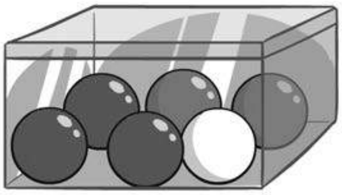
c) Describe un suceso seguro.

a) Sacar el rey de oros.

b) Sacar el as de picas.

c) Sacar una carta de oros, bastos, espadas o copas.

8. Una urna contiene las siguientes bolas.



a) Escribe el espacio muestral.

b) Describe dos sucesos compuestos.

c) ¿Qué suceso sería seguro? Compara tu respuesta con la de un compañero.

a) E = {rojo, azul, blanco}

b) Sucesos compuestos: {rojo, azul}, {rojo, blanco}

c) Sacar una bola roja o azul o blanca.

9. Actividad resuelta.

10. Se lanzan tres monedas y se anotan los resultados obtenidos.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Describe un suceso elemental y un suceso compuesto.

c) ¿Cuántos sucesos formados por tres elementos hay?

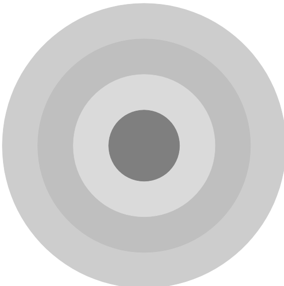
a) E = {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}

b) Suceso elemental: {CCC}

Suceso compuesto: {CCX, XXC}

c) El número de sucesos que hay formados por tres elementos coincide, en este caso, con el número de sucesos del espacio muestral, esto es, ocho.

11. Se lanza un dardo a esta diana.



a) Escribe el espacio muestral.

b) Describe un suceso imposible.

c) Describe un suceso seguro.

d) Indica tres sucesos compuestos si lanzamos dos dardos a la diana.

a) E = {azul, verde, amarillo, rojo}

b) Dar con el dardo en la zona negra.

c) Dar con el dardo en la zona azul o verde o amarilla o roja.

d) Sucesos compuestos: {rojo, amarillo}, {azul, verde}, {verde, amarillo}

12. En una carrera participan 3 caballos *A*, *B* y *C*.

a) {*A*, *B*, *C*} es un posible orden de llegada de los caballos a la meta. ¿Cuántas llegadas diferentes pueden tener lugar? Indícalas.

b) Consideramos el suceso *T* = "gana el caballo *A*". ¿Cuántos elementos tiene este suceso?

c) Consideramos el suceso *R* = "no gana *B*". ¿Cuántos elementos lo forman?

a) El número de posibles llegadas diferentes es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

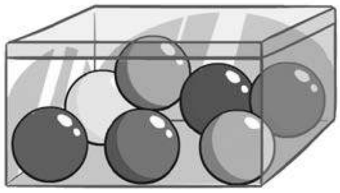
{{A, B, C}, {A, C, B}, {B, A, C}, {B, C, A}, {C, A, B}, {C, B, A}}

b) Dos elementos: {A, B, C}, {A, C, B}

c) Cuatro elementos: {A, B, C}, {A, C, B}, {C, A, B}, {C, B, A}

13. Actividad resuelta.

14. Una urna contiene las siguientes bolas.



Extraemos una bola sin mirar y anotamos su color. Consideramos los sucesos *A* = "sacar una bola roja" y *B* = "sacar una bola que no sea verde".

a) Escribe el espacio muestral.

b) Halla los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.

c) Escribe los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

d) Halla los sucesos $\overline{A} \cup B$ y $A \cap \overline{B}$.

a) E = {verde, amarillo, rosa, morado, rojo, naranja, azul}

b) En el suceso $A \cup B$ se ha de verificar *A* o *B*, es decir, sacar una bola roja o sacar una bola que no sea verde.

$A \cup B$ = {amarillo, rosa, morado, rojo, naranja, azul}

En el suceso $A \cap B$ se ha de verificar *A* y *B*, es decir, sacar una bola roja y que a la vez no sea verde.

$A \cap B$ = {rojo}

c) El suceso contrario de *A*, $\overline{A}$, se verifica cuando no se da *A*, es decir, cuando sacamos una bola que no sea roja.

$\overline{A}$ = {verde, amarillo, rosa, morado, naranja, azul}

El suceso contrario de *B*, $\overline{B}$, se verifica cuando no se verifica *B*, es decir, cuando sacamos una bola verde.

$\overline{B}$ = {verde}

d) En el suceso $\overline{A} \cup B$ se ha de verificar $\overline{A}$ o *B*, es decir, sacar una bola que no sea roja o sacar una bola que no sea verde. Se tiene que el suceso $\overline{A} \cup B$ coincide con el espacio muestral.

$\overline{A} \cup B = E$

En el suceso $A \cap \overline{B}$ se ha de verificar A y $\overline{B}$, es decir, sacar una bola roja y sacar una bola verde. Esto no es posible, por lo que $A \cap \overline{B}$ es un suceso imposible.

$A \cap \overline{B} = \varnothing$

15. En el experimento de lanzar un dado cúbico consideramos los sucesos:

***A* = "salir un número par"** **C = {1, 2, 5}**

***B* = "salir un número menor que 3"** **D = {3}**

Halla:

a) $A \cup B$ **c)** $B \cup C$ **e)** $\overline{B}$

b) $A \cap C$ **d)** $C \cap D$ **f)** $\overline{C \cup D}$

a) $A \cup B$ = {1, 2, 4, 6}

b) $A \cap C$ = {2}

c) $B \cup C$ = {1, 2, 5}

d) $C \cap D = \varnothing$

e) $\overline{B}$ = {3, 4, 5, 6}

f) $C \cup D$ = {1, 2, 3, 5} $\Rightarrow$ $\overline{C \cup D}$ = {4, 6}

16. Indica, a partir de los sucesos del ejercicio anterior, si son compatibles o incompatibles los sucesos:

a) *A* y *B* **b) *A* y *C*** **c) *C* y *D***

a) $A \cap B$ = {2} $\Rightarrow$ Sucesos compatibles

b) $A \cap C$ = {2} $\Rightarrow$ Sucesos compatibles

c) $C \cap D = \varnothing$ $\Rightarrow$ Sucesos incompatibles

17. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Consideramos los sucesos:

A = “sacar un as”
B = “sacar un oro”
C = “sacar una carta menor que 4”

a) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.

b) Describe los sucesos $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

c) Describe los sucesos $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$.

a) $A \cup B$ = “sacar un as o sacar un oro”
$A \cup C$ = “sacar un as o sacar una carta menor que 4” = “sacar una carta menor que 4”
$B \cup C$ = “sacar un oro o sacar una carta menor que 4”

b) $A \cap B$ = “sacar un as y sacar un oro” = “sacar el as de oros”
$A \cap C$ = “sacar un as y sacar una carta menor que 4” = “sacar un as”
$B \cap C$ = “sacar un oro y sacar una carta menor que 4” = “sacar un oro menor que 4”

c) $\overline{A}$ = “sacar una carta que no sea un as”
$\overline{B}$ = “sacar una carta que no sea de oros” = “sacar una carta de espadas, bastos o copas”
$\overline{C}$ = “sacar una carta mayor o igual que 4”

18. Lanzamos un dado dodecaédrico y miramos el número de la cara superior. Describe los sucesos siguientes:

a) “Salir un múltiplo de 4”

b) “Salir un número primo”

c) “Salir múltiplo de 5 o par”

d) “Salir múltiplo de 5 y par”

Como lanzamos un dado dodecaédrico, el espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

a) {4, 8, 12}

b) {2, 3, 5, 7, 11}

c) {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12}

d) {10}

19. Se elige al azar un número entre el 1 y el 50.

a) Indica los elementos de los sucesos:
A = “salir múltiplo de 5”
B = “salir un número que empieza por 3”
C = “salir un número terminado en 0”

b) Escribe los elementos de los sucesos $A \cap B$, $A \cap C$ y $A \cup C$.

c) ¿Son compatibles los sucesos *A* y *B*? ¿Y los sucesos *A* y *C*?

a) A = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}
B = {3, 30}
C = {10, 20, 30, 40, 50}

b) $A \cap B$ = {30}
$A \cap C$ = {10, 20, 30, 40, 50} = C
$A \cup C$ = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50} = A

c) A y B son sucesos compatibles, puesto que hemos visto en el apartado anterior que $A \cap B \neq \emptyset$.
A y C son sucesos compatibles, puesto que hemos visto en el apartado anterior que $A \cap C \neq \emptyset$.

20. Actividad resuelta.

21. En un cuadrado de lado 2 dm se coloca una diana de radio 1 dm. Se han efectuado 500 disparos con estos resultados: 386 han dado en la diana y el resto han dado fuera.

a) Asigna la probabilidad de acertar en la diana.

b) Si las dimensiones del círculo grande y el cuadrado fueran mayores, ¿habría más probabilidad de acertar?

a) Para asignar la probabilidad de acertar en la diana vamos a considerar como casos posibles todos los disparos efectuados, 500, y como casos favorables, aquellos disparos que han dado en la diana, 386.

$P(\text{diana}) = \frac{386}{500} = 0{,}772$

b) En el caso que nos ocupa, para calcular la probabilidad de acertar en la diana debemos hallar el cociente entre el área de la diana y el área del cuadrado.

Área de la diana = $\pi \cdot 1^2 = \pi$ dm^2

Área del cuadrado = $2^2 = 4$ dm^2

$P(\text{diana}) = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$

Supongamos, en general, que el cuadrado tiene de lado una longitud L dm, mientras que la diana tiene un radio de longitud $r = \frac{L}{2}$.

Área de la diana = $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot L^2}{4}$ dm^2

Área del cuadrado = L^2 dm^2

Por tanto, considerando de nuevo la probabilidad de dar en la diana como el cociente entre el área de la diana y el área del cuadrado, tenemos que $P(\text{diana}) = \frac{\frac{\pi \cdot L^2}{4}}{L^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$.

Esto nos permite concluir que si modificamos las dimensiones de la diana y del cuadrado, pero el cuadrado continúa circunscribiendo a la diana, la probabilidad de acertar en la diana no cambia.

22. Actividad resuelta.

23. De una baraja española se extrae una carta. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Un tres.

b) El rey de bastos.

c) Un rey que no sea de bastos.

d) Una sota o un caballo.

Vamos a considerar la baraja española de 40 cartas, por lo que tenemos 40 casos posibles.

a) Como tenemos un tres por cada palo de la baraja, nuestros casos favorables son cuatro.

$P(\text{tres}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

b) En la baraja española hay un único rey de bastos.

$P(\text{rey de bastos}) = \frac{1}{40} = 0{,}025$

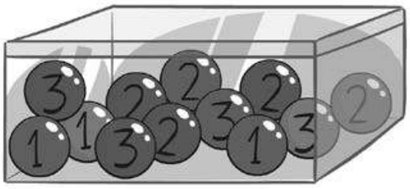
c) Sabemos que hay tres reyes que no son de bastos: el rey de copas, el de espadas y el de oros.

$P(\text{rey que no sea de bastos}) = \frac{3}{40} = 0{,}075$

d) En la baraja española hay cuatro sotas, una por cada palo, y cuatro caballos, también uno por cada palo. Por tanto, nuestros casos favorables son ocho.

$P(\text{sota o caballo}) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

24. Se extrae una bola de la siguiente urna.



Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) La bola es verde.

b) La bola no es roja.

c) La bola es verde o azul.

d) La bola no tiene el número 2.

e) La bola es roja y tiene el número 1.

a) Observando la urna, vemos que hay 12 bolas, de las cuales 4 son verdes.

$P(\text{verde}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0{,}333$

b) De las 12 bolas que contiene la urna, hay 4 bolas verdes y 3 bolas azules, por lo que tenemos 7 bolas que no son rojas.

$P(\text{no roja}) = \frac{7}{12} = 0{,}583$

c) Puesto que en la urna solo hay bolas de color rojo, verde o azul, considerar las bolas de color verde o azul es lo mismo que considerar las que no son rojas. Por tanto, la probabilidad de sacar una bola verde o azul es la misma que la de sacar una bola no roja (apartado b).

$P(\text{verde o azul}) = P(\text{no roja}) = 0{,}583$

d) De las 12 bolas que hay en la urna, 7 de ellas tienen un número distinto al 2.

$P(\text{no 2}) = \frac{7}{12} = 0{,}583$

e) Ninguna de las bolas de la urna es roja y tiene el número 1. Por tanto, el número de casos favorables es 0.

$P(\text{roja y 1}) = \frac{0}{12} = 0$

Para resolver este apartado, también podemos observar que estamos ante un suceso imposible, por lo que su probabilidad es 0.

25. Se lanza un dado de ocho caras numeradas del 1 al 8.

a) ¿Qué probabilidad hay de sacar un número par?

b) ¿Qué probabilidad hay de obtener un número primo?

c) ¿Qué es más probable, obtener un múltiplo de 2 o un múltiplo de 3?

El número de casos posibles coincide con el número de caras, es decir, ocho.

a) Los números pares que aparecen en las caras del dado son {2, 4, 6, 8}, por lo que tenemos cuatro casos favorables.

$P(\text{par}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b) Los números primos de las caras de los dados son {2, 3, 5, 7}, obteniendo de nuevo cuatro casos favorables.

$P(\text{primo}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

c) Los múltiplos de 2 son {2, 4, 6, 8}, mientras que los múltiplos de 3 son {3, 6}.

$P(\text{múltiplo de 2}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Por tanto, es más probable obtener un múltiplo de 2 que un múltiplo de 3.

26. En un juego para dos jugadores, Elsa y Benito lanzan dos dados y se anota su suma. Elsa gana si la suma sale un número par y Benito si sale un número impar.

a) ¿Es justo el juego?

b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?

c) Calcula las probabilidades de cada uno si en lugar de sumar los resultados de los dados los multiplican, y Elsa sigue apostando a que sale par y Benito a que sale impar.

a) Para determinar si el juego es justo, vamos a calcular el espacio muestral del experimento aleatorio y los casos favorables a Elsa y a Benito.

Suma	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Así, el espacio muestral es $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Los casos favorables a Elsa son {2, 4, 6, 8, 10, 12}, mientras que los de Benito son {3, 5, 7, 9, 11}. Como el número de casos favorables de Elsa son seis, mientras que los casos favorables de Benito son cinco, el juego no es justo, puesto que Elsa tiene mayor probabilidad de ganar que Benito.

b) $P(\text{gana Elsa}) = \frac{6}{11} = 0{,}545$ $\qquad$ $P(\text{gana Benito}) = \frac{5}{11} = 0{,}455$

c) Determinemos ahora el espacio muestral en el caso de multiplicar los resultados de los dados.

Multiplicación	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$.

Como Elsa sigue apostando a que sale par, sus casos favorables son {2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30, 36}, mientras que los favorables a Benito son {1, 3, 5, 9, 15, 25}.

$P(\text{gana Elsa}) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} = 0{,}667$ $\qquad$ $P(\text{gana Benito}) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} = 0{,}333$

27. Actividad resuelta.

28. De los experimentos siguientes, indica los que son aleatorios y escribe su espacio muestral.

a) Medir el tiempo que tarda una canica en llegar al suelo.

b) Lanzar una moneda de 20 céntimos de euro a un tablero de ajedrez y anotar si toca o no alguna línea.

c) Extraer una carta de una baraja española y mirar su número.

d) Indicar el número de litros de pintura necesarios para pintar tu habitación.

a) Experimento determinista, puesto que aplicando las leyes de la física se puede calcular el tiempo que tarda la canica en llegar al suelo.

b) Experimento aleatorio. E = {Sí, No}

c) Experimento aleatorio. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$

d) Experimento determinista. Conociendo las dimensiones de la habitación, se puede determinar el número de litros necesarios para pintarla.

29. En la lotería nacional, los números van del 00000 al 99999. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles no:

a) Es más difícil que salga el 44444 que el 32578.

b) Es más difícil que salga un número que tenga todas las cifras iguales que uno que tenga todas diferentes.

c) Es preferible comprar un número grande como el 54980 antes que uno pequeño como el 00232.

d) Salen más veces los números que terminan en 5.

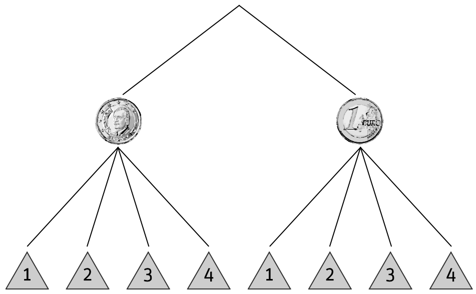
a) Falsa. Todos los números tienen la misma probabilidad de salir.

b) Falsa. Todos los números tienen la misma probabilidad de salir.

c) Falsa. Tienen la misma probabilidad de salir los números grandes que los pequeños.

d) Falsa. La probabilidad de que salga un número que acaba en 5 es la misma que la de cualquier otro número.

30. Se lanzan al aire una moneda y un dado tetraédrico.



a) Observa el diagrama de árbol y escribe el espacio muestral. ¿Cuántos elementos tiene?

b) Escribe los elementos del suceso “salir cara y número impar”.

c) Escribe los elementos del suceso “salir un 6”.

a) E = {C1, C2, C3, C4, X1, X2, X3, X4}. El espacio muestral tiene ocho elementos.

b) “Sacar cara y número impar” = {C1, C3}

c) Se trata de un suceso imposible, $\varnothing$, puesto que en este experimento nunca puede salir un 6.

31. Se lanzan dos dados de ocho caras y se suman los resultados.

a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

b) Escribe los elementos del suceso *A* = “sumar 10”.

a) Construyamos una tabla de doble entrada para determinar los resultados que se obtienen en este experimento.

Suma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

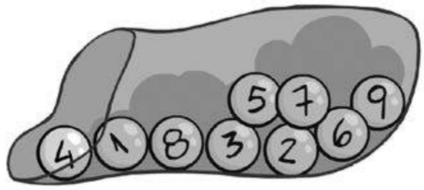
El espacio muestral es E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}. Por tanto, en este experimento se pueden obtener 15 resultados distintos.

b) Los elementos del suceso A = “sumar 10” son los que aparecen en rojo en la tabla anterior.

{(2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2)}

32. **Actividad resuelta.**

33. **Una bolsa contiene las siguientes bolas.**



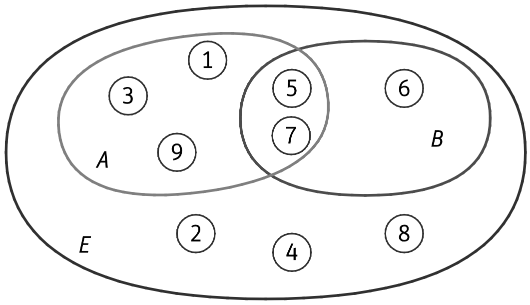
Consideramos los siguientes sucesos:

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{5, 6, 7\}$

Escribe los elementos de los siguientes sucesos con ayuda de diagramas de Venn:

a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $\overline{A}$ **d)** $\overline{B}$



a) $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

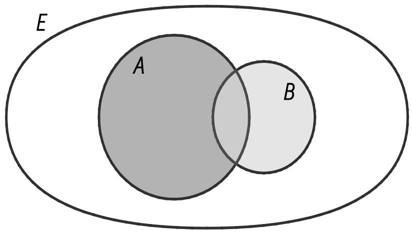
b) $A \cap B = \{5, 7\}$

c) $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

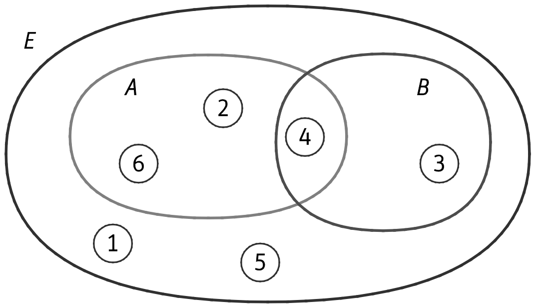
d) $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$

34. **Lanzamos un dado y consideramos los sucesos A = "salir número par" y $B = \{3, 4\}$.**

Dibuja en tu cuaderno las siguientes regiones del diagrama de Venn, coloca los números e indica los elementos que forman los sucesos.



a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $\overline{A}$ **d)** $A \cap \overline{B}$



a) $A \cap B = \{4\}$

b) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

c) $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$

d) $A = \{2, 4, 6\}$, $\overline{B} = \{1, 2, 5, 6\}$, $A \cap \overline{B} = \{2, 6\}$

35. **Se escriben en cinco papeles las letras de la palabra Paris, se meten en una bolsa y se extraen al azar.**

P	**A**	**R**	**I**	**S**

a) **Escribe los sucesos elementales.**

b) **Describe el suceso "sacar consonante".**

c) **Describe un suceso imposible.**

d) **Describe un suceso seguro.**

a) Sucesos elementales: {P}, {A}, {R}, {I}, {S}

b) "Sacar consonante" = {P, R, S}

c) "Sacar la letra D"

d) Suceso seguro: E = {P, A, R, I, S}

36. Se lanza una bola en una ruleta de 36 números, numerados del 1 al 36. Describe los siguientes sucesos:

a) *A* = "Salir par y múltiplo de 6".

b) *B* = "Salir primo o múltiplo de 5".

c) *C* = "Salir lo contrario que en B".

a) A = {6, 12, 18, 24, 30, 36}

b) B = {2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 23, 25, 29, 30, 31, 35}

c) $C = \overline{B}$ = {1, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 36}

37. Se lanza un dado icosaédrico. Escribe los elementos de los siguientes sucesos:

a) Salir un múltiplo de 3.

b) Salir múltiplo de 3 y par.

c) Salir múltiplo de 3 o par.

d) Salir un número mayor que 13.

Puesto que se lanza un dado icosaédrico, los elementos del espacio muestral son los números del 1 al 20.

a) {3, 6, 9, 12, 15, 18}

b) {6, 12, 18}

c) {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

d) {14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

38. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se consideran los sucesos:

***A* = "obtener una carta de oros"**

***B* = "obtener una sota"**

***C* = "obtener un tres"**

Di si son compatibles o incompatibles los sucesos:

a) *A* y *B* **b) *A* y *C*** **c) *A*, *B* y *C***

a) Compatibles, puesto que $A \cap B$ = "obtener la sota de oros".

b) Compatibles, puesto que $A \cap C$ = "obtener el tres de oros".

c) Incompatibles, ya que $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap \varnothing = \varnothing$.

39. De una bolsa que contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8 se extrae una bola sin mirar. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) El suceso "múltiplo de 2" es incompatible con el suceso "número par".

b) Los sucesos "par" y "primo" son compatibles.

c) Los sucesos "primo" y "cuadrado perfecto" son incompatibles.

a) Falsa. A = "múltiplo de 2" = {2, 4, 6, 8} y B = "número par" = {2, 4, 6, 8}, luego $A \cap B$ = {2, 4, 6, 8}.

b) Verdadera. A = "par" = {2, 4, 6, 8} y B = {2, 3, 5, 7}, por lo que $A \cap B$ = {2}.

c) Verdadera. A = "primo" = {2, 3, 5, 7} y B = {4 = 2^2}, luego $A \cap B = \varnothing$.

40. Lanzamos un dado tetraédrico y uno cúbico y anotamos la suma de los dos.

a) ¿Cuántos elementos tendrá el espacio muestral?

b) Escribe los elementos del suceso "sumar 8".

a) Construyamos una tabla de doble entrada para determinar los resultados que se obtienen en este experimento.

Suma	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

El espacio muestral es $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Por tanto, el espacio muestral tiene nueve elementos.

b) Los elementos del suceso "sumar 8" son los que aparecen en rojo en la tabla anterior. {(2,6), (3,5), (4,4)}

41. Se extraen dos cartas de una baraja española y se mira a qué palo pertenecen. Indica cuál es el suceso contrario al suceso *A* = "salir dos cartas de copas".

A. Una es de copas y la otra no.

B. Ninguna de las dos es de copas.

C. Al menos una no es de copas.

D. Las dos son espadas.

El suceso contrario de *A* = "salir dos cartas de copas" es la respuesta C., "al menos una no es de copas". Otra manera de escribir el suceso contrario de *A* es "salir una o ninguna carta de copas".

42. Emprende

Elegid, entre toda la clase, un tema de interés común:

- **Serie de televisión favorita.**
- **Red social favorita.**
- **Etc…**

Diseñad, por grupos, una encuesta en torno al tema elegido para realizarla entre los alumnos del instituto.

a) Hallad las frecuencias relativas.

b) Comparad los resultados obtenidos entre los grupos. Si se elige un alumno del instituto al azar, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca a cada una de las opciones? ¿Se diferencia mucho el resultado en cada grupo?

Respuesta libre.

43. Se ha lanzado un dado 100 veces y se han obtenido los siguientes resultados.

Cara	1	2	3	4	5	6
Frecuencia absoluta	**19**	**18**	**16**	**18**	**16**	**13**

Calcula la frecuencia relativa de los sucesos:

a) *A* = "obtener múltiplo de 3".

b) *B* = "sacar menos de 3".

c) *C* = "no sacar un 5".

d) *D* = "no sacar ni 5 ni 6"

a) Frecuencia relativa *A*: $\frac{16}{100}+\frac{13}{100}=\frac{29}{100}=0,29$

b) Frecuencia relativa *B*: $\frac{19}{100}+\frac{18}{100}=\frac{37}{100}=0,37$

c) Frecuencia relativa *C*: $\frac{19}{100}+\frac{18}{100}+\frac{16}{100}+\frac{18}{100}+\frac{13}{100}=\frac{84}{100}=0,84$

d) Frecuencia relativa *D*: $\frac{19}{100}+\frac{18}{100}+\frac{16}{100}+\frac{18}{100}=\frac{71}{100}=0,71$

44. En una empresa que fabrica tornillos realizan un control de producción recogiendo 600 tornillos cada día de la semana y comprueban los que salen defectuosos:

Día	L	M	X	J	V
Defectuosos	12	9	7	11	10

a) Halla la frecuencia relativa de los tornillos defectuosos de cada día.

b) Halla la frecuencia relativa de los tornillos defectuosos a lo largo de la semana.

c) Si elegimos al azar uno de los tornillos fabricados en la semana, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

a)

Día	L	M	X	J	V
Frecuencia relativa	$\frac{12}{600}=0{,}02$	$\frac{9}{600}=0{,}015$	$\frac{7}{600}=0{,}0117$	$\frac{11}{600}=0{,}0183$	$\frac{10}{600}=0{,}0167$

b) Para calcular la frecuencia relativa de los tornillos defectuosos de toda la semana hallaremos el cociente entre el número total de tornillos defectuosos y el número total de tornillos seleccionados.

$$\frac{12+9+7+11+10}{5\cdot 600}=\frac{49}{3000}=0{,}0163$$

c) La probabilidad de que un tornillo fabricado a lo largo de la semana sea defectuoso coincide con la frecuencia relativa de los tornillos defectuosos a lo largo de la semana, es decir, 0,0163.

45. Se sospecha que una moneda está trucada. Los resultados de obtener cara y cruz en sucesivos lanzamientos han sido:

Lanzamientos	10	20	40	80	120
N.º de cruces	5	9	16	26	52

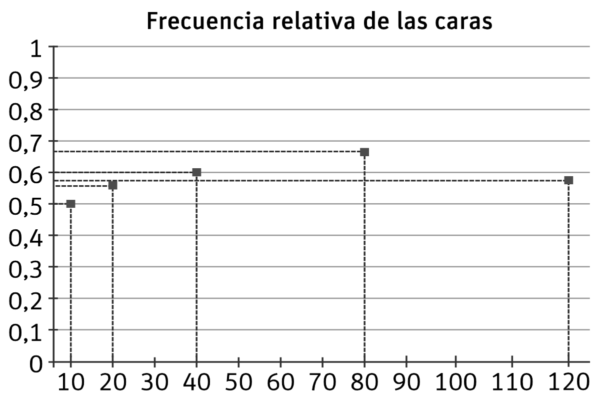
a) Representa en unos ejes cartesianos la frecuencia relativa de las caras respecto del número de lanzamientos.

b) ¿Cuál sería la probabilidad de "salir cara"?

c) ¿Está trucada la moneda?

a)

Lanzamientos	10	20	40	80	120
N.º de cruces	5	9	16	26	52
N.º de caras	5	11	24	54	68
Frecuencia relativa (caras)	$\frac{5}{10}=0{,}5$	$\frac{11}{20}=0{,}55$	$\frac{24}{40}=0{,}6$	$\frac{54}{80}=0{,}675$	$\frac{68}{120}=0{,}567$



b) Si repitiéramos el experimento indefinidamente, parece que la frecuencia relativa de las caras tendería a 0,6. Por tanto, la probabilidad de "salir cara" es 0,6.

c) Sí, la moneda está trucada porque la frecuencia de "salir cara" en una moneda no trucada es 0,5.

46. Actividad resuelta.

47. En una excursión viajan 50 personas. Los que llevan paraguas no llevan chubasquero y los que llevan chubasquero no llevan paraguas. Se elige una persona al azar.

Si 22 personas llevan paraguas, ¿qué probabilidad hay de haber elegido una que lleve chubasquero?

El número de personas que llevan chubasquero coincide con el de las personas que no llevan paraguas.

50 – 22 = 28 personas llevan chubasquero.

Por tanto, para calcular la probabilidad de haber elegido una persona que lleve chubasquero tenemos 28 casos favorables de 50 casos posibles.

$P(\text{chubasquero}) = \frac{28}{50} = 0{,}56$

48. Tenemos 25 fichas numeradas del 1 al 25. Se extrae una al azar. Calcula las probabilidades de que:

a) Sea impar.

b) Sea mayor que 7 y menor que 23.

c) Sea múltiplo de 3 o menor que 7.

d) Sea múltiplo de 3 y menor que 7.

En este experimento aleatorio, el número de casos posibles es 25.

a) Casos favorables: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25}

$P(\text{impar}) = \frac{13}{25} = 0{,}52$

b) Casos favorables: {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22}

$P(\text{mayor que 7 y menor que 23}) = \frac{15}{25} = 0{,}6$

c) Casos favorables: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24}

$P(\text{múltiplo de 3 o menor que 7}) = \frac{12}{25} = 0{,}48$

d) Casos favorables: {3, 6}

$P(\text{múltiplo de 3 y menor que 7}) = \frac{2}{25} = 0{,}08$

49. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Un as.

b) El rey de bastos.

c) Un rey que no sea de bastos.

d) Una figura (sota, caballo o rey).

e) Una carta que no sea de oros.

En el experimento aleatorio que nos ocupa, el número de casos posibles es 40.

a) El número de casos favorables es cuatro, ya que hay un as por cada uno de los cuatro palos de la baraja.

$P(\text{as}) = \frac{4}{40} = 0{,}1$

b) El número de casos favorables es uno, puesto que solo hay un rey de bastos en toda la baraja.

$P(\text{rey de bastos}) = \frac{1}{40} = 0{,}025$

c) En esta ocasión tenemos tres casos favorables: el rey de espadas, el de oros y el de copas.

$P(\text{rey que no sea de bastos}) = \frac{3}{40} = 0{,}075$

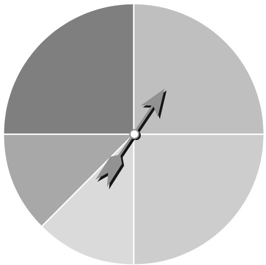
d) Como hay tres figuras por cada uno de los cuatro palos de la baraja, en total tenemos 12 casos favorables.

$P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = 0{,}3$

e) En la baraja hay 10 cartas de oros, luego tenemos 30 cartas que no lo son. Por tanto, hay 30 casos favorables.

$P(\text{carta que no sea de oros}) = \frac{30}{40} = 0{,}75$

50. En un juego de mesa se dispone de la siguiente ruleta.



Calcula las probabilidades de:

a) Que la aguja caiga en la zona amarilla.

b) Que la aguja no caiga en la zona verde.

a) La zona amarilla se corresponde con un sector circular de 45º. Por tanto, la probabilidad de que la aguja caiga en la zona amarilla es:

$$P(\text{zona amarilla}) = \frac{45}{360} = 0{,}125$$

b) La zona verde se corresponde con un sector circular de 90º, luego la zona que no es verde ocupa un sector circular de 360º – 90º = 270º. Así, la probabilidad de que la aguja no caiga en la zona verde es:

$$P(\text{no zona verde}) = \frac{270}{360} = 0{,}75$$

51. Se elige al azar un número entre 1 y 50. Calcula la probabilidad de que sea:

a) Múltiplo de 4.

b) Múltiplo de 4 y de 5.

c) Múltiplo de 5.

d) Múltiplo de 4 o de 5.

En este ejercicio, los casos posibles son 50.

a) Casos favorables: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48}

$$P(\text{múltiplo de 4}) = \frac{12}{50} = 0{,}24$$

b) Casos favorables: {20, 40}

$$P(\text{múltiplo de 4 y de 5}) = \frac{2}{50} = 0{,}04$$

c) Casos favorables: {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}

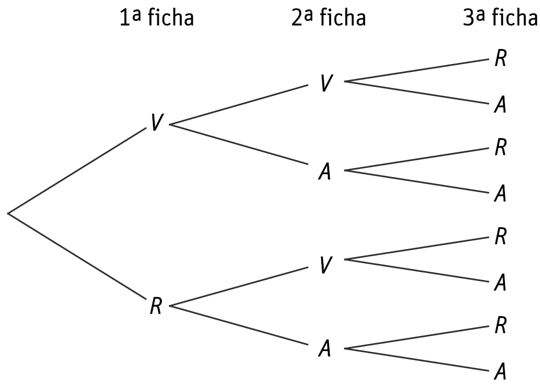
$$P(\text{múltiplo de 5}) = \frac{10}{50} = 0{,}2$$

d) Casos favorables: {4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 44, 45, 48, 50}

$$P(\text{múltiplo de 4 o de 5}) = \frac{20}{50} = 0{,}4$$

52. Actividad resuelta.

53. Dos jugadores disponen de tres fichas, una de ellas con una cara verde y la otra roja; otra, con una cara verde y la otra azul, y la tercera, con una cara roja y la otra azul. Se tiran las tres fichas a la vez. Gana el jugador 1 si coinciden los colores de dos fichas cualesquiera, gana el jugador 2 si los tres colores son diferentes. Haz un diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que gane cada jugador.



Espacio muestral: $E = \{V - V - R, V - V - A, V - A - R, V - A - A, R - V - R, R - V - A, R - A - R, R - A - A\}$

Gana el jugador 1 si coinciden los colores de dos fichas: $\{V - V - R, V - V - A, V - A - A, R - V - R, R - A - R, R - A - A\}$

$$P(\text{gana jugador 1}) = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Gana el jugador 2 si los tres colores son diferentes: $\{V - A - R, R - V - A\}$

$$P(\text{gana jugador 2}) = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

54. Razona si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes sobre la lotería.

a) Como en mi ciudad casi nunca toca, tengo más probabilidad de que me toque si la compro fuera.

b) Prefiero el número 23568 al 00027 porque los números menores que 100 nunca salen.

c) Prefiero comprar el billete los primeros días, así es seguro que aún no han vendido el gordo.

d) En los últimos sorteos que han tenido lugar ha salido el 5 más veces que el resto de los números, así que ahora no saldrá.

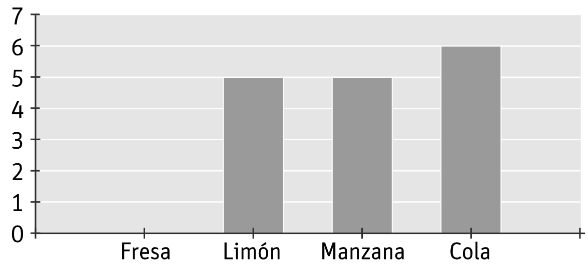
a) Falsa. Todos los números tienen la misma probabilidad de salir, con independencia del lugar en que se compren.

b) Falsa. Todos los números tienen la misma probabilidad de salir, incluidos los menores de 100.

c) Falsa. El gordo de la lotería no depende de lo pronto que se compre el billete.

d) Falsa. La probabilidad de salir un número en un sorteo no depende de que haya salido en sorteos previos.

55. La madre de Eva le deja coger un caramelo de una bolsa sin mirar. En la gráfica se puede ver el número de caramelos de cada tipo que hay en la bolsa.



Calcula las probabilidades de:

a) Que Eva saque un caramelo de fresa.

b) Que Eva saque un caramelo de limón.

c) Que Eva no saque un caramelo de manzana.

d) Que Eva no saque ningún caramelo con sabor a fruta.

Observando el diagrama de barras, podemos deducir que en la bolsa hay cinco caramelos de limón y manzana, respectivamente; seis de cola y ninguno de fresa. En total hay 5 + 5 + 6 = 16 caramelos en la bolsa.

Aplicaremos la regla de Laplace para calcular cada probabilidad.

a) $P(\text{fresa}) = \frac{0}{16} = 0$

b) $P(\text{limón}) = \frac{5}{16} = 0{,}3125$

c) $P(\text{no manzana}) = \frac{16-5}{16} = \frac{11}{16} = 0{,}6875$

d) $P(\text{no fruta}) = P(\text{cola}) = \frac{6}{16} = 0{,}375$

56. En una bolsa hay tres tarjetas con números positivos y otras tres con números negativos. Se eligen dos tarjetas al azar y se multiplican los números. Anotamos el signo del producto.

a) ¿Son equiprobables los sucesos *A* = "salir un número positivo" y *B* = "salir un número negativo"?

b) Calcula la probabilidad de que el producto sea un número positivo.

a) El espacio muestral de este experimento aleatorio es: $E = \{(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)\}$

Salir un número positivo: $A = \{(+, +), (-, -)\} \Rightarrow P(A) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$

Salir un número negativo: $B = \{(+, -), (-, +)\} \Rightarrow P(B) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$

Por tanto, los sucesos *A* y *B* son equiprobables.

b) La probabilidad de que el producto sea un número positivo es 0,5.

57. En un experimento aleatorio sabemos que *P*(*A*) = 0,6 y *P*(*B*) = 0,5. ¿Son *A* y *B* sucesos compatibles o incompatibles?

En el cálculo de probabilidades es muy conocida la siguiente fórmula, que nos proporciona la probabilidad de la unión de dos sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso que nos ocupa, sabemos que $P(A) = 0{,}6$ y $P(B) = 0{,}5$, por lo que sustituyendo en la anterior fórmula tenemos que:

$$P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - P(A \cap B) = 1{,}1 - P(A \cap B)$$

Ahora bien, como la probabilidad de un suceso nunca puede ser mayor que 1, es necesario que $P(A \cap B) \geq 0{,}1$, lo que nos permite concluir que $A \cap B \neq \varnothing$, quedando así probado que los sucesos *A* y *B* son compatibles.

58. Una fábrica de bombillas tiene dos máquinas. La máquina *A* produce cuatro bombillas defectuosas cada 250 bombillas fabricadas. El número de bombillas defectuosas que produce la máquina *B* es de seis por cada 400 fabricadas.

Clara tiene una bombilla que funciona. ¿Con qué máquina es más probable que se haya fabricado?

Máquina *A*:

Bombillas no defectuosas: 250 – 4 = 246

$P(\text{no defectuosa en A}) = \dfrac{246}{250} = 0{,}984$

Máquina *B*:

Bombillas no defectuosas: 400 – 6 = 394

$P(\text{no defectuosa en B}) = \dfrac{394}{400} = 0{,}985$

Por tanto, es ligeramente más probable que la bombilla de Clara haya sido fabricada por la máquina *B*.

59. Roberto ha respondido al azar cuatro preguntas de verdadero o falso del examen que está realizando.

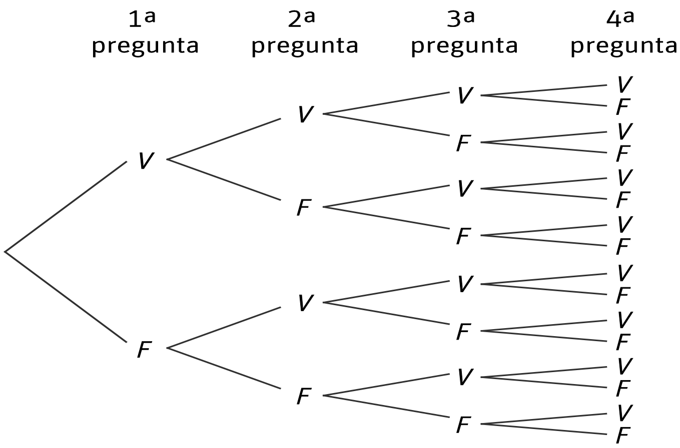
a) Escribe el espacio muestral que se corresponde con las respuestas de las preguntas. Ayúdate de un diagrama de árbol.

b) Escribe el espacio muestral del suceso *A* = “responder falso solo a una de las cuatro preguntas”.

c) Escribe el espacio muestral del suceso *B* = “responder verdadero al menos a tres preguntas”.

d) Calcula la unión y la intersección de *A* y *B*.

a)



E = {*VVVV*, *VVVF*, *VVFV*, *VVFF*, *VFVV*, *VFVF*, *VFFV*, *VFFF*, *FVVV*, *FVVF*, *FVFV*, *FVFF*, *FFVV*, *FFVF*, *FFFV*, *FFFF*}

b) *A* = {*VVVF*, *VVFV*, *VFVV*, *FVVV*}

c) *B* = {*VVVV*, *VVVF*, *VVFV*, *VFVV*, *FVVV*}

d) $A \cup B$ = {*VVVV*, *VVVF*, *VVFV*, *VFVV*, *FVVV*} = *B*

$A \cap B$ = {*VVVF*, *VVFV*, *VFVV*, *FVVV*} = *A*

60. Carla y Jesús juegan con unos dados cúbicos en cuyas caras están escritos los seis primeros números primos. Jesús propone el siguiente juego:

“Lancemos los dados hasta que el producto sea 6 o 49. Si sale 49, ganas tú, y si sale 6, gano yo”.

Carla no acepta las condiciones del juego. ¿Por qué crees que lo hace? Justifica la respuesta.

Cada dado tiene escritos los seis primeros números primos en sus caras, es decir, 2, 3, 5, 7, 11 y 13.

Para que el producto de los dos dados sea 49, solo tenemos una posibilidad, y es obtener el par (7,7), puesto que $7 \cdot 7 = 49$. Sin embargo, para que el producto de los dados sea 6 tenemos dos opciones, que salga (2,3) o bien (3,2), ya que $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$. Así, hay el doble de posibilidades de que el producto de los dados sea 6 que 49.

Por este motivo, Carla no acepta el juego, ya que Jesús tiene el doble de probabilidad que ella de ganar.

61. Una urna contiene 100 bolas numeradas del 00 al 99. Se extrae una al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) La suma de las cifras sea 8.

b) El producto de las cifras sea menor que 10.

El número de casos posibles en esta actividad es 100.

a) Cada una de las cifras que forman los números toma valores entre el 0 y el 9, por lo que vamos a construir una tabla de doble entrada en la que calcularemos la suma de dichas cifras.

Suma	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Por tanto, la suma de las cifras vale 8 cuando se extraen los números 08, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71 y 80.

$$P(\text{suma} = 8) = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

b) Construimos ahora otra tabla de doble entrada con el producto de las cifras de cada número.

Producto	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Así, el producto de las cifras es menor que 10 en los 42 casos marcados en rojo en la tabla anterior.

$$P(\text{producto menor que } 10) = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

62. En una urna tenemos tres bolas negras y cinco blancas. ¿Cuántas bolas rojas hay que añadir a la urna para que la probabilidad de sacar una bola negra sea 0,20?

A. 2 **B. 5** **C. 7** **D. 10**

Llamamos x al número de bolas rojas que debemos añadir a la urna para que la probabilidad de sacar una bola negra sea 0,20. Además, el número de bolas negras es 3, mientras que el número total de bolas es $3 + 5 + x = 8 + x$. Por tanto, aplicando la regla de Laplace, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(\text{negra}) = \dfrac{3}{8+x} \\ P(\text{negra}) = 0{,}2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{8+x} = 0{,}2 \Rightarrow 3 = 1{,}6 + 0{,}2x \Rightarrow x = \frac{3-1{,}6}{0{,}2} = 7$$

Así, necesitamos añadir siete bolas rojas, es decir, la opción correcta es la C.

63. El porcentaje de aciertos de un jugador de baloncesto en lanzamientos de tiros libres es del 80 %. Si lanza tres tiros seguidos, la probabilidad de acertar dos y fallar uno es:

A. 0,384 **B. 0,128** **C. 0,512** **D. 0,820**

Sabemos que la probabilidad de acertar es 0,8, por lo que la probabilidad de fallar es 1 – 0,8 = 0,2.

Por otro lado, vamos a denotar mediante *A* el suceso "anotar la canasta", y mediante *F*, el suceso "fallar la canasta". Así, las posibilidades que tenemos de que anote dos canastas y falle una son *AAF*, *AFA* y *FAA.*

Por tanto, la probabilidad de las tres opciones que tenemos es:

$$\left.\begin{array}{l} P(AAF) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}128 \\ P(AFA) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}128 \\ P(FAA) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}128 \end{array}\right\} \Rightarrow P(AAF, AFA, FAA) = 0{,}128 + 0{,}128 + 0{,}128 = 0{,}384$$

Luego la solución es la A.

64. El guardián del laberinto me deja entrar si al lanzar un dado cúbico saco el doble de puntos que él o más. ¿Qué probabilidad tengo de entrar?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{2}{9}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$

En función de los resultados que obtenga el guardián al lanzar el dado, las posibilidades que tengo de obtener el doble de puntuación que él o más son:

Guardián	Yo
1	2, 3, 4, 5, 6 (cinco posibilidades)
2	4, 5, 6 (tres posibilidades)
3	6 (una posibilidad)
4	No hay posibilidad de obtener el doble o más puntuación.
5	No hay posibilidad de obtener el doble o más puntuación.
6	No hay posibilidad de obtener el doble o más puntuación.

Por cada número que obtiene el guardián, yo tengo seis posibles resultados al lanzar el dado. Así, el número de casos posibles es 6 · 6 = 36. Sin embargo, observando las posibilidades que tengo de obtener el doble o más puntos que él, tengo nueve casos favorables. Por tanto, aplicando Laplace, la probabilidad es: $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Por lo que la opción correcta es la C.

65. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar cuatro monedas el número de caras sea mayor que el número de cruces?

A. $\frac{11}{16}$ **B.** $\frac{5}{8}$ **C.** $\frac{5}{16}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Puesto que al lanzar cada una de las monedas se puede obtener cara o cruz (dos resultados), tenemos que el número de casos posibles es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

Para determinar el número de casos favorables, vamos a identificar los casos en los que el número de caras es mayor que el número de cruces:

{CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCCC}

Por tanto, los casos favorables son cinco, y aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al lanzar cuatro monedas el número de caras sea mayor que el número de cruces es $\frac{5}{16}$.

La solución es la C.

66. En una bolsa con seis bolas, numeradas del 1 al 6, sacamos dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los números obtenidos difieran en 1?

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Si sacamos una bola, el número de casos posibles es seis. Ahora bien, si sacamos dos bolas al azar y sin reposición, tenemos seis posibilidades para una de ellas y cinco posibilidades para la otra, por lo que el número total de casos posibles es $6 \cdot 5 = 30$.

Tratemos de identificar ahora los casos en los que los números obtenidos difieren en 1:

$$\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)\}$$

Luego los casos favorables son 10, por lo que aplicando la regla de Laplace, la probabilidad solicitada es $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

La opción correcta es la D.

67. Las caras de un dado tetraédrico están numeradas con 1, 2, 2, 3, y las de otro, con 2, 3, 3, 4. Los tiramos. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números de las caras superiores sea par?

A. $\frac{11}{16}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{13}{16}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Como cada uno de los dados tiene cuatro caras y se tiran dos dados, el número de casos posibles es $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$. Veamos ahora cuáles son los casos en los que el producto de los dados es par:

$$\{(1,2), (1,4), (2,2), (2,3), (2,3), (2,4), (2,2), (2,3), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4)\}$$

Por tanto, los casos favorables son 12 y la probabilidad que nos piden es $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

La solución es la opción B.

Encuentra el error.

68. Al tirar un dado, la probabilidad de cada resultado es de $\frac{1}{6}$. Carmen y Teresa disponen de estos tres dados. El dado rojo tiene cinco caras con un cuatro y una cara con un uno; el dado verde, tres doses y tres cincos, y el dado azul, cinco treses y un seis. Como en los dados normales, sus caras suman 21. Juegan a escoger un dado de manera que gana el que obtiene mayor número. Teresa, que elige primero, escoge el dado verde. Carmen está convencida de que para ganar a Teresa tiene que elegir el dado azul. ¿Está en lo cierto Carmen?

Dado rojo: $\{4, 4, 4, 4, 4, 1\} \Rightarrow P(4) = \frac{5}{6}$, $P(1) = \frac{1}{6}$

Dado verde: $\{2, 2, 2, 5, 5, 5\} \Rightarrow P(2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dado azul: $\{3, 3, 3, 3, 3, 6\} \Rightarrow P(3) = \frac{5}{6}$, $P(6) = \frac{1}{6}$

Vamos a estudiar ahora, en función de los números que puede sacar Teresa con el dado verde, las opciones que tiene Carmen de ganar dependiendo de si elige el dado azul o el dado rojo.

TERESA	CARMEN	CARMEN
Verde	**Azul**	**Rojo**
Saca 2	Gana siempre	Gana el 4
Saca 5	Gana el 6	Pierde siempre

A la vista de esta tabla y conociendo las probabilidades de obtener cada uno de los números, vamos a calcular la probabilidad de que gane Carmen con el dado azul y con el dado rojo, respectivamente.

P(gana Carmen con el dado azul) = $P(2) \cdot P$(gana siempre) + $P(5) \cdot P(6)$ = $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$

P(gana Carmen con el dado rojo) = $P(2) \cdot P(4) + P(5) \cdot P$(pierde siempre) = $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{5}{12}$

Por tanto, Carmen ha hecho una buena elección al escoger el dado azul.

Sin embargo, el error se encuentra en que al inicio de la actividad se indica que la probabilidad de cada resultado en un dado cúbico es de $\frac{1}{6}$, y en el caso que nos ocupa esto no es cierto debido a que hay varias caras en cada dado que tienen el mismo número.

PONTE A PRUEBA

Nivel de Inglés

Problema resuelto

Juego para dos jugadores. ¿Y el ganador es…?

Disponemos de tres ruletas con los números del 1 al 9.

El primer jugador elige una de las tres ruletas, la hace girar y anota el número que ha salido. El segundo jugador elige una de las dos ruletas que quedan y hace lo mismo. Gana el que obtiene el número mayor.

1. ¿Crees que los dos jugadores tienen las mismas probabilidades de ganar?

Vamos a estudiar la probabilidad de que gane el segundo jugador dependiendo de la ruleta que ha elegido el primero de ellos.

PRIMER JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR
Ruleta verde (3-5-7)	**Ruleta azul (1-6-8)**	**Ruleta roja (2-4-9)**
Saca 3	Gana 6 y 8	Gana 4 y 9
Saca 5	Gana 6 y 8	Gana 9
Saca 7	Gana 8	Gana 9

Ahora, sabiendo que la probabilidad de que salga cada número en cada ruleta es de $\frac{1}{3}$, en el caso en que el primer jugador haya elegido la ruleta verde, la probabilidad de que gane el segundo jugador eligiendo cada una de las otras dos ruletas es:

- $P(\text{gana ruleta azul}) = P(3) \cdot P(6 \text{ u } 8) + P(5) \cdot P(6 \text{ u } 8) + P(7) \cdot P(8) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$
- $P(\text{gana ruleta roja}) = P(3) \cdot P(4 \text{ o } 9) + P(5) \cdot P(9) + P(7) \cdot P(9) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

PRIMER JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR
Ruleta azul (1-6-8)	**Ruleta verde (3-5-7)**	**Ruleta roja (2-4-9)**
Saca 1	Gana siempre	Gana siempre
Saca 6	Gana 7	Gana 9
Saca 8	Pierde siempre	Gana 9

En el caso en que el primer jugador haya elegido la ruleta azul, la probabilidad de que gane el segundo jugador eligiendo cada una de las otras dos ruletas es:

- $P(\text{gana ruleta verde}) = P(1) \cdot P(\text{gana siempre}) + P(6) \cdot P(7) + P(8) \cdot P(\text{pierde siempre}) =$
  $= \frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{4}{9}$
- $P(\text{gana ruleta roja}) = P(1) \cdot P(\text{gana siempre}) + P(6) \cdot P(9) + P(8) \cdot P(9) = \frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

PRIMER JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR
Ruleta roja (2-4-9)	**Ruleta azul (1-6-8)**	**Ruleta verde (3-5-7)**
Saca 2	Gana 6 y 8	Gana siempre
Saca 4	Gana 6 y 8	Gana 5 y 7
Saca 9	Pierde siempre	Pierde siempre

En este último caso, si el primer jugador elige la ruleta roja, la probabilidad de que gane el segundo jugador escogiendo cualquiera de las otras dos ruletas es:

- $P(\text{gana ruleta azul}) = P(2) \cdot P(6 \text{ u } 8) + P(4) \cdot P(6 \text{ u } 8) + P(9) \cdot P(\text{pierde siempre}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{4}{9}$
- $P(\text{gana ruleta verde}) = P(2) \cdot P(\text{gana siempre}) + P(4) \cdot P(5 \text{ o } 7) + P(9) \cdot P(\text{pierde siempre}) =$
  $= \frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{5}{9}$

Analizando el estudio hecho anteriormente, el segundo jugador tiene ventaja sobre el primero. Dependiendo de la ruleta que haya elegido el primer jugador, el segundo puede seleccionar la ruleta cuya probabilidad de ganar es $\frac{5}{9}$, en cuyo caso la probabilidad de ganar el primer jugador es de $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

2. ¿Qué prefieres: ser el primer jugador o el segundo?

El segundo jugador.

3. Si eres el primero, ¿qué ruleta elegirías?

En el análisis anterior, ha quedado probado que el primer jugador tiene las mismas probabilidades de ganar con cualquiera de las ruletas. Por tanto, elegiría cualquiera de ellas.

4. Si eres el segundo y el primero ha elegido la ruleta verde, ¿cuál elegirías tú?

Observando el primer caso, elegiría la ruleta azul.

5. ¿Y si ha elegido la roja?

Según el último de los casos analizados, debemos elegir la ruleta verde.

6. ¿Y si ha elegido la azul?

Elegiría la ruleta roja.

¿Lloverá el fin de semana?

En Villasecovia dicen que han comprobado que si un día hace sol, la probabilidad de que haga sol al día siguiente es de $\frac{3}{4}$, pero si un día llueve, la probabilidad de que llueva al día siguiente es de $\frac{1}{2}$.

El próximo fin de semana, sábado y domingo, habrá una fiesta y hoy es jueves y está lloviendo.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el sábado haga sol?

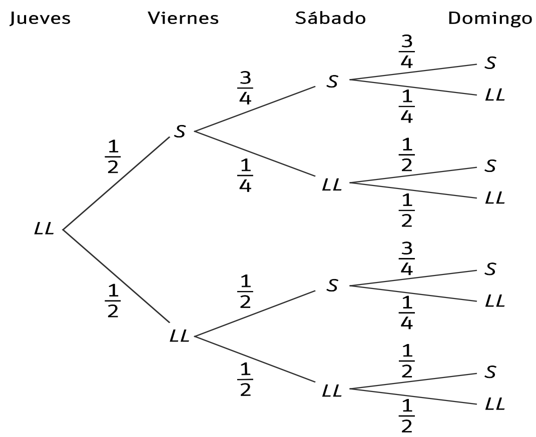
Vamos a denotar:

S = "día que hace sol" y LL = "día que llueve".

Así, las probabilidades que conocemos en esta actividad son las siguientes:

$P(\text{S - S}) = \frac{3}{4}$, entonces $P(\text{S - LL}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(\text{LL - LL}) = \frac{1}{2}$, entonces $P(\text{LL - S}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



Para que el sábado haga sol, tiene que ocurrir cualquiera de los siguientes sucesos: {LL - S - S, LL - LL - S}.

$P(\text{haga sol el sábado}) = P(\text{LL - S - S}) + P(\text{LL - LL - S}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos días haga sol?

En esta ocasión, para que tanto el sábado como el domingo haga sol, debe ocurrir:
{LL - S – S - S, LL - LL - S - S}.

$P(\text{haga sol el sábado y el domingo}) = P(\text{LL - S - S - S}) + P(\text{LL - LL - S - S}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{32}$

3. Independientemente de lo que pase el sábado, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo haga sol?

Para que el domingo haga sol, tenemos los casos {LL-S-S-S, LL-S-LL-S, LL-LL-S-S, LL-LL-LL-S}.

$P(\text{haga sol el domingo}) = P(\text{LL - S - S - S}) + P(\text{LL - S - LL - S}) + \text{P(LL - LL - S - S)} + \text{P(LL - LL - LL - S)} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{32}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. De los siguientes experimentos, señala los que son aleatorios.

a) Medir la distancia de la Tierra a la Luna.

b) El resultado de un partido de tenis.

c) Sacar una bola del bombo en el sorteo de la lotería.

d) El tiempo que tarda un semáforo en cambiar.

e) Hacer girar la ruleta y que caiga en un número impar.

a) Experimento determinista, puesto que la distancia de la Tierra a la Luna es conocida.

b) Experimento aleatorio.

c) Experimento aleatorio.

d) Experimento determinista. El tiempo que tarda un semáforo en cambiar de color está previamente establecido y siempre es el mismo.

e) Experimento aleatorio.

2. En el experimento de lanzar un dado se consideran los sucesos *A* = "sacar un número menor que 5" y *B* = "sacar un número par".

a) Escribe los sucesos elementales que forman cada uno de los sucesos *A* y *B*.

b) Halla el suceso unión de *A* y *B*.

c) Halla el suceso intersección de *A* y *B*.

d) Halla el suceso contrario de *A*.

a) Sucesos elementales de *A*: {1}, {2}, {3}, {4}   Sucesos elementales de *B*: {2}, {4}, {6}

b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

c) $A \cap B = \{2, 4\}$

d) $\overline{A} = \{5, 6\}$

3. Lanzamos dos dados de distinto color y anotamos el producto de los resultados.

a) Escribe el espacio muestral.

b) ¿Son equiprobables los sucesos elementales?

c) Escribe los resultados del suceso "salir 12".

d) Escribe los resultados del suceso "salir menos de 3".

e) Escribe los resultados del suceso "salir número primo".

a) Vamos a construir una tabla de doble entrada para determinar el espacio muestral.

Producto	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$.

b) Los sucesos elementales no son equiprobables puesto que no tienen la misma probabilidad.

$\{1\} = \{(1,1)\}$, luego $P(1) = \dfrac{1}{36}$ $\{2\} = \{(2,1), (1,2)\}$, luego $P(2) = \dfrac{2}{36} = \dfrac{1}{18}$

c) "Salir 12" = {12} = {(3,4), (4,3), (2,6), (6,2)}

d) "Salir menos de 3" = {1, 2} = {(1,1), (1,2), (2,1)}

e) "Salir número primo" = {2, 3, 5} = {(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1)}

4. **En una bolsa hay cinco bolas rojas, tres azules y dos blancas. Si se extrae una bola al azar, calcula las probabilidades de que:**

a) No sea blanca.

b) Sea blanca o azul.

c) No sea ni blanca ni roja.

d) Sea amarilla.

e) No sea amarilla.

En esta actividad, el número de casos posibles es 5 + 3 + 2 = 10.

a) P(no blanca) = P(roja o azul) = $\frac{5+3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

b) P(blanca o azul) = $\frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

c) P(no blanca y no roja) = P(azul) = $\frac{3}{10}$

d) P(amarilla) = $\frac{0}{10}$ = 0, puesto que no hay bolas amarillas en la bolsa (se trata de un suceso imposible).

e) P(no amarilla) = 1
Es un suceso seguro, puesto que cualquier bola que saquemos de la bolsa es de color distinto al amarillo.

5. **Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Calcula las probabilidades de que salga:**

a) Una carta de oros o de copas.

b) Una carta de copas o una figura.

c) Una carta de oros y una figura.

d) Ninguna figura de oros.

El número de casos posibles coincide con el número de cartas, es decir, 40.

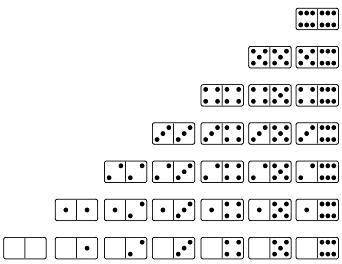
a) P(carta de oros o de copas) = $\frac{10+10}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

b) P(carta de copas o figura) = $\frac{10+3\cdot 3}{40} = \frac{19}{40}$

c) P(carta de oros y figura) = $\frac{3}{40}$

d) P(no figura de oros) = $\frac{37}{40}$

6. **Estas son las fichas del dominó. En el juego, al lado de cada ficha solo puede ir otra cuya numeración coincida en uno de los lados.**



Si hemos sacado la ficha (3|6) y el resto está boca abajo, ¿qué probabilidad hay de que al tomar una al azar encaje con ella?

Puesto que tenemos la ficha (3|6), debemos contar todas las fichas que contienen el 3 o el 6.

- Fichas que contienen el 3: (3|3), (3|4), (3|5), (3|6), (2|3), (1|3), (0|3)
- Fichas que contienen el 6: (6|6), (5|6), (4|6), (3|6) (2|6), (1|6), (0|6)

Podemos observar que en total hay 14 fichas, pero la ficha (3|6) es la que hemos sacado y además aparece dos veces, por lo que hay 12 fichas distintas de la ficha (3|6) que contienen el 3 o el 6. Así, el número de casos favorables es 12.

Por otro lado, el número de casos posibles es 27, es decir, el número de fichas del dominó menos una .

$$P(\text{encaje con }(3|6)) = \frac{12}{27}$$