

## EJERCICIOS

**1** Di cuáles de estos números son números naturales:

4	$\frac{1}{2}$	6
$\frac{2}{5}$	-3	7
18	55	2,5

4, 18, 55, 6 y 7.

**2** Representa en una recta los siguientes números naturales.



**3** Pon ejemplos de la vida cotidiana en los que se utilicen números naturales.

Respuesta abierta.

**4** Escribe como una sola potencia:

- |                              |                            |
|------------------------------|----------------------------|
| a) $7^2 \cdot 6^2 \cdot 2^2$ | b) $6 \cdot 6^2 \cdot 6^4$ |
| c) $4^3 : 4^2$               | d) $3^4 \cdot 2^4$         |
| e) $(5 \cdot 2)^2 \cdot 2^2$ | f) $(8 : 4)^2$             |
| g) $2^4 : (2^3 \cdot 2)$     | h) $(3^4)^2$               |
- 
- |                            |                     |          |
|----------------------------|---------------------|----------|
| a) $(7 \cdot 6 \cdot 2)^2$ | b) $6^7$            | c) 4     |
| d) $(3 \cdot 2)^4$         | e) $(10 \cdot 2)^2$ | f) $2^3$ |
| g) 1                       | h) $3^8$            |          |

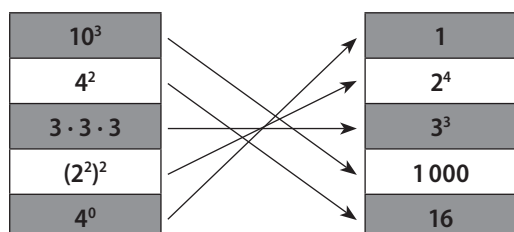
**5** Si una piscina cuadrada mide 10 m de lado, ¿cuál será el área total de 10 piscinas iguales? Exprésalo en forma de potencia.

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 \text{ m}^2$$

**6** Escribe qué cantidad representan los siguientes números expresados en notación científica:

- |                      |                         |
|----------------------|-------------------------|
| a) $1,15 \cdot 10^3$ | b) $5,31 \cdot 10^{11}$ |
| c) $4,2 \cdot 10^7$  | d) $7,45 \cdot 10^8$    |
- 
- |               |                    |
|---------------|--------------------|
| a) 1 150      | b) 531 000 000 000 |
| c) 42 000 000 | d) 745 000 000     |

**7** Copia en tu cuaderno y une las columnas según corresponda. Razona tus respuestas.



**8** Expresa estos números en notación científica:

- |                   |                |
|-------------------|----------------|
| a) 7 350          | b) 652 000     |
| c) 73 590 000 000 | d) 250 000 000 |
- 
- |                          |                      |
|--------------------------|----------------------|
| a) $7,35 \cdot 10^3$     | b) $6,52 \cdot 10^5$ |
| c) $7,359 \cdot 10^{10}$ | d) $2,5 \cdot 10^8$  |

**9** Si el área de un huerto cuadrado es la mitad de otro que tiene 200 m<sup>2</sup>, ¿cuánto mide el lado del huerto pequeño?

Si el área del huerto pequeño tiene la mitad del grande:

$$\frac{200}{2} = 100. \text{ Por otro lado, el área de un cuadrado es } A = l \cdot l,$$

de donde se deduce el lado del huerto pequeño:

$$100 = l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{100} \Leftrightarrow l = 10 \text{ m.}$$

**10** Calcula las siguientes raíces cuadradas.

- |                 |                |                |                |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| a) $\sqrt{100}$ | b) $\sqrt{25}$ | c) $\sqrt{36}$ | d) $\sqrt{4}$  |
| e) $\sqrt{9}$   | f) $\sqrt{16}$ | g) $\sqrt{49}$ | h) $\sqrt{64}$ |
- 
- |       |      |      |      |
|-------|------|------|------|
| a) 10 | b) 5 | c) 6 | d) 2 |
| e) 3  | f) 4 | g) 7 | h) 8 |

**11** Indica si son correctas o no las siguientes igualdades:

- |  |
|--|
| a) $\sqrt{9} + \sqrt{4} = \sqrt{13}$                               |
| b) $\sqrt{144} - \sqrt{81} = 3$                                    |
| c) $\sqrt{4 \cdot 36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12$ |
| d) $\sqrt{4 + 36} = \sqrt{4} + \sqrt{36} = 2 + 6 = 8$              |
| e) $\sqrt{81} : \sqrt{9} = \sqrt{81 : 9} = \sqrt{9} = 3$           |
| f) $\sqrt{4 : 4} = \sqrt{4} : \sqrt{4} = 1$                        |
- 
- |           |               |               |
|-----------|---------------|---------------|
| a) Falsa. | b) Verdadera. | c) Verdadera. |
| d) Falsa. | e) Verdadera. | f) Verdadera. |

**12** Realiza las siguientes operaciones combinadas:

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| a) $(6 + 2)^2 - 2 \cdot 2$    | b) $[(3 + 2) \cdot 2 - 2] \cdot 2$      |
| c) $65 - (8 \cdot 2 + 4 : 4)$ | d) $\sqrt{4} + (4 + 4) \cdot 2 \cdot 4$ |
- 
- |  |
|--|
| e) $\sqrt{25} + (2 + 3)^2 - 4 \cdot 5 + 2$ |
|--|
- 
- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| a) 60 | b) 16 | c) 48 |
| d) 66 | e) 12 |       |

**13** ¿Dónde hay que poner el paréntesis para que se cumplan las siguientes igualdades?

- |                            |                     |
|----------------------------|---------------------|
| a) $4 + 2^2 - 6 = 30$      | b) $16 - 6 : 2 = 5$ |
| c) $\sqrt{49} : 6 + 1 = 1$ | d) $64 : 7 + 1 = 8$ |
- 
- |                              |                       |
|------------------------------|-----------------------|
| a) $(4 + 2)^2 - 6 = 30$      | b) $(16 - 6) : 2 = 5$ |
| c) $\sqrt{49} : (6 + 1) = 1$ | d) $64 : (7 + 1) = 8$ |

**14 Razona si son verdaderos o falsos:**

a) En el siguiente cálculo primero se hace la suma y luego la multiplicación  $(2 + 3)^2 \cdot 5$ .

b)  $81 - (10 - 1)^2 = 0$

c)  $6 - 2^2 : 2 = (6 - 2)^2 : 2$

- a) Falso, después de la suma se efectúa la potencia.
- b) Verdadero.
- c) Falso.

**15 Calcula tres múltiplos de cada uno de los siguientes números. ¿Cómo los obtienes?**

2      13      7      4      6

(2, 4, 6), (13, 26, 39), (0, 7, 14), (0, 4, 8), (0, 6, 12)

**16 Calcula dos divisores de cada uno de los siguientes números:**

a) 14                      b) 10                      c) 30  
d) 28                      e) 12                      f) 21

- a) 1, 2, 7, 14
- b) 1, 2, 5, 10
- c) 1, 2, 3, 5, 10, 15, 30
- d) 1, 2, 4, 7, 14, 28
- e) 1, 2, 3, 4, 6, 12
- f) 1, 3, 7, 21

**17 Indica cuál de estas afirmaciones es verdadera o falsa y explica por qué:**

a) 3 es divisor de 30.              b) 10 es múltiplo de 3.  
c) 30 es múltiplo de 10.          d) 3 es múltiplo de 1.  
e) 1 es divisor de 30.              f) 5 es divisor de 25.

- a) Verdadera, porque  $3 + 0$  es múltiplo de 3.
- b) Falsa, porque la división de 10 entre 3 es entera.
- c) Verdadera, porque  $30 : 10 = 3$ .
- d) Verdadera, porque  $3 : 1 = 3$ .
- e) Verdadera, porque el 1 es divisor de todos los números.
- f) Verdadera, porque al realizar la división de  $25 : 5$ , la división es exacta.

**18 Escribe el número 16 de todas las maneras posibles en forma de multiplicación de dos números naturales. ¿Qué observas?**

$16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$

Que se obtienen todos sus divisores.

**19 De los siguientes números, ¿cuáles son primos y cuáles son compuestos?**

a) 47                      b) 6                      c) 36  
d) 5                      e) 23                      f) 31  
g) 11                      h) 30                      i) 33  
j) 61                      k) 45                      l) 21

Primos: 47, 5, 11, 23, 31, 61. Compuestos: el resto.

**20 ¿Verdadero o falso? Explica por qué en cada caso.**

a) Un número puede ser primo y compuesto a la vez.

b) El número natural primo más pequeño es el 5.

c) Todos los números impares son primos.

- a) Falso.
- b) Falso, es el 2, ya que por acuerdo se entiende que el 1 no es un número primo.
- c) Falso, el 9 es impar y no es primo.

**21 Realiza la factorización de los siguientes números naturales:**

a) 300                      b) 288                      c) 363                      d) 546  
e) 410                      f) 196                      g) 1386                      h) 1260

- a)  $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$
- b)  $2^5 \cdot 3^2$
- c)  $3 \cdot 11^2$
- d)  $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$
- e)  $2 \cdot 5 \cdot 41$
- f)  $2^2 \cdot 7^2$
- g)  $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$
- h)  $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

**22 Descompón en factores primos el número 110 y a partir de esa factorización indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

a) 110 es divisible por 11.  
b) 55 es un divisor de 110.  
c) 22 no es un divisor de 110.  
d) 110 es divisible por 1.

$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$

- a) Verdadera.
- b) Verdadera.
- c) Falsa.
- d) Verdadera.

**23 Expresa con tus propias palabras la diferencia que encuentras entre los conceptos de máximo común divisor y de mínimo común múltiplo. Pon ejemplos en cada caso.**

- a) El m.c.m. es un múltiplo de los números de los que partimos, y el m.c.d. es el divisor de los números de los que partimos.
- b) En el m.c.m. se toman las potencias comunes y no comunes de mayor exponente, y el m.c.d. se toman las potencias de base común con menor exponente.

**24 Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes números:**

a) 27 y 21                      b) 75 y 15                      c) 12, 25 y 32  
d) 68 y 30                      e) 75, 20 y 15                      f) 66, 44 y 88  
g) 216 y 88                      h) 122 y 88                      i) 30, 45 y 75  
j) 20, 44 y 8

- a) 3 y 189
- b) 15 y 75
- c) 1 y 2400
- d) 2 y 1020
- e) 5 y 300
- f) 22 y 264
- g) 8 y 2376
- h) 2 y 5368
- i) 15 y 450
- j) 4 y 440

**25** Tres nadadores empiezan a nadar a la vez, pero su ritmo no es igual. El primero realiza 1 largo mientras el segundo hace 3 y el tercero 2. ¿Cuándo volverán a coincidir en la salida?

m.c.m. (1, 2, 3) = 6. Coincidirán al cabo de 6 largos.

**26** Para el taller de Tecnología se van a juntar tres clases con 15, 40 y 35 alumnos respectivamente. ¿Cuántos grupos se formarán si se quieren hacer grupos iguales sin mezclar alumnos de diferentes clases y deben estar formados por el mayor número de alumnos sin que sobre ninguno?

m.c.d. (15, 40, 35) = 5. Grupos de 5 alumnos.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

**1** Define en tu cuaderno el conjunto de los números naturales y pon ejemplos prácticos y cotidianos donde se utilicen.

Los números naturales son los que utilizamos para contar y se construyen siguiendo un sistema de numeración posicional de base diez a partir de las cifras o dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Ejemplos: «quiero 1 huevo frito», «son 11 jugadores», «en el portal 109», «dentro de 15 minutos», «ha tocado el número 59674», «ya son 250 socios», «veo el canal 3», «faltan 2 sillas», ...

**2** Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Razónalas.

- a) La temperatura de una ciudad siempre se indica con un número natural.  
 b) El conjunto de números naturales es ilimitado.  
 c) El número cero no se incluye en el conjunto de números naturales.  
 d) El conjunto de números naturales se representa mediante una Z.
- a) Falsa, porque también se usan números negativos.  
 b) Verdadera, el conjunto de los números naturales es infinito.  
 c) Verdadera.  
 d) Falsa, el conjunto de los números naturales se representa con la letra N.

**3** ¿Cuáles de los siguientes números son naturales?

- a) 1                      b) 0,3                      c) -2,5                      d) 4  
 e) 27                      f) -4                      g)  $\frac{1}{2}$                       h) 3

a, d, e, h

**4** ¿Qué propiedades de la suma se aplican en cada caso?

- a)  $2 + 0 = 2$   
 b)  $(61 + 2) + 3 = 61 + (2 + 3)$   
 c)  $3 + 4 + 1 = 1 + 4 + 3$

- a) Elemento neutro.  
 b) Asociativa.  
 c) Conmutativa.

**5** ¿Qué propiedad se aplica en cada caso?

- a)  $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5$   
 b)  $(4 + 2) \cdot 3 = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3$   
 c)  $(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$   
 d)  $7 \cdot 2 = 2 \cdot 7$

- a) Elemento neutro.  
 b) Distributiva.  
 c) Asociativa.  
 d) Conmutativa.

**6** Juan tiene 450 € para gastar en papel de empapelar. Si el papel se vende a 12 € el m<sup>2</sup>, y tiene que empapelar una habitación de 30 m<sup>2</sup> de pared, ¿tiene Juan suficiente dinero para poder empapelar toda la habitación?

Sí, ya que  $450 - 12 \cdot 30 = 450 - 360 = 90$  €.

**7** ¿Cuánto tardarán 2 grifos en llenar un depósito de 50 litros de agua, si cada uno vierte 10 litros cada 20 minutos?

Cada grifo vierte 1 litro cada 2 minutos. Los dos grifos vierten 2 litros cada 2 minutos, o 1 litro cada minuto. Por tanto, tardan 50 minutos.

**8** Luisa quiere comprarle a su madre un regalo de 80 €, pero sólo tiene ahorrado la paga mensual de 4 meses y 15 € que le ha dejado su hermana. ¿Podrá comprar el regalo si su paga es de 12 €/mes? En caso negativo, ¿cuánto dinero le hará falta? ¿Cuántos meses tendrá que ahorrar como mínimo?

No, porque  $80 - (4 \cdot 12 + 15) = 80 - 63 = 17$  €. Le faltan 17 €. Tendrá que ahorrar la paga de 2 meses más.

**9** Se han comprado para el instituto 3 colecciones iguales de libros de Ciencias Naturales. Cada colección consta de 6 tomos y cada tomo cuesta 15 €. ¿Cuánto se ha pagado en total si al final nos han hecho un descuento de 30 €?

$3 \cdot 6 \cdot 15 - 30 = 270 - 30 = 240$  €.

**10** **Expresa matemáticamente los siguientes enunciados y calcula:**

- a) El doble de la suma de diez y cuatro.
- b) La mitad de la suma de dos centenas y cuatro decenas.
- c) El triple de la suma de veintidós más dos al cuadrado.
- d) El doble de seis más cuatro unidades.

a)  $2 \cdot (10 + 4) = 28$       b)  $(200 + 40) : 2 = 120$   
 c)  $3 \cdot (22 + 2^2) = 78$       d)  $2 \cdot (6 + 4) = 2 \cdot 10 = 20$

**POTENCIAS DE NÚMEROS NATURALES. OPERACIONES. NOTACIÓN CIENTÍFICA**

**11** **Explica con tus palabras qué es la potencia de un número natural y pon un ejemplo práctico que lo puedas relacionar con la vida cotidiana.**

«Tres personas que comieron tres platos a tres euros cada plato, pagaron  $3^3$  €».

**12** **Escribe como una sola potencia las siguientes operaciones:**

- |                                  |                        |                            |
|----------------------------------|------------------------|----------------------------|
| a) $4 \cdot 4 \cdot 4$           | b) $3 \cdot 3$         | c) $2^3 \cdot 2 \cdot 2^2$ |
| d) $3^6 \cdot 3 \cdot 3^2 : 3^3$ | e) $4^9 : 4^7$         | f) $(6^3 \cdot 6^2) : 6^4$ |
| g) $(6^3)^6$                     | h) $7^2 \cdot 7^0$     | i) $8^1 : 8^0$             |
| j) $3^3 \cdot 10^3$              | k) $14^3 : 7^3$        | l) $(2^4 : 4)^3$           |
| m) $4^3 \cdot (2 \cdot 2)^3$     | n) $(6^2)^0 \cdot 6^3$ | o) $3^2 \cdot 9 \cdot 3^5$ |
- 
- |             |          |          |
|-------------|----------|----------|
| a) $4^3$    | b) $3^2$ | c) $2^6$ |
| d) $3^6$    | e) $4^2$ | f) $6$   |
| g) $6^{18}$ | h) $7^2$ | i) $8$   |
| j) $30^3$   | k) $2^3$ | l) $2^6$ |
| m) $4^6$    | n) $6^3$ | o) $3^9$ |

**13** **¿Cuáles de los siguientes números están expresados en notación científica? En caso de que no lo estén, exprésalos.**

- a)  $1,43 \cdot 10^8$
- b) 2340 000 000 000
- c)  $4,739 \cdot 10^{11}$
- d)  $3,982 \cdot 10^6$
- e) 0,0000000001872

Están expresados en notación científica: a, c, d.  
 b)  $2,34 \cdot 10^{12}$       e)  $1,872 \cdot 10^{-10}$

**14** **Expresa en notación científica los siguientes números:**

- |                        |              |
|------------------------|--------------|
| a) 870 290 000 000 000 | b) 3 721 000 |
| c) 39 230 000 000      | d) 381       |
| e) 190 200 000 000     | f) 0,0000976 |
- 
- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| a) $8,7029 \cdot 10^{14}$ | b) $3,721 \cdot 10^6$   |
| c) $3,923 \cdot 10^{10}$  | d) $3,81 \cdot 10^2$    |
| e) $1,902 \cdot 10^{11}$  | f) $9,76 \cdot 10^{-5}$ |

**15** **Escribe qué cantidad representan los siguientes números expresados en notación científica:**

- |                      |                        |
|----------------------|------------------------|
| a) $7,89 \cdot 10^8$ | b) $9,21 \cdot 10^3$   |
| c) $5,49 \cdot 10^5$ | d) $1,233 \cdot 10^6$  |
| e) $3,92 \cdot 10^2$ | f) $6,8 \cdot 10^{-6}$ |
- 
- |                |              |
|----------------|--------------|
| a) 789 000 000 | b) 9 210     |
| c) 549 000     | d) 1 233 000 |
| e) 392         | f) 0,0000068 |

**RAÍCES CUADRADAS DE NÚMEROS NATURALES. OPERACIONES**

**16** **Explica con tus palabras qué es la raíz cuadrada de un número natural y pon un ejemplo práctico que lo puedas relacionar con la vida cotidiana.**

La superficie de la habitación de un hotel es cuadrada y es de 100 m<sup>2</sup>. El lado de la habitación es de 10 m.

**17** **Calcula mentalmente las siguientes raíces cuadradas:**

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| a) $\sqrt{121}$ | b) $\sqrt{169}$ |
| c) $\sqrt{81}$  | d) $\sqrt{49}$  |
| e) $\sqrt{144}$ | f) $\sqrt{64}$  |
- 
- |       |       |
|-------|-------|
| a) 11 | b) 13 |
| c) 9  | d) 7  |
| e) 12 | f) 8  |

**18** **Un terreno tiene 144 m<sup>2</sup> y es cuadrado. ¿Cuánto mide cada lado del terreno?**

$\sqrt{144} = 12$  m

**19** **Comprueba mediante ejemplos si se cumplen las siguientes expresiones:**

- a)  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
  - b)  $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$
  - c)  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
  - d)  $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$
- 
- a)  $5 = \sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9} = 7$   
 b)  $8 = \sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36} = 10 - 6 = 4$   
 c)  $6 = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 6$   
 d)  $3 = \sqrt{81 : 9} = \sqrt{81} : \sqrt{9} = 3$

**20** **Realiza las raíces:**

- |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) $\sqrt{225}$ | b) $\sqrt{900}$ | c) $\sqrt{441}$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|
- 
- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| a) 15 | b) 30 | c) 21 |
|-------|-------|-------|

### OPERACIONES COMBINADAS. JERARQUÍA DE OPERACIONES

**21** Realiza las siguientes operaciones mentalmente. ¿En qué orden realizas los cálculos?

- a)  $30 + 6 + 4$                       b)  $(2 + 4) \cdot 2$   
 c)  $29 - 9 + 20$                     d)  $13 + 4 + 3 + 2$   
 e)  $10 \cdot 4 \cdot (2 + 2)$                 f)  $(4 + 4) \cdot (6 + 2)$

- a)  $40 = 30 + (6 + 4)$               b)  $12 = 6 \cdot 2$   
 c)  $40 = (29 - 9) + 20$               d)  $22 = (13 + 4) + (3 + 2)$   
 e)  $160 = 10 \cdot (4 \cdot 4)$                 f)  $64 = 8 \cdot 8$

**22** ¿Dónde hay que colocar los paréntesis para que el resultado sea el indicado?

- a)  $3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3 + 5 = 28$   
 b)  $2 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 2 + 2 + 1 \cdot 3^2 = 43$   
 c)  $2 \cdot 8 + 10 - 16 = 20$   
 d)  $40 : 4 + 6 - 12 : 4 = 1$

- a)  $3 \cdot 2^2 + 2 \cdot (3 + 5) = 28$   
 b)  $2 \cdot (3 + 2) + 3 \cdot 2 + (2 + 1) \cdot 3^2 = 43$   
 c)  $2 \cdot (8 + 10) - 16 = 20$   
 d)  $40 : (4 + 6) - 12 : 4 = 1$

**23** Indica dónde sobran los paréntesis en estas operaciones. Explica por qué sobran y calcula el resultado.

- a)  $(6 \cdot 4) + (14 \cdot 4) + (22 : 2)$   
 b)  $8 \cdot (10 + 4) + (14 - 4) \cdot 4$   
 c)  $[12 \cdot (14 - 4)] + 2 \cdot [(5 - 3) \cdot 2]$   
 d)  $(7 \cdot 10) + 2 \cdot [2 \cdot (7 + 2)] \cdot 2$

- a) Sobran todos los paréntesis, ya que los productos y divisiones hay que efectuarlos antes que las sumas; el resultado es 91.  
 b) No sobra ningún paréntesis, su resultado es 152.  
 c) Sobran ambos corchetes, el resultado es 128.  
 d) Sobra el paréntesis del primer sumando y el corchete del segundo sumando, el resultado es 142.

**24** Utiliza un ejemplo sencillo para explicar la jerarquía de operaciones.

$$8 - 4 \cdot [8 - (3 + 3)] = 8 - 4 \cdot (8 - 6) = 8 - 4 \cdot 2 = 8 - 8 = 0$$

**25** Realiza las siguientes operaciones combinadas:

- a)  $100 - [5 \cdot 10 - 5^2 + (10 - 5)^2]$   
 b)  $18 + (4 + 2)^2 - [30 : (3 + 2) + 2]$   
 c)  $6 + [10 + 12 \cdot (14 + 4)] \cdot 3$   
 d)  $4 \cdot 10 + 10 + (36 : 6 + 20 + 6 + 14 - 2) \cdot 2$

$$\begin{aligned} \text{a) } 100 - [5 \cdot 10 - 5^2 + (10 - 5)^2] &= 100 - (5 \cdot 10 - 25 + 5^2) = \\ &= 100 - (50 - 25 + 25) = 100 - 50 = 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 18 + (4 + 2)^2 - [30 : (3 + 2) + 2] &= 18 + 6^2 - (30 : 5 + 2) = \\ &= 18 + 36 - (6 - 2) = 18 + 36 - 4 = 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 6 + [10 + 12 \cdot (14 + 4)] \cdot 3 &= 6 + (10 + 12 \cdot 18) \cdot 3 = \\ &= 6 + (10 + 216) \cdot 3 = 6 + 226 \cdot 3 = 684 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 4 \cdot 10 + 10 + (36 : 6 + 20 + 6 + 14 - 2) \cdot 2 &= \\ &= 40 + 10 + (6 + 20 + 6 + 14 - 2) \cdot 2 = 40 + 10 + 44 \cdot 2 = \\ &= 50 + 88 = 138 \end{aligned}$$

**26** Realiza las siguientes operaciones combinadas con potencias y raíces:

$$\text{a) } \sqrt{9} \cdot (3 + 3) + (16 : 2)^2 - \sqrt{4}$$

$$\text{b) } \sqrt{100} + [(5 \cdot 2)^2 - 5]^2$$

$$\text{c) } 6 + (2 - 1)^2 + 9 + \sqrt{144}$$

$$\text{d) } 25 - 5^2 \cdot 2 + (\sqrt{36} + 2)^2 + 3^3$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{9} \cdot (3 + 3) + (16 : 2)^2 - \sqrt{4} &= 3 \cdot 6 + 8^2 - 2 = \\ &= 18 + 64 - 2 = 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{100} + [(5 \cdot 2)^2 - 5]^2 &= 10 + (10^2 - 5)^2 = 10 + 95^2 = \\ &= 10 + 9025 = 9035 \end{aligned}$$

$$\text{c) } 6 + (2 - 1)^2 + 9 + \sqrt{144} = 6 + 1 + 9 + 12 = 28$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 25 - 5^2 \cdot 2 + (\sqrt{36} + 2)^2 + 3^2 &= 25 - 25 \cdot 2 + (6 + 2)^2 + 9 = \\ &= 25 - 50 + 8^2 + 9 = -25 + 64 + 9 = 48 \end{aligned}$$

**27** Escribe con palabras las siguientes operaciones. Calcula el resultado.

$$\text{a) } 3 \cdot (6 + 4) - 7$$

$$\text{b) } 22 + 4 \cdot (10 - 3)$$

$$\text{c) } (4 - 2) \cdot 2 + 2 \cdot (5 - 2)$$

a) Al triple de la suma de seis y cuatro se le quitan siete unidades = 23.

b) A veintidós se le suma el cuádruple de la diferencia entre diez y tres = 50.

c) La suma del doble de la diferencia entre cuatro y dos, y el doble de la diferencia entre cinco y dos = 10.

**28** Realiza las siguientes operaciones:

$$\text{a) } 6 + [10 + 6 \cdot (14 - 2)] \cdot 2$$

$$\text{b) } 6 + 6 + 200 : (12 - 2) + 45 : 5$$

$$\text{c) } (3 + 3^2) \cdot 2 + 2 \cdot (2 + 2) + 2 \cdot 2 \cdot 2^2$$

$$\text{d) } 7 \cdot 2 + 12 + 14 : 7 + 22 - (13 - 10 - 1)$$

$$\text{e) } (4 + 2) \cdot 3^2 + 50 : 10 - 5$$

$$\begin{aligned} \text{a) } 6 + [10 + 6 \cdot (14 - 2)] \cdot 2 &= 6 + (10 + 6 \cdot 12) \cdot 2 = \\ &= 6 + (10 + 72) \cdot 2 = 6 + 82 \cdot 2 = 6 + 164 = 170 \end{aligned}$$

- b)  $6 + 6 + 200 : (12 - 2) + 45 : 5 = 12 + 200 : 10 + 9 =$   
 $= 12 + 20 + 9 = 41$   
 c)  $(3 + 3^2) \cdot 2 + 2 \cdot (2 + 2) + 2 \cdot 2 \cdot 2^2 = (3 + 9) \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 16 =$   
 $= 12 \cdot 2 + 8 + 16 = 24 + 8 + 16 = 48$   
 d)  $7 \cdot 2 + 12 + 14 : 7 + 22 - (13 - 10 - 1) =$   
 $= 14 + 12 + 2 + 22 - 2 = 48$   
 e)  $(4 + 2) \cdot 3^2 + 50 : 10 - 5 = 6 \cdot 9 + 5 - 5 = 54$

**29** **II** Realiza las siguientes operaciones:

- a)  $(3 \cdot 2)^2 + 4 : (3 - 1) + 5$   
 b)  $4^2 : 4 + 3 \cdot 2^2 - 2^2$   
 c)  $(6 - 2)^2 - 16 + 4^2$   
 d)  $(6^2)^0 + 40 : 2^2 + 5$   
 e)  $[(4 \cdot 2)^2 - 2^2] : (12 : 6)$   
 a)  $(3 \cdot 2)^2 + 4 : (3 - 1) + 5 = 6^2 + 4 : 2 + 5 = 36 + 2 + 5 = 43$   
 b)  $4^2 : 4 + 3 \cdot 2^2 - 2^2 = 4 + 3 \cdot 4 - 4 = 12$   
 c)  $(6 - 2)^2 - 16 + 4^2 = 4^2 - 16 + 16 = 16$   
 d)  $(6^2)^0 + 40 : 2^2 + 5 = 1 + 40 : 4 + 5 = 1 + 10 + 5 = 16$   
 e)  $[(4 \cdot 2)^2 - 2^2] : (12 : 6) = (8^2 - 4) : 2 = (64 - 4) : 2 = 60 : 2 = 30$

**30** **III** Realiza las siguientes operaciones con raíces cuadradas:

- a)  $6 + 2 \cdot \sqrt{16} + 2^2 \cdot (3 - 1)$   
 b)  $2 \cdot (4 + 3^2) - \sqrt{4} + (4 + 8)^2$   
 c)  $2 \cdot \sqrt{49} - 2^2 + 12$   
 d)  $8 + \sqrt{64} + 2^3 + 4 \cdot 2 - (16 - 8)$   
 e)  $2 \cdot (3 + \sqrt{4}) + 2 \cdot 4^2$   
 a)  $6 + 2 \cdot \sqrt{16} + 2^2 \cdot (3 - 1) = 6 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 6 + 8 + 8 = 22$   
 b)  $2 \cdot (4 + 3^2) - \sqrt{4} + (4 + 8)^2 = 2 \cdot (4 + 9) - 2 + 12^2 =$   
 $= 2 \cdot 13 - 2 + 144 = 26 - 2 + 144 = 168$   
 c)  $2 \cdot \sqrt{49} - 2^2 + 12 = 2 \cdot 7 - 4 + 12 = 14 - 4 + 12 = 22$   
 d)  $8 + \sqrt{64} + 2^3 + 4 \cdot 2 - (16 - 8) = 8 + 8 + 8 + 8 - 8 = 24$   
 e)  $2 \cdot (3 + \sqrt{4}) + 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot (3 + 2) + 2 \cdot 16 = 2 \cdot 5 + 32 =$   
 $= 10 + 32 = 42$

**31** **III** Sustituye los valores de  $a$  y  $b$  en cada caso:

$a$	$b$	$a^2 + b^2$	$3a + 4b$	$(a + b) \cdot 3$	$a^3 + b$
6	6	$6^2 + 6^2 = 72$	$3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 = 42$	$(6 + 6) \cdot 3 = 36$	$6^3 + 6 = 222$
4	5	$4^2 + 5^2 = 41$	$3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 32$	$(4 + 5) \cdot 3 = 27$	$4^3 + 5 = 69$

**32** **III** Realiza las siguientes operaciones:

- a)  $10 + \sqrt{25} + (5 \cdot 2)^2 + 16$   
 b)  $(5^6 : 5^4) + 5 - (6 - 5^0) + \sqrt{24 + 4^0}$   
 c)  $\sqrt{49} + 10 - (2^3 : 2 + 10 - 4)$

- d)  $2 \cdot (\sqrt{100} + 2^2 - 3) + \sqrt{81} - 9$   
 e)  $(6 - 2)^2 + 5^2 - (\sqrt{60 + 2^2} + 3^2)$   
 a)  $10 + \sqrt{25} + (5 \cdot 2)^2 + 16 = 10 + 5 + 10^2 + 16 =$   
 $= 15 + 100 + 16 = 131$   
 b)  $(5^6 : 5^4) + 5 - (6 - 5^0) + \sqrt{24 + 4^0} = 5^2 + 5 - (6 - 1) + \sqrt{25} =$   
 $= 25 + 5 - 5 + 5 = 30$   
 c)  $\sqrt{49} + 10 - (2^3 : 2 + 10 - 4) = 7 + 10 - (4 + 10 - 4) =$   
 $= 7 + 10 - 10 = 7$   
 d)  $2 \cdot (\sqrt{100} + 2^2 - 3) + \sqrt{81} - 9 = 2 \cdot (10 + 4 - 3) + 9 =$   
 $= 2 \cdot 11 + 9 = 22 + 9 = 31$   
 e)  $(6 - 2)^2 + 5^2 - (\sqrt{60 + 2^2} + 3^2) = 4^2 + 25 - (\sqrt{60 + 4} + 9) =$   
 $= 16 + 25 - 8 - 9 = 24$

**33** **III** Realiza las siguientes operaciones con raíces:

- a)  $4 \cdot (2 + \sqrt{81}) - \sqrt{4}$   
 b)  $(3 \cdot \sqrt{16} - 4)^2 - 2$   
 c)  $4 \cdot (3 + \sqrt{4})^2 - 10^2$   
 d)  $\sqrt{144} \cdot \sqrt{4} + 2 \cdot (10^2 + 44)$   
 e)  $\sqrt{49} + 2 - (\sqrt{25} - 5)$   
 f)  $\sqrt{100} - 5 \cdot 4^2 + \sqrt{16}$   
 g)  $(\sqrt{36} + 6) \cdot 5 + \sqrt{4}$   
 a)  $4 \cdot (2 + \sqrt{81}) - \sqrt{4} = 4 \cdot (2 + 9) - 2 = 4 \cdot 11 - 2 = 42$   
 b)  $(3 \cdot \sqrt{16} - 4)^2 - 2 = (3 \cdot 4 - 4)^2 - 2 = (12 - 4)^2 - 2 = 8^2 - 2 =$   
 $= 64 - 2 = 62$   
 c)  $4 \cdot (3 + \sqrt{4})^2 - 10^2 = 4 \cdot (3 + 2)^2 - 100 = 4 \cdot 5^2 - 100 =$   
 $= 4 \cdot 25 - 100 = 100 - 100 = 0$   
 d)  $\sqrt{144} \cdot \sqrt{4} + 2 \cdot (10^2 + 44) = 12 \cdot 2 + 2 \cdot (100 + 44) =$   
 $= 24 + 2 \cdot 144 = 24 + 288 = 312$   
 e)  $\sqrt{49} + 2 - (\sqrt{25} - 5) = 7 + 2 = 9$   
 f)  $\sqrt{100} - 5 \cdot 4^2 + \sqrt{16} = 10 - 5 \cdot 16 + 4 = -66$   
 g)  $(\sqrt{36} + 6) \cdot 5 + \sqrt{4} = (6 + 6) \cdot 5 + 2 = 62$

## MÚLTIPLOS Y DIVISORES

**34** **I** Explica con tus propias palabras qué son los múltiplos de un número natural y calcula los múltiplos menores que 100 de los siguientes números naturales.

- a) 12      b) 8      c) 22      d) 33  
**¿Tienen algún múltiplo en común?**  
 a) 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96  
 b) 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96

c) 0, 22, 44, 66, 88

d) 0, 33, 66, 99

El único múltiplo común que aparece es el 0.

**35**  Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y explica por qué.a) Un número natural  $a$  sólo puede tener 3 múltiplos.

b) Cuanto mayor sea un número natural, más divisores tiene.

c) Un número natural tiene infinitos divisores.

d) Un número natural  $b$  tiene infinitos múltiplos.

a) Falsa, el número 2 tiene infinitos múltiplos.

b) Falsa, el 7 tiene 2 divisores, mientras que el número 4 tiene tres divisores.

c) Falsa, el número 2 sólo tiene dos divisores; sólo el 0 tiene infinitos divisores.

d) Falsa, el 0 sólo tiene un múltiplo, que es él mismo.

**36**  Teniendo en cuenta los criterios de divisibilidad, razona las siguientes respuestas:

a) 24 es múltiplo de 2, por lo que 2 es un divisor de 24.

b) Todos los números naturales tienen más de un divisor.

c) No hay ningún número que sea divisible por 2 y 3 a la vez.

d) Todos los números divisibles por 9 son divisibles por 3.

e) Todos los números terminados en 0 son divisibles por 5 y por 2.

a) Verdadero, por definición.


b) Verdadero, porque todo número distinto de 0 puede ser dividido por él mismo y por la unidad; además, el 0 tiene infinitos divisores.

c) Falso, el 6 es divisible por 2 y por 3.

d) Verdadero, porque todo múltiplo de 9 es múltiplo de 3.

e) Verdadero, porque todo número que acabe en 0 es múltiplo de 10 y, en consecuencia, es múltiplo de 5 y de 2.

## NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS

**37**  Define qué son los números primos y los números compuestos. Pon ejemplos.Los números que sólo tienen como divisores a la unidad y a ellos mismos se dice que son **números primos**: 17, 19, 23,...Los números que tienen más de dos divisores se dice que son **números compuestos**: 22, 12, 16, 24, 81,...**38**  Pon ejemplos en los siguientes casos:

a) Tres números compuestos pares.

b) Un número primo de 3 cifras terminado en 7.

c) Un número primo par.

d) Los números compuestos que estén entre 20 y 35.

e) Dos números primos de 2 cifras.

a) 4, 6, 8

b) 127

c) 2

d) 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34

e) 23 y 29

## DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

**39**  ¿Qué es la factorización de un número natural?

Realiza la factorización de los siguientes números:

a) 18

b) 42

c) 68

d) 76

e) 81

f) 122

g) 652

h) 940

La descomposición factorial de un número natural es su expresión en forma de producto de números primos.

a)  $18 = 2 \cdot 3^2$ b)  $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ c)  $68 = 2^2 \cdot 17$ d)  $76 = 2^2 \cdot 19$ e)  $3^4$ f)  $122 = 2 \cdot 61$ g)  $652 = 2^2 \cdot 163$ h)  $940 = 2^2 \cdot 5 \cdot 47$ **40**  Realiza la factorización de los siguientes números y, en función de la descomposición, halla sus divisores. ¿Son todos números compuestos?

a) 32

b) 16

c) 50

d) 81

e) 90

f) 17

g) 29

h) 64

a)  $32 = 2^5$ 

{1, 2, 4, 8, 16, 32}

b)  $16 = 2^4$ 

{1, 2, 4, 8, 16}

c)  $50 = 2 \cdot 5^2$ 

{1, 2, 5, 10, 25, 50}

d)  $81 = 3^4$ 

{1, 3, 9, 27, 81}

e)  $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ 

{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90}

f)  $17 = 17$ 

{1, 17}

g)  $29 = 29$ 


{1, 29}

h)  $64 = 2^6$ 

{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64}

Son primos el 17 y el 29.

## MÁXIMO COMÚN DIVISOR. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

**41**  Explica con tus propias palabras qué es el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de varios números naturales y pon ejemplos.

Ver el libro de texto.

**42**   Halla mentalmente el m.c.d. de los siguientes números naturales:

a) 8 y 16

b) 2, 4 y 6

c) 10, 5 y 2

d) 12, 6 y 24

a) 8

b) 2

c) 1

d) 6

**43** **□□** Halla el m.c.d. de los números:

- a) 30 y 175                      b) 160 y 200  
c) 60, 12 y 48                d) 264, 102 y 308  
a) 5                      b) 40                      c) 12                      d) 2

**44** **□□** Halla el m.c.m. de los números:

- a) 75 y 62                      b) 34 y 26  
c) 270 y 70                    d) 14, 16 y 30  
a) 4650                      b) 442  
c) 1890                      d) 560

**45** **□□** Halla el m.c.d. y el m.c.m. de los números:

- a) 940 y 185                    b) 22, 44 y 25  
c) 90 y 74                      d) 20 y 75  
e) 28 y 80                      f) 14, 45 y 130

	940, 185	22, 44, 25	90, 74	20, 75	28, 80	14, 45, 130
m.c.d.	5	1	2	5	4	1
m.c.m.	34780	1100	3330	300	560	8190

**46** **□□□** En una fiesta de cumpleaños hay una tarta de 300 gramos y otra de 210 gramos y se quiere dar a los invitados un trozo de tarta de igual peso. Para ello, se dividen en trozos, lo más grandes posibles y sin que sobre nada. ¿Qué peso tendrá cada trozo? ¿Cuántos invitados hay si coincide que ninguno se queda sin tarta?

m.c.d. (300, 210) = 30 gramos.  $510 : 30 = 17$  invitados.

**47** **□□□** Tres pintores trabajan a distinto ritmo. Cuando el primero termina de pintar 100 m<sup>2</sup>, el segundo ha pintado el doble y el tercero la mitad. Cada 400 m<sup>2</sup> pintados tienen que ir a la tienda de pinturas a por más material. ¿Cuándo coincidirán los tres por primera vez en la tienda?

Coincidirán los tres cuando el tercero vaya por primera vez a la tienda. En tal caso, será la cuarta vez que va el segundo y la segunda vez que va el primero.

**48** **□□** En un Rally compiten 3 marcas de automóviles. La primera reposta combustible cada 80 kilómetros, la segunda cada 120 kilómetros y la tercera cada 150 kilómetros. ¿Cada cuántos kilómetros repostarán los tres a la vez?

m.c.m. (80, 120, 150) = 1200 kilómetros.

**49** **□□□** Hay 3 huertos de las siguientes dimensiones: 260 m<sup>2</sup> para plantar patatas, 160 m<sup>2</sup> para plantar tomates y 410 m<sup>2</sup> para plantar lechugas. Si se quiere dividir la superficie de plantación total entre varios trabajadores a partes iguales, sin que se mezclen los diferentes tipos de huertas y que las superficies sean lo más grandes posible, ¿qué superficie de cada huerta le corresponde a cada trabajador? ¿Cuántos trabajadores se necesitarán?

m.c.d. (260, 160, 410) = 10 m<sup>2</sup>. El huerto de patatas hay que dividirlo en 26 partes, el de tomates en 16 y el de lechugas en 41 partes. A cada trabajador le corresponden 10 m<sup>2</sup>. Se necesitan 26 + 16 + 41 = 83 trabajadores.



# 2 NÚMEROS ENTEROS

<http://www.McGraw-Hill.es>

## EJERCICIOS

**1** La clasificación de los equipos de fútbol representantes de los grupos de Secundaria de un instituto es:

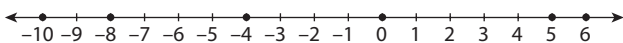
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
Enero	1.º A	2.º A	1.º B	2.º C	2.º B
Marzo	2.º C	1.º B	2.º B	1.º A	2.º A

Copia la siguiente tabla y utiliza los números enteros para completar la tabla que indica la variación en la clasificación de un mes a otro.

Equipo	1.º A	2.º A	1.º B	2.º C	2.º B
Variación	-3	-3	+1	+3	+2

**2** Representa en la recta numérica los números enteros:

$-8; +5; 0; -4; +6; -10$



**3** Encuentra un número entero que cumpla las condiciones:

- a) Es mayor que  $-3$  y menor que  $0$ .
- b) Su valor absoluto es menor que  $5$ .
- c) Entre él y su opuesto hay cinco números enteros.
- d) Está comprendido entre  $-2$  y  $+2$ .

- a)  $-2$       b)  $1, 2, 3, 4$       c)  $-3$       d)  $-1$

**4** Calcula:

- a)  $(-6) + (-2)$
  - b)  $5 + (-4)$
  - c)  $9 - (+12)$
  - d)  $(-4) - (-8)$
  - e)  $(-3) + 8$
  - f)  $(-1) - (-1)$
- a)  $-8$       b)  $1$       c)  $-3$   
 d)  $4$       e)  $5$       f)  $0$

**5** Utiliza las propiedades de la suma para realizar estas operaciones:

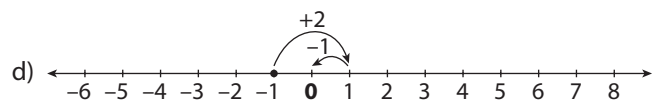
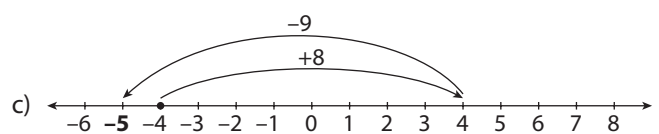
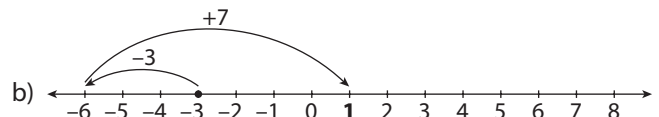
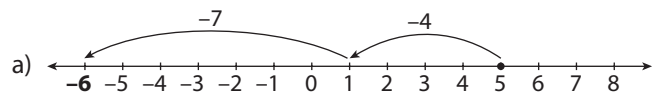
- a)  $3 + (-10) + (-4)$
  - b)  $(-5) + 3 - (-8)$
  - c)  $-(-4) + 8 + (-2)$
  - d)  $(-2) + 2 + (-6) - (-8) + 3$
  - e)  $(-4) - (-5) - (-2) + (-2)$
- a)  $-11$       b)  $6$       c)  $10$   
 d)  $5$       e)  $1$

**6** Calcula el valor de  $x$  en cada caso:

- a)  $7 - (-5) + x = 10$
  - b)  $(-4) + (-1) - x = -2$
  - c)  $8 + 4 + x = -4$
  - d)  $3 - (-1) + x = 6$
  - e)  $5 + x - (-1) = -9$
  - f)  $10 - (-3) - x = 11$
- a)  $-2$       b)  $-3$       c)  $-16$   
 d)  $2$       e)  $-15$       f)  $2$

**7** Realiza las siguientes operaciones sobre la recta numérica:

- a)  $5 + (-4) + (-7)$
- b)  $-3 + (-3) + 7$
- c)  $-4 + 8 + (-9)$
- d)  $-1 + 2 + (-1)$



**8** Realiza las operaciones con números enteros:

- a)  $(-5) \cdot (-2)$
  - b)  $(+8) \cdot (-4)$
  - c)  $(-4) \cdot (-8)$
  - d)  $(-6) : (+2)$
  - e)  $(+9) : (-3)$
  - f)  $(-8) : (-4)$
- a)  $10$       b)  $-32$       c)  $32$   
 d)  $-3$       e)  $-3$       f)  $2$

**9** Utiliza la propiedad asociativa para hacer las multiplicaciones:

- a)  $(-2) \cdot (+4) \cdot (-5)$
  - b)  $(+5) \cdot (-2) \cdot (-9)$
- a)  $40$       b)  $90$

**10** Calcula las siguientes potencias:

- a) De base  $-3$  y exponente  $2$ .
  - b) De base  $5$  y exponente  $3$ .
  - c) De base  $-4$  y exponente  $3$ .
  - d)  $2$  elevado al cubo.
  - e)  $5$  elevado al cuadrado.
- a)  $(-3)^2 = 9$       b)  $5^3 = 125$       c)  $(-4)^3 = -64$   
 d)  $2^3 = 8$       e)  $5^2 = 25$

**11** Escribe los siguientes productos como una sola potencia:

- a)  $(-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)$
  - b)  $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$
  - c)  $(-5) \cdot (-5)^2$
  - d)  $2^5 \cdot (-3)^5$
  - e)  $4^8 \cdot 3^8$
- a)  $(-2)^6$       b)  $3^9$       c)  $(-5)^3$   
 d)  $(-6)^5$       e)  $12^8$

**12** Escribe estos cocientes como una sola potencia:

- a)  $3^4 : 3^2$                       b)  $(-4)^6 : (-4)^3$   
 c)  $(-2)^5 : (-2)^3$               d)  $(-10)^5 : (-5)^5$   
 e)  $12^6 : (-4)^6$                   f)  $(-5)^4 : (-5)^3$
- a)  $3^2$                       b)  $(-4)^3$                       c)  $(-2)^2$   
 d)  $2^5$                       e)  $(-3)^6$                       f)  $-5$

**13** Calcula y simplifica:

- a)  $3^4 : 3^2$                       b)  $(-4)^3 : (-4)^2 \cdot (-4)$   
 c)  $[(-2)^8 \cdot (-2)^3] : [(-2)^4 \cdot (-2)^5]$       d)  $(-3)^4 \cdot (-3)^5 : (-3)^3$   
 e)  $(-2)^4 \cdot 5^4 : 10^2$
- a)  $3^2 = 9$                       b)  $(-4)^2 = 16$                       c)  $(-2)^2 = 4$   
 d)  $(-3)^6 = 729$                       e)  $10^2 = 100$

**14** Calcula:

- a)  $[(-2)^3]^2$                       b)  $(3^2)^2$                       c)  $[(-5)^2]^3$   
 a)  $(-2)^6 = 2^6$                       b)  $3^4 = 81$                       c)  $(-5)^6 = 5^6$

**15** Realiza las operaciones:

- a)  $[2 \cdot (-3^2 : 3) + (-5) \cdot (4 - 6)^2] \cdot (-2)$   
 b)  $(-3) \cdot (-3 - 5)^2 + 4 \cdot (-2)$   
 c)  $(-3 + 5) : 2 + 6 \cdot (-5)$
- a)  $[2 \cdot (-3^2 : 3) + (-5) \cdot (4 - 6)^2] \cdot (-2) =$   
 $= [2 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-2)^2] \cdot (-2) = (-6 - 20) \cdot (-2) = 52$   
 b)  $(-3) \cdot (-3 - 5)^2 + 4 \cdot (-2) = (-3) \cdot (-8)^2 - 8 = (-3) \cdot 64 - 8 =$   
 $= -192 - 8 = -200$   
 c)  $(-3 + 5) : 2 + 6 \cdot (-5) = 2 : 2 - 30 = 1 - 30 = -29$

**16** Calcula:

- a)  $[3 \cdot (-3)^2]^2 + (4 \cdot 2 + 6) : 7$   
 b)  $(-5 \cdot 2 + 3 \cdot 2) : 4 + [(-2)^3]^2 - 5 \cdot (-3)$   
 c)  $(4 \cdot 3 - 8) - (-5)^2$
- a)  $[3 \cdot (-3)^2]^2 + (4 \cdot 2 + 6) : 7 = (3 \cdot 3^2)^2 + (8 + 6) : 7 =$   
 $= 27^2 + 14 : 2 = 729 + 7 = 736$   
 b)  $(-5 \cdot 2 + 3 \cdot 2) : 4 + [(-2)^3]^2 - 5 \cdot (-3) = (-10 + 6) : 4 + 64 + 15 =$   
 $= (-4) : 4 + 64 + 15 = 78$   
 c)  $(4 \cdot 3 - 8) - (-5)^2 = (12 - 8) - 25 = 4 - 25 = -21$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

**1**  Asocia cada situación con un número entero:

- a) La temperatura mínima de hoy ha sido 8 °C bajo cero.

- b) A Juan le debo 4 €.

- c) El ascensor está en la 4.ª planta.

- d) El ascensor está en el tercer sótano.

- e) Roma se fundó en el año 753 a. C.

- a) -8                      b) -4                      c) +4  
 d) -3                      e) -753

**2**  Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- a) El conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros.  
 b) Si se elige un número natural siempre se puede encontrar un número natural menor que él.  
 c) Si se elige un número entero siempre se puede encontrar un número entero menor que él.  
 d) Todo número natural es un número entero.  
 e) Todo número entero es un número natural.

- a) Verdadera.  
 b) Falsa (no hay ningún número natural menor que el 0)  
 c) Verdadera.  
 d) Verdadera.  
 e) Falsa.

**3**  Escribe en tu cuaderno todos los números enteros comprendidos entre:

- a) -5 y -1                      b) -4 y 0                      c) -1 y +2  
 a) -4, -3, -2                      b) -3, -2, -1                      c) 0, +1

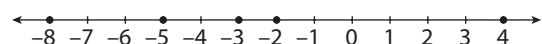
**4**  Ordena de menor a mayor los números enteros:

-1, +8, -5, +3, -2, +1 y +4

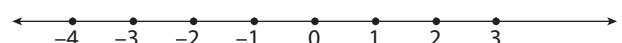
$-5 < -2 < -1 < +1 < +3 < +4 < +8$

**5**  Representa en la recta numérica:

-2, -3, -8, 4 y -5



**6**  Representa en una recta numérica los números enteros comprendidos entre -4 y +3.



**7**  Utiliza los números enteros para resolver la siguiente cuestión:

«Si estamos situados en el punto -3 de la recta numérica y un desplazamiento consiste en avanzar 4 unidades y retroceder 2, al repetir este proceso 5 veces, ¿en qué punto de la recta numérica estaremos?».

$-3 + 5 \cdot (4 - 2) = 7$ . Estaremos en el 7.

# 2 NÚMEROS ENTEROS

<http://www.McGraw-Hill.es>

**8**  Indica cuál es el valor absoluto de los números enteros:

-10, +15, -3, -1, 0 y +8

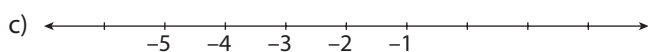
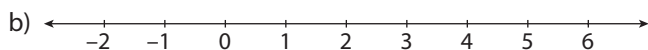
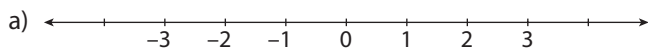
10, 15, 3, 1, 0, 8

**9**  Representa en la recta numérica los números enteros:

a) Menores en valor absoluto que 4.

b) Menores que 7 y mayores que -3.

c) Menores que 0 y mayores que -6.



## OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

**10**  Calcula:

a)  $(-8) + (-5)$

b)  $(-5) - (-7)$

c)  $(+10) - (-12)$

d)  $(-6) - (+8)$

a) -13

b) 2

c) 22

d) -14

**11**  Aplica las propiedades de la suma para calcular:

a)  $(+2) - (-12) + (+4)$

b)  $(-6) + (+7) - (+8)$

c)  $-(-6) + (+3) + (+1)$

d)  $(-3) - (-6) + (-6) - (+8) - (-5)$

a)  $(+2) - (-12) + (+4) = 2 + 12 + 4 = 18$

b)  $(-6) + (+7) - (+8) = -6 + 7 - 8 = -7$

c)  $-(-6) + (+3) + (+1) = 6 + 3 + 1 = 10$

d)  $(-3) - (-6) + (-6) - (+8) - (-5) = -3 + 6 - 6 - 8 + 5 = -6$

**12**  Calcula el valor de x en cada caso:

a)  $(+6) - (+5) + x = (-9)$

b)  $(+7) + (-1) - x = (+12)$

c)  $(-9) + (-4) + x = (-8)$

d)  $(+4) + (-1) + x = (+2)$

a)  $(+6) - (+5) + x = (-9); 6 - 5 + x = -9; x = -9 - 6 + 5; x = -10$

b)  $(+7) + (-1) - x = (+12); 7 - 1 - x = 12; -x = 12 - 7 + 1; x = -6$

c)  $(-9) + (-4) + x = (-8); -9 - 4 + x = -8; x = -8 + 9 + 4; x = 5$

d)  $(+4) + (-1) + x = (+2); 4 - 1 + x = 2; x = 2 - 4 + 1; x = -1$

**13**  Escribe el opuesto de:

a) -12

b) 16

c) -9

d) -1

a) 12

b) -16

c) 9

d) 1

**14**  Comprueba si la resta de números enteros cumple las siguientes propiedades:

a) Conmutativa.

b) Asociativa.

a) No, ya que  $2 - 1$  es distinto de  $1 - 2$ .

b) Verdadero.

**15**  Calcula:

a)  $(-3) \cdot (-4)$

b)  $(-3) \cdot (+5)$

c)  $(+9) \cdot (+2)$

d)  $(+6) \cdot (-2)$

a) 12

b) -15

c) 18

d) -12

**16**  Aplica la propiedad asociativa para hacer la multiplicación:

a)  $(+3) \cdot (+7) \cdot (-2)$

b)  $(-3) \cdot (+2) \cdot (-5)$

c)  $(-7) \cdot (+3) \cdot (-4)$

d)  $(+5) \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (+4) \cdot (+6)$

a) -42

b) 30

c) 84

d) 1200

**17**  Utiliza la propiedad distributiva para realizar las multiplicaciones de dos formas:

a)  $(+2) \cdot [(-5) + (-2)]$

b)  $[(-4) - (-5)] \cdot (+3)$

c)  $(-6) \cdot [(-2) + (+5)]$

d)  $(+3) \cdot [(+12) + (-2)]$

a)  $2 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -14$

b)  $(-4) \cdot 3 - (-5) \cdot 3 = 3$

c)  $(-6) \cdot (-2) + (-6) \cdot 5 = -18$

d)  $3 \cdot 12 + 3 \cdot (-2) = 30$

**18**  Aplica la propiedad distributiva para realizar las multiplicaciones:

a)  $(-5) \cdot [(+5) + (-3)]$

b)  $[(+2) - (-3)] \cdot (+2)$

c)  $(-4) \cdot [(-3) + (+8)]$

d)  $(+1) \cdot [(-10) + (-5)]$

a)  $(-5) \cdot 5 + (-5) \cdot (-3) = -25 + 15 = -10$

b)  $2 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 4 + 6 = 10$

c)  $(-4) \cdot (-3) + (-4) \cdot 8 = 12 - 32 = -20$

d)  $1 \cdot (-10) + 1 \cdot (-5) = -10 - 5 = -15$

**19**  Saca factor común para calcular:

a)  $(-7) \cdot (-4) + (-2) \cdot (-4)$

b)  $(-5) \cdot (-2) + 5 \cdot (-2)$

c)  $(-3) \cdot (-5) + (-3) \cdot 6$

a)  $(-4) \cdot [-7 + (-2)] = 36$

b)  $10 \cdot (-1 + 1) = 0$

c)  $(-3) \cdot [(-5) + 6] = -3$

**20**  Aplica la propiedad distributiva para calcular:

a)  $(-2) \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) - (-2) \cdot (-6)$

b)  $(-3) \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) - (-3) \cdot (-2)$

c)  $(-5) \cdot 2 + (-5) \cdot (-4) - (-5) \cdot (-3)$

a)  $-2 \cdot [4 + (-3) - (-6)] = -14$

b)  $-3 \cdot [5 + (-3) - (-2)] = -12$

c)  $-5 \cdot [2 + (-4) - (-3)] = -5$

**21**  Aplica la propiedad distributiva para calcular:

a)  $(-2) \cdot 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-5) \cdot 6 - (-2) \cdot (-6) \cdot 3$

b)  $9 \cdot (-3) \cdot 2 + (-3) \cdot 4 \cdot 6 - 2 \cdot (-3) \cdot 3$

c)  $(-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \cdot 6 - 4 \cdot (-2) \cdot 5$

- a)  $12 \cdot (2 + 5 - 3) = 48$   
 b)  $18 \cdot (-3 - 4 + 1) = -108$   
 c)  $4 \cdot (-1 - 12 + 10) = -12$

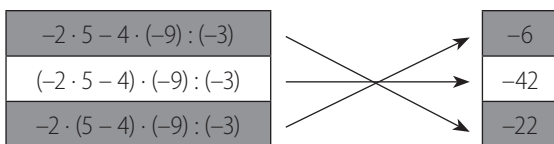
**22** **Saca factor común para calcular:**

- a)  $(-4) + (-2) \cdot (-4) - 5 \cdot (-4)$   
 b)  $(-5) \cdot (-4) + 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-4)$   
 c)  $(-3) \cdot (-5) + (-3) \cdot 6 - 3$
- a)  $-4 \cdot (1 - 2 - 5) = 24$   
 b)  $-4 \cdot (-5 + 5 - 4) = 16$   
 c)  $-3 \cdot (-5 + 6 + 1) = -6$

**23** **Resuelve estas divisiones:**

- a)  $(-8) : (+2)$                       b)  $(+6) : (-3)$   
 c)  $(-9) : (-3)$                       d)  $(+18) : (+6)$
- a) -4                      b) -2                      c) 3                      d) 3

**24** **Copia en tu cuaderno y asocia cada operación con su resultado:**



**25** **Expresa como potencia las siguientes multiplicaciones:**

- a)  $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$                       b)  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$   
 c)  $(-5) \cdot (-5)$     d)  $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
- a)  $2^4$                       b)  $3^4$                       c)  $5^2$                       d)  $1^6 = 1$

**26** **Expresa en forma de multiplicación y calcula el valor de las potencias:**

- a)  $(+2)^4$     b)  $(-3)^2$   
 c)  $(+4)^3$     d)  $(-4)^4$
- a)  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$                                       b)  $-3 \cdot (-3) = 9$   
 c)  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$     d)  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$

**27** **Calcula las potencias:**

- a) De base -5 y exponente 3.  
 b) De base 4 y exponente 2.  
 c) De base -2 y exponente 3.  
 d) 3 elevado al cubo.  
 e) 4 elevado al cuadrado.
- a) -125                      b) 16                                      c) -8  
 d) 27                                      e) 16

**28** **Sin hacer los cálculos, explica cómo ordenas de menor a mayor estas potencias:**

$(-5)^2$                        $(-8)^3$                        $(-5)^4$                        $(-8)^4$

Teniendo en cuenta los signos, la base y el exponente:

$(-8)^3 < (-5)^2 < (-5)^4 < (-8)^4$

**29** **Copia en tu cuaderno y completa las series de números enteros con dos términos más:**

- a) -7, 14, -28, 56, ..., ...                      b) -1, -8, -27, ..., ...  
 c) 1, 4, 9, 16, ..., ...                              d) -7, -5, -3, -1, ..., ...
- a) -112, 224                      b) -64, -125                      c) 25, 36                      d) +1, +3

**30** **Escribe los productos como una sola potencia:**

- a)  $(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)$                               b)  $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$   
 c)  $(-4) \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^3$
- a)  $3^6$                                       b)  $2^9$                                       c)  $4^6$

**31** **Copia en tu cuaderno y completa los siguientes cálculos:**

- a)  $(-2)^5 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 = (-2)^\square$                       b)  $(-3)^2 \cdot (-3)^\square = (-3)^7$   
 c)  $(-2)^7 : (-2)^\square = (-2)^5$                               d)  $(-2)^\square : (-2)^3 = (-2)^6$   
 e)  $[( -2)^\square]^4 = (-2)^{12}$
- a)  $(-2)^{12}$                                       b)  $(-3)^5$                                       c)  $(-2)^2$   
 d)  $(-2)^9$                                       e)  $[( -2)^3]^4$

**32** **Escribe los cocientes como una sola potencia:**

- a)  $4^4 : 4^2$     b)  $(-3)^9 : (-3)^6$                                       c)  $(-2)^6 : (-2)^3$   
 a)  $4^2$     b)  $(-3)^3$     c)  $(-2)^3$

**33** **Calcula y simplifica:**

- a)  $2^4 : 2^3$     b)  $(-2)^3 : (-2)^2 \cdot (-2)$   
 c)  $[(-3)^4 \cdot (-3)^6] : [(-3)^2 \cdot (-3)^6]$
- a) 2    b) 4    c) 9

**34** **Simplifica y utiliza la calculadora para obtener el resultado de:**

- a)  $[(-4)^3]^5$     b)  $(5^3)^2$     c)  $[(-2)^3]^3$
- a)  $-4^{15} = -1\ 073\ 741\ 824$                               b)  $5^6 = 15\ 625$   
 c)  $-2^9 = -512$

**35** **Si a, b y c son números enteros, tales que a > 0, b > 0 y c < 0, indica el signo de las operaciones siguientes:**

- a)  $a \cdot (-b^2) \cdot c$     b)  $a \cdot b^2 \cdot (-c)$   
 c)  $-a \cdot b^2 \cdot (-c)$     d)  $a \cdot (-b)^2 \cdot c$
- a) Negativo    b) Positivo  
 c) Negativo    d) Negativo

# 2 NÚMEROS ENTEROS

<http://www.McGraw-Hill.es>

**36**  ¿Cuáles de los siguientes números son cuadrados perfectos?

- a) 81                      b) 101                      c) 100  
d) 121                      e) 75                      f) 25

Los a), c), d) y f).

**37**  Sin utilizar la calculadora, indica si son correctas las igualdades:

- a)  $\sqrt{442} = 21$                       b)  $\sqrt{625} = -25$   
c)  $\sqrt{144} = -13$                       d)  $\sqrt{144} = -12$

- a) No, porque el radicando debe acabar en 1.  
b) Sí.  
c) No, porque el radicando debe acabar en 9 y, además, un número positivo no puede ser igual a un número negativo.  
d) Sí.

**38**  Calcula:

- a)  $|-4| + |-3| - |-5| \cdot |+3|$                       b)  $-|-14| : (-7) - |-15|$   
c)  $-|(-6) \cdot (-2)| + |-5| \cdot (-2)^4$   
a)  $|-4| + |-3| - |-5| \cdot |+3| = 4 + 3 - 5 \cdot 3 = 7 - 15 = -8$   
b)  $-|-14| : (-7) - |-15| = -14 : (-7) - 15 = 2 - 15 = -13$   
c)  $-|(-6) \cdot (-2)| + |-5| \cdot (-2)^4 = -12 + 5 \cdot 16 = -12 + 80 = 68$

**39**  Explica por qué son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

- a) La suma de dos números enteros es siempre un número entero.  
b) La multiplicación de dos números enteros es siempre un número entero.  
c) La división de dos números enteros es siempre un número entero.  
d) La raíz cuadrada de un número entero es siempre un número entero.  
a) Verdadera.  
b) Verdadera.  
c) Falsa ( $2 : 3$  no es un número entero).  
d) Falsa (la raíz cuadrada de 2 no es un número entero).

**40**  Calcula:

- a)  $(-3) \cdot [(-4) : 2 + (-2)]$                       b)  $(-2)^2 \cdot [7 + (-3)^2]$   
c)  $[(-2) \cdot (9 : 3 + (-2))]^2 \cdot (-3)^2$   
a)  $(-3) \cdot [(-4) : 2 + (-2)] = -3 \cdot (-2 - 2) = -3 \cdot (-4) = 12$   
b)  $(-2)^2 \cdot [7 + (-3)^2] = 4 \cdot (7 + 9) = 4 \cdot 16 = 64$   
c)  $[(-2) \cdot (9 : 3 + (-2))]^2 \cdot (-3)^2 = [(-2) \cdot (3 + 2)]^2 \cdot 9 = (-2) \cdot 25 \cdot 9 = -450$

## PROBLEMAS CON NÚMEROS ENTEROS

**41**  En una tienda de alquiler de películas, al finalizar la semana, tienen un total de 302 DVD. Si durante la última semana han prestado 45 películas y se han devuelto 52, ¿cuántos DVD tenía la tienda al comenzar la semana?

$$302 + 45 - 52 = 295 \text{ películas.}$$

**42**  Una empresa con 15 empleados empezó el año con un saldo negativo de 40 000 €, pero cuando finalizó el año su saldo era de 27 540 €.

- a) ¿Cuál es el beneficio neto de la empresa?  
b) Si para premiar el esfuerzo de los empleados se dieron a cada uno 600 € como paga extra, ¿cuál fue el beneficio bruto de la empresa?

a)  $40\,000 + 27\,500 = 67\,500$

b)  $67\,500 + 600 \cdot 15 = 76\,500$

**43**  Un edificio tiene tres sótanos, planta baja y diez plantas más. Si Luis sube del tercer sótano a la planta segunda, Alberto de la planta primera a la octava, Cristina del primer sótano a la séptima planta y Carmen de la planta tercera a la décima, ¿quién ha subido más plantas? Ordena de mayor a menor, según el número de pisos que ha subido cada uno.

Cristina ha subido más plantas; Cristina (8), Alberto (7) = Carmen (7), Luis (5).

**44**  Un canguro se desplaza dando saltos de 2 metros cada uno. Si ha dado tres saltos hacia delante, un salto hacia atrás, cuatro saltos hacia delante y dos saltos hacia atrás, ¿a qué distancia del punto de partida se encuentra?



$$6 - 2 + 8 - 4 = 8. \text{ Está a 8 m del punto de partida.}$$

**45**  En un autobús viajan 23 personas. En la primera parada suben tres personas y se baja una; en la segunda parada se bajan dos pasajeros; en la tercera parada suben cuatro y se bajan dos; en la cuarta parada se bajan tres y sube uno. ¿Cuántas personas llegan al final del trayecto?



$$23 + 3 - 1 - 2 + 4 - 2 - 3 + 1 = 23 \text{ personas.}$$

**46**  El precio de la entrada a un espectáculo es de 8 €, pero hay un descuento de 2 € por cada tres entradas que se compren. Si pedimos 15 entradas, ¿cuánto dinero tendremos que pagar por ellas?



$$(15 \cdot 8) - (15 : 3 \cdot 2) = 120 - 10 = 110 \text{ €}$$

**47**   Un buceador se sumerge descendiendo 3 metros cada 10 segundos. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a una profundidad de 24 metros? Si desde esa profundidad inicia el ascenso a razón de 2 metros cada 12 segundos, ¿en cuánto tiempo alcanzará la superficie?

a)  $24 : 3 \cdot 10 = 80$  segundos; b)  $24 : 2 \cdot 12 = 144$  segundos.

**48**   En un campo se han plantado pinos, distribuidos en filas y columnas, formando un cuadrado. Como sobran 25 pinos, se compran 16 pinos más. ¿Cuántos árboles se han plantado en total?



Como al añadir 41 pinos ( $25 + 16$ ) ya se forma un cuadrado, el número de pinos plantados es  $\left(\frac{41 + 1}{2}\right)^2 = 21^2 = 441$ . Donde hemos utilizado que todo número impar  $n$  es el número de puntos de dos de los lados de una cuadrícula cuyo lado tiene  $\frac{n + 1}{2}$  puntos.

**49**   Un depósito de agua, con una capacidad de 3 000 litros, tiene un grifo del que salen 20 litros por minuto y una válvula de entrada al depósito con un caudal de 16 litros por minuto. Si se abren a la vez el grifo de salida y la válvula de entrada, ¿qué cantidad de agua hay en el depósito al cabo de 5 minutos?

$3\,000 - 5 \cdot (20 - 16) = 2\,995$  litros.

**50**   Una cámara frigorífica se enfría a razón de  $5\text{ }^\circ\text{C}$  cada 2 horas. Si la temperatura inicial es de  $20\text{ }^\circ\text{C}$ , ¿cuántas horas tardará en llegar a los  $20\text{ }^\circ\text{C}$  bajo cero? Utiliza los números enteros para resolver la cuestión.

$-20 = 20 - 5 \cdot x : 2$ . Tardará 16 horas.

**51**   El termómetro de una cámara frigorífica marca  $-20\text{ }^\circ\text{C}$  de temperatura. Si al desconectar el motor de funcionamiento la temperatura sube  $4\text{ }^\circ\text{C}$  cada 2 horas, ¿cuánto tiempo tarda en alcanzar la temperatura de  $20\text{ }^\circ\text{C}$ ?

$20 = -20 + 4 \cdot x : 2$ . Tardará 20 horas.

# 3 NÚMEROS RACIONALES

<http://www.McGraw-Hill.es>

## EJERCICIOS

**1** Escribe cuatro fracciones equivalentes a cada una de las siguientes y halla también las fracciones irreducibles en cada caso:

$$\frac{32}{12}, \frac{3}{9}, \frac{4}{16}, \frac{8}{32}, \frac{6}{18}, \frac{4}{20}, \frac{4}{24}, \frac{18}{81}$$

$$\frac{32}{12} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = \frac{24}{9} = \frac{40}{15}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15}$$

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{5}{20}$$

$$\frac{8}{32} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$$

$$-\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} = -\frac{2}{6} = -\frac{3}{9} = -\frac{4}{12}$$

$$\frac{4}{20} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \frac{5}{25}$$

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{5}{30}$$

$$\frac{18}{81} = \frac{2}{9} = \frac{6}{27} = \frac{4}{18} = \frac{8}{36}$$

**2** El estudio estadístico realizado en la taquilla de un cine nos dice que  $\frac{3}{27}$  de los que hacen cola se cuelan.

Si hay una fila de 54 personas esperando, ¿cuántos podremos decir que se van a colar?

$$\frac{3}{27} \cdot 54 = 3 \cdot 2 = 6$$

**3** Clasifica estos números racionales, e indica si son enteros o no enteros:

$$\frac{6}{10}, \frac{8}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{9}{3}, -\frac{16}{4}, \frac{7}{9}, -\frac{9}{5}, \frac{3}{4}, -\frac{6}{3}$$

Todos son racionales. Son naturales  $\frac{8}{4}$  y  $\frac{9}{3}$ .

Son enteros los que son naturales y, además,  $-\frac{16}{4}$  y  $-\frac{6}{3}$ .

**4** Observa los siguientes pares de números e indica cuál es el mayor y cuál el menor:

a)  $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}$

b)  $\frac{6}{9}, \frac{1}{3}$

c)  $\frac{6}{8}, \frac{5}{7}$

d)  $\frac{2}{5}, \frac{3}{7}$

e)  $\frac{4}{8}, \frac{2}{9}$

f)  $\frac{1}{8}, \frac{3}{2}$

a)  $\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$

b)  $\frac{6}{9} > \frac{1}{3}$

c)  $\frac{6}{8} > \frac{5}{7}$

d)  $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$

e)  $\frac{4}{8} > \frac{2}{9}$

f)  $\frac{1}{8} < \frac{3}{2}$

**5** Explica con tus palabras cómo se representan los números racionales en la recta. Ayúdate con ejemplos.

Ver libro.

**6** Ordena de mayor a menor los siguientes números racionales:

$$\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{7}, -\frac{1}{15}$$

$$\frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{2}{7} > -\frac{1}{15} > -\frac{1}{3}$$

**7** Clasifica estos números en el conjunto al que pertenecen:

$$-\frac{10}{2}, \frac{5}{1}, \frac{6}{8}, -\frac{1}{2}$$

Natural:  $\frac{5}{1}$ ; entero:  $-\frac{10}{2}$ ; racionales:  $\frac{6}{8}, -\frac{1}{2}$

**8** Realiza las siguientes sumas y restas, y simplifica el resultado:

a)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

b)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{7}$

c)  $\frac{6}{14} + \frac{4}{7} - \frac{1}{7}$

d)  $\frac{2}{10} - \frac{1}{5}$

e)  $\frac{4}{12} + \frac{1}{24} - \frac{3}{12}$

f)  $\frac{8}{9} - \frac{3}{9} + \frac{1}{3}$

a)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

b)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{4}{7} = \frac{14}{21} + \frac{7}{21} + \frac{12}{21} = \frac{33}{21} = \frac{11}{7}$

c)  $\frac{6}{14} + \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{6}{14} + \frac{8}{14} - \frac{2}{14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

d)  $\frac{2}{10} - \frac{1}{5} = \frac{2}{10} - \frac{2}{10} = 0$

e)  $\frac{4}{12} + \frac{1}{24} - \frac{3}{12} = \frac{8}{24} + \frac{1}{24} - \frac{6}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

f)  $\frac{8}{9} - \frac{3}{9} + \frac{1}{3} = \frac{8}{9} - \frac{3}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9}$

**9** Resuelve las siguientes sumas y restas, simplificando el resultado:

a)  $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)$

b)  $\frac{2}{8} - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)$

c)  $\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{7}$

d)  $\frac{3}{8} + \frac{2}{16} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\right)$

a)  $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$

b)  $\frac{2}{8} - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{8} - \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) = \frac{2}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$

$$= \frac{2}{8} - \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$c) \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{7} = \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{21} + \frac{6}{21} + \frac{3}{21} = \frac{16}{21}$$

$$d) \frac{3}{8} + \frac{2}{16} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{6}\right) = \frac{3}{8} + \frac{2}{16} - \left(\frac{2}{6} + \frac{2}{6}\right) = \frac{3}{8} + \frac{2}{16} - \frac{4}{6} =$$

$$= \frac{18}{48} + \frac{6}{48} - \frac{32}{48} = -\frac{8}{48} = -\frac{4}{24} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

**10** Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones y simplifica el resultado:

a)  $\frac{2}{9} : \frac{2}{9}$                       b)  $\left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4}$

c)  $\frac{3}{8} : \frac{1}{4} \cdot 2$                 d)  $3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$

e)  $\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$                 f)  $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$

a)  $\frac{2}{9} : \frac{2}{9} = \frac{18}{18} = 1$             b)  $\left(-\frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

c)  $\frac{3}{8} : \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{12}{8} \cdot 2 = 3$     d)  $3 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{9}{28}$

e)  $\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{140} = \frac{9}{70}$

f)  $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -\frac{24}{630} = -\frac{12}{315} = -\frac{4}{105}$

**11** Un pintor ha pintado las  $\frac{3}{8}$  partes de una superficie en una hora. ¿Cuánto habrá pintado en  $\frac{3}{4}$  de hora más?

$\frac{3}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{32}$  ha pintado en una hora y tres cuartos.

**12** Resuelve las siguientes operaciones y simplifica el resultado. Recuerda que debes tener en cuenta la jerarquía de operaciones:

a)  $\left(\frac{3}{5} : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3}$                 b)  $\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4}\right) : 2$

c)  $2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4}$             d)  $-2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4}$

a)  $\left(\frac{3}{5} : \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{5}$

b)  $\left(\frac{2}{7} \cdot \frac{1}{4}\right) : 2 = \frac{2}{28} : 2 = \frac{2}{56} = \frac{1}{28}$

c)  $2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) : \frac{1}{4} = 2 \cdot 1 : \frac{1}{4} = 8$

d)  $-2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} = -2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

**13** Una entrada de cine me cuesta  $\frac{6}{14}$  de mi paga semanal. ¿Qué fracción de mis pagas semanales he gastado si he ido al cine una vez a la semana durante 7 semanas? ¿Y si voy dos veces a la semana durante cuatro semanas?

$7 \cdot \frac{6}{14} = 3$  pagas.

$4 \cdot 2 \cdot \frac{6}{14} = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$

**14** Calcula mentalmente las potencias siguientes y expresa el resultado en forma de fracción:

a)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$                       b)  $\left(\frac{2}{5}\right)^2$                       c)  $\left(\frac{3}{4}\right)^4$

d)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3$                       e)  $\left(-\frac{1}{4}\right)^2$                       f)  $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$

a)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$                 b)  $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$                 c)  $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$

d)  $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$                 e)  $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$                 f)  $\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{27}{125}$

**15** Opera y simplifica:

a)  $\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{5}\right)^2$                       b)  $\frac{2}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$

c)  $\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{17}{26} - 1\right)$             d)  $3 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{6}\right) - \left(-\frac{2}{8}\right)^3$

e)  $\left(-\frac{5}{-7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2$                 f)  $\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$

a)  $\frac{1}{6} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{6} + \frac{4}{25} = \frac{25}{150} + \frac{24}{150} = \frac{49}{150}$

b)  $\frac{2}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{4} - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{4} - \frac{2}{8} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

c)  $\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{17}{26} - 1\right) = \frac{16}{25} - \left(\frac{17}{26} - \frac{26}{26}\right) = \frac{16}{25} + \frac{9}{26} =$   
 $= \frac{416}{650} + \frac{225}{650} = \frac{641}{650}$

d)  $3 \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{6}\right) - \left(-\frac{2}{8}\right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{24}{30} + \frac{10}{30}\right) + \frac{8}{512} = 3 \cdot \frac{34}{30} + \frac{1}{64} =$   
 $= \frac{102}{30} + \frac{1}{64} = \frac{6528}{1920} + \frac{30}{1920} = \frac{6558}{1920} = \frac{3279}{960}$

e)  $\left(-\frac{5}{-7}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{5}{28}$

f)  $\left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{4}{49} \cdot \frac{343}{27} \cdot \frac{81}{16} = \frac{21}{4}$



# 3 NÚMEROS RACIONALES

<http://www.McGraw-Hill.es>

**16** Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

«Toda fracción elevada a un exponente negativo dará como resultado una fracción negativa».

Falso.

**17** Calcula las siguientes potencias y expresa el resultado en forma de fracción:

a)  $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$       b)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$       c)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$   
 d)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$       e)  $\left(-\frac{4}{6}\right)^{-2}$       f)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

a)  $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$

b)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 = 125$

c)  $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

d)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{4}{3}\right)^4 = \frac{256}{81}$

e)  $\left(-\frac{4}{6}\right)^{-2} = \left(-\frac{6}{4}\right)^2 = \frac{36}{16} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$

f)  $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

**18** Realiza las siguientes operaciones:

a)  $2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$       b)  $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \frac{2}{6}$

c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$       d)  $\frac{4}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2$

a)  $2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} = 2 \cdot \left(\frac{3}{15} + \frac{10}{15}\right) - (-3) = 2 \cdot \frac{13}{15} + 3 =$   
 $= \frac{26}{15} + \frac{45}{15} = \frac{71}{15}$

b)  $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + \frac{2}{6} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{6} = 3 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{6} = \frac{4}{3} + \frac{2}{6} =$   
 $= \frac{8}{6} + \frac{2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{8} = \frac{27}{8} + \frac{3}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$

d)  $\frac{4}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2 = \frac{4}{8} + \left(\frac{2}{1}\right)^3 \cdot 2 = \frac{4}{8} + 16 = \frac{4}{8} + \frac{128}{8} =$   
 $= \frac{132}{8} = \frac{33}{2}$

**19** Calcula mentalmente las raíces cuadradas de los siguientes números racionales, y expresa el resultado en forma de fracción:

a)  $\sqrt{\frac{9}{81}}$

b)  $\sqrt{\frac{4}{16}}$

c)  $\sqrt{\frac{16}{36}}$

d)  $\sqrt{\frac{25}{36}}$

e)  $\sqrt{\frac{4}{49}}$

f)  $\sqrt{\frac{9}{64}}$

a)  $\sqrt{\frac{9}{81}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b)  $\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c)  $\sqrt{\frac{16}{36}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

d)  $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$

e)  $\sqrt{\frac{4}{49}} = \frac{2}{7}$

f)  $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$

**20** Realiza las siguientes raíces, dejando el resultado en forma de fracción:

a)  $\sqrt{\frac{256}{144}}$

b)  $\sqrt{\frac{81}{324}}$

c)  $\sqrt{\frac{121}{225}}$

d)  $\sqrt{\frac{49}{36}}$

e)  $\sqrt{\frac{900}{1225}}$

f)  $\sqrt{\frac{64}{196}}$

a)  $\sqrt{\frac{256}{144}} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

b)  $\sqrt{\frac{81}{324}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

c)  $\sqrt{\frac{121}{225}} = \frac{11}{15}$

d)  $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$

e)  $\sqrt{\frac{900}{1225}} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$

f)  $\sqrt{\frac{64}{196}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### FRACCIONES. EQUIVALENCIA DE FRACCIONES

1 Define qué es una fracción equivalente. ¿Cómo comprobamos que dos fracciones son equivalentes?

Dos fracciones  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  son equivalentes si se cumple  $a \cdot d = b \cdot c$ .

2 ¿Qué son las fracciones irreducibles? Halla la fracción irreducible en cada caso:

a)  $\frac{26}{38}$       b)  $\frac{92}{196}$       c)  $\frac{27}{81}$

Son las que no se pueden simplificar más.

a)  $\frac{26}{38} = \frac{13}{19}$       b)  $\frac{92}{196} = \frac{23}{49}$       c)  $\frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

3 Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:

a)  $-\frac{3}{5}$       b)  $\frac{2}{11}$       c)  $\frac{2}{9}$

d)  $\frac{3}{27}$       e)  $\frac{4}{16}$       f)  $\frac{11}{22}$

a)  $-\frac{3}{5} = \frac{-6}{10} = \frac{-9}{15} = \frac{-12}{20}$       b)  $\frac{2}{11} = \frac{4}{22} = \frac{6}{33} = \frac{8}{44}$

c)  $\frac{2}{9} = \frac{4}{18} = \frac{6}{27} = \frac{8}{36}$       d)  $\frac{3}{27} = \frac{1}{9} = \frac{2}{18} = \frac{4}{36}$

e)  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$       f)  $\frac{11}{22} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

### EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

4 Contesta a las siguientes preguntas:

a) El número  $-\frac{1}{2}$ , ¿pertenece al conjunto de los números enteros?

b) ¿Todo número entero es número racional?

c) ¿Todo número racional es número entero?

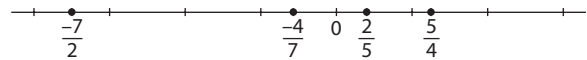
a) No.      b) Sí.      c) No.

5 Pon dos ejemplos de números racionales que no pertenezcan al conjunto de los números enteros.

$-\frac{1}{2}, \frac{13}{19}$

6 Representa en la recta numérica los números racionales:

a)  $\frac{2}{5}$       b)  $\frac{5}{4}$       c)  $-\frac{4}{7}$       d)  $\frac{-7}{2}$



### OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

7 Calcula:

a) Los  $\frac{3}{5}$  de  $-2$       b)  $\frac{1}{3}$  de  $\frac{3}{5}$

c)  $\frac{2}{7}$  de  $-6$       d)  $\frac{2}{7}$  de  $4$

a)  $-\frac{6}{5}$       b)  $\frac{1}{5}$

c)  $-\frac{12}{7}$       d)  $\frac{8}{7}$

8 Calcula mentalmente las operaciones:

a)  $\frac{2}{7} + \frac{3}{14}$       b)  $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3}$

c)  $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{6}$       d)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

e)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$       f)  $\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$

g)  $\frac{4}{6} - \frac{2}{3}$       h)  $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}$

a)  $\frac{2}{7} + \frac{3}{14} = \frac{4}{14} + \frac{3}{14} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

b)  $\frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{2}{15} + \frac{5}{15} = \frac{13}{15}$

c)  $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} + \frac{8}{6} + \frac{2}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

d)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

e)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

f)  $\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} + \frac{18}{12} - \frac{4}{12} = \frac{23}{12}$

g)  $\frac{4}{6} - \frac{2}{3} = \frac{4}{6} - \frac{4}{6} = 0$

h)  $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

# 3 NÚMEROS RACIONALES

<http://www.McGraw-Hill.es>

**9** **■** **■** Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado obtenido:

a)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{60}$

b)  $\frac{3}{20} + \frac{7}{5} + \frac{1}{4}$

c)  $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$

d)  $\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{2}{6} + \left(-\frac{4}{7}\right)$

a)  $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{7}{60} = \frac{40}{60} + \frac{12}{60} + \frac{7}{60} = \frac{59}{60}$

b)  $\frac{3}{20} + \frac{7}{5} + \frac{1}{4} = \frac{3}{20} + \frac{28}{20} + \frac{5}{20} = \frac{36}{20} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$

c)  $\frac{1}{3} + \frac{2}{27} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{90}{270} + \frac{20}{270} + \frac{54}{270} - \frac{45}{270} = \frac{119}{270}$

d)  $\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{2}{6} + \left(-\frac{4}{7}\right) = -\frac{3}{5} + \frac{2}{6} - \frac{4}{7} = -\frac{126}{210} + \frac{70}{210} - \frac{120}{210} = -\frac{176}{210} = -\frac{88}{105}$

**10** **■** **■** Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a)  $3 - \frac{1}{4} - \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right)$

b)  $-\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left[\frac{2}{6} - \frac{1}{4} - \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{4}\right)\right]$

c)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \left(6 - \frac{2}{5}\right) - \left(4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right)$

d)  $2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - 3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{6}\right)$

a)  $3 - \frac{1}{4} - \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right) = 3 - \frac{1}{4} - \left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}\right) = 3 - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{120}{40} - \frac{10}{40} - \frac{4}{40} = \frac{106}{40} = \frac{53}{20}$

b)  $-\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left[\frac{2}{6} - \frac{1}{4} - \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{4}\right)\right] = -\left(\frac{15}{20} - \frac{4}{20}\right) - \left[\frac{2}{6} - \frac{1}{4} - \left(\frac{24}{12} - \frac{4}{12} - \frac{6}{12}\right)\right] = -\frac{11}{20} - \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{4} - \frac{14}{12}\right) = -\frac{11}{20} - \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12} - \frac{14}{12}\right) = -\frac{11}{20} + \frac{13}{12} = -\frac{33}{60} + \frac{65}{60} = \frac{32}{60} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

c)  $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \left(6 - \frac{2}{5}\right) - \left(4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{30}{5} - \frac{2}{5}\right) - \left(\frac{60}{15} + \frac{3}{15} + \frac{5}{15}\right) = \frac{1}{3} - \frac{28}{5} - \frac{68}{15} = \frac{5}{15} - \frac{84}{15} - \frac{68}{15} = -\frac{147}{15} = -\frac{49}{5}$

d)  $2 - \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - 3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{6}\right) = \frac{30}{15} - \frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{45}{15} - \left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right) = -\frac{14}{15} + \frac{3}{12} = -\frac{56}{60} + \frac{15}{60} = -\frac{41}{60}$

**11** **■** **■** Calcula las siguientes multiplicaciones y simplifica el resultado:

a)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$

b)  $\left(-\frac{2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{6}\right)$

c)  $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

d)  $\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)$

e)  $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{7}$

f)  $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot 3$

a)  $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

b)  $\left(-\frac{2}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{6}\right) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

c)  $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$

d)  $\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{12}{12} = 1$

e)  $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{7} = -\frac{6}{35}$

f)  $\left(-\frac{1}{7}\right) \cdot 3 = -\frac{3}{7}$

**12** **■** **■** Resuelve las siguientes divisiones y simplifica el resultado:

a)  $\left(-\frac{3}{7}\right) : 2$

b)  $\frac{2}{20} : \frac{1}{7}$

c)  $\frac{2}{5} : \frac{1}{4}$

d)  $\frac{3}{6} : \frac{3}{12}$

e)  $\frac{1}{5} : \frac{2}{5}$

f)  $\frac{7}{8} : \frac{1}{2}$

a)  $\left(-\frac{3}{7}\right) : 2 = -\frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{14}$

b)  $\frac{2}{20} : \frac{1}{7} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

c)  $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} = \frac{8}{5}$

d)  $\frac{3}{6} : \frac{3}{12} = \frac{36}{18} = 2$

e)  $\frac{1}{5} : \frac{2}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

f)  $\frac{7}{8} : \frac{1}{2} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

**13** **Calcula el resultado de estas operaciones:**

a)  $\frac{2}{5} : \left(\frac{1}{4} + 3\right)$

b)  $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{7}$

c)  $\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{5}\right) : \frac{3}{11}$

d)  $\left(\frac{2}{4} + \frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right)$

a)  $\frac{2}{5} : \left(\frac{1}{4} + 3\right) = \frac{2}{5} : \left(\frac{1}{4} + \frac{12}{4}\right) = \frac{2}{5} : \frac{13}{4} = \frac{8}{65}$

b)  $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) : \frac{2}{7} = \left(\frac{5}{15} + \frac{6}{15}\right) : \frac{2}{7} = \frac{11}{15} : \frac{2}{7} = \frac{77}{30}$

c)  $\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{5}\right) : \frac{3}{11} = \left(\frac{15}{30} - \frac{12}{30}\right) : \frac{3}{11} = \frac{3}{30} : \frac{3}{11} = \frac{33}{90} = \frac{11}{30}$

d)  $\left(\frac{2}{4} + \frac{3}{7}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{14}{28} + \frac{12}{28}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) =$   
 $= \frac{26}{28} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{13}{14} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{13}{70}$

**14** **Realiza las siguientes operaciones. Recuerda operar conforme a la jerarquía de operaciones y simplifica el resultado.**

a)  $\frac{2}{25} + \frac{3}{100} - 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{25} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right)$

b)  $\frac{4}{5} - \frac{6}{15} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)$

c)  $\frac{7}{20} : \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5}$

d)  $2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right] + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$

e)  $\frac{5}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right)$

a)  $\frac{2}{25} + \frac{3}{100} - 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{6}{25} + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\right) =$   
 $= \frac{8}{100} + \frac{3}{100} - 2 \cdot \left(\frac{5}{25} - \frac{6}{25} + \frac{5}{25} - \frac{10}{25}\right) =$   
 $= \frac{11}{100} - 2 \cdot \left(-\frac{6}{25}\right) = \frac{11}{100} + 2 \cdot \frac{6}{25} = \frac{11}{100} + \frac{12}{25} =$   
 $= \frac{11}{100} + \frac{48}{100} = \frac{59}{100}$

b)  $\frac{4}{5} - \frac{6}{15} + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{12}{15} - \frac{6}{15} + 3 \cdot \left(\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{4}{6}\right) =$   
 $= \frac{6}{15} + 3 \cdot \frac{9}{6} = \frac{6}{15} + \frac{9}{2} = \frac{12}{30} + \frac{135}{30} = \frac{147}{30} = \frac{49}{10}$

c)  $\frac{7}{20} : \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5} = \frac{21}{20} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{3}{6}\right) + \frac{1}{5} =$   
 $= \frac{21}{20} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{6} + \frac{1}{5} = \frac{21}{20} - \frac{8}{12} + \frac{1}{5} = \frac{63}{60} - \frac{40}{60} + \frac{12}{60} =$   
 $= \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$

d)  $2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right] + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} =$   
 $= 2 \cdot \left[\left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right] + \frac{6}{10} + \frac{5}{10} =$   
 $= 2 \cdot \left(\frac{3}{4} : \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \frac{11}{10} = 2 \cdot \left(\frac{6}{4} - \frac{1}{6}\right) + \frac{11}{10} =$   
 $= 2 \cdot \left(\frac{18}{12} - \frac{2}{12}\right) + \frac{11}{10} = 2 \cdot \frac{16}{12} + \frac{11}{10} = \frac{32}{12} + \frac{11}{10} = \frac{113}{30}$

e)  $\frac{5}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{18} = \frac{45}{18} + \frac{1}{18} =$   
 $= \frac{46}{18} = \frac{23}{9}$

**15** **Calcula:**

a)  $2 : \frac{2}{5}$

b)  $1 : \frac{3}{4}$

c)  $\frac{-2}{5} : 3$

d)  $\frac{1}{6} : \frac{-3}{4}$

a)  $2 : \frac{2}{5} = \frac{10}{2} = 5$

b)  $1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$

c)  $\frac{-2}{5} : 3 = -\frac{2}{15}$

d)  $\frac{1}{6} : \frac{-3}{4} = -\frac{4}{18} = -\frac{2}{9}$

**16** **En un semáforo sólo el  $\frac{3}{9}$  de los peatones que cruzan la calle respetan la luz verde para pasar. Si en una hora han cruzado la calle 405 peatones, ¿cuántos han pasado cuando no debían?**

$\frac{2}{3} \cdot 405 = 270$

**17** **Si de un pastel que pesa 1 500 gramos repartimos las  $\frac{2}{3}$  partes, ¿cuántos gramos de pastel nos quedan?**

$\frac{2}{3} \cdot 1500 = \frac{2 \cdot 1500}{3} = \frac{3000}{3} = 1000$  hemos repartido, nos quedan 500 gr.

**18** **III** En mi cuaderno de Ciencias tengo  $\frac{3}{4}$  partes con conceptos de la asignatura y  $\frac{4}{20}$  lo tengo ocupado con esquemas. ¿Qué fracción del cuaderno me queda libre?

$$1 - \frac{3}{4} - \frac{4}{20} = \frac{20}{20} - \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20} \text{ de cuaderno queda libre.}$$

**19** **III** En un campo de patatas se recogen  $\frac{5}{15}$  del total de la producción en un día, y al día siguiente hay más trabajadores y recogen  $\frac{12}{32}$  del total. ¿Qué fracción del total falta por recoger el tercer día?

$$1 - \left( \frac{5}{15} + \frac{12}{32} \right) = 1 - \left( \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \right) = 1 - \left( \frac{8}{24} + \frac{9}{24} \right) = 1 - \frac{17}{24} = \frac{24}{24} - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$$

**20** **III** Dos fuentes de agua llenan un depósito de la siguiente forma: una de ella descarga  $\frac{4}{16}$  del total y la otra  $\frac{8}{15}$ . ¿Qué fracción del depósito falta por llenar?

$$1 - \left( \frac{4}{16} + \frac{8}{15} \right) = 1 - \left( \frac{60}{240} + \frac{128}{240} \right) = 1 - \frac{188}{240} = \frac{240}{240} - \frac{188}{240} = \frac{52}{240} = \frac{26}{120} = \frac{13}{60}$$

**21** **III** Si entre dos amigos juntan  $\frac{2}{5}$  de los CD de un cantante y otros tres amigos consiguen otros  $\frac{2}{8}$  de toda su producción artística, ¿cuál es la fracción de CD que faltarían por recopilar?

$$1 - \left( \frac{2}{5} + \frac{2}{8} \right) = 1 - \left( \frac{16}{40} + \frac{10}{40} \right) = 1 - \frac{26}{40} = \frac{40}{40} - \frac{26}{40} = \frac{14}{40} = \frac{7}{20}$$

**22** **III** Si tengo las  $\frac{2}{5}$  partes de la colección de «Estrellas del cine de aventuras» y mi hermana me pide  $\frac{1}{6}$  de lo que tengo, ¿qué fracción de la colección me queda?

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{2}{5} - \frac{2}{30} = \frac{12}{30} - \frac{2}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

**23** **III** Cuando voy al monte a pasar el día llevo  $\frac{1}{4}$  de mi mochila ocupada con la comida. Si llevo la mochila con  $\frac{6}{8}$  de comida, ¿cuántos días voy a pasar?

$$\frac{6}{8} : \frac{1}{4} = \frac{24}{8} = 3 \text{ días.}$$

**24** **III** Cuando trabajo las  $\frac{3}{5}$  partes de mi jornada recibo 45 euros. ¿Cuántos euros recibiré si trabajo sólo  $\frac{7}{24}$  de la misma?

$$45 : \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{24} = \frac{175}{8} \text{ euros.}$$

**25** **III** Una baldosa tiene como superficie el cuadrado de otra baldosa que mide  $\frac{6}{8}$  m<sup>2</sup>. ¿Cuánto mide la primera baldosa?

$$\left( \frac{6}{8} \right)^2 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16} \text{ m}^2$$

**26** **III** Calcula las siguientes potencias y exprésalas en forma de fracción:

a)  $\left( \frac{1}{2} \right)^4$

b)  $\left( \frac{2}{5} \right)^2$

c)  $\left( -\frac{3}{5} \right)^3$

d)  $\left( -\frac{2}{4} \right)^2$

e)  $\left( \frac{1}{3} \right)^3$

f)  $\left( \frac{1}{2} \right)^5$

g)  $\left( -\frac{3}{7} \right)^3$

h)  $\left( \frac{3}{4} \right)^4$

a)  $\left( \frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{16}$

b)  $\left( \frac{2}{5} \right)^2 = \frac{4}{25}$

c)  $\left( -\frac{3}{5} \right)^3 = -\frac{27}{125}$

d)  $\left( -\frac{2}{4} \right)^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

e)  $\left( \frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$

f)  $\left( \frac{1}{2} \right)^5 = \frac{1}{32}$

g)  $\left( -\frac{3}{7} \right)^3 = -\frac{27}{343}$

h)  $\left( \frac{3}{4} \right)^4 = \frac{81}{256}$

**27** ■■ Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a)  $\frac{2}{8} + \left(\frac{1}{5}\right)^3$

b)  $\frac{3}{9} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4$

c)  $\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$

d)  $6 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{7}\right)^2$

a)  $\frac{2}{8} + \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{125} = \frac{125}{500} + \frac{4}{500} = \frac{129}{500}$

b)  $\frac{3}{9} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{3} + \frac{2}{81} = \frac{27}{81} + \frac{2}{81} = \frac{29}{81}$

c)  $\left(\frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{36}{25} - \frac{1}{8} = \frac{288}{200} - \frac{25}{200} = \frac{263}{200}$

d)  $6 \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{7}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{8}{20} + \frac{5}{20}\right) - \frac{4}{49} =$   
 $= 6 \cdot \frac{13}{20} - \frac{4}{49} = \frac{78}{20} - \frac{4}{49} = \frac{39}{10} - \frac{4}{49} = \frac{1911}{490} - \frac{40}{490} = \frac{1871}{490}$

**28** ■ Copia en tu cuaderno y completa las siguientes frases:

a) Si tengo que elevar una fracción a un exponente, elevo el \_\_\_\_\_ y el \_\_\_\_\_ a dicho \_\_\_\_\_.

b) Una potencia con \_\_\_\_\_ negativo, sea cual sea el signo de la base, es igual a \_\_\_\_\_ partido por la misma potencia pero con exponente positivo.

a) Numerador, denominador, exponente.

b) Exponente, uno.

**29** ■■ Transforma las siguientes potencias en fracciones:

a)  $2^{-4}$

b)  $3^{-2}$

c)  $5^{-2}$

d)  $7^{-3}$

e)  $4^{-5}$

f)  $8^{-3}$

g)  $9^{-2}$

h)  $18^{-2}$

a)  $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

b)  $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

c)  $5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$

d)  $7^{-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^3$

e)  $4^{-5} = \left(\frac{1}{4}\right)^5$

f)  $8^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)^3$

g)  $9^{-2} = \left(\frac{1}{9}\right)^2$

h)  $18^{-2} = \left(\frac{1}{18}\right)^2$

**30** ■■ Calcula las siguientes potencias y exprésalas en forma de fracción:

a)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

b)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$

c)  $\left(\frac{1}{2^4}\right)^{-3}$

d)  $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2}$

e)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

f)  $\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-1} \cdot 5^3$

a)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

b)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{1}\right)^3 = 7^3 = 343$

c)  $\left(\frac{1}{2^4}\right)^{-3} = (2^4)^3 = 2^{12}$

d)  $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-2} = \left(\frac{3^2}{2}\right)^2 = \frac{3^4}{2^2} = \frac{81}{4}$

e)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = 3^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 9 \cdot \frac{27}{8} = \frac{243}{8}$

f)  $\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-1} \cdot 5^3 = 5^2 \cdot 5^3 = 5^5$

**31** ■■ Realiza las siguientes operaciones. Simplifica el resultado:

a)  $5 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{1}{12}\right)^{-1}$

b)  $\left(\frac{3}{2}\right)^2 : \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right] + \left(\frac{3}{9}\right)^{-2}$

c)  $\frac{3}{27} - \frac{1}{2} : \left[\left(\frac{2}{15} - \frac{3}{15}\right) \cdot \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{30}\right)\right]$

d)  $\frac{9}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{18}{3} - 9\right) - \frac{1}{15}$

a)  $5 \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} =$   
 $= 5 \cdot \left(\frac{9}{6} + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{10}{12} - \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} =$   
 $= 5 \cdot \left(\frac{10}{6}\right)^2 - \frac{9}{12} - 12 = 5 \cdot \frac{100}{36} - \frac{9}{12} - 12 =$   
 $= \frac{500}{36} - \frac{9}{12} - 12 = \frac{500}{36} - \frac{27}{36} - \frac{432}{36} = \frac{41}{36}$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \left(\frac{3}{2}\right)^2 &: \left[\frac{2}{5} - \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right] + \left(\frac{3}{9}\right)^{-2} = \\
 &= \frac{9}{4} : \left[\frac{4}{10} - \frac{1}{10} - \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\right)\right] + \left(\frac{9}{3}\right)^2 = \\
 &= \frac{9}{4} : \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{4}\right) + 3^2 = \frac{9}{4} : \left(\frac{12}{40} - \frac{30}{40}\right) + 9 = \\
 &= \frac{9}{4} : \left(-\frac{18}{40}\right) + 9 = \frac{9}{4} : \left(-\frac{9}{20}\right) + 9 = -\frac{180}{36} + 9 = \\
 &= -\frac{180}{36} + \frac{324}{36} = \frac{144}{36} = \frac{72}{18} = \frac{36}{9} = \frac{12}{3} = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{3}{27} - \frac{1}{2} &: \left[\left(\frac{2}{15} - \frac{3}{15}\right) \cdot \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{30}\right)\right] = \\
 &= \frac{3}{27} - \frac{1}{2} : \left[-\frac{1}{15} \cdot \left(\frac{42}{30} + \frac{2}{30}\right)\right] = \\
 &= \frac{3}{27} - \frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{15} \cdot \frac{44}{30}\right) = \frac{3}{27} - \frac{1}{2} : \left(-\frac{44}{450}\right) = \\
 &= \frac{3}{27} + \frac{450}{88} = \frac{1}{9} + \frac{225}{44} = \frac{44}{396} + \frac{2025}{396} = \frac{2069}{396}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{9}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{18}{3} - 9\right) - \frac{1}{15} &= \frac{9}{2} + \left(\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{18}{3} - \frac{27}{3}\right) - \frac{1}{15} = \\
 &= \frac{9}{2} + \frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{9}{3}\right) - \frac{1}{15} = \frac{9}{2} + \frac{1}{9} \cdot (-3) - \frac{1}{15} = \frac{9}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \\
 &= \frac{135}{30} - \frac{10}{30} - \frac{2}{30} = \frac{123}{30} = \frac{41}{10}
 \end{aligned}$$

**32**  Copia en tu cuaderno y completa la frase. Pon un ejemplo:

«La raíz cuadrada de un número racional expresado en forma de fracción será igual a la \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ del numerador partido por la \_\_\_\_\_ del denominador».

Raíz cuadrada, raíz cuadrada.

**33**  Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números racionales y explica cómo lo has hecho.

$$\text{a) } \sqrt{\frac{4}{16}} \quad \text{b) } \sqrt{\frac{25}{121}} \quad \text{c) } \sqrt{\frac{49}{81}}$$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{25}{121}} = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{11^2}} = \frac{5}{11}$$

$$\text{c) } \sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{7^2}}{\sqrt{9^2}} = \frac{7}{9}$$

**34**  Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado obtenido:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{16}{25}} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\text{b) } \sqrt{\frac{9}{81}} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\text{c) } \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\right)^2 : \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\text{d) } \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{5}\right) : 3 + \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} + \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sqrt{\frac{16}{25}} - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 &= \frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{5^2}} - \left(\frac{10}{15} + \frac{3}{15}\right) + \frac{4}{9} = \\
 &= \frac{4}{5} - \frac{13}{15} + \frac{4}{9} = \frac{36}{45} - \frac{39}{45} + \frac{20}{45} = \frac{17}{45}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sqrt{\frac{9}{81}} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) &= \frac{\sqrt{3^2}}{\sqrt{9^2}} : \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \\
 &= \frac{3}{9} : \frac{4}{9} + \frac{2}{5} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20} = \frac{23}{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \left(\frac{3}{6} + \frac{1}{2}\right)^2 : \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9}} &= \left(\frac{3}{6} + \frac{3}{6}\right)^2 : \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2^2}}{\sqrt{3^2}} = 1 : \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9}{6} + \frac{4}{6} = \frac{13}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \left(\frac{7}{5} + \frac{2}{5}\right) : 3 + \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} + \sqrt{\frac{1}{4}} &= \frac{9}{5} : 3 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2^2}} = \\
 &= \frac{9}{15} + \frac{25}{16} + \frac{1}{2} = \frac{144}{240} + \frac{375}{240} + \frac{120}{240} = \frac{639}{240} = \frac{213}{80}
 \end{aligned}$$

**35**  Realiza las siguientes operaciones. Simplifica el resultado.

$$\text{a) } \sqrt{\frac{25}{81}} + \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$$

$$\text{b) } 2 : \left[\left(\frac{1}{7} + \frac{2}{14}\right)^2 - \frac{1}{6}\right] + \sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$\text{c) } \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8}\right)^2 - \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}}$$


$$\text{d) } \sqrt{\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}} + 5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sqrt{\frac{25}{81}} + \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \\ & = \frac{\sqrt{5^2}}{\sqrt{9^2}} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} - \frac{2}{6} + \frac{25}{9} = \\ & = \frac{30}{54} - \frac{18}{54} + \frac{150}{54} = \frac{162}{54} = \frac{81}{27} = \frac{27}{9} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 2 \cdot \left[ \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{14}\right)^2 - \frac{1}{6} \right] + \sqrt{\frac{1}{16}} = \\ & = 2 \cdot \left[ \left(\frac{2}{14} + \frac{2}{14}\right)^2 - \frac{1}{6} \right] + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4^2}} = \\ & = 2 \cdot \left[ \left(\frac{4}{14}\right)^2 - \frac{1}{6} \right] + \frac{1}{4} = 2 \cdot \left( \frac{16}{196} - \frac{1}{6} \right) + \frac{1}{4} = \\ & = 2 \cdot \left( \frac{96}{1176} - \frac{196}{1176} \right) + \frac{1}{4} = 2 \cdot \left( -\frac{100}{1176} \right) + \frac{1}{4} = \\ & = -\frac{2352}{1176} + \frac{1}{4} = -\frac{2352}{1176} + \frac{294}{1176} = -\frac{2058}{1176} = -\frac{2327}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{8}\right)^2 - \sqrt{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}} = \\ & = \frac{125}{8} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{16}{56} - \frac{7}{56}\right)^2 - \sqrt{\frac{2}{8}} = \\ & = \frac{125}{8} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{9}{56}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{125}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{81}{3136} - \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2^2}} = \\ & = \frac{125}{8} + \frac{81}{9408} - \frac{1}{2} = \frac{147000}{9408} + \frac{81}{9408} - \frac{4704}{9408} = \\ & = \frac{142377}{9408} = \frac{47459}{3136} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \sqrt{\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}} + 5 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 = \\ & = \sqrt{\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)} + 5 \cdot \left(\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\right)^2 = 1 + 5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \\ & = 1 + 5 \cdot \frac{25}{36} = 1 + \frac{125}{36} = \frac{36}{36} + \frac{125}{36} = \frac{161}{36} \end{aligned}$$

**36**  Por cada 10 sobres de propaganda repartidos en los buzones nos dan  $\frac{6}{8}$  de euro. ¿Cuántos euros me darán por repartir 1 500 sobres?

$$\frac{1500}{10} \cdot \frac{6}{8} = \frac{225}{2} = 112,5 \text{ euros.}$$



# 4 NÚMEROS DECIMALES

<http://www.McGraw-Hill.es>

## EJERCICIOS

**1** Obtén la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

a) 4,37

b) 0,025

c) 905,158

d) 9,05158

a)  $\frac{437}{100}$

b)  $\frac{25}{1000} = \frac{1}{40}$

c)  $\frac{905158}{1000}$

d)  $\frac{905158}{100000}$

**2** Copia en tu cuaderno y completa las siguientes igualdades:

a)  $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{100} =$

b)  $\frac{\quad}{8} = \frac{125}{1000} =$

a) 40

b) 1

**3** Indica cuál es la fracción generatriz de los números decimales:

a) 3,3232...

b) 0,555...

c) 5,158158...

d) 25,111...

e) 0,2121...

f) 125,99...

g) 0,333...

a)  $100x = 332,3232\dots$

$x = 3,3232\dots$

$99x = 332 - 3$

$x = \frac{332 - 3}{99} = \frac{329}{99}$

b)  $10x = 5,555\dots$

$x = 0,555\dots$

$9x = 5 - 0$

$x = \frac{5}{9}$

c)  $1000x = 5158,158158\dots$

$x = 5,158158\dots$

$999x = 5158 - 5$

$x = \frac{5158 - 5}{999} = \frac{5153}{999}$

d)  $10x = 251,111\dots$

$x = 25,111\dots$

$9x = 251 - 25$

$x = \frac{251 - 25}{9} = \frac{226}{9}$

e)  $100x = 21,2121\dots$

$x = 0,2121\dots$

$99x = 21 - 0$

$x = \frac{21}{99}$

f)  $10x = 1259,99\dots$

$x = 125,99\dots$

$9x = 1259 - 125$

$x = \frac{1259 - 125}{9} = \frac{1134}{9}$

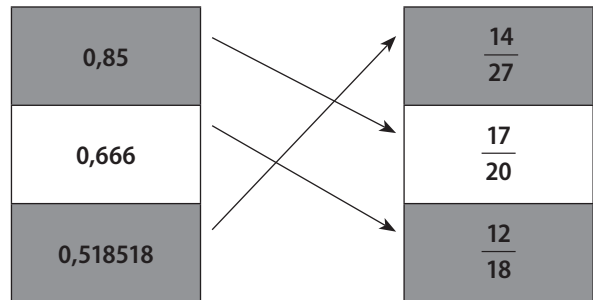
g)  $10x = 3,33\dots$

$x = 0,33\dots$

$9x = 3 - 0$

$x = \frac{3}{9}$

**4** Copia en tu cuaderno y asocia cada expresión decimal con su fracción generatriz.



**5** Obtén la fracción generatriz de los siguientes números decimales:

a) 5,12333...

b) 0,07575...

c) 25,01212...

d) 123,5444...

e) 8,152323...

a)  $1000x = 5123,333\dots$

$100x = 512,333\dots$

$900x = 5123 - 512$

$x = \frac{5123 - 512}{900} \Leftrightarrow x = \frac{1537}{300}$

b)  $1000x = 75,7575\dots$

$10x = 0,7575\dots$

$990x = 75 - 0$

$x = \frac{75 - 0}{990} \Leftrightarrow x = \frac{5}{66}$

c)  $1000x = 25\,012,1212\dots$

$$\begin{array}{r} 10x = 250,1212\dots \\ \hline 990x = 25\,012 - 250 \end{array}$$

$$x = \frac{25\,012 - 250}{990} \Leftrightarrow x = \frac{4\,127}{165}$$

d)  $100x = 12\,354,444\dots$

$$\begin{array}{r} 10x = 1\,235,444\dots \\ \hline 90x = 12\,354 - 1\,235 \end{array}$$

$$x = \frac{12\,354 - 1\,235}{90} \Leftrightarrow x = \frac{11\,119}{90}$$

e)  $10\,000x = 81\,523,2323\dots$

$$\begin{array}{r} 100x = 815,2323\dots \\ \hline 9\,900x = 81\,523 - 815 \end{array}$$

$$x = \frac{81\,523 - 815}{9\,900} \Leftrightarrow x = \frac{20\,177}{2\,475}$$

**6 Realiza estas operaciones con números decimales:**

a)  $81,23 + 34,56 + 123,45$

b)  $0,0555\dots + 1,4242\dots$

c)  $2,53 - 1,58 + 14,5$

d)  $10,5 + 21,15 - 8,45$

e)  $25,45 - 3 + 11,32$

f)  $2,133\dots - 0,333\dots + 12,25$

a) 239,24

b)  $\frac{1}{18} + \frac{47}{33} = \frac{293}{198}$

c) 15,45

d) 23,2

e) 33,77

f)  $\frac{32}{15} - \frac{1}{3} + \frac{1\,225}{100} = \frac{281}{20} = 14,05$

**7 ¿Cuál es el perímetro de una mesa rectangular que mide 1,50 m de largo y 0,98 m de ancho?**

El perímetro es la suma de todos los lados.

$$1,50 + 1,50 + 0,98 + 0,98 = 4,96 \text{ m}^2$$

**8 El precio de un CD es 22,50 €, pero se ha pagado por él 15,85 €.**

a) ¿Qué cantidad de dinero se ha rebajado?

b) Si para pagar se entrega un billete de 50 €, ¿cuánto dinero se le devuelve al comprador?

a)  $22,5 - 15,85 = 6,65$  euros.

b)  $50 - 15,85 = 34,15$  euros.

**9 Realiza las operaciones con números decimales:**

a)  $1,2 \cdot 34,56$

b)  $0,015 \cdot 1,2$

c)  $12,53 \cdot 4,5$

d)  $0,003 \cdot 2,5$

e)  $21,5 \cdot 0,25$

a) 41,472

b) 0,018

c) 56,385

d) 0,0075

e) 5,375

**10 ¿Cuál es la superficie de una mesa rectangular que mide 1,35 metros de largo y 0,75 metros de ancho?**

La superficie de la mesa es largo por ancho.

$$1,35 \cdot 0,75 = 1,0125 \text{ m}^2$$

**11 Si los pasos de Juan miden 0,65 metros, ¿qué distancia recorre si da 23 pasos?**

$$0,65 \cdot 23 = 14,95 \text{ metros.}$$

**12 Si  $2,54 \cdot 3,6 = 9,144$ , indica el resultado de las siguientes operaciones sin realizarlas:**

a)  $25,4 \cdot 3,6$

b)  $2,54 \cdot 3,6 \cdot 10$

c)  $2,54 \cdot 3,6 \cdot 0,1$

d)  $254 \cdot 0,36$

e)  $0,254 \cdot 36$

a) 91,44

b) 91,44

c) 0,9144

d) 91,44

e) 9,144

**13 Efectúa las siguientes divisiones:**

a)  $53,25 : 0,3$

b)  $0,025 : 2,5$

c)  $125,5 : 0,02$

a) 177,5

b) 0,01

c) 6275

**14 Si la longitud de una circunferencia es 18,84 centímetros, ¿cuánto mide el radio?**

Tomando como  $\pi = 3,14$ , el radio mide:

$$18,84 : (3,14 \cdot 2) = 3 \text{ cm.}$$

**15 Calcula las potencias:**

a)  $(0,333\dots)^2$

b)  $1,5^3$

c)  $(1,2666\dots)^2$

a)  $(0,333\dots)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

b) 3,375

c)  $(1,2666\dots)^2 = \left(\frac{19}{15}\right)^2 = \frac{361}{225}$

**16 Calcula las potencias:**

a)  $1,75^{-2}$

b)  $0,02^{-3}$

c)  $(1,666\dots)^{-2}$

a)  $\left(\frac{175}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{100}{175}\right)^2 = \frac{10\,000}{30\,625} = \frac{16}{49}$

b)  $\left(\frac{2}{100}\right)^{-3} = \left(\frac{100}{2}\right)^3 = \frac{1\,000\,000}{8} = 125\,000$

c)  $\left(\frac{15}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{15}\right)^2 = \frac{81}{225} = \frac{9}{25}$

**17** Calcula:

a)  $[(23,5 + 36,5) \cdot 12,5] : 2$

b)  $3,14 \cdot 0,5^2 \cdot 2,1 + 3,14 \cdot 1,5^2 \cdot 0,6 : 3$

c)  $3 \cdot 6,2 : 2 + 2,8 \cdot 0,02 - (3,5 + 0,8) \cdot 0,95$

a) 375

b) 3,0615

c) 5,271

**18** Calcula:

a)  $(-2,5 \cdot 0,6)^2 + (-3)^3 : 3^2 - 0,4 \cdot 0,2^{-2}$

b)  $(0,333\dots)^3 + 0,33$

c)  $(1,1666\dots + 0,333\dots)^2$

a) -10,75

b)  $\frac{991}{2700} = 0,36703703\dots$

c)  $\frac{9}{4} = 2,25$

**19** Aproxima hasta las milésimas los siguientes números decimales:

a) 5,2741

b) 0,1666...

c) 0,004581

a) 5,274

b) 0,167

c) 0,005

**20** Expresa en forma decimal el número fraccionario  $\frac{5}{6}$  y aproxima la expresión decimal hasta:

a) Las décimas.

b) Las centésimas.

$\frac{5}{6} = 0,8333\dots$

a) 0,8

b) 0,83

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### FRACCIÓN GENERATRIZ DE UN NÚMERO DECIMAL

**1** Clasifica las expresiones decimales:

a) 0,5

b) 0,25

c) 0,464646...

d) 0,54646...

e) 1,5757...

f) 2,74848

a) Decimal exacto.

b) Decimal exacto.

c) Periódico puro.

d) Periódico mixto.

e) Periódico puro.

f) Decimal exacto.

**2** Obtén la fracción generatriz de:

a) 0,25

b) 10,482

c) 0,0042

d) 42,08

e) 55,55

a)  $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

b)  $10,482 = \frac{10482}{1000} = \frac{5241}{500}$

c)  $0,0042 = \frac{42}{10000} = \frac{21}{5000}$

d)  $42,08 = \frac{4208}{100} = \frac{1052}{25}$

e)  $55,55 = \frac{5555}{100} = \frac{1111}{20}$

**3** Calcula la fracción generatriz de los números decimales periódicos puros:

a)  $12,\widehat{3}$

b)  $12,\widehat{35}$

c)  $12,\widehat{05}$

d)  $0,\widehat{3}$

e)  $1,\widehat{6}$

a)  $10x = 123,3\dots$

$x = 12,3\dots$

$99x = 123 - 12$

$x = \frac{123 - 12}{9} \Leftrightarrow x = \frac{111}{9} = \frac{37}{3}$

b)  $100x = 1235,35\dots$

$x = 12,35\dots$

$99x = 1235 - 12$

$x = \frac{1235 - 12}{99} \Leftrightarrow x = \frac{1223}{99}$

c)  $100x = 1205,05\dots$

$x = 12,05\dots$

$99x = 1205 - 12$

$x = \frac{1205 - 12}{99} \Leftrightarrow x = \frac{1193}{99}$

d)  $10x = 3,3\dots$

$x = 0,3\dots$

$9x = 3 - 0$

$x = \frac{3 - 0}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

e)  $10x = 16,6\dots$

$x = 1,6\dots$

$9x = 16 - 1$

$x = \frac{16 - 1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

**4**  **Calcula la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos mixtos:**

a)  $12,3\overline{5}$

b)  $7,4\overline{25}$

c)  $14,0\overline{4}$

d)  $0,1\overline{6}$

e)  $2,01\overline{6}$

a)  $100x = 1\ 235,55\dots$

$10x = 123,55\dots$

$90x = 1\ 235 - 123$

$x = \frac{1\ 235 - 123}{90} \Leftrightarrow x = \frac{1\ 112}{90}$

b)  $1\ 000x = 7\ 425,2525\dots$

$10x = 74,2525\dots$

$990x = 7\ 425 - 74$

$x = \frac{7\ 425 - 74}{990} \Leftrightarrow x = \frac{7\ 351}{990}$

c)  $100x = 1\ 404,44\dots$

$10x = 140,44\dots$

$90x = 1\ 404 - 140$

$x = \frac{1\ 404 - 140}{90} \Leftrightarrow x = \frac{1\ 264}{90} = \frac{632}{45}$

d)  $100x = 16,666\dots$

$10x = 1,666\dots$

$90x = 16 - 1$

$x = \frac{16 - 1}{90} \Leftrightarrow x = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

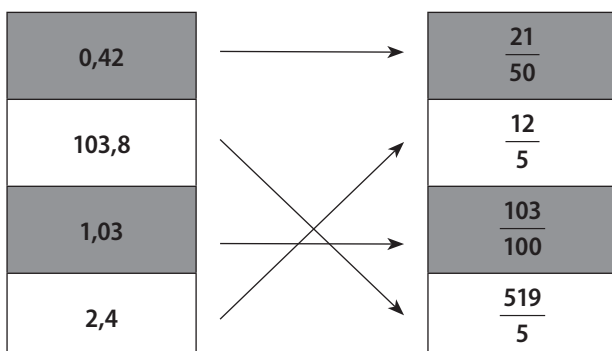
e)  $1\ 000x = 2\ 016,666\dots$

$100x = 201,666\dots$

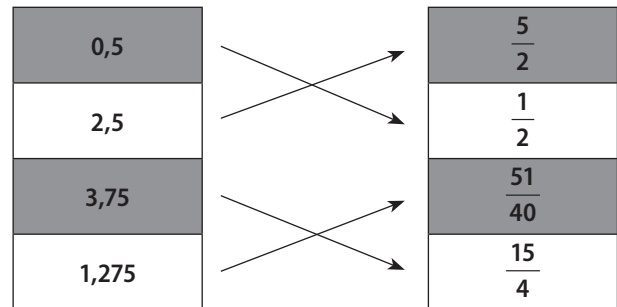
$900x = 2\ 016 - 201$

$x = \frac{2\ 016 - 201}{900} \Leftrightarrow x = \frac{1\ 815}{900} = \frac{605}{300}$

**5**  **Copia en tu cuaderno y asocia cada número decimal con su fracción generatriz:**



**6**  **Copia en tu cuaderno y relaciona cada número decimal con su fracción generatriz:**



**7**  **Escribe dos fracciones que representen a los siguientes números decimales:**

a) 0,42

b) 0,83

c)  $1,2\overline{4}$

d)  $1,2\overline{4}$

e)  $0,0\overline{9}$

f)  $2,0\overline{5}$

a)  $0,42 = \frac{42}{100} = \frac{21}{50}$

b)  $0,83 = \frac{83}{100}$

c)  $100x = 124,2424\dots$

$x = 1,2424\dots$

$99x = 124 - 1$

$x = \frac{124 - 1}{99} \Leftrightarrow x = \frac{123}{99} = \frac{41}{33}$

d)  $100x = 124,444\dots$

$10x = 12,444\dots$

$90x = 124 - 12$

$x = \frac{124 - 12}{90} \Leftrightarrow x = \frac{112}{90} = \frac{56}{45}$

e)  $100x = 9,999\dots$

$10x = 0,999\dots$

$90x = 9 - 0$

$x = \frac{9}{90} \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$

f)  $100x = 205,555\dots$

$10x = 20,555\dots$

$90x = 185$

$x = \frac{185}{90} \Leftrightarrow x = \frac{37}{18}$

# 4 NÚMEROS DECIMALES

<http://www.McGraw-Hill.es>

**8** **Copia en tu cuaderno y completa:**

a)  $10,7 = \frac{\quad}{10}$                       b)  $25,4 = \frac{254 - \quad}{9}$

c)  $5,45\overline{6} = \frac{5456 - \quad}{990}$                       d)  $5,47 = \frac{\quad - 54}{990}$

a)  $10,7 = \frac{107}{10}$

b)  $25,4 = \frac{254 - 25}{9} = \frac{229}{9}$

c)  $5,45\overline{6} = \frac{5456 - 54}{990} = \frac{5402}{990}$

d)  $5,47 = \frac{547 - 54}{90} = \frac{493}{90}$

**9** **Encuentra un número decimal exacto comprendido entre:**

a)  $3,45$  y  $3,46$

b)  $3,45\overline{6}$  y  $3,457$

c)  $2,4$  y  $2,41$

d)  $2,4$  y  $2,42$

e)  $14,8$  y  $14,89$

a) 3,455

b) 3,4566

c) 2,401

d) 2,41

e) 14,889

**10** **Encuentra un número decimal periódico comprendido entre:**

a)  $2,3$  y  $2,4$

b)  $2,31$  y  $2,32$

c)  $2,31$  y  $2,3$

d)  $2,35$  y  $2,35\overline{6}$

e)  $2,45$  y  $2,46$

a) 2,333...

b) 2,3111...

c) 2,3222...

d) 2,356111...

e) 2,4555...

## OPERACIONES CON NÚMEROS DECIMALES

**11** **Calcula mentalmente:**

a)  $0,48 + 1,43$

b)  $10,45 + 10,4$

c)  $20,45 + 42,30$

d)  $100,01 + 90,02$

e)  $99,02 + 101,08$

a)  $0,48 + 1,43 = \frac{48}{100} + \frac{43}{30} = \frac{144}{300} + \frac{430}{300} = \frac{574}{300} = \frac{287}{150}$

b)  $10,45 + 10,4 = \frac{1045}{100} + \frac{94}{9} = \frac{9405}{900} + \frac{9400}{900} = \frac{18805}{900} = \frac{3761}{180}$

c)  $20,45 + 42,30 = \frac{2045}{100} + \frac{4230}{100} = \frac{6275}{100} = \frac{1255}{20} = \frac{251}{4}$

d)  $100,01 + 90,02 = \frac{10001}{100} + \frac{8102}{90} = \frac{90009}{900} + \frac{81020}{900} = \frac{171029}{900}$

e)  $99,02 + 101,08 = \frac{9902}{100} + \frac{10108}{100} = \frac{20010}{100} = \frac{2001}{10}$

**12** **Calcula:**

a)  $14,48 + 13,5 - 12,3$

b)  $24,18 - 2,84 - 4,38$

c)  $14,35 + 23,4 - 12,8$

d)  $3,55 - 2,48 + 1,3$

e)  $0,01 - 2,5 + 0,005$

a)  $14,48 + 13,5 - 12,3 = 15,68$

b)  $24,18 - 2,84 - 4,38 = 16,96$

c)  $14,35 + 23,4 - 12,8 = 24,95$

d)  $3,55 - 2,48 + 1,3 = 2,37$

e)  $0,01 - 2,5 + 0,005 = -2,485$

**13** **Calcula:**

a)  $24,18 - 14,04$

b)  $24,5 - 4,03$

c)  $180,3 - 35,5$

d)  $18,35 - 12,42$

e)  $5,85 - 5,8$

a)  $24,18 - 14,04 = \frac{2177}{90} - \frac{1264}{90} = \frac{913}{90}$

b)  $24,5 - 4,03 = \frac{245}{10} - \frac{363}{90} = \frac{2205}{90} - \frac{363}{90} = \frac{1842}{90} = \frac{614}{30}$

c)  $180,3 - 35,5 = \frac{1623}{9} - \frac{355}{10} = \frac{16230}{90} - \frac{3195}{90} = \frac{13035}{90} = \frac{4345}{30}$

d)  $18,35 - 12,42 = \frac{1817}{99} - \frac{1230}{99} = \frac{587}{99}$

e)  $5,85 - 5,8 = \frac{585}{100} - \frac{53}{9} = \frac{5265}{900} - \frac{5300}{900} = -\frac{35}{900} = -\frac{7}{180}$

**14** **Razona si es verdadero o falso cada uno de los siguientes enunciados:**

- a) La suma de dos números decimales periódicos puros es siempre un número decimal periódico puro.  
 b) La suma de dos números periódicos mixtos es siempre un número decimal periódico mixto.

a) Falso. Por ejemplo,  $\frac{8}{9}$  y  $\frac{1}{9}$  son periódicos puros, en concreto son 0,888... y 0,111... respectivamente y, sin embargo,  $\frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$  que no es un decimal periódico puro.

b) Falso. Por ejemplo,  $\frac{98}{90}$  y  $\frac{1}{90}$  son periódicos mixtos, en concreto son 1,0888... y 0,0111... respectivamente y, sin embargo,  $\frac{98}{90} + \frac{1}{90} = 1,1$  que no es un decimal periódico puro.

**15** **Observa estos apuntes de una cuenta:**

<i>Saldo inicial</i>	
Hipoteca	-270,48 €
Recibo de la luz	-98,42 €
Ingreso	+200,50 €
Pago con tarjeta	-150,00 €
<i>Saldo final</i>	<b>428,52 €</b>

**¿Cuál es el saldo inicial de la cuenta?**

$$\begin{aligned} \text{Saldo inicial} &= 428,52 - (-270,48 - 98,42 + 200,5 - 150) = \\ &= 746,92 \text{ euros.} \end{aligned}$$

**16** **Calcula:**

- a) **14,28 · 2,5**                      b) **14,4 · 3,02**  
 c) **3,45 · 2,1**                      d) **100,48 · 7,05**  
 e) **12,40 · 0,22**                    f) **2,54 · 3,2**  
 a) 35,7                                b) 43,488  
 c) 7,245                                d) 708,384  
 e) 2,728                                f) 8,13

**17** **Calcula:**

- a) **28,85 : 3,6**                      b) **28,8 : 4,2**  
 c) **124,8 : 3,3**                      d) **103,4 : 6,25**  
 e) **4,53 : 0,3**  
 a) 8,0138888...                    b) 6,85714...  
 c) 37,818181...                    d) 16,544  
 e) 15,1

**18** **Copia en tu cuaderno y escribe en el recuadro el símbolo >, < o = según corresponda:**

- a) **125 · 1,3**  **126**                      b) **12,5 + 18,4**  **30**  
 c) **100 : 0,9**  **120**                      d) **100 : 0,1**  **1 000**  
 e) **13,48 - 2,51**  **11**                    f) **14,18 + 12,05**  **25**  
 g) **12,5 · 100**  **1 000**                    h) **100,5 - 88,5**  **15**  
 a) >                                      b) >                                      c) <                                      d) =  
 e) <                                      f) >                                      g) >                                      h) <

**19** **Efectúa mentalmente:**

- a) **0,24 : 2**                                      b) **1,25 · 2**  
 c) **0,4 · 0,5**                                    d) **4,2 · 2**  
 e) **7,64 : 10**                                    f) **7,64 : 100**  
 g) **0,24 : 0,12**

- a) 0,12                                      b) 2,5                                      c) 0,2                                      d)  $\frac{76}{9}$   
 e) 0,764                                      f) 0,0764                                    g) 2

**20** **Si  $248 \cdot 3\,652 = 905\,696$ , calcula:**

- a) **2,48 · 36,52**  
 b) **9 056,96 : 2,48**  
 c) **0,248 · 0,3652**  
 d) **905,696 : 0,3652**  
 e) **905 696 : 2 480**

- a)  $2,48 \cdot 36,52 = 90,5696$   
 b)  $9\,056,96 : 2,48 = 3\,652$   
 c)  $0,248 \cdot 0,3652 = 0,0905696$   
 d)  $905,696 : 0,3652 = 2\,480$   
 e)  $905\,696 : 2\,480 = 365,2$

**21** **Calcula:**

- a) **10,3<sup>4</sup>**                                      b) **12,03<sup>-2</sup>**                                      c) **2,04<sup>2</sup>**  
 d) **0,3<sup>3</sup>**                                      e) **1,42<sup>-2</sup>**  
 a)  $10,3^4 = \left(\frac{103}{10}\right)^4 = \frac{112\,550\,881}{10\,000} = 11\,255,0881$   
 b)  $12,03^{-2} = \left(\frac{361}{30}\right)^{-2} = \left(\frac{30}{361}\right)^2 = \frac{900}{130\,321}$   
 c)  $2,04^2 = \left(\frac{92}{45}\right)^2 = \frac{8\,464}{2\,025}$   
 d)  $0,3^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$   
 e)  $1,42^{-2} = \left(\frac{142}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{100}{142}\right)^2 = \frac{10\,000}{20\,164} = \frac{2\,500}{5\,041}$

# 4 NÚMEROS DECIMALES

<http://www.McGraw-Hill.es>

**22**   Obtén la fracción generatriz de:

- a)  $1,2^{-3}$                       b)  $0,25^2$                       c)  $0,3^{-2}$   
 d)  $0,16^3$                       e)  $0,02^{-1}$

a)  $1,2^{-3} = \left(\frac{12}{10}\right)^{-3} = \left(\frac{10}{12}\right)^3 = \frac{1000}{1728} = \frac{125}{216}$

b)  $0,25^2 = \left(\frac{25}{100}\right)^2 = \frac{625}{10000} = \frac{1}{16}$

c)  $0,3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 3^2 = 9$

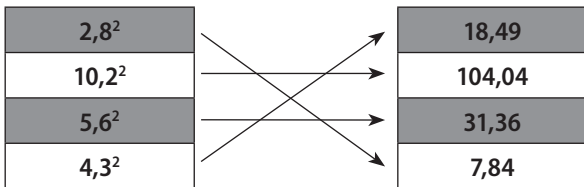
d)  $0,16^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

e)  $0,02^{-1} = \left(\frac{1}{45}\right)^{-1} = 45$

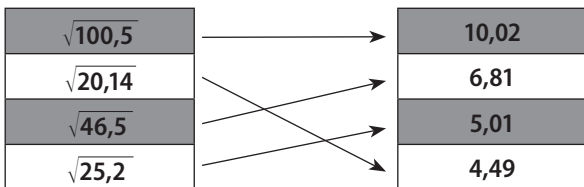
**23**  Sin hacer los cálculos correspondientes, indica si las siguientes desigualdades son ciertas:

- a)  $0,4^2 < 0,5^2$                       b)  $0,4^{-1} < 0,5^{-1}$   
 c)  $0,4^{-3} > 0,5^{-3}$                       d)  $0,4^0 > 0,5^{-3}$   
 a) Verdadero.                      b) Falso.  
 c) Verdadero.                      d) Falso.

**24**   Copia en tu cuaderno y, sin realizar la potencia, asocia cada cálculo con su resultado:



**25**   Copia en tu cuaderno y, sin realizar la raíz cuadrada, asocia cada cálculo con su resultado aproximado:



**26**   Calcula:

- a)  $24,5 + 2,1 \cdot (2,48 - 1,23)$   
 b)  $2,5 - 3,8 : (2,2 - 1,3)$   
 c)  $(2,4 + 1,03) \cdot (100,05 - 38,2 : 2)$   
 d)  $2,4 \cdot 2,3 - (4,5 \cdot 2 - 8,3)$   
 e)  $[(1,26 + 1,42) : 2] \cdot (1,25 + 3)$   
 a)  $24,5 + 2,1 \cdot (2,48 - 1,23) = 24,5 + 2,1 \cdot 1,25 =$   
 $= 24,5 + 2,625 = 27,125$

- b)  $2,5 - 3,8 : (2,2 - 1,3) = 2,5 - 3,8 : 0,9 = 2,5 - 4,2 = -1,7$   
 c)  $(2,4 + 1,03) \cdot (100,05 - 38,2 : 2) = 3,43 \cdot (100,05 - 19,1) =$   
 $= 3,43 \cdot 80,95 = 277,6585$   
 d)  $2,4 \cdot 2,3 - (4,5 \cdot 2 - 8,3) = 5,52 - (9 - 8,3) = 5,52 - 0,7 =$   
 $= 4,82$   
 e)  $[(1,26 + 1,42) : 2] \cdot (1,25 + 3) = (2,68 : 2) \cdot 4,25 =$   
 $= 1,34 \cdot 4,25 = 5,695$

**27**   Calcula:

- a)  $2,4 \cdot (3,1 + 2,5) - 10,46$   
 b)  $(3,5 - 2,4 \cdot 1,3) : (0,5 + 0,2 \cdot 3)$   
 c)  $4,3 \cdot 0,5 - 4,3 \cdot 0,2 + 4,3 : 2$   
 d)  $1,28 + 2,43 \cdot 3,2 - 2,45$   
 e)  $2 \cdot (-3,1) \cdot (0,5 + 0,3)$   
 a)  $2,4 \cdot (3,1 + 2,5) - 10,46 = 2,4 \cdot 5,6 - 10,46 = 13,44 - 10,46 =$   
 $= 2,98$   
 b)  $(3,5 - 2,4 \cdot 1,3) : (0,5 + 0,2 \cdot 3) = (3,5 - 3,12) : (0,5 + 0,6) =$   
 $= 0,38 : 1,1 = 0,345$   
 c)  $4,3 \cdot 0,5 - 4,3 \cdot 0,2 + 4,3 : 2 = 2,15 - 0,86 + 2,15 = 3,44$   
 d)  $1,28 + 2,43 \cdot 3,2 - 2,45 = 1,28 + 7,776 - 2,45 = 6,606$   
 e)  $2 \cdot (-3,1) \cdot (0,5 + 0,3) = -6,2 \cdot 0,8 = -4,96$

**28**   Calcula la superficie de un círculo de 0,85 dm de radio.

$A = \pi r^2 \Leftrightarrow A = \pi \cdot 0,85^2 = 0,7225 \cdot \pi \text{ dm}^2$

**29**   Una película de DVD cuesta 14,60 €, pero si compramos 5 nos hacen un descuento de 2,25 € por cada una de ellas. Calcula lo que hay que pagar por las 5 películas.

$5 \cdot (14,60 - 2,25) = 61,75 \text{ euros.}$

**30**   En el depósito de un coche caben 45 litros de gasoil. Si se sabe que en el depósito queda una reserva de 2,8 litros, ¿cuánto cuesta llenar el depósito si el litro de gasoil cuesta 0,92 €?

$0,92 \cdot (45 - 2,8) = 38,824. \text{ Costará } 38,82 \text{ euros.}$

**31**   Enviar un mensaje desde un móvil cuesta 0,15 €, y realizar una llamada vale 0,25 € más 0,12 € por el establecimiento de llamada. Calcula cuánto cuesta mandar siete mensajes y hacer seis llamadas.

$7 \cdot 0,15 + 6 \cdot (0,25 + 0,12) = 3,27 \text{ euros.}$

**32** **II** Un metro de tela cuesta 7,48 €. Si se compran 2,5 metros de tela, ¿cuánto hay que pagar en total?

$$2,5 \cdot 7,48 = 18,7 \text{ euros.}$$

**33** **II** Un terreno rectangular mide 28,5 metros de ancho por 45,75 metros de largo. Si se divide en tres partes iguales, ¿cuál es el área de cada parte?

$$(28,5 \cdot 45,75) : 3 = 434,625 \text{ m}^2.$$

**34** **I** La superficie de un campo de fútbol es 8 251,25 m<sup>2</sup>. Si la anchura del campo es 80,5 m, ¿cuánto mide de largo?

$$8 251,25 : 80,5 = 102,5 \text{ m.}$$

## APROXIMACIÓN Y REDONDEO

**35** **I** Aproxima hasta las centésimas:

- |            |            |
|------------|------------|
| a) 42,745  | b) 28,359  |
| c) 10,2413 | d) 14,2459 |
| e) 1,429   | f) 0,0281  |
- a) 42,75                      b) 28,36  
c) 10,24                      d) 14,25  
e) 1,43                        f) 0,03

**36** **I** Efectúa estas divisiones redondeando el resultado hasta las milésimas:

- |                   |                  |
|-------------------|------------------|
| a) 25,4 : 12,42   | b) 24,36 : 15,34 |
| c) 48,273 : 12,66 | d) 12,45 : 32,3  |
- e) 0,008 : 0,04
- a) 2,045                      b) 1,588  
c) 3,813                      d) 0,385  
e) 0,2

**37** **I** Calcula las siguientes potencias redondeando el resultado hasta las cienmilésimas:

- |               |                |                |
|---------------|----------------|----------------|
| a) $0,3^{-3}$ | b) $2,4^3$     | c) $12,3^{-4}$ |
| d) $1,6^2$    | e) $0,99^{-2}$ | f) $0,5^{-3}$  |
- a)  $0,3^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$   
b)  $2,4^3 = \left(\frac{22}{9}\right)^3 = \frac{10 648}{729} = 14,60631$   
c)  $12,3^{-4} = \left(\frac{123}{10}\right)^{-4} = \left(\frac{10}{123}\right)^4 = \frac{10 000}{228 886 641} = 0,00004$   
d)  $1,6^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} = 2,77778$

$$e) 0,99^{-2} = \left(\frac{99}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{100}{99}\right)^2 = \frac{10 000}{9 801} = 1,0203$$

$$f) 0,5^{-3} = \left(\frac{5}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{5}\right)^3 = \frac{729}{125}$$

**38** **I** Tu mesa de trabajo mide 1,5 metros de largo por 95 centímetros de ancho.

- a) Calcula la superficie de la mesa.  
b) Aproxima la superficie obtenida hasta las centésimas.  
c) Si cubres la mesa con cuadrados de papel de 5 cm de lado, ¿cuántos cuadrados necesitas para tapar completamente la mesa?

- a)  $1,5 \cdot 0,95 = 1,425 \text{ m}^2$   
b)  $1,43 \text{ m}^2$   
c)  $1,425 : 0,0025 = 570 \text{ cuadrados.}$

**39** **III** En una carrera de 100 metros, Juan emplea 13,18 segundos y Ángel emplea 13,08 segundos. El tiempo que se le da a Juan es 13,2 segundos y el que se le da a Ángel es 13,1 segundos.

¿Qué aproximación te parece más adecuada?

$$\text{Error relativo Juan} = \frac{0,02}{13,18} = 0,001517.$$

$$\text{Error relativo Ángel} = \frac{0,02}{13,08} = 0,001529.$$

Se aproxima mejor el tiempo dado a Juan.

**40** **III** La nota media de tu evaluación de Matemáticas es 5,78, pero en el boletín de calificaciones te ponen un 6. Tu compañero, que en la evaluación de Matemáticas tiene una nota media de 7,97, en el boletín de calificaciones tiene un 8.

¿Qué aproximación es mejor?

$$\text{Error relativo tuyo} = \frac{0,22}{5,78} = 0,038.$$

$$\text{Error relativo de tu compañero} = \frac{0,03}{7,97} = 0,0038.$$

Se aproxima más la nota de tu compañero, a ti te han beneficiado más.

**41** **III** Un reloj atrasa 3 minutos cada 6 horas y otro atrasa 5 minutos cada 8 horas.

Si se pusieran en la hora exacta al mismo tiempo, ¿qué reloj estaría dando la hora más aproximada a la real después de 24 horas?

$$\text{Primer reloj: } \frac{24}{6} \cdot 3 = 12 \text{ minutos se retrasa el primer reloj.}$$

$$\text{Segundo reloj: } \frac{24}{8} \cdot 5 = 15 \text{ minutos se retrasa el segundo reloj.}$$

La hora más aproximada la da el primero.



## EJERCICIOS

**1** Si en una librería, el precio de un libro es  $x$  euros y el de cada bolígrafo es 7 € menos, expresa algebraicamente lo que cuestan:

- a) Cuatro libros.  
 b) Diez bolígrafos.  
 c) La mitad de lo que cuestan seis libros.  
 d) Cinco libros más tres bolígrafos.  
 e) Cinco libros con un descuento de 3 €.  
 f) Dos bolígrafos y seis libros.  
 g) Tres bolígrafos y dos libros.  
 h) Seis libros y un bolígrafo.

- a)  $4x$                       b)  $10 \cdot (x - 7)$                       c)  $\frac{6x}{2}$   
 d)  $5x + 3 \cdot (x - 7)$                       e)  $5x - 3$                       f)  $6x + 2 \cdot (x - 7)$   
 g)  $3 \cdot (x - 7) + 2x$                       h)  $6x + x - 7$

**2** Si  $x$  es un número natural, escribe las expresiones algebraicas que representan:

- a) El doble de ese número.  
 b) La tercera parte del mismo.  
 c) Su cubo.  
 d) Su anterior.  
 e) Su posterior.  
 f) Su triple más tres unidades.  
 g) La mitad de su triple.  
 h) El cuádruple más cuatro unidades.  
 i) El doble de su posterior.

- a)  $2x$                       b)  $\frac{x}{3}$                       c)  $x^3$   
 d)  $x - 1$                       e)  $x + 1$                       f)  $3x + 3$   
 g)  $\frac{3x}{2}$                       h)  $4x + 4$                       i)  $2 \cdot (x + 1)$

**3** Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para los valores que se dan:

- a)  $12x + y$                       si  $x = 2, y = 3$   
 b)  $\frac{xy}{3}$                       si  $x = 3, y = 4$   
 c)  $(2x)^2$                       si  $x = 2$   
 d)  $\frac{a^2 - b}{a}$                       si  $a = 4, b = 6$   
 e)  $\frac{1}{3}x^2 + 2y$                       si  $x = 3, y = 2$

a)  $12 \cdot 2 + 3 = 24 + 3 = 27$

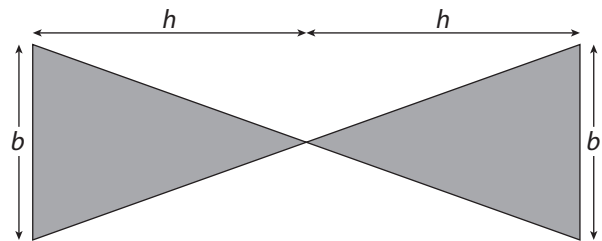
b)  $\frac{3 \cdot 4}{3} = 4$

c)  $(2 \cdot 2)^2 = 16$

d)  $\frac{4^2 - 6}{4} = \frac{16 - 6}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

e)  $\frac{1}{3} \cdot 3^2 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$

**4** Halla la expresión algebraica que representa el área de la siguiente figura y calcula su valor numérico, sabiendo que las bases miden 5 cm y que la altura de ambos triángulos es 7 cm.



$$A = 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = 2 \cdot \frac{5 \cdot 7}{2} \Leftrightarrow A = 35 \text{ cm}^2$$

**5** Señala cuántos términos hay en cada una de las siguientes expresiones algebraicas. En caso de ser polinomios, concreta de qué tipo son:

- a)  $3mn^2$   
 b)  $3y^2 + 2xy - 1$   
 c)  $\frac{5}{2}x + 1$   
 d)  $4ab - 2b + a$   
 e)  $7x^2z + z + 2$   
 f)  $2ya$

Expresión algebraica	Términos	Tipo
$3mn^2$	1	Monomio
$3y^2 + 2xy - 1$	3	Trinomio
$\frac{5}{2}x + 1$	2	Binomio
$4ab - 2b + a$	3	Trinomio
$7x^2z + z + 2$	3	Trinomio
$2ya$	1	Monomio

**6** Describe estas expresiones algebraicas (monomio, binomio, trinomio, etc.), e indica la parte literal, el coeficiente y el grado de cada término:

- a)  $9a^3b^4 + 3$       b)  $4y^2z^3 - 5y$       c)  $8z + y - 2y^5$   
 d)  $\frac{3}{4}m^4$       e)  $7a + 4b^2a - 2b + 1$       f)  $x$

Expresión algebraica	Tipo	Parte literal	Coeficiente	Grado
$9a^3b^4 + 3$	Binomio	$a^3b^4$	9, 3	7
$4y^2z^3 - 5y$	Binomio	$y^2z^3, y$	5, -5	5
$8z + y - 2y^5$	Trinomio	$z, y, y^5$	8, 1, -2	5
$\frac{3}{4}m^4$	Monomio	$m^4$	$\frac{3}{4}$	4
$7a + 4b^2a - 2b + 1$	Cuatrinomio	$a, b^2a, b$	7, 4, -2, 1	3
$x$	Monomio	$x$	1	1

**7** Halla el resultado de las siguientes operaciones con monomios:

- a)  $5z + 6z + z$       b)  $10x^2 - 7x^2 + x^2$   
 c)  $6yx + 4xy + yx$       d)  $2n^2m + 3n^2m$   
 e)  $\frac{3}{4}x - 2x + x$       f)  $a^2 + 3a^2 + 9ab$   
 a)  $12z$       b)  $4x^2$       c)  $11xy$   
 d)  $5n^2m$       e)  $-\frac{1}{4}x$       f)  $4a^2 + 9ab$

**8** Realiza la multiplicación de los siguientes monomios:

- a)  $5x^2 \cdot 3x$       b)  $3b^2 \cdot \frac{1}{2}b$   
 c)  $2a^2 \cdot a \cdot 5a$       d)  $4y \cdot (-4)y^2$   
 e)  $4y \cdot 2y^2$       f)  $6a^3 \cdot 2a$   
 a)  $15x^3$       b)  $\frac{3}{2}b^3$       c)  $10a^4$   
 d)  $-16y^3$       e)  $8y^3$       f)  $12a^4$

**9** Indica cuáles de estas igualdades son correctas y cuáles son incorrectas. Razona tu respuesta:

- a)  $3a + a = 4a^2$       b)  $5x + x + x = 7x$   
 c)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = x^2$       d)  $2n^2 + 3n^2 - 5n^2 = 0$   
 e)  $3zy + 5zy = 8yz$       f)  $5x^2 + 2x = 7x^3$   
 a) Incorrecta.      b) Correcta.  
 c) Correcta.      d) Correcta.  
 e) Correcta.      f) Incorrecta.

**10** Realiza la división de los siguientes monomios:

- a)  $\frac{24a^4}{6a^2}$       b)  $\frac{4ab}{2b}$   
 c)  $\frac{12m^2}{15m}$       d)  $\frac{-9x^2y^2}{3x}$   
 e)  $\frac{12y^5}{6y^2}$       f)  $\frac{6y^8x}{3x^3y}$   
 a)  $\frac{24a^4}{6a^2} = 4a^2$       b)  $\frac{4ab}{2b} = 2a$   
 c)  $\frac{12m^2}{15m} = \frac{4m}{5}$       d)  $\frac{-9x^2y^2}{3x} = -3xy^2$   
 e)  $\frac{12y^5}{6y^2} = 2y^3$       f)  $\frac{6y^8x}{3x^3y} = \frac{2y^7}{x^2}$

**11** Dados los polinomios:

$A(x) = 12x^6 + 6x^4 + 3x + 2$

$B(x) = 4x^6 - 4x^4 + 2$

$C(x) = 4x^4 - 5x^3 + x - 1$

Calcula las siguientes operaciones:

- a)  $A(x) + B(x) + C(x)$       b)  $A(x) - B(x)$   
 c)  $B(x) + A(x)$       d)  $C(x) - A(x)$

a)  $A(x) + B(x) + C(x)$

$$\begin{array}{r} 12x^6 + 6x^4 + 3x + 2 \\ 4x^6 - 4x^4 + 2 \\ 4x^4 - 5x^3 + x - 1 \\ \hline 16x^6 + 6x^4 - 5x^3 + 4x + 3 \end{array}$$

b)  $A(x) - B(x)$

$$\begin{array}{r} 12x^6 + 6x^4 + 3x + 2 \\ -4x^6 + 4x^4 - 2 \\ \hline 8x^6 + 10x^4 + 3x \end{array}$$

c)  $B(x) + A(x)$

$$\begin{array}{r} 4x^6 - 4x^4 + 2 \\ 12x^6 + 6x^4 + 3x + 2 \\ \hline 16x^6 + 2x^4 + 3x + 4 \end{array}$$

d)  $C(x) - A(x)$

$$\begin{array}{r} 4x^4 - 5x^3 + x - 1 \\ -12x^6 - 6x^4 - 3x - 2 \\ \hline -12x^6 - 2x^4 - 5x^3 - 2x - 3 \end{array}$$

**12** Haz la suma o resta de los polinomios:

$$a) \left( \frac{3}{4}z^2 + 5z^3 - 3z \right) + \left( \frac{1}{2}z^2 + 4z^3 + z \right)$$

$$b) (3n^5 - 4n^2 + 5) - (2n^5 + 6n^2 + 3)$$

$$c) (m^3 + 3m + 7) - (m^3 - 2m + 1)$$

$$d) (y^{10} + 3y^3 - y) + ((y^5)^2 - 4y^2 + 5y + 8)$$

$$a) \begin{array}{r} \frac{3}{4}z^2 + 5z^3 - 3z \\ \frac{1}{2}z^2 + 4z^3 + z \\ \hline \frac{5}{4}z^2 + 9z^3 - 2z \end{array}$$

$$b) \begin{array}{r} 3n^5 - 4n^2 + 5 \\ -2n^5 - 6n^2 - 3 \\ \hline n^5 - 10n^2 + 2 \end{array}$$

$$c) \begin{array}{r} m^3 + 3m + 7 \\ -m^3 + 2m - 1 \\ \hline 5m + 6 \end{array}$$

$$d) \begin{array}{r} y^{10} + 3y^3 - y \\ y^{10} - 4y^2 + 5y + 8 \\ \hline 2y^{10} + 3y^3 - 4y^2 + 4y + 8 \end{array}$$

**13** Calcula las multiplicaciones siguientes y reduce al máximo el resultado:

$$a) (-z)^2 \cdot (z^3 + z^2 - 5z) \quad b) 7y \cdot (6y^2 + 3y - 3)$$

$$c) (-2m)^2 \cdot (3m^2 + 2m) \quad d) x^6 \cdot (2x^2 - 4x + 3)$$

$$e) 3x \cdot \left( \frac{1}{3}x + x^2 \right) \quad f) \frac{1}{3}x \cdot (9x^2 + 27)$$

$$a) \begin{array}{r} z^3 + z^2 - 5z \\ z^2 \\ \hline z^5 + z^4 - 5z^3 \end{array} \quad b) \begin{array}{r} 6y^2 + 3y - 3 \\ 7y \\ \hline 42y^3 + 21y^2 - 21y \end{array}$$

$$c) \begin{array}{r} 3m^2 + 2m \\ 4m^2 \\ \hline 12m^4 + 8m^3 \end{array} \quad d) \begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 3 \\ x^6 \\ \hline 2x^8 - 4x^7 + 3x^6 \end{array}$$

$$e) \begin{array}{r} \frac{1}{3}x + x^2 \\ 3x \\ \hline x^2 + 3x^3 \end{array} \quad f) \begin{array}{r} 9x^2 + 27 \\ \frac{1}{3}x \\ \hline 3x^3 + 9x \end{array}$$

**14** Teniendo en cuenta los polinomios:

$$A(x) = 5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 2$$

$$B(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$C(x) = 7x - 10x^2 + 10$$

$$D(x) = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 2$$

## Calcula:

$$a) A(x) \cdot B(x) \quad b) -A(x) \cdot C(x)$$

$$c) C(x) \cdot B(x) \quad d) B(x) \cdot C(x)$$

$$e) A(x) \cdot C(x) \quad f) D(x) \cdot C(x)$$

$$g) D(x) \cdot B(x) \quad h) -D(x) \cdot B(x)$$

$$i) A(x) \cdot (-D(x))$$

$$a) A(x) \cdot B(x)$$

$$\begin{array}{r} 5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \\ \quad \quad \quad 3x^2 + x - 2 \\ \hline -10x^5 - 6x^4 \quad + 8x^2 - x + 4 \\ 5x^6 + 3x^5 \quad - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \\ 15x^7 + 9x^6 \quad - 12x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 6x^2 \\ \hline 15x^7 + 14x^6 - 7x^5 - 18x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 4 \end{array}$$

$$b) -A(x) \cdot C(x)$$

$$\begin{array}{r} -5x^5 - 3x^4 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \\ \quad \quad \quad 7x - 10x^2 + 10 \\ \hline -50x^5 - 30x^4 \quad + 40x^2 - 5x + 20 \\ 50x^7 + 30x^6 \quad - 40x^4 + 5x^3 - 20x^2 \\ - 35x^6 - 21x^5 \quad + 28x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 14x \\ \hline 50x^7 - 5x^6 - 71x^5 - 70x^4 + 33x^3 + \frac{33}{2}x^2 + 9x + 20 \end{array}$$

$$c) C(x) \cdot B(x)$$

$$\begin{array}{r} -10x^2 + 7x + 10 \\ \quad \quad \quad 3x^2 + x - 2 \\ \hline 20x^2 - 14x - 20 \\ -10x^3 + 7x^2 + 10x \\ \hline -30x^4 + 21x^3 + 30x^2 \\ -30x^4 + 11x^3 + 57x^2 - 4x - 20 \end{array}$$

d)  $B(x) \cdot C(x)$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + x - 2 \\ 7x - 10x^2 + 10 \\ \hline 30x^2 + 10x - 20 \\ -30x^4 - 10x^3 + 20x^2 \\ 21x^3 + 7x^2 - 14x \\ \hline -30x^4 + 11x^3 + 57x^2 - 4x - 20 \end{array}$$

e)  $A(x) \cdot C(x)$

$$\begin{array}{r} 5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \\ -10x^2 + 7x + 10 \\ \hline 50x^5 + 30x^4 - 40x^2 + 5x - 20 \\ 35x^6 + 21x^5 - 28x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 14x \\ -50x^7 - 30x^6 + 40x^4 - 5x^3 + 20x^2 \\ \hline -50x^7 + 5x^6 + 71x^5 + 70x^4 - 33x^3 - \frac{33}{2}x^2 - 9x - 20 \end{array}$$

f)  $D(x) \cdot C(x)$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{5}x^2 + 2x + 2 \\ -10x^2 + 7x + 10 \\ \hline 2x^2 + 20x + 20 \\ \frac{7}{5}x^3 + 14x^2 + 14x \\ -2x^4 - 20x^3 - 20x^2 \\ \hline -2x^4 - \frac{93}{5}x^3 - 4x^2 + 34x + 20 \end{array}$$

g)  $D(x) \cdot B(x)$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{5}x^2 + 2x + 2 \\ 3x^2 + x - 2 \\ \hline -\frac{2}{5}x^2 - 4x - 4 \\ \frac{1}{5}x^3 + 2x^2 + 2x \\ \frac{3}{5}x^4 + 6x^3 + 6x^2 \\ \hline \frac{3}{5}x^4 + \frac{31}{5}x^3 + \frac{38}{5}x^2 - 2x - 4 \end{array}$$

h)  $-D(x) \cdot B(x)$

$$\begin{array}{r} -\frac{1}{5}x^2 - 2x - 2 \\ 3x^2 + x - 2 \\ \hline \frac{2}{5}x^2 + 4x + 4 \\ -\frac{1}{5}x^3 - 2x^2 - 2x \\ -\frac{3}{5}x^4 - 6x^3 - 6x^2 \\ \hline -\frac{3}{5}x^4 - \frac{31}{5}x^3 - \frac{38}{5}x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

i)  $A(x) \cdot (-D(x))$

$$\begin{array}{r} 5x^5 + 3x^4 - 4x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \\ -\frac{1}{5}x^2 - 2x - 2 \\ \hline -10x^5 - 6x^4 + 8x^2 - x + 4 \\ -10x^6 - 6x^5 + 8x^3 - x^2 + 4x \\ -x^7 - \frac{3}{5}x^6 + \frac{4}{5}x^4 - \frac{1}{10}x^3 + \frac{2}{5}x^2 \\ \hline -x^7 - \frac{53}{5}x^6 - 16x^5 - \frac{26}{5}x^4 + \frac{79}{10}x^3 + \frac{37}{5}x^2 + 3x + 4 \end{array}$$

**15** Calcula las siguientes identidades notables:

- a)  $(x + 2)^2$                       b)  $(2x - 3)^2$   
 c)  $(3x^2 - 4x)^2$                 d)  $(x + 2) \cdot (x - 2)$   
 e)  $\left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2$                     f)  $(2x - 5) \cdot (2x + 5)$

- a)  $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$   
 b)  $(2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$   
 c)  $(3x^2 - 4x)^2 = 9x^4 - 24x^3 + 16x^2$   
 d)  $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$   
 e)  $\left(\frac{2}{3}x - 3\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 - 4x + 9$   
 f)  $(2x - 5) \cdot (2x + 5) = 4x^2 - 25$

**16** Indica si las siguientes igualdades son ciertas:

- a)  $(5x + 8)^2 = 5x^2 + 8^2$   
 b)  $\left(\frac{1}{2}y + 2z\right) \cdot \left(\frac{1}{2}y - 2z\right) = \frac{1}{4}y^2 - 4z^2$   
 c)  $(3m - m^2)^2 = 9m^2 - 6m^3 + m^4$   
 a) Falsa.  
 b) Verdadera.  
 c) Verdadera.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### EXPRESIONES ALGEBRAICAS. EL LENGUAJE ALGEBRAICO

**1**  La variable  $x$  representa un número natural. Expresa en función de él:

- a) Su cuádruple.
- b) El doble de su posterior.
- c) La mitad de su anterior más cuatro unidades.

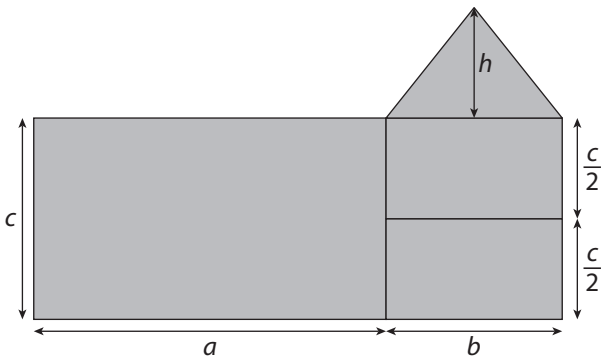
a)  $4x$                       b)  $2(x+1)$                       c)  $\frac{x-1}{2} + 4$

**2**  Expresa algebraicamente los siguientes enunciados:

- a) Las dos terceras partes del cuadrado de un número.
- b) El cuadrado del doble de un número.
- c) El triple de un número más tres.
- d) El triple de un número, más tres.

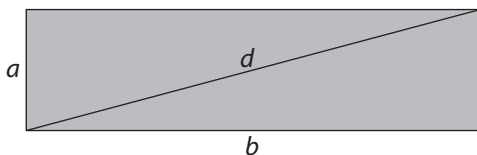
a)  $\frac{2}{3}x^2$                       b)  $2x^2$   
c)  $3(x+3)$                       d)  $3x+3$

**3**  Expresa algebraicamente el área del dibujo:



$$A = a \cdot c + b \cdot c + \frac{b \cdot h}{2}$$

**4**  Expresa algebraicamente el valor de la siguiente diagonal:



$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

### VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

**5**  Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

- a)  $x^2 + 2x$                       si  $x = 2$
  - b)  $x^2 + 2x + mx$                       si  $x = 1, m = -1$
  - c)  $2m + mx$                       si  $x = 2, m = \frac{1}{2}$
  - d)  $xy - x^3$                       si  $x = 4, y = 3$
- a)  $x^2 + 2x = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$   
b)  $x^2 + 2x + 2m = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1 + 2 - 2 = 1$   
c)  $2m + mx = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 + 1 = 2$   
d)  $xy - x^3 = 4 \cdot 3 - 4^3 = 12 - 64 = -52$

**6**  Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla indicando el valor numérico de cada expresión:

	$x = -1$	$x = 0$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$
$x^3 - x$	0	0	$-\frac{3}{8}$	6
$6x - \frac{x^2}{2}$	$-\frac{13}{2}$	0	$\frac{23}{8}$	10
$x \cdot (10 - 6x)$	-16	0	$\frac{7}{2}$	-4
$2 \cdot (x - 1) - 3$	-7	-3	-4	-1

**7**  La velocidad de un cuerpo en movimiento viene definida por la siguiente expresión:  $v = \frac{e}{t}$ , donde  $v$  es el valor de dicha velocidad,  $e$  el espacio recorrido y  $t$  el tiempo que ha estado en movimiento. Si un cuerpo ha recorrido 500 metros en 30 segundos, ¿cuál es su velocidad?

$$v = \frac{500}{30} \Leftrightarrow v = 16,6 \text{ m/s}$$

**8**  Escribe las siguientes expresiones algebraicas de manera que queden ordenadas de menor a mayor en función de su valor numérico en  $x = -3$ .

- a)  $x^2 + 2x - x$                       b)  $3x^2 + 10x$                       c)  $x^3 + 2x - 7$
- a)  $(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - (-3) = 9 - 6 + 3 = 6$
- b)  $3 \cdot (-3)^2 + 10 \cdot (-3) = 3 \cdot 9 - 30 = 27 - 30 = -3$
- c)  $(-3)^3 + 2 \cdot (-3) - 7 = -27 - 6 - 7 = -40$
- $c < b < a$

9  Halla el valor numérico en cada caso:

a)  $m^2 + nx - m + 7$  si  $m = 4, n = -1, x = 2$

b)  $2xy - x + y^2 + 2y$  si  $x = 3, y = 5$

c)  $7m - \frac{1}{2}x^2 - 12$  si  $m = 2, x = 2$

d)  $8y^3 - 7y^2 + y - 2$  si  $y = -2$

e)  $x^2 + 2xy + y^2$  si  $x = 3, y = -2$

a)  $m^2 + nx - m + 7 = 4^2 + (-1) \cdot 2 - 4 + 7 = 17$

b)  $2xy - x + y^2 + 2y = 2 \cdot 3 \cdot 5 - 3 + 5^2 + 2 \cdot 5 =$   
 $= 30 - 3 + 25 + 10 = 62$

c)  $7m - \frac{1}{2}x^2 - 12 = 7 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 12 = 14 - 2 - 12 = 0$

d)  $8y^3 - 7y^2 + y - 2 = 8 \cdot (-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + (-2) - 2 =$   
 $= -64 - 28 - 2 - 2 = -96$

e)  $x^2 + 2xy + y^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (-2) + (-2)^2 = 9 - 12 + 4 = 1$

## MONOMIOS Y POLINOMIOS

10  Explica con tus propias palabras el significado de los términos:

a) Monomio.

b) Polinomio.

c) Término.

d) Coeficiente.

e) Binomio.

f) Factor.

a) Monomio es una expresión algebraica formada por la multiplicación de números, letras o números y letras.

b) Polinomio es una expresión algebraica formada por la suma o resta de monomios no semejantes.

c) Término es la expresión algebraica formada por un monomio.

d) Coeficiente es la parte numérica de un monomio.

e) Binomio es el polinomio formado por dos monomios no semejantes.

f) Factor es cada una de las cantidades que se multiplican para formar un producto.

11  Clasifica las siguientes expresiones algebraicas, e indica el coeficiente y la parte literal de cada uno de los monomios. ¿Cuántos términos tiene cada uno?

a)  $12x^2y + 15y - 2$  b)  $-2nm^3 + \frac{1}{2}x$

c)  $x^2 + x - 2$  d)  $\frac{3}{5}x^2yz$

e)  $\frac{-x^2y}{2} + 1$  f)  $\frac{3}{5}ym^5 - x$

Expresión algebraica	Tipo	Parte literal	Coeficiente	Grado
$12x^2y + 15y - 2$	Trinomio	$x^2y, y$	12, 15, -2	3
$-2nm^3 + \frac{1}{2}x$	Binomio	$nm^3, x$	-2, $\frac{1}{2}$	4
$x^2 + x - 2$	Trinomio	$x^2, x$	1, 1, -2	2
$\frac{3}{5}x^2yz$	Monomio	$x^2yz$	$\frac{3}{5}$	4
$\frac{-x^2y}{2} + 1$	Binomio	$x^2y$	$-\frac{1}{2}, 1$	3
$\frac{3}{5}ym^5 - x$	Binomio	$ym^5, x$	$\frac{3}{5}, -1$	6

12  Clasifica las siguientes expresiones y di cuál es el coeficiente y cuál es la parte literal de cada monomio.

a)  $-\frac{x^2yz}{2}$

b)  $(2xy)^2 + x + \frac{1}{2}$

c)  $\frac{3}{4}xy + 5$

d)  $mnx + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}$

Expresión algebraica	Tipo	Parte literal	Coeficiente	Grado
$-\frac{x^2yz}{2}$	Monomio	$x^2yz$	$-\frac{1}{2}$	4
$(2xy)^2 + x + \frac{1}{2}$	Trinomio	$(xy)^2, x$	4, 1, $\frac{1}{2}$	4
$\frac{3}{4}xy + 5$	Binomio	$xy$	$\frac{3}{4}, 5$	2
$mnx + \frac{x^2}{2} - \frac{4}{5}$	Trinomio	$mnx, x^2$	1, $\frac{1}{2}, -\frac{4}{5}$	3

13  Describe los siguientes polinomios, indicando el número de términos que lo componen y cuáles son los coeficientes y las partes literales de cada uno.

a)  $A(x) = 64x^3 + 24x^2$

b)  $B(x) = 6x + 3x - 5x - 4$

c)  $C(x) = 8x - 28x^3 + 6x^3 - 49x^5 - 20$

d)  $D(x) = 6x + 3x - 6x - 4$

Expresión algebraica	Tipo	Parte literal	Coeficiente	N.º de términos
$64x^3 + 24x^2$	Binomio	$x^3, x^2$	64, 24	2
$6x + 3x - 5x - 4 = 4x - 4$	Binomio	$x$	4, -4	2
$8x - 28x^3 + 6x^3 - 49x^5 - 20 =$ $= -49x^5 - 22x^3 + 8x - 20$	Cuatrinomio	$x^5, x^3, x$	-49, -22, 8, -20	4
$6x + 3x - 6x - 4 = 3x - 4$	Binomio	$x$	3, -4	2

**14**   ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones? Razónalas.

- a) La parte literal del término independiente es  $x$ .  
 b) El coeficiente del monomio  $xy^2$  es cero.  
 c) Todos los binomios están compuestos por dos monomios.  
 d) Dos términos de un polinomio son semejantes si tienen la misma parte literal.
- a) Falsa, el término independiente no tiene parte literal.  
 b) Falsa, es 1.  
 c) Cierta.  
 d) Cierta.

## OPERACIONES CON MONOMIOS

**15**  ¿Qué condiciones deben cumplir dos monomios para que se puedan sumar o restar? ¿Ocurre lo mismo en el caso de multiplicar o dividir monomios?

Para que se puedan sumar o restar tienen que tener la misma parte literal. No ocurre lo mismo para multiplicar o para dividir.

**16**  Reduce al máximo las siguientes expresiones:

- a)  $x^2 + 3x + 5x^2 - x + 2$   
 b)  $2x^5 - x^2 + 7x^2 - x^5 - 1$   
 c)  $2x^3 - x^3 + 2$   
 d)  $x^2 - 7x^2 + 30$

- a)  $6x^2 + 2x + 2$                       b)  $x^5 + 6x^2 - 1$   
 c)  $x^3 + 2$                                 d)  $-6x^2 + 30$

**17**  Calcula:

- a)  $6x^2 + 3x^2$   
 b)  $5y^2 + y^2$   
 c)  $m^3 + 10m^3 + 3m^3$   
 d)  $-9x^6 + 3x^6 - x^6$

- a)  $9x^2$                                       b)  $6y^2$   
 c)  $14m^3$                                  d)  $-7x^6$

**18**  Opera los siguientes monomios:

- a)  $(7x) \cdot y$                                 b)  $(2x^5) \cdot x^2$   
 c)  $(-2x^2) \cdot x$                             d)  $\left(\frac{3y}{4}\right) \cdot y^2$
- a)  $(7x) \cdot y = 7xy$                       b)  $(2x^5) \cdot x^2 = 2x^7$   
 c)  $(-2x^2) \cdot x = -2x^3$                 d)  $\left(\frac{3y}{4}\right) \cdot y^2 = \frac{3}{4}y^3$

**19**  Realiza las siguientes operaciones:

- a)  $\frac{(2z)^3}{\frac{1}{2}z} + 3z^2$                       b)  $\frac{-\frac{3}{4}xy}{\frac{1}{4}xy} + \frac{1}{4}xy$   
 c)  $2z \cdot z^2$                               d)  $\frac{-2m^3}{3} \cdot \frac{(3m)^2}{m^2}$   
 e)  $3m \cdot m^3 - m^4$

$$a) \frac{(2z)^3}{\frac{1}{2}z} + 3z^2 = \frac{8z^3}{\frac{1}{2}z} + 3z^2 = 16z^2 + 3z^2 = 19z^2$$

$$b) \frac{-\frac{3}{4}xy}{\frac{1}{4}xy} + \frac{1}{4}xy = -3 + \frac{1}{4}xy$$

$$c) 2z \cdot z^2 = 2z^3$$

$$d) \frac{-2m^3}{3} \cdot \frac{(3m)^2}{m^2} = -6m^3$$

$$e) 3m \cdot m^3 - m^4 = 3m^4 - m^4 = 2m^4$$

**20**  Opera:

- a)  $\frac{7xy + 2xy}{2xy}$   
 b)  $2x \cdot (5x + x^2) - x^3 + 5x^2$   
 c)  $\left(\frac{7}{2}xy\right) \cdot (2xy)$   
 d)  $4x^3 + 5x^3$   
 e)  $-6m^2 + m^2$

$$a) \frac{7xy + 2xy}{2xy} = \frac{9xy}{2xy} = \frac{9}{2}$$

$$b) 2x \cdot (5x + x^2) - x^3 + 5x^2 = 10x^2 + 2x^3 - x^3 + 5x^2 = 15x^2 + x^3$$

$$c) \left(\frac{7}{2}xy\right) \cdot (2xy) = 7x^2y^2$$

$$d) 4x^3 + 5x^3 = 9x^3$$

$$e) -6m^2 + m^2 = -5m^2$$

**21**  ¿Son ciertas las siguientes igualdades?

- a)  $\left(-\frac{1}{2}xy\right) \cdot (2x^2y) = -x^3y$                       b)  $\frac{-\frac{1}{4}m^2}{\frac{1}{4}m^2} = 1$   
 c)  $\frac{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2}{xyz} = x^3y^3z^3$                       d)  $6x + 2x^2 - 6x \cdot 2x^2 = 0$

a) Falsa.

b) Falsa.

c) Falsa.

d) Falsa.

**22**  Copia en tu cuaderno y une las columnas:

$\frac{1}{2}xy^2$	<p>No es un monomio.</p> <p>Aunque tiene igual variable no se puede sumar con <math>3m</math>.</p> <p>La parte literal de este monomio no existe.</p> <p>El coeficiente de este monomio es un número fraccionario.</p>
$-5$	
$8ab + b$	
$4m^2$	

**23**  Contesta si es verdadero o falso:

- a) Un monomio con coeficiente negativo no se puede multiplicar por otro.
- b) El resultado de la multiplicación entre dos monomios es siempre otro monomio.
- c) Para sumar dos monomios, los coeficientes han de ser iguales.
- d) A la hora de dividir polinomios, primero se dividen los coeficientes y después la parte literal.
- e) Para multiplicar monomios, las partes literales han de ser semejantes.

- a) Falsa.                      b) Verdadera.                      c) Falsa.
- d) Falsa.                      e) Falsa.

**24**  Calcula mentalmente:

- a)  $7mx^2 + x^2m - 5x^2m$                       b)  $6y + 4y - 10y$
- c)  $4x^2 + x^2 + 5x^2$                       d)  $2 \cdot (4xm + 5xm)$
- a)  $3mx^2$                       b) 0
- c)  $10x^2$                       d)  $18xm$

## OPERACIONES CON POLINOMIOS

**25**  Haz la suma o resta de los siguientes polinomios:

- a)  $(2x + 3x^2 + 2) + (4x^2 + 2x + 1)$
- b)  $(5m^2 + 3m + m^3) + (2m^2 + 2m - m^3)$
- c)  $(3x^2 + 2x^4 + 3x) - (-x^2 + x^4 + 2x)$
- d)  $(2x^3 - 2) - (3x^3 - 2x + 2)$
- a)  $(2x + 3x^2 + 2) + (4x^2 + 2x + 1) = 7x^2 + 4x + 3$
- b)  $(5m^2 + 3m + m^3) + (2m^2 + 2m - m^3) = 7m^2 + 5m$
- c)  $(3x^2 + 2x^4 + 3x) - (-x^2 + x^4 + 2x) = x^4 + 4x^2 + x$
- d)  $(2x^3 - 2) - (3x^3 - 2x + 2) = -x^3 + 2x - 4$

**26**  Opera:

- a)  $10x \cdot (6x^2 + 3x)$                       b)  $6x^2 \cdot (x^2 + x^4 + 3x^4)$
- c)  $3x^2 \cdot (2x + 3x^2 - x)$                       d)  $5x \cdot (3x^2 - 1)$
- a)  $10x \cdot (6x^2 + 3x) = 60x^3 + 30x^2$
- b)  $6x^2 \cdot (x^2 + x^4 + 3x^4) = 6x^4 + 6x^6 + 18x^6$
- c)  $3x^2 \cdot (2x + 3x^2 - x) = 6x^3 + 9x^4 - 3x^3$
- d)  $5x \cdot (3x^2 - 1) = 15x^3 - 5x$

**27**  Realiza la multiplicación de los siguientes polinomios:

- a)  $(3x + 2x^2 + 7) \cdot (4x - 2x^2 + 3)$
- b)  $(2x^3 + x) \cdot (5x^2 - 2x + 3)$
- c)  $(-3x^2 + 2) \cdot (5x^2 + x^3 + 2)$
- d)  $(2x - 2) \cdot (3x + 3)$
- e)  $(3x^4 - 2x + 5) \cdot (x^2 - x)$

a)

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3x + 7 \\ -2x^2 + 4x + 3 \\ \hline 6x^2 + 9x + 21 \\ 8x^3 + 12x^2 + 28x \\ -4x^4 - 6x^3 - 14x^2 \\ \hline -4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 37x + 21 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 2x + 3 \\ 2x^3 + x \\ \hline 5x^3 - 2x^2 + 3x \\ 10x^5 - 4x^4 + 6x^3 \\ \hline 10x^5 - 4x^4 + 11x^3 - 2x^2 + 3x \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} x^3 + 5x^2 + 2 \\ -3x^2 + 2 \\ \hline 2x^3 + 10x^2 + 4 \\ -x^5 - 15x^4 \quad - 6x^2 \\ \hline -x^5 - 15x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{r} 2x - 2 \\ 3x + 3 \\ \hline 6x - 6 \\ 6x^2 - 6x \\ \hline 6x^2 \quad - 6 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 2x + 5 \\ x^2 - x \\ \hline -3x^5 \quad + 2x^2 - 5x \\ 3x^6 \quad - 2x^3 + 5x^2 \\ \hline 3x^6 - 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 5x \end{array}$$



**28** ■■ Realiza las siguientes operaciones:

a)  $\left[\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - 2x^3 - x\right] + (x^4 + 3x^3 + 2x)$

b)  $\left(\frac{x^3}{2} + x^2 + \frac{3}{5}\right) - \left(-x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}\right)$

c)  $2(x+y) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 3$

d)  $\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}x^2 + 2$

e)  $\frac{1}{4}y^5 - \frac{2}{4}y^5 + y^2 + 3y^4 + \frac{3}{4}y^5 - y^5$

a)  $\frac{5}{4}x^4 + x^3 + x$

b)  $\frac{3x^3}{2} + 3x^2 - \frac{3}{20}$

c)  $\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + 3$

d) 2

e)  $-\frac{2}{4}y^5 + y^2 + 3y^4$

**29** ■■ Opera:

a)  $\frac{3}{8}m(m+n^2) + mn^2$

b)  $\left(-4x^2 + \frac{1}{3}xy - 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - xy + 2\right)$

c)  $[4(x+y) - 3x - y] \cdot (2x+y)$

d)  $[3(a \cdot b)^2 + 2] \cdot (x - 2y)$

a)  $\frac{3}{8}m^2 + \frac{3}{8}mn^2 + mn^2 = \frac{3}{8}mn^2 + \frac{11}{8}mn^2$

b)  $-2x^4 + \frac{25}{6}x^3y - 9x^2 + \frac{4}{3}xy - 4 - \frac{1}{3}x^2y^2$

c)  $2x^2 + 7xy + 3y^2$

d)  $3a^2b^2x - 6a^2b^2y - 4y + 2x$

**30** ■■ Opera y reduce al máximo las siguientes expresiones:

a)  $5x \cdot (x+2) - x^2$

b)  $x^2 \cdot (x+1) + x^2$

c)  $xy + 3y \cdot (x+y)$

a)  $4x^2 + 10x$

b)  $x^3 + 2x^2$

c)  $4xy + 3y^2$

**31** ■■ Realiza las siguientes operaciones entre polinomios:

a)  $\left(y^3 - \frac{1}{3}y\right) \cdot \left(y^2 + \frac{1}{2}y\right)$

b)  $2 \cdot (6-a) + 4a - 6 + a - 4 - 6a - 4$

c)  $12x \cdot \left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 6x \cdot (-2x)^2 + 2x^2$

d)  $\frac{3}{4}x \cdot (-4x^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{3}{2}x \cdot (-x^2)$

a)  $y^5 + \frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{6}y^2$       b)  $-3a - 2$

c)  $-\frac{56}{3}x^3 + 2x^2$       d)  $\frac{3}{2}x^5 + \frac{3}{2}x^3$

**32** ■■ Realiza las siguientes operaciones y reduce al máximo la expresión algebraica resultante.

a)  $4 \cdot (x+b) + (-2) \cdot (x+b)$

b)  $10 \cdot (2-4x) - 6 \cdot (4x-2)$

c)  $3(x^2-1) - \frac{1}{2}(x+2) \cdot \frac{1}{2}(2x+1)$

d)  $(3x+2)^2 + 3x^3 - 10x - 2$

a)  $2x + 2b$

b)  $-64x + 32$

c)  $\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

d)  $3x^3 + 9x^2 + 2x + 2$

**33** ■■ Dados los polinomios  $A(x) = x^2 + 4x + 4$  y  $B(x) = 2x^2 + x - 2$ , comprueba que la multiplicación de polinomios cumple la propiedad conmutativa, es decir,  $A(x) \cdot B(x) = B(x) \cdot A(x)$ .

$A(x) \cdot B(x)$        $x^2 + 4x + 4$

$2x^2 + x - 2$

$-2x^2 - 8x - 8$

$x^3 + 4x^2 + 4x$

$2x^4 + 8x^3 + 8x^2$

$2x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 4x - 8$

$B(x) \cdot A(x)$        $2x^2 + x - 2$

$x^2 + 4x + 4$

$8x^2 + 4x - 8$

$8x^3 + 4x^2 - 8x$

$2x^4 + x^3 - 2x^2$

$2x^4 + 9x^3 + 10x^2 - 4x - 8$

**34** **III** Opera:

a)  $3x \cdot (4xy + 2x) - 2 \cdot \left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)$

b)  $(5x^2 + 3x + 2) \cdot (4x - 3) - x^3 + 5x^4$

c)  $(3x^2y + yx^2 - y) - \left(\frac{1}{2}y + 3x^2 + 4x^4\right)$

d)  $(4a^2 - b^2) \cdot (b^2 + a) - (a^3 + 2b^4) \cdot 3$

a)  $3x \cdot (4xy + 2x) - 2 \cdot \left(x^2y + \frac{1}{2}x\right) =$   
 $= 12x^2y + 6x^2 - 2x^2y - x = 10x^2y + 6x^2 - x$

b)  $(5x^2 + 3x + 2) \cdot (4x - 3) - x^3 + 5x^4 =$   
 $= 20x^3 - 15x^2 + 12x^2 - 9x + 8x - 6 - x^3 + 5x^4 =$   
 $= 5x^4 + 19x^3 - 3x^2 - x - 6$

c)  $(3x^2y + yx^2 - y) - \left(\frac{1}{2}y + 3x^2 + 4x^4\right) =$   
 $= 3x^2y + yx^2 - y - \frac{1}{2}y - 3x^2 - 4x^4 =$   
 $= 4yx^2 - \frac{3}{2}y - 3x^2 - 4x^4$

d)  $(4a^2 - b^2) \cdot (b^2 + a) - (a^3 + 2b^4) \cdot 3 =$   
 $= 4a^2b^2 + 4a^3 - b^4 - b^2a - 3a^3 - 6b^4 =$   
 $= 4a^2b^2 + a^3 - 7b^4 - b^2a$

## IDENTIDADES NOTABLES

**35** **I** ¿Qué son las identidades notables? Explícalo ayudándote con ejemplos.

Son multiplicaciones entre binomios que se pueden expresar de forma sencilla sin necesidad de operar por el procedimiento habitual.

**36** **III** Halla las siguientes identidades notables y comprueba que, operando de la forma habitual, se obtiene el mismo resultado.

a)  $(3x^2 + 2)^2$

b)  $(4m^2 - 2m) \cdot (5m^2 + 3m)$

c)  $(5 - y^2)^2$

d)  $(5x - 2)^2$

e)  $(x - 4) \cdot (x + 4)$

f)  $(2a - 2)^2$

a)  $(3x^2 + 2)^2 = 9x^4 + 12x^2 + 4$

b)  $(4m^2 - 2m) \cdot (5m^2 + 3m) \Rightarrow$  No es identidad notable.

c)  $(5 - y^2)^2 = 25 - 12y^2 + y^4$

d)  $(5x - 2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$

e)  $(x - 4) \cdot (x + 4) = x^2 - 16$

f)  $(2a - 2)^2 = 4a^2 - 8a + 4$

**37** **III** ¿Son ciertas las siguientes igualdades?

a)  $(5a^2b + 2)^2 = (5a^2b)^2 + 20a^2b + 4$

b)  $\frac{(2 + x)^2}{2} = 2 + 2x + x$

c)  $(xy - 3x) \cdot (xy + 3x) = x^2y^2 - 9x^2$

d)  $(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1) = x^4 - 1$

a) Sí. b) No.

c) Sí. d) Sí.

**38** **III** Simplifica las expresiones:

a)  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

b)  $\frac{(a + b) \cdot (-b + a)}{a^2 - b^2}$

c)  $\frac{9x^2 - 100}{3x - 10}$

d)  $\frac{25 - 2x + x^2}{(5 - x)^2}$

a)  $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2}{x + 1} = x + 1$

b)  $\frac{(a + b) \cdot (-b + a)}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = 1$

c)  $\frac{9x^2 - 100}{3x - 10} = \frac{(3x - 10) \cdot (3x + 10)}{3x - 10} = 3x + 10$

d)  $\frac{25 - 10x + x^2}{(5 - x)^2} = \frac{-(-x + 5)^2}{(5 - x)^2} = -1$

**39** **III** Basándote en las identidades notables factoriza las siguientes expresiones:

a)  $a^2 + 2ax + x^2$

b)  $4a^2 + 4a + 1$

c)  $81 - 4x^2$

d)  $9 - 6y + y^2$

a)  $(a + x)^2$

b)  $(2a + 1)^2$

c)  $(9 - 2x) \cdot (9 + 2x)$

d)  $(y - 3)^2$

**40** **III** Opera teniendo en cuenta las identidades notables:

a)  $\frac{49a^2 - 25}{8a - a + 5} + 5a$

b)  $\frac{(64 - 16xy + x^2y^2) \cdot (8 - xy)}{(8 - xy)^3}$

a)  $\frac{49a^2 - 25}{8a - a + 5} + 5a = \frac{(7a + 5) \cdot (7a - 5)}{7a + 5} + 5a =$   
 $= 7a - 5 + 5a = 12a - 5$

b)  $\frac{(64 - 16xy + x^2y^2) \cdot (8 - xy)}{(8 - xy)^3} = \frac{(8 - xy)^2 \cdot (8 - xy)}{(8 - xy)^3} = 1$

## EJERCICIOS

**1** Indica si las siguientes igualdades entre expresiones algebraicas son identidades o ecuaciones:

- a)  $x + 2 = 7$                       b)  $0x = 0$   
 c)  $6x = 48$                         d)  $5x = 12x - 7x$   
 e)  $2x + 6 = 2(x + 3)$             f)  $x^2 = 25$   
 g)  $x + 6 = 2x$                       h)  $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

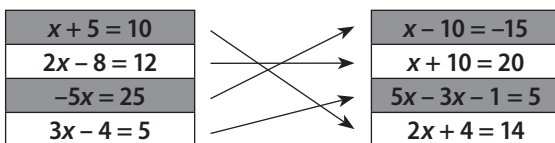
Identidades: b, d, e, h.      Ecuaciones: a, c, f, g.

**2** Pon un ejemplo en cada uno de los siguientes casos:

- a) Una ecuación de primer grado con una incógnita.  
 b) Una ecuación de segundo grado con una incógnita.  
 c) Una identidad.  
 d) Una ecuación incompatible.

- a)  $3x = 2$                               b)  $x^2 - 9 = 0$   
 c)  $(x - 1) \cdot (x + 1) = x^2 - 1$       d)  $x + 2 = x + 3$

**3** Copia en tu cuaderno y une entre sí las ecuaciones que son equivalentes:



**4** Indica qué cálculos haces para obtener la ecuación equivalente de la ecuación inicial:

a) Ecuación inicial:  $2x + 10 = 26$ .

Ecuación equivalente:  $x + 5 = 13$ .

b) Ecuación inicial:  $5x - 10 = 15$ .

Ecuación equivalente:  $5x - 3 = 22$ .

a) Dividir entre 2 los dos miembros.

b) Sumar 7 a los dos miembros.

**5** Resuelve las ecuaciones:

- a)  $2x + 7 = 5x - 5$                       b)  $6x + 5 = -5 + 4x$   
 c)  $5(2x + 4) + 10 = 5x$               d)  $2(x - 3) = 5(x - 2) + 4$   
 e)  $4(2 - x) + 10 = 2(1 - x)$         f)  $x - 2(x - 4) = 3(4x - 10)$

- a)  $2x + 7 = 5x - 5$   
 $2x - 5x = -5 - 7$   
 $-3x = -12$   
 $x = 4$
- b)  $6x + 5 = -5 + 4x$   
 $6x - 4x = -5 - 5$   
 $2x = -10$   
 $x = -5$
- c)  $5(2x + 4) + 10 = 5x$   
 $10x + 20 + 10 = 5x$   
 $10x - 5x = -20 - 10$   
 $5x = -30$   
 $x = -6$
- d)  $2(x - 3) = 5(x - 2) + 4$   
 $2x - 6 = 5x - 10 + 4$   
 $2x - 5x = -10 + 4 + 6$   
 $-3x = 0$   
 $x = 0$

- e)  $4(2 - x) + 10 = 2(1 - x)$   
 $8 - 4x + 10 = 2 - 2x$   
 $-4x + 2x = 2 - 8 - 10$   
 $-2x = -16$   
 $x = 8$
- f)  $x - 2(x - 4) = 3(4x - 10)$   
 $x - 2x + 8 = 12x - 30$   
 $x - 2x - 12x = -30 - 8$   
 $-13x = -38$   
 $x = \frac{38}{13}$

**6** Resuelve estas ecuaciones:

a)  $\frac{x}{6} = x + 5$                               b)  $\frac{5x + 3}{9} = \frac{3x - 5}{2}$

c)  $\frac{2(x + 5)}{5} - 3(x + 4) = \frac{-x}{10}$

a)  $\frac{x}{6} = x + 5 \Leftrightarrow x = 6x + 30 \Leftrightarrow x - 6x = 30 \Leftrightarrow -5x = 30 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = -6$

b)  $\frac{5x + 3}{9} = \frac{3x - 5}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot (5x + 3) = 9 \cdot (3x - 5) \Leftrightarrow \Leftrightarrow 10x + 6 = 27x - 45 \Leftrightarrow 10x - 27x = -45 - 6 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -17x = -51 \Leftrightarrow x = \frac{-51}{-17} \Leftrightarrow x = 3$

c)  $\frac{2(x + 5)}{5} - 3(x + 4) = \frac{-x}{10} \Leftrightarrow \frac{2x + 10}{5} - 3x - 12 = \frac{-x}{10} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2x + 10)}{10} - \frac{30x}{10} - \frac{120}{10} = \frac{-x}{10} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4x + 20 - 30x - 120 = -x \Leftrightarrow 4x - 30x + x = -20 + 120 \Leftrightarrow \Leftrightarrow -25x = 100 \Leftrightarrow x = -\frac{100}{25} \Leftrightarrow x = -4$

**7** Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado con una incógnita:

- a)  $x + 2y = 5$                               b)  $x^2 - 7x = 16$   
 c)  $x^2 + y = 12$                             d)  $x^2 - 16 = 0$   
 e)  $x^2 = 3x$                                 f)  $2x + 5 = 3x - 2$

b), d), e).

**8** Resuelve las ecuaciones de segundo grado con una incógnita:

- a)  $x^2 = 25$                                 b)  $x^2 - 16 = 0$   
 c)  $2x^2 - 128 = 0$                         d)  $x^2 - 5x = 0$   
 e)  $2x^2 + 4x = 0$                         f)  $3x^2 - 6x = 0$

- a)  $x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \sqrt{25} \Leftrightarrow x = \pm 5$   
 b)  $x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt{16} \Leftrightarrow x = \pm 4$   
 c)  $2x^2 - 128 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 128 \Leftrightarrow x^2 = 64 \Leftrightarrow x = \sqrt{64} \Leftrightarrow x = \pm 8$   
 d)  $x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 5$   
 e)  $2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -2$   
 f)  $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$

**9** En la clase de 2.º A el número de chicos es el doble que el de chicas. Si la clase tiene 30 alumnos en total, ¿cuántos chicos y chicas hay en la clase?

Sea  $x$  el número de chicas:

$$x + 2x = 30 \Leftrightarrow 3x = 30 \Leftrightarrow x = 10$$

Hay 10 chicas y 20 chicos.

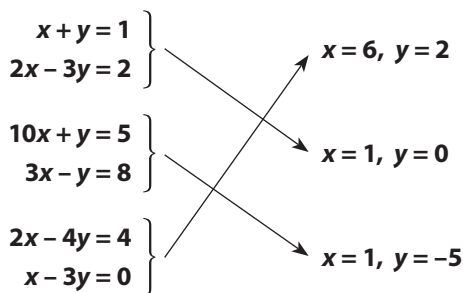
**10** Un jardín tiene forma rectangular y es el doble de largo que de ancho. Si la superficie total del jardín es de 98 m<sup>2</sup>, ¿cuáles son las dimensiones del jardín?

Sea  $x$  los metros del ancho:

$$x \cdot 2x = 98 \Leftrightarrow 2x^2 = 98 \Leftrightarrow x = 7$$

Mide 7 m de ancho y 14 m de largo.

**11** Copia en tu cuaderno y asocia cada sistema de ecuaciones con su solución:



**12** Construye un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que tenga por solución  $x = 1$ ,  $y = 5$ .

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$$

**13** Benjamín ha comprado tres camisas y dos corbatas y ha pagado en total por la compra 140 €. Si el precio de una camisa y una corbata es 55 €, plantea el sistema de ecuaciones que permite calcular el precio de una camisa y el precio de una corbata.

Sea  $x$  el precio de una camisa y  $y$  el precio de una corbata,

entonces: 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 140 \\ x + y = 55 \end{cases}$$

**14** Resuelve por el método de sustitución estos sistemas de ecuaciones:

a) 
$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$$
      b) 
$$\begin{cases} 4x + y = -10 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$$
      d) 
$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$$

a) 
$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$$

Se despeja  $x$  en la segunda ecuación:  $x = 3y - 1$ .

Se sustituye el valor de  $x$  en la primera ecuación:

$$2(3y - 1) - 5y = -1$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$2(3y - 1) - 5y = -1 \Leftrightarrow 6y - 2 - 5y = -1 \Leftrightarrow y = 1$$

Una vez calculado el valor de  $y$ , se obtiene el valor de  $x$  sustituyendo en la expresión:  $x = 3y - 1$ .

$$x = 3 \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow x = 2$$

b) 
$$\begin{cases} 4x + y = -10 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

Se despeja  $x$  en la segunda ecuación:  $x = \frac{-12 + 3y}{2}$

Se sustituye el valor de  $x$  en la primera ecuación:

$$4 \cdot \frac{-12 + 3y}{2} + y = -10$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$4 \cdot \frac{-12 + 3y}{2} + y = -10 \Leftrightarrow 2(-12 + 3y) + y = -10 \Leftrightarrow -24 + 6y + y = -10 \Leftrightarrow -24 + 7y = -10 \Leftrightarrow y = 2$$

Una vez calculado el valor de  $y$ , se obtiene el valor de  $x$  sustituyendo en la expresión:  $x = \frac{-12 + 3y}{2}$ .

$$x = \frac{-12 + 3 \cdot 2y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-12 + 6}{2} \Leftrightarrow x = -3$$

c) 
$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{cases}$$

Se despeja  $x$  en la primera ecuación:  $x = -3y - 2$ .

Se sustituye el valor de  $x$  en la segunda ecuación:

$$4(-3y - 2) - 3y = 7$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$4(-3y - 2) - 3y = 7 \Leftrightarrow -12y - 8 - 3y = 7 \Leftrightarrow y = -1$$

Una vez calculado el valor de  $y$ , se obtiene el valor de  $x$  sustituyendo en la expresión:  $x = -3y - 2$ .

$$x = -3 \cdot (-1) - 2 \Leftrightarrow x = 1$$

d) 
$$\begin{cases} 5x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = -8 \end{cases}$$

Se despeja  $x$  en la primera ecuación:  $x = \frac{8 - 2y}{5}$

Se sustituye el valor de  $x$  en la segunda ecuación:

$$3 \cdot \frac{8 - 2y}{5} - 2y = -8$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$3 \cdot \frac{8-2y}{5} - 2y = -8 \Leftrightarrow \frac{24-6y}{5} - 2y = -8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 24 - 6y - 10y = -40 \Leftrightarrow -16y = -64 \Leftrightarrow y = 4$$

Una vez calculado el valor de  $y$ , se obtiene el valor de  $x$  sustituyendo en la expresión:  $x = \frac{8-2y}{5}$

$$x = \frac{8-2 \cdot 4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{8-8}{5} \Leftrightarrow x = 0$$

**15** Resuelve por el método de igualación los sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = -11 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} 4x - 2y = -18 \\ -x + 6y = 32 \end{array} \right\}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x + 3y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{array} \right\} \quad \text{d) } \left. \begin{array}{l} 5x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = -8 \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 4x + 2y = 2 \\ 2x - 3y = -11 \end{array} \right\}$$

Se despeja la incógnita  $x$  en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{2-2y}{4} \quad x = \frac{-11+3y}{2}$$

Se igualan las dos expresiones de  $x$ :

$$\frac{2-2y}{4} = \frac{-11+3y}{2}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\frac{2 \cdot (2-2y)}{4 \cdot 2} = \frac{4 \cdot (-11+3y)}{2 \cdot 4} \Leftrightarrow 4 - 4y = -44 + 12y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4y - 12y = -44 - 4 \Leftrightarrow -16y = -48 \Leftrightarrow y = 3$$

El valor correspondiente a  $x$  se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

$$\text{en: } x = \frac{2-2y}{4} \\ x = \frac{2-2 \cdot 3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2-6}{4} \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 4x - 2y = -18 \\ -x + 6y = 32 \end{array} \right\}$$

Se despeja la incógnita  $x$  en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{-18+2y}{4} \quad x = \frac{32-6y}{-1}$$

Se igualan las dos expresiones de  $x$ :

$$\frac{-18+2y}{4} = \frac{32-6y}{-1}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\frac{-1 \cdot (-18+2y)}{4 \cdot (-1)} = \frac{4 \cdot (32-6y)}{-1 \cdot 4} \Leftrightarrow 18 - 2y = 128 - 24y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2y + 24y = 128 - 18 \Leftrightarrow 22y = 110 \Leftrightarrow y = 5$$

El valor correspondiente a  $x$  se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

$$\text{en: } x = \frac{-18+2y}{4} \\ x = \frac{-18+2 \cdot 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-18+10}{4} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x + 3y = -2 \\ 4x - 3y = 7 \end{array} \right\}$$

Se despeja la incógnita  $x$  en las dos ecuaciones:

$$x = -2 - 3y \quad x = \frac{7+3y}{4}$$

Se igualan las dos expresiones de  $x$ :

$$-2 - 3y = \frac{7+3y}{4}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$-2 - 3y = \frac{7+3y}{4} \Leftrightarrow -8 - 12y = 7 + 3y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -12y - 3y = 7 + 8 \Leftrightarrow -15y = 15 \Leftrightarrow y = -1$$

El valor correspondiente a  $x$  se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

$$\text{en: } x = -2 - 3y \\ x = -2 - 3 \cdot (-1) \Leftrightarrow x = -2 + 3 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 5x + 2y = 8 \\ 3x - 2y = -8 \end{array} \right\}$$

Se despeja la incógnita  $x$  en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{8-2y}{5} \quad x = \frac{-8+2y}{3}$$

Se igualan las dos expresiones de  $x$ :

$$\frac{8-2y}{5} = \frac{-8+2y}{3}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\frac{8-2y}{5} = \frac{-8+2y}{3} \Leftrightarrow \frac{3 \cdot (8-2y)}{5 \cdot 3} = \frac{5 \cdot (-8+2y)}{3 \cdot 5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 24 - 6y = -40 + 10y \Leftrightarrow -6y - 10y = -40 - 24 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -16y = -64 \Leftrightarrow y = 4$$

El valor correspondiente a  $x$  se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

$$\text{en: } x = \frac{8-2y}{5} \\ x = \frac{8-2 \cdot 4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{8-8}{5} \Leftrightarrow x = 0$$

**16 Resuelve por el método de reducción los sistemas de ecuaciones:**

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = -1 \\ -x - 4y = 7 \end{array} \right\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } \left. \begin{array}{l} -x + 2y = 8 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{c) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 6 \\ x - 4y = -12 \end{array} \right\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} 5x + 3y = -1 \\ -x - 4y = 7 \end{array} \right\}$$

Si se quiere eliminar la incógnita  $x$ , los coeficientes de  $x$  en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la segunda ecuación por 5.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = -1 \\ -5x - 20y = 35 \end{array} \right\}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 5x + 3y = -1 \\ -5x - 20y = 35 \\ \hline -17y = 34 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: 
$$\left. \begin{array}{l} 5x + 3y = -1 \\ -17y = 34 \end{array} \right\}$$

Se despeja  $y$  en la segunda ecuación:  $y = -2$

Para calcular  $x$  se sustituye el valor obtenido de  $y$  en la primera ecuación:

$$5x + 3y = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1 - 3y}{5} \Leftrightarrow x = \frac{-1 - 3 \cdot (-2)}{5} \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} -x + 2y = 8 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\}$$

Si se quiere eliminar la incógnita  $x$ , los coeficientes de  $x$  en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2.

$$\left. \begin{array}{l} -2x + 4y = 16 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{l} -2x + 4y = 16 \\ 2x - y = 2 \\ \hline 3y = 18 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: 
$$\left. \begin{array}{l} -2x + 4y = 16 \\ 3y = 18 \end{array} \right\}$$

Se despeja  $y$  en la segunda ecuación:  $y = 6$

Para calcular  $x$  se sustituye el valor obtenido de  $y$  en la primera ecuación:

$$-2x + 4y = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16 - 4y}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{16 - 4 \cdot 6}{-2} \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 6 \\ x - 4y = -12 \end{array} \right\}$$

Si se quiere eliminar la incógnita  $y$ , los coeficientes de  $y$  en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 4y = 12 \\ x - 4y = -12 \end{array} \right\}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 6x + 4y = 12 \\ x - 4y = -12 \\ \hline 7x = 0 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: 
$$\left. \begin{array}{l} 6x + 4y = 12 \\ 7x = 0 \end{array} \right\}$$

Se despeja  $x$  en la segunda ecuación:  $x = 0$

Para calcular  $y$  se sustituye el valor obtenido de  $x$  en la primera ecuación:

$$6x + 4y = 12 \Leftrightarrow y = \frac{12 - 6x}{4} \Leftrightarrow y = \frac{12 - 6 \cdot 0}{4} \Leftrightarrow y = 3$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 2y = -1 \end{array} \right\}$$

Si se quiere eliminar la incógnita  $y$ , los coeficientes de  $y$  en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 3:

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 6y = 16 \\ 9x + 6y = -3 \end{array} \right\}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 4x - 6y = 16 \\ 9x + 6y = -3 \\ \hline 13x = 13 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: 
$$\left. \begin{array}{l} 4x - 6y = 16 \\ 13x = 13 \end{array} \right\}$$

Se despeja  $x$  en la segunda ecuación:  $x = 1$

Para calcular  $y$  se sustituye el valor obtenido de  $x$  en la primera ecuación:

$$4x - 6y = 16 \Leftrightarrow y = \frac{16 - 4x}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{16 - 4 \cdot 1}{-6} \Leftrightarrow y = -2$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### ECUACIÓN E IDENTIDAD

**1**   Indica si las siguientes igualdades entre expresiones algebraicas son identidades o ecuaciones:

- a)  $2x + 5 = 11$                       b)  $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$   
 c)  $7x = -4x + 11x$                 d)  $4x + 12 = 2(2x + 6)$   
 e)  $x^2 = 49$                               f)  $7x + 2 = 4x + 14$

Ecuaciones: a), e), f).

Identidades: b), c), d).

**2**   Resuelve mentalmente las ecuaciones:

- a)  $x + 7 = 12$                               b)  $24x = 120$   
 c)  $4y - 4 = 12$                             d)  $x + 6 = 2x$   
 a) 5                      b) 5                      c) 4                      d) 6

**3**   Resuelve mentalmente las ecuaciones:

- a)  $x + 9 = 15$                               b)  $2x = 24$   
 c)  $5y - 4 = 16$                             d)  $2x - 14 = 4$   
 a) 6                      b) 12                      c) 4                      d) 9

**4**   Identifica qué tipo de ecuación son las siguientes:

- a)  $2x + 7 = x - 5$                       b)  $x^2 + 7x = 6$   
 c)  $x + y = 12$                               d)  $y - 11 = 2(y - 3)$   
 e)  $y^2 = 36$

- a) Primer grado con una incógnita.  
 b) Segundo grado con una incógnita.  
 c) Primer grado con dos incógnitas.  
 d) Primer grado con una incógnita.  
 e) Segundo grado con una incógnita.

### ECUACIONES EQUIVALENTES

**5**   Escribe tres ecuaciones de primer grado con una incógnita que tengan como solución  $x = 5$ .

- a)  $x - 5 = 0$                       b)  $2 \cdot x - 3 = x + 2$                       c)  $2 \cdot x = 10$

**6**   Escribe tres ecuaciones de primer grado con una incógnita que tengan como solución  $x = 0$ .

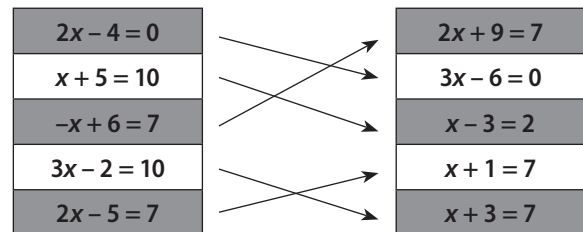
- a)  $2x - 3 = x - 3$                       b)  $10 \cdot x = 0$                       c)  $x + 7 = 7$

**7**   Escribe tres ecuaciones de primer grado con una incógnita que no tengan solución.

- a)  $2 + x = 3 + x$                               b)  $2 \cdot (x - 3) = 2x + 4$

c)  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(x + 1)$

**8**   Copia en tu cuaderno y relaciona las ecuaciones equivalentes:



**9**   Indica qué cálculo tienes que realizar para obtener la ecuación equivalente a la ecuación inicial:

a) Ecuación inicial:  $4x - 10 = 26 + x$

Ecuación equivalente:  $3x = 36$

b) Ecuación inicial:  $7x + 14 = 63$

Ecuación equivalente:  $7x - 3 = 46$

c) Ecuación inicial:  $2x = 10$

Ecuación equivalente:  $4x - 5 = 15$

- a) Sumar 10 y restar  $x$  a los dos miembros.  
 b) Restar 17 a los dos miembros.  
 c) Multiplicar por 2 y restar 5 a los dos miembros.

### ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

**10**   Resuelve las ecuaciones:

- a)  $6x + 2 = 7x - 1$                       b)  $5x - 3 = 3x + 7$   
 c)  $-2x + 5 = 4x + 11$                       d)  $2x + 4 = 6x - 3$

- a)  $6x + 2 = 7x - 1 \Leftrightarrow 6x - 7x = -1 - 2 \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3$   
 b)  $5x - 3 = 3x + 7 \Leftrightarrow 5x - 3x = 7 + 3 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$   
 c)  $-2x + 5 = 4x + 11 \Leftrightarrow -4x - 2x = 11 - 5 \Leftrightarrow -6x = 6 \Leftrightarrow x = -1$   
 d)  $2x + 4 = 6x - 3 \Leftrightarrow 2x - 6x = -3 - 4 \Leftrightarrow -4x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$

**11**   Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a)  $2(x + 5) = 3x - 2$   
 b)  $-3(2x - 4) = -2(4x - 3)$   
 c)  $2(x - 6) + 7 = 4x - 17$   
 d)  $5(x + 4) - (x + 3) = 2x - 3$   
 a)  $2(x + 5) = 3x - 2 \Leftrightarrow 2x + 10 = 3x - 2 \Leftrightarrow 2x - 3x = -2 - 10 \Leftrightarrow -x = -12 \Leftrightarrow x = 12$   
 b)  $-3(2x - 4) = -2(4x - 3) \Leftrightarrow -6x + 12 = -8x + 6 \Leftrightarrow -6x + 8x = 6 - 12 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3$   
 c)  $2(x - 6) + 7 = 4x - 17 \Leftrightarrow 2x - 12 + 7 = 4x - 17 \Leftrightarrow 2x - 4x = -17 - 7 + 12 \Leftrightarrow -2x = -12 \Leftrightarrow x = 6$   
 d)  $5(x + 4) - (x + 3) = 2x - 3 \Leftrightarrow 5x + 20 - x - 3 = 2x - 3 \Leftrightarrow 5x - x - 2x = -3 - 20 + 3 \Leftrightarrow 2x = -20 \Leftrightarrow x = -10$

**12**  Resuelve las ecuaciones:

a)  $4(x - 6) + 4 = 2x - 4$

b)  $2 - 6x = 5x - 10x$

c)  $7x - 1 = -5x + 5$

d)  $x - 5 + 9(2 - x) = 3(-4 - x)$

e)  $2(x - 4) - 3(x + 5) = 5(x - 1)$

f)  $11(x - 1) - 5(x + 1) = 2(x + 14)$

g)  $7(3x + 5) - 10x + 9 = 0$

a)  $4(x - 6) + 4 = 2x - 4 \Leftrightarrow 4x - 24 + 4 = 2x - 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x - 2x = -4 + 24 - 4 \Leftrightarrow 2x = 16 \Leftrightarrow x = 8$

b)  $2 - 6x = 5x - 10x \Leftrightarrow -6x + 5x = -2 \Leftrightarrow x = 2$

c)  $7x - 1 = -5x + 5 \Leftrightarrow 7x + 5x = 5 + 1 \Leftrightarrow 12x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

d)  $x - 5 + 9(2 - x) = 3(-4 - x) \Leftrightarrow -5 + 18 - 9x = -12 - 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -9x + 3x = -12 + 5 - 18 \Leftrightarrow -6x = -25 \Leftrightarrow x = \frac{25}{6}$

e)  $2(x - 4) - 3(x + 5) = 5(x - 1) \Leftrightarrow 2x - 8 - 3x - 15 = 5x - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 3x - 5x = -5 + 8 + 15 \Leftrightarrow -6x = 18 \Leftrightarrow x = -3$

f)  $11(x - 1) - 5(x + 1) = 2(x + 14) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11x - 11 - 5x - 5 = 2x + 28 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11x - 5x - 2x = 28 + 11 + 5 \Leftrightarrow 4x = 44 \Leftrightarrow x = 11$

g)  $7(3x + 5) - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow 21x + 35 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 21x - 10x = -35 - 9 \Leftrightarrow 11x = -44 \Leftrightarrow x = -4$

**13**  Resuelve la ecuación:  $2x + 3 = 2(x + 3)$

¿Cuántas soluciones tiene?

$2x + 3 = 2(x + 3) \Leftrightarrow 2x + 3 = 2x + 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - 2x = 6 - 3 \Leftrightarrow 0x = 3$

No tiene solución.

**14**  Resuelve las ecuaciones:

a)  $\frac{x}{2} + 5 = 2(x - 2)$

b)  $6x + 3 = \frac{7x + 4}{4} + 2$

c)  $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = x - 5$

d)  $2x + 1 = -3\left(\frac{x}{9} + 2\right)$

e)  $\frac{x}{2} + 5 = 2(x - 3) + 2$

f)  $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} - 6 = 3(x - 8)$

a)  $\frac{x}{2} + 5 = 2(x - 2) \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 5 = 2x - 4 \Leftrightarrow x + 10 = 4x - 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4x = -8 - 10 \Leftrightarrow -3x = -18 \Leftrightarrow x = 6$

b)  $6x + 3 = \frac{7x + 4}{4} + 2 \Leftrightarrow 24x + 12 = 7x + 4 + 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 24x - 7x = 12 - 12 \Leftrightarrow 17x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c)  $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x}{4} = x - 5 \Leftrightarrow \frac{4x}{12} + \frac{6x}{12} - \frac{3x}{12} = \frac{12x - 60}{12} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x + 6x - 3x = 12x - 60 \Leftrightarrow -5x = -60 \Leftrightarrow x = 12$

d)  $2x + 1 = -3\left(\frac{x}{9} + 2\right) \Leftrightarrow 18x + 9 = -3x - 54 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18x + 3x = -54 - 9 \Leftrightarrow 21x = -63 \Leftrightarrow x = \frac{-63}{21} = -3$

e)  $\frac{x}{2} + 5 = 2(x - 3) + 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 5 = 2x - 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 10 = 4x - 12 \Leftrightarrow x - 4x = -12 - 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x = -22 \Leftrightarrow x = \frac{22}{3}$

f)  $\frac{x}{4} + \frac{x}{2} - 6 = 3(x - 8) \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{x}{2} - 6 = 3x - 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 2x - 24 = 12x - 96 \Leftrightarrow -13x = -72 \Leftrightarrow x = \frac{72}{13}$

**15**  Resuelve las ecuaciones:

a)  $\frac{x}{7} = 2x$

b)  $\frac{x + 4}{5} = \frac{15x - 4}{11}$

c)  $2x + 4 = \frac{6x + 12}{4} + \frac{1}{2}$

d)  $\frac{3x + 5}{2} + 4 = \frac{2x - 1}{3} - 6$

e)  $\frac{2x - 1}{3} - \frac{13}{6} = \frac{2(x - 2)}{4}$

a)  $\frac{x}{7} = 2x \Leftrightarrow x = 14x \Leftrightarrow x - 14x = 0 \Leftrightarrow -13x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b)  $\frac{x + 4}{5} = \frac{15x - 4}{11} \Leftrightarrow \frac{11 \cdot (x + 4)}{5 \cdot 11} = \frac{5 \cdot (15x - 4)}{11 \cdot 5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 11x + 44 = 75x - 20 \Leftrightarrow 11x - 75x = -20 - 44 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -64x = -64 \Leftrightarrow x = 1$

c)  $2x + 4 = \frac{6x + 12}{4} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4 \cdot (2x + 4) = 6x + 12 + 1 \cdot 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x + 16 = 6x + 12 + 2 \Leftrightarrow 8x - 6x = 14 - 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$

d)  $\frac{3x + 5}{2} + 4 = \frac{2x - 1}{3} - 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot (3x + 5) + 6 \cdot 4 = 2 \cdot (2x - 1) - 6 \cdot 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9x + 15 + 24 = 4x - 2 - 36 \Leftrightarrow 9x - 4x = -38 - 15 - 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x = -77 \Leftrightarrow x = -\frac{77}{5}$

e)  $\frac{2x - 1}{3} - \frac{13}{6} = \frac{2(x - 2)}{4} \Leftrightarrow 4(2x - 1) - 2 \cdot 13 = 6 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x - 4 - 26 = 6x - 12 \Leftrightarrow 8x - 6x = -12 + 30 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 18 \Leftrightarrow x = 9$



**16** **Halla la solución de estas ecuaciones:**

a)  $\frac{5(x+2)}{2} + 5 = 2(3x+1) - 8$

b)  $\frac{x}{3} + \frac{x+1}{2} = 2(-x+4) + 4x$

c)  $\frac{x}{5} - \frac{3(x-1)}{2} = 2 + \frac{x}{3}$

d)  $\frac{5(x-1)}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 10$

e)  $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - 1 = \frac{17}{30}$

a)  $\frac{5(x+2)}{2} + 5 = 2(3x+1) - 8 \Leftrightarrow \frac{5x+10}{2} + 5 = 6x+2-8 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 5x+10+10 = 12x+4-16 \Leftrightarrow 5x-12x = -12-20 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -7x = -32 \Leftrightarrow x = \frac{32}{7}$

b)  $\frac{x}{3} + \frac{x+1}{2} = 2(-x+4) + 4x \Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{x+1}{2} = -2x+8+4x \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2x+3x+3 = -12x+48+24x \Leftrightarrow 5x-12x = 48-3 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -7x = 45 \Leftrightarrow x = -\frac{45}{7}$

c)  $\frac{x}{5} - \frac{3(x-1)}{2} = 2 + \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{5} - \frac{3x-3}{2} = 2 + \frac{x}{3} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 6x-45x+45 = 60+10x \Leftrightarrow -39x-10x = 60-45 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow -49x = 15 \Leftrightarrow x = -\frac{15}{49}$

d)  $\frac{5(x-1)}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 10 \Leftrightarrow \frac{5x-5}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 10 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 6 \cdot (5x-5) + 3x+4x = 120 \Leftrightarrow 30x-30+7x = 120 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 30x+7x = 120+30 \Leftrightarrow 37x = 150 \Leftrightarrow x = \frac{150}{37}$

e)  $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - 1 = \frac{17}{30} \Leftrightarrow 20x+15x+12x-60 = 34 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 47x = 94 \Leftrightarrow x = 2$

## ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

**17** **Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones de segundo grado:**

a)  $(x+1)(x-1) = 0$                       b)  $x^2 - 100 = 0$

c)  $x(x-5) = 0$                          d)  $(x+1)^2 = 9$

a)  $(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

b)  $x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 10$

c)  $x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 5$

d)  $(x+1)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 2; x = -4$

**18** **Resuelve las ecuaciones:**

a)  $x^2 = 16$

b)  $x^2 - 64 = 0$

c)  $3x^2 - 243 = 0$

d)  $4x^2 - 30 = 34$

e)  $x^2 - 40 = 81$

f)  $x^2 + 4x = 0$

g)  $4x^2 + 16x = 0$

h)  $2x^2 - 6x = 4x$

i)  $3x^2 - 1 = 2$

j)  $3x^2 - 6x = 3x$

k)  $x^2 - 10 = 39$

l)  $-x^2 - 7x = 0$

a)  $x = \pm 4$

b)  $x = \pm 8$

c)  $x = \pm 9$

d)  $x = \pm 4$

e)  $x = \pm 11$

f)  $x = 0; x = -4$

g)  $x = 0; x = -4$

h)  $x = 0; x = 5$

i)  $x = \pm 1$

j)  $x = 0; x = 3$

k)  $x = \pm 7$

l)  $x = 0; x = -7$

**19** **Escribe una ecuación de segundo grado que:**

a) **Tenga dos soluciones.**

b) **No tenga solución.**

a)  $x^2 - 9 = 0$

b)  $x^2 + 9 = 0$

**20** **Calcula el valor de  $b$  en la ecuación  $x^2 + bx = 0$ , sabiendo que sus soluciones son  $x = 0$  y  $x = -4$ .**

**Si sólo tiene la solución  $x = 0$ , ¿cuánto vale  $b$ ?**

Sustituimos los valores de  $x$  en la ecuación:

$$0 + 0b = 0$$

$$(-4)^2 + b(-4) = 0 \Leftrightarrow 16 = 4b \Leftrightarrow b = 4$$

Si  $x = 0$ ,  $b = 0$ .

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**21** **Determina dos números naturales consecutivos cuya suma sea 161.**

Resolvemos la ecuación  $x + x + 1 = 161$ .

Los números son el 80 y el 81.

**22** **Calcula el lado de un triángulo equilátero de 90 cm de perímetro.**

Resolvemos la ecuación  $3 \cdot x = 90$ . El lado es 30 cm.

**23** **Calcula la medida de los ángulos de un triángulo sabiendo que  $\hat{A} = x$ ,  $\hat{B} = x + 50^\circ$  y  $\hat{C} = x + 40^\circ$ .**

Resolvemos la ecuación  $x + x + 50 + x + 40 = 180$ .

Entonces,  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $\hat{B} = 80^\circ$  y  $\hat{C} = 70^\circ$ .

**24** **Una piscina tiene 20 m de largo y 10 m de ancho. Si el volumen de la piscina es  $440 \text{ m}^3$ , calcula la profundidad.**

Resolvemos la ecuación  $20 \cdot 10 \cdot x = 440$ . Su profundidad es 2,2 m.

**25** Un campo está vallado con postes separados entre sí 5 m. Si la puerta de entrada mide 10 m y el perímetro del campo es 465 m, ¿cuántos postes tiene la valla?

Resolvemos la ecuación  $5 \cdot x + 10 = 465$ . La valla tiene 91 postes.

**26** Determina tres números pares consecutivos cuya suma sea 18.

Resolvemos la ecuación  $x + (x + 2) + (x + 4) = 18$ . Los números son 4, 6 y 8.

**27** Ana María tiene 120 € en su hucha. Si decide echar en la hucha 15 € cada semana, ¿cuántas semanas tardará en tener 270 € ahorrados?

Resolvemos la ecuación  $120 + 15x = 270$ . Tarda 10 semanas.

**28** En un poliedro se cumple la fórmula de Euler:  
**CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 2**

a) Si el poliedro tiene 8 caras y el número de aristas es el doble que el número de vértices, ¿cuántas aristas y vértices tiene?

b) Si es un poliedro regular, el número de vértices es 12 y el número de aristas es 30, ¿de qué poliedro se trata?

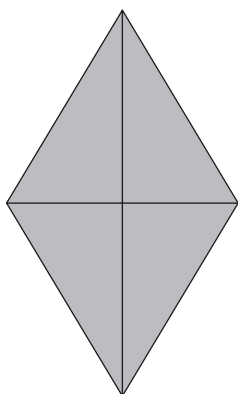
a) Llamamos  $x$  al número de vértices:  $8 + x = 2x + 2$ .

Tiene 12 aristas y 6 vértices.

b) Llamamos  $x$  al número de caras:  $x + 12 = 30 + 2$ .

Tiene 20 caras.

**29** El área de un rombo es 30 cm<sup>2</sup>. Si la diagonal menor mide 6 cm, ¿cuál es la medida de la diagonal mayor?



Resolvemos la ecuación:  $30 = \frac{x \cdot 6}{2} \Leftrightarrow x = 10$  cm

**30** La tercera parte de un jardín está sembrada de césped. Si 40 m<sup>2</sup> es la superficie de jardín que está sin césped, ¿cuál es la superficie total del jardín?

Si la tercera parte del jardín está sembrada,  $\frac{2}{3}$  de jardín no está sembrado.

Resolvemos la ecuación:  $\frac{2x}{3} = 40$ . La superficie del jardín es 60 m<sup>2</sup>.

**31** De un tonel se extrae la tercera parte de su contenido, y más tarde se extrae la mitad del resto. Si finalmente quedan 100 L, ¿cuál es la capacidad del tonel?

Sea  $x$  la capacidad del tonel. Resolvemos la ecuación:

$$x - \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \left( x - \frac{x}{3} \right) = 100. \text{ La capacidad es de 300 litros.}$$

**32** Los ahorros de tres hermanos suman 100 €. Si el hermano mayor tiene el doble de dinero ahorrado que el tercer hermano, y el segundo hermano tiene dos euros menos que el tercero, ¿cuál es la cantidad de dinero ahorrado que tiene cada uno?

Sea  $x$  el dinero que tiene el tercer hermano. Resolvemos la ecuación:  $2x + (x - 2) + x = 100$ . El mayor tiene 51 euros, el segundo 23,5 euros y el tercero 25,5 euros.

**33** Si quiero comprar 8 chokolatinas me faltan dos euros, pero si compro 6 chokolatinas me sobran dos euros. ¿Cuál es el precio de una chokolatina?

Resolvemos la ecuación:  $8x - 2 = 6x + 2$ . El precio de una chokolatina es 2 euros.

**34** Calcula un número que multiplicado por su tercera parte sea igual a 48.

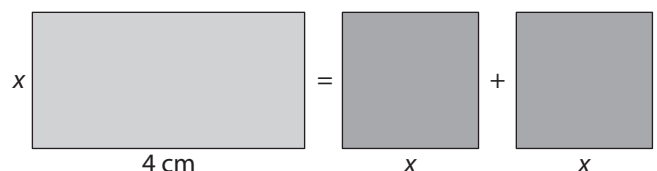
Resolvemos la ecuación:  $x \cdot \frac{x}{3} = 48$ . Hay dos números que satisfacen el enunciado del ejercicio, el 12 y el -12.

**35** Un hexágono regular tiene una superficie de 63 cm<sup>2</sup>. Si su apotema mide 3 cm, calcula la medida del lado del hexágono.

Llamamos  $x$  al lado del hexágono. Resolvemos la ecuación:

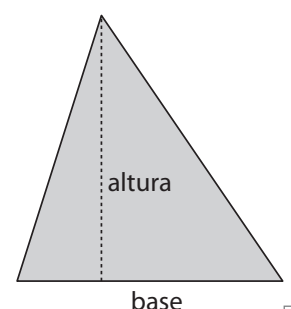
$$63 = \frac{6x \cdot 3}{2}. \text{ El lado mide 7 cm.}$$

**36** ¿Cuánto mide el lado del cuadrado para que el área del rectángulo sea la suma de las áreas de los cuadrados?




Resolvemos la ecuación:  $4x = x^2 + x^2$ . El lado del cuadrado es de 2 cm.

**37** Un triángulo, con la base igual que la altura, tiene un área de 32 m<sup>2</sup>. Calcula la longitud de la base.



Llamamos  $x$  a la base y la altura del triángulo. Resolvemos la ecuación:  $32 = \frac{x \cdot x}{2}$ . La base mide 8 m.

**38**  **En un jardín se quiere construir un estanque circular de 78,5 m<sup>2</sup>. ¿Cuál debe ser la medida del radio del estanque?**

Resolvemos la ecuación:  $\pi \cdot x^2 = 78,5$ . El radio mide 4,99 m. (Si se toma  $\pi = 3,14$ , el radio sale 5.)

**39**  **Una pared mide 3,75 m de largo por 2,40 m de alto y está alicatada con 400 azulejos cuadrados. ¿Cuál es la longitud del lado de los azulejos?**

La superficie de cada azulejo es  $3,75 \cdot 2,4 : 400 = 0,0225$ . Resolvemos la ecuación:  $x^2 = 0,0225$ . El lado de cada azulejo mide 0,15 m o, lo que es lo mismo, 15 cm.

**40**  **El área total de un cubo es 150 cm<sup>2</sup>. ¿Cuánto mide la arista del cubo?**

Llamamos  $x$  al lado del cubo. Resolvemos la ecuación:  $6x^2 = 150$ . El lado del cubo es de 5 cm.

## SISTEMAS DE ECUACIONES

**41**  **Indica tres soluciones de la ecuación  $2x + 4y = 12$ .**

a)  $x = 0; y = 3$       b)  $x = 6; y = 0$       c)  $x = 2; y = 2$

**42**  **Resuelve por el método de sustitución los sistemas de ecuaciones:**

a) 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x + 6y = -10 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 7x + y = 5 \\ 3x - 2y = -10 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

a) 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x - 3y = 1 \end{cases}$$

Se despeja  $x$  en la segunda ecuación:  $x = \frac{1 + 3y}{5}$

Se sustituye el valor de  $x$  en la primera ecuación:

$$2 \cdot \frac{1 + 3y}{5} + y = 5$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$2 + 6y + 5y = 25 \Leftrightarrow 11y = 23 \Leftrightarrow y = \frac{23}{11}$$

Una vez calculado el valor de  $y$ , se obtiene el valor de  $x$  sustituyendo en la expresión:  $x = \frac{1 + 3y}{5}$ .

$$x = \frac{1 + 3 \cdot \frac{23}{11}}{5} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \frac{69}{11}}{5} \Leftrightarrow x = \frac{11 + 69}{55} \Leftrightarrow x = \frac{16}{11}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x + 6y = -10 \\ 3x - 4y = 11 \end{cases}$$

Se despeja  $x$  en la primera ecuación:  $x = \frac{-10 - 6y}{2}$

Se sustituye el valor de  $x$  en la segunda ecuación:

$$3 \cdot \frac{-10 - 6y}{2} - 4y = 11$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$-30 - 18y - 8y = 22 \Leftrightarrow -26y = 52 \Leftrightarrow y = -\frac{52}{26} \Leftrightarrow y = -2$$

Una vez calculado el valor de  $y$ , se obtiene el valor de  $x$

sustituyendo en la expresión:  $x = \frac{-10 - 6y}{2}$ .

$$x = \frac{-10 - 6y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-10 - 6 \cdot (-2)}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

c) 
$$\begin{cases} 7x + y = 5 \\ 3x - 2y = -10 \end{cases}$$

Se despeja  $y$  en la primera ecuación:  $y = 5 - 7x$

Se sustituye el valor de  $y$  en la segunda ecuación:

$$3x - 2 \cdot (5 - 7x) = -10$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$3x - 10 + 14x = -10 \Leftrightarrow 17x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Una vez calculado el valor de  $x$ , se obtiene el valor de  $y$  sustituyendo en la expresión:  $y = 5 - 7x$ .

$$y = 5 - 7 \cdot 0 \Leftrightarrow y = 5$$

d) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

Se despeja  $x$  en la segunda ecuación:  $x = -2 + y$

Se sustituye el valor de  $x$  en la primera ecuación:

$$2 \cdot (-2 + y) + 3y = 11$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita:

$$2 \cdot (-2 + y) + 3y = 11 \Leftrightarrow -4 + 2y + 3y = 11 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 5y = 15 \Leftrightarrow y = 3$$

Una vez calculado el valor de  $y$ , se obtiene el valor de  $x$  sustituyendo en la expresión:  $x = -2 + y$ .

$$x = -2 + 3 \Leftrightarrow x = 1$$

**43**  Utilizando el método de igualación, resuelve los sistemas de ecuaciones:

a) 
$$\begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 12x - 2y = 14 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 7x + 12y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

a) 
$$\begin{cases} 2x + 5y = -6 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita  $x$  en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{-6 - 5y}{2} \quad x = 8 + 3y$$

Se igualan las dos expresiones de  $x$ :

$$\frac{-6 - 5y}{2} = 8 + 3y$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\begin{aligned} \frac{-6 - 5y}{2} = 8 + 3y &\Leftrightarrow -6 - 5y = 16 + 6y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -11y = 22 \Leftrightarrow y = -2 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a  $x$  se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo en:  $x = 8 + 3y$ .

$$x = 8 + 3 \cdot (-2) \Leftrightarrow x = 8 - 6 \Leftrightarrow x = 2$$

b) 
$$\begin{cases} 7x - 3y = 4 \\ 12x - 2y = 14 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita  $x$  en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{4 + 3y}{7} \quad x = \frac{14 + 2y}{12}$$

Se igualan las dos expresiones de  $x$ :

$$\frac{4 + 3y}{7} = \frac{14 + 2y}{12}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\begin{aligned} \frac{4 + 3y}{7} = \frac{14 + 2y}{12} &\Leftrightarrow 12 \cdot (4 + 3y) = 7 \cdot (14 + 2y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 48 + 36y = 98 + 14y \Leftrightarrow 22y = 50 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{50}{22} = \frac{25}{11} \end{aligned}$$

El valor correspondiente a  $x$  se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo en:  $x = \frac{4 + 3y}{7}$ .

$$x = \frac{4 + 3 \cdot \frac{25}{11}}{7} \Leftrightarrow x = \frac{4 + \frac{75}{11}}{7} \Leftrightarrow x = \frac{119}{77} = \frac{17}{11}$$

c) 
$$\begin{cases} 7x + 12y = 1 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita  $x$  en las dos ecuaciones:

$$x = \frac{1 - 12y}{7} \quad x = \frac{3y}{2}$$

Se igualan las dos expresiones de  $x$ :

$$\frac{1 - 12y}{7} = \frac{3y}{2}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\frac{1 - 12y}{7} = \frac{3y}{2} \Leftrightarrow 2 - 24y = 21y \Leftrightarrow -45y = -2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{45}$$

El valor correspondiente a  $x$  se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

en:  $x = \frac{3y}{2}$

$$x = \frac{3 \cdot \frac{2}{45}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

d) 
$$\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Se despeja la incógnita  $y$  en las dos ecuaciones:

$$y = \frac{1 - 6x}{-5} \quad y = \frac{5 - 2x}{3}$$

Se igualan las dos expresiones de  $y$ :

$$\frac{1 - 6x}{-5} = \frac{5 - 2x}{3}$$

Se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita que se obtiene al igualar:

$$\begin{aligned} \frac{1 - 6x}{-5} = \frac{5 - 2x}{3} &\Leftrightarrow 3 - 18x = -25 + 10x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -18x - 10x = -25 - 3 \Leftrightarrow -28x = -28 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

El valor correspondiente a  $y$  se obtiene sustituyendo en cualquiera de las expresiones, por ejemplo, sustituyendo

en:  $y = \frac{5 - 2x}{3}$ .

$$y = \frac{5 - 2 \cdot 1}{3} \Leftrightarrow y = \frac{5 - 2}{3} \Leftrightarrow y = \frac{3}{3} = 1$$

**44**  Resuelve por el método de reducción los sistemas de ecuaciones:

a) 
$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} -x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2x + 5y = -13 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$

# 6 ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

<http://www.McGraw-Hill.es>

a) 
$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Si se quiere eliminar la incógnita  $x$ , los coeficientes de  $x$  en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la segunda ecuación por  $-7$ :

$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ -7x - 21y = -77 \end{cases}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ -7x - 21y = -77 \end{cases} \\ \hline -19y = -76 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: 
$$\begin{cases} 7x + 2y = 1 \\ -19y = -76 \end{cases}$$

Se despeja  $y$  en la segunda ecuación:  $y = 4$

Para calcular  $x$  se sustituye el valor obtenido de  $y$  en la primera ecuación:

$$7x + 2y = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 - 2y}{7} \Leftrightarrow x = \frac{1 - 2 \cdot 4}{7} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{7} = -1$$

b) 
$$\begin{cases} -x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

Si se quiere eliminar la incógnita  $x$ , los coeficientes de  $x$  en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2:

$$\begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} -2x + 4y = 18 \\ 2x - 3y = -12 \end{cases} \\ \hline y = 6 \end{array}$$

Para calcular  $x$  se sustituye el valor obtenido de  $y$  en la primera ecuación:

$$-x + 2y = 9 \Leftrightarrow x = -9 + 2y \Leftrightarrow x = -9 + 2 \cdot 6 \Leftrightarrow x = 3$$

c) 
$$\begin{cases} 2x + 5y = -13 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$$

Si se quiere eliminar la incógnita  $y$ , los coeficientes de  $y$  en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 5:

$$\begin{cases} 4x + 10y = -26 \\ 15x - 10y = 45 \end{cases}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 4x + 10y = -26 \\ 15x - 10y = 45 \end{cases} \\ \hline 19x = 19 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: 
$$\begin{cases} 4x + 10y = -26 \\ 19x = 19 \end{cases}$$

Se despeja  $x$  en la segunda ecuación:  $x = 1$

Para calcular  $y$  se sustituye el valor obtenido de  $x$  en la primera ecuación:

$$4x + 10y = -26 \Leftrightarrow y = \frac{-26 - 4x}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-26 - 4 \cdot 1}{10} \Leftrightarrow y = -3$$

d) 
$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$

Si se quiere eliminar la incógnita  $x$ , los coeficientes de  $x$  en las dos ecuaciones tienen que ser opuestos, para ello se multiplica la segunda ecuación por  $-2$ :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ -2x + 6y = 6 \end{cases}$$

Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ -2x + 6y = 6 \end{cases} \\ \hline 11y = 22 \end{array}$$

y se obtiene el sistema: 
$$\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ 11y = 22 \end{cases}$$

Se despeja  $y$  en la segunda ecuación:  $y = 2$

Para calcular  $x$  se sustituye el valor obtenido de  $y$  en la primera ecuación:

$$2x + 5y = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16 - 5y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{16 - 5 \cdot 2}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

**45**  **Plantea un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cuyas soluciones sean:**

a)  $x = 0, y = -2$

b)  $x = 3, y = 5$

c)  $x = -1, y = -2$

Una solución:

a) 
$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ x + 3y = -6 \end{cases}$$
      b) 
$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$
      c) 
$$\begin{cases} x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

**46** **II** En un hotel rural hay 14 camas repartidas en habitaciones dobles y triples. Escribe una ecuación que relacione el número de habitaciones dobles y triples del hotel y busca todas las soluciones posibles de la ecuación.

La ecuación es  $14 = 2x + 3y$ , donde  $x$  e  $y$  son el número de habitaciones dobles y triples, respectivamente. Las soluciones posibles son:

- a)  $x = 1; y = 4$
- b)  $x = 4; y = 2$

**47** **III** Si en el problema anterior el número total de habitaciones es 5, ¿cuántas habitaciones dobles y triples hay en el hotel?

Como  $x + y = 5$ , entonces hay 1 doble y 4 triples.

**48** **III** Juan tiene en su monedero 80 céntimos en monedas de 5 y 20 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene? Escribe la ecuación que relaciona estos datos y busca todas las soluciones posibles.

La ecuación es  $80 = 5x + 20y$ , donde  $x$  e  $y$  son el número de monedas de 5 y 20 céntimos, respectivamente. Las soluciones posibles son:

- a)  $x = 4; y = 3$
- b)  $x = 8; y = 2$
- c)  $x = 12; y = 1$

**49** **III** Si en el problema anterior Juan lleva 10 monedas, ¿cuántas monedas de 5 y 20 céntimos tiene?

Como  $x + y = 10$ , entonces tiene 8 monedas de 5 céntimos y 2 monedas de 20 céntimos.

**50** **III** En una clase de 2.º de ESO hay 28 alumnos. Todos han participado en un concurso de redacción y a final de curso se les regala por su participación un libro a cada chica y dos cómics a cada chico. Si en total se han repartido 44 regalos, ¿cuántos chicos y chicas hay en la clase?

Sea  $x$  el número de chicas e  $y$  el número de chicos:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ x + 2y = 44 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, hay 12 chicas y 16 chicos.

**51** **III** Un examen tiene 40 preguntas. Un alumno contestó correctamente a 22 preguntas. Si la calificación que obtuvo por el examen fue 48 puntos, ¿cuál es la puntuación de cada respuesta correcta o incorrecta?

Sea  $x$  la puntuación de las respuestas correctas, e  $y$  la puntuación de las respuestas incorrectas, la ecuación es:

$$22x + 18y = 48$$

Al ser una ecuación con dos incógnitas, despejamos la  $x$  y vemos las posibles soluciones.

$$x = \frac{48 - 18y}{22}$$

$x$  puede tomar valores desde 1,2 hasta 2,18, e  $y$  toma valores desde 1,2 hasta 0.

Por tanto la solución es: Si  $y = 1$ ,  $x = 1,36$ .

**52** **III** Calcula dos números naturales sabiendo que su suma es 15 y el doble del primero más el triple del segundo es 37.

El sistema es: 
$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x + 3y = 37 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema,  $x = 8$ ,  $y = 7$ .

**53** **III** El perímetro de un rectángulo es 32 cm. Si mide 8 cm más de largo que de ancho, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo?

El sistema es: 
$$\begin{cases} 2x + 2y = 32 \\ x = 8y \end{cases}$$

Resolviendo el sistema,  $x = \frac{128}{9}$  cm,  $y = \frac{16}{9}$  cm.

**54** **III** En una pizzería se hacen dos tipos de pizzas: cuatro estaciones a 3,50 € la unidad, y marinera a 4 € cada una. Una tarde vendieron 35 pizzas y se recaudaron 132,50 €. ¿Cuántas pizzas se vendieron de cada clase?

Llamamos  $x$  a las pizzas cuatro estaciones e  $y$  a las pizzas marinera.

El sistema es: 
$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 3,5x + 4y = 132,50 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:  $x = 15$ ,  $y = 20$ .

## EJERCICIOS

- 1 Calcula el cuarto proporcional de 2, 8 y 12.

$$\frac{2}{8} = \frac{12}{48}$$

- 2 Halla el cuarto proporcional de 0,25; 0,75 y 1,50.

$$\frac{0,25}{0,75} = \frac{1,50}{4,50}$$

- 3 Determina la media geométrica de 5 y 9.

$$\frac{5}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{45}}{9}$$

- 4 Halla la media proporcional de  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{4}{5}$ .

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{10}}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{10}}}{\frac{4}{5}}$$

- 5 Determina la media proporcional de  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{1}{5}$ .

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{15}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{15}}}{\frac{1}{5}}$$

- 6 Como  $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$  utiliza las propiedades 1 y 22 del margen para completar las proporciones:

a)  $\frac{15}{2} = \frac{\quad}{2}$       b)  $\frac{3}{6} = \frac{\quad}{2}$       c)  $\frac{6}{4} = \frac{\quad}{8}$

a)  $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

b)  $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c)  $\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$

- 7 A velocidad constante un automóvil consume 6 L de combustible en 100 km. ¿Cuántos litros consume en 35 km a la misma velocidad?

Por cada kilómetro consume  $\frac{6}{100}$  litros, luego en 35 km consume  $35 \cdot \frac{6}{100} = 2,1$  litros.

- 8 La rueda de una bicicleta recorre una distancia de 12,32 m cuando da 7 vueltas, ¿qué distancia recorre cuando la rueda da 3 vueltas? Si la bicicleta se desplazó 2,52 m, ¿cuántas vueltas ha dado la rueda?

En una vuelta recorre  $\frac{12,32}{7} = 1,76$  metros, luego en 3 vueltas recorre  $3 \cdot 1,76 = 5,28$  metros. Como recorre 1 metro cada  $\frac{7}{12,32}$  vueltas, cuando recorre 2,52 metros ha dado  $2,52 \cdot \frac{7}{12,32} = 1,43$  vueltas aproximadamente.

- 9 Si por jugar 3 partidas de bolos hay que pagar 10,5 €, ¿cuánto hay que pagar por jugar 5 partidas? ¿Cuál es el precio de dos partidas?

Por cada partida se paga  $\frac{10,5}{3} = 3,5$  euros, por 5 se pagarán  $5 \cdot 3,5 = 17,5$  € y el precio de dos partidas será  $2 \cdot 3,5 = 7$  €.

- 10 Para hacer un pastel para cuatro personas se necesitan, entre otros ingredientes, 0,5 kg de harina y 0,75 L de leche. ¿Qué cantidad de harina y de leche es necesaria para hacer un pastel para nueve personas?

Si para 1 persona se necesitan  $\frac{0,5}{4}$  kg de harina y  $\frac{0,75}{4}$  litros de leche, para 9 personas se necesitan 1,125 kg de harina y 1,6875 litros de leche.

- 11 Completa la tabla sabiendo que las magnitudes A y B son inversamente proporcionales:

Magnitud A	4	8	12	24
Magnitud B	12	6	4	2

- 12 Si dos personas venden 150 décimos de lotería en 3 días, ¿en cuántos días venderán los 150 décimos cinco personas?

Una sola persona los vendería en  $2 \cdot 3 = 6$  días, por lo que cinco personas los venderán en  $\frac{6}{5} = 1,2$  días.

- 13 Un granjero tiene pienso para alimentar a 25 vacas durante 40 días. Si vende 10 vacas, ¿durante cuántos días podrá alimentar a las vacas restantes?

Si tuviera una sola vaca la podría alimentar durante  $25 \cdot 40 = 1000$  días, luego si tiene 15 las podrá alimentar durante  $\frac{1000}{15} = 66,6$  días, aproximadamente.

- 14 Si escribes 25 líneas en cada folio, un trabajo te ocupa 11 folios. Si tienes que hacer el trabajo en 12 folios, ¿cuántas líneas deberías escribir en cada folio?

Si lo escribiera en un folio tendría que escribir  $25 \cdot 11 = 275$  líneas, si lo escribo en 12 folios tendré que escribir  $\frac{275}{12} = 22,92$  líneas en cada folio, aproximadamente.

**15** Si un niño consume 2,25 litros de leche al día, ¿cuántos litros de leche consume en el mes de noviembre?

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ día} \dots\dots\dots 2,25 \text{ litros} \\ 30 \text{ días} \dots\dots\dots x \text{ litros} \end{array} \right\} x = 30 \cdot 2,25 = 67,5 \text{ litros}$$

**16** El perro guardián Silver se come a la semana 4 kg de pienso. ¿Qué cantidad de pienso consume en 63 días?

$$\left. \begin{array}{l} 7 \text{ días} \dots\dots\dots 4 \text{ kg} \\ 63 \text{ días} \dots\dots\dots x \text{ kg} \end{array} \right\} x = \frac{63 \cdot 4}{7} \Leftrightarrow x = 36$$

**17** Si un baldosín tiene una superficie de 225 cm<sup>2</sup>, ¿cuántos son necesarios para alicatar una pared rectangular que mide 3 m de alto y 6 m de largo?

$$\left. \begin{array}{l} 1 \text{ baldosín} \dots\dots\dots 225 \text{ cm}^2 \\ x \text{ baldosines} \dots\dots\dots 180\,000 \text{ cm}^2 \end{array} \right\} x = \frac{180\,000}{225} = 800 \text{ bald.}$$

**18** El precio de cinco fotocopias es 0,75 €. ¿Cuál es el precio de 35 fotocopias?

$$\left. \begin{array}{l} 5 \text{ fotocopias} \dots\dots\dots 0,75 \text{ €} \\ 35 \text{ fotocopias} \dots\dots\dots x \text{ €} \end{array} \right\} x = \frac{35 \cdot 0,75}{5} = 5,25 \text{ €}$$

**19** A la velocidad media de 110 km/h, un automóvil tarda 2,20 horas en recorrer la distancia entre dos poblaciones. ¿A qué velocidad media tiene que circular para recorrer la misma distancia en 2,5 horas?

$$\left. \begin{array}{l} 2,2 \text{ h} \dots\dots\dots 110 \text{ km/h} \\ 2,5 \text{ h} \dots\dots\dots x \end{array} \right\} x = \frac{2,2 \cdot 110}{2,5} = 96,8 \text{ km/h}$$

**20** Tres grifos iguales tardan 15 horas en llenar un depósito de agua. ¿Cuánto tiempo tardarían en llenar el mismo depósito si sólo funcionaran dos grifos?

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ grifos} \dots\dots\dots 15 \text{ h} \\ 2 \text{ grifos} \dots\dots\dots x \end{array} \right\} x = \frac{3 \cdot 15}{2} = 22,5 \text{ horas}$$

**21** Calcula el 3,5 %, el 20 %, el 75 % y el 0,5 % de 120.

- a)  $120 \cdot 0,035 = 4,2$
- b)  $120 \cdot 0,2 = 24$
- c)  $120 \cdot 0,75 = 90$
- d)  $120 \cdot 0,005 = 0,6$

**22** Si se supone que el 65 % de las personas de una ciudad de 150 000 habitantes usan habitualmente el transporte público, ¿qué número de personas utiliza el transporte público un día cualquiera en esa ciudad?

$$150\,000 \cdot \frac{65}{100} = 97\,500 \text{ personas.}$$

**23** Si el precio de un libro tiene una rebaja del 10 % y cuesta 25 €, ¿cuál es el precio del libro sin rebaja?

$$25 \cdot \frac{100}{90} = 27,777\dots \text{ euros.}$$

**24** Si tres de cada cinco alumnos de tu clase aprobaron el último examen de matemáticas, ¿cuál es el porcentaje de alumnos que han aprobado esta asignatura?

$$\frac{3}{5} = 0,6. \text{ El porcentaje es del } 60\%.$$

**25** Tres amigos compran un décimo de lotería. El primer amigo aporta 5 €, el segundo 6 € y el tercero 9 €. Como el número ha resultado premiado con 100 000 €, deciden repartirse el premio proporcionalmente a las cantidades aportadas por cada uno. ¿Qué cantidad le corresponde a cada amigo?

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} = \frac{100\,000}{20}$$

$$x = 5\,000 \cdot 5 = 25\,000 \text{ €}$$

$$y = 5\,000 \cdot 6 = 30\,000 \text{ €}$$

$$z = 5\,000 \cdot 9 = 45\,000 \text{ €}$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### RAZÓN Y PROPORCIÓN

**1**  Escribe tres razones equivalentes a:

a)  $\frac{3}{4}$                       b)  $\frac{5}{6}$                       c)  $\frac{0,25}{0,3}$

a)  $\frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}$

b)  $\frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}$

c)  $\frac{25}{30}, \frac{2,5}{3}, \frac{250}{300}$

**2**  Escribe tres razones equivalentes a:

a)  $\frac{2}{5}$                       b)  $\frac{4}{3}$                       c)  $\frac{1,5}{2}$

a)  $\frac{4}{10}, \frac{10}{25}, \frac{20}{50}$

b)  $\frac{8}{6}, \frac{12}{9}, \frac{20}{15}$

c)  $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}$



3  Calcula el valor de  $x$  en las proporciones:

a)  $\frac{7}{14} = \frac{x}{6}$       b)  $\frac{100}{x} = \frac{5}{6}$       c)  $\frac{x}{9} = \frac{16}{12}$

- a) 3  
b) 120  
c) 12

4  Indica qué razones son proporcionales:

$$\frac{2}{5} \quad \frac{14}{35} \quad \frac{20}{50} \quad \frac{12}{18} \quad \frac{7}{20}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35} = \frac{20}{50}$$

5  Calcula el valor de  $x$  en las proporciones:

a)  $\frac{3}{5} = \frac{x}{15}$       b)  $\frac{10}{x} = \frac{15}{18}$       c)  $\frac{x}{8} = \frac{13}{104}$

- a) 9      b) 12      c) 1

6  Indica qué razones son proporcionales:

$$\frac{2}{7} \quad \frac{28}{70} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{14}{35} \quad \frac{4}{10}$$

$$\frac{28}{70} = \frac{14}{35} = \frac{4}{10}$$

7  Si la constante de proporcionalidad es 0,4, completa la proporción:

$$\frac{\quad}{4} = \frac{5}{12} = \frac{\quad}{8}$$

$$\frac{1,6}{4} = \frac{5}{12,5} = \frac{4,8}{12} = \frac{3,2}{8}$$

8  Calcula la razón entre la base y la altura en los siguientes triángulos:

- a) 0,5 cm de longitud de la base y 15 mm de altura.  
b) 112 dm de longitud de la base y 245 cm de altura.  
c) 3,45 m de longitud de la base y 1,2 m de altura.

a)  $\frac{1}{3}$       b)  $\frac{32}{7}$       c)  $\frac{23}{8}$

9  Calcula la razón entre la base y la altura de los siguientes rectángulos:

- a) 1,5 m de longitud de la base y 1,5 dm de altura.  
b) 1,2 cm de longitud de la base y 0,75 cm de altura.  
c) 12,45 mm de longitud de la base y 20 mm de altura.  
d) 15,6 dm de longitud de la base y 75,5 cm de altura.

a)  $\frac{10}{1}$       b)  $\frac{8}{5}$       c)  $\frac{249}{400}$       d)  $\frac{312}{151}$

## RELACIONES ENTRE LOS TÉRMINOS DE UNA PROPORCIÓN

10  Halla el cuarto proporcional de cada una de las series de números:

- a) 12, 8 y 2.      b) 2, 6 y 8.  
c) 15, 12 y 9.      d) 3, 8 y 6.

a)  $\frac{12}{8} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow 12 \cdot x = 8 \cdot 2 \Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 2}{12} = 1,333\dots$

b)  $\frac{2}{6} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 2 \cdot x = 8 \cdot 6 \Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$

c)  $\frac{15}{12} = \frac{9}{x} \Leftrightarrow 15 \cdot x = 12 \cdot 9 \Leftrightarrow x = \frac{12 \cdot 9}{15} = 7,2$

d)  $\frac{3}{8} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow 3 \cdot x = 8 \cdot 6 \Leftrightarrow x = \frac{8 \cdot 6}{3} = 16$

11  Halla el cuarto proporcional de cada una de las series de números:

- a) 0,3; 0,5 y 1.  
b) 2,5; 2 y 1,5.  
c) 12,5; 7 y 5,5.  
d) 0,5; 0,9 y 0,1.

a)  $\frac{0,3}{0,5} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 0,3 \cdot x = 0,5 \cdot 1 \Leftrightarrow x = \frac{0,5 \cdot 1}{0,3} = 1,666\dots$

b)  $\frac{2,5}{2} = \frac{1,5}{x} \Leftrightarrow 2,5 \cdot x = 1,5 \cdot 2 \Leftrightarrow x = \frac{1,5 \cdot 2}{2,5} = 1,2$

c)  $\frac{12,5}{7} = \frac{5,5}{x} \Leftrightarrow 12,5 \cdot x = 5,5 \cdot 7 \Leftrightarrow x = \frac{5,5 \cdot 7}{12,5} = 3,08$

d)  $\frac{0,5}{0,9} = \frac{0,1}{x} \Leftrightarrow 0,5 \cdot x = 0,1 \cdot 0,9 \Leftrightarrow x = \frac{0,1 \cdot 0,9}{0,5} = 0,18$

12  Halla la media geométrica de:

- a) 9 y 25.  
b) 12 y 15.  
c) 4 y 9.  
d) 16 y 25.

a)  $\frac{9}{x} = \frac{x}{25} \Leftrightarrow x^2 = 9 \cdot 25 \Leftrightarrow x = \sqrt{225} = 15$

b)  $\frac{12}{x} = \frac{x}{15} \Leftrightarrow x^2 = 12 \cdot 15 \Leftrightarrow x = \sqrt{180} = 13,42$

c)  $\frac{4}{x} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{36} = 6$

d)  $\frac{16}{x} = \frac{x}{25} \Leftrightarrow x^2 = 16 \cdot 25 \Leftrightarrow x = \sqrt{400} = 20$

**13**  Halla la media proporcional de:

- a) **0,25 y 0,64.**                      b) **0,09 y 0,16.**  
 c) **1 y 144.**                              d) **12 y 3.**

a)  $\frac{0,25}{x} = \frac{x}{0,64} \Leftrightarrow x^2 = 0,25 \cdot 0,64 \Leftrightarrow x = \sqrt{0,16} = 0,4$

b)  $\frac{0,09}{x} = \frac{x}{0,16} \Leftrightarrow x^2 = 0,09 \cdot 0,16 \Leftrightarrow x = \sqrt{0,0144} = 0,12$

c)  $\frac{1}{x} = \frac{x}{144} \Leftrightarrow x^2 = 1 \cdot 144 \Leftrightarrow x = \sqrt{144} = 12$

d)  $\frac{12}{x} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x^2 = 12 \cdot 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{36} = 6$

**14**  Demuestra las equivalencias siguientes:

a)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

b)  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

c)  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

a)  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow d \cdot (a+b) = b \cdot (c+d) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow d \cdot a + d \cdot b = b \cdot c + b \cdot d \Leftrightarrow d \cdot a = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

b)  $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow d \cdot (a-b) = b \cdot (c-d) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow d \cdot a - d \cdot b = b \cdot c - b \cdot d \Leftrightarrow d \cdot a = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

c)  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Leftrightarrow d \cdot (a+b) = b \cdot (c+d) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow d \cdot a + d \cdot b = b \cdot c + b \cdot d \Leftrightarrow d \cdot a = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Leftrightarrow d \cdot (a-b) = b \cdot (c-d) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d \cdot a - d \cdot b = b \cdot c - b \cdot d \Leftrightarrow d \cdot a = b \cdot c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

**15**  Demuestra las igualdades siguientes:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Podemos suponer que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , lo que equivale a que  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Veamos que las otras igualdades también son ciertas.

$\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a \cdot (b+d) = b \cdot (a+c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ab + ad = ba + bc \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

$\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d} \Leftrightarrow a \cdot (b-d) = b \cdot (a-c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ab - ad = ba - bc \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

## MAGNITUDES PROPORCIONALES

**16**  Teniendo en cuenta que *A* y *B* son dos magnitudes directamente proporcionales, completa en tu cuaderno la siguiente tabla. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

Magnitud A	5	15	35	60	65
Magnitud B	12	36	84	144	156

La constante de proporcionalidad es  $\frac{5}{12} = 0,41666\dots$

**17**  Si *A* y *B* son dos magnitudes directamente proporcionales, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

Magnitud A	0,6	1,35	1,8	2,25
Magnitud B	1	2,25	3	3,75

La constante de proporcionalidad es  $\frac{0,6}{1} = 0,6$

**18**  Si 0,6 es la constante de proporcionalidad de dos magnitudes directamente proporcionales, completa la proporción:

$$\frac{\quad}{5} = \frac{9}{\quad} = \frac{\quad}{30}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{18}{30}$$

**19**  ¿Son directamente proporcionales la longitud de una circunferencia y la longitud de su diámetro? Da varios ejemplos y compruébalo.

Sí, porque al aumentar la longitud de la circunferencia aumenta el diámetro. Basta tener en cuenta que  $l = \pi \cdot d$ , donde *l* es la longitud y *d* el diámetro.

**20**  Si al escribir a máquina se dan 540 pulsaciones en 3 minutos, ¿cuántas pulsaciones se dan en 7 minutos?

$$\left. \begin{array}{l} 540 \text{ pulsaciones} \dots\dots\dots 3 \text{ min} \\ x \text{ pulsaciones} \dots\dots\dots 7 \text{ min} \end{array} \right\} x = \frac{540 \cdot 7}{3} \Leftrightarrow x = 1260$$

**21**  Un automóvil ha consumido 36 litros de combustible para recorrer 450 km a una velocidad media de 110 km/h. ¿Cuántos litros consume para recorrer 150 km a la misma velocidad?

$$\left. \begin{array}{l} 36 \text{ litros} \dots\dots\dots 450 \text{ km} \\ x \text{ litros} \dots\dots\dots 150 \text{ km} \end{array} \right\} x = \frac{36 \cdot 150}{450} \Leftrightarrow x = 12$$

**22**  Si por cuatro entradas para el teatro se ha pagado 62 €, ¿cuánto tendremos que pagar si vamos a comprar tres entradas?

$$\left. \begin{array}{l} 4 \text{ entradas} \dots\dots 62 \text{ €} \\ 3 \text{ entradas} \dots\dots x \text{ €} \end{array} \right\} x = \frac{3 \cdot 62}{4} = 46,5 \text{ €}$$

**23**  Un cocinero tarda 45 minutos en hacer tres tartas de chocolate. ¿Cuántas tartas puede hacer en dos horas y media?

$$\left. \begin{array}{l} 45 \text{ min} \dots\dots 3 \text{ tartas} \\ 150 \text{ min} \dots\dots x \text{ tartas} \end{array} \right\} x = \frac{150 \cdot 3}{45} = 10 \text{ tartas}$$

**24**  Una impresora tarda 1,5 minutos en imprimir 10 folios. ¿Cuánto tiempo tardará en imprimir un trabajo de 80 folios?

$$\left. \begin{array}{l} 1,5 \text{ min} \dots\dots 10 \text{ folios} \\ x \text{ min} \dots\dots 80 \text{ folios} \end{array} \right\} x = \frac{80 \cdot 1,5}{10} = 12 \text{ minutos}$$

**25**  Una máquina fabrica 130 bombillas en 5 horas. ¿Cuántas bombillas fabrica la máquina en 24 horas?

$$\left. \begin{array}{l} 130 \text{ bombillas} \dots\dots 5 \text{ horas} \\ x \text{ bombillas} \dots\dots 24 \text{ horas} \end{array} \right\} x = \frac{24 \cdot 130}{5} = 624 \text{ bombillas}$$

**26**  Copia en tu cuaderno y completa la tabla relativa a una máquina envasadora de botellas. En ella se relacionan el número de botellas con la capacidad de las mismas.

Número de botellas	Capacidad de las botellas
1 200	0,5 litros
300	2 litros
800	0,75 litros
1 000	0,6 litros
$1818 + \frac{2}{11}$	33 centilitros
400	1,5 litros

**27**  Un grupo de 12 alpinistas tiene comida para 10 días. Si dos de ellos abandonan la expedición por enfermedad, ¿para cuántos días tendrá entonces comida el resto de la expedición?

La comida para un alpinista es  $10 \cdot 12 = 120$  días; para 10 alpinistas:  $\frac{120}{10} = 12$  días.

**28**  En un hotel la habitación doble vale 65 € por día. Calcula cuánto cuesta el alojamiento de seis personas durante ocho días en ese hotel.

La cantidad que deben pagar 2 personas durante ocho días:

$$\left. \begin{array}{l} 65 \text{ €} \dots\dots\dots 1 \text{ día} \\ x \text{ €} \dots\dots\dots 8 \text{ días} \end{array} \right\} x = \frac{8 \cdot 65}{1} = 520 \text{ €}$$

Para seis personas cuesta:  $520 \cdot 3 = 1560 \text{ €}$

**29**  En una empresa hay 10 técnicos que realizan un trabajo y les ocupa 35 horas a la semana a cada uno. Si dos técnicos se van de vacaciones, ¿cuántas horas a la semana tienen que trabajar cada uno para realizar el mismo trabajo?

Un técnico tiene que trabajar  $10 \cdot 35 = 350$  horas a la semana; para ocho técnicos:  $\frac{350}{8} = 43,75$  horas a la semana.

**30**  Una persona da pasos de 0,60 metros de longitud. Para recorrer la distancia de su casa hasta la panadería tiene que dar 520 pasos. Si acorta la longitud del paso 10 centímetros, ¿cuántos pasos deberá dar para recorrer la misma distancia?

Los metros que recorre con 520 pasos son:  $0,60 \cdot 520 = 312$  metros; si cada paso es de 0,5 metros:  $\frac{312}{0,5} = 624$  pasos.

**31**  En un supermercado tienen 4 sacos de alubias de 60 kg cada uno. Si se distribuyen en paquetes de 1,5 kg, ¿cuántos paquetes tienen que hacer?

El número total de kg de alubias es:  $60 \cdot 4 = 240$  kg; si se reparte en paquetes de 1,5 kg:  $\frac{240}{1,5} = 160$  paquetes.

**32**  Una imprenta, si quiere entregar un encargo de folletos publicitarios en cinco días, tiene que imprimir 4 500 folletos diarios. Si quiere entregar el trabajo en tres días, ¿cuántos folletos tiene que imprimir cada día?

El número total de folletos es de:  $4\,500 \cdot 5 = 22\,500$ ; si quiere hacer el trabajo en tres días:  $\frac{22\,500}{3} = 7\,500$  folletos diarios.

**33**  Para hacer un trabajo de la clase de Plástica, un alumno tarda 2 horas, otro tarda 4 horas y otro 6 horas. ¿Cuánto tiempo tardarían en hacer el mismo trabajo si lo realizasen juntos?

$\frac{12}{11}$  horas.

## APLICACIONES DE LA PROPORCIONALIDAD

**34**   Completa:

a) 20% de  $\square$  = 48

b)  $\square$  % de 400 = 35

c) 15% de 1 200 =  $\square$

d) 85% de  $\square$  = 102

- a) 240      b) 8,75      c) 180      d) 120

**35**   Completa:

a) 15,5% de  $\square$  = 86,8

b)  $\square$  % de 64 = 45

c) 65,5% de 92 =  $\square$

d)  $\square$  % de 150 = 7,5

- a) 560      b) 70,3125      c) 60,26      d) 5

**36**   Ana y Julio juegan con un tirachinas. Ana da en el blanco 14 de 20 tiros y Julio 18 de 26 tiros. Calcula el porcentaje de aciertos de cada uno. ¿Quién tiene mejor puntería?

$$\text{Ana} = \frac{14}{20} \cdot 100 = 70\%; \quad \text{Julio} = \frac{18}{26} \cdot 100 = 69,23\%.$$

Ana tiene mejor puntería.

**37**   Una ciudad tiene 30 000 habitantes. En el mes de agosto la población se incrementa un 60%. ¿Cuántos habitantes tiene esa ciudad en el mes de agosto?

$$1,6 \cdot 30\,000 = 48\,000 \text{ habitantes.}$$

**38**   Según la Organización Mundial de la Salud, el 35% de los fumadores padecerá una enfermedad pulmonar en el futuro. Si el 40% de la población de una ciudad de 54 000 habitantes son fumadores, ¿cuántas personas de esa ciudad podrán padecer una enfermedad pulmonar?

$$0,35 \cdot 0,4 \cdot 54\,000 = 7\,560 \text{ habitantes.}$$

**39**   Una camisa vale 35 €. Si se rebaja un 12% y posteriormente se rebaja un 5%, ¿cuál es el precio final de la camisa?

$$35 \cdot 0,88 \cdot 0,95 = 29,26 \text{ €}$$

**40**   Si una barra de pan que costaba 0,55 €, cuesta ahora 0,75 €, ¿cuál es el tanto por ciento de subida que ha experimentado?

$$\frac{x}{100} \cdot 0,55 = 0,20, \text{ luego } x = 36,36\%.$$

**41**   Si un DVD cuesta 120 € más el 16% de IVA, ¿cuál es su precio real?

$$\text{Precio} = 1,16 \cdot 120 = 139,2 \text{ euros.}$$

**42**    El precio de unos zapatos se ha rebajado en una primera rebaja un 8%, y en una segunda rebaja un 15%. Si el precio final es 31,20 €, ¿cuál es el precio inicial de los zapatos?

$$\frac{31,20}{0,92 \cdot 0,85} = 40 \text{ €}$$

**43**   La reserva hidráulica en España en el mes de enero de 2006 fue 24 947 hm<sup>3</sup>, que representa el 46,8% de su capacidad total de embalse. ¿Cuántos hectómetros cúbicos pueden ser embalsados en España?

$$\left. \begin{array}{l} 24\,947 \text{ hm}^3 \dots\dots\dots 46,8\% \\ x \dots\dots\dots 100\% \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{100 \cdot 24\,947}{46,8} \Leftrightarrow x = 53\,305,5555\dots \text{ hm}^3$$

**44**   Los medios de comunicación informan de que el 60% de los alumnos de 2.º de ESO estudian dos idiomas. Si en una clase de 2.º de ESO hay 25 alumnos, ¿cuántos de estos alumnos se supone que estudian dos idiomas?

$$\frac{60}{100} \cdot 25 = 15 \text{ alumnos}$$

**45**    Reparte 2 000 € entre cuatro personas de modo que la primera reciba un 50% más que la segunda, ésta un 50% más que la tercera y ésta un 50% más que la cuarta.

Sea  $x$  lo que recibe la cuarta persona. Entonces,  $x + 1,5x + 1,5^2x + 1,5^3x = 2\,000$ , de donde  $x = 246,15$ .

La tercera recibirá 369,22, la segunda 553,83 y la primera recibirá 830,55 euros.

**46**   Un agricultor tiene un campo de 2,5 hectáreas y otro de 4,2 hectáreas. Dispone de 3 horas para regar. Si el agricultor quiere que el tiempo de riego sea proporcional a la superficie del campo, ¿cuánto tiempo debe dedicar a regar cada campo?

$$\frac{x}{2,5} = \frac{y}{4,2} = \frac{3}{6,7}$$

Luego al primer campo debe dedicarle:

$$x = 2,5 \cdot \frac{3}{6,7} = 1,12 \text{ horas,}$$

y al otro campo  $y = 4,2 \cdot \frac{3}{6,7} = 1,88 \text{ horas.}$

**47**  Completa la tabla que representa la reserva hidráulica de España en cada cuenca.

Cuenca	Capacidad (hm <sup>3</sup> )	Reserva actual (hm <sup>3</sup> )	%
Norte	4 360	2 703	61,9
Duero	7 463	3 709,1	49,7
Tajo	11 007,2	4 590	41,7
Guadiana	8 859	5 014,2	56,6
Guadalquivir	8 763,5	3 558	40,6
Sur	1 041	272	26,1

**48**  La calificación de Matemáticas se obtiene de la siguiente forma:


- Un 20% por comportamiento en la clase.
- Un 30% por la realización de ejercicios.
- Un 50% por la nota del examen.

a) Calcula la calificación final de un alumno si las anotaciones que tiene el profesor de él son:

- 4 sobre 10 por el comportamiento en clase.
- 6 sobre 10 por la realización de ejercicios.
- 5 sobre 10 por la nota del examen.

b) Si la calificación que ha obtenido un alumno es 8, ¿cuál es la puntuación que tiene por cada uno de los apartados: comportamiento en clase, por los ejercicios realizados y por la nota de examen?

a)  $0,2 \cdot 4 + 0,3 \cdot 6 + 0,5 \cdot 5 = 5,1$ .

**49**  Los socios de una empresa deciden repartir proporcionalmente al número de acciones los 4 200 € de beneficios del último mes. Si la distribución de acciones entre los socios es:

	Acciones
Socio A	20%
Socio B	40%
Socio C	10%
Socio D	30%

- a) ¿Qué cantidad de dinero corresponde a cada socio?  
 b) Si la empresa destina un 10% de los beneficios para obra social, ¿qué cantidad de dinero corresponde al socio C?

a) La suma de las cantidades de los cuatro socios es:

$$A + B + C + D = 4\,200$$

La suma las acciones es 100.

La cantidad que se recibe por cada acción es:  $\frac{4\,200}{100} = 42$ .

El socio A recibe  $20 \cdot 42 = 840$  €.

El socio B recibe  $40 \cdot 42 = 1\,680$  €.

El socio C recibe  $10 \cdot 42 = 420$  €.

El socio D recibe  $30 \cdot 42 = 1\,260$  €.

b)  $420 \cdot 0,9 = 378$  €.

**50**  El pago de los gastos comunitarios de un edificio es proporcional a la superficie de las viviendas, que son:

Tipo A	90 m <sup>2</sup>
Tipo B	110 m <sup>2</sup>
Tipo C	150 m <sup>2</sup>

Si los gastos comunitarios de un año son 30 000 €, calcula la cantidad que corresponde pagar por cada tipo de vivienda.

$$\frac{x}{90} = \frac{y}{110} = \frac{z}{150} = \frac{30\,000}{90 + 110 + 150} = \frac{600}{7}$$

Luego la vivienda de 90 m<sup>2</sup> debe pagar

$$x = 90 \cdot \frac{600}{7} = 7\,714,28 \text{ euros.}$$

La vivienda de 110 m<sup>2</sup> debe pagar:

$$y = 110 \cdot \frac{600}{7} = 9\,428,57 \text{ euros.}$$

La vivienda de 150 m<sup>2</sup> debe pagar:

$$z = 150 \cdot \frac{600}{7} = 12\,857,14 \text{ euros.}$$

**51**  Una empresa formada por tres socios reparte los beneficios del último trimestre de la siguiente forma:

Socio A	4 500 €
Socio B	7 200 €
Socio C	6 300 €

Calcula el porcentaje de ganancias de cada socio.

Los beneficios totales son:  $4\,500 + 7\,200 + 6\,300 = 18\,000$  €.

$$\text{Socio A: } \left. \begin{array}{l} 18\,000 \text{ €} \dots\dots\dots 100\% \\ 4\,500 \text{ €} \dots\dots\dots x\% \end{array} \right\} x = \frac{4\,500 \cdot 100}{18\,000} = 25\%$$

$$\text{Socio B: } \left. \begin{array}{l} 18\,000 \text{ €} \dots\dots\dots 100\% \\ 7\,200 \text{ €} \dots\dots\dots x\% \end{array} \right\} x = \frac{7\,200 \cdot 100}{18\,000} = 40\%$$

$$\text{Socio C: } \left. \begin{array}{l} 18\,000 \text{ €} \dots\dots\dots 100\% \\ 6\,300 \text{ €} \dots\dots\dots x\% \end{array} \right\} x = \frac{6\,300 \cdot 100}{18\,000} = 35\%$$

**52**  Un ayuntamiento dispone de 10000 € para repartir entre tres asociaciones culturales de la localidad, de 200, 350 y 425 socios respectivamente.

a) ¿Qué cantidad recibirá cada asociación si el reparto es proporcional al número de socios de cada una de ellas?

b) Si de la cantidad recibida del ayuntamiento cada asociación cultural destina un 15% para promover y promocionar sus actividades entre la población, ¿qué cantidad destina cada asociación?

a)  $\frac{x}{200} = \frac{y}{350} = \frac{z}{425} = \frac{10000}{975} = \frac{400}{39}$

Luego la primera recibirá:

$$x = 200 \cdot \frac{400}{39} = 2051,28 \text{ euros.}$$

La segunda:

$$y = 350 \cdot \frac{400}{39} = 3589,74 \text{ euros}$$

La tercera recibirá:

$$z = 425 \cdot \frac{400}{39} = 4358,97 \text{ euros}$$

b) La primera destina:  $2051,28 \cdot 0,15 = 307,69 \text{ €}$

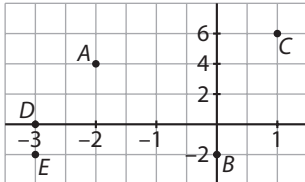
La segunda destina:  $3589,74 \cdot 0,15 = 538,46 \text{ €}$

La tercera destina:  $4358,97 \cdot 0,15 = 653,85 \text{ €}$

# 8 FUNCIONES

## EJERCICIOS

**1** Traza en tu cuaderno unos ejes de coordenadas y representa en ellos los puntos  $A(-2, 4)$ ,  $B(0, -2)$ ,  $C(1, 6)$ ,  $D(-3, 0)$  y  $E(-3, -2)$ .



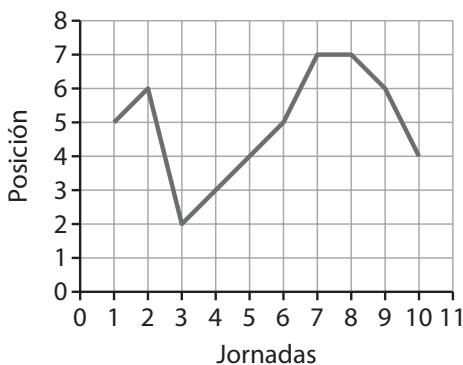
**2** Encuentra las coordenadas del vértice  $D$  del rectángulo  $ABCD$ , sabiendo que las coordenadas conocidas son  $A(1, -3)$ ,  $B(1, 4)$  y  $C(-4, 4)$ .

$D(-4, -3)$ .

**3** A partir del gráfico de la gripe de Carlos, responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es la diferencia de temperatura entre las 10 y las 13 horas?
- ¿A qué horas del día la temperatura de Carlos es de  $37,5^\circ\text{C}$ ?
- ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura sube o baja?
- ¿Puedes deducir cuándo ha tomado Carlos un anti-térmico?
- ¿Cuál fue la máxima temperatura? ¿Y la mínima?
- ¿Cuál fue la oscilación de la temperatura durante el día?
  - $1^\circ\text{C}$
  - 11, 14, 17 y 21,5 horas.
  - Sube: [8,13] y [15,20]; baja: [13,15] y [20,23].
  - A las 13 y a las 20 horas.
  - $39^\circ\text{C}$ ,  $36,5^\circ\text{C}$
  - $39 - 36,5 = 2,5^\circ\text{C}$

**4** El gráfico representa la clasificación de un club de fútbol en el campeonato de Liga durante las diez primeras jornadas. Interpreta la marcha del equipo en el campeonato de Liga a partir del gráfico.

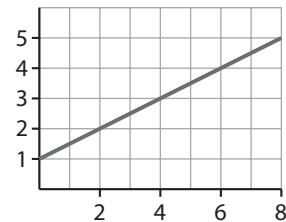


<http://www.McGraw-Hill.es>

En la primera jornada se colocó en el quinto puesto; en la segunda retrasó una posición; en la tercera pasó al segundo puesto y fue perdiendo un lugar cada semana hasta la sexta jornada, en la que estaba en la quinta posición; la jornada siguiente perdió dos posiciones, quedando en el séptimo lugar, donde se mantuvo en la octava jornada; adelantó un lugar en la novena jornada y dos en la décima, quedando en el puesto cuarto.

**5** Dibuja la gráfica correspondiente a la siguiente tabla de valores y une los puntos con una línea poligonal:

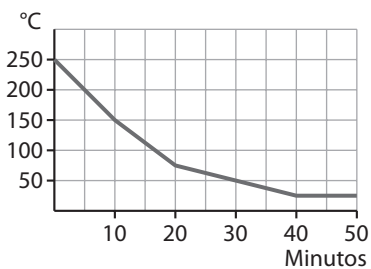
Variable $x$	0	2	4	6	8
Variable $y$	1	2	3	4	5



**6** El enfriamiento de un horno eléctrico desde el instante en que se desconecta sigue la evolución indicada en la tabla:

Tiempo transcurrido (min)	0	10	20	30	40	50
Temperatura ( $^\circ\text{C}$ )	250	150	75	50	25	25

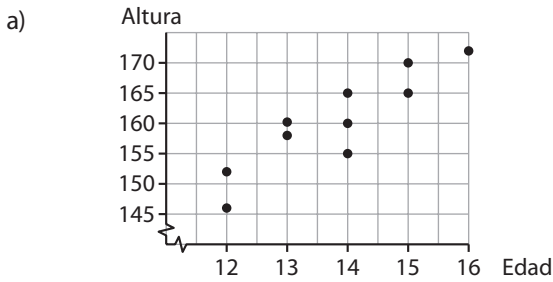
Representa la gráfica asociada a esta tabla de valores.



**7** En el colegio se ha realizado un estudio para analizar la relación entre la edad y la altura de los alumnos. Los resultados correspondientes a diez niños se recogen en la tabla de valores.

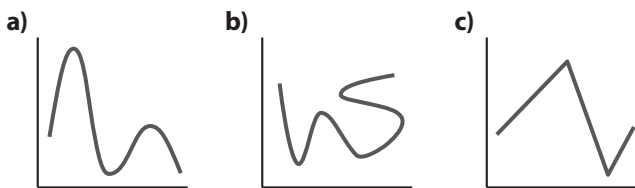
Edad	12	12	13	15	14	15	14	13	16	14
Altura (cm)	146	152	158	165	160	170	155	160	172	165

- Representa la gráfica correspondiente.
- ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos?
- ¿En qué valores está comprendida la edad de los diez niños elegidos para el estudio? ¿Y la estatura?



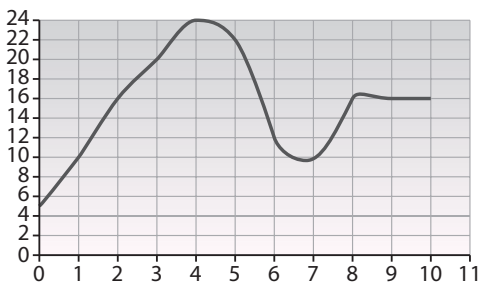
- b) No tiene sentido unir los puntos.  
 c) Entre 12 y 16 años. Entre 146 y 172 cm.

**8** Indica qué gráficas representan una función:



La a) y la c).

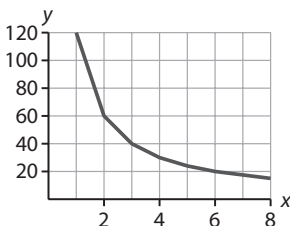
**9** Describe las características de la función representada en la gráfica.



Dominio  $[0, 10]$ ; recorrido  $[5, 24]$ ; creciente  $[0, 4]$  y  $[7, 8]$ ; decreciente  $[4, 7]$  y  $[8, 9]$ ; constante  $[9, 10]$ ; extremos en  $(0, 4)$ ,  $(4, 24)$ ,  $(7, 10)$  y  $(8, 17)$ .

**10** Representa en tu cuaderno la gráfica correspondiente a los valores de la tabla y, a partir de ella, describe las características de la función.

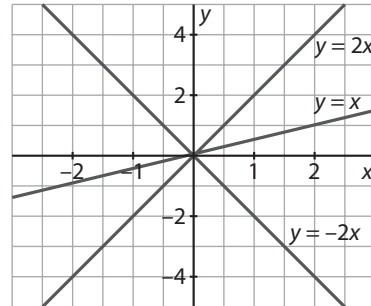
Variable independiente (x)	1	2	3	4	5	6	8
Variable dependiente (y)	120	60	40	30	24	20	15



Dominio  $[1, 8]$ , recorrido  $[15, 120]$ ; siempre decreciente; extremos en  $(1, 120)$  y  $(8, 15)$ .

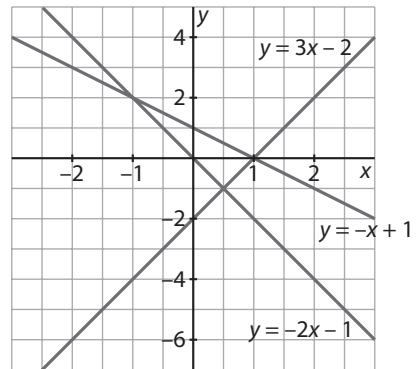
**11** Dibuja la gráfica de las funciones:

- a)  $y = 2x$       b)  $y = x$       c)  $y = -2x$



**12** Dibuja la gráfica de las funciones:

- a)  $y = -x + 1$       b)  $y = 3x - 2$       c)  $y = -2x - 1$



**13** Por alquilar un coche hay que pagar 90 € como cantidad fija, más 2 € por cada kilómetro recorrido.

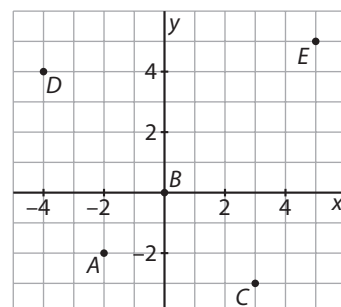
¿Cuál es la función que relaciona el precio total del alquiler del coche con el número de kilómetros recorridos?

$y = 2x + 90$ , donde  $x$  es el número de kilómetros recorridos.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### REPRESENTACIÓN DE COORDENADAS EN EL PLANO

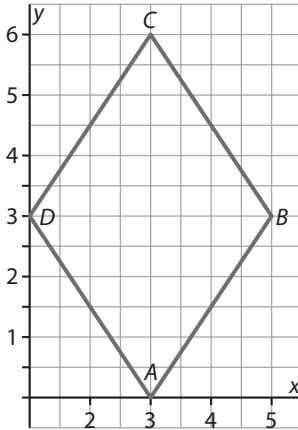
**1** Representa en los ejes de coordenadas los puntos  $A(-2, -2)$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(3, -3)$ ,  $D(-4, 4)$  y  $E(5, 5)$ .





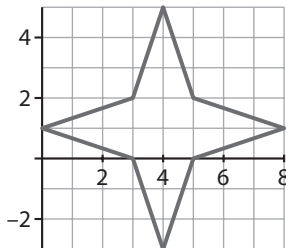
2  Une los puntos de coordenadas  $A(3, 0)$ ,  $B(5, 3)$ ,  $C(3, 6)$  y  $D(1, 3)$ . ¿Qué figura geométrica se obtiene?

Un rombo.



3  Los vértices de una estrella dibujada en el plano son los puntos de coordenadas  $A(0, 1)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(4, -3)$ ,  $D(5, 0)$ ,  $E(8, 1)$ ,  $F(5, 2)$ ,  $G(4, 5)$  y  $H(3, 2)$ . Determina las coordenadas del centro de la estrella.

El centro está en el  $(4, 1)$ .



4  Los vértices de un paralelogramo son los puntos de coordenadas  $A(-3, 2)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(1, 4)$  y  $D(-2, 4)$ . ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección de las diagonales?

$(-1, 3)$

5  Si los puntos  $A(4, 1)$ ,  $B(13, 4)$ ,  $C(10, 7)$  y  $D(x, y)$  son las coordenadas de los vértices de un paralelogramo, ¿cuáles son las coordenadas del vértice  $D$ ?

Los vértices deben ir ordenados:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ . El vértice que falta es el  $(1, 4)$ . Si no se impusiera orden habría otros dos puntos que también formarían con los anteriores un paralelogramo: el  $(7, 2)$  y el  $(19, 10)$ .

## INTERPRETACIÓN DE GRÁFICOS

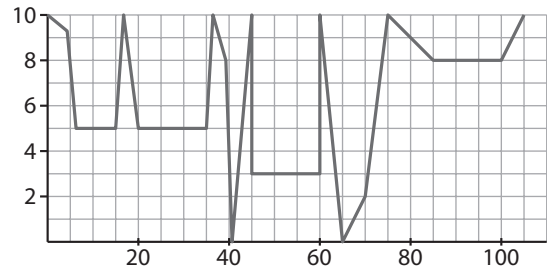
6  Piensa en tu estado de ánimo, un lunes desde que te despiertas hasta que te acuestas. Haz una gráfica que represente esta situación dando valores reales a la primera magnitud (horas del día), y valores aproximados a la segunda magnitud (estado de ánimo entre 0 y 10).

Respuesta abierta.

7  En un partido de fútbol sucede lo siguiente:

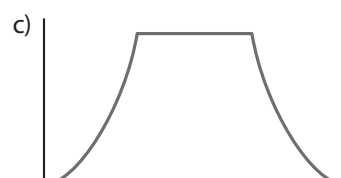
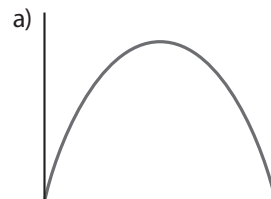
- Salida de los equipos al campo.
- Errores arbitrales.
- Gol del equipo local.
- Penalti en contra de los locales.
- Error en el lanzamiento del penalti.
- Gol del equipo local.
- Descanso.
- Gol del equipo visitante.
- Fin del partido.
- Victoria del equipo local.

En tu cuaderno, haz la gráfica del ruido que se produce en el estadio en función del momento del partido.

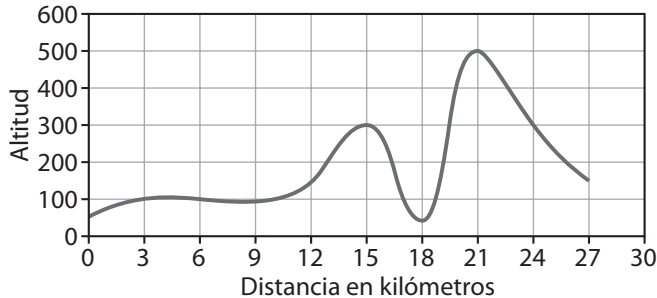


8  Representa una gráfica que describa cada una de las situaciones siguientes:

- a) La variación de la temperatura de un horno desde el instante inicial de encendido hasta su enfriamiento final.
- b) El número de alumnos que hay en el patio del colegio durante un día cualquiera de clase.
- c) La cantidad de espectadores en un campo de fútbol, desde una hora antes del inicio del partido hasta una hora después del final.



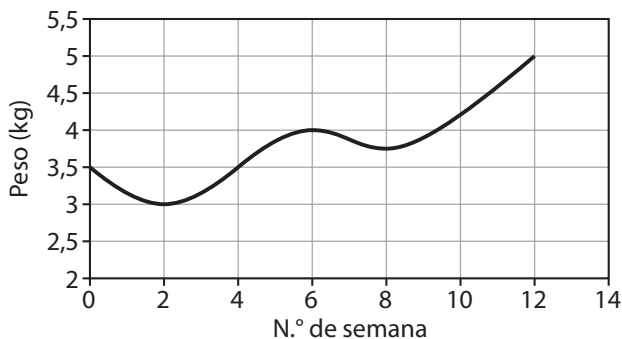
**9**  El perfil de un paseo en bicicleta de 27 kilómetros viene dado por la siguiente gráfica:



**Interpreta la gráfica del trazado del perfil.**

El paseo empieza a una altitud de 50 metros y acaba a una altitud de 150 metros. Empieza subiendo hasta aproximadamente el minuto 4, en el que desciende levemente hasta el minuto 7,5, donde empieza a escalar el primer puerto serio de una altura de 300 metros, lo que consigue en el minuto 15 (aprox.). Baja hasta los 50 metros en el minuto 18 y vuelve a subir un segundo puerto que tiene una altura de 500 metros, lo que consigue en el minuto 21, y desde aquí baja hasta los 150 metros, coincidiendo con el minuto 27.

**10**  Interpreta la gráfica del peso de un bebé utilizando el vocabulario adecuado.



Función continua; dominio  $[0, 12]$ , recorrido  $[3, 5]$ ; decreciente en los intervalos  $0$  a  $2$  y  $6$  a  $8$ ; creciente en los intervalos  $2$  a  $6$  y  $8$  a  $10$ ; extremos en los puntos  $(2, 3)$ ,  $(6, 4)$ ,  $(8, 3,75)$  y  $(12, 5)$ .

## GRÁFICA ASOCIADA A UNA TABLA DE VALORES

**11**  Utiliza una tabla para indicar el tiempo que dedicas cada día a ver la televisión y representa la gráfica correspondiente.

Respuesta abierta.

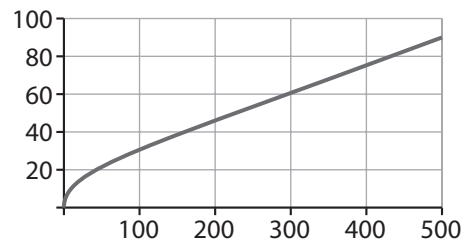
**12**  Utiliza una tabla para indicar el tiempo que dedicas cada día a estudiar y representa la gráfica correspondiente.

Respuesta abierta.

**13**  Los datos de la tabla corresponden a un paseo en globo. Las variables son la altura  $x$  (m) y la distancia que se divide desde el globo y (km). Construye la gráfica. ¿Tiene sentido unir los puntos?

$x$	$y$
4	6
10	12
20	18
30	22
50	28
100	38
500	90

Sí tiene sentido unir los puntos.



**14**  Construye las gráficas que corresponden a cada una de las siguientes tablas. Decide si debes unir los puntos o no.

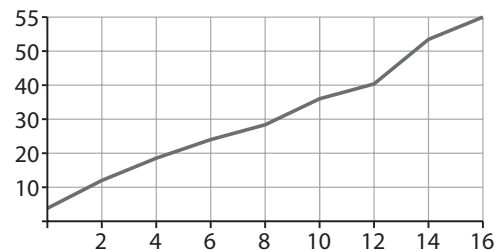
a) Peso de Alberto desde que nació hasta los 16 años:

Edad	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Peso (kg)	3,5	11	17	22	26	33	37	49	55

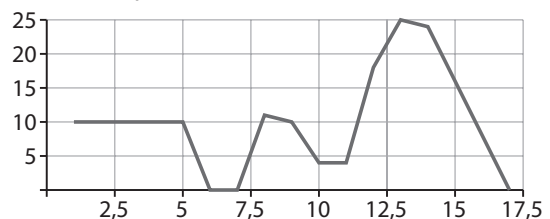
b) Velocidad de Julia en la bici durante un paseo:

Tiempo (min)	1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	17
Velocidad (km/h)	10	10	0	0	11	10	4	4	18	25	24	0

a) Sí se unen los puntos.



b) Sí se unen los puntos.



**15**  ¿Qué tabla le corresponde a la gráfica?

**Tabla 1**

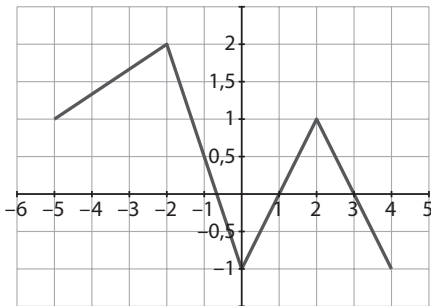
x	-5	2	1	1	4
y	1	-2	-1	2	-1

**Tabla 2**

x	1	2	-1	2	-1
y	-5	-2	0	1	4

**Tabla 3**

x	-5	-2	0	2	4
y	1	2	-1	1	-1



La tabla 3.

**16**  Asocia a cada tabla su gráfica.

**Tabla 1**

x	y
-5	-5
-4	-3
-3	-2
-2	-4
-1	-5

**Tabla 2**

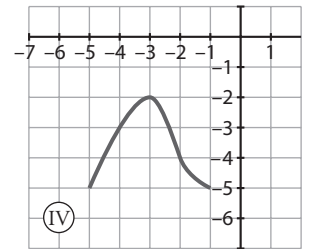
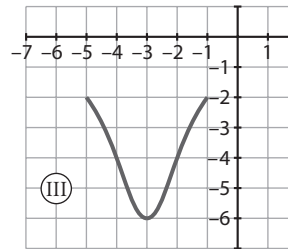
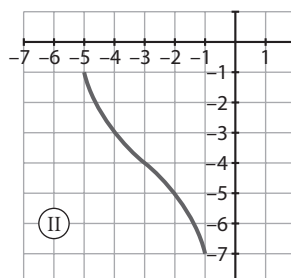
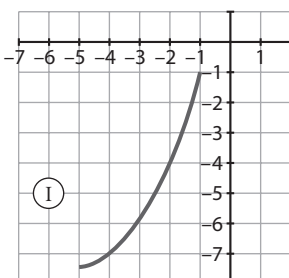
x	y
-5	-2
-4	-4
-3	-6
-2	-4
-1	-2

**Tabla 3**

x	y
-5	-7,5
-4	-7
-3	-6
-2	-4
-1	-1

**Tabla 4**

x	y
-5	-1
-4	-3
-3	-4
-2	-5
-1	-7



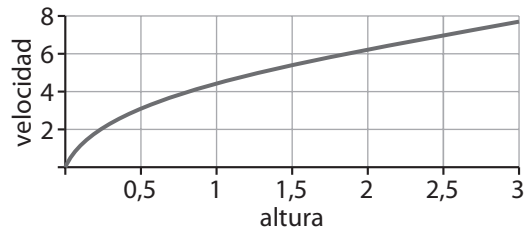
Gráfica 1, tabla 3; Gráfica 2, tabla 4; Gráfica 3, tabla 2; Gráfica 4, tabla 1.

**17**  La velocidad con que llega al suelo un cuerpo que cae libremente desde una altura determinada viene dada por la tabla:

Altura en metros (h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Velocidad en m/s (v)	0	3,1	4,2	5,4	6,3	7	7,7

Representa la gráfica correspondiente a los valores de la tabla. ¿Tiene sentido unir los puntos obtenidos?

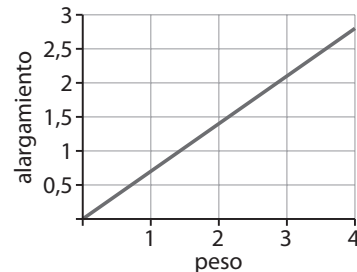
Sí tiene sentido unir los puntos.



**18**  De un muelle se cuelgan pesos que dan lugar a los alargamientos indicados en la tabla:

Peso en kilogramos	0,5	1	2	3	4
Alargamiento en cm	0,35	0,7	1,4	2,1	2,8

Representa en tu cuaderno la gráfica correspondiente a los valores de la tabla.



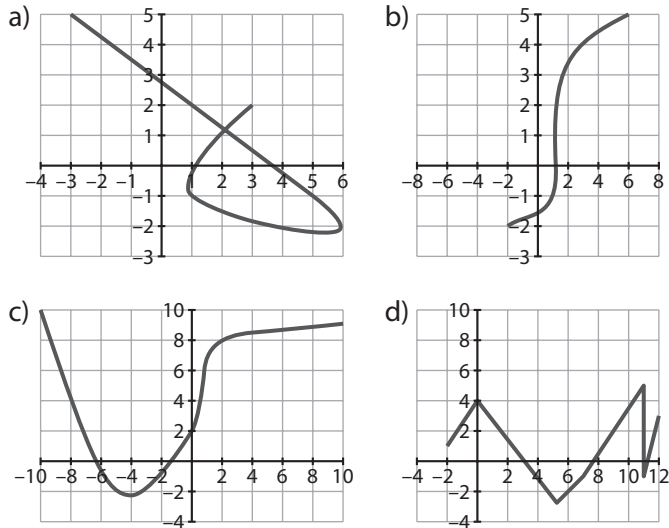
**19**  Utiliza la gráfica del ejercicio anterior para determinar el alargamiento que experimenta el muelle al colgar de él un peso de 1,75 kilogramos. ¿Se puede deducir el alargamiento que tendrá el muelle si se cuelga de él un peso de 5,5 kilogramos?

Alargamiento: 1,225 cm.

Se puede deducir el alargamiento; la función es  $y = 0,7x$ , luego será un alargamiento de 3,85 cm.

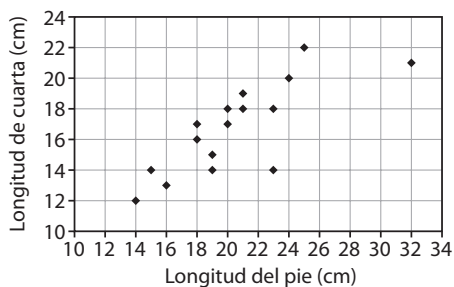
## CONCEPTO DE FUNCIÓN. CARACTERÍSTICAS

**20**  ¿Qué gráficas representan una función y cuáles no? Explica por qué.



Representan una función la c) y la d). Las otras no representan una función, porque hay valores de  $x$  que tienen dos imágenes.

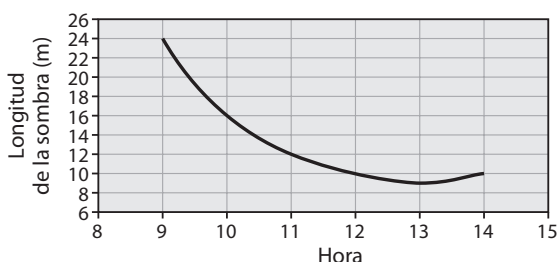
**21**  Construye la tabla que corresponde a la gráfica e indica si representa una función.



No representa una función porque hay puntos distintos con la misma abscisa.

$x$	14	15	16	18	18	19	19	20	20	21	21	23	23	24	25	32
$y$	12	14	13	16	17	14	15	17	18	18	19	14	18	20	22	21

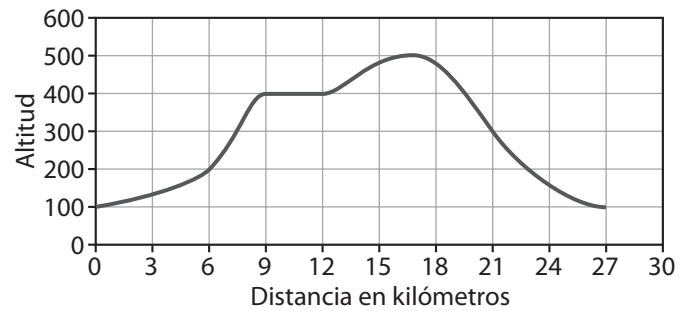
**22**  Construye la tabla que corresponde a la gráfica de la sombra de una farola e indica si representa una función.



Sí representa una función. Una tabla podría ser:

$x$	9	10	11	12	13	14
$y$	24	16	12	10	9	10

**23**  Estudia las características de la función cuya gráfica es:

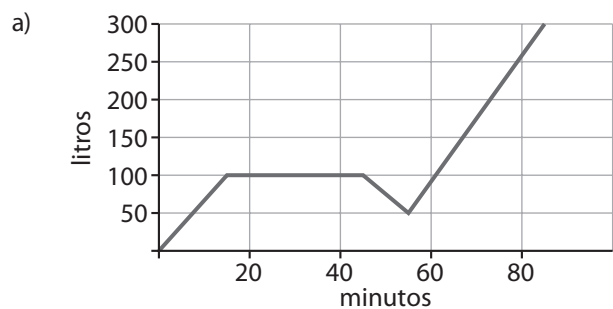


Función continua; dominio  $[0, 27]$ , recorrido  $[100, 500]$ ; creciente en los intervalos  $[0, 9]$ ,  $[12, 16]$ ; decreciente en el intervalo  $[16, 27]$ ; constante en  $[9, 12]$ ; extremos en  $(0, 100)$ ,  $(16, 500)$  y  $(27, 100)$ .

**24**  Un depósito de agua de 300 litros de capacidad está vacío. Se abre un grifo durante 15 minutos y se llena hasta la tercera parte de su capacidad. Se cierra el grifo durante media hora. Durante 10 minutos se extraen del depósito 50 litros de agua para el riego, posteriormente se vuelve a abrir el grifo durante 30 minutos hasta llenar completamente el depósito.

a) Dibuja en tu cuaderno una gráfica para expresar la situación descrita.

b) Estudia las características de la gráfica de la función.

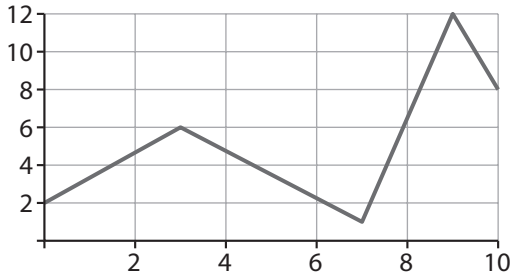


b) Función continua; dominio  $[0, 85]$ , recorrido  $[0, 300]$ ; creciente en el intervalo de 0 a 15 minutos y en el intervalo de 55 a 85 minutos; constante en el intervalo de 15 a 45 minutos; decreciente en el intervalo de 45 a 55 minutos; extremos en los minutos 0, 55 y 85.

**25**  Dibuja la gráfica de una función con las siguientes características:

- El dominio es el intervalo de 0 a 10.
- El recorrido es el intervalo de 0 a 12.
- La función es creciente en los intervalos de 0 a 3 y de 7 a 9.

- d) La función es decreciente en los intervalos de 3 a 7 y de 9 a 10.
- e) Los extremos de la función son los puntos de coordenadas (3, 6), (7, 1) y (9, 12).
- f) La imagen de 0 es 2 y la imagen de 10 es 8.

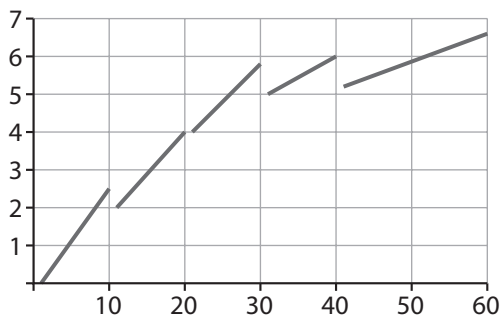


**26** ■■■ En un laboratorio fotográfico los precios de las reproducciones fotográficas están en función del número de reproducciones que se hagan con arreglo a la siguiente tarifa:

Número de reproducciones	Precio
De 1 a 10	0,25 €/unidad
De 11 a 20	0,20 €/unidad
De 21 a 30	0,19 €/unidad
De 31 a 40	0,15 €/unidad
Más de 40	0,12 €/unidad

Representa la gráfica de la función que corresponde a la tabla anterior y, a partir de ella, completa la siguiente tabla de valores en tu cuaderno:

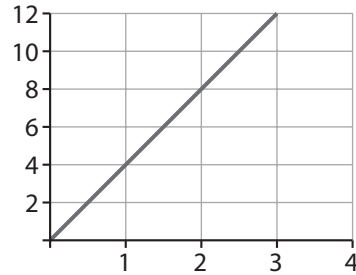
Número de reproducciones	12	24	32	45
Precio	2,4	4,56	4,8	5,4



## FUNCIONES DADAS MEDIANTE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

**27** ■■■ Determina la función que relaciona el perímetro de un cuadrado con la longitud de su lado. Representa la gráfica de la función obtenida.

$y = 4x$ , donde  $x$  es lo que mide el lado.

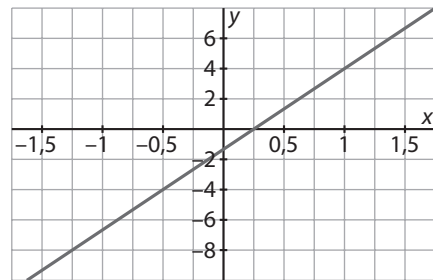


**28** ■■ Expresa la función correspondiente a cada una de las siguientes situaciones:

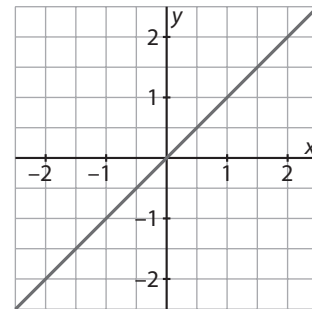
- a) El doble de cada número.
- b) El siguiente de cada número natural.
- c) El doble de cada número más cuatro.

a)  $y = 2x$                       b)  $y = x + 1$                       c)  $y = 2x + 4$

**29** ■ Representa la gráfica de la función  $y = 5x - 1$ .



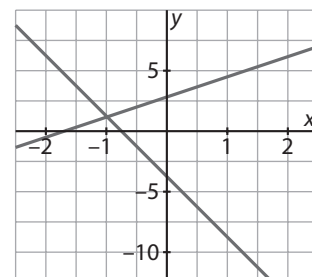
**30** ■ Representa la gráfica de la función  $y = x$ .



**31** ■ Dadas las funciones  $f(x) = 2x + 3$ ,  $g(x) = -5x - 4$ :

- a) Representa sus gráficas.
- b) Indica cuál es la pendiente de cada una de ellas.

a)



b) Pendiente = 2; pendiente = -5.

**32**  Identifica cuáles de los puntos  $A(5, 3)$ ,  $B(4, 2)$ ,  $C(1, 1)$ ,  $D(-1, 1)$ ,  $E(-1, 0)$  y  $F(-2, \frac{1}{2})$  pertenecen a la gráfica de la función  $y = \frac{x+1}{2}$ .

$A, C$  y  $E$ .

**33**  Encuentra la función asociada a cada tabla:

a) 

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

b) 

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	-0,5	0	0,5	1

c) 

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	0	3	6	9

d) 

x	-2	-1	0	1	2
y	1	1,5	2	2,5	3

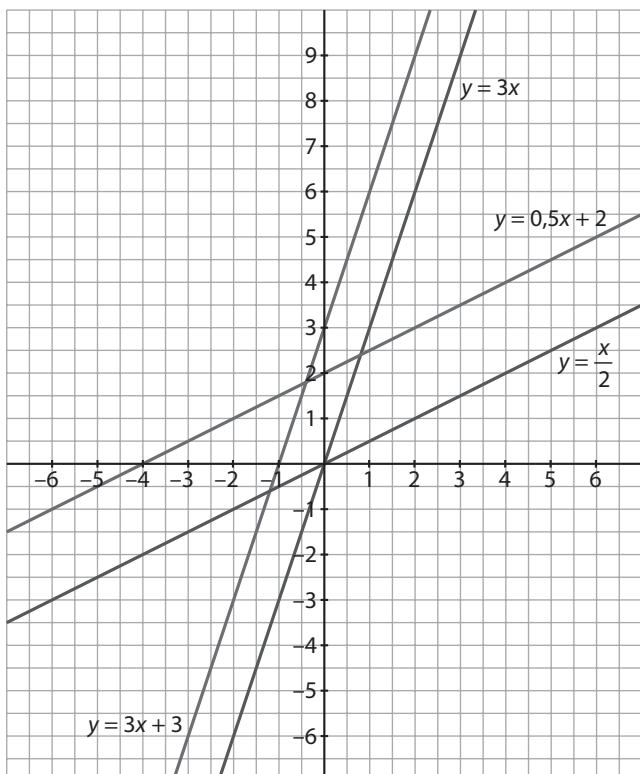
a)  $y = 3x$

b)  $y = \frac{x}{2}$

c)  $y = 3x + 3$

d)  $y = 0,5x + 2$

**34**  Representa en los mismos ejes las funciones de los apartados a) y c) del ejercicio anterior. Haz lo mismo con las funciones de los apartados b) y d). ¿Qué observas?

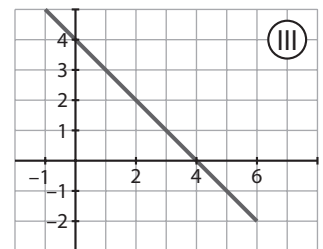
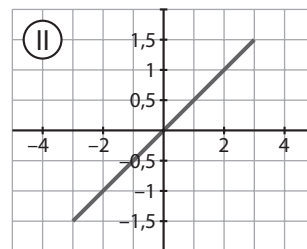
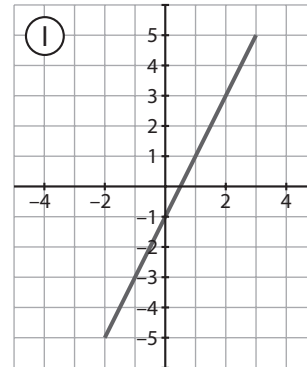


**35**  Relaciona cada función con su gráfica:

a)  $y = 0,5x$

b)  $y = -x + 4$

c)  $y = 2x - 1$



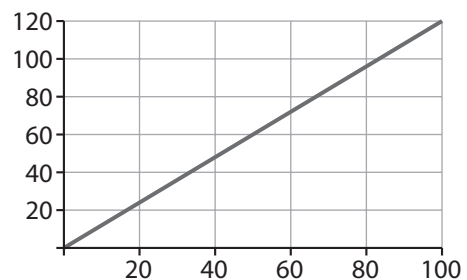
a) II

b) III

c) I

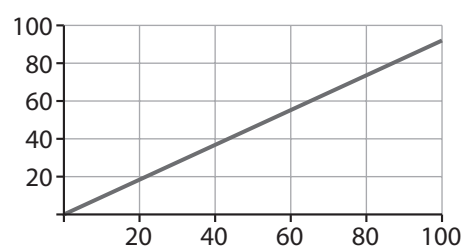
**36**  Si 1 € equivale a 1,20 dólares, ¿cuál es la función que permite la conversión de euros en dólares? Representa la gráfica de esa función.

$y = 1,2x$



**37**  Si en una tienda han rebajado un 10% todos sus artículos, ¿qué función permite saber el precio final de cada artículo? Representa la gráfica de esa función.

$y = 0,9x$



## EJERCICIOS

**1** Un ciclista da un paseo. Si en el trayecto de ida tarda 1 hora 23 min 45 s y en el trayecto de vuelta tarda 1 h 45 min 28 s, ¿cuánto tiempo ha durado el paseo?

3 h 49 min 13 s

**2** Multiplica 15 h 43 min 28 s:

a) Por 5.                      b) Por 3.                      c) Por 2.

a) 78 h 37 min 20 s

b) 47 h 10 min 24 s

c) 31 h 26 min 56 s

**3** La proyección de una película comenzó a las 20 h 50 min y terminó a las 22 h 47 min. ¿Qué tiempo duró la proyección de la película?

22 h 47 min - 20 h 50 min = 1 h 57 min

**4** Divide 56 h 23 min 42 s:

a) Entre 2.                      b) Entre 5.                      c) Entre 12.

a) 28 h 11 min 51 s

b) 11 h 16 min 44,4 s

c) 4 h 41 min 58,5 s

**5** ¿Cuál es la medida del ángulo correspondiente a dos, tres y cuatro cuadrantes?

180°; 270°; 360°

**6** Utiliza la forma decimal para expresar:

a) 23° 5' 52" en grados.

b) 45' 36" en minutos.

c) 28° 15' en grados.

d) 145° 11' 35" en minutos.

e) 12° 12' 30" en segundos.

a) 23,097...°

b) 45,6'

c) 28,25°

d) 8711,583...'

e) 43950"

**7** Utiliza la forma compleja para expresar:

a) 45,36°

b) 60,82°

c) 102,65°

a) 45° 21' 36"

b) 60° 49' 12"

c) 102° 39'

**8** Dados los ángulos:  $A = 55^\circ 24' 36''$ ,  $B = 123^\circ 45' 30''$  y  $C = 80^\circ 10' 15''$ , calcula:

a)  $A + B + C$

b)  $B : 4$

c)  $3A - B$

d)  $3C : 5$

a) 259° 20' 21"

b) 30° 56' 22,5"

c) 42° 28' 18"

d) 48° 6' 9"

**9** Encuentra el ángulo complementario de:

a) 34°

b) 60°

c) 45° 25' 56"

d) 74° 59' 59"

a) 56°

b) 30°

c) 44° 34' 4"

d) 15° 0' 1"

**10** Encuentra el ángulo suplementario de:

a) 77°

b) 160°

c) 95° 15' 50"

d) 132° 45'

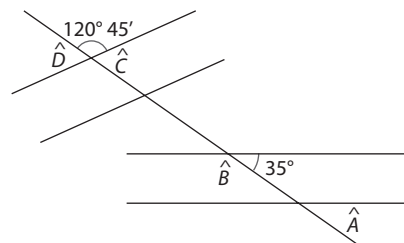
a) 103°

b) 20°

c) 84° 44' 10"

d) 47° 15'

**11** Calcula los ángulos señalados en el dibujo:



$D = C = 59^\circ 15'$ ;  $B = 145^\circ$ ;  $A = 35^\circ$

**12** En un polígono la medida de un ángulo interior es 38° 12'. ¿Cuánto mide el ángulo exterior correspondiente al mismo vértice?

$180^\circ - 38^\circ 12' = 141^\circ 48'$

**13** Dos ángulos de un triángulo miden 52° 15' 12" y 95° 12' 48". Calcula la medida del tercer ángulo.

$180^\circ - (52^\circ 15' 12'' + 95^\circ 12' 48'') = 32^\circ 32'$

**14** Obtén de forma razonada la suma de los ángulos interiores de un octógono.

$6 \cdot 180 = 1080^\circ$

**15** Si el ángulo central de un polígono regular mide 36°, ¿de qué polígono regular se trata? ¿Cuánto miden los ángulos interiores y exteriores?

$360 : 36 = 10$ , de un decágono. Ángulo interior = 144°; ángulo exterior = 36°.

## EJERCICIOS PROPUESTOS

## LA MEDIDA DEL TIEMPO

**1**  ¿Cuántos segundos son 0,67 horas?

$0,67 \cdot 3600 = 2412$  s.

**2**   ¿Cuántas horas, minutos y segundos son 4,55 horas?

Pasamos las 0,55 horas a minutos:

$$0,55 \cdot 60 = 33 \text{ min.}$$

$$4,55 \text{ h} = 4 \text{ h } 33 \text{ min.}$$

**3**   ¿Cuántas horas, minutos y segundos son 4 552 segundos?

$$\begin{array}{r|l} 4552 & 60 \\ \hline 352 & 75 & 60 \\ \hline 52'' & 15' & 1^\circ \end{array}$$

$$1 \text{ h } 15' 52''$$

**4**   Utilizando la forma decimal expresa:

a) En horas: 26 h 35 min 16 s.

b) En segundos: 1 h 11 min.

c) En minutos: 3 h 36 min 16 s.

d) En horas: 2 h 30 min 36 s.

$$\text{a) } 26 + 35 : 60 + 16 : 3600 = 26 + 0,58 + 0,0044 = 26,5844 \text{ h}$$

$$\text{b) } 1 \cdot 3600 + 11 \cdot 60 = 4260''$$

$$\text{c) } 3 \cdot 60 + 36 + 16 : 60 = 180 + 36 + 0,27 = 216,27'$$

$$\text{d) } 2 + 30 : 60 + 26 : 3600 = 2 + 0,5 + 0,007 = 2,507 \text{ h}$$

**5**   Calcula cuántos minutos de clase hay en una semana.

30 periodos lectivos a 50 minutos cada uno, son 1 500 minutos.

**6**   Si 1,26 horas es el tiempo empleado por un ciclista en una carrera, ¿en cuántos minutos y segundos ha realizado la carrera?

$$1,26 \cdot 60 = 75,6 \text{ minutos.}$$

$$75,6 \cdot 60 = 4536 \text{ segundos.}$$

**7**   Expresa en forma compleja:

a) 12,458 h

b) 21,19 h

c) 2,85 h

d) 3,56 h

$$\text{a) } 0,458 \cdot 60 = 27,48; 0,48 \cdot 60 = 28,8; 12 \text{ h } 27' 28,8''$$

$$\text{b) } 0,19 \cdot 60 = 11,4; 0,4 \cdot 60 = 24; 21 \text{ h } 11' 24''$$

$$\text{c) } 0,85 \cdot 60 = 51; 2 \text{ h } 51'$$

$$\text{d) } 0,56 \cdot 60 = 33,6; 0,6 \cdot 60 = 36; 3 \text{ h } 33' 36''$$

**8**   El tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor de su eje es 23,93 horas. Expresa ese tiempo en forma compleja.

$$23 \text{ h } 55 \text{ min } 48 \text{ s}$$

**9**   ¿Cuántas horas hay desde el 1 de enero hasta el 12 de febrero?

$$31 + 12 = 42 \text{ días; } 1 \text{ día} = 24 \text{ h; } 42 \cdot 24 = 1008 \text{ h}$$

**10**   Calcula:

a) Cuántas horas hay en un año.

b) Cuántos minutos hay en una semana.

c) Los días que hay en un milenio.

d) Los lustros que hay en un siglo.

$$\text{a) } 365 \cdot 24 = 8760 \text{ h}$$

$$\text{b) } 7 \cdot 24 \cdot 60 = 10080'$$

$$\text{c) } 1000 \cdot 365 = 365000 \text{ días}$$

$$\text{d) } 100 : 5 = 20 \text{ lustros}$$

## OPERACIONES CON MEDIDAS DE TIEMPO

**11**   Calcula:

a) 3 h 25 min 12 s + 4 h 46 min 17 s

b) 23 min 12 s + 4 h 15 min 46 s + 7 h 49 min

c) 12 h 15 min + 2,45 h

d) 3 h 42 min + 4,52 h

$$\text{a) } 7 \text{ h } 71 \text{ min } 29 \text{ s} = 8 \text{ h } 11 \text{ min } 29 \text{ s}$$

$$\text{b) } 11 \text{ h } 87 \text{ min } 58 \text{ s} = 12 \text{ h } 27 \text{ min } 58 \text{ s}$$

$$\text{c) } 14 \text{ h } 42 \text{ min}$$

$$\text{d) } 7 \text{ h } 73 \text{ min } 12 \text{ s} = 8 \text{ h } 13 \text{ min } 12 \text{ s}$$

**12**   Calcula:

a) 4 h 15 min 3 s – 3 h 23 min 46 s

b) 12 h 8 min 2 s – 6 h 14 min 16 s

c) 12 h 15 min – 3,75 h

d) 6,35 h – 2 h 15 min 21 s

$$\text{a) } 4 \text{ h } 15 \text{ min } 3 \text{ s} = 3 \text{ h } 74 \text{ min } 63 \text{ s}$$

$$3 \text{ h } 74 \text{ min } 63 \text{ s} - 3 \text{ h } 23 \text{ min } 46 \text{ s} = 51 \text{ min } 17 \text{ s}$$

$$\text{b) } 12 \text{ h } 8 \text{ min } 2 \text{ s} = 11 \text{ h } 67 \text{ min } 62 \text{ s}$$

$$11 \text{ h } 67 \text{ min } 62 \text{ s} - 6 \text{ h } 14 \text{ min } 16 \text{ s} = 5 \text{ h } 53 \text{ min } 46 \text{ s}$$

$$\text{c) } 3,75 \text{ h} = 3 \text{ h } 45 \text{ min; } 12 \text{ h } 15 \text{ min} = 11 \text{ h } 75 \text{ min}$$

$$11 \text{ h } 75 \text{ min} - 3 \text{ h } 45 \text{ min} = 8 \text{ h } 30 \text{ min}$$

$$\text{d) } 6,35 \text{ h} = 6 \text{ h } 21 \text{ min} = 6 \text{ h } 20 \text{ min } 60 \text{ s}$$

$$6 \text{ h } 20 \text{ min } 60 \text{ s} - 2 \text{ h } 15 \text{ min } 21 \text{ s} = 4 \text{ h } 5 \text{ min } 39 \text{ s}$$



**13**  **Calcula:**

- a)  $(4 \text{ h } 15 \text{ min } 2 \text{ s}) \times 6$   
 b)  $(18 \text{ h } 20 \text{ min } 22 \text{ s}) \times 3$   
 c)  $(22 \text{ h } 15 \text{ min } 16 \text{ s}) \times 4$   
 d)  $(22 \text{ min } 14 \text{ s}) \times 8$
- a)  $24 \text{ h } 90 \text{ min } 12 \text{ s} = 25 \text{ h } 30 \text{ min } 12 \text{ s}$   
 b)  $54 \text{ h } 60 \text{ min } 66 \text{ s} = 55 \text{ h } 1 \text{ min } 6 \text{ s}$   
 c)  $88 \text{ h } 60 \text{ min } 64 \text{ s} = 89 \text{ h } 1 \text{ min } 4 \text{ s}$   
 d)  $176 \text{ min } 112 \text{ s} = 2 \text{ h } 57 \text{ min } 52 \text{ s}$

**14**  **Calcula:**

- a)  $(14 \text{ h } 25 \text{ min } 12 \text{ s}) : 5$       b)  $(18 \text{ h } 20 \text{ min } 16 \text{ s}) : 4$   
 c)  $(13 \text{ h } 20 \text{ min } 12 \text{ s}) : 7$       d)  $(15 \text{ h } 10 \text{ min } 14 \text{ s}) : 6$

a) 
$$\begin{array}{r} 14 \text{ h} \quad 25 \text{ min} \quad 12 \text{ s} \\ 4 \cdot 60 = 240 \text{ min} \\ \hline 265 \text{ min} \\ 15 \\ \hline 0 \quad 20 \\ \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 2 \text{ h } 53 \text{ min } 2,4 \text{ s} \end{array}$$

b) 
$$\begin{array}{r} 18 \text{ h} \quad 20 \text{ min} \quad 16 \text{ s} \\ 2 \cdot 60 = 120 \text{ min} \\ \hline 140 \text{ min} \\ 20 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 4 \text{ h } 35 \text{ min } 4 \text{ s} \end{array}$$

c) 
$$\begin{array}{r} 13 \text{ h} \quad 20 \text{ min} \quad 12 \text{ s} \\ 6 \cdot 60 = 360 \text{ min} \\ \hline 380 \text{ min} \\ 30 \\ 2 \cdot 60 = 120 \text{ s} \\ \hline 132 \text{ s} \\ 62 \\ \hline 60 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 1 \text{ h } 54 \text{ min } 18,8 \text{ s} \end{array}$$

d) 
$$\begin{array}{r} 15 \text{ h} \quad 10 \text{ min} \quad 14 \text{ s} \\ 3 \cdot 60 = 180 \text{ min} \\ \hline 190 \text{ min} \\ 10 \\ 4 \cdot 60 = 240 \text{ s} \\ \hline 254 \text{ s} \\ 14 \\ \hline 20 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 2 \text{ h } 31 \text{ min } 42,3 \text{ s} \end{array}$$

**15**  **Calcula y expresa en forma compleja:**

- a)  $7,52 \text{ h} + 2,56 \text{ h}$   
 b)  $17,25 \text{ h} - 4,66 \text{ h}$   
 c)  $13,26 \text{ h} \times 4$   
 d)  $53,04 \text{ h} : 5$
- a)  $10,08 \text{ h} = 10 \text{ h } 4 \text{ min } 48 \text{ s}$   
 b)  $12,59 \text{ h} = 12 \text{ h } 35 \text{ min } 24 \text{ s}$   
 c)  $53,04 \text{ h} = 53 \text{ h } 2 \text{ min } 24 \text{ s}$   
 d)  $10,608 \text{ h} = 10 \text{ h } 36 \text{ min } 28,8 \text{ s}$

**16**  **Multiplica el tiempo de 5 h 35 min 12 s:**

- a) Por 3.      b) Por 5.  
 c) Por 6.      d) Por 10.
- a)  $15 \text{ h } 105 \text{ min } 36 \text{ s} = 16 \text{ h } 45 \text{ min } 36 \text{ s}$   
 b)  $25 \text{ h } 175 \text{ min } 60 \text{ s} = 27 \text{ h } 56 \text{ min}$   
 c)  $30 \text{ h } 210 \text{ min } 72 \text{ s} = 33 \text{ h } 31 \text{ min } 12 \text{ s}$   
 d)  $50 \text{ h } 350 \text{ min } 120 \text{ s} = 55 \text{ h } 52 \text{ min}$

**17**  **Divide el tiempo de 22 h 46 min 16 s:**

- a) Entre 2.      b) Entre 4.  
 c) Entre 5.      d) Entre 10.
- a)  $11 \text{ h } 23 \text{ min } 8 \text{ s}$   
 b)  $5 \text{ h } 41 \text{ min } 34 \text{ s}$   
 c)  $4 \text{ h } 33 \text{ min } 15,2 \text{ s}$   
 d)  $2 \text{ h } 16 \text{ min } 37,6 \text{ s}$

**18**  **Si empleas para estudiar 2 h 30 min cada día, ¿cuántas horas al mes dedicas al estudio?**

Si el mes tiene 30 días,  $30 \cdot 2 \text{ h } 30 \text{ min} = 75 \text{ h}$

**19**  **Si duermes 8 horas diarias, ¿cuántos minutos dedicas al sueño en una semana?**

$8 \cdot 60 \cdot 7 = 3360 \text{ min}$

**20**  **Si practicas la natación cuatro días a la semana en sesiones de 45 minutos, ¿cuántas horas habrás dedicado a la natación en 15 semanas?**

$15 \cdot 4 \cdot (45 : 60) = 45 \text{ h}$

**21**  **Un caminante recorre la distancia entre dos ciudades en dos etapas. En la primera etapa emplea 3 h 45 min, y en la segunda etapa 2 h 35 min. ¿Cuánto tiempo ha tardado en recorrer la distancia entre las dos ciudades?**

$3 \text{ h } 45 \text{ min} + 2 \text{ h } 35 \text{ min} = 5 \text{ h } 80 \text{ min} = 6 \text{ h } 20 \text{ min}$

**22**  Un día en Marte tiene una duración de 24,62 horas y en la Tierra 23,93 horas exactamente. Expresa en forma compleja la diferencia que hay entre la duración de un día en Marte y un día en la Tierra.

$$24,62 \text{ h} - 23,93 \text{ h} = 0,69 \text{ h} = 41 \text{ min } 24 \text{ s}$$

**23**  Un grifo defectuoso pierde tres gotas de agua por minuto. Si cada gota de agua son 2 mL, ¿cuántos litros de agua pierde al cabo de un día?

$$3 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 0,002 = 8,64 \text{ L}$$

**24**  Si Ana se duerme cada día a las 22 h 30 min y se despierta a las 7 h 15 min, de lunes a viernes, ¿cuánto tiempo dormirá durante cuatro semanas de lunes a viernes?

$$8 \text{ h } 45 \text{ min} \cdot 5 \cdot 4 = 175 \text{ h}$$

**25**  La duración de un día en Júpiter es de 9,84 horas. Aitor duerme 8 horas diarias. Si viviese en Júpiter y durmiese la misma proporción de tiempo que en la Tierra, expresa en forma compleja el tiempo que dormiría.

$$\frac{9,84}{24} = \frac{x}{8}; x = 3,28 \text{ h} = 3 \text{ h } 16 \text{ min } 48 \text{ s}$$

**26**  Un tren de alta velocidad recorre 190 km en una hora. Calcula qué distancia recorre en 2 h 55 min.

$$\frac{190}{60} = \frac{x}{175}; x = 554,17 \text{ km}$$

**27**  Si Óscar tiene en reposo 18 pulsaciones en 15 segundos, ¿cuántas pulsaciones tendrá en 1,25 minutos?

$$\frac{18}{15} = \frac{x}{75}; x = 90 \text{ pulsaciones}$$

## MEDIDAS DE ÁNGULOS

**28**  Utiliza la forma decimal para expresar:

- a)  $123^\circ 15' 50''$  en grados.
- b)  $5' 26''$  en minutos.
- c)  $158^\circ 55'$  en grados.
- d)  $10^\circ 20' 52''$  en minutos.

a)

$123^\circ 15' 52''$		Transformación en grados	Grados
$123^\circ$			$123^\circ$
	$15'$	$15 : 60 = 0,25^\circ$	$0,25^\circ$
	$52''$	$52 : 3600 = 0,014$	$0,014^\circ$
			$123,264^\circ$

b)

$5' 26''$		Transformación en minutos	Minutos
$5'$			$5'$
	$26''$	$26 : 60 = 0,43'$	$0,43'$
			$5,43'$

c)

$158^\circ 55'$		Transformación en grados	Grados
$158^\circ$			$158^\circ$
	$55'$	$55 : 60 = 0,92^\circ$	$0,92^\circ$
			$158,92^\circ$

d)

$10^\circ 20' 52''$		Transformación en minutos	Minutos
$10^\circ$		$10 \cdot 60 = 600'$	$600'$
	$20'$	$20'$	$20'$
	$52''$	$52 : 60 = 0,87'$	$0,87'$
			$620,87'$

**29**  Utiliza la forma compleja para expresar:

- a)  $245,86^\circ$
- b)  $16,02^\circ$
- c)  $152,35^\circ$
- d)  $136,26^\circ$

a)  $245,86^\circ = 245^\circ + 0,86 \cdot 60 = 245^\circ + 51,60' = 245^\circ 51' + 0,60 \cdot 60 = 245^\circ 51' 36''$

b)  $16,02^\circ = 16^\circ + 0,02 \cdot 60 = 16^\circ + 1,2' = 16^\circ 1' + 0,2 \cdot 60 = 16^\circ 1' 12''$

c)  $152,35^\circ = 152^\circ + 0,35 \cdot 60 = 152^\circ 21'$

d)  $136,26^\circ = 136^\circ + 0,26 \cdot 60 = 136^\circ 15,60' = 136^\circ 15' + 0,6 \cdot 60 = 136^\circ 15' 36''$

**30**  Dados los ángulos  $A = 225^\circ 4' 30''$ ,  $B = 30^\circ 15' 45''$  y  $C = 75^\circ 15' 25''$ , calcula:

- a)  $A - B + C$
- b)  $2A - 3B$
- c)  $B : 3$
- d)  $2C : 5$
- a)  $270^\circ 4' 10''$
- b)  $359^\circ 21' 45''$
- c)  $10^\circ 5' 15''$
- d)  $30^\circ 6' 10''$

**31**  Dados los ángulos  $A = 25^\circ 12' 32''$ ,  $B = 42^\circ 18' 54''$  y  $C = 15^\circ 20' 57''$ , calcula:

- a)  $A + B + C$
- b)  $A + B - C$
- c)  $4 \cdot A$
- d)  $B : 9$
- a)  $82^\circ 52' 23''$
- b)  $52^\circ 10' 29''$
- c)  $110^\circ 50' 8''$
- d)  $4^\circ 42' 6''$

**32** ■■■ La órbita del planeta Mercurio alrededor del Sol dura 87,97 días. Calcula la medida del ángulo que recorre Mercurio cada día en su movimiento de traslación alrededor del Sol y expresa el resultado en forma compleja.

$$\frac{87,97}{360} = \frac{1}{x}; x = 4,09^\circ = 4^\circ + 0,09 \cdot 60 = 4^\circ 5,4' =$$

$$= 4^\circ 5' + 0,4 \cdot 60 = 4^\circ 5' 24''$$

## ÁNGULOS EN EL PLANO. RELACIONES

**33** ■ ■ ■ Calcula la medida del ángulo complementario de los ángulos:

- a)  $23^\circ 15'$                       b)  $75^\circ 15' 30''$   
 c)  $75^\circ$                               d)  $50^\circ 12' 35''$

- a)  $89^\circ 60' - 23^\circ 15' = 66^\circ 45'$   
 b)  $89^\circ 59' 60'' - 75^\circ 15' 30'' = 14^\circ 44' 30''$   
 c)  $90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$   
 d)  $89^\circ 59' 60'' - 50^\circ 12' 35'' = 39^\circ 47' 25''$

**34** ■ ■ ■ Calcula la medida del ángulo suplementario de los ángulos:

- a)  $125^\circ 35' 50''$                       b)  $90^\circ 45' 55''$   
 c)  $150^\circ 30' 45''$                       d)  $20^\circ 30' 47''$

- a)  $179^\circ 59' 60'' - 125^\circ 35' 50'' = 54^\circ 24' 10''$   
 b)  $179^\circ 59' 60'' - 90^\circ 45' 55'' = 89^\circ 14' 5''$   
 c)  $179^\circ 59' 60'' - 150^\circ 30' 45'' = 29^\circ 29' 15''$   
 d)  $179^\circ 59' 60'' - 20^\circ 30' 47'' = 159^\circ 29' 13''$

**35** ■ ■ ■ La intersección de dos rectas determina ángulos opuestos. La suma de dos de los ángulos opuestos por el vértice es  $76^\circ 30'$ . Calcula la medida de los cuatro ángulos formados.

$$360^\circ - 76^\circ 30' = 283^\circ 30'$$

Hay dos ángulos de  $38^\circ 15'$  y dos ángulos de  $141^\circ 45'$ .

**36** ■ ■ ■ Completa en tu cuaderno la tabla:

Ángulo	$25^\circ 12' 6''$	$36^\circ 15' 24''$	$64^\circ 38' 12''$
Complementario	$89^\circ 59' 60'' - 25^\circ 12' 6'' = 64^\circ 47' 54''$	$89^\circ 59' 60'' - 36^\circ 15' 24'' = 53^\circ 44' 36''$	$89^\circ 59' 60'' - 64^\circ 38' 12'' = 25^\circ 21' 48''$
Suplementario	$179^\circ 59' 60'' - 25^\circ 12' 6'' = 154^\circ 47' 54''$	$179^\circ 59' 60'' - 36^\circ 15' 24'' = 143^\circ 44' 36''$	$179^\circ 59' 60'' - 64^\circ 38' 12'' = 115^\circ 21' 48''$

**37** ■ ■ ■ Dado un ángulo de medida  $48^\circ 12' 16''$ , determina:

- a) ¿Cuánto mide el ángulo formado por su bisectriz y la bisectriz de su ángulo complementario?  
 b) ¿Cuánto vale el ángulo formado por su bisectriz y la bisectriz de su ángulo suplementario?

a) Calculamos la bisectriz del ángulo.

$$48^\circ 12' 16'' : 2 = 24^\circ 6' 8''$$

Calculamos el ángulo complementario.

$$89^\circ 59' 60'' - 48^\circ 12' 16'' = 41^\circ 47' 44''$$

Calculamos la bisectriz del ángulo complementario.

$$41^\circ 47' 44'' : 2 = 20^\circ 53' 52''$$

El ángulo formado por las dos bisectrices es:

$$24^\circ 6' 8'' + 20^\circ 53' 52'' = 45^\circ$$

b) Calculamos el ángulo suplementario.

$$179^\circ 59' 60'' - 48^\circ 12' 16'' = 131^\circ 47' 44''$$

Calculamos la bisectriz del ángulo suplementario.

$$131^\circ 47' 44'' : 2 = 65^\circ 53' 52''$$

El ángulo formado por las dos bisectrices es:

$$24^\circ 6' 8'' + 65^\circ 53' 52'' = 90^\circ$$

## ÁNGULOS DE UN POLÍGONO

**38** ■ ■ ■ Elena va a construir una cometa con forma de romboide. Si quiere que uno de sus ángulos mida  $45^\circ 15'$ , ¿cuánto medirán los demás ángulos del romboide?

El otro mide lo mismo, es decir  $45^\circ 15'$ , y cada uno de los otros dos es:

$$\frac{360^\circ - 45^\circ 15' \cdot 2}{2} = 134^\circ 45'$$

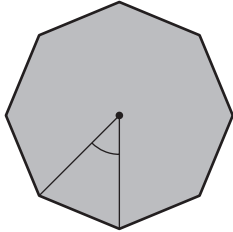
**39** ■ ■ ■ En un polígono la medida de un ángulo interior es  $35^\circ 30'$ . ¿Cuánto mide el ángulo exterior correspondiente al mismo vértice?

$$179^\circ 59' 60'' - 35^\circ 30' = 144^\circ 30'$$

**40** ■ ■ ■ Un triángulo tiene un ángulo de  $112^\circ 15' 12''$  y otro ángulo de  $15^\circ 12' 48''$ . Calcula la medida del tercer ángulo.

$$179^\circ 59' 60'' - 112^\circ 15' 12'' - 15^\circ 12' 48'' = 52^\circ 32''$$

**41**  En un octógono regular, ¿cuáles son las medidas del ángulo interior y del ángulo central?



El ángulo central es el cociente de  $360^\circ$  entre el número de lados de la figura:

$$360^\circ : 8 = 45^\circ$$

Para calcular el ángulo interior, tenemos en cuenta que la suma de los ángulos interiores de un polígono es:

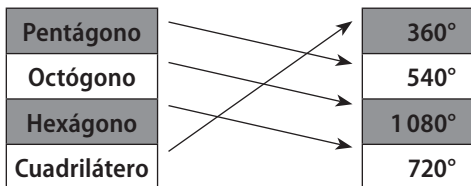
$$(n - 2) \cdot 180^\circ = (8 - 2) \cdot 180^\circ = 135^\circ$$

**42**  Obtén de forma razonada la suma de los ángulos interiores de un decágono.

La suma de los ángulos interiores de un polígono es:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = (10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$$

**43**  Asocia cada polígono con la suma de sus ángulos interiores:



**44**  En una torre de planta heptagonal regular, ¿cuál es la medida del ángulo interior?, ¿y la del ángulo central?

Calculamos la suma de los ángulos interiores:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = (7 - 2) \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

Por lo que el ángulo interior es:

$$900^\circ : 7 = 128,57^\circ$$

El ángulo central es el cociente de  $360^\circ$  entre el número de lados de la figura:

$$360^\circ : 7 = 51,43^\circ$$

**45**  Si el ángulo central de un polígono regular mide  $60^\circ$ , ¿de qué polígono regular se trata? ¿Cuánto miden los ángulos interiores y exteriores?

El ángulo central es:

$$360^\circ : 60^\circ = 6 \text{ lados, es decir, un hexágono.}$$

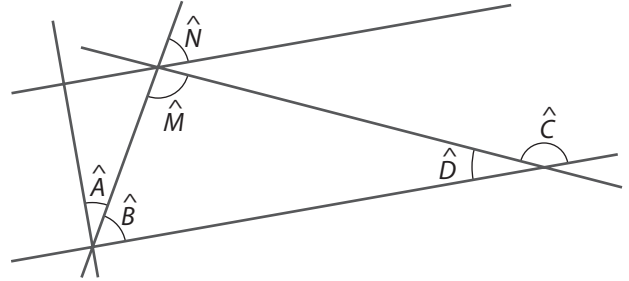
Calculamos la suma de los ángulos interiores:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = (6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

El ángulo interior es:  $720^\circ : 6 = 120^\circ$

El ángulo exterior es:  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

**46**  Calcula los ángulos indicados en la figura sabiendo que  $\hat{M} = 84^\circ 36'$  y  $\hat{N} = 60^\circ 20'$ .



$$\hat{B} = \hat{N} = 60^\circ 20'; \hat{A} = 90^\circ - 60^\circ 20' = 29^\circ 40'$$


$$\hat{M} = 90^\circ; \hat{D} = \hat{A} = 29^\circ 40'$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ - 29^\circ 40' = 140^\circ 20'$$

**47**  Un romboide tiene un ángulo de  $35^\circ 20'$ . Calcula la medida de todos sus ángulos.

Un romboide tiene ángulos iguales dos a dos, por lo que el otro ángulo es de  $35^\circ 20'$ . La medida de los otros dos ángulos es:

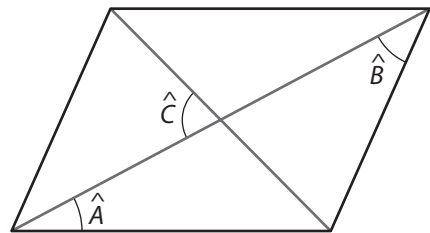
$$\frac{360^\circ - 2 \cdot (35^\circ 20')}{2} = 144^\circ 40'$$

**48**  En un cuadrilátero se conocen tres ángulos:  $\hat{A} = 28^\circ 15'$ ,  $\hat{B} = 85^\circ 19'$  y  $\hat{C} = 140^\circ$ . ¿Cuál es la medida del cuarto ángulo?

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es  $360^\circ$ . Para calcular el ángulo que falta:

$$360^\circ - 28^\circ 15' - 85^\circ 19' - 140^\circ = 106^\circ 26'$$

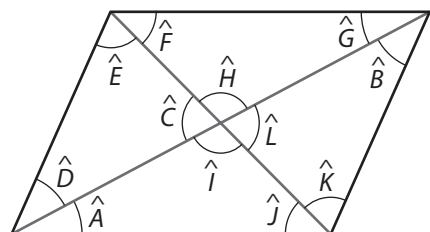
**49**  Calcula la medida de todos los ángulos del paralelogramo si  $\hat{A} = 28^\circ$ ,  $\hat{B} = 35^\circ$  y  $\hat{C} = 68^\circ$ .



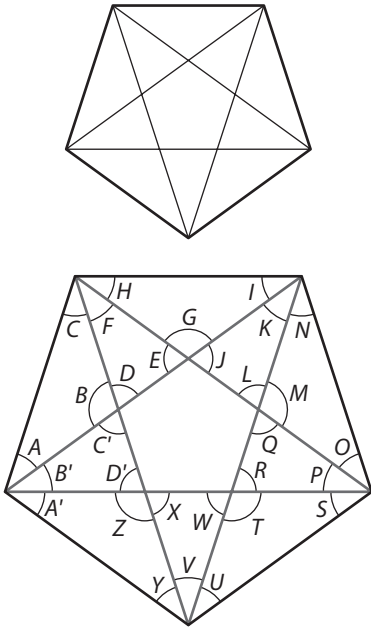
$$\hat{D} = \hat{B} = 35^\circ; \hat{G} = \hat{A} = 28^\circ; \hat{L} = \hat{C} = 68^\circ$$

$$\hat{E} = 180^\circ - \hat{D} - \hat{C} = 77^\circ; \hat{K} = \hat{E} = 77^\circ; \hat{H} = 180^\circ - \hat{C} = 112^\circ;$$

$$\hat{I} = \hat{H} = 112^\circ; \hat{J} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{I} = 40^\circ; \hat{F} = \hat{J} = 40^\circ$$



**50** ■■■ En un pentágono regular se trazan todas las diagonales y se obtiene un pentágono estrellado.



Sabiendo que el ángulo interior del pentágono regular mide  $108^\circ$ , calcula la medida de todos los ángulos del pentágono estrellado.

En el pentágono que se forma en el interior, todos los ángulos miden lo mismo:  $108^\circ$ .

$$\hat{B} = \hat{G} = \hat{M} = \hat{T} = \hat{Z} = 108^\circ$$

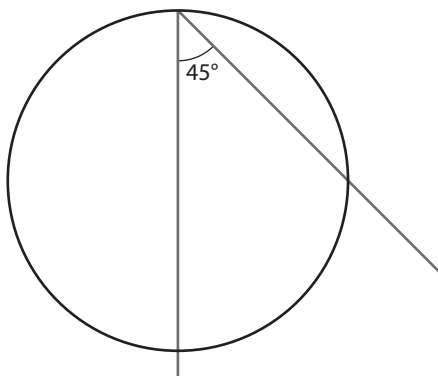
$$D = E = J = L = Q = R = W = X = D' = C' = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$$

$$F = K = P = V = B' = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$$

$$A = C = H = I = N = O = S = U = Y = A' = \frac{108^\circ - 36^\circ}{2} = 36^\circ$$

## ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

**51** ■■■ Dibuja en una circunferencia ángulos inscritos cuyos lados abarquen un arco de  $90^\circ$ . Deduce la medida de los ángulos inscritos y comprueba los resultados con un transportador.



El ángulo inscrito es  $45^\circ$ .

**52** ■■■ Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia.

a) Calcula la medida del ángulo central.

b) Si desde un vértice se trazan todas las diagonales, ¿cuánto miden los ángulos inscritos que se obtienen?

c) Calcula la medida del ángulo exterior del hexágono regular.

a) El ángulo central de un hexágono regular es:

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$

b) El ángulo inscrito es la mitad del arco que abarcan sus lados:

$$\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

c) El ángulo exterior es la mitad de la diferencia de los arcos que abarcan sus lados:

$$\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

**53** ■■■ Dibuja en una circunferencia un decágono regular y numera los vértices de 1 a 10. Traza rectas que pasen por los vértices indicados, nombra qué tipo de ángulo se obtiene y calcula su medida:

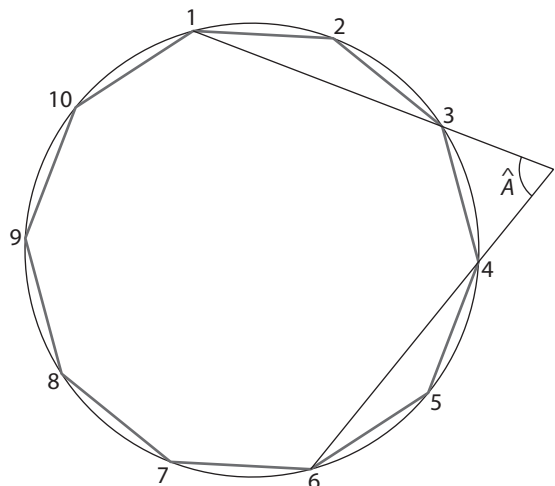
a) Rectas por los vértices 1 y 3, 4 y 6.

b) Rectas por los vértices 10 y 3, 10 y 5.

c) Rectas por los vértices 10 y 6, 7 y 1.

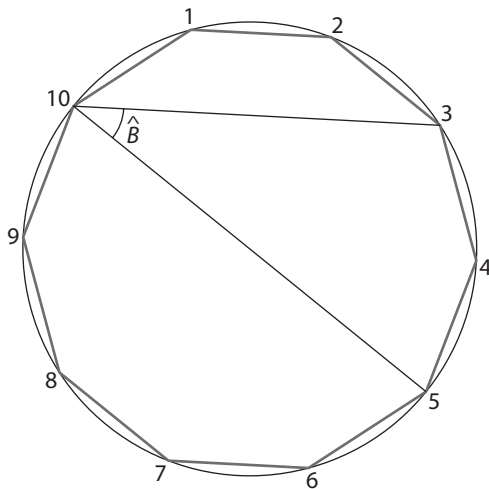
d) Rectas por los vértices 3 y 6 y por el centro del polígono.

a) El ángulo central de un decágono regular es  $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ .



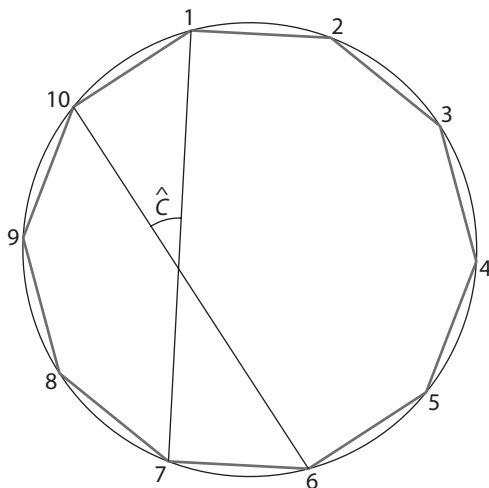
$$\hat{A} = \frac{36^\circ \cdot 5 - 36^\circ}{2} = 72^\circ$$

b)



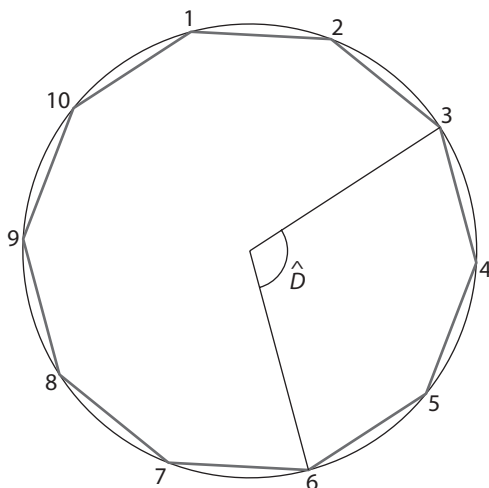
$$\hat{B} = \frac{36^\circ \cdot 2}{2} = 36^\circ$$

c)



$$\hat{C} = \frac{36^\circ + 36^\circ}{2} = 36^\circ$$

d)



$$\hat{D} = 36^\circ \cdot 3 = 108^\circ$$

**54** ■■■ El reloj del ayuntamiento tiene forma circular y están marcadas 12 horas. Utiliza una regla y un compás para dibujar los siguientes ángulos e indica en cada caso qué tipo de ángulo es y cuál es su medida. Comprueba los resultados con un transportador.

- El ángulo que se forma uniendo el centro O con la marca que corresponde a las 12 h y a las 4 h.
- El ángulo que se forma uniendo la marca de las 12 h con la de las 8 h y la marca de las 8 h con la de las 5 h.
- El ángulo formado por la cuerda que pasa por 12 y 4 y por la cuerda que pasa por 1 y 8.
- El ángulo formado por la cuerda que pasa por 1 y 9 y por la cuerda que pasa por 8 y 5.
- El ángulo formado por la cuerda que pasa por 2 y 9 y por la tangente a la circunferencia en la marca que corresponde a las 2 h.
- El ángulo formado por las tangentes a la circunferencia en la marca 12 y en la marca 2.

- |         |         |         |
|---------|---------|---------|
| a) 120° | b) 75°  | c) 75°  |
| d) 45°  | e) 120° | f) 150° |

## EJERCICIOS

**1** Indica qué rectángulos son semejantes:

- a) Base 25 cm, altura 12 cm y base 30 cm, altura 14 cm.
- b) Base 30 m, altura 24 m y base 10 m, altura 8 m.
- c) Base 0,75 dm, altura 0,25 dm y base 1,50 m, altura 50 cm.

a)  $\frac{30}{25} \neq \frac{14}{12}$       b)  $\frac{30}{10} = \frac{24}{8}$       c)  $\frac{0,75}{15} = \frac{0,25}{5}$

Son semejantes b) y c).

**2** La razón de semejanza de dos cuadrados es 1,5. El cuadrado de menor tamaño tiene un perímetro de 20 cm. Calcula:

- a) El perímetro del cuadrado mayor.
- b) El área de cada uno de ellos.

a)  $\frac{P}{20} = 1,5; P = 30$  cm

b) El lado de cada cuadrado es:

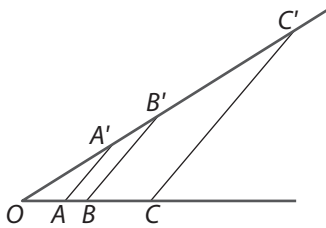
$\frac{30}{4} = 7,5$  cm y  $\frac{20}{4} = 5$  cm respectivamente.

El área del cuadrado es  $A = l^2$ , por lo que:

$A = 7,5^2 = 56,25$  cm<sup>2</sup>;  $A = 5^2 = 25$  cm<sup>2</sup>

**3** Calcula las medidas de los segmentos  $A'B'$ ,  $OB'$  y  $B'C'$ , si:

$OA = 2$  cm,  $OA' = 5$  cm,  $AB = 1$  cm,  $BC = 3$  cm



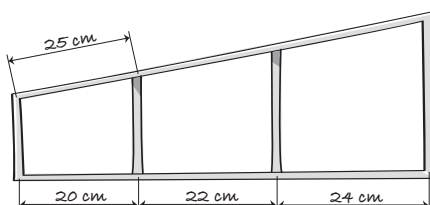
Aplicamos el teorema de Tales:

$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{1}{A'B'} \Leftrightarrow A'B' = 2,5$  cm

$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{OB'} \Leftrightarrow OB' = 7,5$  cm

$\frac{OA}{OA'} = \frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{3}{B'C'} \Leftrightarrow B'C' = 7,5$  cm

**4** Observa la valla del dibujo. Si en el lado inclinado la medida correspondiente a 20 cm es 25 cm, calcula las medidas de las distancias de los restantes barrotes.



Llamamos  $x$  e  $y$  a las longitudes de los dos barrotes del lado inclinado y aplicamos el teorema de Tales:

$\frac{25}{20} = \frac{x}{22} \Leftrightarrow x = 27,5$  cm       $\frac{25}{20} = \frac{y}{24} \Leftrightarrow y = 30$  cm

**5** Aplicando los criterios de semejanza, justifica si los triángulos  $ABC$  y  $MNP$  son semejantes:

a)  $A = 60^\circ$        $B = 45^\circ$   
 $M = 75^\circ$        $N = 60^\circ$

b)  $AB = 10$  cm       $AC = 12$  cm       $A = 35^\circ$   
 $MN = 20$  cm       $MP = 16$  cm       $M = 35^\circ$

c)  $AB = 10$  cm       $AC = 12$  cm       $BC = 15$  cm  
 $MN = 15$  cm       $MP = 18$  cm       $NP = 22,5$  cm

d)  $AB = 10$  cm       $AC = 12$  cm       $BC = 15$  cm  
 $MN = 20$  cm       $MP = 24$  cm       $NP = 18$  cm

a)  $C = 75^\circ$ . Son semejantes por tener dos ángulos iguales.

b)  $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} \Leftrightarrow \frac{10}{20} \neq \frac{12}{16}$ . No son semejantes.

c)  $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \Leftrightarrow \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{15}{22,5}$ . Son semejantes.

d)  $\frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} \Leftrightarrow \frac{10}{20} = \frac{12}{24} \neq \frac{15}{18}$ . No son semejantes.

**6** Construye en una cartulina dos triángulos, uno de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm, y otro de lados 9 cm, 12 cm y 15 cm.

Comprueba que estos triángulos son semejantes situándolos en posición de Tales y calcula la razón de semejanza.

$\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = 0,67$

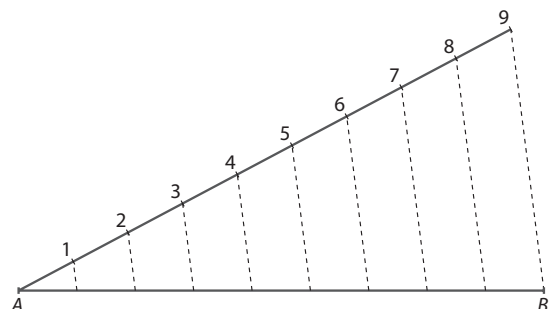
**7** Los triángulos  $ABC$  y  $MNP$  son semejantes con razón de semejanza 3. Si:

$AB = 5$  cm,  $AC = 10$  cm y  $A = M = 40^\circ$

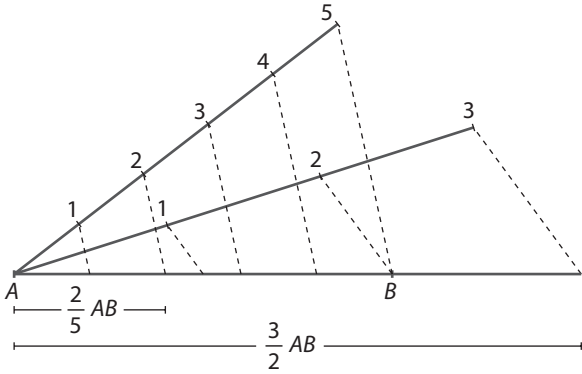
calcula la medida de los lados  $MN$  y  $MP$ .

$\frac{AB}{MN} = 3 \Leftrightarrow MN = \frac{5}{3}$  cm;  $\frac{AC}{MP} = 3 \Leftrightarrow MP = \frac{10}{3}$  cm.

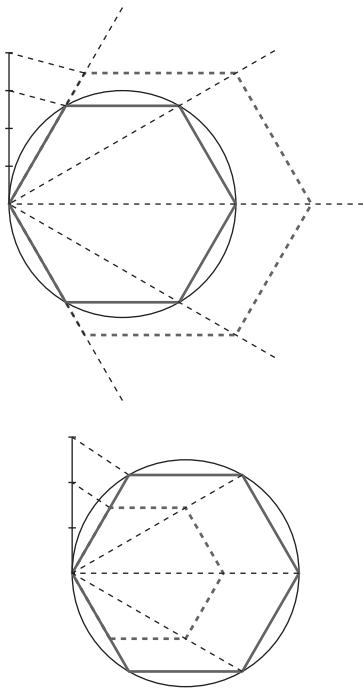
**8** Utilizando el teorema de Tales, divide el segmento  $AB$  de 8 cm de longitud en nueve partes iguales.



**9** Empleando el teorema de Tales, construye los  $\frac{3}{2}$  y los  $\frac{2}{5}$  del segmento  $AB$  de longitud 10 cm.



**10** Dibuja un hexágono inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio. Construye uno semejante a él con razón de semejanza  $\frac{4}{3}$  y otro de razón  $\frac{2}{3}$ .



**11** Si un aula rectangular mide 10 metros de ancho y 14 metros de largo, ¿cuáles son las medidas del dibujo a escala 1:125?

$$\frac{1}{125} = \frac{x}{1000} \Leftrightarrow x = 8 \text{ cm de ancho.}$$

$$\frac{1}{125} = \frac{y}{1400} \Leftrightarrow y = 11,20 \text{ cm de largo.}$$

**12** Dibuja un triángulo de lados 5, 6 y 7 cm. ¿Es un triángulo rectángulo? ¿Cumple el teorema de Pitágoras? Razona tus respuestas.

$$h = \sqrt{5^2 + 6^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{61} \Leftrightarrow h = 7,8 \text{ cm. No cumple el teorema de Pitágoras.}$$

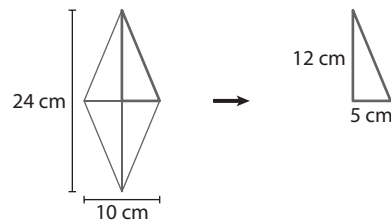
**13** En un triángulo rectángulo se conoce la medida de la hipotenusa, 17 cm, y de uno de los catetos, 15 cm, ¿cuál es la longitud del otro cateto?

$$c = \sqrt{h^2 - c^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{17^2 - 15^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{64} \Leftrightarrow c = 8 \text{ cm}$$

**14** Completa la tabla:

Hipotenusa $a$	Cateto $b$	Cateto $c$
20	$b = \sqrt{20^2 - 16^2}$ $b = 12$	16
$h = \sqrt{5^2 + 12^2}$ $h = 13$	5	12
2	1	$c = \sqrt{2^2 - 1^2}$ $c = \sqrt{3}$
26	24	$c = \sqrt{26^2 - 24^2}$ $c = 10$

**15** Si las diagonales de un rombo miden 24 cm y 10 cm, calcula la longitud del lado.



El triángulo rectángulo que se forma tiene como longitud de los lados 12 cm y 5 cm. La longitud del lado del rombo es la hipotenusa:

$$h = \sqrt{12^2 + 5^2} \Leftrightarrow h = 13 \text{ cm}$$

**16** La diagonal de un cuadrado es 5,66 dm. ¿Cuál es la longitud del lado?

La diagonal del cuadrado es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma con los lados.

$$h = \sqrt{2l^2} \Leftrightarrow h = l\sqrt{2} \Leftrightarrow l = \frac{h}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow l = \frac{5,66}{1,41} \Leftrightarrow l = 4 \text{ dm}$$

**17** Calcula la apotema de un hexágono regular de lado 3 dm.

$$a = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ dm}$$

**18** Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

$$h = \sqrt{8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{64 - 16} \Leftrightarrow h = \sqrt{48} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$



## EJERCICIOS PROPUESTOS

## FIGURAS SEMEJANTES

**1**  Una fotografía de tamaño 10 cm × 15 cm se amplía a un formato de 15 cm × 20 cm. ¿Son semejantes las fotografías?

$$\frac{10}{15} = 0,67; \frac{15}{20} = 0,75$$

La razón de semejanza no es igual. No son semejantes.

**2**  Si una fotografía de 10 cm × 15 cm se amplía un 25%, ¿cuáles son las medidas de la fotografía ampliada?

$$10 \cdot 1,25 = 12,5 \text{ cm}; 15 \cdot 1,25 = 18,75 \text{ cm}$$

**3**  ¿Cuál es la razón de semejanza entre una DIN A4 y una DIN A3?

El tamaño DIN A4 es 210 mm × 297 mm. El tamaño DIN A3 es 297 mm × 420 mm.

$$\frac{210}{297} = 0,71; \frac{297}{420} = 0,71. \text{ La razón de semejanza es } 0,71.$$

**4**  Razona si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

- Todos los cuadrados son semejantes.
- Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
- Todos los hexágonos regulares son semejantes.
- Dos polígonos son semejantes si tienen todos sus ángulos iguales dos a dos.
- Dos polígonos son semejantes si sus lados homólogos son proporcionales.

- a) Verdadero.      b) Falso.      c) Verdadero.  
d) Verdadero.      e) Verdadero.

**5**  Indica qué rectángulos son semejantes:

- Base 75 cm, altura 36 cm y base 90 cm, altura 42 cm.
- Base 15 m, altura 12 m y base 5 m, altura 4 m.
- Base 1,50 dm, altura 0,50 dm y base 3 m, altura 100 cm.
- Base 10 cm, altura 12 cm y base 6 cm, altura 8 cm.

- a)  $\frac{75}{36} \neq \frac{90}{42}$  no son semejantes.  
b)  $\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$  sí son semejantes.  
c)  $\frac{1,50}{0,5} = \frac{30}{10}$  sí son semejantes.  
d)  $\frac{10}{12} \neq \frac{6}{8}$  no son semejantes.

**6**  Las medidas de los lados de un triángulo son 3 cm, 4 cm y 5 cm. Si la razón de semejanza es 1,5, ¿cuáles son las medidas de los lados de los triángulos semejantes?

Llamamos  $x$ ,  $y$  y  $z$  a los lados del triángulo semejante.

$$\frac{x}{3} = 1,5 \Leftrightarrow x = 4,5 \text{ cm} \quad \frac{y}{4} = 1,5 \Leftrightarrow y = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{5} = 1,5 \Leftrightarrow z = 7,5 \text{ cm}$$

**7**  Los lados de un hexágono miden 4, 6, 10, 12, 16 y 20 cm. Si en un hexágono semejante el lado menor mide 10 cm, calcula la medida de los otros lados.

Calculamos la razón de semejanza:

$$\frac{10}{4} = 2,5. \text{ La razón de semejanza es } 2,5.$$

La medida de los otros lados de menor a mayor es:

$$6 \cdot 2,5 = 15 \text{ cm}; 10 \cdot 2,5 = 25 \text{ cm}; 12 \cdot 2,5 = 30 \text{ cm}; \\ 16 \cdot 2,5 = 40 \text{ cm}; 20 \cdot 2,5 = 50 \text{ cm}.$$

**8**  Utiliza papel cuadriculado para dibujar dos octógonos semejantes de razón 2.

Un octógono es el doble de grande que el otro.

**9**  La razón de semejanza de dos triángulos es 0,75. El triángulo de menor tamaño tiene un perímetro de 36 cm. Calcula el perímetro del triángulo mayor.

$$\frac{36}{P} = 0,75 \Leftrightarrow P = \frac{36}{0,75} \Leftrightarrow P = 48 \text{ cm}$$

**10**  Los lados de un triángulo miden 12, 8 y 6 cm. Calcula la medida de los lados del triángulo semejante cuyo perímetro es 18 cm.

El perímetro del triángulo es:  $12 + 8 + 6 = 26 \text{ cm}$ .

$$\frac{26}{18} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow x = \frac{108}{13} \text{ cm} \quad \frac{26}{18} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = \frac{72}{13} \text{ cm}$$

$$\frac{26}{18} = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x = \frac{54}{13} \text{ cm}$$

**11**  El perímetro del rectángulo A es 24 cm y el perímetro del rectángulo B es 12 cm. Si ambos rectángulos son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza de los lados homólogos?

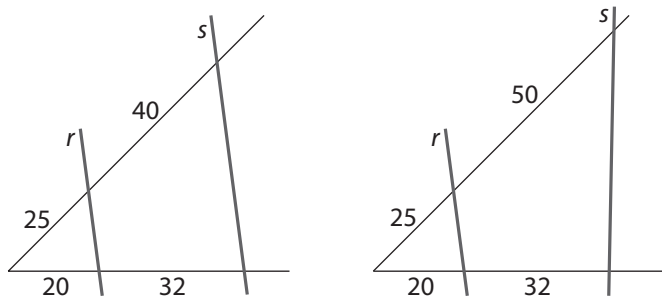
$$\frac{P}{P'} = k \Leftrightarrow \frac{24}{12} = k \Leftrightarrow k = 2$$

**12**  El área de un rectángulo A es 32 cm<sup>2</sup> y el área de un rectángulo B es 288 cm<sup>2</sup>. Si los dos rectángulos son semejantes, ¿cuál es la razón de semejanza de los lados homólogos?

$$\frac{A}{A'} = k^2 \Leftrightarrow \frac{32}{288} = k^2 \Leftrightarrow 9 = k^2 \Leftrightarrow k = 3$$

## TEOREMA DE TALES

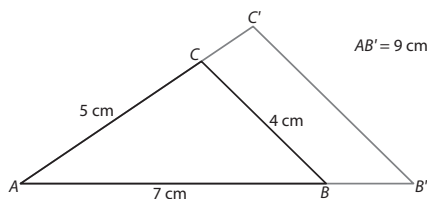
**13** ¿En qué casos las rectas  $r$  y  $s$  son paralelas?



En el primer caso:  $\frac{25}{20} = \frac{40}{32} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$ . Son paralelas.

En el segundo caso:  $\frac{25}{20} \neq \frac{50}{32} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \neq \frac{25}{16}$ . No son paralelas.

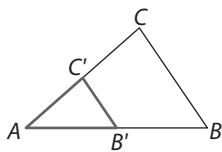
**14** Observa la figura y calcula la medida de los lados del triángulo  $AB'C'$ .



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{4}{B'C'} \Leftrightarrow B'C' = \frac{36}{7} \text{ cm}$$

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Leftrightarrow \frac{7}{9} = \frac{5}{AC'} \Leftrightarrow AC' = \frac{45}{7} \text{ cm}$$

**15** Construye un triángulo de lados  $AB = 12$  cm,  $AC = 10$  cm y  $BC = 8$  cm. Une los puntos medios de los lados  $AB$  y  $AC$  y comprueba que el triángulo que se obtiene es semejante al triángulo  $ABC$ .



El lado  $AB'$  mide 6 cm, y el lado  $AC'$  mide 5 cm.

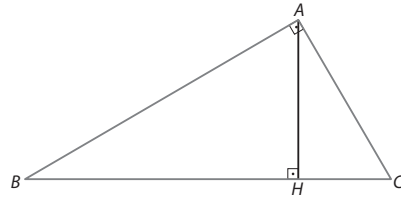
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Leftrightarrow \frac{12}{6} = \frac{10}{5} \Leftrightarrow 2$$

La razón de semejanza es 2. Son semejantes.

**16** Construye en una cartulina un triángulo cuyos lados midan 4 cm y 7 cm y el ángulo comprendido sea  $50^\circ$ . Construye otro semejante con razón de semejanza 1,5. Comprueba la semejanza de los dos triángulos situándolos en posición de Tales.

Aplicando el teorema de Tales, en el triángulo semejante los lados homólogos miden 6 cm y 10,5 cm respectivamente.

**17** ¿Son semejantes los triángulos  $ABC$  y  $AHC$  de la figura? Razona la respuesta.



Sí son semejantes.

**18** Traza diez líneas rectas paralelas y separadas entre sí 1 cm. Recorta una tira de papel en forma de rectángulo de longitud 8 cm y sobre ella marca dos puntos  $A$  y  $B$  como se indica en el dibujo.



Utiliza el teorema de Tales para determinar cómo se debe situar la tira del papel sobre las rectas paralelas para que puedas dividir el correspondiente segmento  $AB$  en 5, 6, 8 y 10 partes iguales.

Se comprueba haciendo la experiencia.

## CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

**19** Aplicando los criterios de semejanza, justifica si los triángulos  $ABC$  y  $DEF$  son semejantes:

a)  $ABC$  y  $DEF$  son triángulos rectángulos con  $\hat{A} = 55^\circ$  y  $\hat{F} = 35^\circ$ .

b)  $AB = 6$  cm       $AC = 8$  cm       $\hat{A} = 60^\circ$   
 $DE = 4$  cm       $DF = 5$  cm       $\hat{D} = 60^\circ$

c)  $AB = 6$  cm       $AC = 9$  cm       $BC = 12$  cm  
 $DE = 8,4$  cm       $DF = 12,6$  cm       $EF = 16,8$  cm

d)  $BC = 5$  cm       $BA = 10$  cm       $\hat{B} = 22^\circ$   
 $EF = 2,5$  cm       $ED = 5$  cm       $\hat{E} = 22^\circ$

a) El triángulo  $ABC$  tiene los ángulos de  $90^\circ$ ,  $55^\circ$  y  $35^\circ$ . Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales.

b)  $\frac{8}{5} \neq \frac{6}{4} \Leftrightarrow 1,6 \neq 1,25$ . No son semejantes.

c) Calculamos la razón de semejanza:

$$\frac{8,4}{6} = k \Leftrightarrow k = 1,4; \quad \frac{12,6}{9} = k \Leftrightarrow k = 1,4;$$

$$\frac{16,8}{12} = k \Leftrightarrow k = 1,4. \text{ Son semejantes.}$$

d) El ángulo comprendido entre los lados es el mismo, y la razón de semejanza entre los lados es:

$$\frac{10}{5} = \frac{5}{2,5}. \text{ Son semejantes.}$$

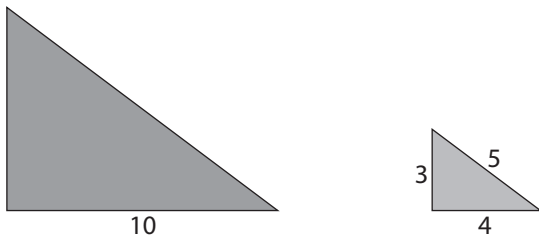
**20**  Las medidas de los lados de un triángulo son 6 cm, 8 cm y 10 cm. Determina los lados de los triángulos semejantes a él si la razón de semejanza es 0,5.

Llamamos  $x, y$  y  $z$  a los lados del triángulo semejante. Entonces se cumple que:

$$\frac{6}{x} = 0,5 \Leftrightarrow x = 12 \text{ cm}; \quad \frac{8}{y} = 0,5 \Leftrightarrow y = 16 \text{ cm};$$

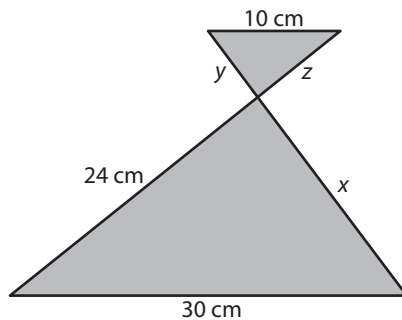
$$\frac{10}{z} = 0,5 \Leftrightarrow z = 20 \text{ cm}$$

**21**  Si los triángulos de la figura son semejantes, calcula la medida de los lados desconocidos.



$$\frac{10}{4} = \frac{x}{3} \Leftrightarrow x = 7,5; \quad \frac{10}{4} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow y = 12,5$$

**22**  Calcula el valor de los segmentos indicados:



$$\frac{30}{10} = \frac{24}{z} \Leftrightarrow z = \frac{24 \cdot 10}{30} \Leftrightarrow z = 8 \text{ cm}$$

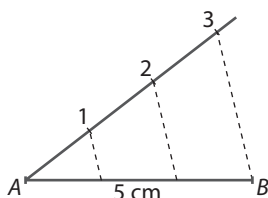
El lado  $x$  lo calculamos por el teorema de Pitágoras, ya que es un triángulo rectángulo:

$$x = \sqrt{30^2 - 24^2} \Leftrightarrow x = 18 \text{ cm}$$

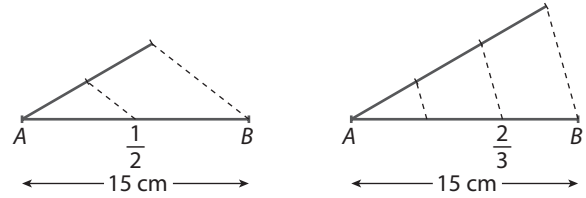
$$\frac{30}{10} = \frac{18}{y} \Leftrightarrow y = \frac{18 \cdot 10}{30} \Leftrightarrow y = 6 \text{ cm}$$

## APLICACIONES DE LA SEMEJANZA

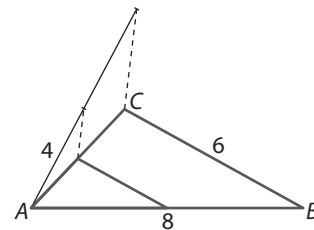
**23**  Utilizando el teorema de Tales, divide un segmento  $AB$  de 5 cm de longitud en 3 partes iguales.



**24**  Empleando el teorema de Tales, señala  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{2}{3}$  del segmento  $AB$  de longitud 15 cm.

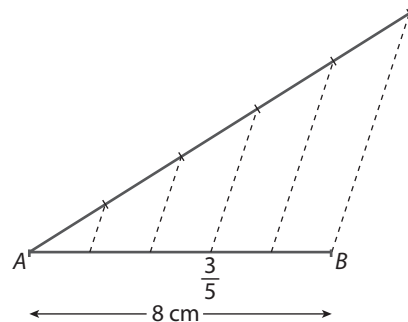


**25**  Dibuja con regla y compás un triángulo de lados 8 cm, 6 cm y 4 cm. Obtén otro triángulo semejante al anterior con razón de semejanza  $\frac{1}{2}$ . Calcula la razón entre los perímetros de los dos triángulos.

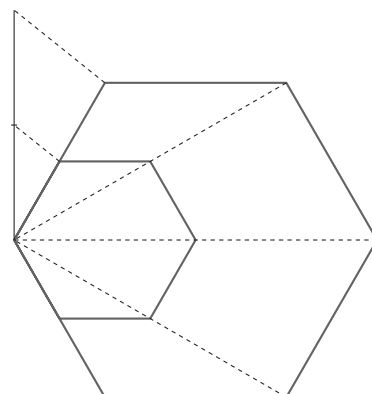



$$\frac{P'}{P} = \frac{4 + 3 + 2}{8 + 6 + 4} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{9}{18} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{1}{2}$$

**26**  Utiliza el teorema de Tales para calcular gráficamente los  $\frac{3}{5}$  de un segmento de 8 cm de longitud.



**27**  Utiliza papel cuadrículado para dibujar dos hexágonos semejantes de razón 1,5.




**28**  Si se unen los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero se obtiene un triángulo semejante. ¿Cuál es la razón de semejanza? ¿Cuál es la razón entre las áreas de los dos triángulos?


Un triángulo equilátero tiene todos los lados iguales. Llamamos  $x$  al lado del triángulo mayor.

El lado del triángulo menor es  $\frac{x}{2}$ . La razón de semejanza es:

$$\frac{x}{\frac{x}{2}} = k \Leftrightarrow 2 = k. \text{ La razón de semejanza de las áreas es } k^2 = 4.$$

**29**  Calcula la altura de una casa que proyecta una sombra de 5 metros sabiendo que un árbol de 3 m de alto proyecta una sombra de 1 metro.

$$\frac{x}{5} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow x = 15 \text{ m}$$

**30**  Dibuja un pentágono inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio. Construye uno semejante a él con razón de semejanza  $\frac{1}{3}$  y otro de razón  $\frac{3}{4}$ .


Para construir un pentágono semejante al inscrito en la circunferencia con razón de semejanza  $\frac{1}{3}$ , se elige un vértice del pentágono y desde él se trazan semirrectas que pasan por los restantes vértices.

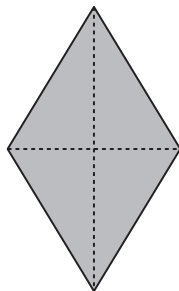
La relación entre los lados del pentágono es:

$$\frac{AE'}{AE} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AE' = AE \cdot \frac{1}{3}$$

Se calculan  $\frac{1}{3}$  del segmento  $AE$ , y se obtiene  $E'$ . Desde el vértice  $E'$  se traza una paralela al lado  $ED$  para obtener el vértice  $D'$  y así con todos los vértices del nuevo pentágono.

Se procede igual para calcular el pentágono semejante a  $\frac{3}{4}$ .

**31**  Obtén un rombo semejante al dado con razón de semejanza  $\frac{1}{4}$ .



El nuevo rombo obtenido es semejante al dado, pero la longitud de los lados es  $\frac{1}{4}$  más pequeña.

**32**  Dibuja una circunferencia y construye en ella un hexágono regular. Si trazas todas las diagonales obtienes una estrella:

a) Explica qué proceso puedes seguir para obtener una estrella semejante a la anterior con razón de semejanza 2.

b) Comprueba que tu razonamiento es correcto.


a) Construir otro hexágono semejante al inicial de razón 2, es decir, los lados miden el doble que el inicial. Al obtener el nuevo hexágono, se trazan las diagonales y obtenemos la estrella semejante a la inicial pero el doble de grande.

b) Hacer el dibujo para comprobarlo.


**33**  La escala de la maqueta de una casa es 1:50. Si la puerta de la casa en la maqueta mide 4,5 cm de alto y 3,6 cm de ancho, ¿cuáles son sus medidas reales?

$$\frac{1}{50} = \frac{4,5}{x} \Leftrightarrow x = 50 \cdot 4,5 \Leftrightarrow x = 225 \text{ cm de alto.}$$

$$\frac{1}{50} = \frac{3,6}{y} \Leftrightarrow y = 50 \cdot 3,6 \Leftrightarrow y = 180 \text{ cm de ancho.}$$

**34**  En un mapa de España, mide la distancia entre la capital de tu provincia y la población más importante y más próxima a ella. Utiliza la escala del mapa para averiguar la distancia real entre esas dos poblaciones.

Respuesta abierta.

**35**  El plano del instituto está realizado con una escala de 1:100. Si el gimnasio tiene forma rectangular y sus dimensiones son 60 m de largo por 40 m de ancho, ¿cuáles son las dimensiones del gimnasio en el plano?

$$\frac{1}{100} = \frac{x}{6000} \Leftrightarrow x = 60 \text{ cm de largo.}$$


$$\frac{1}{100} = \frac{x}{4000} \Leftrightarrow x = 40 \text{ cm de ancho.}$$

**36**  La maqueta de un coche mide 4,2 cm de largo. ¿Cuál es la medida real del coche si la escala de la maqueta es 1:90?

$$\frac{1}{90} = \frac{4,2}{x} \Leftrightarrow x = 4,2 \cdot 90 \Leftrightarrow x = 378 \text{ cm}$$

**37**  Si la distancia entre dos ciudades es 250 km, ¿a qué distancia en centímetros están sobre un plano a escala 1:25 000?

$$\frac{1}{25000} = \frac{x}{25000000} \Leftrightarrow x = 1000 \text{ cm}$$

**38**  Si la distancia entre dos ciudades sobre un plano a escala 1:150 000 es 4,5 cm, ¿a qué distancia estarán en un plano a escala 1:25 000?

$$\frac{1}{150000} = \frac{4,5}{x} \Leftrightarrow x = 4,5 \cdot 150000 \Leftrightarrow x = 675000 \text{ cm en la realidad.}$$

$$\frac{1}{25000} = \frac{y}{675000} \Leftrightarrow y = 27 \text{ cm en el segundo plano}$$

## TEOREMA DE PITÁGORAS. APLICACIONES

**39** Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 cm y 12 cm. Calcula:

a) La hipotenusa.

b) La hipotenusa de un triángulo semejante con razón de semejanza 3,5.

$$a) H = \sqrt{9^2 + 12^2} \Leftrightarrow H = 15 \text{ cm}$$

$$b) \frac{H'}{H} = k \Leftrightarrow H' = k \cdot H \Leftrightarrow H' = 3,5 \cdot 15 \Leftrightarrow H' = 52,50 \text{ cm}$$

**40** Los catetos de un triángulo rectángulo miden 9 y 12 cm. Calcula:

a) El área del triángulo.

b) La hipotenusa.

$$a) A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{9 \cdot 12}{2} \Leftrightarrow A = 54 \text{ cm}^2$$

$$b) H = \sqrt{9^2 + 12^2} \Leftrightarrow H = 15 \text{ cm}$$

**41** La apotema de un hexágono regular mide 3,46 cm. ¿Cuál es la medida del lado del hexágono?

El hexágono regular tiene todos los lados iguales. Está formado por 6 triángulos equiláteros cuyos 3 lados miden igual. Al trazar la apotema se obtiene un triángulo rectángulo cuya hipotenusa vale  $x$  y el cateto vale  $\frac{x}{2}$ .

$$ap = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} \Leftrightarrow 3,46 = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{3,46^2 \cdot 4}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

**42** Calcula el área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 12 cm y el lado desigual 10 cm.

Calculamos la altura por el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{12^2 - 5^2} \Leftrightarrow h = 10,9 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{5 \cdot 10,9}{2} \Leftrightarrow A = 27,25 \text{ cm}^2$$

**43** Las diagonales de un rombo miden 24 cm y 32 cm. Calcula las medidas de los lados, el área y el perímetro.

El lado es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma al trazar las diagonales del rombo.

$$H = \sqrt{12^2 + 16^2} \Leftrightarrow H = 20 \text{ cm}$$

El área del rombo es:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} \Leftrightarrow A = \frac{32 \cdot 24}{2} \Leftrightarrow A = 384 \text{ cm}^2$$

El perímetro es  $20 \cdot 4 = 80 \text{ cm}$ .

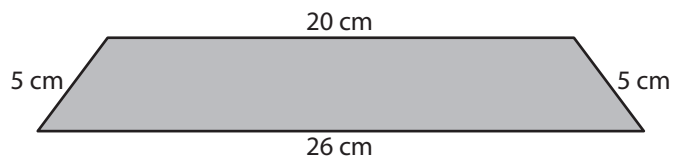
**44** Calcula el radio de una circunferencia circunscrita a un cuadrado de lado 10 cm.

El radio de la circunferencia es la mitad de la diagonal del cuadrado:

$$H = \sqrt{l^2 + l^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{2l^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{2 \cdot 10^2} \Leftrightarrow H = 14,14 \text{ cm}$$

El radio de la circunferencia es la mitad,  $\frac{14,14}{2} = 7,07 \text{ cm}$ .

**45** Calcula la altura del siguiente trapecio:



Trazamos la altura desde un vértice de la base menor hasta la base mayor y se obtiene un triángulo rectángulo.

La base del triángulo es  $\frac{26 - 20}{2} = 3 \text{ cm}$ .

La altura se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras:

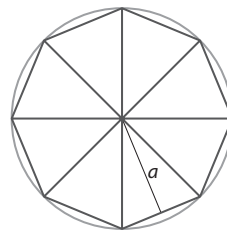
$$H^2 = c^2 - b^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{H^2 - b^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{5^2 - 3^2} \Leftrightarrow c = 4 \text{ cm}$$

**46** Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 1 dm.

Al trazar la altura en el triángulo equilátero se obtiene un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 1 dm y la base mide 0,5 dm. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$H^2 = b^2 + h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{H^2 - b^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{1^2 - 0,5^2} \Leftrightarrow c = 0,86 \text{ dm}$$

**47** Calcula la apotema de un octógono de lado 4 cm y radio de la circunferencia circunscrita 8 cm.



$$ap = \sqrt{8^2 - 2^2} \Leftrightarrow ap = 7,75 \text{ cm}$$

**48** Calcula el perímetro de un rombo si las diagonales miden 4 dm y 12 dm.

Calculamos el lado del rombo, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se obtiene al trazar las diagonales en el rombo.

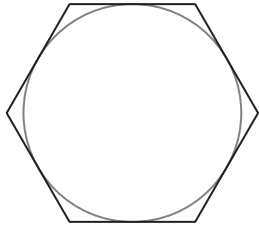
$$H = \sqrt{6^2 + 2^2} \Leftrightarrow H = 6,32 \text{ cm}$$

El perímetro es  $4 \cdot 6,32 = 25,28 \text{ cm}$ .

**49** Si la diagonal de un cuadrado es 5,66 dm, ¿cuál es la longitud del lado?

$$D^2 = 2l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{D^2}{2}} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{5,66^2}{2}} \Leftrightarrow l = 4 \text{ dm}$$

**50** **III** En una caja con forma de hexágono regular de lado 10 cm se quiere guardar una tarta de forma circular, ¿cuál es el radio de la mayor tarta que puede contener la caja?



La apotema es el radio de la mayor tarta que puede contener la caja.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$ap = \sqrt{H^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2} \Leftrightarrow ap = \sqrt{10^2 - 5^2} \Leftrightarrow ap = 8,66 \text{ cm}$$

**51** **III** La diagonal de un campo en forma de cuadrado mide  $\sqrt{288}$  m. Calcula la medida del lado del campo.

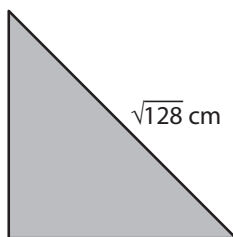
$$D^2 = 2l^2 \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{D^2}{2}} \Leftrightarrow l = \sqrt{\frac{(\sqrt{288})^2}{2}} \Leftrightarrow l = 12 \text{ m}$$

**52** **III** Un carpintero construye una puerta de 2 metros de alto por 3 metros de ancho. Si se desea que la puerta tenga forma rectangular, ¿cuál debe ser la medida de la diagonal?

Al trazar la diagonal en el rectángulo se forma el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es dicha diagonal.

$$H = \sqrt{3^2 + 2^2} \Leftrightarrow H = 3,6 \text{ m}$$

**53** **III** Halla la medida de los lados de un triángulo rectángulo isósceles si el lado desigual mide  $\sqrt{128}$  cm.



El triángulo rectángulo isósceles tiene dos lados iguales y uno desigual. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$H^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow H^2 = 2c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{H^2}{2}} \Leftrightarrow c = \sqrt{\frac{(\sqrt{128})^2}{2}} \Leftrightarrow c = 8 \text{ cm}$$

**54** **III** Una escalera tiene 10 m de largo y se quiere apoyar en una pared vertical de forma que el extremo superior esté a una altura de 8 metros. ¿A qué distancia de la pared se debe poner el extremo inferior de la escalera?

Hay que calcular la base del triángulo rectángulo que se forma:

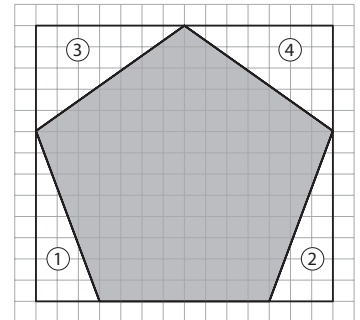
$$b = \sqrt{H^2 - h^2} \Leftrightarrow b = \sqrt{10^2 - 8^2} \Leftrightarrow b = 6 \text{ m}$$

**55** **I** Calcula la distancia entre la base del poste derecho y la escuadra izquierda de la portería de fútbol 11.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$H = \sqrt{c^2 + c^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{7,32^2 + 2,44^2} \Leftrightarrow H = 7,72 \text{ m}$$

**56** **III** Calcula el perímetro del pentágono de la figura. Utiliza la calculadora para aproximar el resultado hasta las centésimas.



Calculamos la hipotenusa del triángulo 1, que es igual al triángulo 2:

$$H = \sqrt{8^2 + 3^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{73}$$

Calculamos la hipotenusa del triángulo 3, que es igual al triángulo 4:

$$H = \sqrt{7^2 + 5^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{74}$$

El perímetro es la suma de todas las hipotenusas:

$$P = 2\sqrt{73} + 2\sqrt{74} \Leftrightarrow P = 2 \cdot 8,54 + 2 \cdot 8,6 \Leftrightarrow P = 34,28$$

**57** **III** Se considera un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 6 cm y su altura 4 cm:

- Calcula la medida de los lados iguales del triángulo.
- Construye un triángulo semejante a él con razón de semejanza 3.
- Comprueba que la razón de semejanza de los perímetros de ambos triángulos es igual a la razón de semejanza de los lados homólogos.
- Comprueba que la razón de las áreas de los dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza de los lados homólogos.

a) Los lados iguales del triángulo es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se obtiene al trazar la altura:

$$H = \sqrt{b^2 + h^2} \Leftrightarrow H = \sqrt{3^2 + 4^2} \Leftrightarrow H = 5 \text{ cm}$$

b) El triángulo semejante tiene triple longitud en todos sus lados.

$$c) \frac{P'}{P} = \frac{15 + 15 + 18}{5 + 5 + 6} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = \frac{48}{16} \Leftrightarrow \frac{P'}{P} = 3$$

d) Calculamos el área de cada triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{6 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow A = 12 \text{ cm}^2$$

$$A' = \frac{b' \cdot h'}{2} \Leftrightarrow A' = \frac{18 \cdot 12}{2} \Leftrightarrow A' = 108 \text{ cm}^2$$

$$\frac{A'}{A} = \frac{108}{12} \Leftrightarrow \frac{A'}{A} = 9 \Leftrightarrow \frac{A'}{A} = k^2 \Leftrightarrow k = \sqrt{9} \Leftrightarrow k = 3$$

## EJERCICIOS

**1** Dibuja una línea recta en tu cuaderno. Describe algún segmento real en el techo de la clase que se cruce con la línea que has dibujado.

Respuesta libre.

**2** Determina cuáles de los siguientes objetos están contenidos en un plano: cristal de una ventana, plato, triángulo y libro.

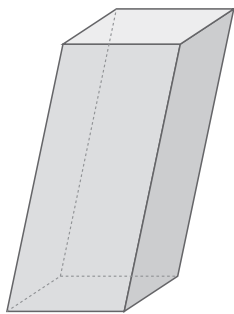
Cristal de una ventana, triángulo.

**3** Describe una recta paralela a cada una de las que te proponemos:

- a) La recta que une por el suelo dos esquinas de tu clase.  
 b) La recta que divide en un tramo recto una carretera en dos carriles.

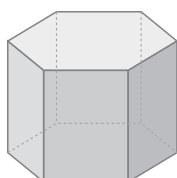
- a) Si la recta es la que une dos esquinas contiguas, la recta paralela pasaría por las dos paredes que son paralelas.  
 b) La recta paralela sería por ejemplo la recta que marca la línea continua del arcén.

**4** En el siguiente poliedro, ¿cuántos ángulos diedros hay? ¿Cuántos de ellos son diferentes? Busca alguno recto.



Hay 12 ángulos diedros. Hay tres tipos de ángulos diferentes. El ángulo que forma la cara lateral que se ve con la base es recto.

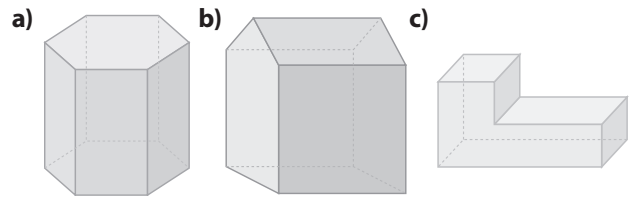
**5** Imagina que, en el poliedro de la figura, prolongas todas las caras y así obtienes 8 planos.



- a) ¿Cuántas parejas de planos paralelos puedes encontrar?  
 b) ¿Cuántos planos perpendiculares a las bases hay?  
 c) ¿Cuántos ángulos diedros se forman?

- a) 4                      b) 6                      c) 18

**6** ¿Cuántas caras, vértices y aristas hay en los siguientes poliedros?



- a)  $C = 8, V = 12, A = 18$   
 b)  $C = 9, V = 9, A = 16$   
 c)  $C = 8, V = 12, A = 18$

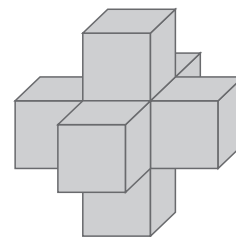
**7** Clasifica los poliedros del ejercicio anterior en cóncavos o convexos.

Convexos: a y b; cóncavo: c.

**8** ¿Cuántas diagonales tiene el poliedro del ejercicio 6 a)?

18.

**9** El poliedro del siguiente dibujo no es regular. ¿Cuál de las tres condiciones para ser regular no se cumple?



En todos los vértices no concurren el mismo número de aristas.

**10** Copia en tu cuaderno y completa la tabla:

Poliedro	N.º de aristas que se unen en cada vértice	Ángulos diedros (agudos, obtusos o rectos)
Cubo	3	12 rectos
Tetraedro	3	6 agudos
Octaedro	4	12 obtusos
Dodecaedro	3	30 obtusos
Icosaedro	5	30 obtusos

**11** Determina cuáles de los siguientes desarrollos planos corresponden a un tetraedro.

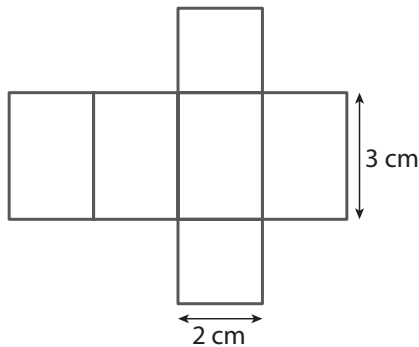


Los tres.

**12** Si unes dos tetraedros por una de sus caras, ¿se obtiene un octaedro? Razona tu respuesta.

No. Porque hay dos vértices en los que sólo concurren tres aristas.

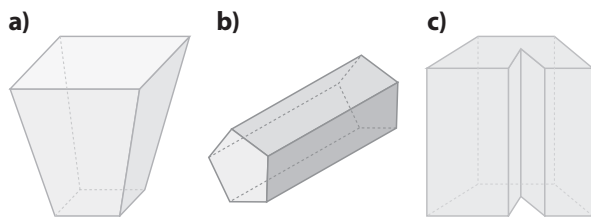
**13** Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano de un prisma recto cuadrangular de 3 cm de altura y cuya base tenga 2 cm de lado.



**14** Escribe tres objetos cotidianos que tengan forma de prisma. Para cada uno de ellos describe cuál es el polígono que está en la base y da un valor aproximado de su altura.

Una goma de base cuadrada (altura de 1,5 cm). Una caja de zapatos de base rectangular (altura de 15 cm). Un posavasos de madera de base octogonal (altura de 0,5 cm).

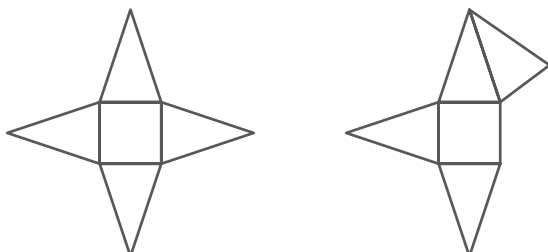
**15** ¿Cuáles de los siguientes cuerpos son prismas?



- a) No lo es.
- b) Sí lo es, basta apoyarlo sobre otra cara, la del pentágono.
- c) Sí lo es.

**16** ¿Cuántos desarrollos planos diferentes tiene una pirámide cuadrada? Dibuja en tu cuaderno dos de ellos. (Inventa tú las medidas.)

Hay 9 desarrollos.



**17** Dibuja en tu cuaderno una tienda india en forma de pirámide cuadrangular. ¿Qué medidas tendrían que tener las aristas para que pueda estar dentro una persona tanto de pie como tumbada?

Supongamos que la persona mide menos de  $x$  cm.

Si la circunferencia circunscrita del polígono de la base tiene de diámetro  $x$ , ya se puede tumbar. De modo que las aristas de la base pueden ser de  $\frac{x}{2}$  centímetros. Además, se puede tumbar poniendo la cabeza, al menos, en 12 puntos distintos, ya que el doble de la apotema es menor que la diagonal del polígono base.

$$a = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}x}{2} \text{ cm.}$$

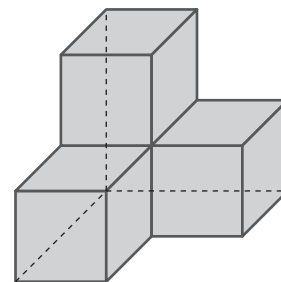
**18** Di qué tipo de polígonos son las caras laterales de los troncos de pirámides rectas y también de las oblicuas. (Puedes consultar el comienzo de esta Unidad, en la sección ¿Recuerdas qué es...?)

Trapezios isósceles.

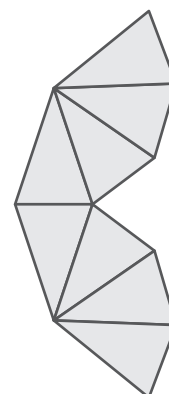
**19** Escribe el nombre de los poliedros que se obtienen si un tronco de pirámide de base cuadrada se corta por un plano paralelo a la base.

Dos troncos de pirámide de base cuadrada.

**20** Copia en tu cuaderno y dibuja en el poliedro azul de esta página las aristas escondidas con líneas discontinuas.



**21** Dibuja un desarrollo plano del poliedro rosa dibujado en esta página.





# 11 POLIEDROS

**22** Si se unen un cubo y una pirámide cuadrada por la base de ésta, ¿cuántas caras tendrá el nuevo poliedro?

9 caras.

**23** Cuenta las caras, vértices y aristas del poliedro del ejercicio anterior.

9 caras, 9 vértices y 16 aristas.

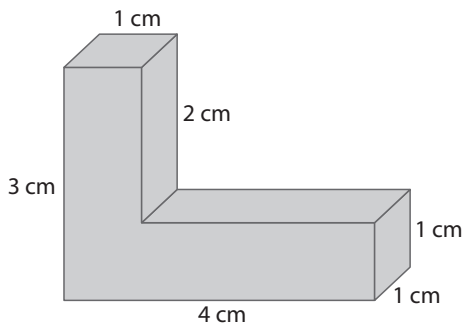
**24** Halla el área de un prisma cuadrado de altura 5 cm cuyas bases tienen un lado de 3 cm.

$$A = 2 \cdot A_{\text{base}} + n \cdot l \cdot h \Leftrightarrow A = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 78 \text{ cm}^2$$

**25** Halla el área de un cubo cuya arista mide 6 cm.

$$A = 6l^2 \Leftrightarrow A = 6 \cdot 6^2 \Leftrightarrow A = 216 \text{ cm}^2$$

**26** Halla el área del siguiente poliedro.



$$\text{Área} = 7 \cdot (3 \cdot 1) + 3 \cdot (1 \cdot 1) + 2 \cdot 1 = 26 \text{ u}^2$$

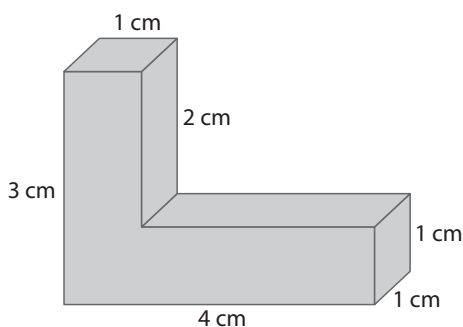
**27** Halla el volumen de un prisma cuadrado de altura 5 cm cuyas bases tienen un lado de 3 cm.

$$\text{Volumen} = 3^2 \cdot 5 = 45 \text{ cm}^3$$

**28** Halla el volumen de una pirámide cuadrada de altura 8 cm y cuya base tiene de lado 4 cm.

$$\text{Volumen} = 4^2 \cdot 8 : 3 = 42,67 \text{ cm}^3$$

**29** Halla el volumen del siguiente poliedro.



$$\text{Volumen} = 4 \cdot 3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ u}^3$$

<http://www.McGraw-Hill.es>

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### RECTAS, PLANOS Y ÁNGULOS EN EL ESPACIO

**1** Fíjate en una arista cualquiera de un cubo:

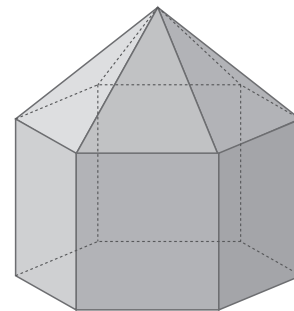
a) ¿Cuántas aristas hay paralelas a ella?

b) ¿Cuántas se cruzan con ella?

a) Tres.

b) Cuatro.

**2** La siguiente figura es el esquema de una ermita. Imagina que entras en ella y observas sus diferentes elementos. Sabiendo que el suelo tiene forma de hexágono regular, contesta a las preguntas:



a) ¿Hay algún ángulo diedro recto? ¿Cuál?

b) ¿Cuántos ángulos diedros diferentes tiene?

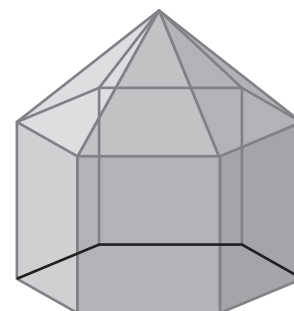
c) ¿Cuántos ángulos poliedros diferentes tiene?

a) Los diedros que forman las caras rectangulares con la base son todos rectos.

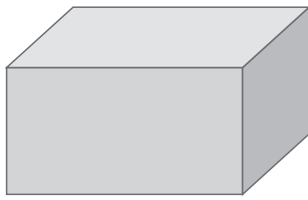
b) 4

c) 3

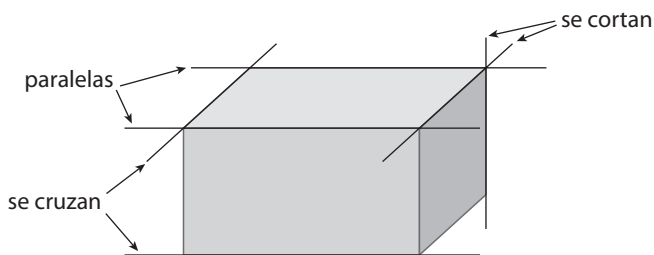
**3** Dibuja el poliedro del ejercicio 2 en tu cuaderno. Marca con un color las aristas donde se forma un ángulo diedro agudo y con otro color diferente las aristas donde se forma un ángulo diedro obtuso.



**4** Dibuja un prisma como el de la figura en tu cuaderno, traza en línea discontinua las aristas escondidas y marca, utilizando tres colores diferentes:



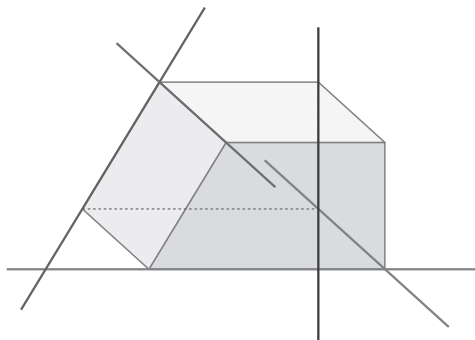
- a) Dos aristas que sean paralelas.
- b) Dos aristas que se corten.
- c) Dos aristas que se crucen.



5  Cuenta cuántos ángulos poliedros hay en un cubo, en un tetraedro, en un octaedro y en un dodecaedro.

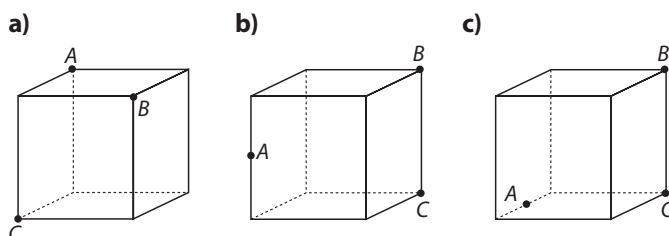
8, 4, 6 y 20.

6  Observa las rectas que se han dibujado en diferentes colores y escribe cómo son entre sí las posiciones de cada par de rectas:



- a) Marrón y azul.
  - b) Naranja y verde.
  - c) Azul y rosa.
  - d) Naranja y rosa.
- a) Marrón y azul: se cortan.    b) Naranja y verde: paralelas.  
 c) Azul y rosa: se cruzan.    d) Naranja y rosa: se cruzan.

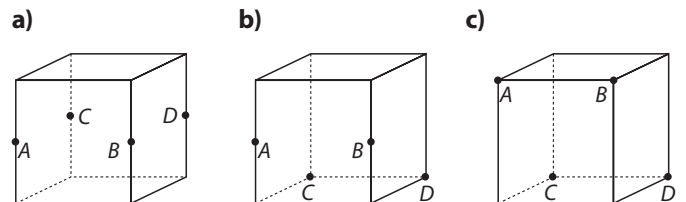
7  Clasifica el triángulo ABC en cada uno de los casos siguientes:



(Aclaración: Debes fijarte en las medidas de cada uno de los tres lados del triángulo, ¿cuáles son iguales?)

- a) Equilátero
- b) Isósceles
- c) Escaleno

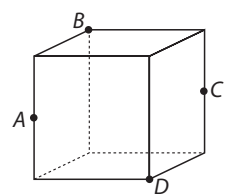
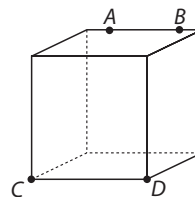
8  Escribe qué polígono es ABCD cuyos vértices se han marcado en un cubo:



- a) Cuadrado.
- b) Rectángulo.
- c) Trapecio isósceles.

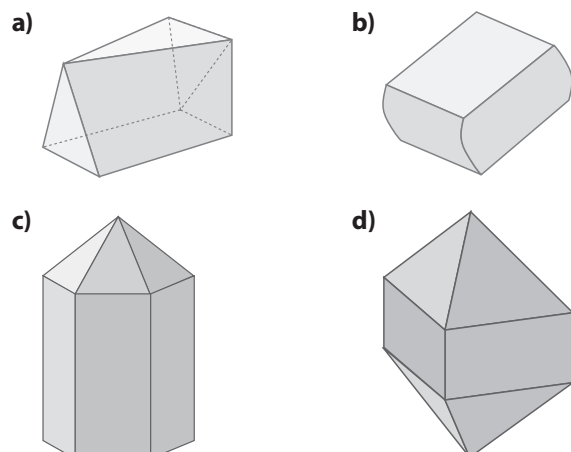
9  De forma similar a como se ha hecho en los dos ejercicios anteriores, dibuja un cubo y marca en sus vértices o aristas los puntos necesarios para obtener:

- a) Un trapecio.
- b) Un rombo.



## POLIEDROS: DEFINICIÓN, ELEMENTOS Y CLASIFICACIÓN

10  Determina cuáles de las siguientes figuras son poliedros y razona tu respuesta:

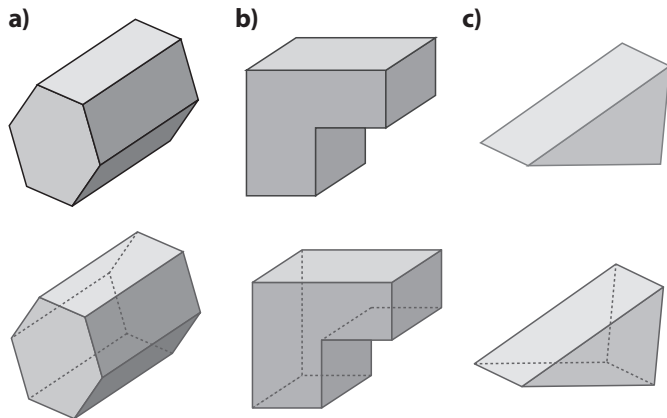


Son poliedros a, c y d, porque todas sus caras son polígonos.

# 11 POLIEDROS

<http://www.McGraw-Hill.es>

**11**  Copia en tu cuaderno y dibuja las aristas escondidas de los siguientes poliedros:

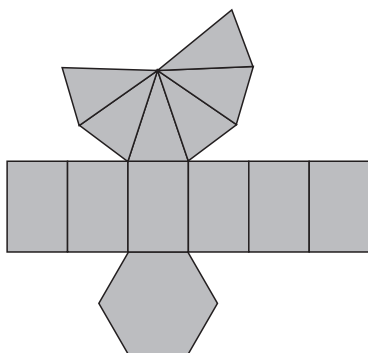


**12**  Cuenta caras, vértices y aristas de cada uno de los poliedros del ejercicio anterior. ¿Alguno de ellos es cóncavo?

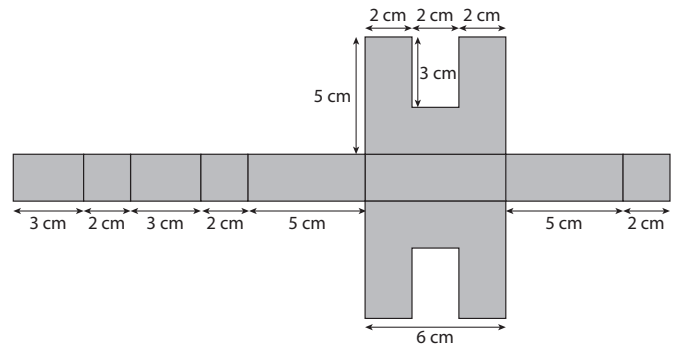
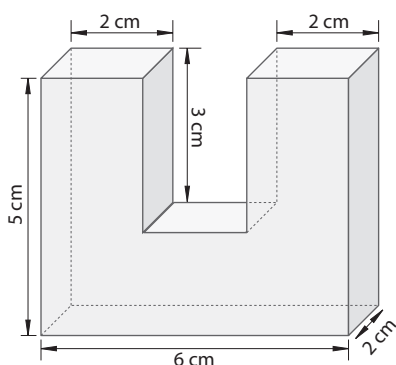
El b es cóncavo.

	C	V	A
a)	8	12	18
b)	8	12	18
c)	5	16	9

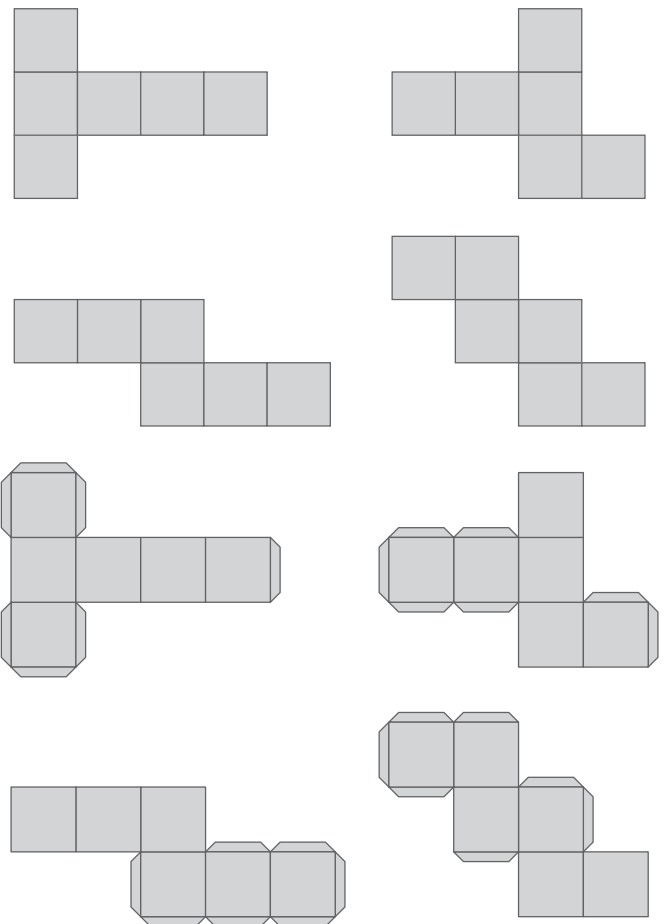
**13**  Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano del poliedro del ejercicio 2.



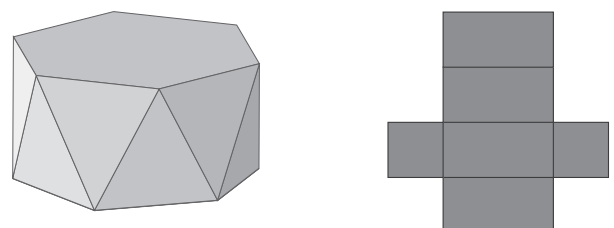
**14**  Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano del siguiente poliedro:

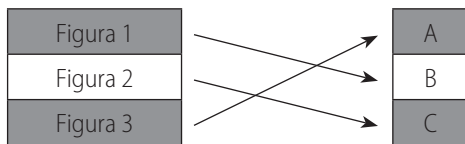
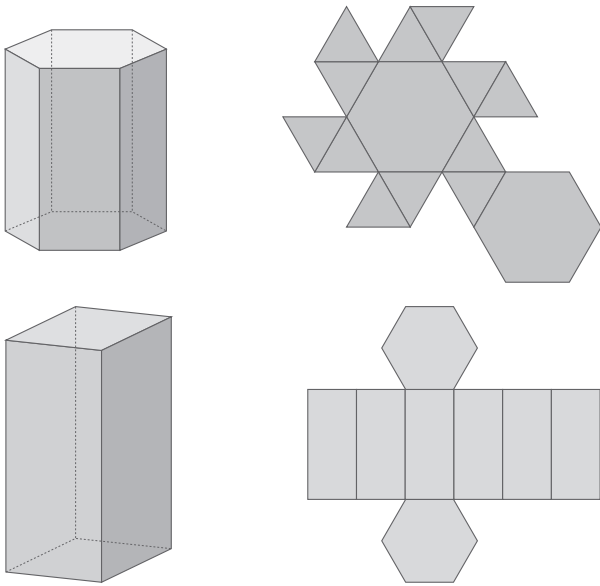


**15**  Comprueba cuáles de las siguientes figuras son desarrollos planos del cubo. Dibuja en tu cuaderno las que efectivamente lo son, y añade las pestañas donde se pone el pegamento para construirlos. Asegúrate de que en ninguna arista haya dos pestañas.

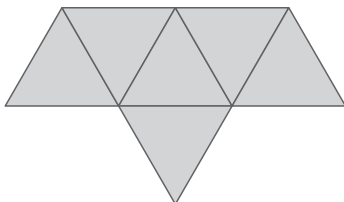


**16**  Relaciona cada uno de los siguientes desarrollos planos con el poliedro correspondiente:





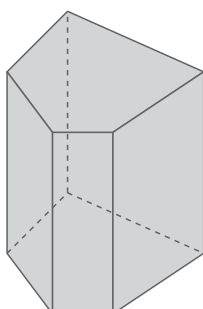
**17**  Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano del poliedro que se forma al unir por una cara dos tetraedros. (Atención: la cara interior por la que se unen no se cuenta, pues no es cara del nuevo poliedro.)



**18**  Marca en un cubo el punto que es el centro de cada cara. Imagina que estos puntos son los vértices de un nuevo poliedro, ¿qué puedes decir de él? Intenta dibujarlo en tu cuaderno.

Es un octaedro.

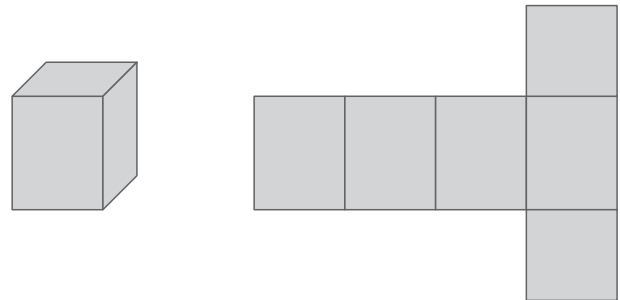
**19**  Dibuja en tu cuaderno un prisma recto cuyas bases sean pentágonos irregulares.



**20**  ¿Es posible que una de las caras de un prisma sea un rombo?

Sí, si hay otra cara que también es un rombo.

**21**  Dibuja en tu cuaderno un prisma cuadrangular de altura 5 cm y construye su desarrollo plano.



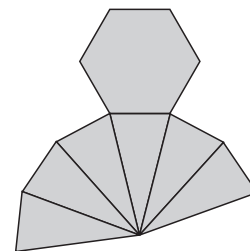
**22**  Si un prisma tiene 15 aristas, ¿qué polígono tiene en la base?

Un pentágono.

**23**  Un prisma tiene de altura 30 cm y bases cuadradas de lado 7 cm. Describe dos prismas que quepan juntos dentro de éste de forma que no sobre nada de espacio.

Los dos prismas pueden ser las dos mitades del prisma dado.

**24**  Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano de una pirámide hexagonal regular cuya base tenga de lado 2 cm y las aristas de las caras laterales midan 4 cm.



**25**  Si una pirámide tiene 8 vértices, ¿qué polígono forma la base?

Un heptágono.

**26**  ¿Es posible que una de las caras de una pirámide sea un rombo?

Sí, si es la base.

**27**  Una pirámide tiene de altura 15 cm y base cuadrada de lado 6 cm. Describe cómo se puede dividir en dos pirámides. ¿Son regulares las dos nuevas pirámides?

Al cortar la pirámide dada con un plano que pasa por el vértice de la misma y contiene a una de las diagonales de la base, se obtienen dos pirámides triangulares con la misma

# 11 POLIEDROS

altura que la inicial y por base un triángulo rectángulo de lados 6, 6 y  $\sqrt{72}$  cm, respectivamente.

**28**  Decide si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa:

- a) Las pirámides no tienen diagonales.
- b) Las pirámides oblicuas tienen todas sus caras laterales iguales.
- c) Un tetraedro es una pirámide.
- d) Las pirámides oblicuas pueden ser regulares.

- a) Verdadera.                      b) Falsa.
- c) Verdadera.                      d) Falsa.

**29**  Indica si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa:

- a) Las pirámides oblicuas tienen siempre algún ángulo diedro obtuso.
- b) Si una pirámide tiene algún ángulo diedro obtuso, entonces es oblicua.

- a) Verdadera.                      b) Falsa.

**30**  Decide si cada una de las afirmaciones siguientes es verdadera o falsa:

- a) Las caras de un tronco de pirámide triangular son todas triángulos.
- b) Las caras de un tronco de pirámide regular cuadrada son todas cuadriláteros.
- c) Los troncos de pirámide son siempre poliedros convexos.

- a) Falsa.                              b) Verdadera.                      c) Verdadera.

**31**  Un tronco de pirámide octogonal regular, ¿cuántas caras tiene? Describe cómo son. Cuenta también sus vértices, aristas y diagonales.

Tiene 8 caras laterales que son trapecios isósceles y 2 bases que son octógonos.

Vértices = 16; aristas = 24; diagonales = 48.

## ÁREAS Y VOLÚMENES

**32**  Halla el volumen de un prisma de altura 10 m cuya base es un rectángulo de lados 6 y 2 cm.

$$V = 0,06 \cdot 0,02 \cdot 10 = 0,012 \text{ m}^3$$

**33**  Halla el área y el volumen de un cubo cuya arista mide 2 m.

$$A = 6 \cdot 2^2 = 24 \text{ m}^2; V = 2^3 = 8 \text{ m}^3$$

<http://www.McGraw-Hill.es>

**34**  Calcula el volumen de un prisma oblicuo de altura 11 cm y cuyas bases son hexágonos de área 25 cm<sup>2</sup>.

$$V = 25 \cdot 11 = 275 \text{ cm}^3$$

**35**  Halla el volumen de un prisma oblicuo cuya base es un romboide y su altura mide 16 cm. Las dimensiones de los romboides son base 5 cm y altura 6 cm.

$$V = 5 \cdot 6 \cdot 16 = 480 \text{ cm}^3$$

**36**  Calcula el volumen de un prisma recto de altura 15 cm y cuya base es un triángulo rectángulo con catetos de 9 y 10 cm de longitud.

$$V = (9 \cdot 10)/2 \cdot 15 = 45 \cdot 15 = 675 \text{ cm}^3$$

**37**  Halla el área de los siguientes poliedros sabiendo que las caras que los forman son triángulos de área 8 cm<sup>2</sup>:

- a) Un tetraedro.                      b) Un octaedro.                      c) Un icosaedro.
- a) 32 cm<sup>2</sup>                              b) 64 cm<sup>2</sup>                              c) 160 cm<sup>2</sup>

**38**  Halla el área de: un tetraedro, un octaedro y un icosaedro, sabiendo que sus caras son triángulos de 8 cm de lado.

Primeramente calculamos el área de un triángulo equilátero de lado 8. Usando el teorema de Pitágoras se llega a que dicha área es  $16 \cdot \sqrt{3}$ , que aproximadamente es 27,1 cm<sup>2</sup>. En consecuencia, las soluciones son:

- a) 110,84 cm<sup>2</sup>                      b) 221,68 cm<sup>2</sup>                      c) 554,2 cm<sup>2</sup>

**39**  Halla el área de un dodecaedro sabiendo que la medida de cada arista es 5 cm y el apotema de cada pentágono mide 3,4 cm.

$$A = 12 \cdot 25 \cdot 3,4 : 2 = 510 \text{ cm}^2$$

**40**  Halla el área y el volumen de un prisma de base cuadrada de altura 12 cm y cuyo lado de la base mide 9 cm.

$$V = 9 \cdot 9 \cdot 12 = 972 \text{ cm}^3; A = 2 \cdot 9 \cdot 9 + 4 \cdot 9 \cdot 12 = 594 \text{ cm}^2$$

**41**  Calcula el área y el volumen del prisma que resulta al apilar tres cubos de arista 10 cm.

$$V = 10^3 = 1000 \text{ cm}^3; A = 14 \cdot 10^2 = 1400 \text{ cm}^2$$

**42**  Halla el área y el volumen de un prisma regular pentagonal de altura 15 cm, base con 3 cm de lado y apotema de 2,06 cm.

$$V = (15 \cdot 2,06 : 2) \cdot 15 = 231,75 \text{ cm}^3$$

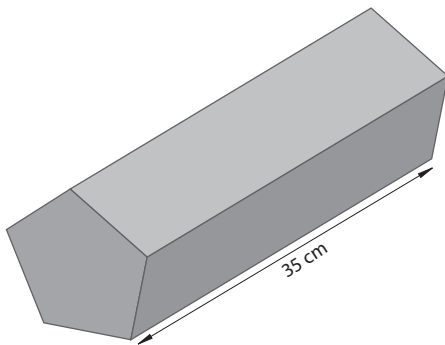
$$A = 15 \cdot 2,06 + 5 \cdot 3 \cdot 15 = 255,9 \text{ cm}^2$$

**43** Halla el área y el volumen de un prisma regular hexagonal de altura 8 cm, cuya base tiene 30 cm de perímetro y 6,04 cm de apotema.

$$V = (30 \cdot 6,04 : 2) \cdot 8 = 724,8 \text{ cm}^3$$

$$A = 30 \cdot 6,04 + 6 \cdot 5 \cdot 8 = 421,2 \text{ cm}^2$$

**44** Calcula el volumen de la siguiente barra de chocolate, sabiendo que el perímetro del pentágono es 35 cm y su apotema 5,5 cm.



$$V = (35 \cdot 5,5 : 2) \cdot 35 = 3368,75 \text{ cm}^3$$

**45** Halla el área y el volumen de una pirámide regular pentagonal de altura 3 m, sabiendo que la arista y la apotema de la base miden 4 y 2,75 m respectivamente. También se sabe que la altura de las caras triangulares es 4,1 m.

$$V = (20 \cdot 2,75 : 2) \cdot 3 : 3 = 27,5 \text{ m}^3$$

$$A = (20 \cdot 2,75 : 2) + 5 \cdot 2 \cdot 4,1 = 68,5 \text{ m}^2$$

**46** Halla el volumen de una pirámide octogonal regular de altura 4 cm. La arista de la base mide 3 cm y su apotema 3,6 cm.

$$V = (24 \cdot 3,6 : 2) \cdot 4 : 3 = 57,6 \text{ cm}^3$$

**47** Una industria juguetera fabrica «tiendas indias» de base hexagonal. Se sabe que la altura de la tienda es de 1,20 m, la altura de las caras laterales es de 1,30 m y el hexágono de la base tiene 60 cm de lado y 52 cm de apotema. Si el material que utilizan es una tela distinta para la base que para las caras laterales, ¿cuántos metros cuadrados de cada tipo de tela se necesitan para fabricar 20 tiendas?

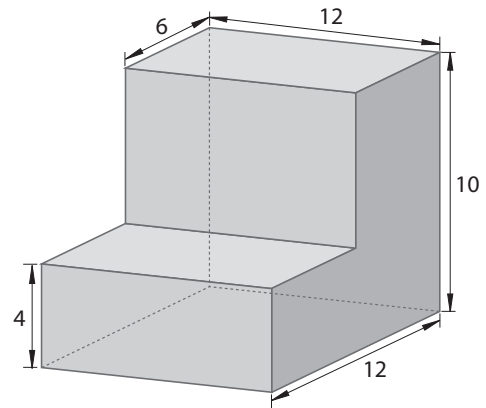
Para la base se necesitan =  $6 \cdot 0,6 \cdot 0,52 : 2 = 0,936 \text{ m}^2$ ; para las caras laterales se necesitan =  $6 \cdot (0,6 \cdot 1,3 : 2) = 2,34 \text{ m}^2$

**48** Calcula el área y el volumen de una pirámide octogonal que tiene de altura 5 m, la arista de la base mide 2 m y su apotema 2,4 m. También se sabe que la altura de cada cara lateral es 5,6 m.

$$A = 8 \cdot 2 \cdot 2,4 : 2 + 8 \cdot 2 \cdot 5,6 : 2 = 64 \text{ m}^2$$

$$V = (8 \cdot 2 \cdot 2,4 : 2) \cdot 5 : 3 = 32 \text{ m}^3$$

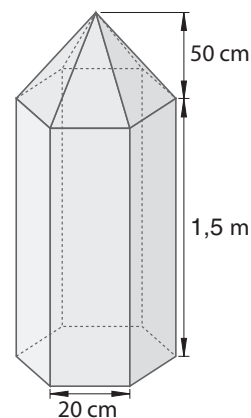
**49** Halla el área y el volumen del poliedro. Las unidades están expresadas en centímetros:



$$A = 2 \cdot (18 \cdot 12 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 6 + 12 \cdot 4) = 888 \text{ cm}^2$$

$$V = 4 \cdot 18 \cdot 12 + 10 \cdot 6 \cdot 12 = 1584 \text{ cm}^3$$

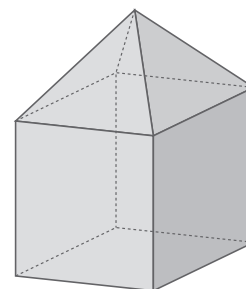
**50** En un colegio quieren poner, como decoración en el vestíbulo, un lápiz hexagonal de madera. Las medidas están en la figura. Calcula la cantidad de madera necesaria para construirlo macizo.



El apotema de la base hexagonal es 17,3 cm.

$$V = (6 \cdot 0,2 \cdot 17,3 : 2) \cdot 1,5 + (6 \cdot 0,2 \cdot 17,3 : 2) \cdot 0,5 : 3 = 17,3 \text{ m}^3 \text{ de madera.}$$

**51** Halla el volumen del siguiente poliedro, sabiendo que la arista del cubo mide 1 m y la altura de la pirámide es 60 cm.



$$V = 1 + 1 \cdot 0,6 : 3 = 1,2 \text{ m}^3$$

## EJERCICIOS

■ 1 ¿Cuáles de los siguientes objetos tienen forma de cilindro?

- a) Tubo de escape.      b) CD.  
 c) Plátano.              d) Queso.  
 e) Tiza.                  f) Barril.  
 a), d) y e).

■ 2 Un cilindro tiene 5 cm de altura y 2 cm de radio de la base. Calcula el perímetro del rectángulo que, junto con las dos bases, forma su desarrollo plano. Dibuja en un folio este desarrollo plano y recórtalo para comprobar que tus cálculos son correctos y que, por ello, encaja perfectamente al construirlo.

Perímetro del rectángulo:

$$2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) + 2 \cdot h = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 2) + 2 \cdot 5 = 8\pi + 10 = 35,12 \text{ cm}$$

Perímetro de las dos bases:

$$2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot 2) = 8\pi \text{ cm}$$

■ 3 Dibuja un cono de altura 6 cm y radio 3 cm.

Dibujo.

■ 4 Entre todos los cucuruchos con forma de cono que se pueden construir utilizando un folio, encuentra el que tiene la base más grande y determina cuánto mide la generatriz.

El que se dobla por una esquina.

■ 5 Un cono tiene una generatriz de 5 cm y su diámetro de la base mide 3 cm. Calcula el perímetro del sector circular que, junto con la base, forma su desarrollo plano. Dibuja en un folio este desarrollo plano y recórtalo para comprobar que se puede construir.

$$P_t = P_{\text{base}} + P_{\text{sector circular}}$$

$$P_t = 2 \cdot \pi \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot r + 2g \Leftrightarrow P_t = 2 \cdot \pi \cdot 1,5 + 2 \cdot \pi \cdot 1,5 + 2 \cdot 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_t = 28,84 \text{ cm}$$

■ 6 Dibuja en tu cuaderno un tronco de cono de altura 4 cm y cuyas bases tengan radios de 2 y 3 cm.

Dibujo.

■ 7 ¿Crees que un volcán podría ser considerado un tronco de cono?

Sí, porque la base del volcán es la base más grande del tronco de cono y la parte por donde sale la lava es la base más pequeña del volcán.

■ 8 Calcula aproximadamente unas medidas que tengan sentido para la altura y los radios de las bases de:

- a) Una ensaladera para seis personas con forma de tronco de cono.  
 b) Una montaña con forma de tronco de cono.

Respuesta abierta.

■ 9 Dibuja en tu cuaderno una esfera de radio 4 cm y dentro de ella, con el mismo centro, otra de radio 2 cm.

Dibujo.

■ 10 Si en un cilindro cuya base tiene un radio de 8 cm queremos guardar pelotas esféricas de radio 8 cm, ¿qué altura debe tener el cilindro para que quepan exactamente cinco pelotas?

Como el diámetro es de 16 cm, la altura total es:

$$16 \cdot 5 = 80 \text{ cm}$$

■ 11 Averigua la longitud y la latitud del lugar donde vives.

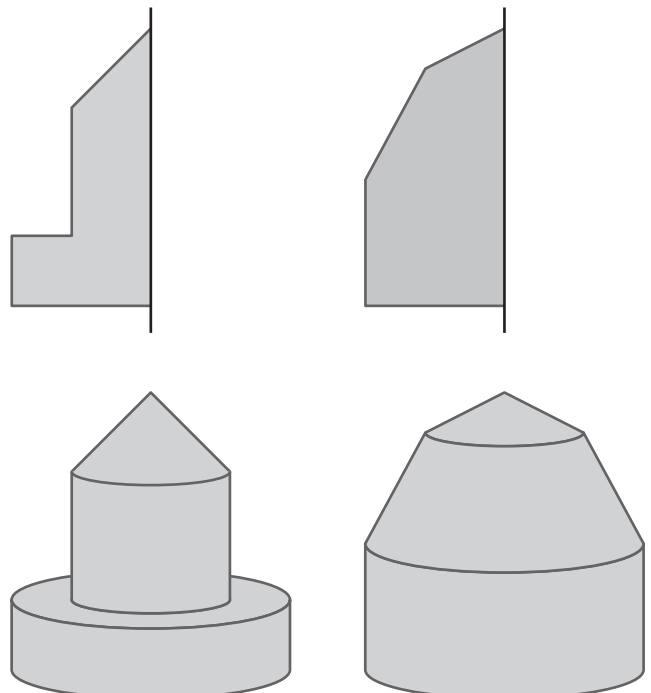
Respuesta abierta.

■ 12 Busca en un globo terrestre el meridiano de Greenwich y comprueba si pasa por alguna localidad importante de España.

Escribe en tu cuaderno el resultado de tu búsqueda.

Pasa por Zaragoza.

■ 13 Dibuja en tu cuaderno el cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar cada una de las siguientes figuras planas alrededor del eje que se indica:



**14** Determina la figura plana y el eje que generan cada uno de los siguientes cuerpos de revolución:



**15** Dibuja en tu cuaderno tres objetos de casa que sean cuerpos de revolución. Dibuja también la figura plana que genera cada uno de ellos al girar.

Barra de pegamento, vaso, aceitera, etcétera.

**16** Determina si es necesario medir el área o el volumen de un cuerpo de revolución, en cada caso, para encontrar:

- El líquido que cabe dentro.
- La madera para construirlo como escultura maciza.
- La cantidad de vidrio para fabricarlo hueco.
- La cantidad de pintura para pintarlo.

- Volumen.
- Volumen.
- Volumen.
- Área.

**17** Halla la generatriz de un cono de altura 4 cm y radio de la base 3 cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ cm}$$

**18** Sabiendo que la generatriz de un cono mide 10 cm y el radio de la base 2 cm, halla la altura.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{10^2 - 2^2} = \sqrt{96} = 9,8 \text{ cm}$$

**19** Calcula cuánto debe medir la generatriz de una caja en forma de cilindro para guardar tres pelotas de tenis, si el radio de cada pelota es 6,5 cm.

En el cilindro la generatriz mide lo mismo que la altura. El diámetro de cada pelota es de 13 cm, por lo que la altura de la caja tiene que ser de:  $13 \cdot 3 = 39 \text{ cm}$ .

**20** Halla el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro cuyo radio de la base es 10 cm y su altura 20 cm.

$$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Leftrightarrow A_{lateral} = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 20 = 1\,256 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{total} = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{total} = 1\,884 \text{ cm}^2$$

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 20 \Leftrightarrow V = 6\,280 \text{ cm}^3$$

**21** Un joyero tiene que construir dos cilindros de plata maciza: uno de altura 2 cm y radio de la base 1 cm, y otro de altura 1 cm y radio de la base 2 cm.

- ¿Cuál de ellos necesita más cantidad de plata?
- En cada caso, ¿cuáles son esas cantidades?

a) Necesita más cantidad de plata el que tiene mayor radio.

b) Para el  $C_1$   $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = 3,14 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6,28 \text{ cm}^3$

Para el  $C_2$   $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = 3,14 \cdot 2^2 \cdot 1 = 12,56 \text{ cm}^3$

**22** Halla el área y el volumen de una esfera de radio 0,4 m.

$$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow A = 4 \cdot \pi \cdot 0,4^2 = 2 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Leftrightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0,4^3 = 0,27 \text{ m}^3$$

**23** Calcula el volumen del cilindro y el cono que se describen en el experimento del margen.

Tomamos como altura del cilindro y del cono 10 cm.

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{cilindro} = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 785 \text{ cm}^3$$

$$V_{cono} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V_{cono} = \frac{3,14 \cdot 5^2 \cdot 10}{3} = 261,6 \text{ cm}^3$$

**24** Un cono de helado tiene 10 cm de altura y 2 cm de radio de la base. Halla el volumen de la bola de helado más grande que se puede poner en él. ¿Qué volumen dentro del cono queda sin helado?

El volumen de la bola es el volumen de la esfera de radio 2 cm.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Leftrightarrow V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = 33,49 \text{ cm}^3$$

Si la cantidad de helado que entra en el cono es la mitad, el volumen que queda vacío es la diferencia entre el volumen del cono y la mitad del volumen de la esfera.

$$V_{vacío} = V_{cono} - V_{\frac{1}{2}esfera} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{vacío} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{vacío} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_{vacío} = 41,87 - 16,75 \Leftrightarrow V_{vacío} = 25,12 \text{ cm}^3$$



**25** Dado un cono de altura 8 cm, radio de la base 4 cm, halla su generatriz. Imagina que se secciona ese cono por un plano paralelo a la base de forma que el cono que resulta tiene de altura 3 cm. Halla la generatriz de este nuevo cono, así como el área lateral, el área total y el volumen del tronco de cono que se ha obtenido al seccionarlo.

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8,9 \text{ cm}$$

Para calcular la generatriz del cono pequeño aplicamos el teorema de Tales:

$$\frac{8}{8,9} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3 \cdot 8,9}{8} = 3,33 \text{ cm}$$

Para calcular el radio del cono pequeño aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{3,33^2 - 3^2} = 1,45 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral tronco}} = \pi \cdot R \cdot G - \pi \cdot r \cdot g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_l = 3,14 \cdot 4 \cdot 8,9 - 3,14 \cdot 1,45 \cdot 3,33 \Leftrightarrow A_l = 96,62 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total tronco}} = \pi \cdot R \cdot G - \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

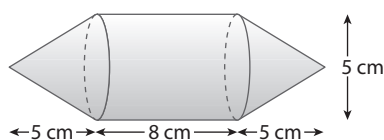
$$A_t = 3,14 \cdot 4 \cdot 8,9 - 3,14 \cdot 1,45 \cdot 3,33 + 3,14 \cdot 4^2 + 3,14 \cdot 1,45^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_t = 96,62 + 56,84 = 153,46 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V = \frac{3,14 \cdot 4^2 \cdot 8}{3} - \frac{3,14 \cdot 1,45^2 \cdot 3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 133,97 - 6,6 = 127,37 \text{ cm}^3$$

**26** Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo de revolución:



La figura se descompone en otras más sencillas, como un cilindro de radio 2,5 cm y de altura 8 cm, y en dos conos de 2,5 cm de radio y 5 cm de altura. La generatriz del cono es:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{5^2 + 2,5^2} = 5,6 \text{ cm}$$

Área lateral del cilindro:

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5 \cdot 8 = 125,6 \text{ cm}^2$$

Área lateral de los dos conos:

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot g \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 2,5 \cdot 5,6 = 87,92 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área}_{\text{total}} = 125,6 + 87,92 = 213,52 \text{ cm}^2$$

Volumen del cilindro:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = 3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 8 \Leftrightarrow V = 157 \text{ cm}^3$$

Volumen de los dos conos:

$$V_{\text{conos}} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V_{\text{conos}} = 2 \cdot \frac{3,14 \cdot 2,5^2 \cdot 5}{3} = 65,42 \text{ cm}^3$$

Volumen total:

$$V_{\text{total}} = 157 + 65,42 = 222,42 \text{ cm}^3$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

### CILINDROS

**1**  Determina cuáles de los siguientes objetos no pueden tener nunca forma de cilindro:

- La pata de una mesa.
- Un gorro.
- Un embudo.
- Una tubería.
- Un botón de un electrodoméstico.
- Un palillo de dientes.

b), c), f).

**2**  Un bote de espárragos tiene forma de cilindro de altura 14 cm y diámetro de la base 5 cm. Describe la figura plana que genera este cuerpo de revolución al girar.

Es un rectángulo de 14 cm de altura y de base  $5\pi$  cm.

**3**  Dibuja dos cilindros con la misma altura, uno cuya base tenga un radio de 2 cm, y otro cuya base tenga un radio de 4 cm.

Dibujo.

**4**  Dibuja el desarrollo plano de un cilindro de altura 4 cm y radio de la base 2 cm. ¿Qué podrías hacer para comprobar que lo has hecho bien?

La longitud de la base del cilindro debe medir lo mismo que la longitud de la circunferencia:  $4\pi$ .

**5**  Describe las instrucciones para construir un cilindro hueco de altura 15 cm y cuya base tenga un radio de 5 cm. Las instrucciones deben ser lo más detalladas posible.

Se dibujan dos circunferencias de 5 cm de radio. Luego un rectángulo de 15 cm de altura y de base  $10\pi$  cm.

**6**  Una hoja de papel de formato DIN-A4 mide 29,7 cm x 21 cm. Utilizando toda la hoja se puede formar un cilindro, sin bases, de dos formas distintas: uno delgado y alto y otro grueso y bajo. Averigua la altura de cada uno de los cilindros.

La altura del cilindro delgado y alto es de 29,7 cm, y la altura del cilindro grueso y bajo es de 21 cm.

## CONOS

**7**  Determina cuáles de los siguientes objetos no pueden tener nunca forma de cono:

- a) La pata de una mesa.      b) Un gorro.  
c) Un embudo.                d) Una tubería.  
e) Un vaso.                    f) Un árbol.

a), d), e).

**8**  Un helado tiene forma de cono de altura 12 cm y radio de la base 3 cm. Describe la figura plana que genera este cuerpo de revolución al girar. Indica sus dimensiones.

La figura plana que genera es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 y 3 cm.

**9**  Dibuja un cono de altura 3 cm y radio de la base 2 cm.

Dibujo.

**10**  Dibuja un cono cuya base tenga un radio de 2 cm y su generatriz sea 5 cm.

Dibujo.

**11**  En el cono del ejercicio anterior, marca en un color la altura y en otro la generatriz. ¿Cuál de los dos segmentos es más largo?

La generatriz.

**12**  Un cono tiene radio de la base 5 cm y generatriz 10 cm. Un cilindro tiene radio de la base 5 cm y altura 10 cm. ¿Cuál de los dos cuerpos es más alto?

El cilindro, porque la altura del cono es inferior a su generatriz.

## TRONCOS DE CONO

**13**  Determina cuáles de los siguientes objetos no pueden tener nunca forma de tronco de cono:

- a) La pata de una mesa.      b) Un gorro.  
c) Un embudo.                d) Una tubería.  
e) Un clavo.                    f) Un taburete.

a), b), c), d), e).

**14**  Dibuja un tronco de cono de altura 4 cm y radios de las bases 2 y 5 cm.

Dibujo.

**15**  Dibuja un tronco de cono cuyas bases tengan radios de 1 cm y 3 cm y su generatriz mida 4 cm.

Dibujo.

**16**  En el tronco de cono del ejercicio anterior, marca en un color la altura y en otro la generatriz. ¿Cuál de los dos segmentos es más largo?

La generatriz.

**17**  La generatriz de un tronco de cono mide 20 cm. Un cono tiene la generatriz también de 20 cm. ¿Cuál de los dos cuerpos es más alto?

Los dos tienen la misma altura.

**18**  La altura de un cono mide 8 cm, si cortamos ese cono por un plano paralelo a la base a 2 cm del vértice, ¿cuánto mide la altura del tronco de cono que se obtiene?

$$8 - 2 = 6 \text{ cm}$$

## ESFERAS

**19**  Dibuja una esfera de radio 3 cm.

Dibujo.

**20**  Queremos dibujar tres esferas con el mismo centro, de forma que la superficie de cada una esté a 10 cm de la siguiente. Si la primera tiene un diámetro de 1 m, calcula los radios de las otras dos.

La primera tiene un radio de 50 cm, la segunda tiene un radio de 60 cm y la tercera tiene un radio de 70 cm.

**21**  Busca en un atlas y escribe por qué continentes pasa el ecuador.

Continente africano y continente americano.

**22**  A, B y C son tres puntos sobre la superficie de la Tierra. Averigua, en cada uno de los siguientes casos, cuáles son los dos puntos más próximos.

- a) A: 20° N, 12° E      B: 14° N, 12° E      C: 25° N, 12° E  
b) A: 2° N, 5° E      B: 2° N, 5° O      C: 2° N, 13° E  
c) A: 1° N, 5° E      B: 2° N, 4° E      C: 1° N, 3° O

Los puntos más próximos son:

- a) A y C                      b) A y C                      c) A y B

**23**  Encuentra la longitud y la latitud de un punto que esté:

- a) En el mar Mediterráneo.  
b) En el océano Atlántico.

Hay muchísimos, por ejemplo:

- a) 35° N, 20° E                      b) 45° N, 16° O

**24**  Cita el nombre de tres países por los que pase el paralelo 10° N.

Entre otros, son válidos: Costa Rica, Venezuela, Nigeria, Guinea, Chad, Sudán, Etiopía, Somalia, India.

**25**  Encuentra la longitud y latitud de Madrid y escribe la longitud y latitud del punto que está en las antípodas. ¿Está en el agua? Si la respuesta es afirmativa, ¿en qué mar u océano se encuentra? ¿Cuál es el continente más próximo? Si la respuesta es negativa, ¿en qué continente está ese punto?

Aproximadamente: 40° N, 4° Oeste,

El punto en las antípodas es 40° S, 176° E (pues hay 180° al este y 180° al oeste), está en el Océano Pacífico, muy cerca de Nueva Zelanda, por tanto el continente más próximo es Oceanía.

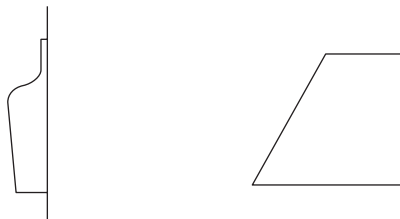
## OTROS CUERPOS DE REVOLUCIÓN

**26**  ¿Cuáles de las siguientes figuras son cuerpos de revolución?

El embudo.

**27**  Dibuja una botella y un flan y, al lado, la figura plana y el eje que genera cada uno de ellos.

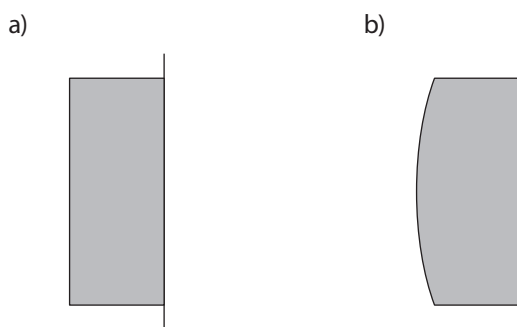
Por ejemplo:



**28**  Investiga qué figuras de ajedrez son cuerpos de revolución.

El peón, la torre, el alfil y la reina.

**29**  Dibuja la figura plana y el eje que genera cada uno de los siguientes cuerpos de revolución:



c)



d)



**30**  ¿Qué cuerpo geométrico se genera al hacer girar un triángulo isósceles alrededor del lado desigual? Dibújalo.

Un cono con la misma altura que su radio.

**31**  ¿Qué cuerpo geométrico se obtiene al hacer girar un trapecio isósceles alrededor de su base mayor? Dibújalo.

Un cilindro y dos conos en cada una de sus bases.

**32**  ¿Qué cuerpo geométrico se genera al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de su hipotenusa? Dibújalo.

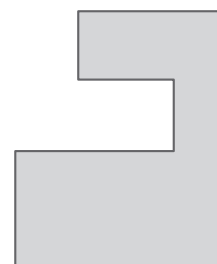
Dos conos.

**33**  Dibuja el cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar cada una de las siguientes figuras planas alrededor del eje indicado:

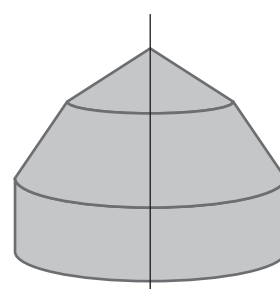
a)



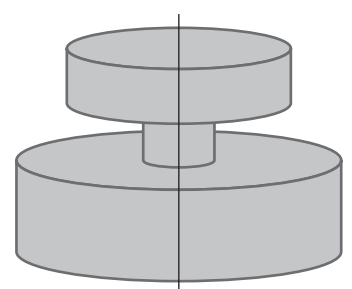
b)




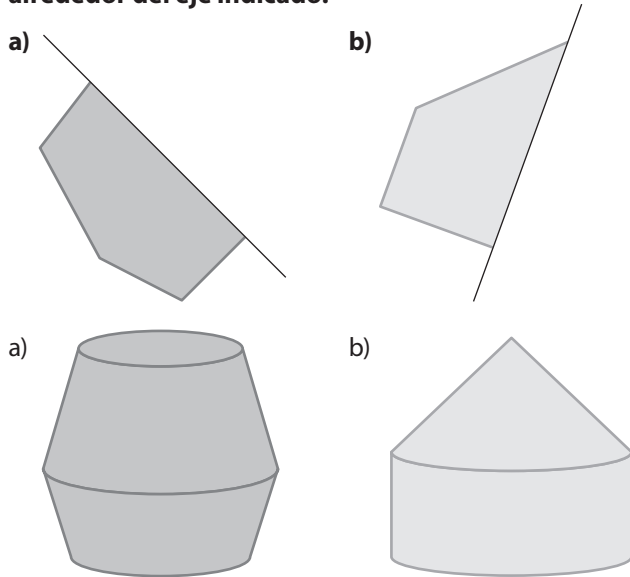
a)



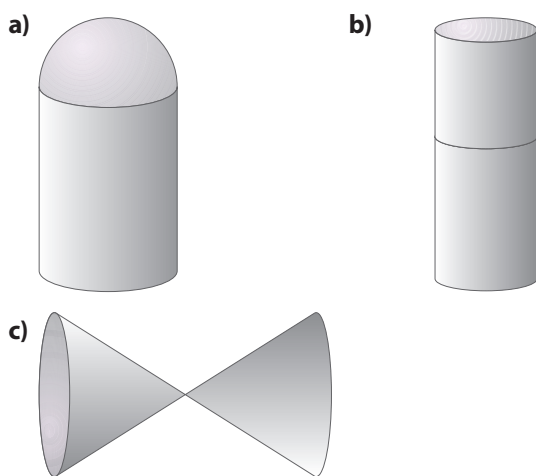
b)




**34**  Dibuja el cuerpo de revolución que se genera al hacer girar cada una de las siguientes figuras planas alrededor del eje indicado:



**35**  ¿Cuáles de los siguientes cuerpos de revolución tienen desarrollo plano?



- a) No tiene, puesto que la semiesfera no tiene desarrollo plano.
- b) Aunque cada cilindro tiene desarrollo plano, el cuerpo compuesto por los dos no tiene pues es imposible abrir el cuerpo y extenderlo sobre una superficie plana sin que se superponga una superficie sobre otra.
- c) Sí tiene desarrollo plano, que consiste en los desarrollos de ambos conos unidos por el vértice común.

**36**  Un cuerpo de revolución cualquiera puede tener desarrollo plano o no. Describe de qué cuerpos de revolución de los que has estudiado en esta Unidad tiene que estar compuesto para que tenga desarrollo plano.

Puede estar compuesto de cilindros y conos, pero de forma que las bases coincidan. En ningún caso puede incluir una esfera o semiesfera, ya que éstas no tienen desarrollo plano.

**MEDIDAS**

**37**  Halla la altura de un cono cuya generatriz mida 5 cm y el radio de la base sea 3 cm.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{5^2 - 3^2} \Leftrightarrow h = 4 \text{ cm}$$

**38**  Halla la generatriz de un cilindro sabiendo que la altura es 12 cm y el radio de la base 4 cm.

La generatriz tiene la misma medida que la altura: 12 cm.

**39**  Sabiendo que la generatriz de un cono mide 10 cm y el radio de la base 6 cm, halla su altura.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{10^2 - 6^2} \Leftrightarrow h = 8 \text{ cm}$$

**40**  Compara el radio de la base de los dos conos que se describen en cada apartado:

- a) Cono 1:  $h = 10 \text{ cm}$      $g = 14 \text{ cm}$   
     Cono 2:  $h = 8 \text{ cm}$      $g = 9,8 \text{ cm}$
- b) Cono 1:  $h = 60 \text{ cm}$      $g = 1 \text{ m}$   
     Cono 2:  $h = 80 \text{ cm}$      $g = 90 \text{ cm}$

a) Aplicamos el teorema de Pitágoras:

Para el cono 1:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{14^2 - 10^2} \Leftrightarrow r = 9,79 \text{ cm}$$

Para el cono 2:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{9,8^2 - 8^2} \Leftrightarrow r = 5,66 \text{ cm}$$


b) Aplicamos el teorema de Pitágoras:

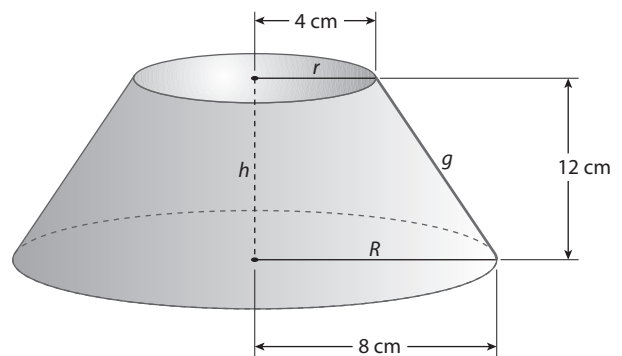
Para el cono 1:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{1^2 - 0,6^2} \Leftrightarrow r = 0,8 \text{ m}$$

Para el cono 2:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{g^2 - h^2} \Leftrightarrow r = \sqrt{90^2 - 80^2} \Leftrightarrow r = 41,23 \text{ m}$$

**41**  Halla la generatriz de un tronco de cono cuya altura mide 12 cm y los radios de ambas bases miden 8 cm y 4 cm.



$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{12^2 + 4^2} \Leftrightarrow g = 12,65 \text{ cm}$$

**42**  ¿Cuál es la altura de un tronco de cono si su generatriz mide 20 cm y los radios de las bases son 12 cm y 9 cm?

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2} \Leftrightarrow h = \sqrt{20^2 - 3^2} \Leftrightarrow h = 19,77 \text{ cm}$$

**43**  Halla el área lateral y el área total de un cilindro de 2 m de altura y 30 cm de radio de la base.

$$A_{\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3 \cdot 2 = 3,77 \text{ m}$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{total}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3 \cdot 2 + 2 \cdot 3,14 \cdot 0,3^2 \Leftrightarrow A_{\text{total}} = 4,34 \text{ m}^2$$

**44**  Halla el área total de un cilindro de altura 55 cm y diámetro de la base 20 cm.


$$A_{\text{total}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 55 + 2 \cdot 3,14 \cdot 10^2 = 4082 \text{ cm}^2$$

**45**  Calcula el área total de un cono que tiene 15 cm de radio de la base y generatriz de 20 cm.

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{total}} = 3,14 \cdot 15 \cdot 20 + 3,14 \cdot 15^2 \Leftrightarrow A_{\text{total}} = 1648,5 \text{ cm}^2$$

**46**  Halla el área lateral y el área total de un cono cuya generatriz mide 60 cm y el diámetro de la base es 30 cm.

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot r \cdot g \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 3,14 \cdot 15 \cdot 60 = 2826 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{total}} = 2826 + 3,14 \cdot 15^2 \Leftrightarrow A_{\text{total}} = 3532,5 \text{ cm}^2$$

**47**  ¿Cuál es el área de una esfera de radio 40 cm?

$$A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 40^2 \Leftrightarrow A_{\text{esfera}} = 20096 \text{ cm}^2$$


**48**  Halla el área y el volumen de una esfera de diámetro 1,5 m.

$$A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \Leftrightarrow A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot 0,75^2 \Leftrightarrow A_{\text{esfera}} = 7,04 \text{ m}^2$$


$$V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \Leftrightarrow V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 0,75^3}{3} = 1,76 \text{ m}^3$$

**49**  Halla el volumen de un cilindro cuya altura sea de 5 m y su radio de la base de 2 m.


$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 62,80 \text{ m}^3$$

**50**  Un colador en forma de cono tiene una base de radio 5 cm y una altura de 14 cm. ¿Cuánta cantidad de líquido puedo colar de una vez?

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 14}{3} = 366,33 \text{ cm}^3$$

**51**  El volumen de un cono es 30 cm<sup>3</sup>. Sabiendo que el área de la base es 18 cm<sup>2</sup>, calcula su altura.

$$V = A_{\text{base}} \cdot \frac{h}{3} \Leftrightarrow h = \frac{V \cdot 3}{A_{\text{base}}} \Leftrightarrow h = \frac{30 \cdot 3}{18} = 5 \text{ cm}$$


**52**  Un cilindro tiene de altura 15 cm y de radio de la base 3 cm. Un cono tiene también de altura 15 cm y de radio de la base 3 cm. Halla el volumen de los dos cuerpos. ¿Qué relación tienen los dos números entre sí?

(Orientación: observa y compara las dos expresiones para calcular los volúmenes.)

$$V_{\text{cono}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3}$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = 423,90 \text{ cm}^3$$


$$V_{\text{cono}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3} \Leftrightarrow V_{\text{cono}} = \frac{423,90}{3} = 141,30 \text{ cm}^3$$

**53**  En una caja con forma de cilindro de altura 30 cm y radio de la base 5 cm se guardan tres pelotas de diámetro 10 cm. Calcula el volumen de la parte de la caja que queda desocupada.

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 30 \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = 2355 \text{ cm}^3$$

$$V_{3 \text{ pelotas}} = 3 \cdot \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} \Leftrightarrow V_{3 \text{ pelotas}} = 4 \cdot \pi \cdot 5^3 = 1570 \text{ cm}^3$$


$$V_{\text{desocupado}} = V_{\text{cilindro}} - V_{3 \text{ pelotas}} = 2355 - 1570 = 785 \text{ cm}^3$$

**54**  En una caja con forma de cilindro de 1 m de alto y 30 cm de diámetro se guarda un cono de 1 m de alto y 30 cm de diámetro de la base. Calcula el volumen de la parte de la caja que queda desocupada.

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 15^2 \cdot 100 = 70650 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{cono}} = \frac{V_{\text{cilindro}}}{3} \Leftrightarrow V_{\text{cono}} = \frac{70650}{3} = 23550 \text{ m}^3$$

$$V_{\text{desocupado}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}} = 70650 - 23550 = 47100 \text{ m}^3$$

**55**  Calcula y compara la cantidad máxima de agua que pueden contener cada uno de los siguientes vasos:

a) Uno de ellos tiene forma de cilindro de altura 15 cm y radio de la base 3 cm.


b) El otro tiene forma de tronco de cono obtenido al seccionar un cono imaginario de altura 20 cm por un plano paralelo a la base a 5 cm de distancia del vértice. Los radios de las bases del tronco son 2 y 4 cm.

$$a) V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 \Leftrightarrow V_{\text{cilindro}} = 423,9 \text{ cm}^3$$

$$b) V_{\text{tronco cono}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 20}{3} - \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 5}{3} = 314 \text{ cm}^3$$

**56**  Un cono de altura 20 cm y cuyo radio de la base es 4 cm, se corta paralelamente a la base suprimiendo así un cono de altura 5 cm. Sabiendo que el radio de la base del cono suprimido es 1 cm, calcula la generatriz de ambos conos. Halla también el área lateral y total del tronco de cono obtenido al cortar.

Para calcular la generatriz aplicamos el teorema de Pitágoras.

Para el cono grande:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{20^2 + 4^2} \Leftrightarrow g = 20,39 \text{ cm}$$

Para el cono pequeño:

$$g^2 = h^2 + r^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{h^2 + r^2} \Leftrightarrow g = \sqrt{5^2 + 1^2} \Leftrightarrow g = 5,1 \text{ cm}$$

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot R \cdot G - \pi \cdot r \cdot g$$

$$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot 4 \cdot 20,39 - \pi \cdot 1 \cdot 5,1 \Leftrightarrow A_{\text{lateral}} = 240,08 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot R \cdot G - \pi \cdot r \cdot g + \pi R^2 + \pi r^2$$

$$A_{\text{total}} = \pi \cdot 4 \cdot 20,39 - \pi \cdot 1 \cdot 5,1 + \pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$


$$\Leftrightarrow A_{\text{total}} = 293,46 \text{ cm}^2$$

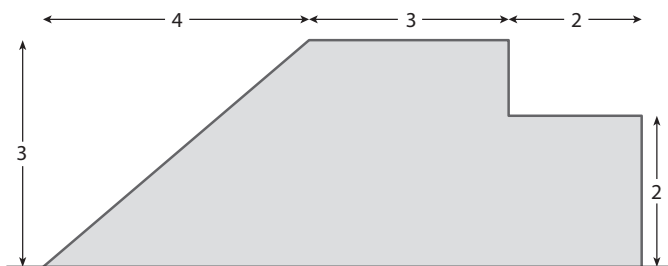
**57**  Halla el volumen del tronco de cono del ejercicio anterior.

$$V_{\text{tronco cono}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}}$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 20}{3} - \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 5}{3} = 329,70 \text{ cm}^3$$

**58**  Halla el volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al hacer girar la figura plana alrededor del eje (las unidades se expresan en metros):



Para calcular el volumen del cuerpo compuesto, lo dividimos en dos cilindros y un cono.

$$\text{Volumen del cilindro pequeño} = 2^2 \cdot \pi \cdot 2 = 25,1 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen del cilindro grande} = 3^2 \cdot \pi \cdot 3 = 84,8 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 12 \cdot \pi = 37,7 \text{ m}^3$$

El volumen del cuerpo total es la suma de los tres volúmenes calculados:

$$\text{Volumen del cuerpo} = 25,1 + 84,8 + 37,7 = 147,6 \text{ m}^3$$

**59**  Halla el área del cuerpo de revolución del ejercicio anterior.


Para calcular el área lo dividimos en tres cuerpos: un cilindro pequeño, un cilindro grande y un cono, teniendo en cuenta que la base del cono y una de las bases del cilindro grande quedan en el interior del cuerpo, luego no hay que sumarlas para calcular el total. También una de las bases del cilindro pequeño queda en el interior, así que tampoco debe sumarse. Por último, hay que considerar que la base del cilindro grande por la que se une al cilindro pequeño sólo queda en el exterior parcialmente; para ser exactos, una corona circular de radios 3 y 2 m.

La generatriz del cono puede calcularse utilizando el teorema de Pitágoras, sabiendo que la altura es 4 y el radio 3:

$$g = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}$$

Área del cuerpo = Área lateral del cono + Área lateral del cilindro grande + Área lateral del cilindro pequeño + Área de una base del cilindro pequeño + Área de la corona circular =

$$\begin{aligned} & \pi \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot \pi \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 2 + \pi \cdot 2^2 + 5 \cdot \pi = \\ & = 47,1 + 56,5 + 25,1 + 12,6 + 15,7 = 157 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

**60**  Una torre está formada por un cilindro de altura 4 m y radio de la base 1,2 m, sobre la que se apoya un cono con el mismo radio de la base y altura 1,5 m. Halla el área y el volumen de la torre, teniendo en cuenta que, las ventanas y la puerta ocupan en total una superficie de 5 m<sup>2</sup>.

a) Área de la torre = Área lateral del cilindro + Área lateral del cono - 5.

En primer lugar calculamos la generatriz del cono utilizando el teorema de Pitágoras, sabiendo que la altura es 1,5 y el radio 1,2:

$$g = \sqrt{1,5^2 + 1,2^2} = \sqrt{3,69} = 1,9 \text{ m}$$

Área de la torre:

$$2 \cdot \pi \cdot 1,2 \cdot 4 + \pi \cdot 1,2 \cdot 1,9 - 5 = 30,1 + 7,2 - 5 = 32,3 \text{ m}^2$$

b) Volumen de la torre = Volumen del cilindro + Volumen del cono.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Leftrightarrow V = \pi \cdot 1,2^2 \cdot 4 + \frac{\pi \cdot 1,2^2 \cdot 1,5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = 20,35 \text{ m}^3$$

## EJERCICIOS

**1** Decide cuáles de las siguientes son variables estadísticas:

- a) ¿Cómo son de interesantes los programas de televisión?
  - b) ¿Qué tipo de sangre tienen un grupo de personas?
  - c) ¿Cuántos habitantes tienen los pueblos de una comarca?
  - d) ¿Cuánto se aburren los alumnos de 2.º A en clase de Matemáticas?
- b) y c)

**2** Para cada una de las variables estadísticas siguientes, identifica si las respuestas correspondientes a cada una se obtendrían mediante encuesta, aparato de medición u observación (el individuo correspondiente se indica entre paréntesis):

- a) Edad (vecinos de una casa).
  - b) Sexo (alumnos de una clase).
  - c) Nivel de colesterol (empleados de una empresa).
  - d) Marca (coches de un aparcamiento).
  - e) Contaminación (barrios de una ciudad).
- a) Encuesta.                      b) Observación.  
 c) Aparato de medición.      d) Observación.  
 e) Aparato de medición.

**3** Clasifica cada una de las siguientes variables estadísticas:

- a) Número de libros que lleva hoy en la mochila cada alumno de 2.º A.
- b) Talla de calzado que utiliza cada miembro de un club de tenis.
- c) Primera bebida que toma cada uno de los asistentes a una fiesta de cumpleaños.

Cuantitativas: a), b). Cualitativa: c).

**4** Escribe, para cada una de las variables estadísticas del ejercicio anterior, la población y los individuos.

- a) Población: número de libros; individuos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
- b) Población: talla de calzado; individuos: ..., 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43...
- c) Población: primera bebida que toma cada uno de los asistentes a una fiesta de cumpleaños; Individuos: Coca Cola, fanta...

**5** Inventa 10 datos para cada variable estadística del ejercicio 3.

Respuesta abierta, basada en el enunciado.

**6** En el ejemplo anterior, identifica la variable estadística, el individuo y la población.

Ver el ejemplo.

**7** Se desea estudiar en qué clases de un colegio hace más falta poner aire acondicionado, pues no hay presupuesto suficiente para instalarlo en todas las clases. Diseña un estudio estadístico explicando cuál es la variable estadística e indicando quiénes son los individuos y la población.

Diseño de un estudio estadístico.

**8** El fabricante de una marca de refrescos quiere saber a qué precios se está vendiendo la lata de su marca en los bares de un pueblo. Diseña un estudio estadístico explicando cuál es la variable estadística, detallando quiénes son los individuos y describiendo la población.

¿Cuál te parece que sería la forma adecuada de recoger los datos?

Diseño de un estudio estadístico.

**9** El número de surtidores de gasolina en las gasolineras de la carretera N-149 es:

4, 3, 5, 8, 2, 4, 6, 4, 7, 8, 6, 3, 5, 4, 8

Construye la tabla de frecuencias correspondiente.

¿Cuántos datos y cuántos valores hay en este estudio estadístico?

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
2	1	0,07	7
3	2	0,13	13
4	4	0,27	27
5	2	0,13	13
6	2	0,13	13
7	1	0,07	7
8	3	0,20	20
Total	15	1	100

**10** En los colegios de una ciudad pequeña se estudia cuántas variedades de bocadillos venden en la cafetería durante el recreo. Para ello, se visitan todos los colegios de la ciudad y preguntando en su cafetería se obtienen los siguientes datos:

2, 4, 1, 5, 3, 2, 2, 3, 5, 4

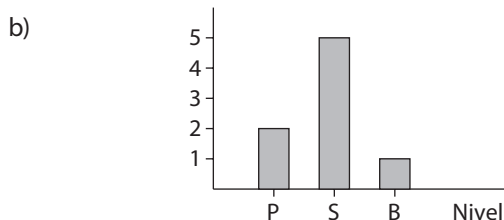
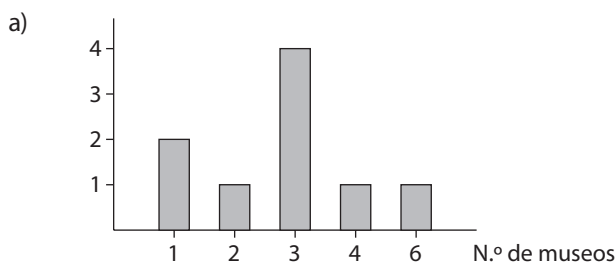
Construye la tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
1	1	0,1	10
2	3	0,3	30
3	2	0,2	20
4	2	0,2	20
5	2	0,2	20
Total	10	1	100

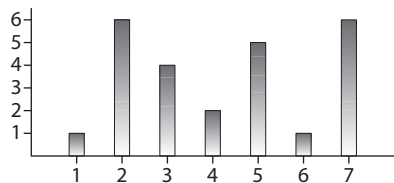
**11** Construye el diagrama de barras que corresponde a la variable estadística:

a) Número de museos que hay en cada una de las ciudades de una provincia: 3, 1, 6, 3, 2, 3, 4, 1, 3.

b) Nivel en el que están cada uno de los miembros del grupo de teatro de un colegio: P (primaria), S (secundaria), B (bachillerato): P, P, S, S, S, S, S, B.



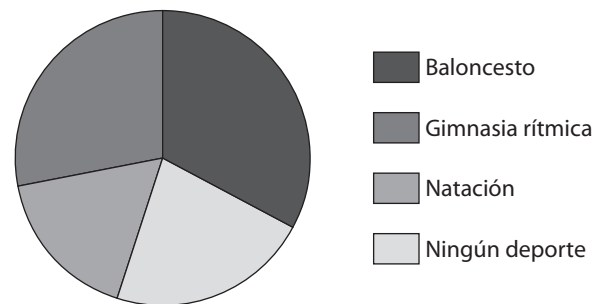
**12** Construye la tabla de frecuencias correspondiente a este diagrama de barras:



Valor	Frecuencia absoluta
1	1
2	6
3	4
4	2
5	5
6	1
7	6
Total	25

**13** En la clase de Ana hay 6 chicas que practican baloncesto, 4 que hacen gimnasia rítmica, 3 que van a natación y 5 que no practican ningún deporte fuera del colegio. Representa esta variable estadística en un diagrama de sectores.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
Baloncesto	6	0,33	118,8
Gimnasia rítmica	4	0,22	79,2
Natación	3	0,17	61,2
Ningún deporte	5	0,28	100,8
Total	18	1	360

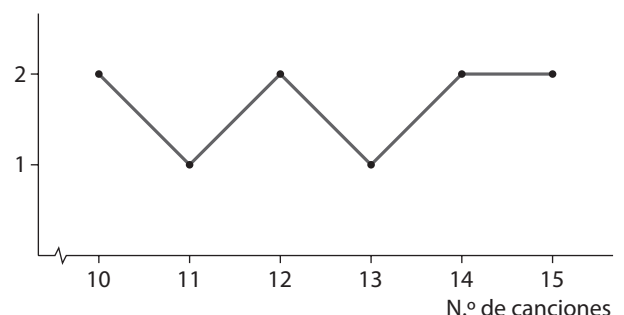


**14** Lucas ha reunido todos sus CD y ha anotado el número de canciones que tiene cada uno:

14, 12, 15, 11, 10, 14, 13, 12, 15, 10

Dibuja el polígono de frecuencias correspondiente.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
10 canciones	2	0,2
11 canciones	1	0,1
12 canciones	2	0,2
13 canciones	1	0,1
14 canciones	2	0,2
15 canciones	2	0,2
Total	10	1





## EJERCICIOS PROPUESTOS

### ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

**15** A las 11 de la mañana las temperaturas de los últimos días en el termómetro que hay en la Plaza Mayor han sido: 18, 22, 24, 20, 22, 20, 25, 20, 19. Halla la media aritmética y la moda. Ordena los datos y averigua también cuál es la mediana.

$$\bar{x} = \frac{18 + 22 + 24 + 20 + 22 + 20 + 25 + 20 + 19}{9} = \frac{190}{9} = 21,11$$

$$Mo = 20$$

Ordenamos los datos: 18, 19, 20, 20, 20, 22, 22, 24, 25.

$$Me = 20$$

**16** Halla la mediana en cada uno de los siguientes conjuntos de datos:

a) 30, 35, 41, 46, 50

b) 2, 3, 5, 5, 6, 8, 10, 11

c) 8, 10, 4, 7, 5

d) 15, 20, 19, 17

a) Me = 41

b) Me = 5,5

c) Me = 7

d) Me = 18

**17** El tiempo que tardan, expresado en minutos, en llegar al colegio un grupo de alumnos es:

10, 15, 12, 20, 8

Halla la media aritmética, el rango y la desviación media.

$$\bar{x} = \frac{10 + 15 + 12 + 20 + 8}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$\text{Rango} = 20 - 8 = 12$$

$$DM = \frac{|13 - 10| + |13 - 15| + |13 - 12| + |13 - 20| + |13 - 8|}{5} = \frac{3 + 2 + 1 + 7 + 5}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$$

**18** Halla el rango y la desviación media de la variable estadística «número de veces que han llamado a Paula por teléfono cada día de la semana pasada»:

3, 1, 0, 4, 1, 5, 3

$$\bar{x} = \frac{3 + 1 + 0 + 4 + 1 + 5 + 3}{7} = \frac{17}{7} = 2,43$$

$$\text{Rango} = 5 - 0 = 5$$

$$DM = \frac{|3,6 - 3| + |3,6 - 1| + |3,6 - 0| + |3,6 - 4| + |3,6 - 1| + |3,6 - 5| + |3,6 - 3|}{7} = \frac{0,6 + 2,6 + 3,6 + 0,4 + 2,6 + 1,4 + 0,6}{7} = \frac{11,8}{7} = 1,69$$

**1** Clasifica cada una de las siguientes variables estadísticas:

a) Canción favorita.

b) Peso.

c) Número de hermanos.

d) Profesión que te gustaría tener en el futuro.

e) Suspensos en la pasada evaluación.

f) Edad.

a) Cualitativa

b) Cuantitativa

c) Cuantitativa

d) Cualitativa

e) Cuantitativa

f) Cuantitativa

**2** En cada uno de los siguientes estudios estadísticos identifica el individuo. Se pretende estudiar:

a) Las temperaturas mínimas en un pueblo de la sierra en el mes de enero.

b) Las ventas en los bares de una ciudad de un nuevo refresco en un día.

c) Los gastos de teléfono fijo de un grupo de familias en un mes.

a) Los días del mes de enero.

b) Propietario del bar.

c) Las familias.

**3** Queremos estudiar la afición a la música de los jóvenes de 2.º de ESO en un colegio con 25 alumnos de ese nivel. Diseña un estudio estadístico detallando la variable estadística, el individuo y la población. Escribe también de qué tipo es la variable.

Diseño de un estudio estadístico.

**4** El responsable de la Casa de la Juventud quiere saber si los ordenadores que tienen para los jóvenes se están utilizando y con qué regularidad, de modo que decide estudiar el tema a lo largo de una semana. Ayúdale diseñando un estudio estadístico: debes decirle cuál es la variable estadística, el individuo y la población.

Diseño de un estudio estadístico.

**5** El dueño de la tienda de chucherías que hay al lado del colegio quiere saber cuál es la preferida de los niños, así que decide hacer una encuesta a lo largo de un día. Ayúdale diseñando un estudio estadístico: debes decirle cuál es la variable estadística, el individuo y la población. ¿Le aconsejarías elegir una muestra?

Diseño de un estudio estadístico.

## TABLAS DE FRECUENCIAS

**6**  En una clase de gimnasia rítmica las edades son:

12, 12, 12, 13, 13, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 16

Organiza los datos en una tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
12	3	0,19	19
13	5	0,31	31
14	4	0,25	25
15	3	0,19	19
16	1	0,06	6
Total	16	1	100

**7**  El lunes, en la clase de Petra, el profesor ha preguntado cuántas horas había dedicado cada uno el día anterior a ver la televisión. Las respuestas fueron:

0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5

Resume los datos en una tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
0	2	0,13	13
1	3	0,19	19
2	5	0,31	31
3	3	0,19	19
4	2	0,13	13
5	1	0,06	6
Total	16	1,01	101

**8**  Construye una tabla de frecuencias, absolutas y relativas, para el siguiente conjunto de datos:

4, 5, 7, 4, 6, 3, 5, 5, 7, 3, 4, 5, 4, 3, 6

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
3	3	0,20	20
4	4	0,27	27
5	4	0,27	27
6	2	0,13	13
7	2	0,13	13
Total	15	1	100

**9**  En un parque se quiere dedicar un espacio a una instalación deportiva, y para ello se pregunta a una muestra de vecinos por su preferencia: tenis (T), baloncesto (B) o voleibol (V). Las respuestas fueron:

T, B, V, B, B, V, T, B, T, V, B, V, T, B, B, T, V, T, V, B

Haz la tabla de frecuencias, incluyendo absolutas, relativas y porcentajes.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
Tenis	6	0,30	30
Baloncesto	8	0,40	40
Voleibol	6	0,30	30
Total	20	1	100

**10**  La madre de Alberto ha trabajado las siguientes horas cada uno de los días de las dos últimas semanas:

3, 8, 4, 8, 5, 5, 4, 8, 6, 8

Resume los datos en una tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
3	1	0,10	10
4	2	0,20	20
5	2	0,20	20
6	1	0,10	10
8	4	0,40	40
Total	10	1	100

**11**  Ayer, en un restaurante, anotaron el número de comensales en cada mesa. Los resultados fueron:

4, 3, 2, 2, 2, 1, 3, 2, 2, 1, 5, 3, 4, 2, 2, 4, 1

Construye la tabla de frecuencias. ¿Qué porcentaje de mesas han tenido tres comensales o más?

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
1	3	0,18	18
2	7	0,41	41
3	3	0,18	18
4	3	0,18	18
5	1	0,06	6
Total	17	1,01	101

42%

**12**  A Pablo le gusta correr un poco por las tardes después de trabajar. Da vueltas en una pista de atletismo al lado de su casa. Los últimos días ha corrido las siguientes vueltas:

2, 4, 3, 5, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 5, 6

Construye la tabla de frecuencias.

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
2	2	0,17	17
3	4	0,33	33
4	3	0,25	2
5	2	0,17	17
6	1	0,08	8
Total	12	1	100

**13** ■■ La tabla de frecuencias de la variable estadística «número de pisos vendidos en una inmobiliaria en los últimos días» es la siguiente:

Pisos	Frecuencias
0	2
1	2
2	6
3	12
4	7
5	3

Contesta a las siguientes preguntas:

- a) ¿Cuántos días han anotado el número de ventas?  
 b) ¿Cuántos días han vendido 3 pisos o más?  
 c) ¿Cuántos días han vendido 2 pisos o menos?
- a) Los días que han anotado el número de ventas es el total de la frecuencia, es decir, 32 días.  
 b) 22 días.  
 c) 10 días.

**14** ■ La siguiente tabla muestra los datos de un estudio cuyo objetivo es analizar cuánta agua se bebe al día. ¿Cuál es la variable?

N.º litros de agua/día	N.º de personas
0,5	5
1	15
2	7
3	3

¿Cuántos litros de agua bebe al día?

**15** ■■ En los primeros años de la década de 2000 los alumnos que terminaron la carrera de Bellas Artes en Madrid fueron:

Año	2000	2001	2002	2003	2004
Alumnos	1 740	1 614	1 611	1 683	1 753

Identifica cuál es la variable estadística y cuál es la frecuencia.

La variable estadística es primeros años de la década de 2000.  
 La frecuencia es el número de alumnos.

**16** ■ Copia en tu cuaderno y completa la tabla:

Valor	Frecuencia absoluta
1	6
2	10
3	4
Total	20

La frecuencia absoluta de 2 se calcula:

$$20 - (6 + 4) = 10$$

**17** ■■ Copia en tu cuaderno y completa la tabla:

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
5	6	0,38
7	4	0,25
8	1	0,06
10	5	0,31
Total	16	1

— La frecuencia relativa del valor 7 es 0,25. Su porcentaje es 25%. La frecuencia absoluta es:

$$25\% \text{ de } 16 = 4$$

— La frecuencia absoluta del valor 10 se calcula restando:

$$16 - (6 + 4 + 1) = 5$$

— Conociendo la frecuencia absoluta, se obtiene la frecuencia relativa.

**18** ■■ Copia en tu cuaderno y completa la tabla:

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
21	12	0,3	30
22	24	0,6	60
26	0	0	0
29	2	0,05	5
30	2	0,05	5
Total	40	1	100

— La frecuencia relativa del valor 21 es 0,3. Su porcentaje es 30%. La frecuencia absoluta es:

$$30\% \text{ de } 40 = 12$$

— El porcentaje del valor 22 y 29 es 60 y 5 respectivamente. Su frecuencia relativa es:

$$\frac{60}{100} = 0,6; \frac{5}{100} = 0,05$$

— La frecuencia absoluta del valor 22 es:

$$60\% \text{ de } 40 = 24$$

— La frecuencia absoluta del valor 29 es:


$$5\% \text{ de } 40 = 2$$

— La frecuencia absoluta del valor 26 es:

$$40 - (12 + 24 + 2 + 2) = 0$$

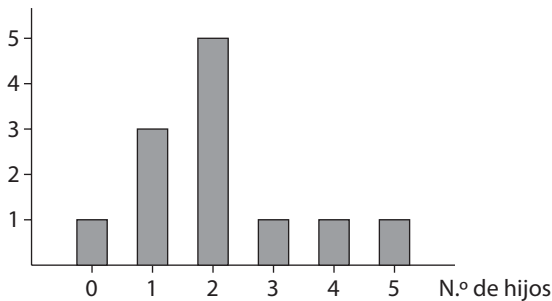
— La frecuencia relativa de 2 es:  $\frac{2}{40} = 0,05$


## GRÁFICOS

**19**  A las 12 familias que viven en una urbanización se les ha preguntado el número de hijos, obteniendo los siguientes datos:

2, 1, 4, 2, 0, 3, 2, 1, 2, 1, 5, 2

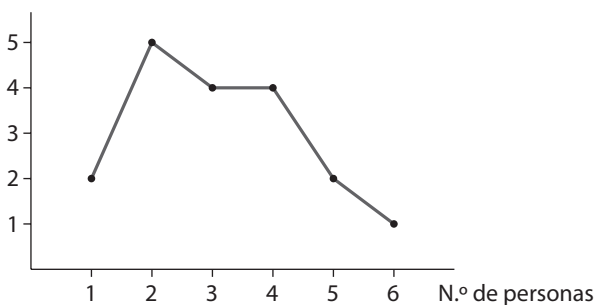
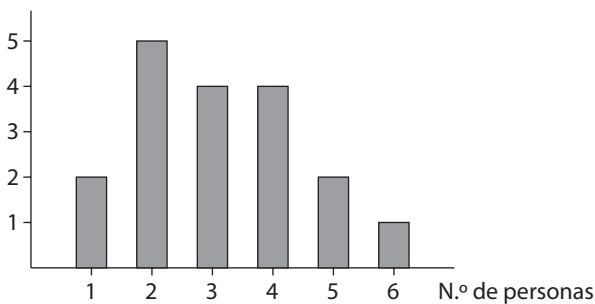
Representa los datos en un diagrama de barras.



**20**  En un pueblo se pregunta en todas las casas de una calle el número de personas que viven en cada casa y se obtiene:

5, 4, 3, 1, 2, 3, 2, 4, 6, 3, 5, 2, 4, 2, 3, 1, 4, 2

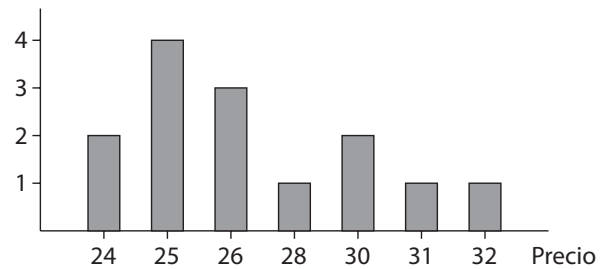
Representa los datos en un diagrama de barras y en un polígono de frecuencias (en dos gráficos diferentes).



**21**  Un fabricante ha registrado el precio de las nuevas zapatillas deportivas Halcón en todas las tiendas de deporte de una comarca y ha obtenido:

24, 30, 31, 26, 25, 32, 25, 26, 28, 25, 24, 30, 25, 26

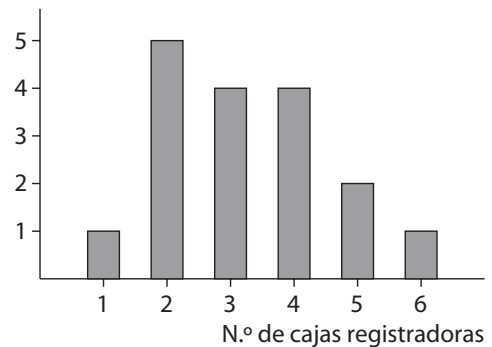
Resume los datos en un diagrama de barras.



**22**  Se ha anotado el número de cajas registradoras de todos los supermercados de una ciudad, obteniendo estos datos:

4, 3, 3, 5, 4, 2, 4, 2, 3, 2, 6, 1, 2, 4, 3, 2

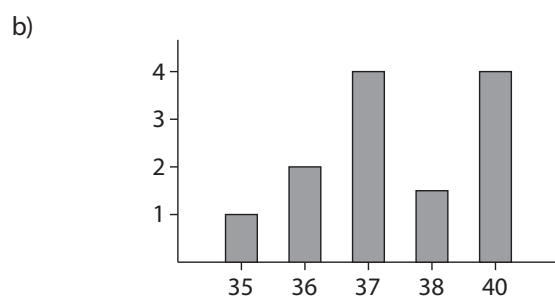
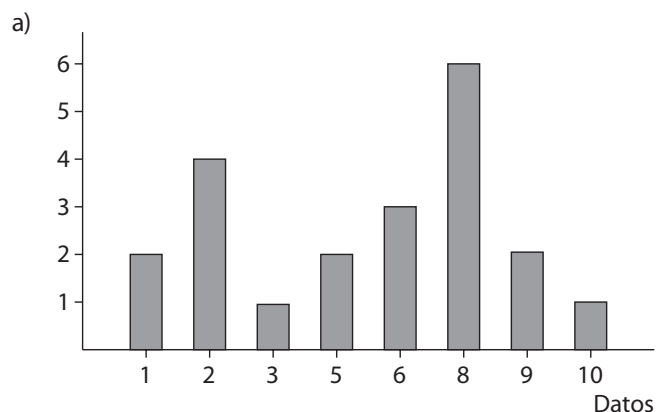
Dibuja el diagrama de barras correspondiente.



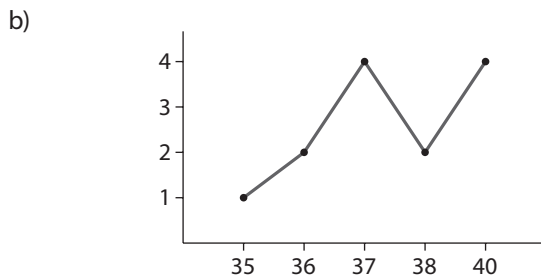
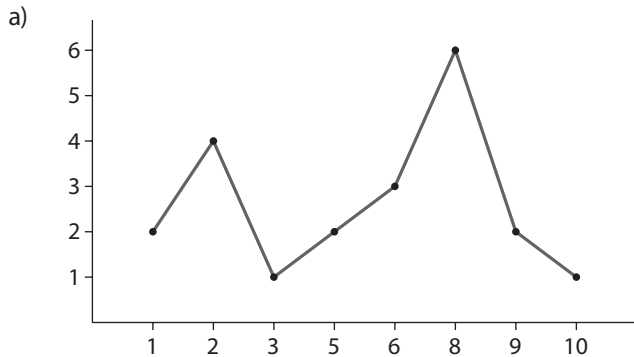
**23**  Representa los siguientes datos en un diagrama de barras:

a) 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10

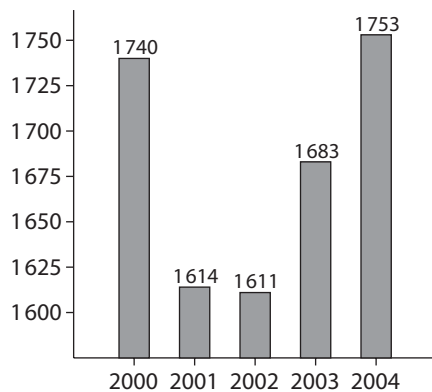
b) 35, 36, 36, 37, 37, 37, 37, 38, 38, 40, 40, 40, 40



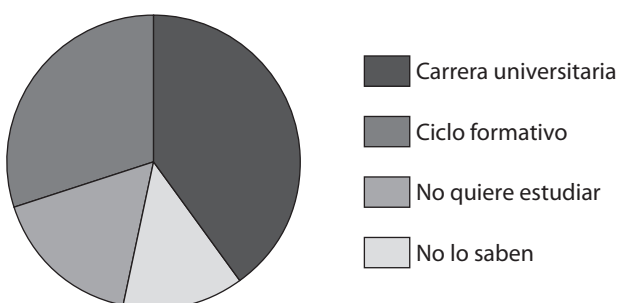
**24**  Dibuja el polígono de frecuencias para cada uno de los apartados del ejercicio anterior.



**25**  Representa las frecuencias del ejercicio 15 en un diagrama de barras.



**26**  Hoy, en la clase de Mónica, la tutora ha preguntado qué quieren estudiar en el futuro y las repuestas han sido: una carrera universitaria es la opción elegida por 12 alumnos, un ciclo formativo 9, no quieren estudiar 5 y aún no lo saben 4. Expresa estos datos en un diagrama de sectores.

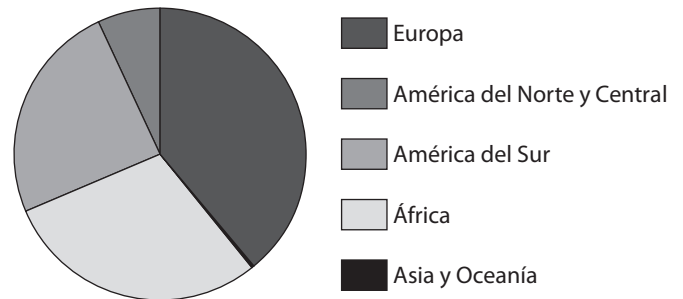


**27**  En el Anuario del Instituto Nacional de Estadística del año 2005 se pueden ver los datos de extranjeros residentes en España, desde el año 2002:

Procedencia	Número de personas
Europa	473 514
América del Norte y Central	79 416
América del Sur	300 889
África	366 518
Asia y Oceanía	102

Completa la tabla escribiendo la fila correspondiente al total y representa estos datos en un diagrama de sectores.

Procedencia	Número de personas	Frecuencia relativa	%
Europa	473 514	0,39	144,40
América del Norte y Central	79 416	0,07	25,20
América del Sur	300 889	0,25	90,00
África	366 518	0,30	108,00
Asia y Oceanía	102	0,00	0
<b>Total</b>	<b>1 220 439</b>	<b>1</b>	<b>100</b>

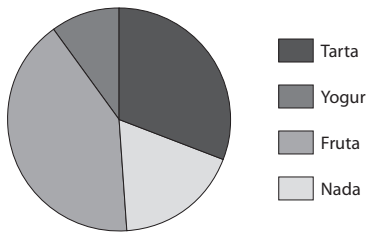


**28**  El camarero de un restaurante observa que una noche los clientes han elegido así los postres:

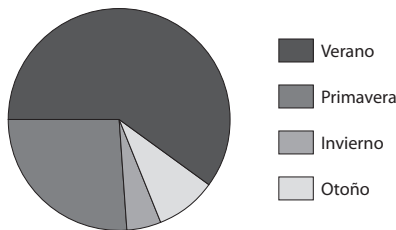
Postre	N.º de personas
Tarta	26
Yogur	8
Fruta	34
Nada	15

Representa estos datos en un diagrama de sectores.

Postre	N.º de personas	Frecuencia relativa	%
Tarta	26	0,31	111,6
Yogur	8	0,10	36
Fruta	34	0,41	147,6
Nada	15	0,18	64,80
<b>Total</b>	<b>83</b>	<b>1</b>	<b>360</b>



**29** En el registro de un pueblo hemos visto las fechas de las últimas 200 bodas y hemos anotado la estación en la que se han producido: 120 han sido en verano, 52 en primavera, 10 en invierno y 18 en otoño. Representa esta información en un diagrama de sectores.

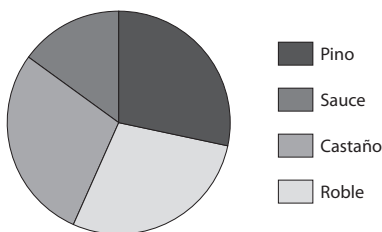


**30** En un jardín hemos examinado todos los árboles para estudiar de qué especie son, y los resultados obtenidos son (P: pino, S: sauce, C: castaño, R: roble):

P, S, S, S, C, S, C, C, C, C, P, P, R, C,  
R, R, P, P, C, C, R, R, R, P, P, R, R, P

Resume los datos en una tabla de frecuencias y construye después el diagrama de sectores.

Árboles	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	%
Pino	8	0,29	104,40
Sauce	4	0,15	54,00
Castaño	8	0,29	104,40
Roble	8	0,29	104,40
Total	28	1	



**31** En una tienda de maletas sólo venden tres tamaños: maletín, pequeña y grande. Han vendido 216 el último mes. Al hacer un diagrama de sectores, el círculo queda dividido en tres sectores iguales. ¿Cuántos grados tiene cada sector? ¿Cuántas maletas han vendido de cada tipo?

Cada sector circular tiene  $\frac{360}{3} = 120^\circ$ .

De cada tipo han vendido 72 maletas.

## PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

**32** Halla la media aritmética de las siguientes colecciones de números:

a) 3, 7, 9, 2, 1, 5, 4, 3, 8

b) 86, 80, 96, 103, 92, 100, 86

c) 520, 502, 566, 584, 531

$$a) \bar{x} = \frac{3 + 7 + 9 + 2 + 1 + 5 + 4 + 3 + 8}{9} = \frac{42}{9} = 4,67$$

$$b) \bar{x} = \frac{86 + 80 + 96 + 103 + 92 + 100 + 86}{7} = \frac{643}{7} = 91,86$$

$$c) \bar{x} = \frac{520 + 502 + 566 + 584 + 531}{5} = \frac{2703}{5} = 540,6$$

**33** En la clase de María, el profesor ha preguntado por el número de aparatos de televisión que tiene cada uno en casa, y éstas han sido las respuestas:

2, 2, 5, 3, 1, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 2

Halla la media aritmética y la moda.

$$\bar{x} = \frac{2 + 2 + 5 + 3 + 1 + 3 + 4 + 5 + 3 + 4 + 5 + 6 + 1 + 2}{20} + \frac{2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 2}{20} = \frac{66}{20} = 3,3$$

Mo = 2

**34** Tomás ha obtenido las siguientes notas en su boletín:

8, 6, 7, 5, 9, 7, 6, 5, 4, 6

Halla su nota media en esta evaluación.

$$\bar{x} = \frac{8 + 6 + 7 + 5 + 9 + 7 + 6 + 5 + 4 + 6}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

**35** Las alturas en centímetros de un grupo de amigos son:

154, 158, 150, 162, 169, 158, 170, 162

Halla la media aritmética y la moda.

$$\bar{x} = \frac{154 + 158 + 150 + 162 + 169 + 158 + 170 + 162}{8} = 160,38$$

Mo = 150

**36** Halla la mediana de cada uno de los siguientes conjuntos de datos:

a) 25, 26, 32, 36, 40

b) 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 9, 9, 9, 10

c) 50, 50, 51, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 59, 59

a) 32

b) 5

c) 53

**37**  **Calcula la mediana de los siguientes datos:**

- a) 7, 4, 2, 6, 8                      b) 2, 5, 1, 3, 2, 5, 2, 3, 5  
c) 502, 501, 508, 524, 563, 512, 519

- a) 6                      b) 3                      c) 512

**38**  **Halla la mediana de los siguientes datos:**

- a) 1, 3, 3, 5, 6, 8, 9, 9, 10, 10    b) 14, 7, 8, 10

a)  $\frac{6+8}{2} = 7$                       b)  $\frac{8+10}{2} = 9$

**39**  **Añade un dato a las siguientes colecciones para que la mediana sea 5:**

- a) 2, 4, 6, 8                      b) 3, 4, 4, 5, 7, 8

- a) 2, 4, 5, 6, 8                      b) 3, 4, 4, 5, 5, 7, 8

**40**  **En la Avenida de las Luces hay 15 castaños. Sus alturas, en centímetros, son:**

120, 152, 130, 150, 120, 140, 152, 160,  
144, 120, 136, 158, 125, 110, 148

**Halla la media, la moda y la mediana.**

$$\bar{x} = \frac{120 + 152 + 130 + 150 + 120 + 140 + 152 + 160 + 144 + 120 + 136 + 158 + 125 + 110 + 148}{15} = \frac{2065}{15} = 137,67$$

Mo = 120; Me = 140

**41**  **El precio, en céntimos, del mismo bote de refresco en las tiendas de un pueblo varía así:**

60, 45, 50, 45, 50, 50, 40, 52

a) **Halla la media aritmética, la moda y la mediana.**

b) **Halla el rango y la desviación media.**

a)  $\bar{x} = \frac{60 + 45 + 50 + 45 + 50 + 50 + 40 + 52}{8} = \frac{392}{8} = 49$

Mo = 50; Me = 50

b) Rango = 60 - 40 = 20

$$DM = \frac{|49 - 60| + |49 - 45| + |49 - 50| + |49 - 45| + |49 - 50| + |49 - 50| + |49 - 40| + |49 - 52|}{8} = \frac{11 + 4 + 1 + 4 + 1 + 1 + 9 + 3}{8} = \frac{34}{8} = 4,25$$

**42**  **Silvia quiere participar en la próxima maratón. Además de los ejercicios de gimnasia, para entrenarse los últimos días antes de la prueba ha corrido los siguientes kilómetros:**

8, 5, 10, 10, 5, 19, 0, 7, 5, 8, 8, 5, 16, 0, 8, 7, 8, 0, 3

**Halla la media, la mediana, la moda, el rango y la desviación media.**

$$\bar{x} = \frac{8 + 5 + 10 + 10 + 5 + 19 + 7 + 5 + 8 + 8 + 5 + 16 + 8 + 7 + 8 + 3}{19} = 6,95$$

$$+ \frac{8 + 5 + 16 + 8 + 7 + 8 + 3}{19} = \frac{132}{19} = 6,95$$

Me = 7; Mo = 8; Rango = 19 - 0 = 19

$$DM = \frac{|6,95 - 8| + |6,95 - 5| + |6,95 - 10| + |6,95 - 10| + |6,95 - 5| + |6,95 - 19| + |6,95 - 0| + |6,95 - 7| + |6,95 - 5| + |6,95 - 8| + |6,95 - 8| + |6,95 - 0| + |6,95 - 3| + |6,95 - 3|}{19} = \frac{1,05 + 1,95 + 3,05 + 3,05 + 1,95 + 12,05 + 6,95 + 0,05 + 1,95 + 1,05 + 1,05 + 1,95 + 9,05 + 6,95 + 1,05 + 0,05}{19} + \frac{1,05 + 6,95 + 3,95}{19} = \frac{65,15}{19} = 3,43$$

**43**  **Las notas de Luis en la última evaluación han sido:**

4, 8, 5, 7, 9, 6, 7, 8, 7

**Las de Marcos fueron:**

6, 8, 6, 7, 9, 5, 6, 8, 7

a) **Compara sus medias, sus modas y sus medianas.**

b) **¿Cuál de los tres parámetros crees que permite hacer una mejor comparación?**

a) Luis:  $\bar{x} = \frac{4 + 8 + 5 + 7 + 9 + 6 + 7 + 8 + 7}{9} = \frac{61}{9} = 6,78$

Me = 7; Mo = 7

Marcos:  $\bar{x} = \frac{6 + 8 + 6 + 7 + 9 + 5 + 6 + 8 + 7}{9} = \frac{62}{9} = 6,89$

Me = 7; Mo = 6

b) La media.

**44**  **La media aritmética de 10 números es 5,4, ¿cuánto suman esos números?**

$$5,4 = \frac{\sum n}{10} \Leftrightarrow \sum n = 5,4 \cdot 10 = 54$$

**45**  **La mediana de cinco números es 6. Si dos de ellos son 3 y 4, el resto puede ser (contesta verdadero o falso a cada una de las siguientes afirmaciones):**

- a) 7, 8, 10                      b) 5, 6, 7                      c) 6, 8, 20

- a) Falso                      b) Falso                      c) Verdadero

**46**  **¿Qué parámetros se pueden hallar para las variables cualitativas? ¿Y para las cuantitativas?**

Para las variables cualitativas: moda.

Para las cuantitativas: todos.