INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ La finalidad de esta unidad es repasar los números enteros, sus propiedades y aplicaciones, prestando especial atención a la divisibilidad.

Comenzaremos comentando con los alumnos el texto y la imagen de presentación. Fomentaremos la participación del alumnado mediante las preguntas:

– *¿Qué problemas cotidianos permite resolver la divisibilidad de números naturales?*
– *¿En qué situaciones se usan los números enteros negativos?*
– *¿Cómo se expresa la temperatura bajo cero? ¿Y las distancias bajo el nivel del mar?*

■ A continuación leeremos entre todos el índice de contenidos junto con el esquema de la unidad didáctica y plantearemos estas cuestiones a los alumnos y alumnas:

– *¿Cuáles son las principales aplicaciones de la divisibilidad?*
– *¿Por qué son necesarios los números enteros? Pon algunos ejemplos*
– *¿Cómo distinguimos una deuda de un saldo a favor?*

Empezamos la unidad

■ Para repasar e introducir los conceptos que se desarrollarán a lo largo del tema, se proponen en el libro una serie de actividades:

– Las actividades 1 y 2 repasan el concepto de divisibilidad.
– En la actividad 3 se trabaja el cálculo de los m.c.d. y m.c.m.
– La actividad 4 introduce la clasificación de los números en naturales y enteros.
– La actividad 5 pone en práctica la representación en la recta de los números enteros.
– La actividad 6 revisa los conceptos de valor absoluto y opuesto de un número.
– En la actividad 7 se repasan las operaciones con números enteros.

■ Para terminar esta introducción a la unidad, pediremos al alumnado que resuelva por parejas las actividades del apartado *Para empezar*.

El fin de estos ejercicios es que los alumnos repasen los contenidos, en cooperación con sus compañeros y compañeras y tomen consciencia de los conceptos que necesitan reforzar.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 1 a 6*. Leer e interpretar enunciados que contienen léxico técnico específico.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 1 a 7*. Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza.
- *Act. 5*. Utilizar elementos gráficos como las rectas numéricas e interpretar la representación de los números naturales y enteros.
- *Esquema*. Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.
- *Acts. 1 a 3*. Aplicar los conocimientos previos para calcular divisores y múltiplos.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Texto*. Valorar el uso y la necesidad de los números enteros en la vida cotidiana.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 1 a 7* Identificar en la realización de las actividades las posibles estrategias y respuestas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para empezar el tema podemos visualizar el recurso del siguiente enlace:

http://www.tiching.com/738806

Se trata de un vídeo de poco menos de dos minutos y medio en el que se explica cómo se tiene que proceder para hallar los divisores de un número.

A continuación, para seguir introduciendo la unidad preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Qué lugar ocupa el dividendo? ¿Y el divisor? ¿Y el cociente?*
- *¿Qué otras situaciones reales puedes explicar dónde sea necesario buscar la divisibilidad de un número?*

Finalmente, propondremos que escriban un ejemplo concreto de cada caso por parejas y hallen la solución.

Educamos en valores

Autoestima personal y espíritu de superación

- La enseñanza de las matemáticas permite incidir directamente sobre la potenciación de la confianza y de la seguridad individual y colectiva del alumnado.

Para reforzar la seguridad personal, a lo largo de la unidad se proponen métodos de trabajo y actividades que permiten autoevaluar los propios progresos.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de la unidad que contribuyen a conseguir este objetivo:

– En las págs. 3 y 24 del tema el alumnado puede autoevaluar sus conocimientos y los aprendidos.

– Las baterías de ejercicios repetitivos, como las de las págs. 12 y 16, permiten reforzar la confianza en las propias capacidades.

– Las actividades de estrategia de la p. 24 constituyen un incentivo para trabajar el espíritu de superación.

Libro Digital

- *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 3

Para empezar…

1. Son divisores de 42 los números 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21.

2. Respuesta personal. A modo de ejemplo:

Son múltiplos de 12 los números 60, 72, 84, 96 y 108.

3. Los resultados son los siguientes:

a) m.c.m. (60, 100) = $2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$

m.c.d. (60, 100) = $2^2 \cdot 5 = 20$

b) m.c.m (20, 15) = $2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

m.c.d. (20, 15) = 5

4. La clasificación es la siguiente:

a) 7 es un número natural y entero.

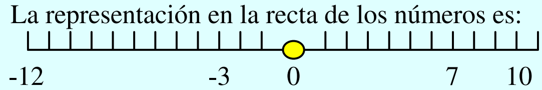
b) –12 es un número entero.

c) –3 es un número entero.

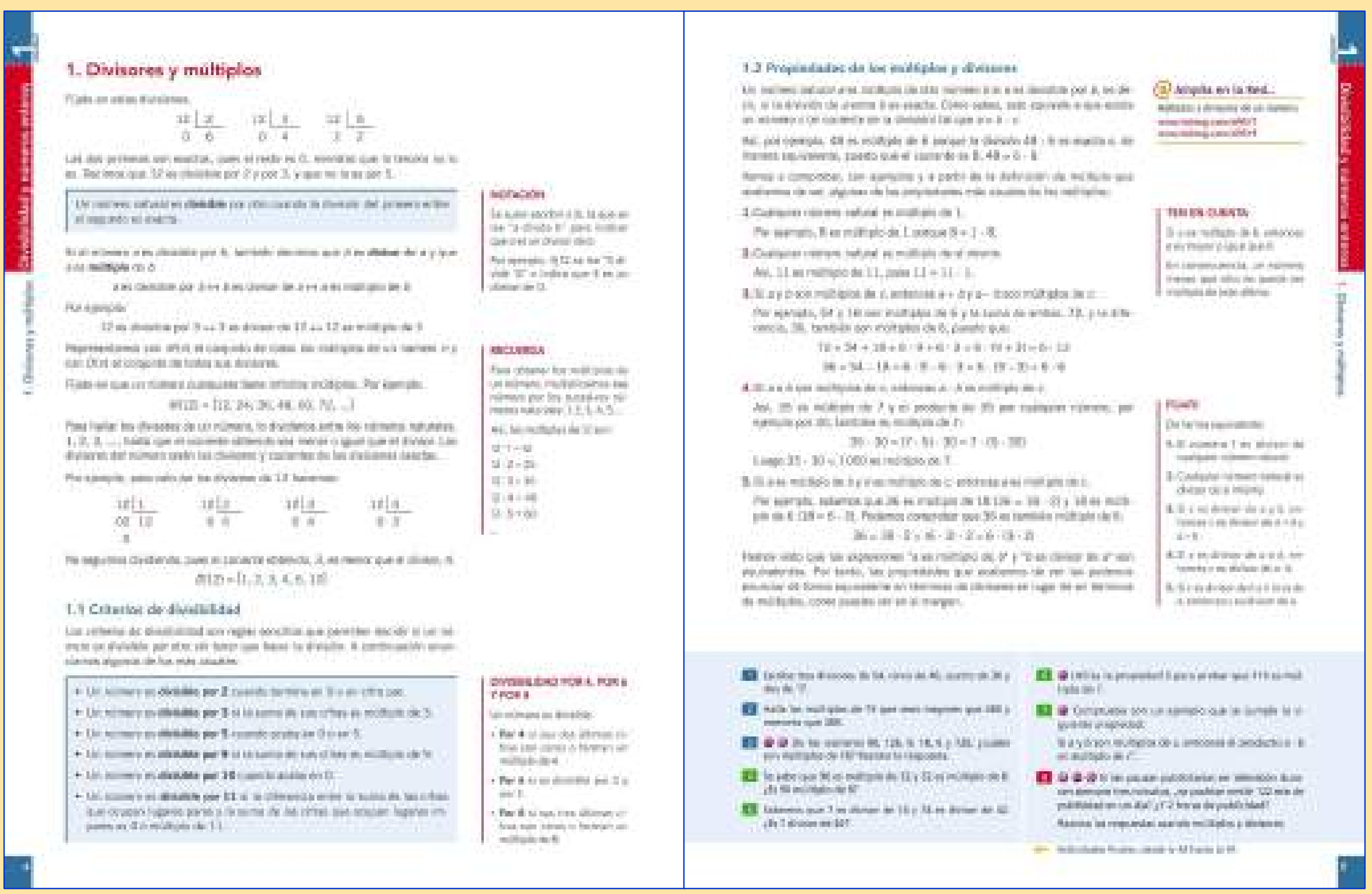
d) 0 es un número entero.

e) 10 es un número natural y entero.

5. La representación en la recta de los números es:



(Continúa en la página 1-32 de la guía)


1. Divisores y múltiplos

1.1 Criterios de divisibilidad

1.2 Propiedades de los múltiplos y divisores

1. DIVISIBILIDAD Y NÚMEROS ENTEROS

■ El objetivo de esta sección es el estudio de los conceptos de divisor y múltiplo, la relación entre ellos y las claves para calcularlos. Empezaremos leyendo la introducción y plantearemos la siguiente pregunta al alumnado:

– *¿Cuándo se dice que un número natural es divisible por otro? Pon un ejemplo.*

■ Al explicar el concepto de divisor, observaremos la *Notación* del margen derecho y al final de la introducción prestaremos atención el apartado *Recuerda* del mismo margen.

Para repasar lo aprendido, formularemos estas cuestiones:

– *¿Qué elementos forman el conjunto D(6)?¿Y el M(2)?*

Como complemento al texto de este apartado los alumnos pueden practicar los conceptos de divisor y múltiplo y su interrelación visitando el recurso *Tiching* 69519 del apartado *@Amplía en la red.*

1.1 Criterios de divisibilidad

■ A continuación leeremos el texto de este subapartado donde recordaremos los criterios de divisibilidad. Lo complementaremos con la lectura del texto del margen.

Para comprobar la compresión de los conceptos por parte del alumnado, les haremos las siguientes preguntas:

– *¿234 es divisible por 6?*

– *¿724 es divisible por 4?*

– *¿165 es divisible por 11?*

Concluimos este subapartado proponiendo a los alumnos que resuelvan las actividades 1 y 2.

1.2 Propiedades de los múltiplos y divisores

■ Leeremos ahora el texto de este subapartado sobre las propiedades de los múltiplos, incluyendo la nota al margen *Ten en cuenta,* y lanzaremos el siguiente reto al alumnado:

– *¿Podrías poner un ejemplo distinto para la tercera propiedad de los múltiplos?*

Para poner en práctica estos conocimientos resolveremos entre todos las actividades 3 y 4, y a continuación propondremos a los alumnos el recurso *Tiching* 69517 de la sección *@Amplía en la red*.

Posteriormente leeremos la nota *Fíjate*, acerca de las propiedades de los divisores. Ahora el alumnado puede contestar a los ejercicios 5, 6 y 7.

■ Finalizaremos esta sección pidiendo a los alumnos que resuelvan en su cuaderno la última actividad propuesta en el libro, donde tendrán que aplicar los conocimientos adquiridos.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 3 y 8.* Desarrollar la capacidad de expresar por escrito argumentos propios, así como trabajar la búsqueda, recopilación y procesamiento de información.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1 y 2.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia de resolución de múltiplos y divisores.

■ *Acts. 3, 6, 7 y 8.* Aplicar los criterios de divisibilidad y las propiedades de los múltiplos y divisores para resolver las actividades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 8.* Afrontar los problemas siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la solución, aplicando eficientemente los conocimientos adquiridos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 4 servirá para asentar la capacidad de cálculo de múltiplos y divisores.

✓ La actividad de ampliación 2 resultará útil para evaluar si el alumnado ha entendido correctamente y sabe aplicar los conceptos de múltiplo y divisor en situaciones prácticas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos entrar en el siguiente enlace para ampliar y reforzar los conceptos estudiados sobre los divisores y los múltiplos:

http://www.tiching.com/738807

En la página se muestran cuatro apartados, en cada uno de los cuales se presenta un breve resumen de la teoría y se acompaña de actividades interactivas.

Pediremos a los alumnos que poco a poco vayan realizando las actividades y que al final completen la evaluación del apartado.

El material autoevaluable es interesante porque podemos presentárselo a los alumnos para que desarrollen la capacidad de trabajo autónomo como método para asimilar conceptos matemáticos.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 5

1. Actividad personal.

El alumno deberá escoger el número de divisores que demanda la actividad entre los siguientes:

a) Divisores de 54: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.

b) Divisores de 40: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

c) Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

d) Divisores de 17: 1, 17.

2. Los múltiplos de 75 en el rango demandado son:

$300 = 75 \cdot 4$

$375 = 75 \cdot 5$

3. Son múltiplos de 18 todos aquellos números que son divisibles por 18 y no dejan resto.

En este caso, todos los números mayores o iguales a 18 lo son 90, 126, 18 y 720.

4. Sí, ya que:

$96 = 32 \cdot 3 = 8 \cdot 4 \cdot 3 = 8 \cdot 12$

5. Sí, porque dividir por 14 es equivalente a dividir por 7 y por 2.

6. Sabemos que todos los elementos de la tabla de multiplicar del 7 son múltiplos de 7. Así pues 70 y 49 son múltiplos de 7.

Por la propiedad 3, encontramos que:

$70 + 49 = 119$ también es múltiplo de 7

7. Respuesta personal, a modo de ejemplo:

Escogemos el 5 y sus múltiplos 25 y 75. Siendo a = 25, b = 75 y c = 5:

$a \cdot b = 25 \cdot 75 = 1875$

$c^2 = 25 \rightarrow 1875$

$1875 = 25^2 \cdot 3 \rightarrow 1875$ es múltiplo de 25.

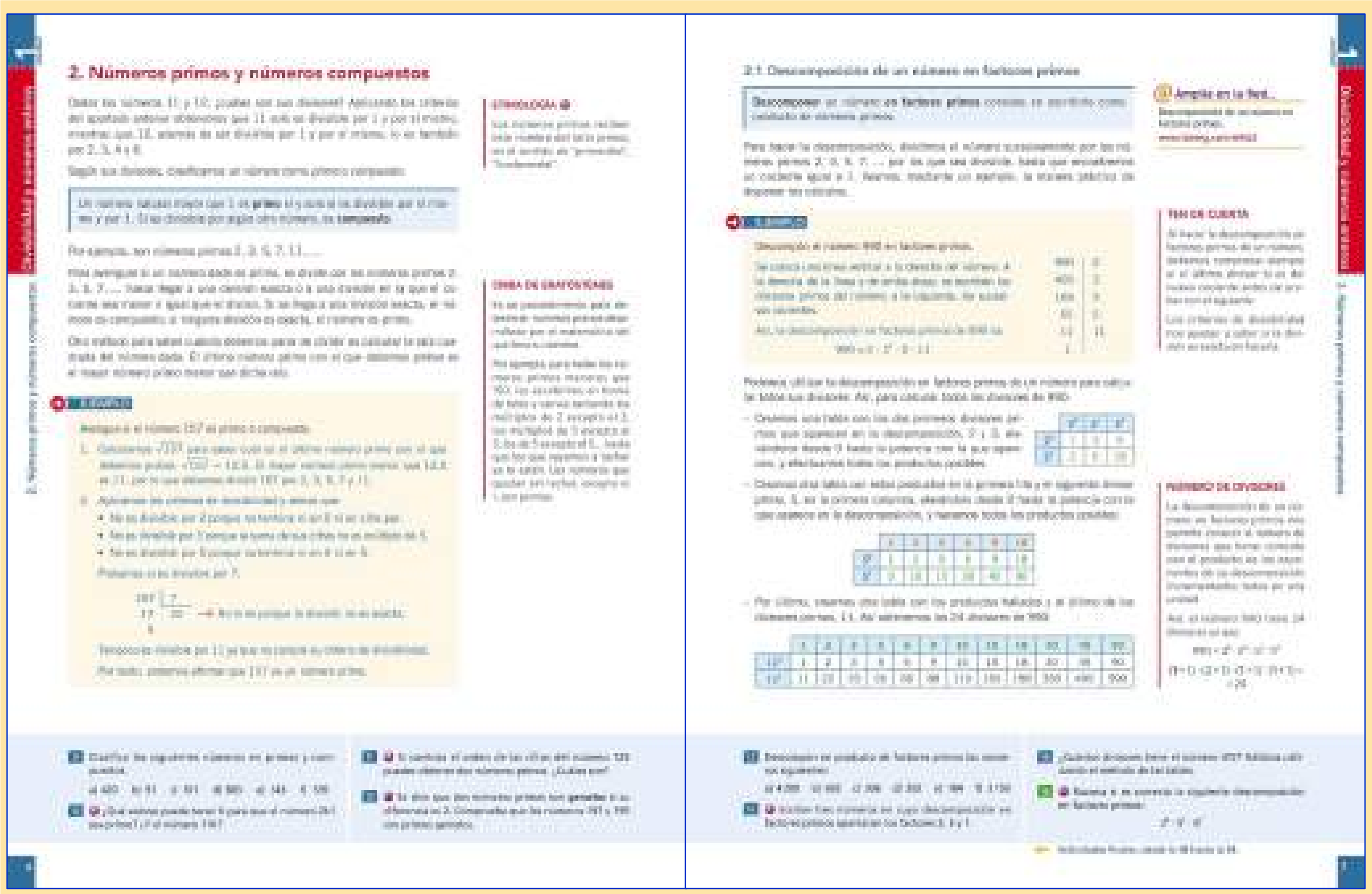
8. La resolución del problema es la siguiente:

– Para 122 minutos de publicidad:

$122 : 3 = 40{,}6667 \rightarrow 122$ no es múltiplo de 3. Por lo tanto, deberían ser 120 minutos con 40 pausas o 123 con 41 pausas.

– Para 2 horas de publicidad:

2 horas son 120 minutos, que al ser un número múltiplo de 3, sí que sería posible. En total, serían 40 pausas publicitarias.


2. Números primos y números compuestos

2.1 Descomposición de un número en factores primos

2. Números primos y números compuestos

■ A partir de lo estudiado en la sección anterior explicaremos cuándo un número es primo y cuándo compuesto. Como curiosidad prestaremos atención a la *Etimología* de la palabra “primos”, que aparece en el margen. Lanzaremos estas preguntas a la clase:

– *¿Cuántos divisores tiene un número primo? Pon un ejemplo.*

– *¿El número 9 es primo? ¿Y el 19?*

■ A continuación, propondremos a un alumno que lea en voz alta los procedimientos para averiguar si un número es primo, incluyendo la *Criba de Eratóstenes* del margen. Les formularemos las siguientes cuestiones:

– *¿Qué números primos hay entre 11 y 20?*

– *Enumera los diez primeros números primos.*

Para completar este apartado trabajaremos en la pizarra el ejemplo propuesto. En su resolución fomentaremos la participación del alumnado repasando los criterios de divisibilidad.

Posteriormente, los alumnos y alumnas pueden resolver los ejercicios 9 a 12.

2.1 Descomposición de un número en factores…

■ Leeremos este subapartado y practicaremos la factorización mediante el ejemplo propuesto, haciendo hincapié en que un número primo puede ser divisor de un número varias veces, como se indica en la nota del margen: *Ten en cuenta.*

– *¿En qué orden se prueban los divisores de un número?*

– *¿Cómo se expresa la descomposición de un número en factores primos?*

A continuación, los alumnos y alumnas se familiarizarán con la factorización realizando la actividad interactiva propuesta en la plataforma *Tiching* en *Amplía en la red.*

■ Terminamos esta sección exponiendo al alumnado una de las aplicaciones de la descomposición de un número, el cálculo de sus divisores.

Realizaremos el ejemplo en la pizarra y sacaremos a un alumno o alumna a resolver el siguiente ejercicio:

– *Obtén todos los divisores de los números 93, 320 y 2541.*

Aprovecharemos el ejemplo anterior para explicar al alumnado cómo conocer la cantidad de divisores que tiene un número, observación que encontramos en el margen en *Número de divisores*.

■ Finalmente, los alumnos y alumnas resolverán en su cuaderno las actividades 13, 14, 15 y 16 propuestas.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 10 a 12 y 14 a 15*. Leer e interpretar los enunciados de las actividades procesando los datos de manera ordenada.
- *Act. 16*. Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios y de generar hipótesis.
- *Etimología*. Usar el vocabulario adecuado y aprender sobre el origen etimológico de palabras clave.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 12 y 16*. Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos para comprobar o razonar la respuesta.
- *Acts. 9 y 13*. Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 10 y 14*. Ser capaz de proponer ejemplos siendo creativo y mostrando criterio propio al buscar las respuestas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Podemos ampliar la información sobre La Criba de Erastótenes accediendo a este enlace:

http://www.tiching.com/738808

En esta página web encontraremos un artículo muy completo que podemos utilizar para conocer el procedimiento del algoritmo de Eratóstenes, muy útil para encontrar los números primos y compuestos menores que un número natural dado.

Para trabajar este algoritmo con nuestros alumnos, podemos pedirles que sigan los pasos que se explican en la parte inferior del recurso.

A continuación, haremos que busquen los números primos comprendidos entre 200 y 300 siguiendo el mismo procedimiento.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 6

9. La clasificación es la siguiente:

a) $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \rightarrow$ compuesto

b) $91 = 7 \cdot 13 \rightarrow$ compuesto

c) $101 \rightarrow$ primo

d) $803 = 73 \cdot 11 \rightarrow$ compuesto

e) $143 = 11 \cdot 13 \rightarrow$ compuesto

f) $539 = 7^2 \cdot 11 \rightarrow$ compuesto

10. Para cada caso:

– 2K1 es primo cuando K = 1, 4, 5, 7, 8.

– 11K es primo cuando K = 3.

11. Cambiando el orden del número 125 obtenemos 251 y 521, ambos números primos.

12. Primero realizamos la raíz cuadrada de los dos números:

$\sqrt{197} = 14{,}036$ $\qquad \sqrt{199} = 14{,}107$

El mayor número primo menor que estos resultados es 13. Dividiendo cada número entre 13, 11, 7, 3 y 2,vemos que ninguno de los dos da una división exacta, por, lo que podemos concluir que ambos son primos.

Como entre 197 y 199 hay una distancia de 2, podemos afirmar que además son gemelos.

Página 7

13. La descomposición numérica en números primos es:

a) $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

b) $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$

c) $306 = 2 \cdot 3^2$

d) $392 = 2^3 \cdot 7^2$

e) $184 \cdot = 2^3 \cdot 23$

f) $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

14. Respuesta personal. Es correcto cualquier número cuya descomposición en factores primos tenga: 2, 3 y 7.

Por ejemplo:

$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$

$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$

15. Descomponemos el número en factores primos y calculamos el número de divisores que tiene:

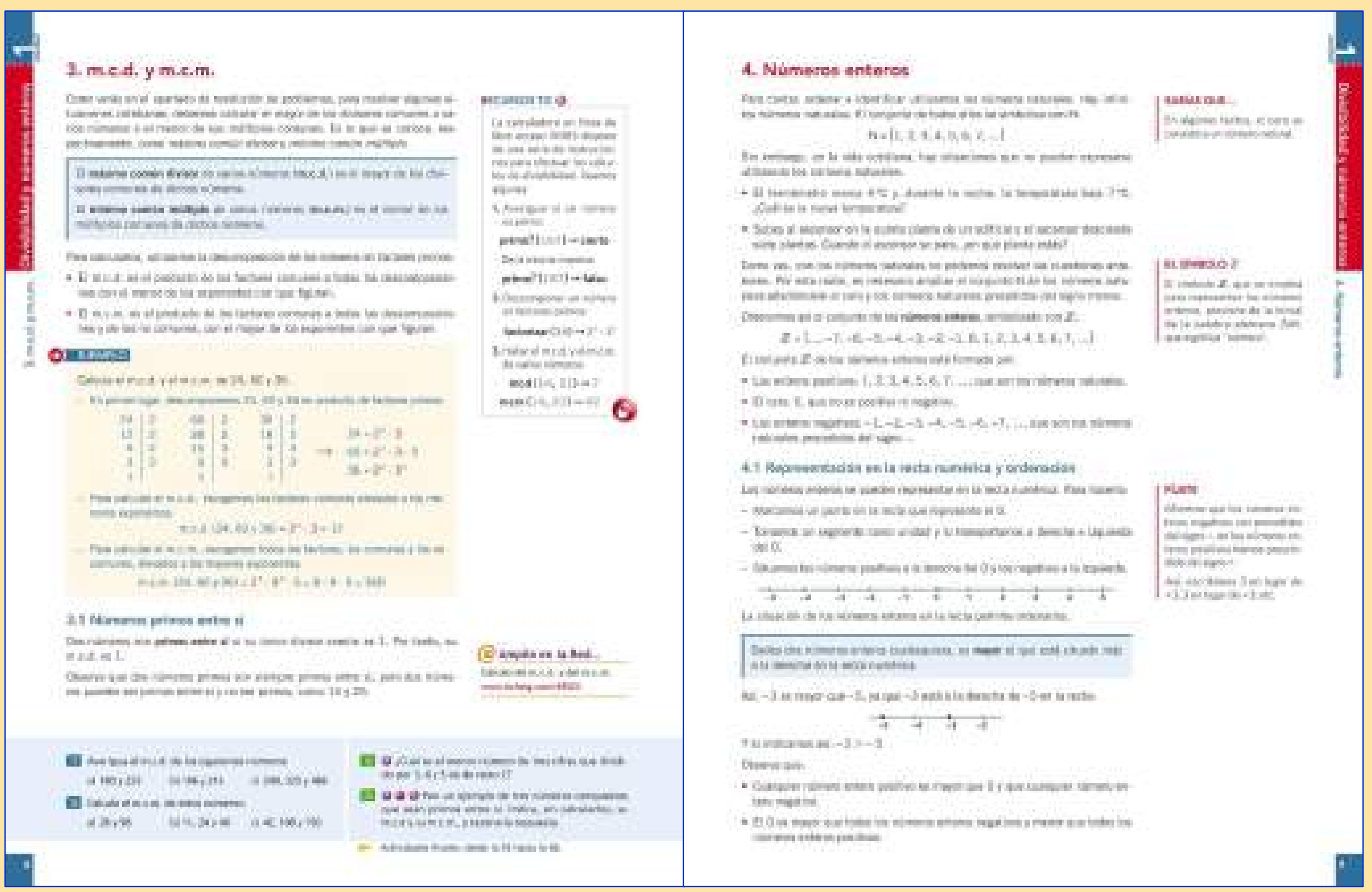
$472 = 2^3 \cdot 59$

$(3 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8 \rightarrow$ tendrá 8 divisores.

	2^0	2^1	2^2	2^3
59^0	1	2	4	8
59^1	59	118	236	472

Los divisores son 1, 2, 4, 8, 59, 118, 236 y 472.

16. No es correcta, porque sabemos que: $6 = 2 \cdot 3$. Por lo tanto, la descomposición correcta sería $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.



3. m.c.d y m.c.m. / 4. Números enteros

3. m.c.d y m.c.m

■ En este apartado repasaremos dos procedimientos de cálculo que serán muy útiles a la hora de resolver problemas, el m.c.d. y el m.c.m.

Leeremos las dos definiciones y formularemos estas preguntas para comprobar el grado de comprensión:

– *¿El m.c.d. de dos números puede ser mayor que alguno de dichos números?*
– *¿Y el m.c.m. puede ser menor que dichos números?*

■ Trabajaremos a continuación el cáculo del m.c.d. y el m.c.m. a partir de la descomposición en factores primos estudiada en la sección anteror.

Expondremos el ejemplo del libro y plantearemos a los alumnos estas cuestiones relacionadas:

– *¿Por qué no se toma el 5 para el cálculo del m.c.d.?*
– *¿Qué potencia del 2 se elige para calcular el m.c.m.?*

Para completar el apartado pediremos a los alumnos que practiquen estos cálculos mediante el recurso *Tiching* propuesto. Les contaremos también cómo calcularlos utilizando la calculadora WIRIS, del apartado *Recursos TIC*.

■ En el siguiente subapartado explicaremos cuándo dos números son primos entre sí. Los alumnos pueden resolver ahora las actividades propuestas en el libro.

4. Números enteros

■ Comenzaremos este apartado repasando los números naturales y destacando con ejemplos la necesidad de los números enteros en la vida cotidiana.

Seguiremos leyendo y observaremos el conjunto de los números enteros y el por qué de su símbolo en la nota del margen. Repasamos cuestionando:

– *¿Un número natural es un número entero?*

Apuntaremos al alumnado la notación que se emplea para los números enteros en *Fíjate* y como curiosidad leeremos las notas *Sabías…* del margen.

– *¿Qué parte de la expresión de un número positivo se puede eliminar?*

4.1 Representación en la recta numérica y…

■ En este subapartado los alumnos leerán cómo representar los números enteros en la recta numérica. Les podemos preguntar estas cuestiones para asegurarnos que han entendido el texto:

– *¿Qué valor se utiliza como punto de referencia en la recta numérica?*
– *¿Dónde se sitúan los números negativos?*
– *¿La unidad representada en la recta tiene una longitud determinada?*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 19 y 20.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar por escrito argumentos propios en la resolución de las actividades, generando estrategias e ideas propias.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de la calculadora WIRIS, con la que se puede efectuar los cálculos de divisibilidad.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 17 y 18.* Aplicar el proceso aprendido para hallar el m.cm. y el m.c.d. de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.

■ *Act. 20.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos sobre m.cm. y m.c.d. a situaciones parecidas propuestas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 19 y 20.* Reflexionar y saber argumentar los puntos de vista propios de manera lógica mediante la propuesta de ejemplos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 permitirá consolidar el cálculo del m.c.d. y del m.c.m. de un par de números.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para repasar el conjunto de los números enteros, proponemos visualizar el recurso del siguiente enlace:

http://www.tiching.com/738809

Se trata de un vídeo de poco menos de dos minutos y medio de duración en el que se explican los números enteros y la manera de representarlos en una recta numérica.

Este enlace nos servirá como complemento a las explicaciones de esta doble página, así como para asegurarnos de que se ha comprendido bien el apartado. Por ello, al acabar de verlo preguntaremos al alumnado:

- *¿Con qué símbolo se representa el conjunto de los enteros?*
- *¿Cómo se denominan los dos grupos que forman los números enteros?*
- *¿Cómo representarías en la recta numérica la suma de 8 + 6? ¿Y la resta de –2 – 8?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 8

17. Las soluciones al cálculo del m.c.d. son:

a) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$225 = 3^2 \cdot 5^2$

m.c.d. $= 3^2 \cdot 5 = 45$

b) $196 = 2^2 \cdot 7^2$

$216 = 2^3 \cdot 3^3$

m.c.d. $= 2^2 = 4$

c) $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

$325 = 5^2 \cdot 13$

$486 = 2 \cdot 3^5$

m.c.d. $= 1$

18. Las soluciones al cálculo del m.c.m. son las siguientes:

a) $28 = 2^2 \cdot 7$

$98 = 2 \cdot 7^2$

m.c.m. $= 2^2 \cdot 7^2 = 196$

b) $11 = 11 \cdot 1$

$24 = \cdot\ 2^3 \cdot 3$

$40 = 2^3 \cdot 5$

m.c.m. $= 11 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 1320$

c) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

$108 = 2^2 \cdot 3^3$

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

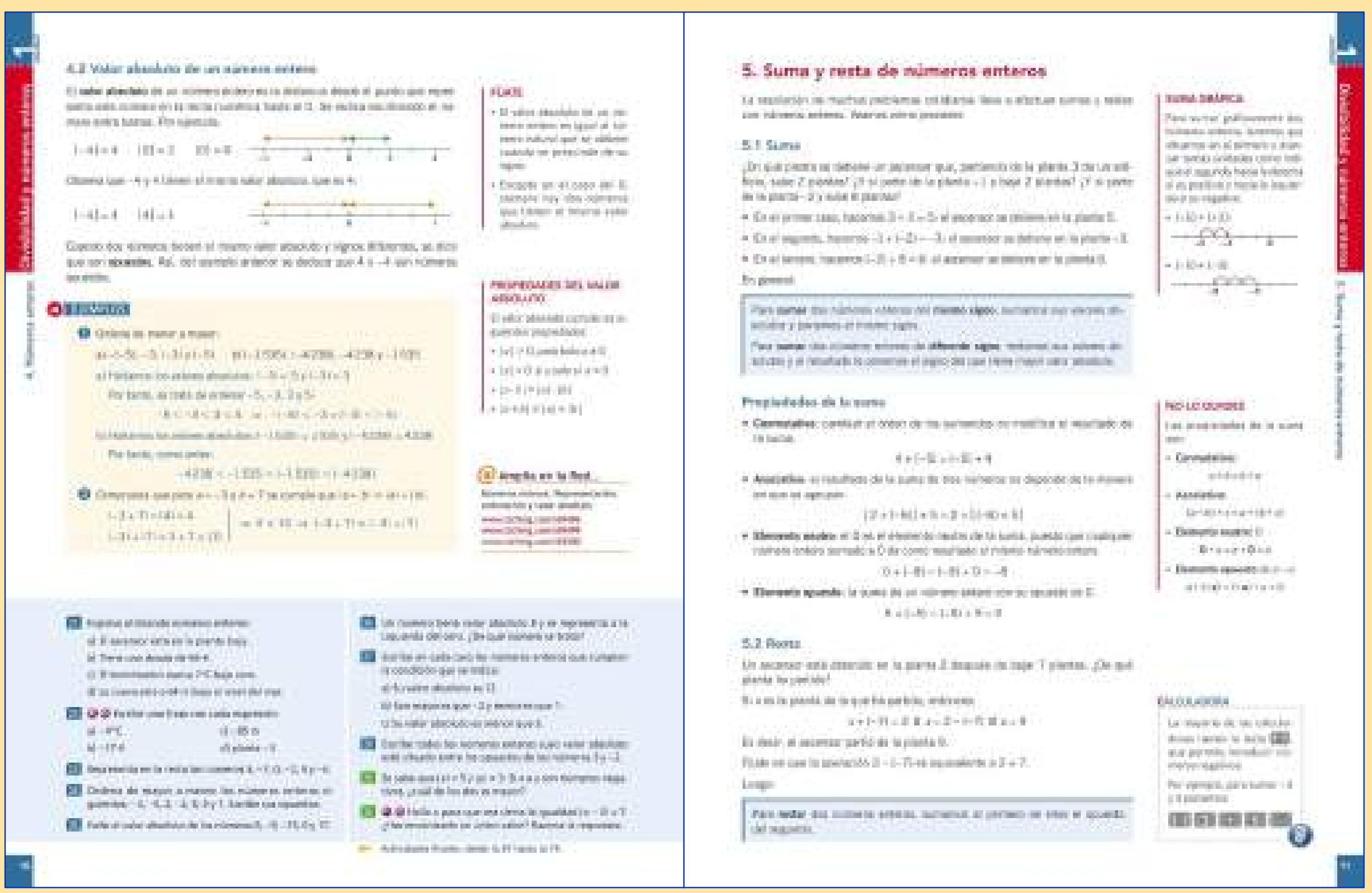
m.c.m. $= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18\,900$

19. El menor número de tres cifras, múltiplo de 3, 4 y 5, es 120. Por lo tanto, el que buscamos es el 122.

20. Respuesta personal. A modo de ejemplo:

Vemos que si descomponemos los términos 26, 33, 35 el m.c.d. es 1:

$$\left\{\begin{array}{l} 26 = 2 \cdot 13 \\ 33 = 3 \cdot 11 \\ 35 = 5 \cdot 7 \end{array}\right. \rightarrow \text{m.c.d.} = 1$$



4. NÚMEROS... (CONT.) / 5. SUMA Y RESTA...

4.2 Valor absoluto de un número entero

■ Continuamos con este subapartado exponiendo el concepto de valor absoluto y sus propiedades.

Prestaremos atención a las gráficas que destacan el significado de este concepto y a las dos anotaciones bajo el título *Fíjate*. Éstas nos aportan pistas de gran utilidad a la hora de calcular el valor absoluto de un número.

Los alumnos pueden resolver ahora las actividades 25 a 27 sobre el valor absoluto.

■ Leeremos cuándo se dice que dos números son opuestos y enunciaremos las propiedades indicadas en el margen.

Completaremos la exposición con los dos ejemplos propuestos en el libro junto con estas cuestiones:

– *¿Cuál es el mayor de dos números opuestos?*

– *¿Puede haber algún valor absoluto negativo?*

■ Concluimos el apartado repasando los conocimientos adquiridos mediante los recursos *Tiching* propuestos.

Pediremos a los alumnos que realicen en su cuaderno las actividades de repaso 21 a 24 y de la 28 a la 30.

5.1 Suma

■ El objetivo básico de esta sección es practicar la suma y la resta de números enteros.

Partiremos del ejemplo que se plantea, invitando a los alumnos a que analicen el enunciado:

– *¿Por qué son negativos los dos números en el segundo caso?*

– *¿Por qué se debe indicar el –2 entre paréntesis?*

A continuación explicaremos la suma de números enteros analítica y gráficamente, observando la nota del margen.

■ Leeremos ahora las propiedades de la suma, relacionando cada propiedad con el ejemplo propuesto y su síntesis en la nota al margen *No lo olvides.*

– *¿Afecta al resultado el orden en el que sumemos varios números?*

– *¿Existe algún número que sumado a otro dé como resultado este último?*

5.2 Resta

■ Comenzamos el siguiente subapartado pidiendo a los alumnos que observen el ejemplo y preguntándoles:

– *¿Por qué se resta 7 del valor de x?*

– *¿Qué diferencia hay entre los dos signos menos de la expresión –(–7)?*

Comprobaremos cómo se restan números enteros y revisaremos cómo introducir números negativos en la calculadora en el apartado que lleva este mismo nombre.

Competencias clave

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 21 y 22.* Desarrollar la capacidad de expresar por escrito aspectos habituales de la vida cotidiana, utilizando números enteros.
- *Act. 30.* Expresar e interpretar de forma escrita los conocimientos adquiridos sobre el valor absoluto de un número entero, argumentando la respuesta.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 23 a 29.* Reconocer y asimilar el concepto y las propiedades del valor absoluto de los números enteros y ser capaz de reproducirlos.
- *Act. 30.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 22.* Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación, siendo creativo e imaginativo para relacionar situaciones reales con las matemáticas.

Recursos didácticos de la guía

✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para revisar las operaciones de suma y resta con números enteros, así como con valores absolutos de estos.

Recursos didácticos

Naveguemos por Tiching

– Para asimilar y asegurar los conceptos referentes a las sumas y restas de los números enteros, podemos acceder a este enlace:

http://www.tiching.com/738810

En esta página encontraremos una explicación detalla-da de cómo crear los cuadrados mágicos de 3 · 3 o de 5 · 5.

Después de leer los contenidos, pediremos a los alumnos que construyan un cuadrado mágico con números negativos.

También les podemos plantear algunos cuadrados mágicos elaborados por nosotros mismos, en los que deberán decir si son correctos o no y, en ese caso, hacer que encuentren dónde se localiza el error.

Finalmente, les podemos pedir que comprueben si es posible hacer cuadrados mágicos con la multiplicación y la división.

Soluciones de las actividades

Página 11

21. Expresado en números enteros es:

a) El ascensor está en la planta 0.

b) Tiene –56 €.

c) El termómetro marca –7 ºC.

d) La cueva está a –64 m.

22. Respuesta personal, a modo de ejemplo:

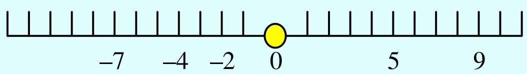
a) La temperatura es de 4 ºC bajo cero.

b) Tiene una deuda 17 €.

c) La altitud es de 85 m bajo el nivel del mar.

d) El ascensor está en el sótano 3.

23. La representación en la recta numérica es:



24. El orden es: 7 > 4 > 2 > 0 > –2 > –3 > –5

Los opuestos, en el mismo orden que en el apartado anterior, son: –7, –4, –2, 0, 2, 3, 5.

25. El valor absoluto de cada número es:

$|6| = 6$; $|-9| = 9$; $|-15| = 15$; $|0| = 0$; $|17| = 17$

26. Los números que se representan a la izquierda del cero son negativos. Por lo tanto, si el número en cuestión tiene valor absoluto 8, se trata del –8.

27. Los números enteros en cada caso son:

a) 12 y –12.

b) –1 y 0.

c) –2, –1, 0, 1, 2.

28. Los opuestos de los números 3 y –2 son –3 y 2. En este rango tenemos los números enteros: –2, –1, 0 y 1.

Realizando ahora el valor absoluto de estos números:

$|-2| = 2$; $|-1| = 1$; $|0| = 0$; $|1| = 1$

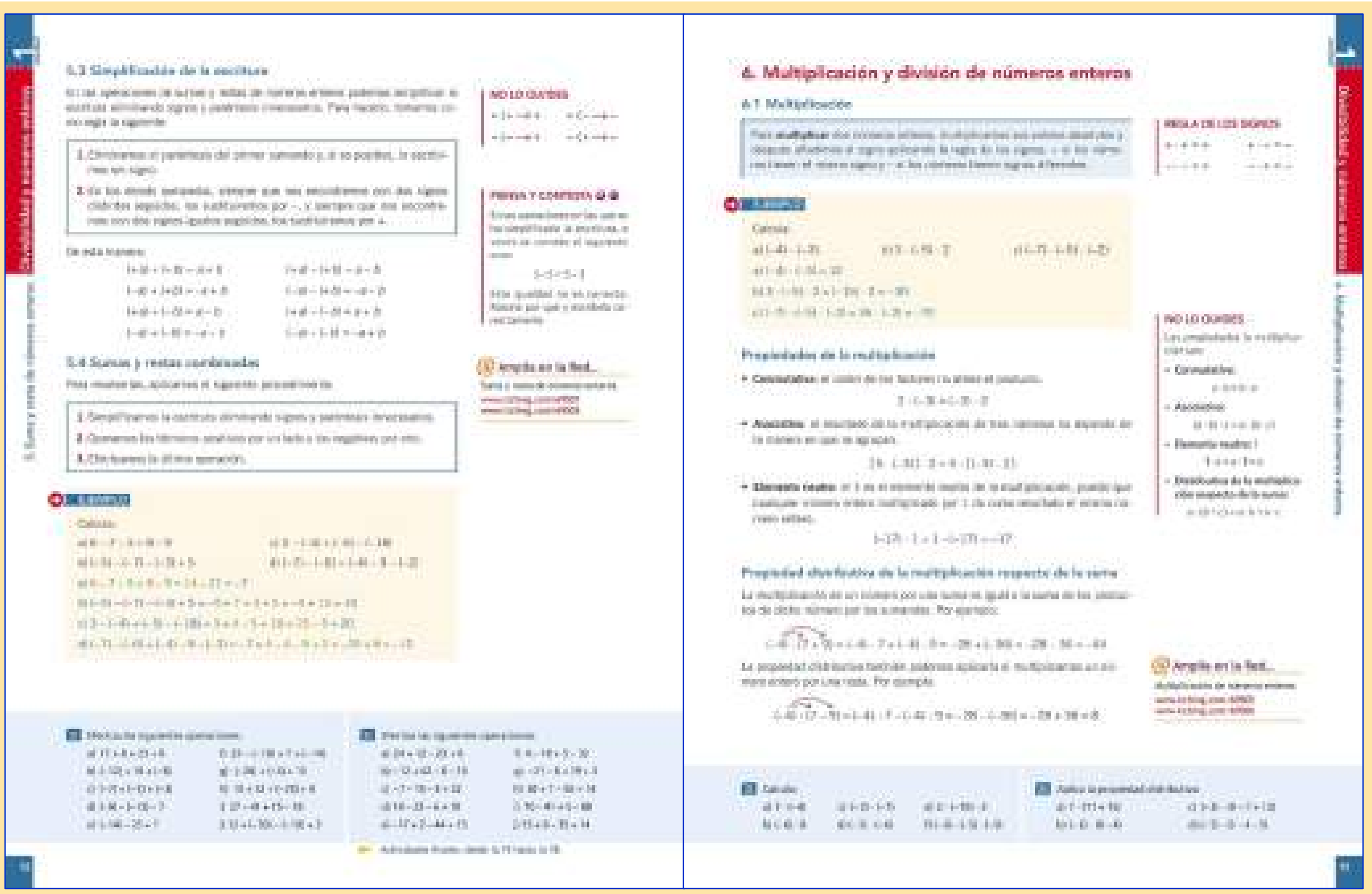
Por lo tanto, los números cuyo valor absoluto están entre –3 y 2 son –1,0 y 1.

29. Aunque los números están en valor absoluto, sabemos que son negativos, por lo que x = –5, y = –3 En conclusión, y > x.

30. Hay dos valores posibles:

$|-2-5| = 7$ $\qquad$ $|12-5| = 7$

Esto ocurre porque el valor absoluto de un número entero negativo y su positivo es el mismo.



5. SUMA Y... (CONT.)/ 6. MULTIPLICACIÓN...

5.3 Simplificación de la escritura

■ En este subapartado leeremos las normas de simplificación de la escritura y destacaremos la importancia de memorizar dichas reglas, resumidas en la nota al margen *No lo olvides.*

Para valorar su comprensión preguntamos al alumnado:

– *¿Qué signo se indica para sustituir a dos signos negativos seguidos?*
– *¿Cómo simplificarías la expresión (–3) – (–3) –(–3)?*

Leeremos ahora el planteamiento propuesto en el apartado *Piensa y contesta* del margen y razonaremos la respuesta animando a los alumnos a participar.

Repasaremos las sumas y restas de números enteros a traves del recurso *Tiching 69501* de *@Amplía en la red.*

■ En el siguiente subapartado daremos un paso más trabajando las sumas y restas de más de dos números. Leeremos el procedimiento para resolverlas en el recuadro y lo pondremos en práctica con los ejemplos.

– *¿Qué se hace primero, operar o simplificar?*
– *¿Qué términos distinguimos a la hora de operar?*

Después el alumnado realizará las actividades 31 y 32. Finalmente repasarán lo aprendido mediante el recurso *Tiching 69503 de @Amplía en la red.*

6.1 Multiplicación

■ El objetivo básico de esta sección es presentar el método de multiplicación de dos números enteros teniendo en cuenta sus signos respectivos.

Para empezar, el alumnado leerá el recuadro azul y comprobará su aplicación en los ejemplos.

– *¿Qué signo tiene el resultado de multiplicar un número positivo por uno negativo?*
– *¿Por qué el resultado de (–7) · (–3) es positivo?*

Conviene que el docente insista en la importancia de memorizar la *Regla de los signos* como indica la nota.

Después los alumnos pueden aplicar el procedimiento de multiplicación en la actividad 33 y las actividades autocorrectivas de los recursos *Tiching 69505* y *69506.*

■ En el siguiente subapartado estudiaremos las propiedades de la multiplicación, resumidas en el apartado *No lo olvides*, que practicaremos con los ejemplos propuestos. Plantearemos también estas cuestiones:

– *¿Qué significa que un número sea el elemento neutro de una operación?*
– *Aplica la propiedad asociativa a:* $(-4)\cdot\left[(-3)\cdot 5\right]$.

Por último, los alumnos practicarán la propiedad distributiva en la actividad 34.

COMPETENCIAS CLAVE

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 31 y 32.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia en la resolución de sumas y restas de números enteros.
- *Acts. 33 y 34.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia en la resolución de multiplicaciones de números enteros, así como sus propiedades.
- *Piensa y contesta.* Identificar errores en operaciones con escritura simplificada aplicando los conocimientos adquiridos.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Piensa y contesta.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

- ✓ La actividad de refuerzo 2 consolidará el aprendizaje de las operaciones combinadas con números enteros, teniendo en cuenta la prioridad de las operaciones.
- ✓ La actividad de ampliación 1 resultará útil para comprobar cómo la multiplicación de ambos miembros de una desigualdad por un número entero invierte su sentido.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Podemos repasar y asimilar los conceptos de la multiplicación y división de números enteros consultando el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/738811

Para trabajar con los alumnos les pediremos que visualicen el vídeo, de diecisiete minutos y medio, en el que se explican los pasos para resolver los algoritmos.

Pediremos que paren el vídeo en las actividades para que las realicen antes de verlas resueltas en la pantalla.

Les pediremos también que propongan dos operaciones y las resuelvan aplicando el sistema rápido de la ley de los signos que enseña el vídeo.

Además, si les interesa, los alumnos podrán visualizar en sus casas un tutorial del mismo autor sobre operaciones combinadas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 12

Piensa y contesta:

El error ocurre al eliminar el paréntesis y simplificar la operación sin tener en cuenta el signo interior.

3 – (–5) = 5 – (–3) → 3 – 5 = 5 – 3

La igualdad correcta sería:

3 – (–5) = 5 – (–3) → 3 + 5 = 5 + 3

31. Las soluciones correctas son:

a) 17 + 8 + 23 +6 = 54

b) (–12) + 16 + (–8) = –12 + 16 – 8 = –20 +16 = –4

c) (–7) + (–5) + (–3) = –7 – 5 – 3 = –15

d) (–9) – (–13) – 7 = –9 + 13 – 7 = 13 – 16 = –3

e) (–14) – 25 + 7 = –14 – 25 + 7 = –39 + 7= –32

f) 23 – (–18) + 7 + (–14) = 23 + 18 + 7 – 14 = 48 – 14 = = 34

g) (–26) + (–4) + 15 = –26 – 4 + 15 = –30 +15 = –15

h) 15 + 12 + (–25) + 4 = 15 + 12 – 25 + 4 = 6

i) 27 – 41 + 15 – 18 = 42 – 59 = –17

j) 12 + (–30) – (–19) + 3 = 12 – 30 + 19 + 3 = 4

32. Las soluciones correctas son:

a) 24 + 12 – 23 + 6 = 42 – 23 = 19

b) –12 + 42 – 8 – 15 = 42 – 35 = 7

c) –7 – 15 – 3 + 22 = –25 + 22 = –3

d) 19 – 23 – 6 +10 = 29 – 29 = 0

e) –17 + 2 – 44 + 15 = – 61 + 17 = –44

f) 4 – 18 + 5 – 32 = 9 – 50 = –41

g) –21 – 6 + 19 + 3 = –27 + 22 = –5

h) 30 + 7 – 55 + 14 = 51 – 55 = –4

i) 70 – 41 + 5 – 88 = 75 – 129 = –54

j) 15 + 6 – 35 + 14 = 35 – 35 = 0

33. Las soluciones correctas sobre las multiplicaciones de números enteros son las siguientes:

a) 7 · (–4) = –28 b) (–6) · 8 = –48

c) (–3) · (–7) = 21 d) (–5) · (–4) = 20

e) 2 · (–10) · 3 = –60 f) (–6) · (–5) · (–9) = –270

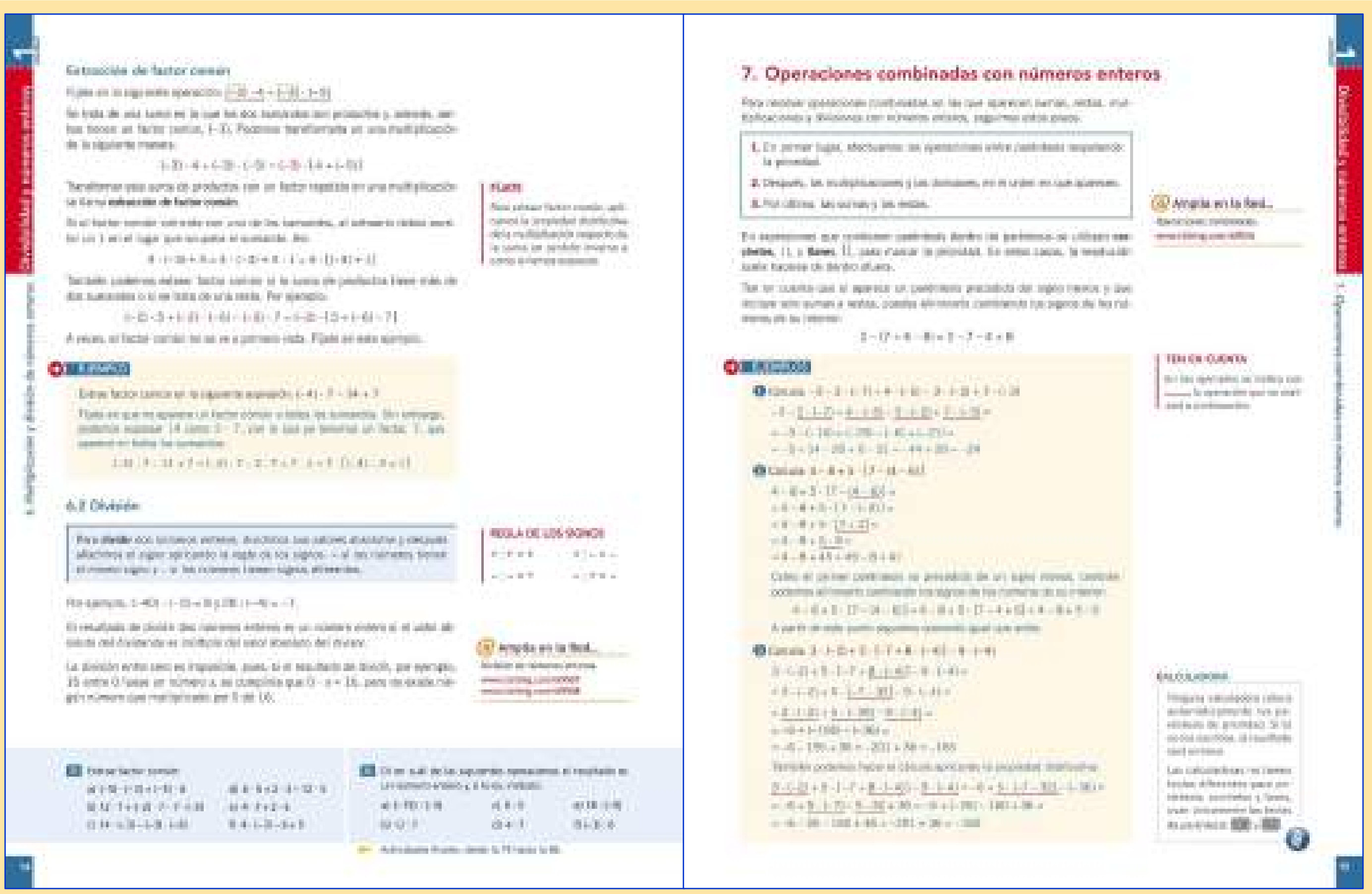
34. Las soluciones aplicando la propiedad distributiva son:

a) 7 · (11 + 15) = 7 · 11 + 7 · 15 = 77 + 105 = 182

b) (–6) · (8 – 4) = (–6) · 8 – (–6) · 4 = –48 + 24 = –24

c) (–3) · (9 – 7 + 12) = (–3) · 9 – (–3) · 7 + (–3) · 12 = = –27 + 21 – 36 = –63 + 21 = –42

d) (–5) · (3 – 4 – 5) = (–5) · 3 – (–5) · 4 – (–5) · 5 = = –15 + 20 + 25 = –15 + 45 = 30



6. MULTIPLIC.(CONT.) / 7. OPERACIONES…

■ Para terminar el apartado sobre la multiplicación de enteros, practicaremos el procedimiento para sacar factor común. Leeremos la explicación y analizaremos el método utilizado mediante la realización de los ejemplos:

– *¿Cuál es el factor común d el primer ejemplo?*

– *¿Puede el factor común ser un número negativo?*

Prestaremos atención a la observación añadida en el margen, *Fíjate*, y al ejemplo del recuadro que presenta un caso que con cierta frecuencia es fuente de errores.

A continuación el alumnado resolverá la actividad 35.

6.2 División

■ El siguiente subapartado tiene como finalidad el estudio de la división de dos números enteros.

Los alumnos y alumnas leerán el método descrito en el recuadro azul y memorizarán la *Regla de los signos* indicada al margen.

– *¿Qué signo tiene el resultado de la división de dos números enteros de diferente signo?*

A continuación, el alumnado practicará la división y la regla de los signos mediante el recurso *@Amplía en la Red 69507* que incluye actividades autocorrectivas.

■ Seguidamente leeremos los dos párrafos siguientes y plantearemos estas cuestiones:

– *¿Cómo es el resultado de la división 10 : 4?*

– *¿Cuál es el resultado de dividir 8 : 0? ¿Y de 0 : 8?*

Finalmente los alumnos y alumnas resolverán la actividad 36 del libro que ampliarán con las actividades propuestas en el recurso de *@Amplía en la red 69508*.

7. Operaciones combinadas con números…

■ El objetivo de este apartado es establecer las normas de prioridad a la hora de operar con números enteros.

Leeremos las reglas del recuadro junto con las indicaciones de los dos párrafos siguientes y preguntaremos a los alumnos:

– *¿Qué se efectúa ante, una suma o un producto?*

– *¿En qué orden se efectúan dos divisiones consecutivas?*

– *¿Qué tienen prioridad, las llaves o los corchetes?*

■ A continuación, pondremos en práctica estas reglas mediante la realización de los ejemplos resueltos, fijándonos en la notación que se emplea, indicada en la nota del margen *Ten en cuenta*.

Prestaremos atención a la ayuda del margen en cuanto al uso de la *Calculadora* y la introducción de paréntesis.

Por último el alumnado puede ampliar la información y repasar lo aprendido mediante nuevas actividades, accediendo el recurso digital *@Amplía en la red.*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 35 y 36*. Trabajar la capacidad de interpretar expresiones con números enteros y expresar los resultados de las operaciones donde se utilizan.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Calculadora*. Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la calculadora.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 35 y 36*. Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridas para resolver las actividades propuestos.

■ *Acts. 35 y 36*. Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, gracias al carácter repetitivo de las actividades.

■ *Ejemplos, págs. 14 y 15*. Observar el cálculo de números enteros identificando las estrategias utilizadas, así como el orden de las operaciones, pudiendo utilizarlas para resolverlas y comprobar posteriormente la solución.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 servirá como práctica del cálculo del factor común en operaciones con números enteros.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Visitando esta página web, nuestros alumnos y alumnas podrán practicar las operaciones combinadas de números enteros:

http://www.tiching.com/738812

En la página se muestran muchos recursos didácticos y actividades para ampliar o reforzar los contenidos estudiados. Concretamente, podremos descargar todo aquello que haga referencia a las actividades sobre operaciones combinadas.

Como docentes, podemos plantearles las operaciones que aparecen en los problemas y pedirles que las resuelvan sin consultar el libro ni el recurso.

Finalmente, también les podemos pedir que elaboren un esquema de los números enteros parecido al que hay en la página a modo de resumen de la unidad.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 14

35. Las expresiones después de extraer el factor común son:

a) $(-5)\cdot(-3)+(-5)\cdot 4=(-5)\cdot[(-3)+4]$

b) $12\cdot 7+(-2)\cdot 7-7\cdot(-3)=7\cdot[12+(-2)-(-3)]$

c) $14\cdot(-3)-(-3)\cdot(-6)=(-3)\cdot[14-(-6)]$

d) $6\cdot 5+2\cdot 3-12\cdot 5=6\cdot 5+6-6\cdot 2\cdot 5=6\cdot(5+1-10)$

e) $4\cdot 7+2\cdot 6=4\cdot 7+2\cdot 2\cdot 3=4\cdot(7+3)$

f) $4\cdot(-3)-6+9=4\cdot(-3)+2\cdot(-3)+(-3)\cdot(-3)=$
$=(-3)\cdot[4+2+(-3)]=(-3)\cdot(4+2-3)$

36. Las soluciones son las siguientes:

a) $(-15):(-3)=5\rightarrow$ Número entero positivo.

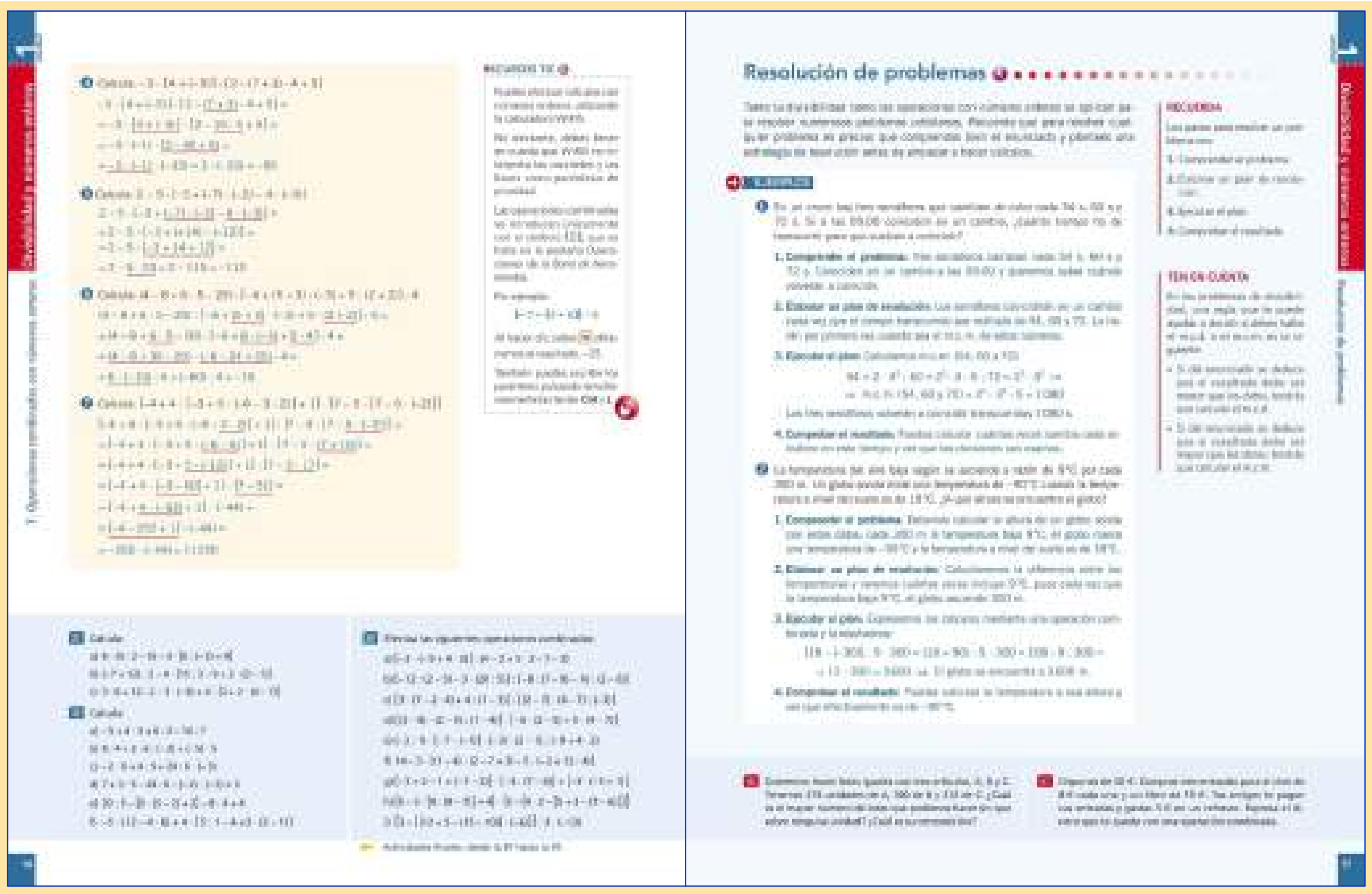
b) $12:7\rightarrow$ No es un número entero.

c) $0:5=0\rightarrow$ Número entero, sin signo.

d) $4:7\rightarrow$ No es un número entero.

e) $18:(-9)=-2\rightarrow$ Número entero negativo.

f) $(-3):0\rightarrow$ No es un número entero.



7. OPERACIONES… (CONT.) / RESOLUCIÓN DE…

■ En esta sección seguiremos practicando las operaciones combinadas y sus jerarquías, dada su importancia a la hora de resolver problemas.

Podemos proponer a varios alumnos que expliquen a los demás las reglas empleadas para operar con números enteros. Para su exposición, recomendamos que se apoyen en cada uno de los cuatro ejemplos propuestos en el libro.

Para fomentar el uso de las tecnologías, prestaremos atención al manejo de la calculdora WIRIS a la hora de operar con jerarquías, según se establece en la nota al margen: *Recursos TIC.*

En este punto, los alumnos y alumnas pueden resolver los ejercicios 37, 38 y 39.

Resolución de problemas

■ La finalidad de este apartado es recordar las etapas características de la resolución de problemas.

En esta ocasión, vamos a resolver situaciones cotidianas en las que habrá que aplicar lo aprendido sobre el m.c.m. y el m.c.d y las operaciones combinadas.

Leeremos la introducción del apartado y los pasos implicados en la resolución de problemas, indicados bajo la nota *Recuerda.*

A continuación, prestaremos atención a las pistas a la hora de identificar un problema, recogidas en el apartado del margen titulado *Ten en cuenta* y lanzaremos al alumnado las siguientes cuestiones:

– *¿Cómo reconoces que un problema puede resolverse aplicando el m.c.m.?*

– *¿Cómo reconoces que un problema puede resolverse aplicando el m.c.d.?*

■ Ahora ya podemos empezar a resolver los problemas propuestos. Después de leer el enunciado del primer ejemplo, formularemos a los alumnos y alumnas las siguien-tes preguntas:

– *Etapa 1: ¿Qué es lo que buscamos? ¿En qué unidades vamos a expresar la respuesta?*

– *Etapa 2: ¿Por qué tenemos que calcular el m.c.m. y no el m.c.d.?*

– *Etapa 3: ¿En qué consiste la etapa “Ejecutar el plan” en este problema?*

– *Etapa 4: ¿Cómo se interpreta la solución obtenida? ¿Cómo comprobamos el resultado?*

■ Finalmente pediremos a los alumnos que resuelvan en sus cuadernos las actividades 40 y 41 del libro de texto.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

- *Recursos TIC*. Trabajar el uso habitual y correcto de la calculadora WIRIS, con la que se pueden calcular operaciones combinadas con números enteros atendiendo a los paréntesis.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 37 a 39*. Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia de resolución de operaciones combinadas de numeros enteros.
- *Acts. 40 y 41*. Aplicar una serie de pasos para mejorar la eficacia de resolución de problemas

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 40 y 41*. Afrontar los problemas siendo creativo, imaginativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la resolución.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 6 servirá para practicar la aplicación de operaciones combinadas con números enteros en la resolución de problemas cotidianos.

✓ La actividad de ampliación 3 consolidará el método de resolución de problemas paso a paso a partir de un problema de divisibilidad.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– En esta dirección encontrarán más actividades sobre operaciones combinadas de números enteros:

http://www.tiching.com/738813

El documento para descargar contiene las soluciones, así los alumnos y alumnas podrán autoevaluarse para ser conscientes de los propios errores.

Como docentes, les pediremos que resuelvan las operaciones sin consultar el libro ni el propio recurso.

Con el fin de repasar el procedimiento de los algoritmos conocidos, antes de empezar preguntaremos:

- *¿El orden correcto para resolver las operaciones es de derecha a izquierda? ¿Sabrías explicar por qué?*
- *¿Las operaciones situadas dentro de los paréntesis son las primeras a resolver o las últimas? ¿Por qué?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 17

37. Los resultados de las operaciones combinadas son:

a) $8 \cdot (4 : 2 - 5) - 3 \cdot [6 : (-3) + 9] = 8 \cdot (2 - 5) - 3 \cdot (-2 + 9) = 8 \cdot (-3) - 3 \cdot 7 = -24 - 21 = -45$

b) $(-7 + 12) \cdot 2 - 4 \cdot [15 : 3 - 9 + 2 \cdot (3 - 1)] = 5 \cdot 2 - 4 \cdot (5 - 9 + 2 \cdot 2) = 10 - 4 \cdot (-4 + 4) = 10 - 4 \cdot 0 = 10$

c) $3 \cdot 6 + 12 : 2 - 3 \cdot (-6) + 4 \cdot [3 + 2 \cdot (4 - 7)] = 18 + 6 + 18 + 4 \cdot [3 + 2 \cdot (-3)] = 42 + 4 \cdot (3 - 6) = 42 + 4 \cdot (-3) = 42 - 12 = 30$

38. Los resultados de las operaciones combinadas son:

a) $-5 + 12 + 3 - 2 = 15 - 7 = 8$

b) $8 : 4 + 3 \cdot 6 : (-2) - 5 \cdot 5 = 2 - 9 - 25 = 2 - 34 = -32$

c) $-12 + 20 - 12 = 20 - 24 = -4$

d) $7 + 3 \cdot 5 - 24 : 6 + 2 \cdot (-5) + 5 = 7 + 15 - 4 - 10 + 5 = 27 - 14 = 13$

e) $20 : 5 - (9 \cdot 3 + 2) - 8 : 4 + 4 = 20 : 5 - (27 + 2) - 8 : 4 + 4 = 20 : 5 - 29 - 8 : 4 + 4 = 4 - 29 - 2 + 4 = -31 + 8 = -23$

f) $-5 \cdot (12 - 4 \cdot 6) + 4 \cdot (5 : 1 - 4 + 3 \cdot 1) = -5 \cdot (12 - 24) + 4 \cdot (5 - 4 + 3) = -5 \cdot (-12) + 4 \cdot 4 = 60 + 16 = 76$

39. Los resultados de las operaciones combinadas son:

a) $[(-3) \cdot (-9 + 12)] : [4 - 2 + 5 \cdot 2 - 7 - 2] = [(-3) \cdot 3] : [4 - 2 + 5 \cdot 2 - 7 - 2] = (-9) : [4 - 2 + 10 - 7 - 2] = (-9) : 3 = -3$

b) $[-12 : (-3) - 3 \cdot 4] : [-8 : (-2) - 16 : (-4)] = (4 - 12) : (4 + 4) = -8 : 8 = -1$

c) $[3 \cdot (-1) + 4 : (-2)] : [(-5) \cdot (-3) : (-3)] = (-3 - 2) : (-5) = (-5) : (-5) = 1$

d) $[(-5) \cdot (-3) : (-3)] \cdot [-6 \cdot (-3) + 5 \cdot (-3)] = (-5) \cdot (18 - 15) = (-5) \cdot 3 = -15$

e) $(-3) \cdot (-6) \cdot (-3) \cdot (1) : (-1) = 18 \cdot (-3) : (-1) = -54 : (-1) = 54$

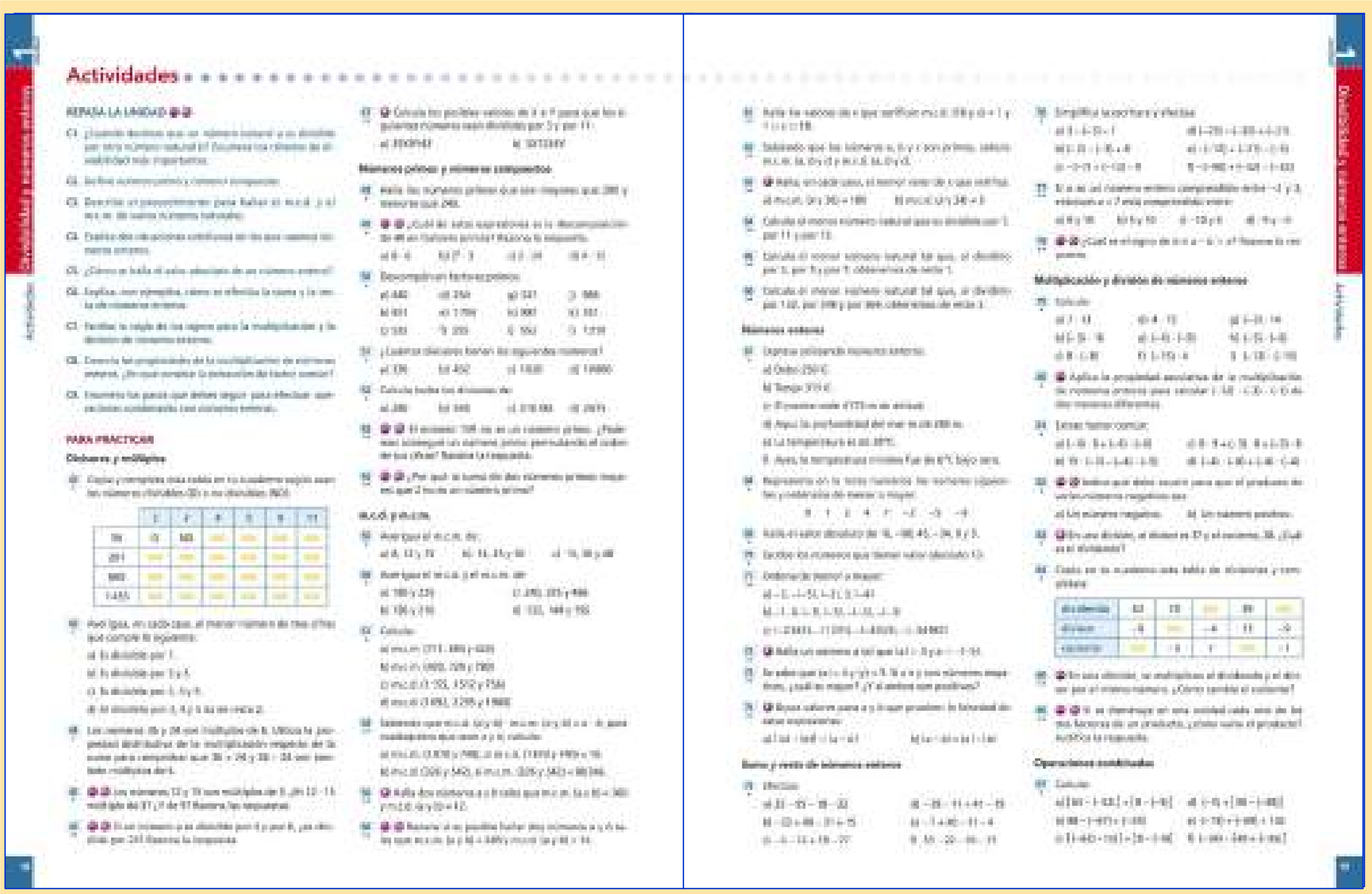
f) $14 - 3\,[(-3) \cdot (-2) - 5 \cdot 1] = 14 - 3 \cdot (6 - 5) = 14 - 3 \cdot 1 = 14 - 3 = 11$

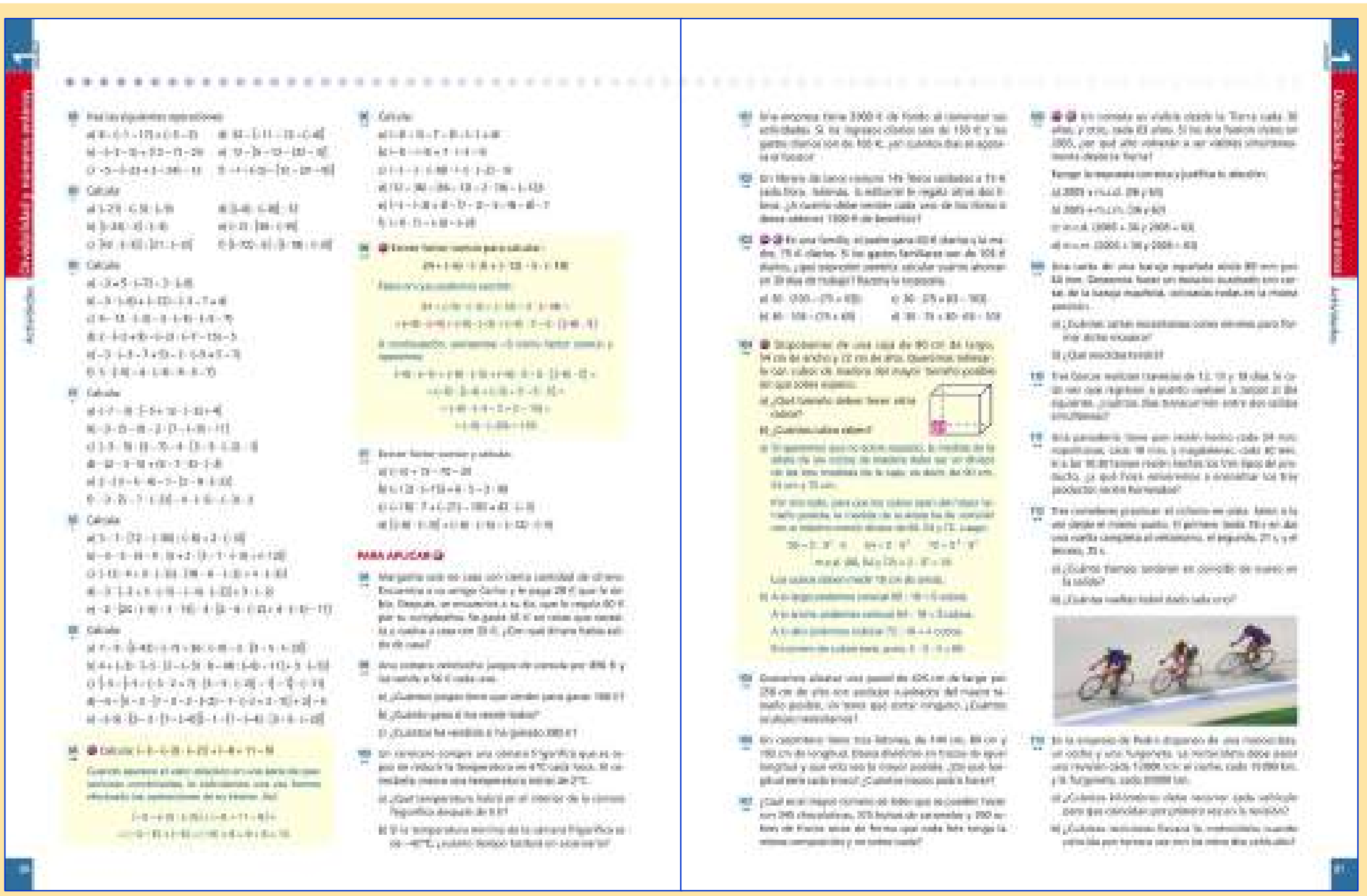
g) $[-3 + 2 - 1 - 3] \cdot [-3 : 3] + [-3 \cdot (-4)] = (-5) \cdot (-1) + 12 = 5 + 12 = 17$

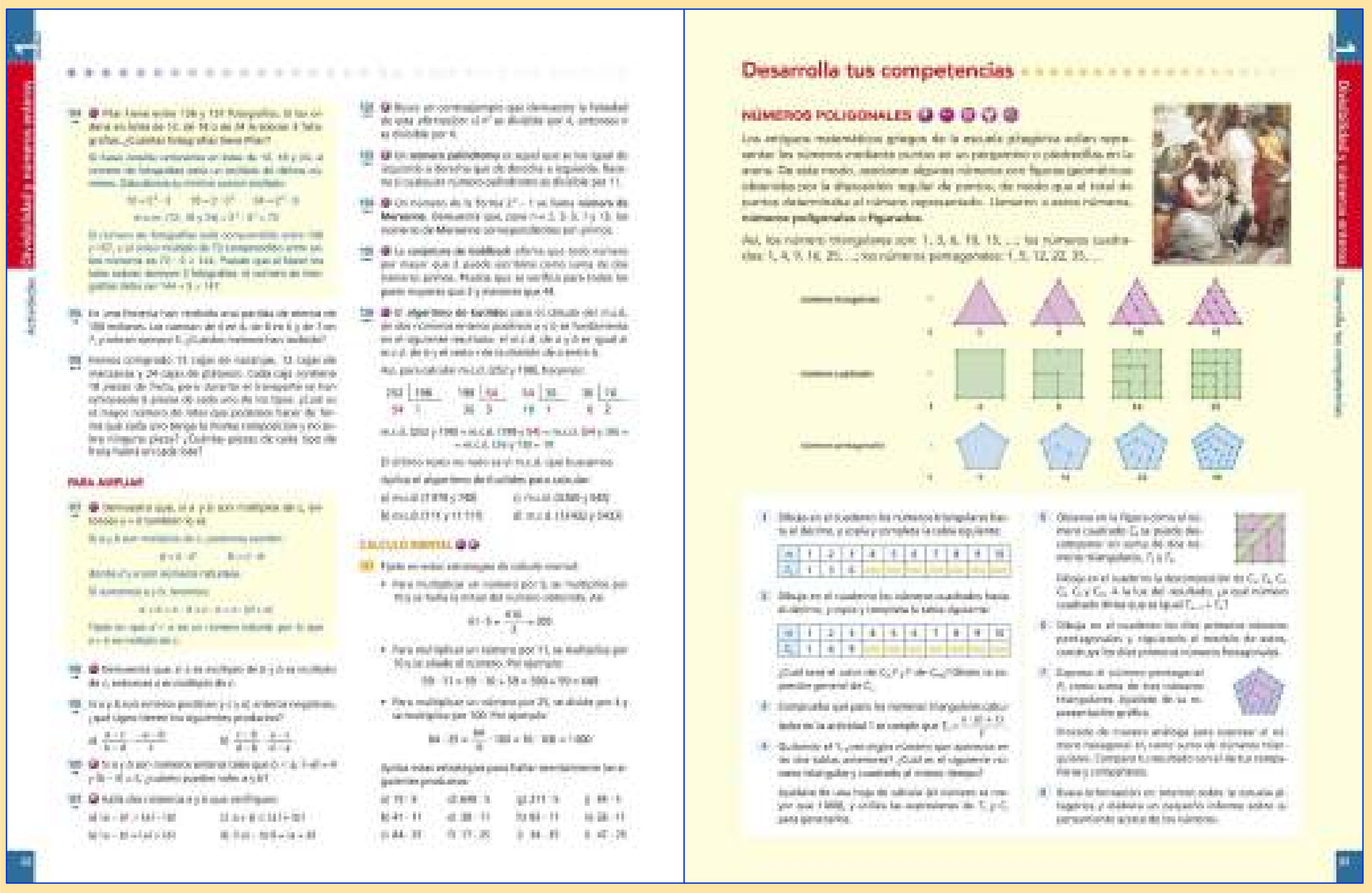
h) $\{5 - 3 \cdot [4 : 2] + 4\} \cdot \{3 - \{4 \cdot 2 - [5 + 3 - 1]\}\} = \{5 - 3 \cdot 2 + 4\} \cdot \{3 - \{4 \cdot 2 - 7\}\} = (5 - 3 \cdot 2 + 4) \cdot (3 - 1) = (5 - 6 + 4) \cdot (3 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$

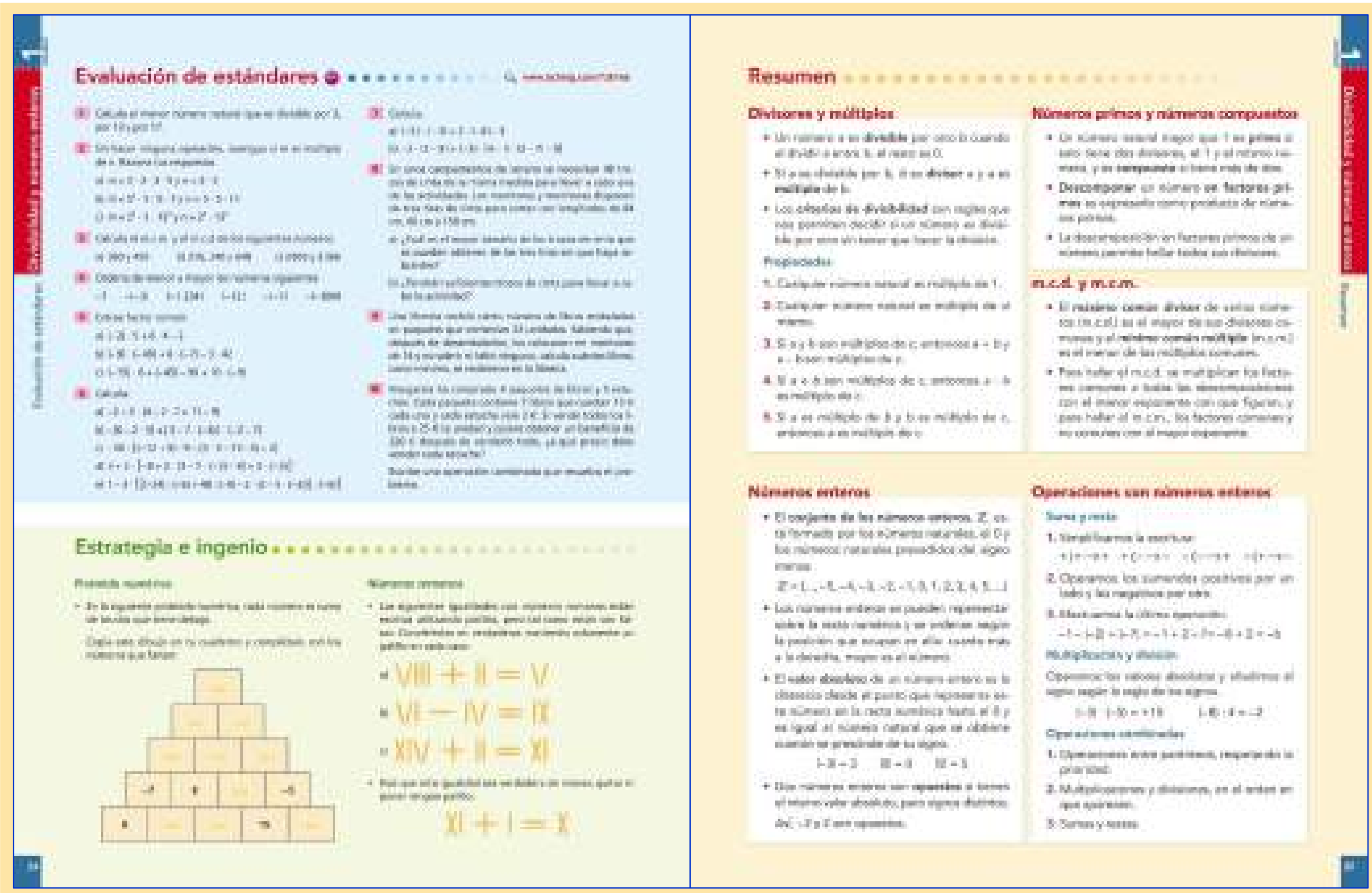
i) $\{3 - \{[12 + 5 - (15 - 10)] \cdot (-6)\}\} : 3 \cdot (-13) = \{3 - \{[12 + 5 - 5] \cdot (-6)\}\} : 3 \cdot (-13) = \{3 - \{12 \cdot (-6)\}\} : 3 \cdot (-13) = \{3 - (-72)\} : 3 \cdot (-13) = 75 : 3 \cdot (-13) = -325$

(Continúa en la página 1-32 de la guía)






Desarrolla tus competencias
NÚMEROS POLIGONALES


Evaluación de estándares
Estrategia e ingenio
Resumen
Divisores y múltiplos
Números primos y números compuestos
m.c.d. y m.c.m.
Números enteros
Operaciones con números enteros

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Repasa la unidad*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.

■ *Acts. 45, 46, 49, 53, 54, 60, 78, 82, 86, 103 y 108.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.

■ *Desarrolla tus competencias*. Leer y comprender el estímulo y los enunciados de la actividad, generando ideas y supuestos.

APRENDER A APRENDER

■ *Repasa la unidad*. Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, así como ser consciente de las propias capacidades y carencias.

■ *Acts. 45, 46, 49, 53, 54, 60, 78, 80, 82, 85, 86, 103 y 108*. Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

■ *Acts. 94, 96, 104, 114 y 117*. Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas.

■ *Acts. 118, 124 a 126*. Aplicar los nuevos conocimientos para demostrar los resultados.

■ *Cálculo mental*. Aprender estrategias y técnicas de cálculo mental, adquiriéndo confianza.

■ *Desarrolla tus competencias*. Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.

■ *Evaluación de estándares*. Ser consciente de las propias capacidades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Para aplicar*. Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, evaluando las acciones realizadas.

■ *Acts. 47, 59, 63, 72, 74, 83 y 120 a 123*. Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad didáctica, mostrando un criterio propio.

■ *Cálculo mental* y *Desarrolla tus competencias*. Buscar las soluciones de forma creativa.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Desarrolla tus competencias*. Buscar, analizar, seleccionar y manejar información en internet.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Desarrolla tus competencias*. Manejar las habilidades sociales en la realización de un trabajo cooperativo.

ACTIVIDADES FINALES

■ En las *Actividades* se proponen una serie de ejercicios de aplicación y ampliación enfocados a repasar la unidad y poner en práctica los conocimientos adquiridos en cada apartado.

■ La finalidad de *Desarrolla...* es promover la autonomía del alumno y la utilización de distintos recursos en la búsqueda de soluciones. Se propone un caso práctico en el que el alumnado tendrá que recopilar información, exponer conclusiones y trabajar los nuevos conceptos estudiados a lo largo del tema.

■ En *Evaluación...* los alumnos podrán comprobar el grado de asimilación de los contenidos y detectar sus posibles carencias a través de actividades y problemas que cubren los principales contenidos conceptuales y procedimentales de la unidad didáctica

■ *Estrategia e ingenio* persigue que los alumnos y alumnas aprendan a pensar a traves del juego. Propone dos acertijos en los que tendrán que recurrir a la imaginación para conseguir resolverlos.

■ El objetivo de la sección *Resumen* es recopilar las principales ideas estudiadas a lo largo de la unidad. Los alumnos lo leerán a modo de repaso y deben conservarlo como guía para revisar de un vistazo todo lo aprendido en el tema.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 18

C1. Un número natural a es divisible por otro b cuando la división del primero entre el segundo es exacta.

- Un número es divisible por 2 cuando termina en 0 o en cifra par.
- Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 5 cuando acaba en 0 o en 5.
- Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
- Un número es divisible por 10 cuando acaba en 0.
- Un número es divisible por 11 si la diferencia (en valor absoluto) entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la suma de las cifras que ocupan lugares impares es 0 o múltiplo de 11.

C2. Un número entero mayor que 1 es *primo* si y solo si es divisible por sí mismo y por 1. Si es divisible por algún otro número, es *compuesto*.

C3. Para calcular el m.c.m. y el m.c.d., primero debemos descomponer los números en factores primos. Después de descomponerlos:

- El m.c.d. de varios números es el producto de los factores comunes a todas las descomposiciones con el menor de los exponentes con que figuran.
- El m.c.m. de varios números es el producto de los factores comunes y no comunes a todas las descomposiciones con el mayor de los exponentes que figuran.

C4. Respuesta personal. A modo de ejemplo:

- El rango de temperaturas en grados Celsius que habitualmente toma valores negativos.
- La enumeración de las plantas de un edificio, donde se suelen reservar los valores negativos para las plantas subterráneas.

C5. El valor absoluto se halla calculando la distancia desde el punto que representa el número en la recta numérica hasta el 0.

C6. La suma:

- Para sumar dos números enteros del mismo signo, sumamos sus valores absolutos y ponemos el mismo signo.

  $(-5)+(-6)=-(|-5|+|-6|)=-(5+6)=-11$

- Para sumar dos números enteros de diferente signo, restamos sus valores absolutos y al resultado le ponemos el signo del que tiene mayor valor absoluto.

  $(5)+(-6)=-(|-6|-|5|)=-(6-5)=-1$

La resta:

- Para restar dos números enteros, sumamos al primero de ellos el opuesto del segundo.

  $(5)-(-6)=5+6=11$

C7. La regla de los signos nos dice el signo que tendrá el resultado de una multiplicación o una división.

+ si los números tienen el mismo signo. $\pm \cdot \pm = +$

– si los números tienen diferente signo. $\pm \cdot \mp = -$

La regla es la misma para la división.

C8. Repasemos las propiedades de la multiplicación:

Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Asociativa: El resultado de la multiplicación de tres números no depende de la manera en que se agrupan.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Elemento neutro: El resultado de multiplicar 1 por otro número entero es el mismo número entero. 1 es el elemento neutro del producto.

$$1 \cdot a = a$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma: La multiplicación de una suma por un número es igual a la suma de los productos de los sumandos por dicho número.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

La extracción del factor común consiste en transformar una suma de productos con un factor repetido en una multiplicación de ese factor repetido por la suma de los términos restantes.

C9. Para realizar operaciones combinadas se deben seguir tres pasos:

- En primer lugar efectuamos las operaciones entre paréntesis, respetando el orden de prioridad de las operaciones de su interior.
- En segundo lugar se realizan las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen.
- En tercer lugar se realizan las sumas y las restas en orden de aparición.

42. El cuadro completo sería:

	2	3	4	5	9	11
56	D	ND	D	ND	ND	ND
261	ND	D	ND	ND	D	ND
660	D	D	D	D	ND	D
1455	ND	D	ND	D	ND	ND

43. El resultado será, respectivamente:

a) $x = 7 \cdot 15 = 105$

b) Si es divisible por 3 y 5, también lo es por 15.

$x = 7 \cdot 15 = 105$

c) Si es divisible por 2, 3 y 5, también lo es por 30.

$x = 30 \cdot 4 = 120$

d) Para cumplir esa condición debemos encontrar un número que sea múltiple de 3, 4 y 5 y sumarle 2:

$x = (60 \cdot 2) + 2 = 120 + 2 = 122$

44. Expresamos 36 y 24 como:

$36 = 6 \cdot 6$; $24 = 6 \cdot 4$

Entonces:

$36 + 24 = 6 \cdot 6 + 6 \cdot 4$

$36 - 24 = 6 \cdot 6 - 6 \cdot 4$

Usando la propiedad distributiva:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$6 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 6 \cdot (6 + 4) = 6 \cdot 10$

$6 \cdot 6 - 6 \cdot 4 = 6 \cdot (6 - 4) = 6 \cdot 2$

Vemos que los términos anteriores se pueden expresar como múltiplos de 6.

45. Usaremos la propiedad distributiva para probar que 12 – 15 es múltiplo de 3:

$12 - 15 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 3 \cdot (4 - 5)$

Vemos asimismo que ninguno de los términos de la expresión final es divisible por 9 así pues, 12 – 15 no es múltiplo de 9.

46. La respuesta es sí. Cuando un número es divisible por otros, este puede ser expresado como producto de sus divisores. Así pues, si es divisible por 4 y 6, a podrá ser expresado como:

$a = 4 \cdot 6 \cdot x = 24 \cdot x$

y obtenemos la expresión de a como múltiplo de 24.

47. Recordamos los criterios de divisibilidad por 3 y 11:

– Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

– Un número es divisible por 11 si la diferencia (en valor absoluto) entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la suma de las cifras que ocupan lugares impares es 0 o múltiplo de 11.

Buscamos los pares X e Y que nos permitan cumplir ambas condiciones.

a) El criterio de divisibilidad por 11 en ese caso, lo podemos expresar como:

$$|(3 + x + y + 3) - (5 + 9 + 4)| = |(6 + x + y) - 18| =$$

$$= |(x + y) - 12| = 11 \cdot b \quad b \geq 0$$

Sabiendo que $0 \leq (x + y) \leq 18$ (ya que ambos términos solo pueden tener un valor entre 0 y 9), tenemos una sola solución válida:

$$|(x + y) - 12| = 0 \quad \rightarrow x + y = 12$$

Comprobamos ahora si también cumple el criterio de divisibilidad por 3:

$$3 + 5 + x + 9 + y + 4 + 3 =$$

$$= 24 + x + y = 3 \cdot z \quad z \leq 1$$

Vemos que si x + y = 12   24 + 12 = 36 = 3 · 12

Los términos que cumplan esa condición también serán divisibles por 3. Los pares de términos que cumplen esa condición son:

(x = 3 ; y = 9) , (x = 4 ; y = 8) , (x = 5 ; y = 7) , (x = 6 ; y = 6) , (x = 7 ; y = 5) , (x = 8 ; y = 4) , (x = 9 ; y = 3)

b) El criterio de divisibilidad por 11 en ese caso, lo podemos expresar como:

$$|(3 + 7 + 3 + y) - (x + 2 + 4)| = |(13 + y) - (6 + x)| =$$

$$= |7 + (y - x)| = 11 \cdot b \quad b \geq 0$$

Sabiendo que $-9 \leq (y - x) \leq 9$ (ya que ambos términos solo pueden tener un valor entre 0 y 9), tenemos dos soluciones válidas:

$$\begin{cases} |7 + y - x| = 0 \rightarrow y - x = -7 \rightarrow x = y + 7 & (1) \\ |7 + y - x| = 11 \rightarrow y - x = 4 \rightarrow y = 4 + x & (2) \end{cases}$$

Los pares que cumplen (1) son:

(y = 0 ; x = 7) , (y = 1 ; x = 8) , (y = 2 ; x = 9)

Los pares que cumplen (2) son:

(y = 4 ; x = 0) , (y = 5 ; x = 1) , (y = 6 ; x = 2) , (y = 7 ; x = 3) , (y = 8 ; x = 4) , (y = 9 ; y = 5)

Aplicamos ahora el criterio de divisibilidad por 3:

$$3 + x + 7 + 2 + 3 + 4 + y = 19 + x + y = 3 \cdot z$$

$$= 19 + x + y = 3 \cdot z \quad z \geq 1$$

De los pares antes dados, los únicos que además cumplen el criterio de divisibilidad por 3 son:

(y = 1 ; x = 8) , (y = 5 ; x = 1) , (y = 8 ; x = 4)

48. Los números primos mayores que 200 y menores que 240 son:

211, 223, 227, 229, 233 y 239.

Para encontrarlos debemos tener en cuenta todos los números primos menores que $\sqrt{240}$, es decir, 2, 3, 5, 7, 11 y 13.

– Podemos descartar todos los pares. Nos quedan:

201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237 y 239.

– Podemos descartar los números, los términos de los cuales sumen 3 y los que terminen en 5. Nos quedan:

203, 209, 211, 217, 221, 223, 227, 229, 233 y 239.

– Descartamos los múltiples de 7, 11 y 13. Nos quedan:

211, 223, 227, 229, 233 y 239.

49. La expresión correcta es la b), todas las otras no son descomposiciones en factores primos dado que los tér–minos expresados en a), c) y d) no son números primos.

50. Los resultados son:

a) $440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$

b) $651 = 3 \cdot 7 \cdot 31$

c) $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

d) $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

e) $1704 = 2^3 \cdot 3 \cdot 71$

f) $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$

g) $521 = 521$

h) $881 = 881$

i) $552 = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$

j) $986 = 2 \cdot 17 \cdot 29$

k) $351 = 3^3 \cdot 13$

l) $1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$

51. Descomponemos los números en factores primos: Cada factor y cada combinación de factores posibles será un divisor:

a) $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$ 20 divisores

b) $432 = 2^4 \cdot 3^2$ 15 divisores

c) $1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$ 30 divisores

d) $10\,800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ 45 divisores

52. Descomponemos los números en factores primos:

a) $280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$

Los divisores posibles serán: 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 5, 7, 2 · 5, 2 · 7, 5 · 7, 2 · 5 · 7, 2^2 · 5, 2^2 · 7, 2^2 · 5 · 7, 2^3 · 5, 2^3 · 7 y 2^3 · 5 · 7.

Reescritos: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 140 y 280.

b) $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

Los divisores posibles serán: 1, 2, 2^2, 3, 3^2, 3^3, 5, 2 · 3, 2 · 5, 3 · 5, 2 · 3 · 5, 2^2 · 3, 2^2 · 5, 2^2 · 3 · 5, 2 · 3^2, 3^2 · 5, 2 · 3^2 · 5, 2^2 · 3^2, 2^2 · 3^2 · 5, 2 · 3^3, 3^3 · 5, 2 · 3^3 · 5, 2^2 · 3^3 y 2^2 · 3^3 · 5.

Reescritos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 27, 30, 36, 45, 54, 60, 90, 108, 135, 180, 270 y 540.

c) $218\,184 = 2^3 \cdot 3 \cdot 9091$

Los divisores posibles serán: 1, 2, 2^2, 2^3, 3, 9091, 2 · 3, 2 · 9091, 2 · 3 · 9091, 3 · 9091, 2^2 · 3, 2^2 · 9091, 2^2 · 3 · 9091, 2^3 · 3, 2^3 · 9091 y, 2^3 · 3 · 9091.

Reescritos: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 9091, 18 182, 27 273, 36 364, 54 546, 72 728, 109 092 y 218 184.

d) $3\,675 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Los divisores posibles serán: 1, 3, 5, 5^2, 7, 7^2, 3 · 5, 3 · 7, 5 · 7, 3 · 5 · 7, 3 · 5^2, 5^2 · 7, 3 · 5^2 · 7, 3 · 7^2, 5 · 7^2, 3 · 5 · 7^2, 5^2 · 7^2 y 3 · 5^2 · 7^2.

Reescritos: 1, 3, 5, 25, 7, 15, 21, 35, 49, 75, 105, 147, 175, 245, 525, 735, 1225 y 3675.

53. La respuesta es no. Podemos ver que ese número es múltiple de 3. Por definición, todos los múltiplos de tres cumplen que el sumatorio de sus cifras también es un múltiplo de tres. En este caso:

1 + 5 + 9 = 15 = 3 · 5

Asimismo, sabemos que el resultado de una suma no se ve afectado por el orden de sus términos, de modo que, sea cual sea la permutación de las cifras de 159, siempre obtendremos un número múltiplo de 3.

54. Los números primos mayores que 2 serán impares por definición (si no fuera así, serían múltiplos de 2). La suma de dos números impares siempre es un número par (y, por ende, múltiplo de 2).

55. El m.c.m. será:

a) $\left\{\begin{array}{l} 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \to 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

b) $\left\{\begin{array}{l} 16 = 2^4 \\ 25 = 5^2 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}\right\} \to 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$

c) $\left\{\begin{array}{l} 15 = 3 \cdot 5 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 48 = 2^4 \cdot 3 \end{array}\right\} \to 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

56. Descomponemos en factores primos y encontramos el m.c.m. y el m.c.d.

a) $\left\{\begin{array}{l} 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 225 = 3^2 \cdot 5^2 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \text{m.c.m.} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900 \\ \text{m.c.d.} = 3^2 \cdot 5 = 45 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} 196 = 2^2 \cdot 7^2 \\ 216 = 2^3 \cdot 3^3 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} \text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 = 10\,584 \\ \text{m.c.d.} = 2^2 = 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \\ 325 = \cdot 5^2 \cdot 13 \\ 486 = 2 \cdot 3^5 \end{array}\right\} \to$

$\to \left\{\begin{array}{l} \text{m.c.m.} = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 13 = 1\,263\,600 \\ \text{m.c.d.} = 1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \\ 144 = 2^4 \cdot 3^2 \\ 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \end{array}\right\} \to$

$\to \left\{\begin{array}{l} \text{m.c.m.} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13 = 20\,592 \\ \text{m.c.d.} = 2^2 \cdot 3 = 12 \end{array}\right.$

57. La solución será:

a) $\left\{\begin{array}{l} 711 = 3^2 \cdot 79 \\ 693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \\ 423 = 3^2 \cdot 47 \end{array}\right\} \to$

$\to \text{m.c.m} = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 47 \cdot 79 = 2\,573\,109$

b) $\left\{\begin{array}{l} 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 780 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \end{array}\right\} \to$

$\to \text{m.c.m.} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 65\,520$

c) $\left\{\begin{array}{l} 1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \\ 1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \\ 756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \end{array}\right\} \to \text{m.c.d.} = 3 \cdot 7 = 21$

d) $\left\{\begin{array}{l} 1092 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \\ 2295 = 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \\ 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \end{array}\right\} \to \text{m.c.d.} = 3$

58. El resultado será:

a) (m.c.m.) · (m.c.d.) = (m.c.m.) · 10 = 1870 · 740

(m.c.m.) = 138 380

b) (m.c.m.) · (m.c.d.) = (m.c.m.) · 2 = 3260 · 542

(m.c.m.) = 88 3460

59. Descomponemos los valores dados en factores primos:

$\text{m.c.m.} = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$\text{m.c.d.} = 12 = 2^2 \cdot 3$

El m.c.d. nos indica que ambos números deben tener como divisor común el 12 :

a = 12 · x b = 12 · y

Asimismo, sabemos por el m.c.m. que uno de ambos números deberá ser además factorizable por 2, 3 y 5. Cualquiera de los dos números pueden contener estos factores (a condición de que no esten en ambos).

A modo de ejemplo:

a = 12 · 2 · 3 = 72

b = 12 · 5 = 60

60. Factorizamos ambos valores:

$\text{m.c.m.} = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

$\text{m.c.d.} = 14 = 2 \cdot 7$

No es posible hallarlos pues los valores dados por el enunciado no representan el m.c.m. y m.c.d. de un par de números.

Eso se puede ver por el hecho de que el m.c.m no contiene el factor 7. Por definición, todos los términos del m.c.d. deben ser también presentes en el m.c.m. (aunque no necesariamente con el mismo exponente).

Página 19

61. Si factorizamos 18 vemos que:

$18 = 2 \cdot 3^2$

x no deberá contener los factores 2 y 3 para que el m.c.d. sea 1.

Los valores posibles seran:

x = 1; x = 5; x = 7; x = 11; x = 13; x = 17

62. El resultado será:

m.c.m. = a · b · c

m.c.d. = 1

63. El resultado será:

a) Dividimos 180 entre 36 y encontraremos el factor que falta para llegar a ese valor. Ese factor es el menor valor de x que verifica la relación.

180 / 36 = 5 x = 5

b) El m.c.d. nos da el valor mínimo de x que verifica la relación (ya que ambos números deben contener almenos los factores del m.c.d.).

x = m.c.d. = 6

64. Ese número lo obtendremos simplemente multiplicando los términos dados por el enunciado (ya que debe ser factorizable en esos valores y todos son primos).

x = 7 · 11 · 13 = 1 001

65. Para encontrar ese valor, multiplicamos los tres términos y sumamos 1.

x = (3 · 5 · 7) + 1 = 105 + 1 = 106

66 Factorizamos los tres términos:

$$\left.\begin{cases} 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \\ 248 = 2^3 \cdot 31 \\ 364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13 \end{cases}\right\} \text{El valor buscado será } x = \text{m.c.m.} + 3$$

$\text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 = 744\,744$

x = 744 744 + 3 = 744 747

67. Las expresiones en números enteros serán:

a) x = –250 €

b) x = 315 €

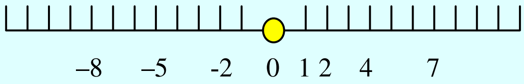
c) x = 4 775 m

d) x = – 280 m

e) x = 28 ºC

f) x = – 6 ºC

68. Los números, ordenados de menor a mayor son:



69. Los valores absolutos son, en el mismo orden que en el enunciado:

16, 98, 45, 34, 0, 5

70. Tendremos 2 posibles valores:

–13 y 13

71. Los valores, ordenados de menor a mayor son:

a) $-|-5|,\ -3,\ |-2|,\ 3,\ |-4|$

b) $-|-5|,\ -|-3|,\ -1,\ 0,\ |-1|, |-5|$

c) $-|-34\,987|,\ -|-4523|, -|1\,231|,\ |-2345|$

72. El número que nos piden debe ser menor que –5 (segúnda condición). Todos los números que cumplen la segunda condición también cumplen la primera. A modo de ejemplo:

x = –6 $|-6| = 6 > 3$ $-6 < -5$

73. Dependiendo de si los términos son negativos o positivos, el resultado variará:

Si ambos términos son negativos:
x = –4; y = –9 x > y

Si ambos términos son positivos:

x = 4; y = 9 y > x

74. En ambos casos podemos diferenciar diferentes rangos de valores para los cuales las expresiones dadas son válidas o no:

a) La expresión dada no será válida si:

$$\begin{cases} a = b \\ a = 0 \text{ o } b = 0 \\ a > 0 \text{ y } b > 0 \end{cases} \quad \text{A modo de ejemplo: } a = 4,\ b = 6$$

b) La expresión dada no será válida si:

$\{a < 0 \quad \text{y / o} \quad b < 0 \quad \text{y} \quad a \neq b$

A modo de ejemplo: a = –2, b = 3

75. La solución será:

a) –70 – 18 – 32 = – (70 + 18 + 32) = –120

b) 49 + 15 – (31 + 33) = 64 – 64 = 0

c) 19 – (4 + 12 + 77) = 19 – 93 = –74

d) 41 – (39 + 11 + 19) = 41– 69 = –28

e) 40 – (7 + 11 + 4) = 40 – 22 = 18

f) 53 – (22 + 10 + 17) = 53 – 49 = 4

76. Los resultados serán:

a) 3 – (–5) – 7 = 3 + 5 – 7 = 8 – 7 = 1

b) (–2) – (–3) + 8 = 8 + 3 – 2 = 11 –2 = 9

c) – (–7) + (–12) – 9 = 7 – 12 – 9 = 7 – 21 = –14

d) (–23) – (–32) + (–21) = 32 – 23 – 21 = 32 – 44 = –12

e) $-(-12)+(-21)-(-5)=12+5-21=-4$

f) $-(-90)+(-32)-(-32)=90+32-32=90$

77. Debemos sumar 7 a los extremos para hallar la solución:

a + 7 estará comprendido entre (–2 + 7) y (3 + 7)

La respuesta correcta es b), entre 5 y 10.

78. Resolvemos la desigualdad para encontrar la respuesta:

$a-b>a \rightarrow a-a>b \rightarrow b<0$

79. Resolvemos:

a) $7 \cdot 13=91$

b) $(-3)\cdot 16=-(3\cdot 16)=-48$

c) $8\cdot(-8)=-(8\cdot 8)=-64$

d) $4\cdot 15=60$

e) $(-4)\cdot(-9)=4\cdot 9=36$

f) $(-15)\cdot 4=-(15\cdot 4)=-60$

g) $(-2)\cdot 14=-(2\cdot 14)=-28$

h) $(-5)\cdot(-6)=5\cdot 6=30$

i) $(-12)\cdot(-15)=12\cdot 15=180$

80. La propiedad asociativa nos dice que:

$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

Así pues:

$(-12)\cdot(-3)\cdot(-1)=(-12)\cdot(3\cdot 1)=(12\cdot 3)\cdot(-1)=-36$

81. Simplificamos las expresiones sacando el máximo de factores comunes posibles:

a) $(-4)\cdot 8+(-4)\cdot(-6)=(-4)\cdot(8-6)=$
$=(-4\cdot 2)\cdot(4-3)=(-8)\cdot(4-3)$

Factor común: –8

b) $15\cdot(-5)-(-4)\cdot(-5)=(-5)\cdot(15-(-4))=$
$=(-5)\cdot(15+4)$

Factor común: –5

c) $8\cdot 9+(-3)\cdot 8+(-3)\cdot 8=8\cdot(9+(-3)+(-3))=$
$=(8\cdot 3)\cdot(9-1-1)=24\cdot(9-2)$

Factor común: 24

d) $(-4)\cdot(-8)+(-4)\cdot(-4)=(-4)\cdot(-8+(-4))=$
$=(-4)\cdot(-4)\cdot(2+1)=16\cdot(2+1)$

Factor común: 16

82. La respuesta es:

a) Para que el resultado sea negativo, el producto debe contener un número inpar de términos negativos.

b) Para que el resultado sea positivo, el producto debe contener un número par de términos negativos.

83. Hay un total de 37 dividendos posibles, cada uno con un resto diferente (de 0 a 36).

El dividendo más pequeño será el que de resto = 0. Esto es: 37 · 28 = 1036

El dividendo mayor será 1036 + 36 = 1072

84. La tabla completa será:

dividendo	63	70	–28	39	9
divisor	–9	–14	–4	13	–9
cociente	–7	–5	7	3	–1

85. Multiplicar el dividendo y el divisor por el mismo número no afecta el resultado de la división; cociente y resto restarán inalterados.

86. La expresión matemática del enunciado será:

$(x-1)\cdot(y-1)=xy-x-y+1=xy+1-(x+y)=$
$=xy+A$

Vemos que la variación será equivalente a sumarle $A=1-(x+y)$ al producto original.

87. La solución será:

a) $63+52+8+9=132$

b) $98+67-24=141$

c) $8+9-63-15=17-78=-61$

d) $36+48-5=79$

e) $142-69-73=0$

f) $-34-49+35=-48$

Página 20

88. Los resultados son:

a) $8-(-18)+(-7)=8+18-7=19$

b) $-(-8)+(5)-23=8+5-23=-10$

c) $-5(-74)-12=-5+74-12=57$

d) $32-(-11-72+4)=32-(-79)=32+79=111$

e) $12-[5-12-(19)]=12-(5-12-19)=12-(-26)=$
$=12+26=38$

f) $-7+5-[12-(22)]=-7+5-(-10)=-7+5+10=$
$=8$

89. Calculamos:

a) $(-21)\cdot(-3):(-9)=63:(-9)=-7$

b) $[(-24):4]:(-3)=(-6):(-3)=2$

c) $[42:(-3)]:[18:(-3)]=(-14):(-6)\approx 2{,}33$

d) $[(-6)\cdot(-8)]:12=48:12=4$

e) $(-2)\cdot[36:(-9)]=(-2)\cdot(-4)=8$

f) $[(-72):6]:[(-18):(-3)]=(-12):6=-2$

90. Las soluciones son:

a) $-3-35+27=-11$

b) $18+(-12):(-6)=18+2=20$

c) $9+24+12\cdot(-12)=9+24-144=-111$

d) $2\cdot 6+2\cdot(-22)-5=12-44-5=-37$

e) $(-3)\cdot(-5)-2\cdot(-11)=15+22=37$

f) $-15-4\cdot(-8-3-7)=-15-4\cdot(-18)=--15+72=$
$=57$

91. Calculando se obtiene:

a) $(-10)\cdot(-5-36+4)=(-10)\cdot(-37)=370$

b) $(-3)\cdot(-4)-2\cdot(7+9-11)=12-2\cdot(5)=12-10=2$

c) $(-8)\cdot(-5)-4\cdot(3+10-3)=40-4\cdot(10)=$
$=40-40=0$

d) $-(2-15)+(3-28)\cdot(-2)=-(-13)+(-25)\cdot(-2)=$
$=13+50=63$

e) $2\cdot(3-20)-7\cdot(2+18)=2\cdot(-17)-7\cdot 20=$
$=-34-140=-174$

f) $(-3)\cdot(5+14)+20-(-6)=(-3)\cdot 19+20+6=$
$=-57+26=-31$

92. Los resultados son:

a) $3-7\cdot[12-(5)-6]=3-7\cdot 1=-4$

b) $-3-5\cdot(4-27)+2\cdot(5+21-12)=-3-5\cdot(-23)+$
$+2\cdot 14=-3+115+28=140$

c) $(-3-15)\cdot(18-6+2-12)=(-18)\cdot(2)=-36$

d) $-3\cdot[-2+3\cdot(-2-15-8)]-6=-3\cdot[-2+3\cdot(-25)]-$
$-6=-3\cdot(-2-75)-6=-3\cdot(-77)-6=231-6=$
$=225$

e) $-2\cdot(-4-45)-4\cdot(2+12-12-17)=-2\cdot(-49)-$
$-4\cdot(-15)=98+60=158$

93. Las soluciones son:

a) $7-9\cdot[6-4-2\cdot(3+10)]=7-9\cdot[6-4-2\cdot(13)]=$
$=7-9\cdot(6-4-26)=7-9\cdot(-24)=7+216=223$

b) $4-3\cdot[-5\cdot(2+24+8-11)-15]=4-3\cdot[-5\cdot(23)-$
$-15]=4-3\cdot(-115-15)=4-3\cdot(-130)=4+390=$
$=394$

c) $\{-5-[-5-(-10+7)\cdot(3+10)-7]-1\}:(-11)=$
$=\{-5-[-5-(-3)\cdot(13)-7]-1\}:(-11)=[-5-$
$-(-5+39-7)-1]:(-11)=(-5-27-1):(-11)=$
$=(-33):(-11)=3$

d) $-4-\{4-3\cdot[7-3+4-7\cdot(-6)]+2\}-5=-4-$
$-[4-3\cdot(7-3+4+42)+2]-5=-4-[4-$
$-3\cdot(50)+2]-5=-4-(4-150+2)-5=-4-$
$-(-144)-5=-4+144-5=135$

e) $\{5\cdot[3-2\cdot(7+4)]-1\}-[1+4\cdot(3+10)]=$
$=[5\cdot(3-22)-1]-(1+52)=[5\cdot(-19)-1]-53=$
$=(-95-1)-53=-96-53=-149$

94. Actividad resuelta en el libro.

95. Resolvemos:

a) $3-|-9|-|3|=3-9-3=-9$

b) $3-5+7\cdot|-8|=-2+7\cdot 8=-2+56=54$

c) $|-5+16|\cdot|10-6|=|11|\cdot|4|=11\cdot 4=44$

d) $|-24|-|24|-2\cdot|36+12|=24-24-2\cdot|48|=$
$=-2\cdot 48=-96$

e) $|-5-2+3|+|7-|-12|-8|-7=|-4|+$
$+|7-12-8|-7=4+|-13|-7=4+13-7=10$

f) $7\cdot|1-5-2|=7\cdot|-6|=7\cdot 6=42$

96. Ejercicio resuelto en el libro.

97. Las soluciones son:

a) $(-5)+(-5)\cdot(-3)+(-5)\cdot 14+(-5)\cdot 4=$
$=(-5)\cdot[1-3+14+4]=(-5)\cdot 16=-80$

b) $(-3)\cdot 4\cdot(-15)-(-3)\cdot 2\cdot 5+(-3)\cdot 90=$
$=(-3)\cdot[4\cdot(-15)-2\cdot 5+90]=$
$=(-3)\cdot[-60-10+90]=(-3)\cdot 20=-60$

c) $(-3)\cdot 6\cdot 7+(-3)\cdot 7+(-3)\cdot 35+(-3)\cdot 42=$
$=(-3)\cdot[6\cdot 7+7+35+42]=(-3)\cdot[126]=-378$

d) $(-6)\cdot(-3)+(-6)\cdot(-5)-(-6)\cdot 2\cdot(-5)=$
$=(-6)\cdot[(-3)+(-5)-2\cdot(-5)]=(-6)\cdot[-3-5+10]=$
$=(-6)\cdot 2=-12$

98. A 26 le tengo que sumar 43 €, restar 60 e, y sumar 28 €, y el resultado será el dinero con el que Margarita salió de casa:

26 + 43 – 60 + 28 = 37 €

99. Con los datos dados por el enunciado resolvemos las cuestiones:

a) Ana debe recuperar la inversión inicial de 896 € y ganar 168 € de más para que estos puedan ser considerados ganancias. Así pues:

(896 + 168) / 56 = 19 → Ana debe vender 19 juegos

b) Multiplicamos el precio de un juego por el total y le restamos el precio de compra:

$28\cdot 56-896=1568-896=672$ €

c) Sumamos 896 € a los 280 € y lo dividimos por el precio de venta de los juegos:

(280 + 896) / 56 = 21 juegos

100. Las respuestas son:

a) La temperatura inicial es 2 ºC, y se reduce 5 veces, 6 ºC cada vez:

$2-5\cdot 6=2-30=-28$ ºC

b) Calculamos la diferencia entre la temperatura inicial y la mínima, y la dividimos entre 6:

$[2-(-42)]:6=(2+42):6=44:6\approx 7{,}3$ horas

Página 21

101. Hay que calcular qué cantidad de dinero se pierde cada día, es decir, restar ingresos y gastos, y dividir los 3000 € iniciales por ese valor:

$3000:|150-165|=3000:|-15|=3000:15=200$ días

102. Hay que sumar el dinero gastado en los 145 libros a los 1500 € (pues el total ha de compensar lo que se ha gastado, y además dar esa cantidad de beneficio), y dividir el valor resultante entre el número total de libros a vender:

$(1500+145\cdot 15):(145+2)=(1500+2175):147=$
$=3675:147=25$ € por cada libro.

103. En un día, lo que se ahorra es la suma de los dos sueldos menos el gasto, así que para 30 días, la respuesta correcta es la c) :

$30 \cdot (75 + 63 - 103)$

104. Actividad resuelta en el libro.

105. Para que sean del mayor tamaño posible y que no se corte ninguno, el lado de cada azulejo debe ser el máximo común divisor del alto y la longitud de la pared:

$$\begin{array}{r|l} 425 & 5 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$425 = 5^2 \cdot 17$, $250 = 2 \cdot 5^3 \rightarrow$

$\rightarrow$ m.c.d.$(425, 250) = 5^2 = 25$

El lado debe tener una k 25 cm, así que a lo largo pondremos 425 : 25 = 17 azulejos, y a lo alto 250 : 25 = 10 azulejos, con un total de 17 · 10 = 170 azulejos.

106. La longitud de cada trozo será el máximo común divisor de los tres listones:

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 192 & 2 \\ 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$144 = 2^4 \cdot 3^2, \quad 80 = 2^4 \cdot 5, \quad 192 = 2^6 \cdot 3 \rightarrow$

$\rightarrow$ m.c.d$(144, 80, 192) = 2^4 = 16$ cm

Así, del primer listón podemos sacar 144 : 16 = 9 trozos, del segundo 80 : 16 = 5 trozos, y del tercero 192 :16 = 12 trozos, con lo que, al final, tendremos un total de 26 trozos.

107. Para que haya la misma cantidad de los tres artículos en cada lote, y no sobre nada, calculamos el máximo común divisor:

$$\begin{array}{r|l} 345 & 5 \\ 69 & 3 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 375 & 5 \\ 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 390 & 5 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$345 = 23 \cdot 5 \cdot 3, \quad 375 = 5^3 \cdot 3, \quad 390 = 13 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$

m.c.d.$(276, 300, 312) = 5 \cdot 3 = 15$ lotes.

108. Para saber dentro de cuántos años volverán a ser visibles a la vez, hay que calcular el mínimo común múltiplo, pues es el número más bajo (es decir, el año más cercano) en el que coincidirán los dos períodos, 36 y 63 años, así que la respuesta correcta es la b).

109. Necesitamos el mínimo común múltiplo entre ambas medidas, para que el resultado sea cuadrado (misma altura y anchura):

$$\begin{array}{r|l} 89 & 89 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$89 = 89 \cdot 1, \quad 64 = 2^6 \rightarrow$ m.c.m.$(89, 64) = 2^6 \cdot 89 =$

$= 5696$ mm de lado.

a) El mosaico tendrá 5696 : 89 = 64 cartas de alto y 5696 : 64 = 89 de ancho, un total de 64 · 89 = = 5696 cartas

b) El área total valdrá A = (5696 mm)^2 = 32 444 416 mm^2.

110. Calculamos el mínimo común múltiple del tiempo de travesía de los tres barcos:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 18 = 2 \cdot 3^2$

Así:

m.c.m.$(12, 15, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$

Los tres barcos saldrán simultáneamente cada 180 días.

111. Para saber cuánto tiempo tardan en estar justo recién hechos los tres productos, calculamos el mínimo común múltiplo:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$24 = 2^3 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2, \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow$

$\rightarrow$ m.c.m.$(24, 18, 30) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$ minutos

Es decir, después de 360 : 60 = 6 horas volverá a haber pan, napolitanas y magdalenas recién hechas, a las 16:30.

112. Para saber cuánto tardan en coincidir los tres ciclistas, calculamos el mínimo común múltiplo:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 2 & \end{array}$$

$18 = 2 \cdot 3^2, \quad 21 = 3 \cdot 7, \quad 25 = 5^2 \rightarrow$

$\rightarrow$ m.c.m.$(18, 21, 25) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3150$

Tardarán 3150 segundos en coincidir, así que el primero llevará 3150 : 18 = 175 vueltas, el segundo 3150 : 21 = 150 vueltas, y el tercero 3150 : 25 = 126 vueltas.

113. Las soluciones son:

a) Para saber cuándo coinciden por primera vez, tengo que calcular el mínimo común múltiplo:

$12000 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3$

$15000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \rightarrow$

$20000 = 2^5 \cdot 5^4$

$\rightarrow$ m.c.m.$(12000, 15000, 20000) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^4 =$

$= 60000$ km

b) Si coinciden por tercera vez, llevarán $60000 \cdot 3 = 180000$ km recorridos, y como la motocicleta tiene que pasar revisión cada 12000: $180000 : 12000 = 15$ revisiones.

Página 22

114. Actividad resuelta en el libro.

115. Si no sobrasen melones al contarlos de 4 en 4, de 6 en 6 y de 7 en 7, el número sería un múltiplo de estos tres números. Calculemos el mínimo común múltiplo:

$$\left\{\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 7 = 7 \cdot 1 \end{array}\right. \rightarrow \text{m.c.m.}(4, 6, 7) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

Si no sobrasen, serían 84 melones, pero como siempre sobran 3, y sabemos que son menos de 100, tenemos 84 + 3 = 87 melones.

116. Calculamos el total de frutas no estropeadas:

$15 \cdot 18 - 6 = 270 - 6 = 264$ naranjas

$12 \cdot 18 - 6 = 216 - 6 = 210$ manzanas

$24 \cdot 18 - 6 = 432 - 6 = 426$ plátanos

Para que haya la misma cantidad en cada lote y no sobre fruta, calculamos el máximo común divisor:

$$\begin{array}{r|l} 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 426 & 2 \\ 213 & 3 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

$264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11, \quad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 426 = 2 \cdot 3 \cdot 71 \rightarrow$

$\rightarrow$ m.c.d.$(264, 210, 426) = 2 \cdot 3 = 6$ lotes.

En cada lote habrá: 264 : 6 = 44 naranjas, 210 : 6 = = 35 manzanas, y 426 : 6 = 71 plátanos.

117. Actividad resuelta en el libro.

118. Expresamos:

b = X · d donde X es un número natural

a = Y · b donde Y es un número natural.

Entonces:

a = Y · b = Y · (X · d) = (Y · X) · d = Z · d

donde Z es un número natural.

Así pues, a es un múltiplo de d.

119. El signo será, en cada caso:

a) a – c es positivo, b – d también, así que $\frac{a-c}{b-d}$ es positivo.

Por otro lado, – a – b es negativo, así que $\frac{-a-b}{c}$ es positivo.

Por lo tanto, $\frac{a-c}{b-d} \cdot \frac{-a-b}{c}$ es positivo.

b) c – b es negativo, y d – b también, así que $\frac{c-b}{d-b}$ es positivo.

Por otro lado, a – c es positivo, pero d – a es negativo, así que $\frac{a-c}{d-a}$ es negativo.

Así que $\frac{c-b}{d-b} \cdot \frac{a-c}{d-b}$ es negativo.

120. Por la segunda condición, a sólo puede valer 4 y –4.

Por la tercera condición, b sólo puede valer –2 y 8.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la primera condición, b < a, el único resultado posible es: a = 4, y b = –2.

121. Respuesta personal, a modo de ejemplo:

a) a = –2 y b = 3

b) a = 2, b = –3

c) a = 2, b = –3

d) a = 2, b = –3

122. Si n = 10, n^2 = 100, y tenemos que 100 : 4 = 25, pero 10 no es divisible por 4.

123. Recordemos el criterio de divisibilidad por 11:

Un número es divisible por 11 si la diferencia (en valor absoluto) entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la suma de las cifras que ocupan lugares impares es 0 o múltiplo de 11.

Así pues, un número palíndromo será divisible por 11 solo si cumple esta condición. Considerando que hay palíndromos con una cantidad par de dígitos y otros con una cantidad inpar, y definiendo los dígitos como a_n, siendo n la posición que ocupan, podemos reescribir matemáticamente el criterio de divisi–bilidad:

Términos palíndromos con 2n dígitos (cantidad par):

$$\left|(a_1 + a_3 + ... + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + ... + a_{2n})\right| =$$

$$= 11x \quad x \in N$$

En los palíndromos de 2n dígitos, por definición, a partir del término n+1 los valores de los dígitos toman los valores de los n primeros dígitos según:

$$a_{n+1} = a_n \, ; a_{n+2} = a_{n-1} \, ; ... ; a_{2n} = a_1$$

Vemos pues que, en la segunda mitad del palíndromo, los valores de los dígitos son los mismos pero habiendo cambiado las posiciones inpares por pares y las pares por inpares. De ese modo la condición de divisibilidad por 11 cobra la forma:

$$\left|(a_1 + a_3 + ... + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + ... + a_{2n})\right| =$$

$$\left|(a_1 + a_3 + ... + a_n + a_{n-1} + a_{n-3} + ... + a_4 + a_2) - \right.$$

$$\left. - (a_2 + a_4 + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4} + ... + a_3 + a_1)\right| = 0$$

Esta igualdad se cumple siempre, por lo tanto, este tipo de palíndromos siempre serán múltiples de 11 ya que todos cumplen el criterio de divisibilidad.

Términos palíndromos con 2n–1 dígitos (cantidad inpar):

$$\left|(a_1 + a_3 + ... + a_n + ... + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + ... + a_{2n-2})\right| =$$
$$= 11x \; x \in N$$

En los palíndromos de 2n–1 dígitos, por definición, a partir del término n+1 los valores de los dígitos toman los valores de los n primeros dígitos según:

$$a_{n+1} = a_{n-1} \, ; a_{n+2} = a_{n-2} \, ; ... ; a_{2n-1} = a_1$$

Vemos pues que en la segunda mitad del palíndromo los valores de los dígitos son los mismos sin haber cambiado las posiciones inpares por pares, ni las pares por inpares. El término n queda desemparejado. De ese modo, la condición de divisibilidad por 11 cobra la forma:

$$\left|(2a_1 + 2a_3 + ... + a_n) - (2a_2 + 2a_4 + ... + 2a_{n-1})\right| =$$

$$= 11x \quad x \in N$$

Escogiendo adecuadamente los términos, podemos encontrar palíndromos que cumplan esa condición, sin embargo, muchos otros no la cumplirán. A modo de ejemplo:

– 13231: Aplicamos el criterio de divisibilidad:

$$\left|(3+3) - (1+2+1)\right| = \left|(6-4)\right| = \left|2\right| = 2$$

Vemos que este término no cumple la condición, ya que 2 no es un múltiplo de 11 ni 0. Así pues, no todos los números palíndromos son múltiplos de 11.

124. Comprobamos la afirmación del enunciado:

$n = 2 \rightarrow 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$, primo.

$n = 3 \rightarrow 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$, primo.

$n = 5 \rightarrow 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$, primo.

$n = 7 \rightarrow 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$, primo.

$n = 13 \rightarrow 2^{13} - 1 = 8192 - 1 = 8191$, primo.

125. Un ejemplo para cada caso queda:

4 = 3 + 1	24 = 17 + 7
6 = 5 + 1	26 = 19 + 7
8 = 5 + 3	28 = 17 + 11
10 = 5 + 5	30 = 13 + 17
12= 11 + 1	32 = 13 + 19
14 = 11 + 3	34 = 17 + 17
16 = 11 + 5	36 = 19 + 17
18 = 11 + 7	38 = 19 + 19
20 = 13 + 7	40 = 21 + 19
22 = 17 + 5	42 = 21 + 21

126. Calculamos mediante el algoritmo de Euclides:

a)

$$\begin{array}{r|l} 1870 & 740 \\ \cline{2-2} 390 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 740 & 390 \\ \cline{2-2} 350 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 390 & 350 \\ \cline{2-2} 40 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 350 & 40 \\ \cline{2-2} 30 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 30 \\ \cline{2-2} 10 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 30 & 10 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

$\rightarrow$ m.c.d.(1870, 740) = m.c.d.(30, 10) = 10

b)

$$\begin{array}{r|l} 11\,111 & 111 \\ \cline{2-2} 11 & 100 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 111 & 11 \\ \cline{2-2} 1 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 11 \end{array} \rightarrow$$

$\rightarrow$ m.c.d.(111, 11111) = m.c.d.(11, 1) = 1

c)

$$\begin{array}{r|l} 3260 & 542 \\ \cline{2-2} 8 & 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 542 & 8 \\ \cline{2-2} 6 & 67 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 6 \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

$\rightarrow$ m.c.d.(3260, 542) = m.c.d.(6, 2) = 2

d) Los resultados son:

$$\begin{array}{r|l} 12\,432 & 5432 \\ \cline{2-2} 1568 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|l} 5432 & 1568 \\ \cline{2-2} 728 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1568 & 728 \\ \hline 112 & 2 \end{array} \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 728 & 112 \\ \hline 56 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 112 & 56 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \rightarrow$$

$\rightarrow$ m.c.d.(12 432, 5432) = 56

127. a) $\frac{190}{2} = 95$ b) $410 + 41 = 451$

c) $\frac{84}{4} \cdot 100 = 21 \cdot 100 = 2100$ d) $\frac{6400}{2} = 3200$

e) $380 + 38 = 418$ f) $\frac{17}{4} \cdot 100 = 425$

g) $\frac{2110}{2} = 1055$ h) $830 + 83 = 913$

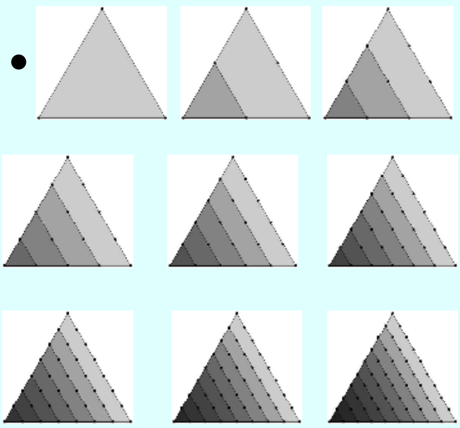
i) $\frac{34}{4} \cdot 100 = 850$ j) $\frac{940}{2} = 470$

k) $260 + 26 = 286$ l) $\frac{47}{4} \cdot 100 = 1175$

Página 23

Desarrolla tus competencias:

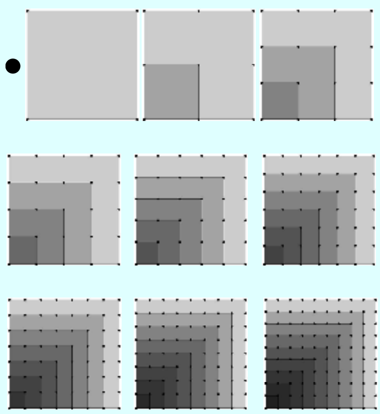
1. Los diez primeros números triangulares son:



A continuación ya podemos completar la tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

2. Los diez primeros números cuadrados son:



A continuación ya podemos completar la tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Observando la tabla, fácilmente podemos deducir los valores que nos piden. Así, $C_{25} = 625$ y $C_{100} = 10000$. Por tanto, la expresión general será $C_n = n^2$.

3. Sabiendo que cada número triangular está definido por la fórmula $T_n = n(n+1)/2$, sustituimos n por = 1, 2, 3, etc. uy podremos comprobar que la tabla es correcta:

$T_1 = 1{\cdot}(1+1)/2 = 1$ $T_6 = 6{\cdot}(6+1)/2 = 21$

$T_2 = 2{\cdot}(2+1)/2 = 3$ $T_7 = 7{\cdot}(7+1)/2 = 28$

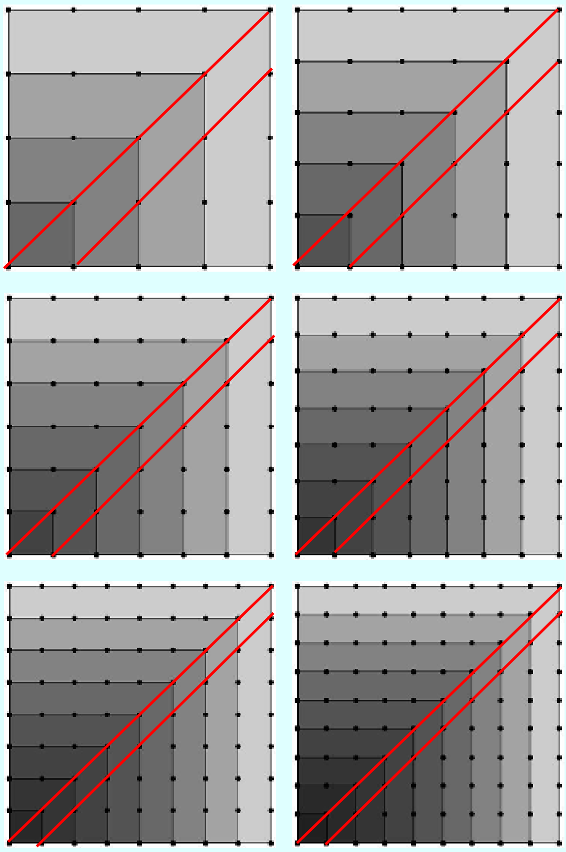
$T_3 = 3{\cdot}(3+1)/2 = 6$ $T_8 = 8{\cdot}(8+1)/2 = 36$

$T_4 = 4{\cdot}(4+1)/2 = 10$ $T_9 = 9{\cdot}(9+1)/2 = 45$

$T_5 = 5{\cdot}(5+1)/2 = 15$ $T_{10} = 10{\cdot}(10+1)/2 = 55$

4. Sí, el 36 es un número triángulo y cuadrado a la vez. Para encontrar el siguiente número triangular y cuadrado a la misma vez generamos los números a partir de las respectivas expresiones: $T_n = n(n+1)/2$ y $C_n = n^2$. Comparando los resultados obtenidos veremos que este número es el 1225.

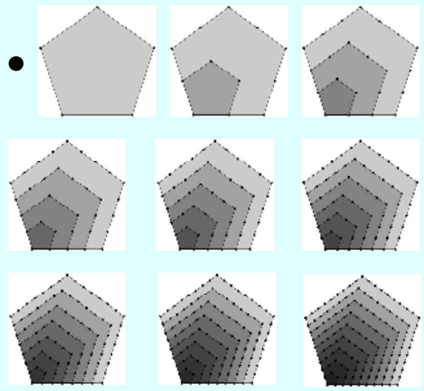
5. La descomposición de estos números cuadrados en triangulares es:



Podemos deducir que $C_5 = T_4 + T_5$, $C_6 = T_5 + T_6$, $C_7 = T_6 + T_7$, $C_8 = T_7 + T_8$, $C_9 = T_8 + T_9$, $C_{10} = T_9 + T_{10}$.

Por tanto, $T_{n-1} + T_n = C_n$.

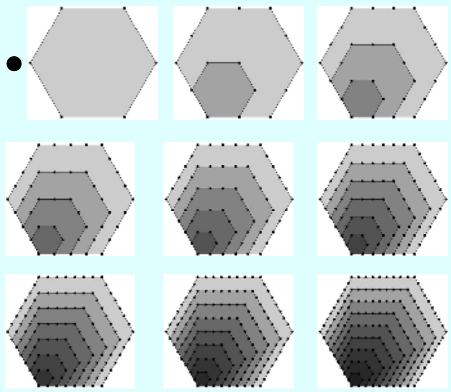
6. Los primeros diez números pentagonales son:



A continuación podemos escribir la tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145

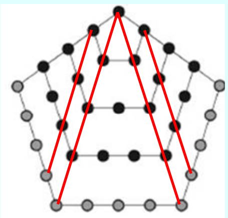
Los primeros diez números hexagonales son:



A continuación podemos escribir la tabla:

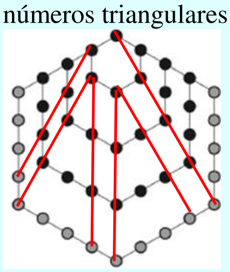
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190

7. Representamos el número P_5 y dibujamos en él los números triangulares correspondientes:



$P_5 = T_4 + T_5 + T_4 = T_5 + 2T_4$

Representamos el número H_5 y dibujamos en él los números triangulares correspondientes:



$H_5 = T_5 + T_4 + T_4 + T_4 = T_5 + 3T_4$

8. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Pitágoras fue el fundador de la escuela pitagórica, que fue una asociación religiosa, política y filosófica. Su esencia estaba en considerar que la sustancia de las cosas era el número. Según ellos, todo se basaba en relaciones numéricas.

La adoración y obsesión que sentían por los números les condujo a su estudio exhaustivo. Así, establecieron diferentes clasificaciones, por ejemplo, en pares e impares. Otras clasificaciones curiosas que hicieron fueron los números triangulares, los cuadrados y los perfectos. También desarrollaron un detallado estudio sobre la geometría aplicada a la astronomía.

Página 24

Evaluación de estándares

1. El menor número natural divisible por tres números, es el mínimo común múltiplo de esos tres números:

m.c.m.(3,13,17) = $3\cdot 13\cdot 17 = 663$

2. a) m es múltiplo de n porque n aparece en la descomposición factorial de m.

b) m no es múltiplo de n porque 11 no aparece en la descomposición factorial de m.

c) m no es múltiplo de n porque 2^3 no aparece en la descomposición factorial de m.

3. a) $360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$ $495 = 5\cdot 3^2\cdot 11$

m.c.m.(360, 495) = $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11 = 3960$

m.c.d.(360, 495) = $3^2\cdot 5 = 45$

b) $216 = 2^3\cdot 3^3$ $240 = 2^4\cdot 3\cdot 5$ $648 = 2^3\cdot 3^4$

m.c.m.(216, 240, 648) = $2^4\cdot 3^4\cdot 5 = 6480$

m.c.d.(216, 240, 648) = $2^3\cdot 3 = 24$

c) $2805 = 3\cdot 5\cdot 11\cdot 17$ $3366 = 2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 17$

m.c.m.(2805, 3366) = $2\cdot 5\cdot 3^2\cdot 11\cdot 17 = 16\,830$

m.c.d.(2805, 3366) = $3\cdot 11\cdot 17 = 561$

4. Los número ordenados quedan de la siguiente forma:

$-|-890| < -7 = -|-7| < -|-3| < |-12| < |-1234|$

5. a) $(-2)\cdot 5 + 6\cdot 4 - 2 = (-2)\cdot(5 + 6\cdot(-2) + 1)$

b) $(-9)\cdot(-49) + 6\cdot(-7) - 3\cdot 42 =$

$= (21)\cdot(3\cdot 7 - 2 - 6)$

c) $(-15)\cdot 6 + (-45) - 90 + 10\cdot(-9) =$

$= (-45)\cdot(2 + 1 + 2 + 2)$

6. a) $-2 - 3\cdot(4 - 2\cdot 7 + 11 - 9) = -2 - 3\cdot(4 - 14 + 11 - 9) = -2 - 3\cdot(15 - 23) = -2 - 3\cdot(-8) = -2 + 24 = 22$

b) $-(6 - 2\cdot 5) + (3 - 7\cdot(-4))\cdot(-2 - 7) = -(6 - 10) + (3 + 28)\cdot(-9) = -(-4) + 31\cdot(-9) = 4 - 279 = -275$

c) $-30 : [(-12 + 9)\cdot 9 - (3\cdot 3 - 12 : 3) + 2] = -30 : [-3\cdot 9 - (9 - 4) + 2] = -30 : (-27 - 5 + 2) = -30 : (-30) = 1$

d) $3 + 2\cdot[-8 + 2\cdot(3 - 7\cdot(-2) - 8) + 2\cdot(-3)] = 3 + 2\cdot[-8 + 2\cdot(3 + 14 - 8) + 2\cdot(-3)] = 3 + 2\cdot(-8 + 2\cdot 9 + 2\cdot(-3)) = 3 + 2\cdot(-8 + 18 - 6) = 3 + 2\cdot 4 = 3 + 8 = 11$

e) $1 - 3\cdot\{[(-24):(-6) + 48 : (-8) - 2\cdot(2 - 5\cdot(-3))] : (-6)\} = 1 - 3\cdot\{[4 - 6 - 2\cdot(2 + 15)] : (-6)\} = 1 - 3\cdot[(4 - 6 - 2\cdot 17) : (-6)] = 1 - 3\cdot[(4 - 6 - 34) : (-6)] = 1 - 3\cdot[(-36) : (-6)] = 1 - 3\cdot 6 = 1 - 18 = -17$

7. a) $|-5| - |-3| + 2\cdot|-4| - 3 = 5 - 3 + 2\cdot4 - 3 = 5 - 3 + 8 - 3 = 7$

b) $-2\cdot|3-8| + (-3)\cdot|4 - 3\cdot|2-7| - 8| = -2\cdot|-5| + (-3)\cdot|4 - 3\cdot|-5| - 8| = -2\cdot5 + (-3)\cdot|4 - 3\cdot5 - 8| = -10 + (-3)\cdot|4 - 15 - 8| = -10 + (-3)\cdot|-19| = -10 + (-3)\cdot19 = -10 - 57 = -67$

8. a) Para calcular el tamaño de los trozos de cinta debemos calcular el máximo común divisor de 84, 66 y 150.

$84 = 2^2\cdot3\cdot7$ $\quad$ $66 = 2\cdot3\cdot11$ $\quad$ $150 = 2\cdot3\cdot5^2$

m.c.d. (84, 66, 150) = $2\cdot3 = 6$ cm

El mayor tamaño de los trozos de cinta es 6 cm.

b) Luego, si cortamos las cintas en trozos de 6 cm, obtendremos:

$84 + 66 + 150 = 300$ $\quad$ $300:6 = 50$ trozos

Por tanto, sí que tendremos trozos sufientes para llevar a cabo la actividad.

9. Buscamos el mínimo común múltiplo de 22 y 16.

$22 = 2\cdot11$ $\quad$ $16 = 2^4$

m.c.m. (22, 16) = $2^4\cdot11 = 176$ libros

La librería recibió como mínimo 176 libros.

10. La operación combinada quedaría de la siguiente forma:

$[320 + (4\cdot7\cdot15 + 5\cdot3) - 4\cdot7\cdot25] : 5 =$

$(320 + 420 - 700) : 5 = 55 : 5 = 11$ €

Debe vender cada libreta a 11 €

Estrategia e ingenio

Pirámide numérica

- La pirámide completa queda de la siguiente forma:

				129				
			48		**81**			
		1		**47**		**34**		
	–7		**8**		**39**		–5	
9		**–16**		**24**		15		**–20**

Número romanos

- Las expresiones modificadas quedan de la siguiente forma:

a) VIII – II = V

b) VI + IV = X

c) XIV – II = XII

La igualdad sería verdadera si la leyesemos dando la vuelta al papel; quedaría de la siguiente forma:

X = I + IX

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 1-3 de la guía)

6. Las soluciones del ejercicio son:

a) $|-15| = 15$ y el opuesto de -15 es 15.

b) $|17| = 17$ y el opuesto de 17 es -17.

c) $|-2| = 2$ y el opuesto de -2 es 2.

d) $|9| = 9$ y el opuesto de 9 es -9.

7. Las soluciones son las siguientes:

a) $(-13) + 12 = -1$

b) $(-20) : 5 = -4$

c) $32 - (-44) = 32 + 44 = 76$

d) $88 : (-11) = -8$

(Viene de la página 1-17 de la guía)

40. La resolución del problema es la siguiente:

Primero realizamos la descomposición de los números en factores primos y calculamos el m.c.d.

$A = 2^3\cdot3\cdot23$; $B = 2^3\cdot3\cdot13$; $C = 2^3\cdot3\cdot5$

El m.c.d. es 12 $\rightarrow 2^3\cdot3 = 12$

El mayor número de lotes que podemos hacer sin que sobre ninguna unidad es 12. Para conocer la composición de cada producto tenemos que dividir el total por el número de lotes:

A $\rightarrow$ 276 : 12 = 23; B $\rightarrow$ 312 : 12 = 26; C $\rightarrow$ 300 : 12 = 25

A tiene 23, B 26 y C 25 unidades por lote.

41. La resolución del problema es la siguiente:

$50 + [3\cdot(-8) - 19 + 2\cdot8 - 3] = 50 + (-24 - 19 + 16 - 3) = 50 + (-46 + 16) = 50 + (-30) = 50 - 30 = 20$

Quedan 20 € de los 50 € iniciales

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/738806	https://www.youtube.com/watch?v=LrvReDIXSrI
http://www.tiching.com/738807	http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/conmates/index.htm
http://www.tiching.com/738808	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/primaria/actividades/aritmetica/naturales_y_enteros/criba_de_eratostenes/actividad.html
http://www.tiching.com/738809	https://www.youtube.com/watch?v=83_tdwzT1Xs
http://www.tiching.com/738810	http://maryluzdevia.blogspot.com.es/
http://www.tiching.com/738811	https://www.youtube.com/watch?v=9Xi5Rb20n7w
http://www.tiching.com/738812	https://matematicasiesoja.wordpress.com/2o-eso/
http://www.tiching.com/738813	http://www.padrefeijoo.com/portal/images/stories/nmero%20enteros%20operaciones%20combinadas.pdf

INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ El objetivo básico de esta unidad es ampliar el estudio de las fracciones y los números decimales realizado en el curso anterior.

Observaremos la imagen y leeremos el texto del recuadro azul, que sirven de introducción al tema. Los comentaremos con los alumnos y les invitaremos a participar mediante las siguientes cuestiones:

– *¿Cómo expresarías matemáticamente una de las porciones de la tarta?*

– *¿Qué fracción representa la mitad de algo?*

■ Seguidamente, leeremos el índice de contenidos y prestaremos atención al esquema de la unidad.

Haremos hincapié en la necesidad de las fracciones y los números decimales para cuantificar ciertas situaciones:

– *¿Qué significa tres cuartos de kilo?*

– *¿En qué otras situaciones de la vida cotidiana utilizamos las fracciones?*

– *¿Cómo se distingue un número decimal de uno entero?*

– *¿Cuántos decimales usas para cuantificar precios?*

Empezamos la unidad

■ Se proponen a continuación una serie de actividades que nos serán de gran utilidad para valorar los conocimientos previos del alumnado sobre las fracciones y los números decimales:

– La actividad 1 repasa el concepto de fracción.

– La actividad 2 trabaja la idea de fracciones equivalentes.

– En la actividad 3 pondremos en práctica el cálculo del m.c.m, que utilizaremos posteriormente para reducir fracciones a común denominador.

– La actividad 4 introduce los números decimales, identificando el valor posicional de las cifras que los componen.

– En la actividad 5 se distinguen los tipos de números decimales: exactos, periódicos puros y periódicos mixtos.

■ Por último, pediremos al alumnado que resuelva por parejas las actividades del apartado *Para empezar*.

Los alumnos y alumnas asentarán así los conceptos introducidos y repasarán lo aprendido en cursos anteriores. Además averiguarán su punto de partida y destreza en el tema que comienza.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 1 y 2*. Leer e interpretar enunciados cotidianos que contienen léxico técnico específico.

■ *Esquema*. Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1, 2, 3 y 5*. Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.

■ *Act. 4*. Aplicar los conocimientos adquiridos en unidades anteriores sobre la descomposición de los números para empezar la unidad.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Texto*. Valorar el uso y la necesidad de las fracciones y los decimales en la vida cotidiana.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 1 a 5*. Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen sobre fracciones y decimales.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para iniciar la unidad de fracciones y decimales y revisar los conceptos asimilados en cursos anteriores, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/735126

En esta página web se encuentra un dossier del tipo Descartes, donde se incluyen dos ventanas interactivas en las que el alumnado debe identificar las fracciones representadas.

La siguiente página del dossier incluye una escena interactiva en la que se proponen diferentes fracciones, mostradas al azar, que los alumnos y las alumnas deben relacionar con la figura geométrica que se muestra.

A continuación, les pediremos que observen la imagen de la tarta del libro y preguntaremos:

- *¿Cuántas partes tiene la tarta entera? ¿Cómo se representa en forma de fracción cada una de las partes?*
- *¿Qué otras fracciones se emplean en el lenguaje cotidiano? ¿En qué ámbitos se utilizan las fracciones?*

Educamos en valores

Autoestima personal y espíritu de superación

Las matemáticas permiten incidir directamente sobre la potenciación de la confianza y de la seguridad individual y colectiva del alumnado.

Para reforzar la seguridad personal, se proponen métodos de trabajo y actividades que permiten autoevaluar los propios progresos:

– *Las actividades basadas en la aplicación repetida de un procedimiento, como la actividad 4 de la página 28 o la actividad 22 de la página 34, favorecen el espíritu de superación.*

– *Las actividades guiadas, como @Amplía en la Red de la página 36, contribuyen a ganar confianza en la resolución de las actividades.*

– *La autoevaluación de la página 48 facilita la valoración del nivel alcanza en el logro de los contenidos y competencias de la unidad didáctica.*

Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 27

Para empezar…

1. Sabemos que un tercio equivale a dividir entre 3. Por lo tanto, Javier dormirá: 24 / 3 = 8 horas.

2. Probemos a simplificar la segunda fracción:

$$\frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Vemos, pues, que son fracciones equivalentes

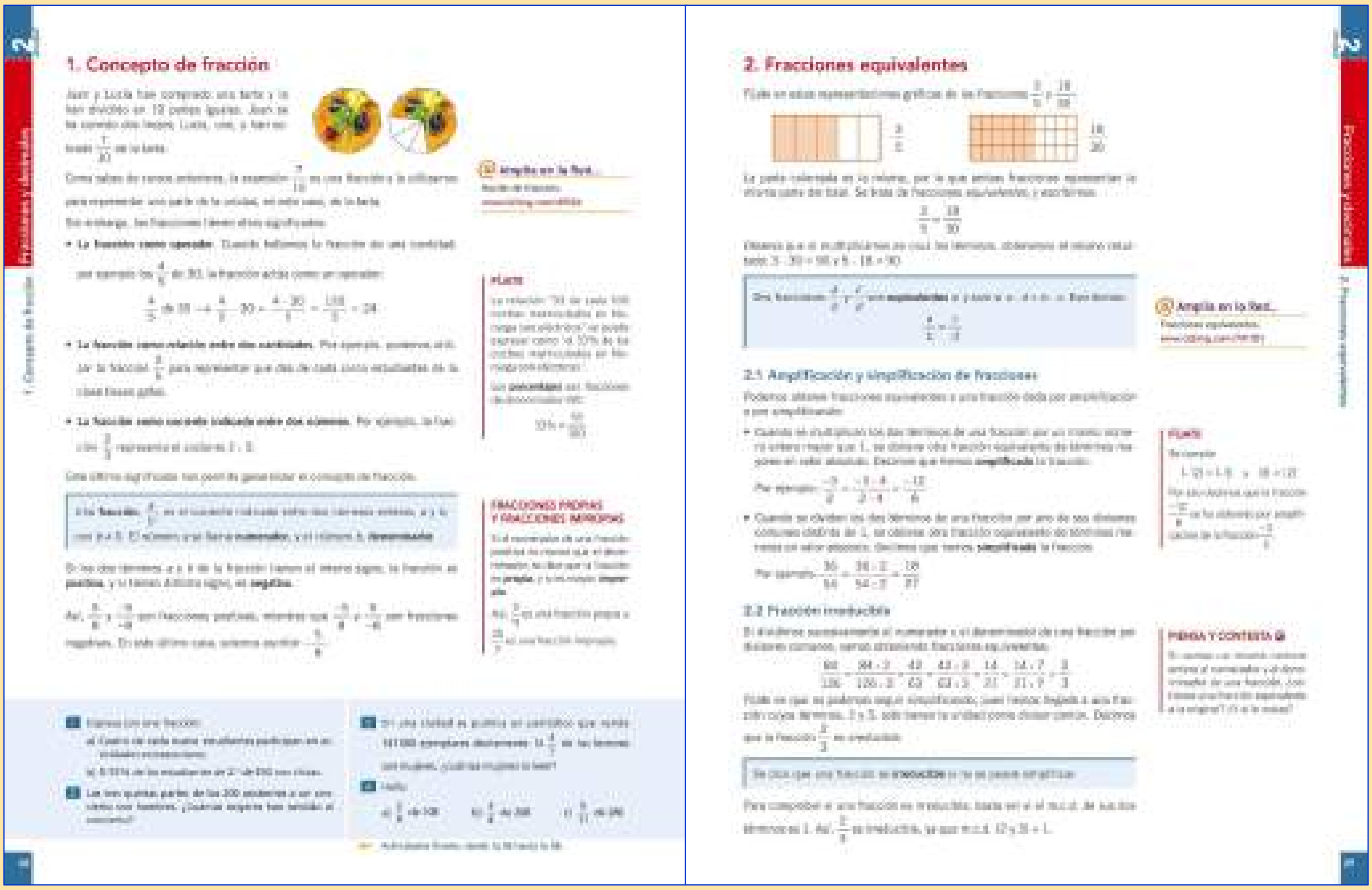
3. Primero descomponemos primero en factores primos:

$15 = 3 \cdot 5$ $12 = 2^2 \cdot 3$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

4. La tabla completa es la siguiente:

	D	U	d	c	m
7,08	0	7	0	8	0
5,607	0	5	6	0	7
37,91	3	7	9	1	0

(Continúa en la página 2-32 de la guía)



1. CONCEPTO DE FRACCIÓN / 2. FRACCIONES...

1. Concepto de fracción

■ Comenzaremos la unidad leyendo la introducción que repasa las distintas interpretaciones de una fracción. Plantearemos estas cuestiones sobre el ejemplo:

– *¿Cuántas partes tiene la tarta entera?*

– *¿Con qué término de la fracción coincide?*

Terminaremos de leer el texto y observaremos la nota bajo el título *Fíjate* de la columna lateral, que introduce otra aplicación de las fracciones.

Reforzaremos el estudio del concepto de fracción accediendo al recurso *Tiching* indicado en el margen.

– *¿Cómo se llama el número superior de una fracción?*

– *¿Qué es el denominador de una fracción?*

Continuaremos estudiando ahora el signo de las fracciones y prestando atención a la nota en la columna lateral que introduce las *Fracciones propias e impropias*.

– *¿Cómo tienen que ser el numerador y denominador de una fracción para que tenga signo positivo?*

– *Escribe un ejemplo de fracción propia y otro de fracción impropia.*

Ahora los alumnos y alumnas pueden contestar a las actividades 1 a 4 propuestas en el libro donde pondrán en práctica las nociones aprendidas.

2. Fracciones equivalentes

■ En primer lugar observaremos las representaciones gráficas y comprobaremos que el área coloreada coincide en ambos casos. Leeremos el recuadro azul y revisaremos con los alumnos:

– *¿Cómo se expresa aritméticamente que dos fracciones son equivalentes?*

– *Comprueba si 5/8 y 25/40 son equivalentes.*

A continuación, para complementar el texto del libro, visitaremos el recurso *Tiching* del margen.

■ El siguiente subapartado presenta dos métodos para hallar fracciones equivalentes. Leeremos el texto y los ejemplos y prestaremos atención a la nota incluída en el lateral *Fíjate.*

■ En el último subapartado trabajaremos las fracciones irreducibles. Leeremos el texto y formularemos al alumnado las siguientes preguntas:

– *¿Cómo sabemos si una fracción es irreducible?*

– *¿Es irreducible la fracción 3/17?*

Para finalizar propondremos a los alumnos que lean el reto planteado en el epígrafe *Piensa y contesta* y razonen sus respuestas con el compañero. Después expondremos a la clase las conclusiones del ejercicio.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 1 a 3.* Comprender e interpretar el enunciado de los problemas planteados y ser capaz de responder con la solución adecuada.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1 y 4.* Aplicar los conceptos aprendidos sobre fracciones de forma repetitiva para mejorar la eficacia de resolución.

■ *Acts. 2 y 3.* Aplicar los nuevos conceptos sobre fracciones para interpretar y resolver las actividades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Piensa y contesta, pág. 29.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.

■ *Acts. 2 y 3.* Analizar cada enunciado, valorar las posibles respuestas y tomar decisiones con criterio propio.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para practicar el concepto de fracción equivalente con un tipo de actividad ligeramente diferente a las propuestas en el libro de texto.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para ampliar la información sobre las fracciones equivalentes, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/735150

En esta página web encontramos un dossier del tipo Descartes, donde se incluyen escenas interactivas en las que se representan fracciones gráficamente y el alumnado debe relacionar fracciones equivalente o comprobar si dos fracciones son equivalentes.

La siguiente página del dossier incluye una escena interactiva en la que se propone al azar una fracción, que los alumnos deberán simplificar.

Les pediremos también que prueben a realizar las operaciones varias veces y, a continuación, les escribiremos algunas de ellas resueltas. Ellos deberán analizar si son correctas o no, y, en este caso, corregir el error.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 28

1. Los resultados son los siguientes:

a) $^{p}/_{q}$

b) $55\ \% = \dfrac{55}{100}$

2. Primero podemos calcular el número de hombres asistentes_

$$\frac{3}{5}\ de\ 200 = \frac{3 \cdot 200}{5} = \frac{600}{5} = 125$$

Por lo tanto, el número de mujeres asistentes son: $200 - 125 = 75$.

3. Leen el periódico:

$$\frac{4}{7}\text{ de } 147\,000 = \frac{4 \cdot 147\,000}{7} = 84\,000\text{ mujeres.}$$

4. Las soluciones son:

a) 24

b) 201

c) 130

Página 29

Piensa y contesta

Queremos encontrar dos fracciones a / b y c / d, que sean equivalentes, la condición para que lo sean es que a · d = c · d. Además queremos que se cumpla:

$$\frac{c}{d} = \frac{a \pm x}{b \pm x}$$

Despejamos la *x* para encontrar la relación entre las letras.

$$c(b \pm x) = d(a \pm x)$$

$$c \cdot b \pm cx = d \cdot a \pm dx$$

Recordamos como hemos dicho la condición para que dos fracciones sean equivalentes:

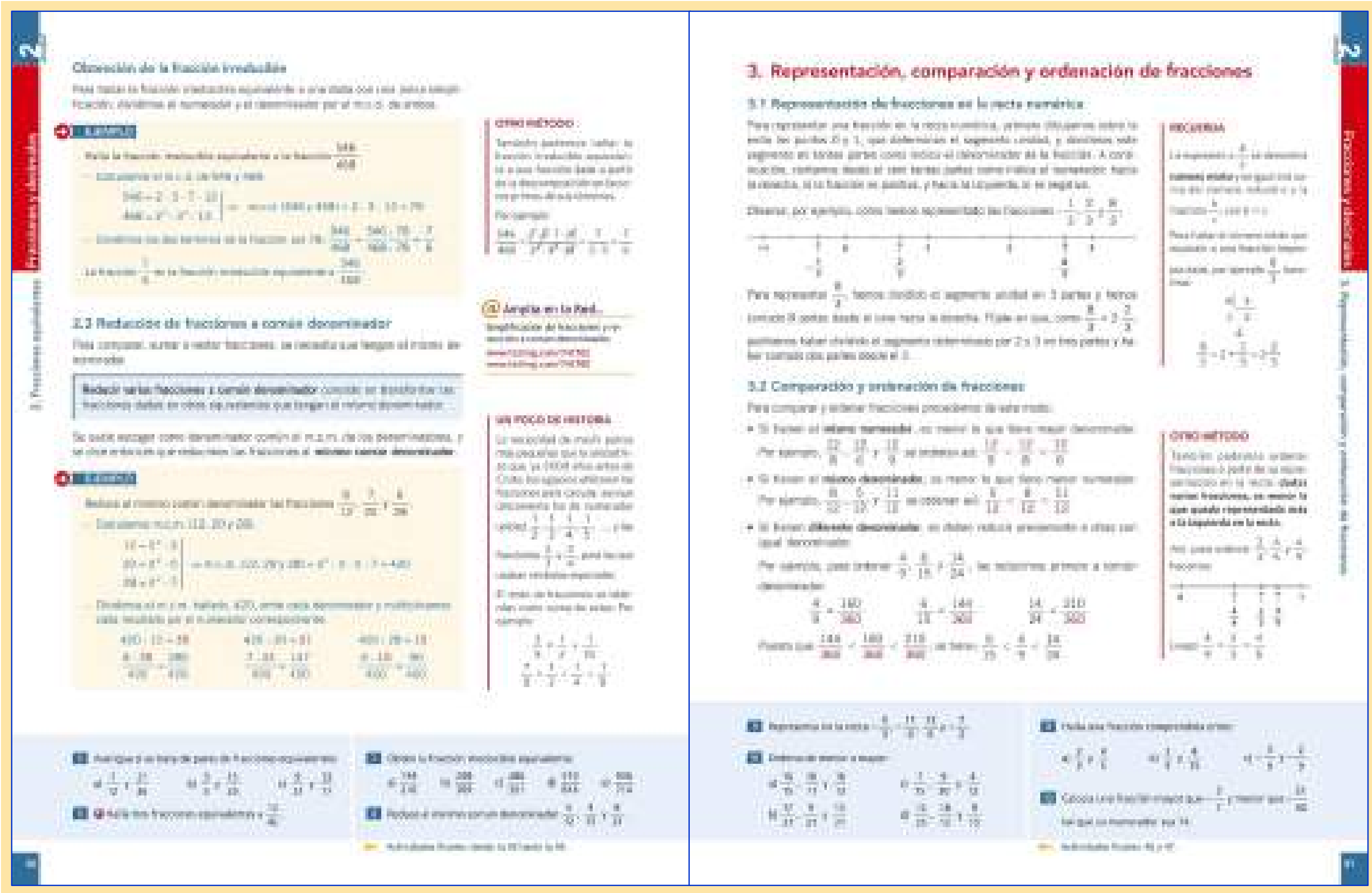
$$a \cdot d = c \cdot d$$

$$c \cdot b \pm cx = c \cdot d \pm dx$$

$$\pm cx = \pm dx$$

$$c = d$$

Por lo tanto puesto que el numerador y denominador deberán ser iguales la única fracción irreductible posible es la unidad, 1 / 1 o sus equivalentes.



2. FRACCIONES... (CONT.) / 3. REPRESENTAC...

■ Completaremos el apartado anterior con otros dos métodos para calcular la fracción irreducible. Leeremos el texto y la columna lateral *Otro método* y observaremos el ejemplo. Preguntaremos a los alumnos:

– *¿Por qué 7/6 es la fracción irreducible?*

– *¿En qué se parecen ambos métodos?*

Los alumnos consolidarán el concepto de fracción irreducible y los métodos de simplificación leyendo y practicando con los dos recursos *Tiching* propuestos.

Como curiosidad leeremos entre todos *Un poco de historia,* donde aprenderemos que las civilizaciones antiguas ya usaban las fracciones irreducibles.

– *¿Qué tienen en común todas esas fracciones?*

■ A continuación leeremos el siguiente subapartado y los alumnos analizarán el ejemplo propuesto, sobre el que plantearemos las siguientes cuestiones:

– *¿Por qué es necesario que dos fracciones tengan el mismo denominador?*

– *¿Por qué dividimos el m.c.m. entre los denominadores y multiplicamos por cada numerador?*

– *¿Por qué 420 es el m.c.m.?*

Para finalizar esta sección los alumnos contestarán a las actividades 5 a 8, donde practicarán la simplificación y reducción a común denominador.

3.1 Representación de fracciones

■ Después de leer este subapartado y el texto de la columna lateral bajo el título *Recuerda,* valoraremos su correcta asimilación por parte del alumnado preguntando:

– *¿En cuántas partes se divide el segmento entre 0 y 1? ¿Cuánto tiene que medir dicho segmento?*

– *¿Qué es un número mixto y cómo se calcula?*

Los alumnos ya pueden resolver la actividad 9 donde practicarán la representación de fracciones en la recta.

3.2 Comparación y ordenación de fracciones

■ Seguidamente leeremos este segundo subapartado y lanzaremos estos retos a los estudiantes:

– *¿Cómo comparamos dos fracciones con diferentes numeradores y denominadores?*

– *¿Sabrías decirme una fracción mayor que 3/7 cuyo denominador sea 5? ¿Y una menor?*

Basándonos en la representación de fracciones estudia-da anteriormente, con *Otro método* ordenaremos fracciones:

– *¿Por qué 4/9 es menor que 2/3?*

– *¿Por qué las fracciones del ejemplo están entre 0 y 1?*

Por último, los alumnos resolverán en su cuaderno las actividades 10, 11 y 12 propuestas en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 5 y 7.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos sobre reducción de fracciones.
- *Acts. 8 a 10.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.
- *Acts. 6, 11 y 12.* Identificar y manejar las posibles respuestas, tomando decisiones de manera racional.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 6, 11 y 12.* Ser capaz de proponer ejemplos siendo creativo, flexible y perseverante al buscar las respuestas.
- *Acts. 5, 7, 8 y 10.* Analizar cada enunciado, seleccionar una estrategia, valorar las posibles respuestas y tomar decisiones con criterio propio.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 servirá para asentar los conocimientos sobre reducción de fracciones aprendidos en clase.

✓ La actividad de ampliación 1 será útil para evaluar si el alumnado ha entendido correctamente y sabe aplicar los métodos de comparación y ordenación de fracciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de seguir practicando la representación, comparación y ordenación de fracciones, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/742944

Se trata de un vídeo de aproximadamente veintiocho minutos en el que explica la representación de las fracciones en la recta numérica.

Resultaría interesante que los alumnos construyeran una recta numérica después de visualizar el vídeo y, a continuación, les podríamos preguntar:

- Sitúa en la recta las siguientes fracciones: 1/3, 4/7, 8/2, -1/3, -5/4.
- Escribe fracciones equivalentes en el mismo punto para cada fracción, como has visto en el vídeo.
- Explica cómo ordenar las fracciones sin cambiar el denominador.
- Describe qué debemos hacer para comparar dos fracciones que tienen numeradores y denominadores diferentes

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 30

5. Las soluciones son:

a) Sí, son equivalentes: $7 \cdot 36 = 252$ y $12 \cdot 21 = 252$

b) Sí, son equivalentes: $3 \cdot 25 = 75$ y $5 \cdot 15 = 75$

c) Sí, son equivalentes: $9 \cdot 77 = 693$ y $21 \cdot 33 = 693$

6. Actividad personal. A modo de ejemplo:

$$\frac{12 \cdot 2}{42 \cdot 2} = \frac{24}{48};\ \frac{12:3}{42:3} = \frac{4}{14};\ \frac{12 \cdot 4}{42 \cdot 4} = \frac{48}{168}$$

7. Los resultados son los siguientes:

a) $^{2}/_{3}$, ya que, m.c.d.(144, 216) = 72

b) Es irreducible, ya que, m.c.d.(208, 369) = 1

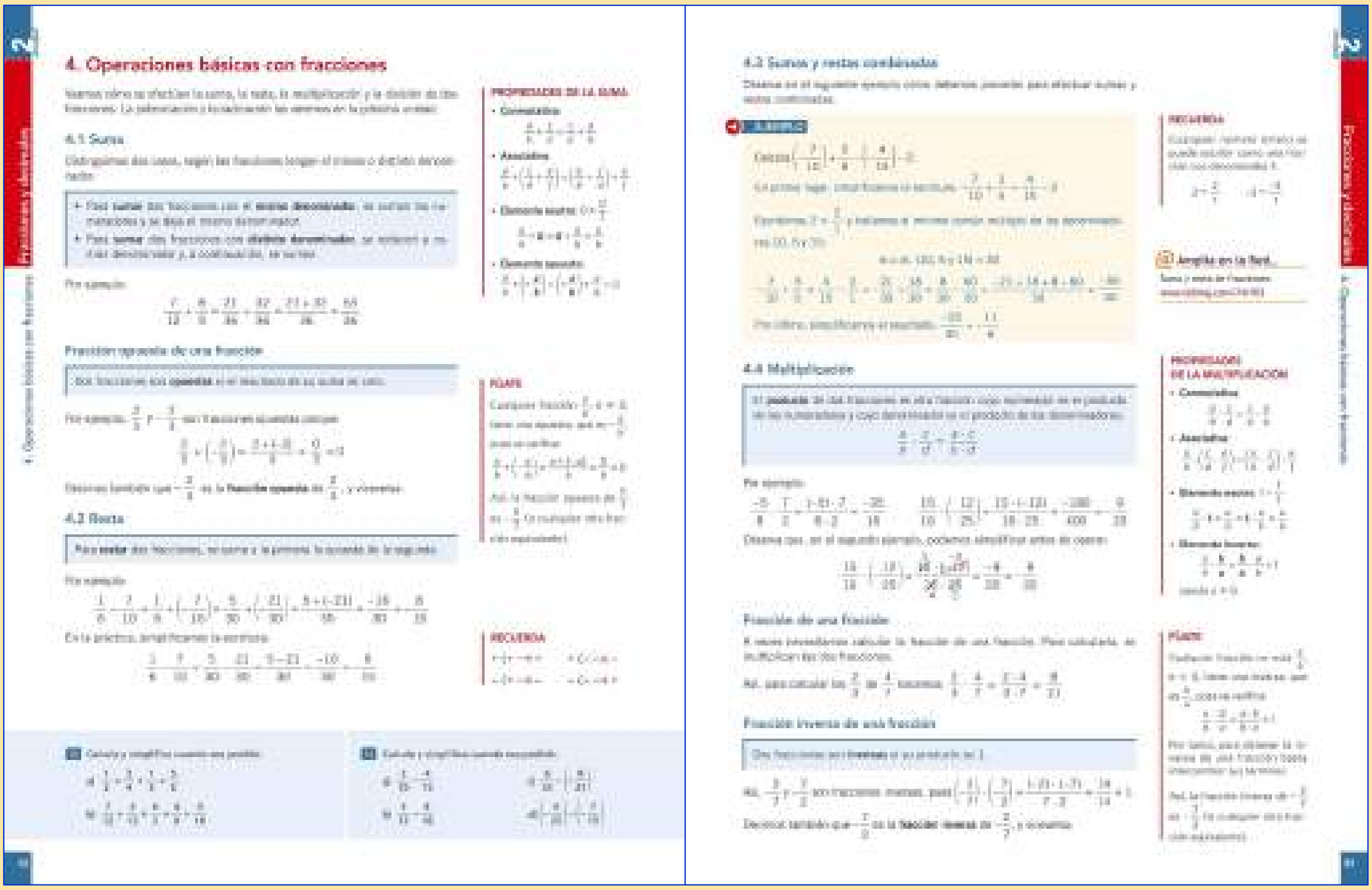
c) $^{22}/_{27}$, ya que, m.c.d.(286, 351) = 13

d) $^{5}/_{8}$, ya que, m.c.d.(510, 816) = 102

e) $^{156}/_{119}$, ya que, m.c.d.(936, 714) = 6

8. Obtenemos el denominador común calculando el m.c.m.(12, 15, 21) = 420. Así, las fracciones quedarán como:

$$\frac{5}{12} = \frac{175}{420};\ \frac{4}{15} = \frac{112}{420};\ \frac{8}{21} = \frac{160}{420}$$


4. Operaciones básicas con fracciones

4.1 Suma

4.2 Resta

4.3 Sumas y restas combinadas

4.4 Multiplicación

Fracción de una fracción

Fracción inversa de una fracción

4. OPERACIONES BÁSICAS CON FRACCIONES

4.1 Suma / 4.2 Resta / 4.3 Sumas y restas…

■ Empezaremos trabajando la suma de fracciones. Los alumnos leerán el recuadro coloreado, las propiedades de la suma en la nota lateral y el ejemplo resuelto. Después contestarán estas cuestiones:

– *¿Es lo mismo sumar fracciones con el mismo denominador y distinto denominador?*

– *¿Qué diferencia hay entre elemento neutro y opuesto?*

A continuación, leeremos el siguiente subapartado y comprobaremos en los ejemplos que se verifica la condición impuesta en la definición de fracciones opuestas. Leeremos después la nota *Fíjate* del margen y lanzaremos estos interrogantes al alumnado:

– *¿Son 7/8 y –21/24 fracciones opuestas? ¿Por qué?*

– *¿En qué difieren dos fracciones opuestas?*

■ A partir de la definición anterior y de la suma de fracciones, aprenderemos a restar fracciones. Leeremos el texto y los ejemplos y propondremos a nuestros alumnos y alumnas el siguiente reto:

– *¿A qué equivale restar a una fracción otra con signo negativo?*

Haremos hincapié en la simplificación de signos destacada en la columna lateral rotulada como *Recuerda.*

Por último los alumnos realizarán las actividades 13 y 14.

■ En el siguiente subapartado los alumnos verán, con ayuda de un ejemplo, cómo resolver combinaciones de sumas y restas. Prestaremos atención a la nota *Recuerda* del margen, que nos ayudará a resolver estas operaciones:

– *¿Por qué el m.c.m. es 30?*

– *¿Por qué necesitamos expresar el 2 como 2/1?*

Como repaso y ampliación instaremos al alumnado a consultar los dos recursos *Tiching* de *@Amplía en la Red.*

4.4 Multiplicación

■ El objetivo de este apartado es presentar el algoritmo de la multiplicación y sus propiedades. Leeremos el recuadro y los ejemplos y plantearemos las preguntas:

– *¿El producto de dos fracciones es siempre mayor o menor que las fracciones que multiplicamos?*

– *¿Cuándo es posible simplificar las fracciones?*

Después los alumnos leerán el procedimiento de cálculo de la fracción de una fracción.

Finalmente, leeremos el último subapartado, sobre la inversa de una fracción. Completaremos el cáculo de la inversa con la nota del margen *Fíjate.*

Los alumnos podrán poner a prueba su aprendizaje resolviendo las actividades 15 a 19 de la página 34.

COMPETENCIAS CLAVE

APRENDER A APRENDER

- *Act. 13.* Aplicar el proceso aprendido para la simplificación de sumas de fracciones de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.
- *Act. 14.* Aplicar el proceso aprendido para la simplificación de restas de fracciones de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 13 y 14.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre las fracciones y su simplificación.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *@Amplía en la Red.* Aprender a sumar y restar fracciones paso a paso utilizando herramientas de Internet.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos entrar en este enlace para reforzar los automatismos de la suma y la resta con fracciones y decimales:

http://www.tiching.com/742945

En este caso, se trata de un vídeo de cinco minutos y medio de duración en el que se plantean, de manera clara, los mecanismos para realizar estas operaciones matemáticas.

Los alumnos visualizarán los pasos a seguir y, a continuación, les propondremos que piensen un par de operaciones y las representen de la misma forma que han hecho en el vídeo.

Luego, les podemos preguntar a nuestros alumnos:

- *¿Qué se hace para sumar dos fracciones con diferente denominador?*
- *¿Es lo mismo reducir a denominador común que reducir a mínimo denominador común?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 46

13. Los resultados son los siguientes:

a) $\text{m.c.m.}(2,4,3,6) = 12 \Rightarrow \frac{6}{12} + \frac{9}{12} + \frac{4}{12} + \frac{10}{12} = \frac{29}{12}$

b) $\text{m.c.m.}(12,15,5,9,18) = 180 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{105}{180} + \frac{24}{180} + \frac{216}{180} + \frac{80}{180} + \frac{30}{180} = \frac{455}{180} = \frac{29}{12}$$

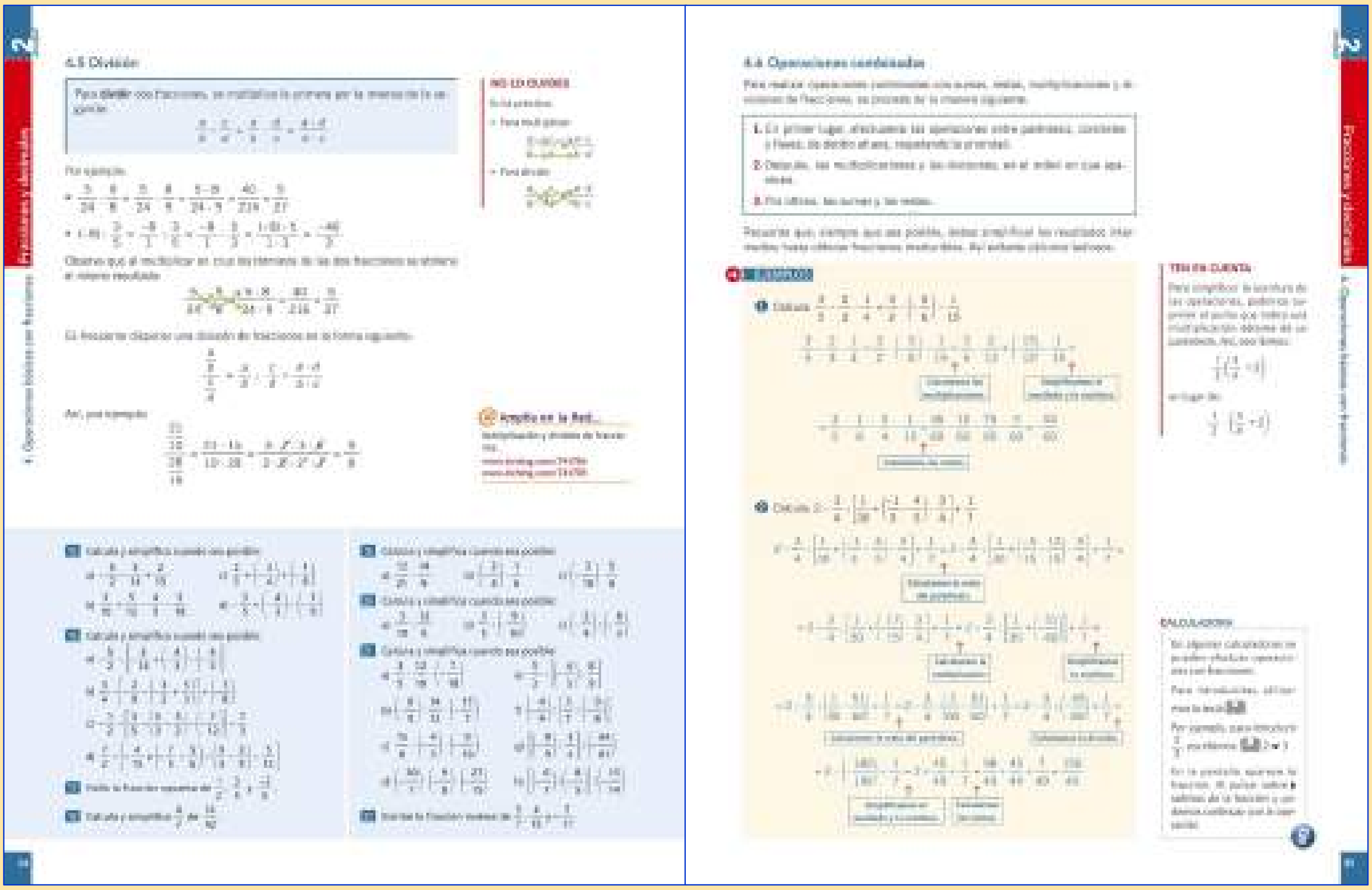
14. Los resultados son los siguientes:

a) $\text{m.c.m.}(10,15) = 30 \Rightarrow \frac{9}{30} - \frac{8}{30} = \frac{1}{30}$

b) $\text{m.c.m.}(12,18) = 36 \Rightarrow \frac{15}{36} - \frac{8}{36} = \frac{7}{36}$

c) $\text{m.c.m.}(35,21) = 105 \Rightarrow \frac{18}{105} + \frac{40}{105} = \frac{58}{105}$

d) $\text{m.c.m.}(25,15) = 75 \Rightarrow -\frac{12}{75} + \frac{35}{75} = \frac{23}{75}$



4. OPERACIONES BÁSICAS... (CONTINUACIÓN)

4.5 División

■ En este subapartado trabajaremos la última de las operaciones con fracciones que se tratan en esta unidad didáctica, la división.

Tras leer en el recuadro el procedimiento de cálculo, los alumnos observarán el ejemplo y analizarán cómo se resuelven estos ejercicios siguiendo las indicaciones del texto. Después, les formularemos estas preguntas:

- *¿Cómo se divide un entero entre una fracción?*
- *¿Cómo tenemos que multiplicar los términos de las fracciones para resolver una división?*

Como repaso de ambas operaciones, multiplicación y división, prestaremos atención al apunte del margen *No lo olvides* y resolveremos las actividades 20, 21 y 22.

Para asentar los conocimientos, los alumnos accederán a los recursos *Tiching* indicados en *@Amplía en la Red.*

4.6 Operaciones combinadas

■ Este subapartado tiene como objetivo revisar las reglas de prioridad de las operaciones en expresiones aritméticas con fracciones.

Leeremos el cuadro que indica el orden de las operaciones y plantearemos a los alumnos estas cuestiones:

- *¿Qué debemos ejecutar antes en una operación combinada, una multiplicación o una división?*
- *¿Qué tiene prioridad, los corchetes o los paréntesis?*
- *¿Qué resolvemos antes, una suma o una división?*

Después de asentar las reglas de prioridad al operar fracciones, los alumnos pueden analizar el primero de los ejemplos propuestos en el libro.

Resolveremos el segundo ejemplo de forma conjunta, y fomentaremos la participación realizando las siguientes preguntas:

- *¿Qué operación realizarías en primer lugar y por qué?*
- *¿Por qué no podemos resolver la división antes?*
- *¿Cómo hemos simplificado la escritura en el último paso?*

A continuación, realizaremos de forma conjunta la lectura del apunte *Ten en cuenta.* Acto seguido los alumnos responderán a las siguientes preguntas:

- *¿Qué significado tiene una fracción justo antes de un paréntesis en una expresión aritmética?*
- *¿Cómo resolverías la expresión del ejemplo?*

Para finalizar, los alumnos aprenderán a introducir fracciones en la calculadora con la ayuda de la nota del margen titulada *Calculadora.*

COMPETENCIAS CLAVE

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 15 y 16.* Reconocer y asimilar los conceptos y las propiedades de las sumas y restas de fracciones y ser capaz de reproducirlos.
- *Acts. 19 a 21.* Reconocer y asimilar los conceptos y las propiedades de las multiplicaciones y divisiones de fracciones y ser capaz de reproducirlos.
- *Acts. 17, 18 y 22.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 17, 18 y 22.* Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación, siendo creativo e imaginativo para resolver las situaciones planteadas.
- *Acts. 15, 16, 19, 20 y 21.* Identificar, en la realización de las actividades, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 4 permitirá consolidar el cálculo con fracciones: suma, resta, multiplicación y división, así como combinaciones de estas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para trabajar en clase la multiplicación y división de fracciones, proponemos entrar en este enlace del Proyecto Descartes Ed@d:

http://www.tiching.com/742946

Esta página web ofrece diversas escenas interactivas en las que los alumnos automatizarán los mecanismos de resolución de estas operaciones matemáticas.

También realizarán los ejercicios de los apartados de operaciones combinadas, así como los problemas de aplicación.

Como docentes, les pediremos que las resuelvan sin consultar los recursos de Internet ni tampoco del libro.

Al final, los alumnos podrán realizar unos ejercicios donde podrán aplicar los conceptos trabajados. Se trata de actividades autocorrectivas para que sean conscientes de su aprendizaje.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 34

15. Los resultados son los siguientes:

a) $\text{m.c.m.}(2,14,15)=210 \Rightarrow -\frac{525}{210}-\frac{45}{210}+\frac{28}{210}=$

$=-\frac{542}{210}=-\frac{271}{105}$

b) $\text{m.c.m.}(10,12,9,18)=180 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{54}{180}+\frac{75}{180}-\frac{80}{180}-\frac{50}{180}=-\frac{1}{180}$

16. Los resultados son los siguientes:

a) $-\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{14}+\frac{-4+4}{3}\right)=-\frac{5}{2}+\frac{3}{14}=\frac{-35+3}{14}=$

$=-\frac{32}{14}=-\frac{16}{7}$

b) $\frac{3}{4}-\left[-\frac{2}{9}-\left(\frac{-9+10}{6}\right)\right]-\frac{7}{8}=\frac{3}{4}-\left(-\frac{2}{9}-\frac{1}{6}\right)-\frac{7}{8}=$

$=\frac{3}{4}-\left(\frac{-4-3}{18}\right)-\frac{7}{8}=\frac{3}{4}+\frac{7}{18}-\frac{7}{8}=\frac{54+28-63}{72}=\frac{19}{72}$

c) $-\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{10-9}{6}\right)+\frac{7}{12}\right]-\frac{7}{3}=-\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{6}+\frac{7}{12}\right)-\frac{7}{3}$

$=-\frac{1}{2}-\left(\frac{36-10+35}{60}\right)-\frac{7}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{61}{60}-\frac{7}{3}=$

$=\frac{-30-61-140}{60}=-\frac{231}{60}=-\frac{77}{20}$

d) $\frac{7}{2}-\left[-\frac{4}{15}+\left(\frac{-42-25}{30}\right)-\left(\frac{45-12}{20}\right)-\frac{5}{12}\right]=$

$=\frac{7}{2}-\left(-\frac{4}{15}-\frac{67}{30}-\frac{33}{20}-\frac{5}{12}\right)=$

$=\frac{7}{2}-\left(\frac{-16-134-99-25}{60}\right)=\frac{7}{2}+\frac{274}{60}=\frac{7}{2}+\frac{137}{30}=$

$=\frac{105+137}{30}=\frac{242}{30}=\frac{121}{15}$

17. Las fracciones inversas son las siguientes:

$\frac{1}{2}\rightarrow-\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{3}{4}\rightarrow-\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{-2}{5}\rightarrow\frac{2}{5}$

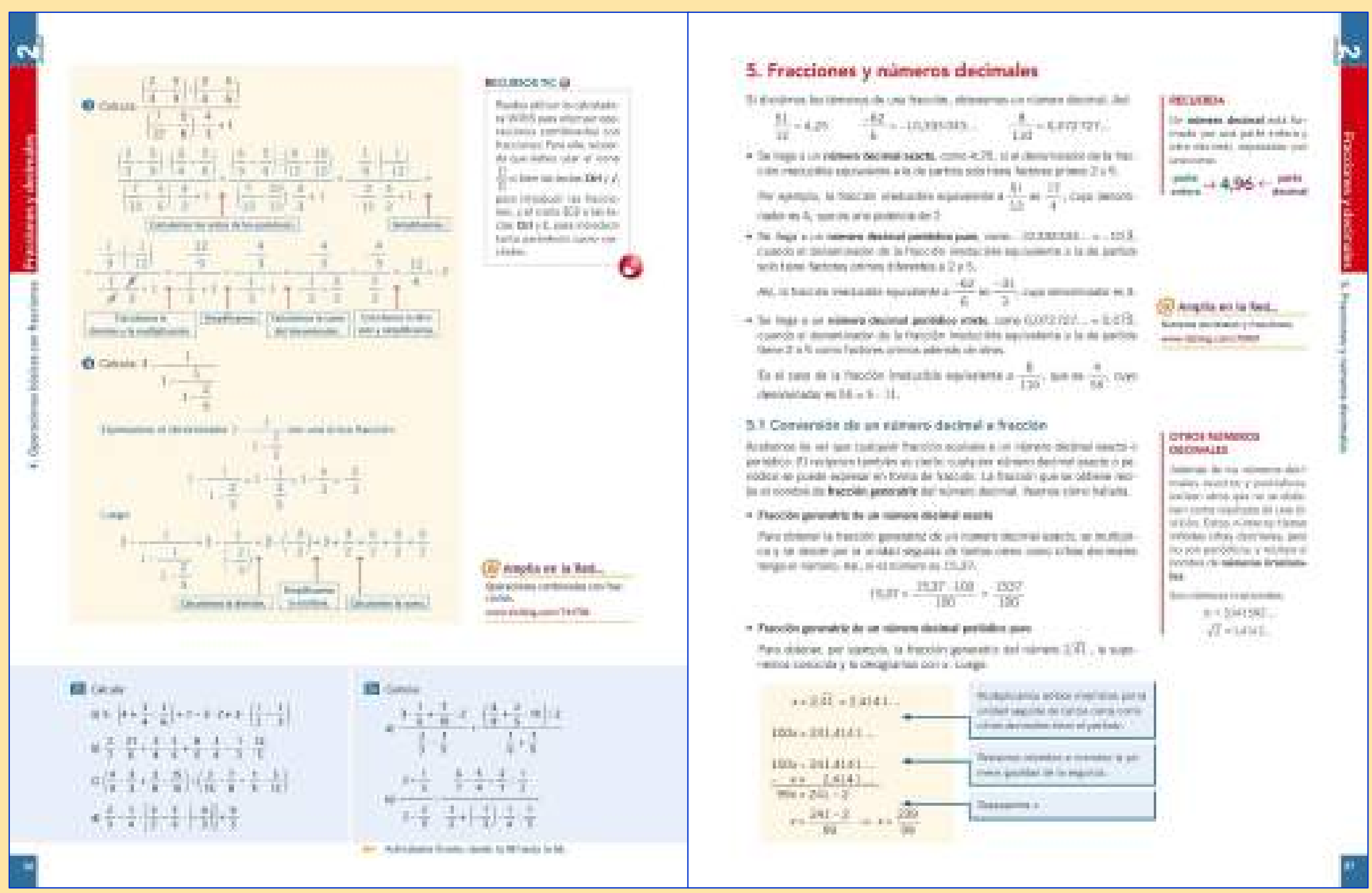
18. La solución es:

$\frac{4}{7}\,\text{de}\,\frac{14}{42}=\frac{(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 7)}{7\cdot(2\cdot 3\cdot 7)}=\frac{4}{21}$

19. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{(2\cdot 2\cdot 3)\cdot(2\cdot 7)}{(3\cdot 7)\cdot(3\cdot 3)}=\frac{8}{9}$

(Continúa en la página 2-32 de la guía)



4. OPERACIONES… (CONT.) / 5. FRACCIONES…

■ Seguiremos practicando las reglas de prioridad en la operación con fracciones analizando los dos ejemplos resueltos restantes, a partir de los cuáles preguntaremos:

– *¿Por qué en el ejemplo 3 comenzamos resolviendo las restas y no la división o el producto?*
– *¿Por qué es importante simplificar antes de operar?*

Para promover el uso de las nuevas tecnologías, indicaremos al alumnado cómo usar la calculadora WIRIS en el cálculo con fracciones, tal como señala la nota *Recursos TIC.*

Por último, los alumnos pueden realizar las actividades 23 y 24, así como las propuestas en el recurso *@Amplía en la Red*, que servirán como repaso de este apartado.

5. Fracciones y números decimales

■ El objetivo básico de esta sección es revisar los conceptos relacionados con los números decimales presentados en el curso pasado y su relación con las fracciones.

Leeremos la introducción y el apunte de la columna *Recuerda* y plantearemos estas cuestiones para valorar su comprensión:

– *¿Sin dividir sus términos, cómo podemos saber si el decimal equivalente a una fracción es exacto o periódico?*
– *¿Cuándo un número decimal es periódico mixto?*
– *¿Cuál es la parte entera de 42,17?*

Los alumnos pueden resolver ahora las actividades 25 y 26 de la página 38.

■ En el siguiente subapartado estudiaremos cómo obtener la fracción a la que equivale un número decimal.

Leeremos la definición y el procedimiento empleado en cada caso. Observaremos detenidamente los ejemplos y formularemos las siguientes preguntas para asegurarnos que el alumnado entiende los pasos seguidos:

– *¿A qué llamamos fracción generatriz?*
– *¿Por qué multiplicamos por 100 en el primer ejemplo? ¿Y en el segundo?*

A continuación, afianzaremos estos conocimientos ampliando la información sobre las fracciones decimales consultando el recurso *@Amplía en la Red* propuesto.

Se trata de una explicación teórica animada junto con una serie de ejercicios resueltos para que los alumnos puedan ponerlo en práctica.

Finalmente, leeremos la nota del margen donde aprenderemos que existen *Otros números decimales*.

– *¿Se te ocurre otro ejemplo de número irracional?*
– *¿Es posible expresar los números irracionales por medio de una fracción?*

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de la calculadora WIRIS, con la que se puede efectuar operaciones combinadas con fracciones, usando los iconos correspondientes.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 23 y 24.* Aplicar el proceso aprendido para operar con fracciones, de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 23 y 24.* Reflexionar antes de resolver las actividades y tomar decisiones de forma razonada, aplicando las estrategias aprendidas de manera sistemática y eficaz.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 6 servirá para revisar la identificación y clasificación de números decimales.

✓ La actividad de ampliación 2 resultará útil para comprobar si el alumnado ha entendido correctamente y sabe aplicar el concepto de fracción generatriz, así como los diversos tipos de números que existen.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Resultaría interesante acceder al siguiente enlace para trabajar las fracciones y los números decimales:

http://www.tiching.com/742947

En esta página web se incluyen dos escenas del tipo Descartes.

En la primera ventana los alumnos y las alumnas introducirán el numerador y el denominador de una fracción para obtener el número decimal equivalente.

En la segunda escena se representa gráficamente la relación entre los diferentes conjuntos numéricos. A continuación les preguntaremos:

- *¿En qué situaciones reales de la vida diaria se utilizan los decimales?*

Pediremos que expresen los decimales de los ejemplos propuestos en forma de fracción y los ordenen en una recta numérica.

- *¿Qué fracción equivale a una décima? ¿Y a una centésima?*

Pediremos que interpreten geométricamente el significado de décima y de centésima como una parte del total.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 36

23. Los resultados son los siguientes:

a) $5\cdot\left(4+\frac{9}{2}\right)+7-6+3\cdot\frac{1}{6}=5\cdot\frac{17}{2}+7-6+3\cdot\frac{1}{6}=$

$=\frac{85}{2}+7-6+\frac{1}{2}=\frac{85+14-12+1}{2}=\frac{88}{2}=44$

b) $1+\frac{5}{8}+\frac{6}{5}-\frac{4}{5}=\frac{40+25+48-32}{40}=\frac{81}{40}$

c) $\left(\frac{2}{3}+\frac{9}{16}\right):\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{12}\right)=\frac{59}{48}:\frac{5}{48}=\frac{59}{5}$

d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{10}{9}\right)+\frac{6}{5}=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{47}{18}+\frac{6}{5}=\frac{2}{3}-\frac{47}{72}+\frac{6}{5}=$

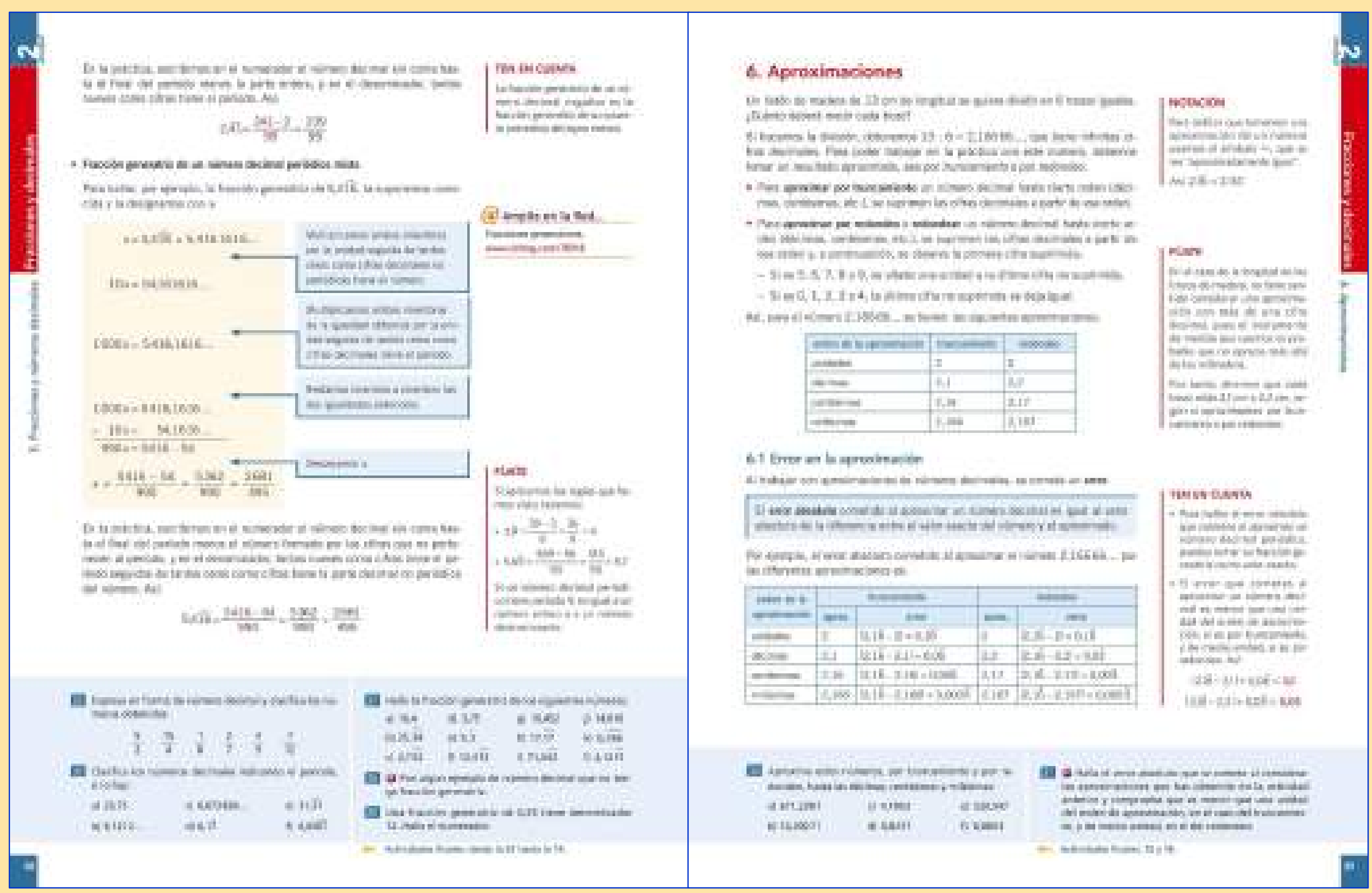
$=\frac{240-235+432}{360}=\frac{437}{360}$

24. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{\frac{3}{5}+\frac{7}{20}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}+\frac{\left(\frac{4}{9}+4\right):2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{3}{5}+\frac{7}{20}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}}+\frac{\frac{40}{9}:2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{19}{20}}{\frac{7}{15}}+\frac{\frac{20}{9}}{\frac{11}{30}}=$

$=\frac{57}{28}+\frac{200}{33}=\frac{1881+5600}{924}=\frac{7481}{924}$

b) $\frac{2-\frac{1}{5}}{3-\frac{2}{9}}:\frac{\frac{15}{14}-\frac{4}{7}}{\frac{1}{2}-\frac{5}{12}}=\frac{\frac{9}{5}}{\frac{25}{9}}:\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}}=\frac{81}{125}:6=\frac{27}{250}$



5. Fracciones...(cont) / 6. Aproximaciones

■ Continuaremos con los procedimientos de cálculo de la fracción generatriz.

Aprenderemos cómo calcular dicha fracción de forma sencilla en el caso de un número periódico puro.

Observaremos también cómo se resuelve para el caso de un número periódico mixto y preguntaremos a los alumnos:

– *¿Se tratan de igual manera los números decimales del período y los decimales no periódicos?*

– *¿Cuántos nueves ponemos en el denominador? ¿Seguidos de cuántos ceros?*

Después, leeremos las notas *Ten en cuenta* y *Fíjate* y debatiremos:

– *¿Qué ocurre con los números de período 9?*

Para valorar el grado de comprensión de estos métodos de cálculo, propondremos la resolución de las actividades 27 a 29.

Los alumnos practicarán a continuación el contenido de este subapartado consultando el recurso digital *@Amplía en la Red*. El enlace presenta un resumen de los conceptos y plantea nuevas actividades interactivas.

6. Aproximaciones

■ Comenzaremos leyendo la introducción, que pone de manifiesto la necesidad del redondeo y la presencia del error en las medidas de la vida cotidiana.

– *¿Sería correcto decir que cada trozo mide 2,16 cm? ¿Sería más correcto decir que miden 2,17 cm?*

En los dos párrafos siguientes analizaremos los métodos de redondeo y comprobaremos en la tabla cómo calcularlos para el ejemplo anterior.

– *¿Qué quiere decir aproximar hasta las décimas?*

– *¿Qué método te parece que induce a menor error?*

Observaremos las notas *Fíjate* y *Notación*, aprendiendo cómo indicar una aproximación y la necesidad de tener en cuenta la precisión del aparato de medida.

■ Leeremos el último subapartado, prestando atención a la definición de error absoluto del recuadro azul y al cálculo del ejemplo sobre el listón de madera:

– *¿Puede ser negativo el error absoluto? ¿Por qué?*

– *¿Qué significa que el error absoluto cometido es del orden de las décimas?*

Ahora leeremos dos puntualizaciones importantes en la nota *Ten en cuenta* y preguntaremos:

– *¿Qué método crees ahora que arrastra menor error?*

Terminaremos pidiendo al alumnado que solucione las dos actividades propuestas.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 28 y 29*. Expresar e interpretar de forma escrita los conocimientos adquiridos sobre la fracción generatriz.
- *Acts. 30 y 31*. Leer, comprender e interpretar los enunciados en los que se incluyen términos técnicos específicos sobre numeros decimales.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 25 a 29*. Reconocer y asimilar los conceptos y las propiedades de las fracciones y los números decimales y ser capaz de reproducirlos y aplicarlos.
- *Acts. 30 y31*. Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 28*. Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos que se tienen sobre decimales.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 consolidará el uso de aproximaciones por redondeo.

✓ La actividad de ampliación 4 servirá como práctica del cálculo del error absoluto en aproximaciones por redondeo y por truncamiento.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos ampliar el cálculo de los errores con el fin de reforzar los conceptos explicados en el apartado proponemos consultar el enlace:

http://www.tiching.com/742948

En esta web se proponen dos escenas interactivas en las que se trabaja el cálculo del error absoluto y relativo.

El usuario puede fijar el orden de redondeo o de truncamiento y obtener los resultados en diferentes ejemplos propuestos al azar.

En una tercera escena se proponen ejercicios de error generados al azar para que el alumnado pueda practicar los contenidos anteriores.

Al acabar preguntaremos:

- *¿En qué otras disciplinas o ciencias es importante conocer los errores de aproximación?*
- *¿Sabrías decir si es cierto que se hacen aproximaciones en números enteros?*
- *Nombra situaciones en que aproximes números. Por ejemplo, cuando decimos la hora del reloj.*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 38

25. Las soluciones del ejercicio son:

$\frac{5}{2} = 2{,}5 \longrightarrow$ El número es decimal exacto.

$\frac{15}{4} = 3{,}75 \longrightarrow$ El número es decimal exacto.

$\frac{1}{8} = 0{,}125 \longrightarrow$ El número es decimal exacto.

$\frac{2}{7} = 0,\overline{285714} \longrightarrow$ El número es decimal periódico puro.

$\frac{4}{9} = 0,\overline{4} \longrightarrow$ El númro es decimal periódico puro.

$\frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3} \longrightarrow$ El número es decimal periódico mixto.

26. Las soluciones del ejercicio son:

a) Decimal exacto, no tiene periodo.

b) Decimal periódico puro, $8,\underbrace{\overline{12}}_{p}$.

c) Decimal periódico mixto, $6{,}87\underbrace{\overline{28}}_{p}$.

d) Decimal periódico mixto, $6{,}1\underbrace{\overline{7}}_{p}$.

e) Decimal periódico puro, $31,\underbrace{\overline{31}}_{p}$.

f) Decimal periódico mixto, $4{,}65\underbrace{\overline{07}}_{p}$.

27. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{164}{10} = \frac{82}{5}$

b) $\frac{2534-25}{99} = \frac{2509}{99}$

c) $\frac{2752-27}{990} = \frac{2725}{990} = \frac{545}{198}$

d) $\frac{375}{100} = \frac{15}{4}$

e) $\frac{53-5}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$

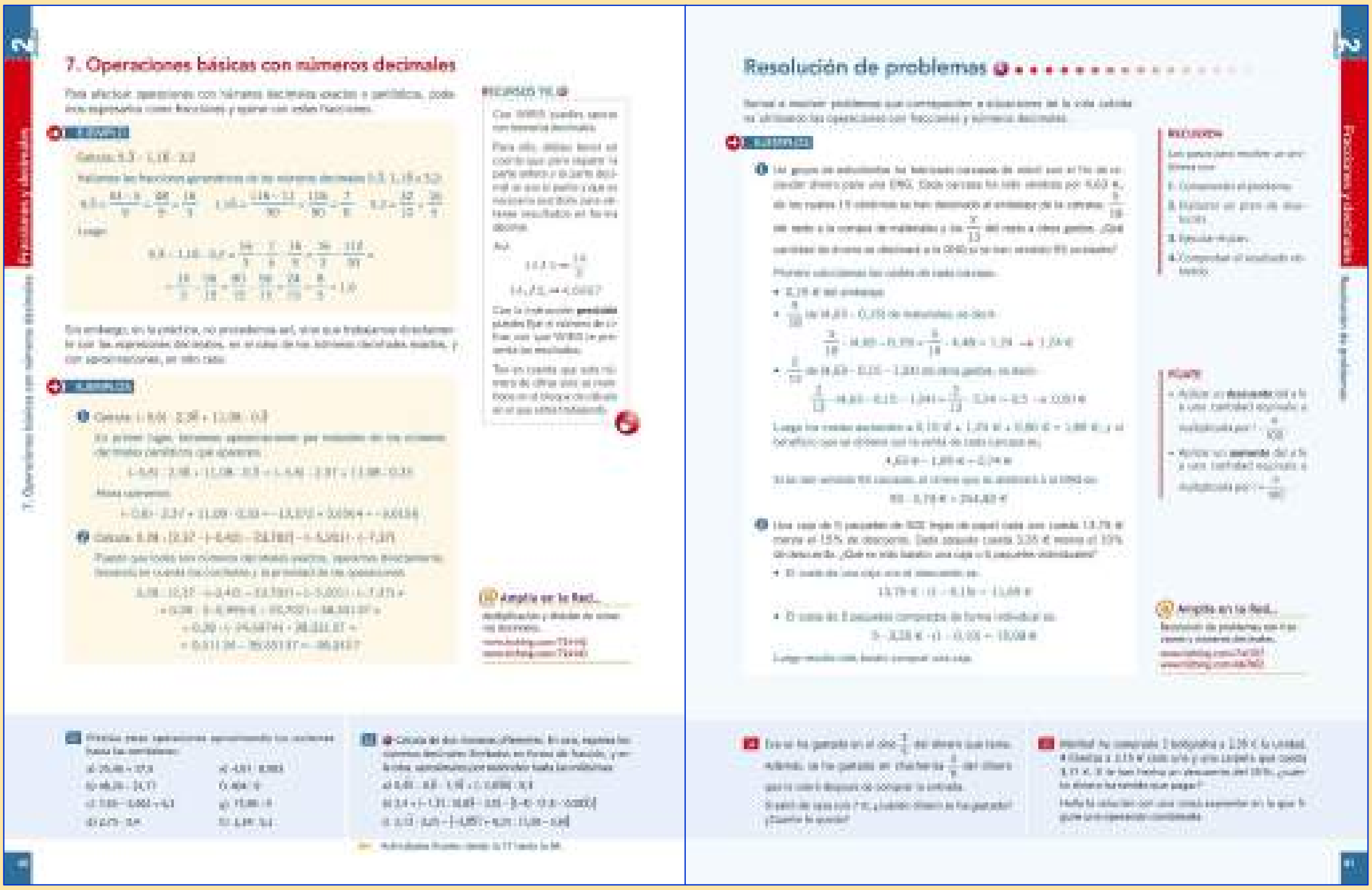
f) $\frac{12413-124}{990} = \frac{12289}{990}$

g) $\frac{10452}{1000} = \frac{2613}{250}$

h) $\frac{1717-17}{99} = \frac{1700}{99}$

i) $\frac{71062-710}{990} = \frac{70352}{990} = \frac{35176}{495}$

(Continúa en la página 2-33 de la guía)


7. Operaciones básicas con números decimales

Resolución de problemas

7. OPERACIONES BÁSICAS... / RESOLUCIÓN DE...

7. Operaciones básicas con números decimales

■ Comenzaremos esta sección leyendo la introducción. El docente insistirá en que este método de cálculo no se utiliza habitualmente, pero puede ser de utilidad en alguna ocasión particular.

Continuaremos con el texto y formularemos esta pregunta al alumnado:

– *¿En qué casos trabajamos con aproximaciones antes de operar?*

Observaremos atentamente el segundo ejemplo donde veremos cómo se opera en la práctica. A continuación, plantearemos las siguientes cuestiones:

– *¿Cómo operamos un cociente si el divisor tiene decimales?*

– *¿Cuál es la prioridad de las operaciones en el caso de números decimales?*

Los alumnos podrán ampliar información y reforzar las divisiones de números decimales accediendo a los recursos *Tiching* indicados en el lateral.

Para poner en práctica todo lo aprendido en esta sección y afianzar los procedimientos de cálculo, los alumnos resolverán las dos actividades propuestas.

Por último el profesor advertirá de la importancia de las nuevas tecnologías y enseñará a los alumnos a operar números decimales con la calculadora WIRIS, siguiendo la guía *Recursos TIC.*

Resolución de problemas

■ En primer lugar recordaremos las fases en la resolución de problemas, según el epígrafe *Recuerda.*

A continuación, leeremos atentamente el primer enunciado y valoraremos su comprensión:

– *¿Qué buscamos? ¿De qué datos disponemos?*

Analizaremos su resolución y aplicaremos lo estudiado a lo largo de la unidad. Al acabar preguntaremos:

– *¿En qué orden operamos?*

– *¿Podemos operar fracciones con números decimales?*

– *¿Es necesario realizar aproximaciones? ¿Por qué?*

Después, prestaremos atención a la nota *Fíjate* que nos recuerda cómo trabajar con porcentajes y resolveremos el segundo ejemplo expuesto en el libro.

Finalizamos la unidad didáctica realizando entre todos los ejercicios del recurso *Tiching*, donde pondremos a prueba los conocimientos adquiridos.

Pediremos a continuación a los alumnos que resuelvan en sus cuadernos los dos problemas propuestos.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 33.* Interpretar expresiones con números decimales, siendo capaz de expresar los resultados.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de como la calculadora WIRIS, con la que se puede operar con números decimales.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 32 y 33.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridas para resolver los ejercicios propuestos.

SENTIDO DE INICIATIVA I ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Resolución de problemas*. Observar el planteamiento y resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas, así como el orden de las operaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 servirá para practicar la el cálculo de operaciones con números decimales.

✓ La actividad de ampliación 3 consolidará el método de resolución de problemas paso a paso a partir de un problema cotidiano con operaciones con fracciones y números decimales.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para trabajar las operaciones con los números decimales, proponemos acceder al siguiente enlace del Proyecto Descartes Ed@d:

http://www.tiching.com/742949

Concretamente, sería interesante que el alumnado revisara todo aquel contenido que haga referencia a las operaciones de sumas y restas con decimales.

También podemos escribir algunas operaciones y pedirles si están bien planteadas o no, y, si es el caso, dónde se localiza el error.

Al final de la actividad, los alumnos podrán realizar unos ejercicios donde aplicarán los conceptos trabajados. Se trata de actividades autocorrectivas, de grn utilidad para que sean conscientes de su nivel de aprendizaje.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 40

32. Los resultados son los siguientes:

a) 62,96

b) 16,47

c) 2,648 + 6,3 = 8,948

d) 9,35

e) 35,701 03

f) 44,89

g) 8,65

h) 0,45

33. Los resultados son los siguientes:

a) Tomando aproximaciones por redondeo:

$0{,}45 - 0{,}67 \cdot 1{,}17 + (-2{,}04) : 0{,}3 = 0{,}45 - 0{,}783\,9 -$

$-6{,}8 = -7{,}133\,9$

Hallando las fracciones generatrices:

$$\frac{5}{11} - \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6} + \left(-\frac{112}{55}\right) : \frac{3}{10} = \frac{5}{11} - \frac{7}{9} - \frac{224}{33} =$$

$$= \frac{45 - 77 - 672}{99} = -\frac{704}{99}$$

b) Tomando aproximaciones por redondeo:

$2{,}4 + (-1{,}33) : (0{,}83 - 3{,}5) - [(-4) \cdot (1{,}8 - 0{,}584)] =$

$= 2{,}4 + (-1{,}33) : (-2{,}67) - [(-4) \cdot 1{,}216] =$

$= 2{,}4 + 0{,}498 + 4{,}864 = 7{,}762$

Hallando las fracciones generatrices:

$$\frac{12}{5} + \left(-\frac{4}{3}\right) : \left(\frac{83}{90} - \frac{7}{2}\right) - \left[(-4) \cdot \left(\frac{9}{5} - \frac{53}{90}\right)\right] =$$

$$= \frac{12}{5} + \left(-\frac{4}{3}\right) : \left(-\frac{116}{45}\right) - \left[(-4) \cdot \left(\frac{109}{90}\right)\right] =$$

$$= \frac{12}{5} + \frac{15}{29} - \left(-\frac{218}{45}\right) = \frac{3132 + 675 + 6322}{1305} = \frac{10129}{1305}$$

c) Tomando aproximaciones por redondeo:

$2{,}13 \cdot 3{,}25 - [-3{,}852 + 0{,}25 : (1{,}28 - 5{,}6)] =$

$= 6{,}922\,5 - [-3{,}852 + 0{,}25 : (-4{,}32)] =$

$= 6{,}922\,5 — 3{,}852 - 0{,}058 = 6{,}922\,5 + 3{,}91 =$

$= 10{,}833$

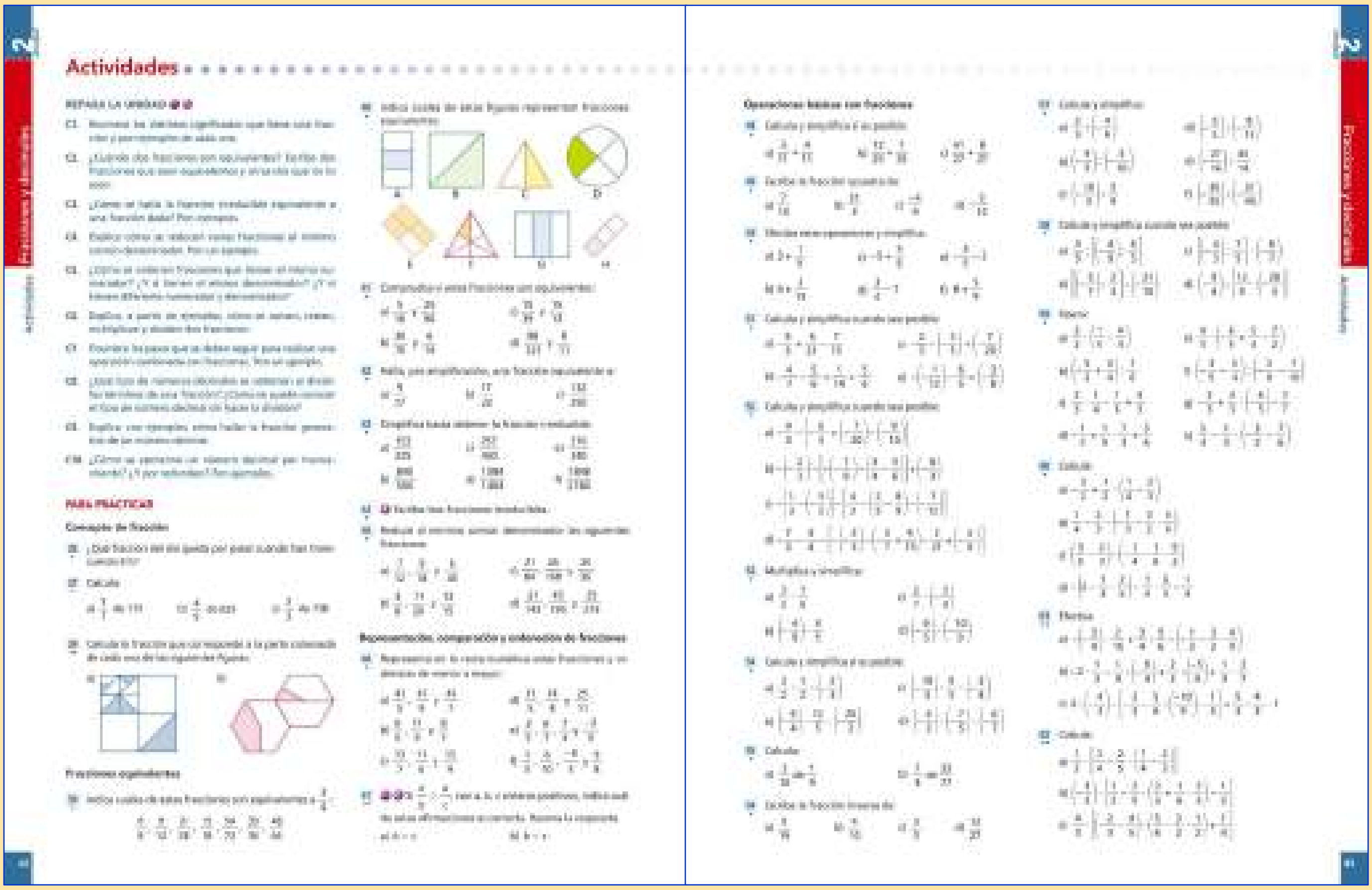
Hallando las fracciones generatrices:

$$\frac{32}{15} \cdot \frac{13}{4} - \left[-\frac{104}{27} + \frac{1}{4} : \left(\frac{32}{25} - \frac{28}{5}\right)\right] =$$

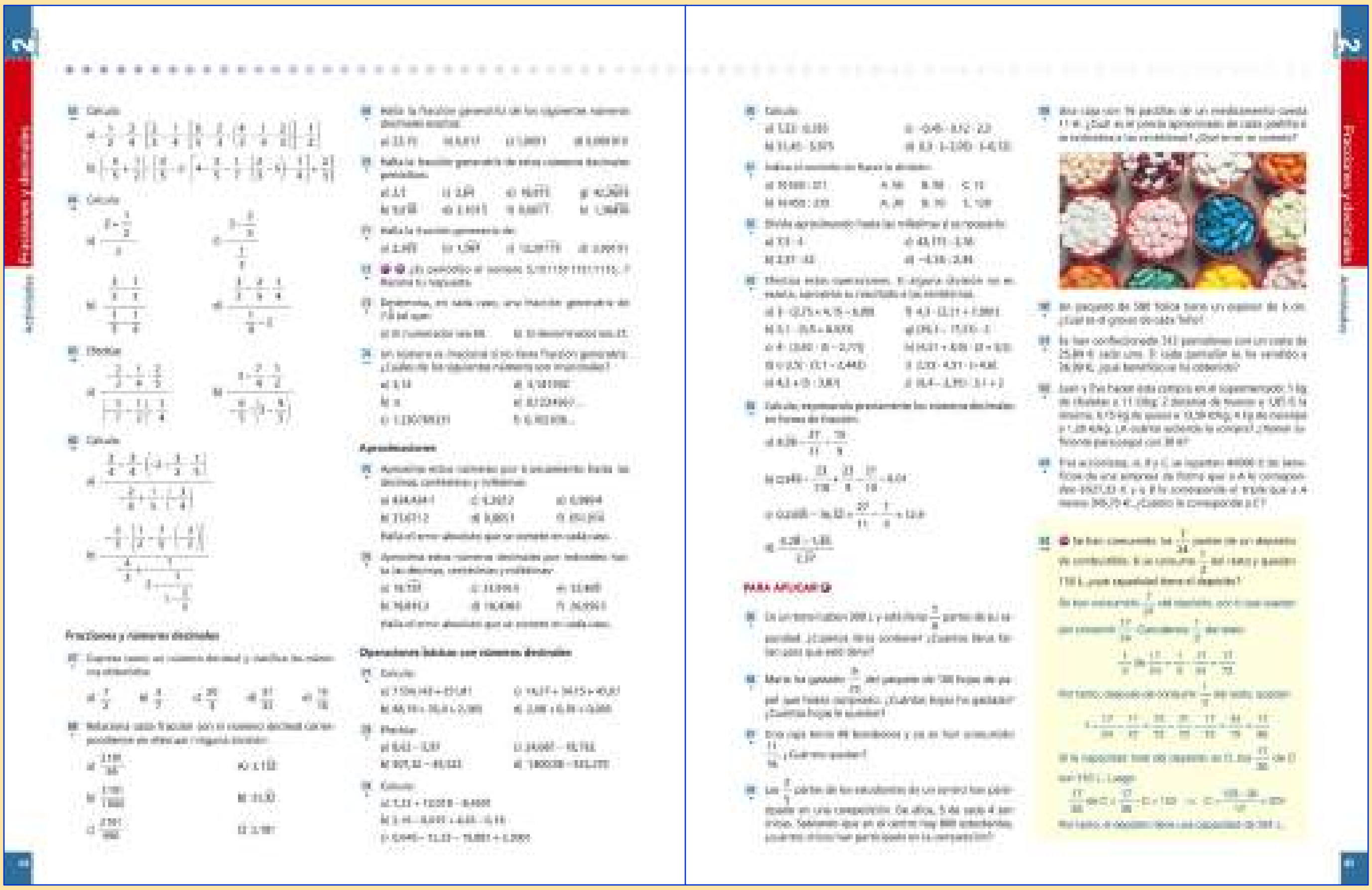
$$= \frac{104}{15} + \left[\frac{104}{27} - \frac{1}{4} : \left(-\frac{108}{25}\right)\right] = \frac{104}{15} + \left(\frac{104}{27} + \frac{25}{432}\right) =$$

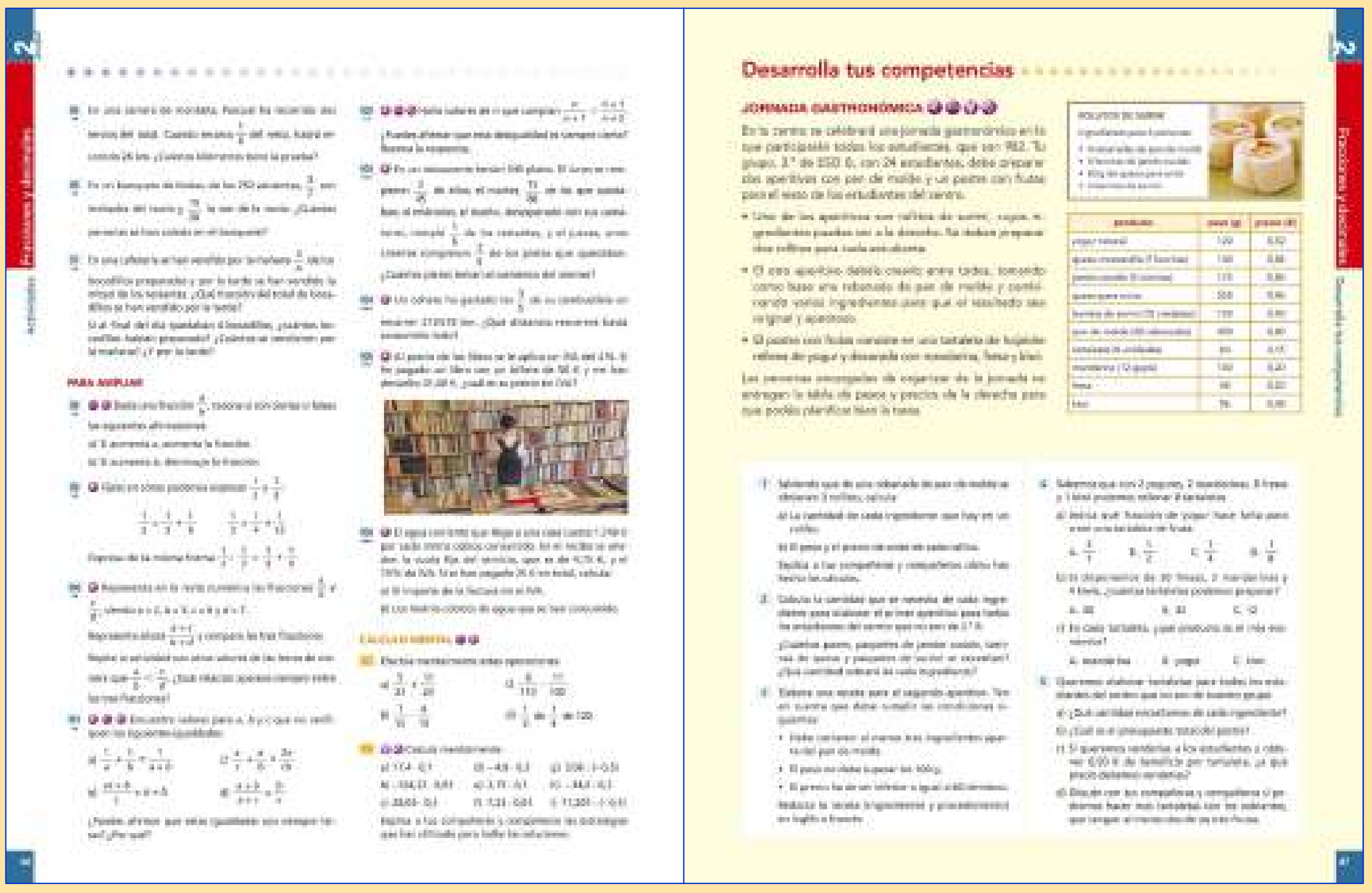
$$= \frac{104}{15} + \frac{563}{144} = \frac{4992 + 2815}{720} = \frac{7807}{720}$$

(Continúa en la página 2-33 de la guía)



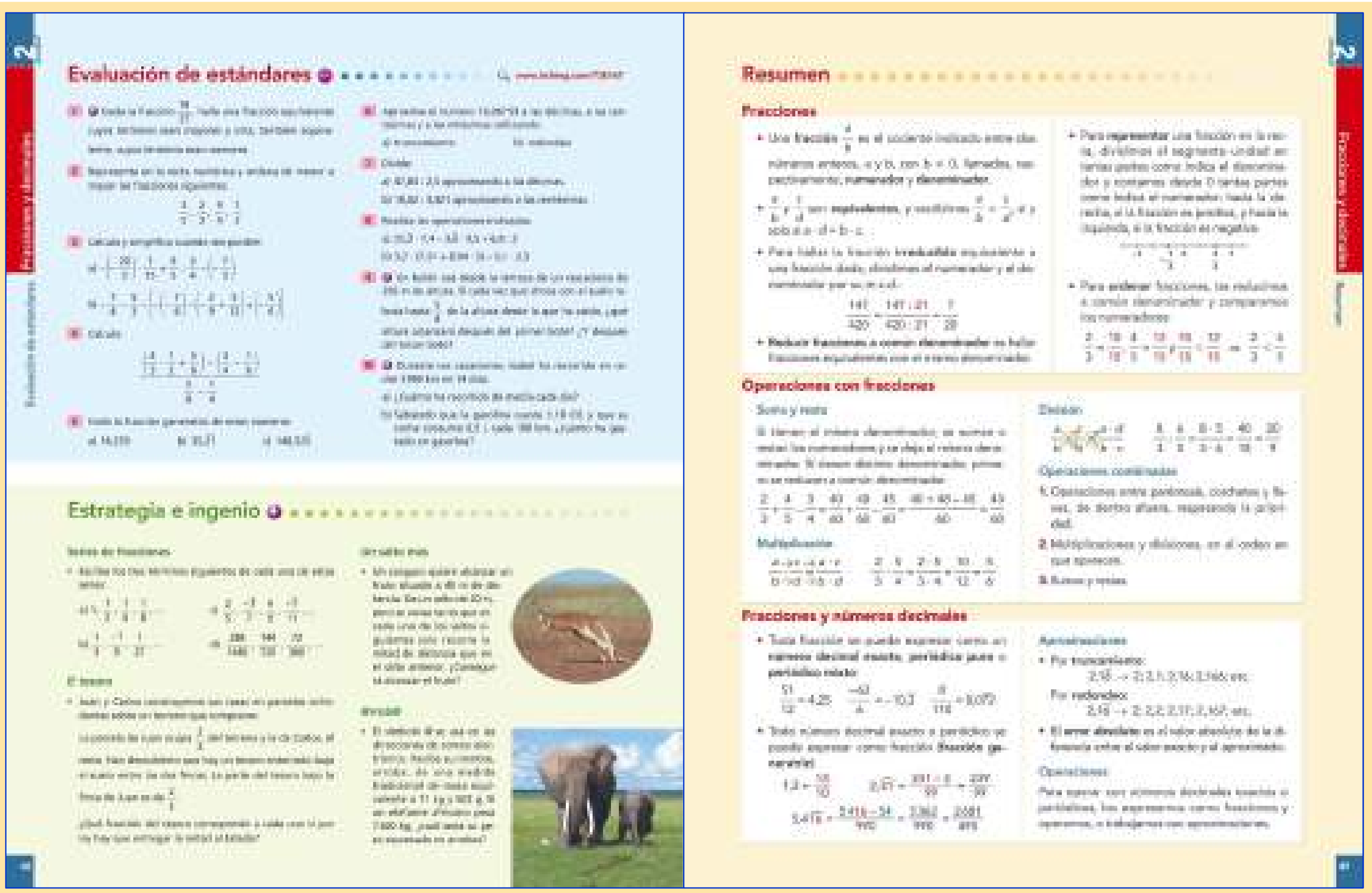
Actividades





Desarrolla tus competencias

JORNADA GASTRONÓMICA



Evaluación de estándares

Estrategia e ingenio

Resumen

Fracciones

Operaciones con fracciones

Fracciones y números decimales

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Repasa la unidad*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.
- *Acts. 47, 72, 98, 101, 102 y 108.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.
- *Desarrolla tus competencias.* Leer y comprender el estímulo y los enunciados de la actividad, generando ideas y supuestos.

APRENDER A APRENDER

- *Repasa la unidad.* Saber transformar la información estudiada en la unidad didáctica en conocimiento propio, así como ser consciente de las propias capacidades y carencias.
- *Acts. 47, 72, 98, 101 y 102.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.
- *Act. 94.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas.
- *Cálculo mental.* Aprender estrategias y técnicas de cálculo mental, adquiriendo confianza.
- *Desarrolla tus competencias.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.
- *Evaluación de estándares*. Ser consciente de las propias capacidades y carencias.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 44 y 99 a 106.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo del tema, mostrando criterio propio.
- *Para aplicar.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, evaluando las acciones realizadas.
- *Cálculo mental* y *Desarrolla tus competencias*. Buscar las soluciones de forma creativa.
- *Evaluación de estándare, acts. 1, 9 y 10* y *Estrategia e ingenio*. Buscar soluciones, de forma creativa e imaginativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Act. 108.* Saber comunicarse de manera constructiva en grupo para exponer las estrategias utilizadas.
- *Desarrolla tus competencias*. Manejar las habilidades sociales en la realización de un trabajo cooperativo y de exposición oral.

ACTIVIDADES FINALES

- En la sección de *Actividades* el alumnado tendrá que resolver una serie de ejercicios y problemas, clasificados en diferentes grados de dificultad para adaptarse al nivel alcanzado por cada alumno.
- La sección *Desarrolla…* propone un caso práctico donde los alumnos no sólo trabajarán los contenidos de la unidad, sino que también tendrán que emplear sus habilidades sociales, lingüísticas y su espíritu emprendedor para poder llevarla a cabo con éxito.
- La finalidad de *Evaluación… es que* los alumnos pongan a prueba el nivel de conocimientos adquiridos a través de una colección de actividades y problemas que engloban toda la unidad didáctica. A su vez, tomarán consciencia de los contenidos que dominan y aquellos que necesitan repasar.
- *Estrategia e ingenio* busca hacer pensar a los alumnos y alumnas e idear nuevas formas de encontrar soluciones. Estimula al alumnado a establecer relación entre diferentes situaciones cotidianas y los conceptos matemáticos presentados en esta unidad.
- Por último, la sección *Resumen* está dedicada a hacer un repaso de todo lo que sabemos sobre las fracciones y los números decimales. Consolidaremos lo aprendido y ordenaremos los conceptos y procedimientos clave.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 42

C1. Actividad personal. A modo de ejemplo: las fracciones pueden tener los siguientes significados:

Operador: 5 /9 de 45

Relación entre dos cantidades: Dos de cada tres o 2 / 3

Cociente indicado entre dos números: 8 / 7 ó 8 : 7

C2. Actividad personal. A modo de ejemplo: decimos que dos fracciones a / b y c / b son equivalentes si y solo si se cumple que: a · d = b · c. Por ejemplo:

Son equivalentes: 2 / 3 y 8 / 12.

No son equivalentes: 1 / 3 y 1 / 4.

C3. Actividad personal. A modo de ejemplo: para obtener la fracción irreductible debemos dividir sucesivamente el numerador y el denominador por sus divisores comunes hasta que solo quede la unidad.

$$\frac{30}{35} = \frac{30 : 5}{35 : 5} = \frac{6}{7}$$

C4. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Reducir varias fracciones a común denominador consiste en transformar las fracciones dadas en otras equivalentes que tengan el mismo denominador.

Generalmente, el denominador que tomamos es el m.c.m. de los denominadores de las fracciones originales. Por ejemplo, si tomamos las fracciones 2 / 3 y 4 / 5 sabemos que el m.c.m.(3, 5) = 15. Por lo tanto:

$$\frac{2}{3} \to \frac{10}{15} \qquad \frac{4}{5} \to \frac{12}{15}$$

C5. Si varias fracciones tienen el mismo numerador, la menor de ellas será la de mayor denominador. Por lo tanto, debemos ordenar los denominadores de manera inversa a cómo queremos que queden ordenadas las fracciones.

Si varias fracciones tienen el mismo denominador, la menor de ellas será la de menor numerador. Por lo tanto, ordenaremos los numeradores según queramos orden creciente o decreciente.

Si queremos ordenar fracciones con denominador y numerador diferentes, primero deberemos reducir a común denominador para obtener fracciones de mismo deno-minador y así ordenarlas según los numeradores.

C6. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Para sumar fracciones deberemos distinguir dos casos, dependiendo de si las fracciones tienen o no igual denominador. En el caso de que tengan igual denominador, se suman los numeradores y se deja el mismo denominador. Por ejemplo:

$$\frac{8}{7} + \frac{4}{7} = \frac{8+4}{7} = \frac{12}{7}$$

Si, por el contrario, tenemos denominadores diferentes, estos se reducen a común denominador y, a continuación, los numeradores se suman.

$$\frac{7}{2} + \frac{2}{5} = \frac{35}{10} + \frac{4}{10} = \frac{35+4}{10} = \frac{39}{10}$$

Para restar dos fracciones, sumamos a la primera la opuesta de la segunda, teniendo en cuenta los dos casos de la suma:

$$\frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{10}{6} + \left(-\frac{3}{6}\right) = \frac{10+(-3)}{6} = \frac{7}{6}$$

Para multiplicar dos fracciones, deberemos multiplicar los numeradores para obtener el numerador resultante y multiplicar denominadores para obtener el nuevo denominador. Por ejemplo:

$$\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7 \cdot 3}{9 \cdot 8} = \frac{21}{72} = \frac{7}{24}$$

Para dividir dos fracciones, multiplicamos la primera por la inversa de la segunda:

$$-\frac{8}{5} : \frac{4}{9} = -\frac{8}{5} \cdot \frac{9}{4} = \frac{(-8)\cdot 9}{5 \cdot 4} = \frac{-72}{20} = -\frac{18}{5}$$

C7. Actividad personal. A modo de ejemplo:

En primer lugar, efectuamos las operaciones entre parénesis, corchetes y llaves, de dentro a fuera. En ségundo lugar, las multiplicaciones y divisiones en el orden que aparecen. Por último, las sumas y las restas:

$$\frac{9}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{4}\right) : \frac{5}{8} = \frac{9}{4} - \left(\frac{2}{4} + \frac{7}{4}\right) : \frac{8}{5} = \frac{9}{4} - \frac{9}{4} : \frac{8}{5} =$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{9}{4} - \frac{45}{32} = \frac{9}{4} + \left(-\frac{45}{32}\right) = \frac{72}{32} + \left(-\frac{45}{32}\right) =$$

$$= \frac{72+(-45)}{32} = \frac{27}{32}$$

C8. A partir de las fracciones podemos obtener tres tipos de números decimales: los decimales exactos, los decimales periódicos puros y los decimales periódicos mixtos.

Para conocer el tipo de número decimal que obtendremos nos fijamos en el denominador de la fracción irreducible equivalente a la original. Si este solo tiene factores primos 2 y 5, obtendremos números decimales exactos.

Por otro lado, si el denominador de la fracción irreducible solo tiene factores primos diferentes de 2 y 5, obtendremos un decimal periódico puro.

Si el denominador de nuestra fracción irreducible tiene factores primos 2 o 5 además de otros, obtendremos un decimal periódico mixto.

C9. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Un número decimal exacto lo obtendríamos:

$$5{,}62 = \frac{5{,}62 \cdot 100}{100} = \frac{562}{100} = \frac{281}{50}$$

Un número decimal periódico puro lo obtendríamos:

$$1{,}\widehat{34} = \frac{134-1}{99} = \frac{133}{99}$$

Un decimal periódico mixto lo obtendríamos:

$$41{,}6\widehat{75} = \frac{41675-416}{990} = \frac{41259}{990}$$

C10. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Para aproximar por truncamiento un número decimal hasta cierto orden se suprimen las cifras decimales a partir de aquel orden. Por ejemplo aproximaremos a las centésimas: 1,666… → 1,66.

Para aproximar por redondeo un número decimal hasta cierto orden se suprimen todas las cifras decimales hasta ese orden y miramos la primera de esas cifras que eliminamos, si es mayor o igual a 5 sumaremos 1 a la última cifra decimal que dejemos, si por el contrario es menor a 5 dejaremos la última cifra no suprimida igual. Si utilizamos el mismo ejemplo de antes: 1,666… → 1,67.

36. La fracción del día que ha transcurrido es 5/24, por lo que quedará por transcurrir:

$$\frac{24}{24} - \frac{5}{24} = \frac{19}{24}$$

37. Los resultados son los siguientes:

a) 125 b) 500 c) 492

38. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{27}{128}$

b) $\frac{5}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{4}$

39. Las fracciones equivalentes son las siguientes:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{21}{28} = \frac{54}{72} = \frac{48}{64}$$

40. *(Ver figura 3 en la página 2-34 de la guía)*

41. Los resultados son los siguientes:

a) Sí, son equivalentes: $5 \cdot 90 = 450$ y $18 \cdot 25 = 450$

b) Sí, son equivalentes: $30 \cdot 14 = 420$ y $70 \cdot 6 = 420$

c) No son equivalentes: $15 \cdot 13 = 195$ y $39 \cdot 15 = 585$

d) Sí, son equivalentes: $88 \cdot 11 = 968$ y $121 \cdot 11 = 968$

42. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{9}{17} = \frac{27}{51}\ ; (\cdot\ 3)$

b) $\frac{17}{23} = \frac{34}{46}\ ; (\cdot\ 2)$

c) $\frac{132}{250} = \frac{660}{1250}\ ; (\cdot\ 5)$

43. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{17 \cdot 3^2}{5^2 \cdot 3^2} = \frac{17}{25}$

b) $\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7} = \frac{5}{3}$

c) es irreductible

d) $\frac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 11}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 13} = \frac{44}{39}$

e) $\frac{2^3 \cdot 3^3}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{9}{10}$

f) $\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}{2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{11}{13}$

44. Actividad personal. A modo de ejemplo:

$\frac{1}{2}\ ;\ \frac{28}{3}\ ;\ \frac{37}{24}$

45. Los resultados son los siguientes:

a) $\text{m. c. m.}\,(12,18,45) = 180 \Rightarrow \frac{105}{180}, \frac{90}{180}\, y\, \frac{24}{180}$

b) $\text{m. c. m.}\,(8,20,15) = 120 \Rightarrow \frac{45}{120}, \frac{66}{120}$ y $\frac{104}{120}$

c) $\text{m. c. m.}\,(84,168,36) = 504 \Rightarrow \frac{126}{504}, \frac{135}{504}$ y $\frac{350}{504}$

d) $\text{m. c. m.}\,(143,195,273) = 15015 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2205}{15015}, \frac{3465}{15015}$ y $\frac{1375}{15015}$

46. Las respuestas son las siguientes:

a) Como todas las fracciones tienen el mismo numerador, se ordenan de la siguiente manera:

$\frac{41}{9} < \frac{41}{7} < \frac{41}{5}$

Su representación queda como:

(Ver figura 4 página 2-35 de la guía)

b) Reduciendo a común denominador, m.c.m.(5, 9, 7) = = 315, obtenemos las siguientes fracciones equivalentes:

$\frac{6}{5} = \frac{378}{315};\ \frac{11}{9} = \frac{385}{315};\ \frac{8}{7} = \frac{360}{315}$

Puesto que:

$\frac{360}{315} < \frac{378}{315} < \frac{385}{315}$

Se tiene:

$\frac{8}{7} < \frac{6}{5} < \frac{11}{9}$

Y, su representación queda como:

(Ver figura 5 página 2-35 de la guía)

c) Reduciendo a común denominador, m.c.m.(7, 6, 9) = = 126, obtenemos las siguientes fracciones equivalentes:

$\frac{13}{7} = \frac{234}{126};\ \frac{11}{6} = \frac{231}{126};\ \frac{15}{9} = \frac{210}{126}$

Puesto que:

$\frac{210}{126} < \frac{231}{126} < \frac{234}{126}$

Se tiene:

$\frac{15}{9} < \frac{11}{6} < \frac{13}{7}$

Y, su representación queda como:

(Ver figura 6 página 2-35 de la guía)

d) Reduciendo a común denominador, m.c.m.(5, 8, 11) = = 440, obtenemos las siguientes fracciones equivalentes:

$\frac{11}{5} = \frac{968}{440};\ \frac{14}{8} = \frac{770}{440};\ \frac{25}{11} = \frac{1000}{440}$

Puesto que:

$\frac{770}{440} < \frac{968}{440} < \frac{1000}{440}$

Se tiene:

$\frac{14}{8} < \frac{11}{5} < \frac{25}{11}$

Y, su representación queda como:

(Ver figura 7 página 2-34 de la guía)

e) Reduciendo a común denominador, m.c.m.(5, 7, 4, 3) = = 420, obtenemos las siguientes fracciones equivalentes:

$\frac{3}{5} = \frac{252}{420};\ \frac{6}{7} = \frac{360}{420};\ \frac{7}{4} = \frac{735}{420};\ \frac{-2}{3} = \frac{-280}{420}$

Puesto que:

$\frac{-280}{420} < \frac{252}{420} < \frac{360}{420} < \frac{735}{420}$

Se tiene:

$\frac{-2}{3} < \frac{3}{5} < \frac{6}{7} < \frac{7}{4}$

Y, su representación queda como:

(Ver figura 8 página 2-36 de la guía)

f) Reduciendo a común denominador, m.c.m.(3, 10, 5, 8) = =120, obtenemos las siguientes fracciones equivalentes:

$\frac{1}{3} = \frac{40}{120};\ \frac{6}{10} = \frac{72}{120};\ \frac{-9}{5} = \frac{-216}{120};\ \frac{9}{8} = \frac{135}{120}$

Puesto que:

$\frac{-216}{120} < \frac{40}{120} < \frac{72}{120} < \frac{135}{120}$

Se tiene:

$$\frac{-9}{5} < \frac{1}{3} < \frac{6}{10} < \frac{9}{8}$$

Y, su representación queda como:

(Ver figura 9 página 2-36 de la guía)

47. Al tener el mismo numerador, se cumple que la fracción mayor es la que tiene el denominador más pequeño. Por tanto, la opción correcta es: b) $b < c$

Página 43

48. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{7}{11}$ b) $\frac{19}{25}$ c) $\frac{49}{27}$

49. Las fracciones opuestas son:

a) $-\frac{7}{10}$ b) $-\frac{31}{3}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{3}{10}$

50. Las soluciones de la actividad son:

a) $\frac{27+1}{9} = \frac{28}{9}$

b) $\frac{60+2}{15} = \frac{62}{15}$

c) $\frac{-30+5}{6} = -\frac{25}{6}$

d) $\frac{3-28}{4} = -\frac{25}{4}$

e) $\frac{-3-10}{5} = -\frac{13}{5}$

f) $\frac{72+5}{9} = \frac{77}{9}$

51. Las soluciones de la actividad son:

a) $\frac{-175+20-49}{105} = -\frac{204}{105} = -\frac{68}{35}$

b) $\frac{-24-35+3+35}{42} = -\frac{21}{42} = -\frac{1}{2}$

c) $\frac{-40+36-21}{60} = -\frac{25}{60} = -\frac{5}{12}$

d) $\frac{10-144-45}{120} = -\frac{179}{120}$

52. Las soluciones de la actividad son:

a) $-\frac{4}{3} - \left(\frac{-24-7+18}{20}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{13}{20} = \frac{-80+39}{60} = -\frac{41}{60}$

b) $\frac{2}{3} - \left[\frac{7}{9} - \left(\frac{9-10}{12}\right)\right] - \frac{8}{3} = \frac{2}{3} - \left(\frac{7}{9} + \frac{1}{12}\right) - \frac{8}{3} =$

$= \frac{2}{3} - \left(\frac{28+3}{36}\right) - \frac{8}{3} = \frac{2}{3} - \frac{31}{36} - \frac{8}{3} = \frac{24-31-96}{36} =$

$= -\frac{103}{96}$

c) $-\left(\frac{5+9}{15}\right) - \left[\frac{4}{3} - \left(\frac{18-40}{45}\right) + \frac{7}{12}\right] =$

$= -\frac{14}{15} - \left(\frac{4}{3} + \frac{22}{45} + \frac{7}{12}\right) = -\frac{14}{15} - \left(\frac{240+88+105}{180}\right) =$

$= -\frac{14}{15} - \frac{433}{180} = \frac{-168-433}{180} = -\frac{601}{180}$

d) $-\frac{7}{3} - \frac{5}{4} - \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{-45+28}{105}\right) - \frac{2}{21} - \frac{5}{6}\right] =$

$= -\frac{7}{3} - \frac{5}{4} - \left(\frac{2}{3} + \frac{17}{105} - \frac{2}{21} - \frac{5}{6}\right) =$

$= -\frac{7}{3} - \frac{5}{4} - \left(\frac{140+34-20-175}{210}\right) = -\frac{7}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{10} =$

$= \frac{-140-75+6}{60} = -\frac{209}{60}$

53. Las soluciones de la actividad son:

a) $\frac{21}{12} = \frac{7}{4}$

b) $-\frac{24}{45} = -\frac{8}{15}$

c) $-\frac{6}{28} = -\frac{3}{14}$

d) $\frac{60}{45} = \frac{4}{3}$

54. Las soluciones de la actividad son:

a) $\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

b) $-\frac{27}{5} \cdot \left(-\frac{20}{3}\right) = 36$

c) $-6 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{2}$

d) $\frac{28}{15} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{8}{5}$

55. Las soluciones de la actividad son:

a) $\frac{3 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{7 \cdot 32}{8 \cdot 77} = \frac{4}{11}$

56. Las fracciones inversas son:

a) $\frac{19}{9}$ b) $\frac{10}{4}$ c) $\frac{5}{3}$ d) $\frac{27}{12}$

57. Las soluciones de la actividad son:

a) $-\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 4} = -\frac{3}{2}$

b) $\frac{9 \cdot 10}{5 \cdot 3} = 6$

c) $-\frac{10 \cdot 9}{3 \cdot 5} = -6$

d) $\frac{6 \cdot 15}{5 \cdot 8} = \frac{9}{4}$

e) $-\frac{27 \cdot 14}{16 \cdot 45} = -\frac{21}{40}$

f) $\frac{36 \cdot 40}{35 \cdot 21} = \frac{96}{49}$

58. Las soluciones de la actividad son:

a) $\frac{3}{5} : \left(-\frac{10}{27}\right) = -\frac{81}{50}$

b) $\left(-\frac{15}{14}\right) : \left(-\frac{21}{10}\right) = \frac{25}{49}$

c) $\left(-\frac{20}{21}\right) \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{40}{49}$

d) $\left(-\frac{9}{4}\right) : (-16) = \frac{9}{64}$

59. Las soluciones de la actividad son:

a) $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3-20}{15}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{17}{15}\right) = -\frac{17}{10}$

b) $\left(\frac{-10+3}{4}\right) : \frac{7}{6} = -\frac{7}{4} : \frac{7}{6} = -\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

d) $-\frac{1}{2} + \frac{7}{15} + \frac{5}{6} = \frac{-15+14+25}{30} = \frac{4}{5}$

e) $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{-24+25-70}{20}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{69}{20}\right) = -\frac{23}{5}$

f) $\left(\frac{-12-25}{20}\right) : \left(\frac{-15-28}{40}\right) = \left(-\frac{37}{20}\right) : \left(-\frac{43}{40}\right) = \frac{74}{43}$

g) $-\frac{2}{3} - \frac{8}{5} - \frac{3}{7} = \frac{-70-168-45}{105} = -\frac{283}{105}$

h) $\frac{5}{4} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-9-7}{6}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{5}{4} + \frac{8}{9} =$

$= \frac{45+32}{36} = \frac{77}{36}$

60. Las soluciones de la actividad son:

a) $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3-8}{12}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{5}{24} =$

$$= \frac{-36-5}{24} = -\frac{41}{24}$$

b) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{-4-15}{12}\right) =$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{19}{12}\right) = \frac{1}{4} + \frac{19}{18} = \frac{9+38}{36} = \frac{47}{36}$$

c) $\left(\frac{9-10}{15}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{1}{15}\right) \cdot (-1) = \frac{1}{15}$

d) $-\left(2 - \frac{2}{15}\right) - \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = -\left(\frac{30-2}{15}\right) - \frac{3}{10} - \frac{1}{4} =$

$$= -\frac{28}{15} - \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{-112-18-15}{60} = -\frac{29}{12}$$

61. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{1}{10} + \frac{9}{10} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{-3-6}{6}\right) = 1 + \frac{3}{2} =$

$$\frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

b) $-\frac{2}{3} + \frac{1}{9} - \frac{8}{15} + \frac{2}{21} = \frac{-210+35-168+30}{315} = -\frac{313}{315}$

c) $-\frac{3}{2} - \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{4} - 1 = -\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4} - 1 =$

$$= \frac{-6+1+5-4}{4} = -1$$

62. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{4} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3-8}{12}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9+2}{12}\right) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{12} = \frac{11}{24}$$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{2}\right] =$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{10+1}{15}\right) - \frac{1}{2}\right] = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{11}{15}\right) =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{22}{75}\right) = \frac{11}{25}$$

c) $\frac{4}{3} \cdot \left[\left(\frac{-10-12}{15}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}\right] =$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left[\left(-\frac{22}{15}\right) \cdot \left(\frac{10-9}{12}\right) + \frac{1}{4}\right] = \frac{4}{3} \cdot \left[\left(-\frac{22}{15}\right) \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{11}{90} + \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{-22+45}{180}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{23}{180} = \frac{23}{135}$$

Página 44

63. Los resultados son los siguientes:

a) $-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \left\{\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{6}\right)\right] - \frac{1}{2}\right\} =$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \left\{\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{8-1}{6}\right)\right] - \frac{1}{2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{6}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6}\right) - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{6}{5} - \frac{7}{9}\right) - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{54-35}{45}\right) - \frac{1}{2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{19}{45} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{19}{180} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{120-19-90}{180}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{11}{180} =$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{11}{240} = \frac{-120-11}{240} = -\frac{131}{240}$$

b) $\left(\frac{-6+5}{10}\right) \cdot \left\{\frac{3}{5} - 2 \cdot \left[4 - \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{2-15}{3}\right) - \frac{1}{4}\right] + \frac{2}{3}\right\} =$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \left\{\frac{3}{5} - 2 \cdot \left[4 - \frac{3}{5} - \frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{13}{3}\right) - \frac{1}{4}\right] + \frac{2}{3}\right\} = -\frac{1}{10} =$$

$$= \left[\frac{3}{5} - 2 \cdot \left(4 - \frac{3}{5} + \frac{13}{21} - \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{3}\right] =$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \left[\frac{3}{5} - 2 \cdot \left(\frac{1680-252+260-105}{420}\right) + \frac{2}{3}\right] =$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{1583}{420} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1583}{210} + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{126-1583+140}{210}\right) = -\frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{439}{70}\right) = \frac{439}{700}$$

64. Los resultados son los siguientes:

a) $\dfrac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}$

b) $\dfrac{\frac{9-14}{6}}{\frac{4-3}{12}} = \dfrac{-\frac{5}{6}}{\frac{1}{12}} = -10$

c) $\dfrac{\frac{15-2}{5}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{13}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{39}{5}$

d) $\dfrac{\frac{3}{2} - \frac{1}{10}}{\frac{1}{4} - 2} = \dfrac{\frac{15-1}{10}}{\frac{1-8}{4}} = \dfrac{\frac{7}{5}}{-\frac{7}{4}} = -\frac{4}{5}$

65. Los resultados son los siguientes:

a) $\dfrac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{10}}{\left(\frac{-6-7}{14}\right) \cdot \frac{1}{4}} = \dfrac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{10}}{\left(-\frac{13}{14}\right) \cdot \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{-20-3}{30}}{-\frac{13}{56}} = \dfrac{-\frac{23}{30}}{-\frac{13}{56}} = \frac{644}{195}$

b) $\dfrac{3 - \frac{7}{8}}{-\frac{6}{5} : \left(\frac{15-9}{5}\right)} = \dfrac{\frac{24-7}{8}}{-\frac{6}{5} : \frac{6}{5}} = \dfrac{\frac{17}{8}}{-1} = -\frac{17}{8}$

66. Los resultados son los siguientes:

a) $\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-2 - \frac{3}{10}\right)}{-\frac{2}{3} - \frac{3}{20}} = \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{-20-3}{10}\right)}{-\frac{2}{3} - \frac{3}{20}} =$

$$= \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{23}{10}\right)}{-\frac{2}{3} - \frac{3}{20}} = \dfrac{\frac{3}{4} + \frac{69}{40}}{-\frac{2}{3} - \frac{3}{20}} = \dfrac{\frac{30+69}{40}}{\frac{-40-9}{60}} = \dfrac{\frac{99}{40}}{-\frac{49}{60}} =$$

$$= -\frac{297}{98}$$

b) $\dfrac{-\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{21}{10}\right)}{-\frac{4}{3} + \dfrac{1}{2 - \frac{1}{\frac{3}{5}}}} = \dfrac{-\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5+21}{10}\right)}{-\frac{4}{3} + \dfrac{1}{2 - \frac{5}{3}}} = \dfrac{-\frac{3}{5} \cdot \frac{13}{5}}{-\frac{4}{3} + \dfrac{1}{\frac{1}{3}}} =$

$$= \frac{-\frac{3}{5}\cdot\frac{13}{5}}{-\frac{4}{3}+3} = \frac{-\frac{39}{25}}{\frac{5}{3}} = -\frac{117}{125}$$

67. Las soluciones de la actividad son:

a) $\frac{7}{2} = 3{,}5 \longrightarrow$ El número es decimal exacto

b) $\frac{3}{7} = 0,\overline{428571} \longrightarrow$ El número es decimal periódico puro

c) $\frac{20}{3} = 6,\widehat{6} \longrightarrow$ El número es decimal periódico puro

d) $\frac{37}{33} = 1,\widehat{12} \longrightarrow$ El número es decimal periódico puro

e) $\frac{15}{16} = 0{,}9375 \longrightarrow$ El número es decimal exacto

68. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{3101}{99} \leftrightarrow$ B) $31,\widehat{32}$

b) $\frac{3101}{1000} \leftrightarrow$ C) $3{,}101$

c) $\frac{3101}{990} \leftrightarrow$ A) $3{,}1\widehat{32}$

69. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{2315}{9100} = \frac{463}{20}$

b) $\frac{17}{1000}$

c) $\frac{10\,001}{10\,000}$

d) $\frac{10}{1\,000\,000}$

70. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{25-2}{9} = \frac{23}{9}$

b) $\frac{9018-90}{990} = \frac{8928}{990} = \frac{496}{55}$

c) $\frac{364-3}{99} = \frac{361}{99}$

d) $\frac{31\,015-3101}{9000} = \frac{30\,705}{9000} = \frac{2047}{600}$

e) $\frac{18\,015-18}{999} = \frac{17\,997}{999} = \frac{5999}{333}$

f) $\frac{17}{9900}$

g) $\frac{423\,695-42}{9999} = \frac{423\,653}{9999}$

h) $\frac{138\,456-138}{99\,900} = \frac{138\,318}{99\,900} = \frac{69\,159}{49\,950}$

71. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{2365-23}{990} = \frac{2342}{990} = \frac{1171}{495}$

b) $\frac{1081-1}{999} = \frac{1080}{999} = \frac{40}{37}$

c) $\frac{1\,220\,175-1220}{99\,900} = \frac{1\,218\,955}{99\,900} = \frac{243\,791}{19\,980}$

d) $\frac{300\,101}{100\,000}$

72. No, ya que no se repite siempre el mismo bloque de números, no tiene periodo.

73. En primer lugar, se obtiene la fracción generatriz y, posteriormente, se calcula una fracción equivalente a ésta con las características que pide cada apartado:

$$7,\widehat{6} = \frac{76-7}{9} = \frac{69}{9} = \boxed{\frac{23}{3}}$$

a) Para que el numerador sea 69, se tiene que amplificar la fracción generatriz, multiplicando numerador y denominador por el mismo número. En este caso, se ha de multiplicar por 3 y queda:

$$\frac{23}{3} \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 3}{=}} \boxed{\frac{69}{9}}$$

b) En este caso, para que el denominador sea 27, la fracción generatriz se amplifica multiplicando numerador y denominador por 9:

$$\frac{23}{3} \underset{\cdot 9}{\overset{\cdot 9}{=}} \boxed{\frac{207}{27}}$$

74. Son irracionales:

b) π; e) 0,123 456 7 ... ; f) 0,102 030 ...

75. La clasificación es la siguiente:

	Orden de la aproximación	Truncamiento	
		Aprox.	Error
a) 424, 424	**Décimas**	424,4	0,024
	Centésimas	424,42	0,004
	Milésimas	424,424	0
b) 37, 671 2	**Décimas**	37,6	0,071 2
	Centésimas	37,67	0,001 2
	Milésimas	37,671	0,000 2
c) 9, 265 2	**Décimas**	9,2	0,065 2
	Centésimas	9,26	0,005 2
	Milésimas	9,265	0,000 2
d) 0, 0651	**Décimas**	0	0,065 1
	Centésimas	0,06	0,005 1
	Milésimas	0,065	0,000 1
e) 0, 989 4	**Décimas**	0,9	0,089 4
	Centésimas	0,98	0,009 4
	Milésimas	0,989	0,000 4
f) 651, 914	**Décimas**	651,9	0,014
	Centésimas	651,91	0,004
	Milésimas	651,914	0

76. La clasificación es la siguiente:

	Orden de la aproximación	Redondeo	
		Aprox.	**Error**
a) 18,724	**Décimas**	18,7	0,024
	Centésimas	18,72	0,004
	Milésimas	18,724	0
b) 78,819	**Décimas**	78,8	0,019
	Centésimas	78,82	0,001
	Milésimas	78,819	0
c) 23,916	**Décimas**	23,9	0,016
	Centésimas	23,92	0,004
	Milésimas	23,916	0
d) 18,438 6	**Décimas**	18,4	0,038 6
	Centésimas	18,44	0,001 4
	Milésimas	18,439	0,000 4
e) 52,869	**Décimas**	52,9	0,031
	Centésimas	52,87	0,001
	Milésimas	52,869	0
f) 26,956 5	**Décimas**	27,0	0,043 5
	Centésimas	26,96	0,003 5
	Milésimas	26,957	0,000 5

77. Los resultados son los siguientes:

a) 7785,953

b) 85,955

c) 94,09

d) 2,865

78. Los resultados son los siguientes:

a) 2,65

b) 461,797

c) 5,895

d) 1268,305

79. Los resultados son los siguientes:

a) 10,7979

b) 6,595

c) − 32,864 9

Página 45

80. Los resultados son los siguientes:

a) 2,566 65

b) 65,958 75

c) − 0,124 2

d) 0,073 8

81. Los resultados son los siguientes:

a) $10\,550 : 211 \cong$ A) 50

b) $16\,450 : 235 \cong$ B) 70

82. Los resultados son los siguientes:

a) 1,25

b) $0{,}056\,428\ldots \cong 0{,}056$

c) $9{,}409\,190\ldots \cong 9{,}409$

d) $18{,}294\,491\ldots \cong 18{,}294$

e) $-\,1{,}9\widehat{4} \cong -1{,}944$

f) $40{,}152\,173\ldots \cong 40{,}152$

83. Los resultados son los siguientes:

a) $3 \cdot 0{,}82 = 2{,}46$

b) $2{,}1 \cdot 12{,}423 = 26{,}088\,3$

c) $4 \cdot (3{,}42 \cdot 2{,}23) = 30{,}506\,4$

d) $(-3{,}5) \cdot 4{,}658 = -16{,}303$

e) $4{,}2 + 1{,}29 = 5{,}49$

f) $4{,}3 \cdot 9{,}291 = 39{,}951\,3$

g) $12{,}09 \cdot 2 = 24{,}18$

h) $13{,}41 \cdot 5{,}5 = 73{,}755$

i) $11{,}410\,3 \cdot (-4{,}6) = -52{,}487\,38$

j) $4{,}05 : 3{,}1 + 2 = 1{,}306 + 2 = 3{,}306$

84. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{48}{11} - \frac{27}{11} - \frac{15}{9} = \frac{432-243-165}{99} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$

b) $\frac{109}{198} - \frac{23}{110} + \frac{23}{9} - \frac{21}{10} - \frac{1}{100} =$

$= \frac{5450 - 2070 + 25\,300 - 20790 - 99}{9900} = \frac{7791}{9900} = \frac{2597}{3300}$

c) $\frac{129}{550} - \frac{1636}{99} + \frac{27}{11} - \frac{7}{9} + \frac{129}{10} =$

$= \frac{1161 - 81\,800 + 12\,150 - 3850 + 63855}{4950} =$

$= -\frac{8484}{4950} = -\frac{1414}{825}$

d) $\dfrac{\frac{13}{45} - \frac{145}{99}}{\frac{235}{99}} = \dfrac{\frac{143-725}{495}}{\frac{235}{99}} = \dfrac{-\frac{582}{495}}{\frac{235}{99}} = -\frac{582}{1175}$

85. La cantidad de litros que contiene se puede plantear como:

$\frac{5}{8}\ de\ 300 = 187{,}5\ L$

Por lo tanto, el depósito contiene 187,5 litros actualmente y, faltarán 112,5 litros para que esté completo.

86. Para saber las hojas que ha gastado, se calcula:

$\frac{9}{25}$ de $100 = 36$

Luego, ha gastado 36 hojas blancas y le quedarán 64 hojas.

87. En primer lugar, se calculan los bombones que se han consumido:

$\frac{11}{16}$ de $48 = 33$

Entonces, al haber consumido 33, quedarán 15 bombones.

88. Si calculamos el número de estudiantes que han participado en la competición, se obtiene:

$\frac{2}{5}\ de\ 800 = 320$ participantes

De los 320 participantes, 3 de cada 4 son chicas, por lo tanto:

$\frac{3}{4}\ de\ 320 = 240$ chicas

Luego, la cantidad de chicos que ha participado, será de $320 - 240 = 80$ chicos.

89. Para calcular el precio de cada pastilla, se divide el precio total de la caja entre el número de pastillas que contiene y se redondea a las centésimas:

$11:16 = 0{,}6875 \cong 0{,}69$ €

Así que, cada pastilla vale 0,69 €. Y, el error que se comete es:

$E = |0{,}6875 - 0{,}69| = 0{,}0025$

90. Se divide el grosor del paquete entre el número total de folios y se obtiene:

$6:500 = 0{,}012$ cm $= 0{,}12$ mm

91. Primero, se calcula el coste de la confección de los 512 pantalones:

$512 \cdot 25{,}84 = 13\,230{,}08$ €

Después, se calcula la ganancia obtenida tras la venta de todos los pantalones:

$512 \cdot 36{,}99 = 18\,938{,}88$ €

El beneficio, se calcula restando el coste a la ganancia:

$18\,938{,}88 - 13\,230{,}08 = 5708{,}8$ €

92. La compra asciende a un total de:

$1 \cdot 11 + 2 \cdot 1{,}85 + 1 \cdot 13{,}50 + 4 \cdot 1{,}20 = 33$ €

Por lo tanto, no tendrán suficiente para pagar si sólo llevan 30 €.

93. El reparto de los 40 000 € quedaría de la siguiente manera:

Accionista A: 6527,32 €

Accionista B: $3 \cdot 6527{,}32 - 345{,}75 = 19\,927{,}71$ €

Accio. C: $40\,000 - (6527{,}32 + 19\,927{,}71) = 13\,544{,}97$ €

94. Ejercicio resuelto en el libro.

Página 46

95. Pascual lleva recorrido $\frac{2}{3}$ del total de la carrera, por lo tanto, le falta por recorrer $\frac{1}{3}$.

Cuando recorra $\frac{1}{6}$ del resto, supondrá la siguiente fracción:

$\frac{1}{6}\,de\,\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$

Así que, hasta el momento, lleva recorridos:

$\frac{2}{3} + \frac{1}{18} = \frac{13}{18}$

Luego, si se supone que T es la cantidad total de kilómetros que tiene la prueba, se calcula:

$\frac{13}{18}$ de $T = 26 \Rightarrow T = \frac{26 \cdot 18}{13} \Rightarrow T = 36$

Entonces, la prueba tiene 36 km.

96. Se calcula, primero, la fracción total de invitados que llevan entre el novio y la novia:

$\frac{3}{7} + \frac{15}{28} = \frac{12 + 15}{28} = \frac{27}{28}$

Se obtiene que, entre los dos, llevan $\frac{27}{28}$ del total de los invitados, por lo tanto, se han colado:

$\frac{1}{28}\ de\ 252 = 9$ personas

97. Por la mañana se venden $\frac{3}{4}$ entonces, quedan $\frac{1}{4}$ del total.

Por la tarde, la fracción de bocadillos se vende es:

$\frac{1}{2}\,de\,\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

Quitando a los que quedaban por la mañana los que se han vendido por la tarde, quedarán:

$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

Si se supone que C es la cantidad total de bocadillos que se prepararon, se tiene:

$\frac{1}{8}\,de\ C = 4 \Rightarrow C = \frac{4 \cdot 8}{1} \Rightarrow C = 32$

Por lo tanto, se prepararon un total de 32 bocadillos.

Por la mañana se vendieron:

$\frac{3}{4}\ de\ 32 = 24$ bocadillos

Y, por la tarde:

$\frac{1}{8}\ de\ 32 = 4$ bocadillos

98. Las respuestas son:

a) Cierto, ya que, aumentando el numerador, el resultado de la división sería mayor.

b) Cierto, ya que, aumentando el denominador, el resultado de la división sería menor.

99. El resultado es el siguiente:

$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$

100. A continuación se representan las fracciones $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$ y $\frac{8}{12}$:

(Ver figura 10 en la página 2-37 de la guía)

Se obtiene que:

$\frac{2}{5} < \frac{8}{12} < \frac{6}{7}$

Buscamos otros dos ejemplos:

Ejemplo 1: $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

Se obtiene que:

$\frac{1}{2} < \frac{4}{6} < \frac{3}{4}$

Ejemplo 2: $a = 6, b = 7, c = 5, d = 9$

Se obtiene que:

$\frac{6}{7} > \frac{11}{16} > \frac{5}{9}$

Como se puede observar, siempre se cumple que:

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ó $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$

En resumen, la fracción $\frac{a+c}{b+d}$ siempre está comprendida entre las otras dos.

101. Los resultados son los siguientes:

a) $a = 2; b = 3 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \neq \frac{1}{6}$

b) $a = 4; b = 5; c = 3 \Rightarrow \frac{4 \cdot 3 + 5}{3} = \frac{17}{3} \neq 4 + 5 = 9$

c) $a = 5; b = 2; c = 7 \Rightarrow \frac{5}{7} + \frac{5}{2} = \frac{45}{14} \neq \frac{10}{14}$

d) $a = 3; b = 4; c = 6 \Rightarrow \frac{3+4}{3+6} = \frac{7}{9} \neq \frac{4}{6}$

Todas las igualdades son falsas, ya que, no se realizan los cálculos correctamente:

En a) habría que reducir, previamente, a común denominador.

En b) no se puede simplificar si el factor no es común en todos los sumandos del numerador.

En c) reduce a común denominador, pero no ajusta los numeradores.

En d) no es correcto simplificar sumandos, sólo se pueden simplificar factores.

102. El resultado es el siguiente:

Si $n = 1$:

$\frac{1}{1+1} < \frac{1+1}{1+2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \Rightarrow$ Se cumple

Si $n = 2$:

$\frac{2}{2+1} < \frac{2+1}{2+2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < \frac{3}{4} \Rightarrow$ Se cumple

Si $n = 7$:

$\frac{7}{7+1} < \frac{7+1}{7+2} \Leftrightarrow \frac{7}{8} < \frac{8}{9} \Rightarrow$ Se cumple

Se cumple siempre.

103. La clasificación es la siguiente:

Día de la semana	Nº de Platos	
	Se rompen	Quedan
Lunes	$\frac{2}{45}$ de $540 = 24$ platos	$540 - 24 =$ $= 516$ platos
Martes	$\frac{15}{86}$ de $516 = 90$ platos	$516 - 90 =$ $= 426$ platos
Miércoles	$\frac{1}{6}$ de $426 = 71$ platos	$426 - 71 =$ $= 355$ platos
Jueves	$\frac{2}{5}$ de $355 = 142$ platos	$355 - 142 =$ $= 213$ platos

Al comienzo del viernes tenían 213 platos.

104. Si se llama C a la cantidad total de kilómetros que puede recorrer el cohete, se calcula como:

$\frac{3}{5}$ de $C =$

$= 210\,570\ km \Leftrightarrow C = \frac{210\,570 \cdot 5}{3} \Leftrightarrow C = 350\,950\ km$

Por lo tanto, si restamos los kilómetros que ya ha recorrido:

$350\,950 - 210\,570 = 140\,380$

Podrá recorrer 140 380 km con el combustible que le queda.

105. Primero, se calcula el precio que se ha pagado del libro:

$50 - 31{,}40 = 18{,}60$ €

Así, el precio del libro, con IVA, asciende a 18,60 €. Al haber realizado un aumento porcentual del 4 %, si se llama P al precio del libro SIN IVA, se tiene que:

$$104\% \text{ de } P = 18{,}60$$

$$\frac{104}{100} \text{de } P = 18{,}60 \Leftrightarrow P = \frac{18{,}60 \cdot 100}{104} \Leftrightarrow P = 17{,}88$$

Por lo tanto, el precio del libro SIN IVA es de 17,88 €.

106. Si se llama M a la cantidad de metros cúbicos de agua consumidos, el gasto se calcula como:

$110\% \text{ de } (4{,}75 + 1{,}749 \cdot M) = 25$

$4{,}75 + 1{,}749 \cdot M = \frac{25 \cdot 100}{110}$

$1{,}749 \cdot M = 22{,}73 - 4{,}75$

$M = 17{,}98 : 1{,}749 \Rightarrow M = 10{,}28$

Así que, la cantidad de agua consumida es de $10{,}28\ m^3$.

107. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{16}{23}$

b) $\frac{28}{225}$

c) $\frac{33}{5500}$

d) $\frac{1}{12}$ de $120 = 10$

108. Los resultados son los siguientes:

a) 1,74

b) $-1{,}2432$

c) 14,015

d) $-0{,}96$

e) 27,5

f) 723

g) $-6{,}12$

h) -173

i) $-712{,}07$

Página 47

Desarrolla tus competencias

Jornada gastronómica

1. Las respuestas son:

a) Se sabe la cantidad de cada ingrediente que es nece--saria para preparar rollitos para 6 personas. Como se debe preparar 2 rollitos por persona, con las cantidades de ingredientes dadas habrá para 12 rollitos. Por tanto, para un rollito se necesitará:

Ingrediente	6 personas – 12 rollitos	1 rollito
Pan de molde	4 rebanadas	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ de rebanada
Jamón cocido	4 lonchas	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ de loncha
Queso para untar	60 g	$\frac{60}{12}=5$ g
Surimi	4 barritas	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ de barrita

b) Para cada rollito:

Ingrediente	Peso (g)	Precio (€)
Pan de molde	7,5 g	0,013€
Jamón cocido	11,7 g	0,057 €
Queso para untar	5 g	0,0192 €
Surimi	4 g	0,03 €
Total (Cada rollito)	**28,17 g**	**0,1192 €**

2. Hay que elaborar 48 rollitos (para 24 estudiantes) y las cantidades serán:

Ingrediente	Se necesita	Se compra	Sobrará
Pan de molde	16 rebanadas	20 rebanadas	4 rebanadas
Jamón cocido	16 lonchas	20 lonchas	4 lonchas
Queso para untar	240 g	250 g	10 g
Surimi	16 barritas	20 barritas	4 barritas

3. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Ingredients for one person:

– 1 slice of bread

– 15 g of cream cheese

– 1 slice of cooked ham

– 1 strawberry

Preparation:

First, spread the cream cheese on the bread.

Then pick the slice of the cooked ham and put it on top of the cream cheese.

Finally cut the strawberry in two halves and put one of them on top of the cooked ham.

Veamos ahora si cumple las condiciones que pide el enun-ciado:

El pan de molde:

$$\frac{0{,}80€}{20\ rebanadas}=\frac{x}{1\ rebanada}\Rightarrow x=0{,}04€$$

$$\frac{450g}{20\ rebanadas}=\frac{x}{1\ rebanada}\Rightarrow x=22{,}5g$$

Para el queso para untar utilizaremos las mismas medidas que para el primer aperitivo:

$$\frac{60g}{4\ rebanadas}=\frac{x}{1\ rebanada}\Rightarrow x=15g$$

$$\frac{0{,}96€}{250g}=\frac{x}{15g}\Rightarrow x=0{,}0576€$$

El jamón cocido:

$$\frac{175g}{5\ lonchas}=\frac{x}{1\ loncha}\Rightarrow x=35g$$

$$\frac{0{,}85€}{175g}=\frac{x}{35g}\Rightarrow x=0{,}17€$$

De la fresa solo tomaremos la mitad por lo tanto su contribución al peso será de 20g y al precio 0,10€.

Haciendo la suma del precio y del peso obtenemos:

$$Precio\ total=0{,}04+0{,}0576+0{,}17+0{,}10=0{,}3676€$$

$$Peso\ total=22{,}5+15+35+20=92{,}5g$$

Cumplimos pues las condiciones dadas.

4. Las respuestas son:

a) Como para hacer 8 tartaletas, son necesarios 2 yogures, la fracción que representa es:

$$\frac{2}{8}=\text{C)}\ \frac{1}{4}$$

b) Como del ingrediente que menos cantidad hay es mandarina y la fracción que representa en cada tartaleta es $\frac{2}{8}$, se calcula cuántas tartaletas se pueden preparar con 3 mandarinas:

$$\frac{2}{8}=\frac{3}{x}\Rightarrow 2\cdot x=3\cdot 8=24\Rightarrow \textit{Se podrán hacer}$$

Por lo tanto, del resto de ingredientes, se necesitan las siguientes cantidades:

Producto	8 tartaletas	12 tartaletas
Fresas	8	Hay 30, pero se usan **12**
Mandarinas	2	**3**
Kiwi	1	Hay 4, pero se usan **1,5**

c) Se calcula el precio de cada producto y se obtiene que el más económico es A) mandarina.

Producto	8 tartaletas	Precio
Yogur	2	1,04 €
Mandarinas	**2**	**0,40 €**
Fresas	8	1,60 €
Kiwi	1	0,48 €

5. El número de estudiantes para los que se va a preparar las tartaletas es 958.

a) Las cantidades que necesitaremos de cada ingrediente son:

Producto	Cantidad para 958 tartaletas	Precio
Tartaletas	$958\cong 960$	258 €
Yogur	$239{,}5\cong 240$	124,8 €
Mandarinas	$239{,}5\cong 240$	48 €
Fresas	958	191,6 €
Kiwi	$119{,}75\cong 120$	57,6 €
Total		680 €

b) El presupuesto ascenderá a 680 €.

c) El coste de cada tartaleta es de:

$680:958=0{,}71$ €

Por lo tanto, si se quiere obtener un beneficio de 0,50 € por cada tartaleta, el precio al que hay que venderlas es de 1,21 €.

d) La cantidad de fruta que sobraría es:

- Mandarina: Sobra 0,5 mandarinas y la cantidad que se utiliza para cada tartaleta es $\frac{2}{8}=0{,}25$.

- Kiwi: Sobra 0,25 kiwis y la cantidad que se utiliza para cada tartaleta es $\frac{1}{8}=0{,}125$.

Por lo tanto, se podrán hacer 2 tartaletas más.

Página 48

Evaluación de estándares

1. Se trata de buscar una fracción equivalente por amplificación y, otra, por simplificación. Por ejemplo:

– Por amplificación: $\frac{18}{27}=\frac{36}{54}$

– Por simplificación: $\frac{18}{27}=\frac{6}{9}$

2. Para representar todas las fracciones en la misma recta, se igualan los denominadores. Como el m.c.m.(5, 3, 4, 2) = 60:

$$\frac{3}{5}=\frac{36}{60};\ \frac{2}{3}=\frac{40}{60};\ \frac{9}{4}=\frac{135}{60};\ \frac{7}{2}=\frac{210}{60}$$

A continuación, su representación es:

(Ver figura 11 en la página 2-37 de la guía)

Y se obtiene que:

$$\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{9}{4}<\frac{7}{2}$$

3. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{15}+\frac{9}{5}:\frac{3}{4}+\frac{7}{3}=\frac{4}{9}+\frac{12}{5}+\frac{7}{3}=\frac{20+108+105}{45}=$

$=\frac{233}{45}$

b) $-\frac{7}{4}-\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}-\frac{7}{36}-\frac{5}{6}\right)=-\frac{7}{4}-\frac{5}{3}-\left(\frac{42-7-30}{36}\right)=$

$=-\frac{7}{4}-\frac{5}{3}-\frac{5}{36}=\frac{-63-60-5}{36}=-\frac{128}{36}=-\frac{32}{9}$

4. Los resultados son los siguientes:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)}{\frac{5}{8}-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{7}{12}}{\frac{3}{8}}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{3}{8}}=\frac{22}{9}$$

5. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{14\,259}{1000}$

b) $\frac{3521-35}{99}=\frac{3486}{99}=\frac{1162}{33}$

c) $\frac{148\,525-14\,852}{900}=\frac{133\,673}{900}$

6. La clasificación es la siguiente:

	Orden	Truncamiento	Redondeo
16,067 59	**Décimas**	16	16,1
	Centésimas	16,06	16,07
	Milésimas	16,067	16,068

7. Los resultados son los siguientes:

a) $19{,}136\cong 19{,}1$

b) $5{,}267\,86\ldots\cong 5{,}27$

8. Los resultados son los siguientes:

a) $25{,}33\cdot 7{,}4-3{,}67\cdot 9{,}5+6{,}8:2=$

$=187{,}442-34{,}865+3{,}4=155{,}977$

b) $3{,}2 \cdot (7{,}51 + 2{,}98) - 5{,}1 \cdot 2{,}3 = 3{,}2 \cdot 10{,}49 - 5{,}1 \cdot 2{,}3 =$

$= 33{,}568 - 11{,}73 = 21{,}838$

9. Después del primer bote, la altura que alcanza será:

$\frac{5}{8}\ de\ 256 = 160\ m$

Y, después del tercer bote, será:

$\frac{5}{8} de \left[\frac{5}{8}\ de\ \left(\frac{5}{8}\ de\ 256\right)\right] = \frac{5}{8} de \left(\frac{5}{8} de\ 160\right) = \frac{5}{8} de\ 100 =$

$= 62{,}5\ m$

10. a) Para saber la distancia que ha recorrido cada día, se realiza la división:

$3990 : 14 = 285\ km$

b) En primer lugar, se calcula la cantidad de gasolina que gasta en 1 km:

$6{,}5 : 100 = 0{,}065\ l$

Por lo tanto, se obtiene que gasta $0{,}065\ l$ por cada kilómetro que recorre. Como ha realizado 3990 km, la cantidad de litros que ha gastado es de:

$0{,}065 \cdot 3990 = 259{,}35\ l$

Por lo tanto, se obtiene que gasta $0{,}065\ l$ por cada kilómetro que recorre. Como ha realizado 3990 km, la cantidad de litros que ha gastado es de:

$0{,}065 \cdot 3990 = 259{,}35\ l$

Y, como cada litro de gasolina vale 1,18 €, el dinero que ha gastado será:

$1{,}18 \cdot 259{,}35 = 306{,}33$ €

Estrategia e ingenio

Series de fracciones

a) $\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots$

b) $-\frac{1}{81}, \frac{1}{243}, -\frac{1}{729}, \ldots$

c) $\frac{6}{13}, \frac{-7}{15}, \frac{8}{17}, \ldots$

d) $\frac{36}{180}, \frac{18}{90}, \frac{9}{45}, \ldots$

El tesoro

La parte de tesoro que hay bajo la finca de cada uno es:

$Juan: \frac{2}{5}$

$Carlos: \frac{3}{5}$

Como tienen que entregar la mitad del tesoro al Estado, a cada uno le corresponderá:

$Juan: \frac{2}{5} : 2 = \frac{2}{10}$

$Carlos: \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$

Un salto más

En los saltos, irá recorriendo la siguiente distancia:

$20 + 10 + 5 + 2{,}5 + 1{,}25 + \cdots$

Como siempre recorre la mitad de lo que le queda, nunca alcanzará el fruto.

@rrob@

1 arroba = 11 kg 502 g = 11,502 kg

Si el elefante africano pesa 7300 kg, su peso en arrobas será:

$7300 : 11{,}502 \cong 634{,}67$ arrobas

(Viene de la página 2-3 de la guía)

5. Las soluciones son:

a) Periódico mixto
b) Periódico puro
c) Periódico puro
d) Periódico mixto
e) Periódico puro
f) Número irracional
g) Número exacto
h) Periódico puro
i) Número exacto

(Viene de la página 2-7 de la guía)

c) Reduciendo a común denominador sabiendo que m.c.m.(15, 30, 12) = 60, obtenemos las siguientes fracciones equivalentes:

$$\frac{7}{15}=\frac{28}{60};\ \frac{9}{30}=\frac{18}{60};\ \frac{4}{12}=\frac{20}{60}$$

Puesto que:

$$\frac{18}{60}<\frac{20}{60}<\frac{28}{60}$$

Se tiene:

$$\frac{9}{30}<\frac{4}{12}<\frac{7}{15}$$

d) Reduciendo a común denominador sabiendo que m.c.m.(25, 12, 15) = 300, obtenemos las siguientes fracciones equivalentes:

$$\frac{12}{25}=\frac{144}{300};\ \frac{18}{12}=\frac{450}{300};\ \frac{9}{15}=\frac{180}{300}$$

Puesto que:

$$\frac{144}{300}<\frac{180}{300}<\frac{450}{300}$$

Se tiene:

$$\frac{12}{25}<\frac{9}{15}<\frac{18}{12}$$

11. Al igual que para ordenarlas, se iguala los denominadores y se busca un numerador comprendido entre los nuevos numeradores obtenidos:

a) $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{3}=\frac{10}{15}\\ \frac{4}{5}=\frac{12}{15}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2}{3}<\boxed{\frac{11}{15}}<\frac{4}{5}$

b) $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{9}=\frac{10}{45}\\ \frac{4}{15}=\frac{12}{45}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2}{9}<\boxed{\frac{11}{45}}<\frac{4}{15}$

c) Como, en este caso, ya tienen el mismo denominador pero no se puede obtener un numerador comprendido entre los dos que se proponen, se obtienen dos fracciones equivalentes por amplificación para buscar la fracción solicitada:

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{2}{9}=-\frac{4}{18}\\ -\frac{3}{9}=\frac{6}{18}\end{array}\right\}\Rightarrow-\frac{2}{9}<\boxed{-\frac{5}{18}}<-\frac{3}{9}$$

12. Se busca una fracción que cumpla:

$$-\frac{3}{7}<-\frac{74}{x}<-\frac{21}{50}$$

Para ello, se iguala los numeradores (m. c. m. $(3, 74, 21) = 1554$).

$$-\frac{1554}{3626}<-\frac{1554}{21\cdot x}<-\frac{1554}{3700}$$

Se busca un denominador comprendido entre 3626 y 3700 y, a la vez, múltiplo de 21, ya que, es el resultado de la división $1554:74=21$. Los posibles denominadores serían: 3633, 3654, 3675 y 3696. Elegimos, por ejemplo:

$$-\frac{1554}{3626}<-\frac{1554}{3675}<-\frac{1554}{3700}\Rightarrow-\frac{3}{7}<\boxed{-\frac{74}{175}}<-\frac{21}{50}$$

(Viene de la página 2-11 de la guía)

b) $\frac{-3\cdot1}{(2\cdot2)\cdot(2\cdot3)}=-\frac{1}{8}$

c) $\frac{-3\cdot5}{(2\cdot5)\cdot(2\cdot3)}=-\frac{1}{4}$

20. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{3\cdot5}{(2\cdot5)\cdot(2\cdot2\cdot3)}=\frac{1}{8}$

b) $-\frac{3\cdot(2\cdot5)}{5\cdot(3\cdot3)}=-\frac{2}{3}$

c) $\frac{2\cdot3}{(2\cdot2\cdot2)\cdot(3\cdot3)}=\frac{1}{12}$

21. Los resultados son los siguientes:

a) $\frac{3\cdot12}{5\cdot10}\cdot\left(-\frac{7}{18}\right)=\frac{18}{25}\cdot\left(-\frac{7}{18}\right)=-\frac{\cancel{18}\cdot7}{25\cdot\cancel{18}}=-\frac{7}{25}$

b) $-\frac{6\cdot14}{5\cdot12}\cdot\left(-\frac{15}{7}\right)=-\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{15}{7}\right)=\frac{7\cdot15}{5\cdot7}=3$

c) $-\frac{15\cdot4}{8\cdot3}\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)=-\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)=\frac{5\cdot9}{2\cdot10}=\frac{9}{4}$

d) $\frac{30\cdot9}{7\cdot8}\cdot\left(-\frac{27}{15}\right)=\frac{135}{28}\cdot\left(-\frac{27}{15}\right)=-\frac{135\cdot27}{28\cdot15}=-\frac{243}{28}$

e) $\frac{5}{3}:\left(-\frac{4\cdot9}{5\cdot8}\right)=\frac{5}{3}:\left(-\frac{9}{10}\right)=-\frac{5\cdot10}{3\cdot9}=-\frac{50}{27}$

f) $-\frac{4}{9}:\left(-\frac{3\cdot8}{7\cdot9}\right)=-\frac{4}{9}:\left(-\frac{8}{21}\right)=\frac{4\cdot21}{9\cdot8}=\frac{7}{6}$

g) $\left(-\frac{8\cdot4}{9\cdot3}\right):\left(-\frac{64}{81}\right)=-\frac{32}{27}:\left(-\frac{64}{81}\right)=\frac{32\cdot81}{27\cdot64}=\frac{3}{2}$

h) $\left(\frac{6\cdot5}{7\cdot8}\right):\left(-\frac{15}{14}\right)=\frac{15}{28}:\left(-\frac{15}{14}\right)=-\frac{15\cdot14}{28\cdot15}=-\frac{1}{2}$

22 Las fracciones inversas son:

$$\frac{7}{5}\ \Big|\ \frac{15}{4}\ \Big|\ -\frac{11}{7}$$

(Viene de la página 2-15 de la guía)

j) $\frac{14\,018}{1000} = \frac{7009}{500}$

k) $\frac{456}{999} = \frac{152}{333}$

l) $\frac{41\,215 - 412}{9900} = \frac{40\,803}{9900} = \frac{13601}{3300}$

28. Para que no tenga expresión fraccionaria, no puede ser un número racional, por lo tanto elegiremos un número que tenga infinitas cifras decimales pero que no sea periódico. A modo de ejemplo:

$\pi = 3{,}141590 \ldots ; \sqrt{2} = 1{,}414213 \ldots$

29. Buscamos convertir el número 0,25 en la fracción:

$0{,}25 = \frac{n}{12}$

Como sabemos que su fracción generatriz es:

$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

Necesitamos una fracción equivalente a su fracción generatriz pero cuyo denominador sea 12. Es decir:

$0{,}25 = \frac{1}{4} = \frac{n}{12} \Leftrightarrow n = 3$

Así que, la fracción generatriz que buscamos es:

$0{,}25 = \frac{3}{12}$

Página 53

30. La representación es la siguiente:

	Orden de la aproximación	Truncamiento	Redondeo
a) $\mathbf{671,238}$	**Décimas**	671,2	671,2
	Centésimas	671,23	671,24
	Milésimas	671,238	671,238
b) $\mathbf{14,2007}$	**Décimas**	14,2	14,2
	Centésimas	14,20	14,20
	Milésimas	14,200	14,201
c) $\mathbf{4,1892}$	**Décimas**	4,1	4,2
	Centésimas	4,18	4,19
	Milésimas	4,189	4,189
d) $\mathbf{0,8231}$	**Décimas**	0,8	0,8
	Centésimas	0,82	0,82
	Milésimas	0,823	0,823
e) $\mathbf{520,547}$	**Décimas**	520,5	520,5
	Centésimas	520,54	520,55
	Milésimas	520,547	520,547
f) $\mathbf{0,084\,3}$	**Décimas**	0,0 = 0	0,1
	Centésimas	0,08	0,08
	Milésimas	0,084	0,084

31. (*Ver figura 2 en la página 2-34 de la guía)*

(Viene de la página 2-15 de la guía)

Página 55

34. En el cine, Eva ha gastado:

$\frac{3}{5}$ de $7 = 4{,}20$ €

Entonces, le queda: $7 - 4{,}20 = 2{,}80$€

Después, se ha gastado en chucherías:

$\frac{3}{8}$ de $2{,}80 = 1{,}05$ €

Por lo tanto, el dinero que gasta es: $4{,}20 + 1{,}05 =$

$= 5{,}25$ €

Luego el dinero que le queda será: $7 - 5{,}25 = 1{,}75$ €

35. Como le han hecho un descuento del 25%, habrá tenido que pagar el 75% del total. Entonces, la expresión quedaría como:

$$75\% \text{ de } \left(\underbrace{3 \cdot 2{,}35}_{\text{bolígrafos}} + \underbrace{4 \cdot 3{,}15}_{\text{libretas}} + \underbrace{1 \cdot 3{,}17}_{\text{carpetas}}\right) =$$

$$= \frac{75}{100} \cdot (7{,}05 + 12{,}60 + 3{,}17) = \frac{3}{4} \cdot 22{,}82 = 17{,}115$$

Luego habrá pagado 17,12 €.

FIGURA 1

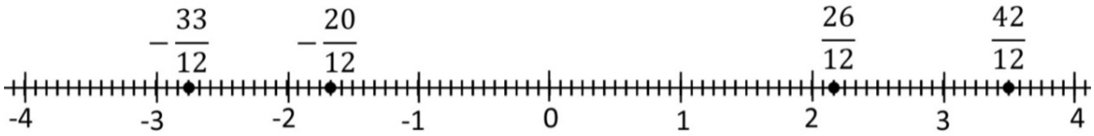


FIGURA 2

	Orden de la aproximación	Truncamiento Aprox.	Truncamiento Error	Redondeo Aprox.	Redondeo Error
a) 671,2381	**Décimas**	671,2	0,038 1	671,2	0,038 1
	Centésimas	671,23	0,008 1	671,24	0,001 9
	Milésimas	671,238	0,000 1	671,238	0,000 1
b) 14,20071	**Décimas**	14,2	0,000 71	14,2	0,000 71
	Centésimas	14,20	0,000 71	14,20	0,000 71
	Milésimas	14,200	0,000 71	14,201	0,000 29
c) 4,1892	**Décimas**	4,1	0,089 2	4,2	0,010 8
	Centésimas	4,18	0,009 2	4,19	0,000 8
	Milésimas	4,189	0,000 2	4,189	0,000 2
d) 0,8231	**Décimas**	0,8	0,023 1	0,8	0,023 1
	Centésimas	0,82	0,003 1	0,82	0,003 1
	Milésimas	0,823	0,000 1	0,823	0,000 1
e) 520,547	**Décimas**	520,5	0,047	520,5	0,047
	Centésimas	520,54	0,007	520,55	0,003
	Milésimas	520,547	0	520,547	0
f) 0,0843	**Décimas**	0,0 = 0	0,084 3	0,1	0,015 7
	Centésimas	0,08	0,004 3	0,08	0,004 3
	Milésimas	0,084	0,000 3	0,084	0,000 3

FIGURA 3

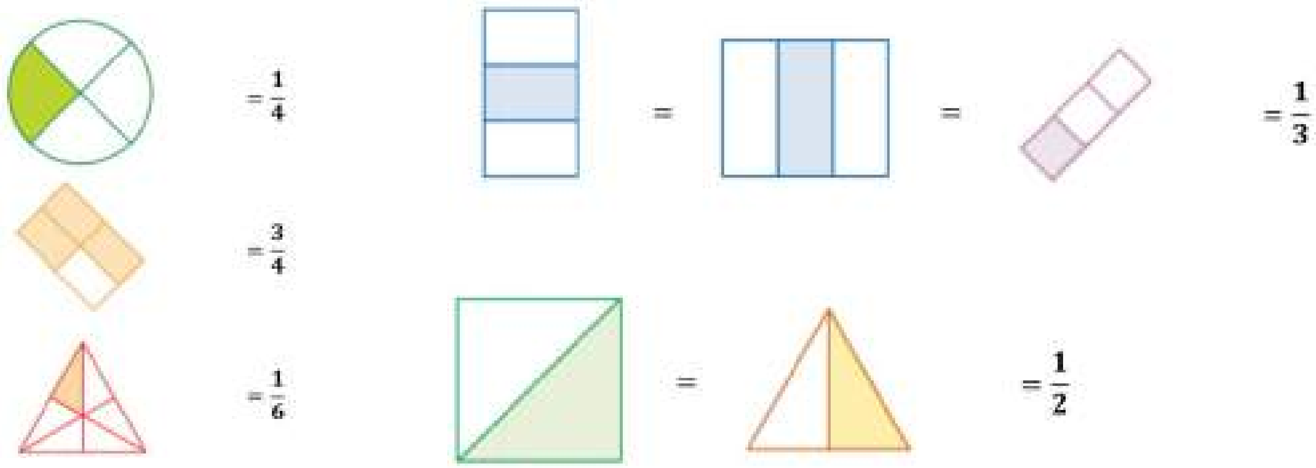


FIGURA 4

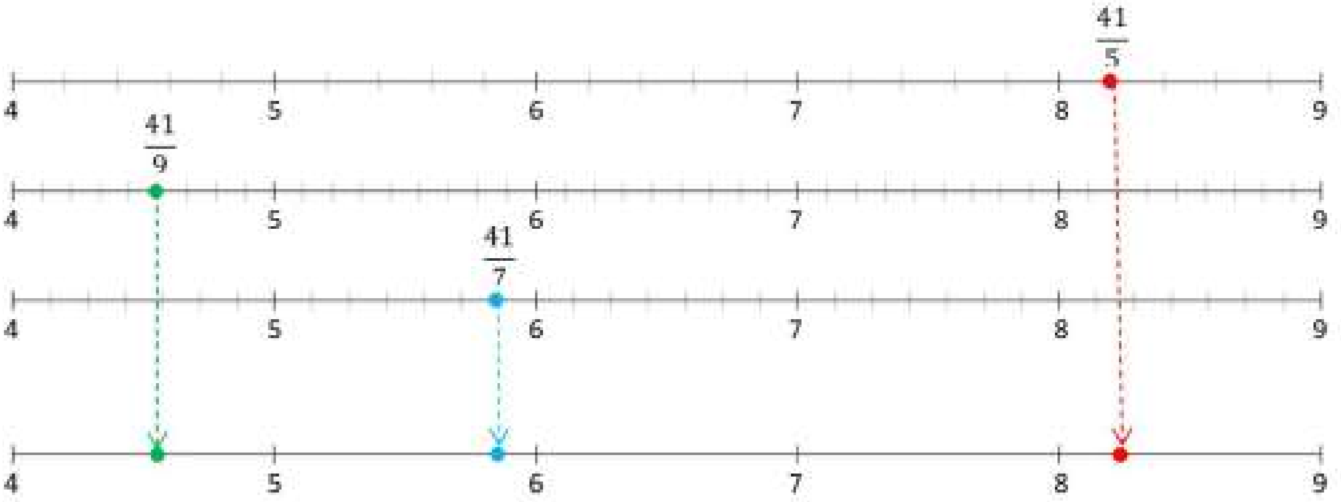


FIGURA 5

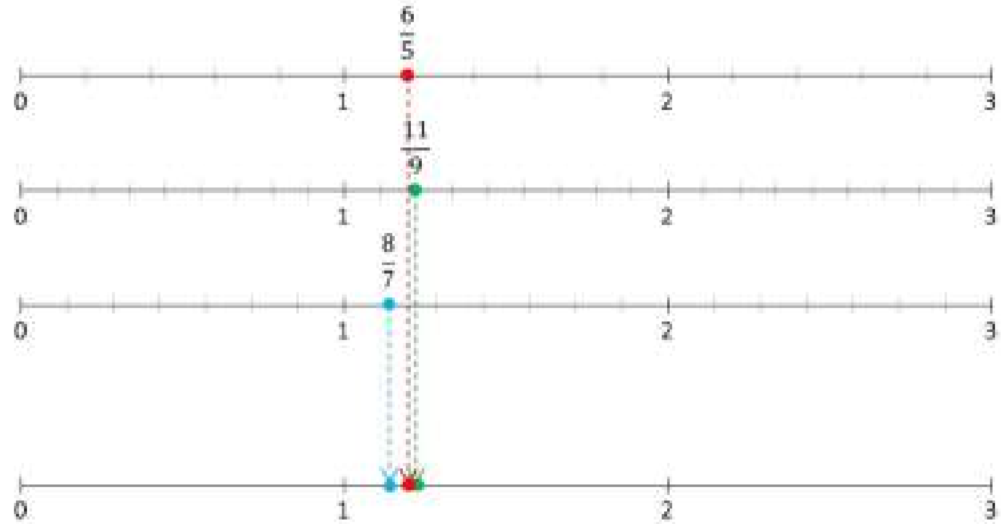


FIGURA 6

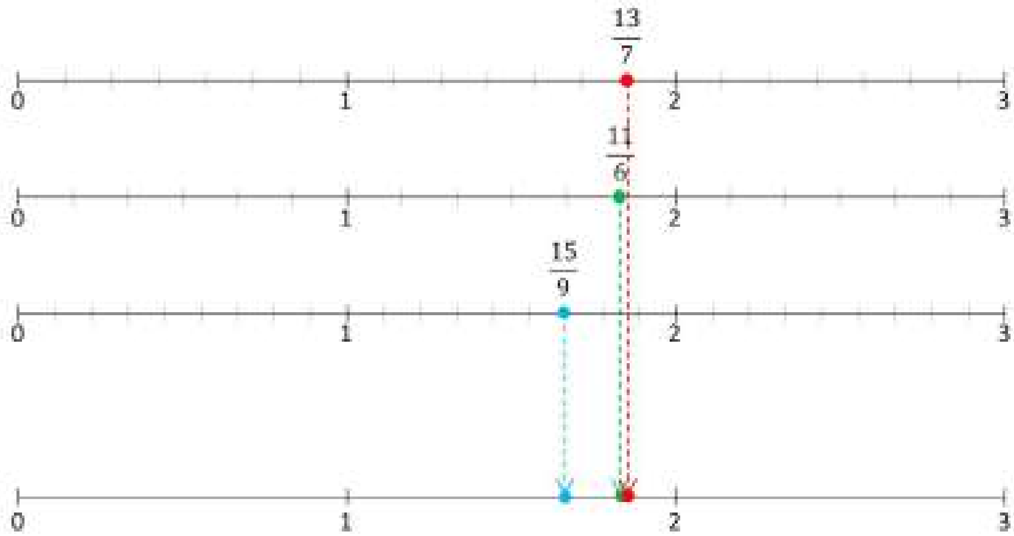


FIGURA 7

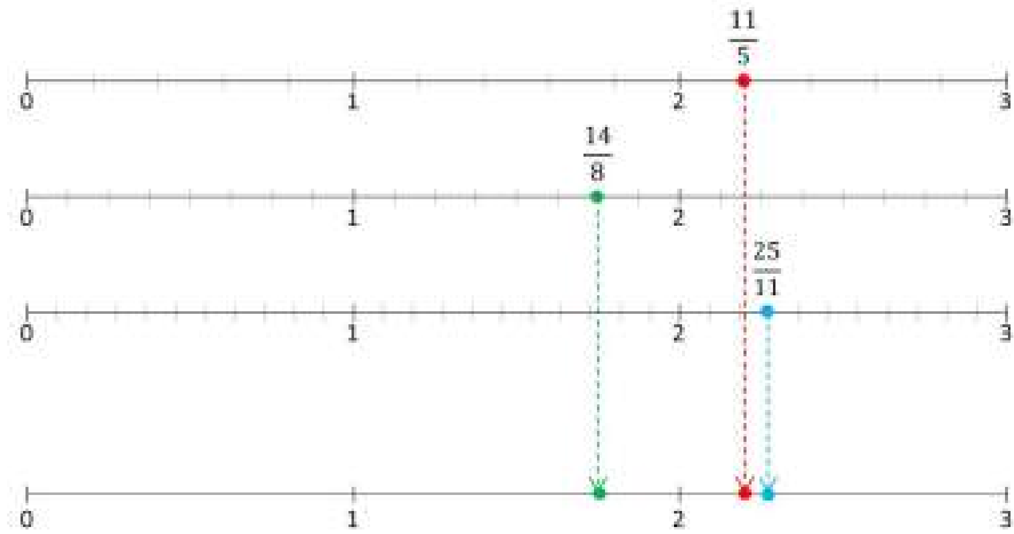


FIGURA 8

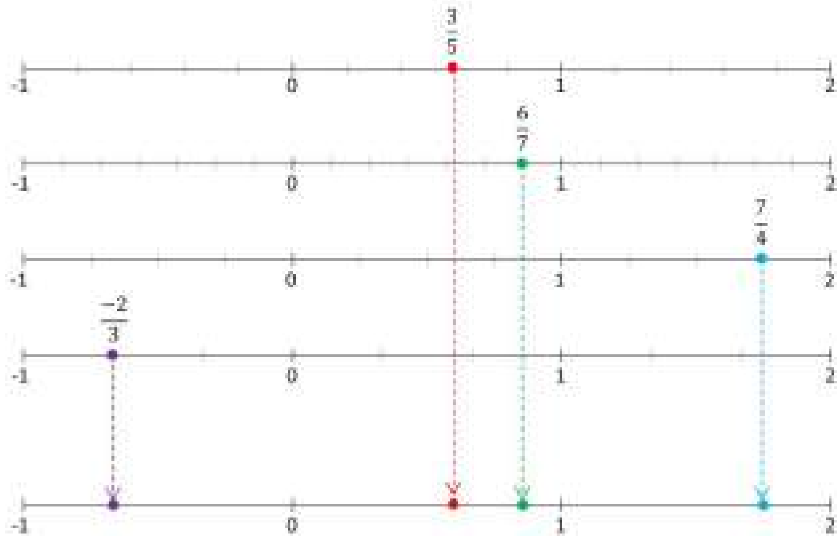


FIGURA 9

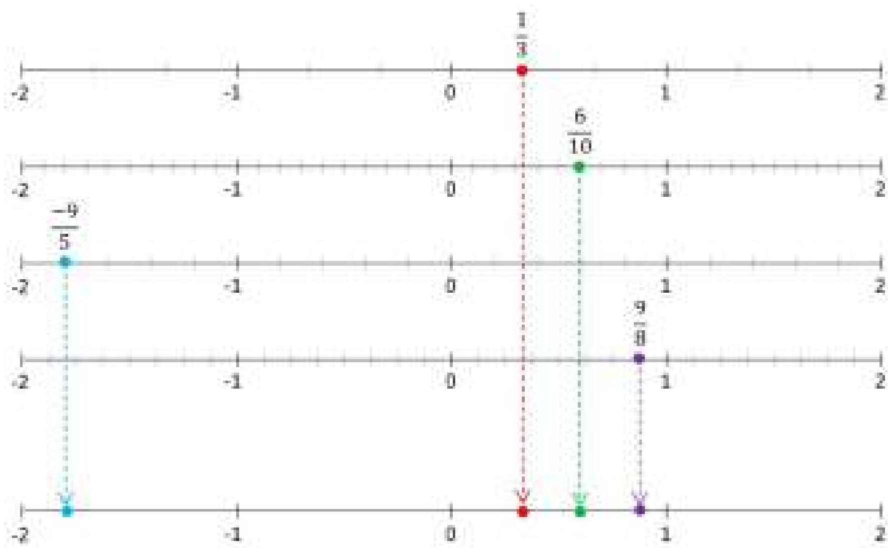


FIGURA 10

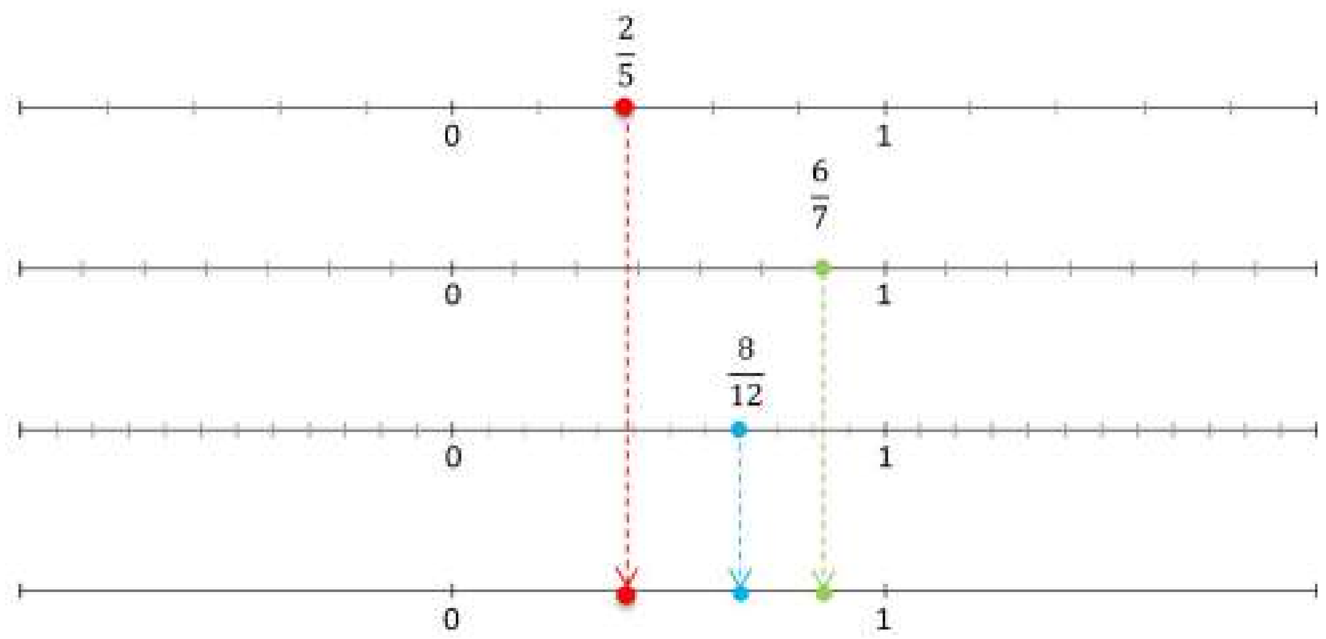
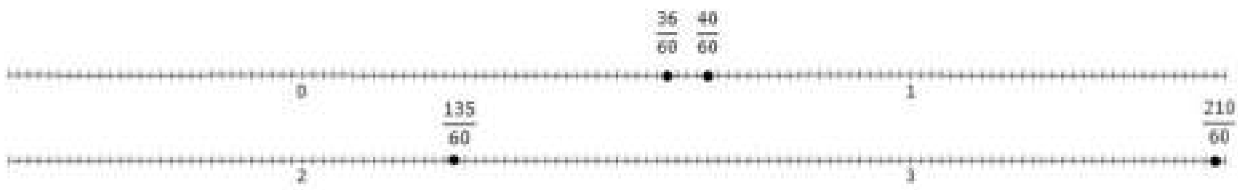
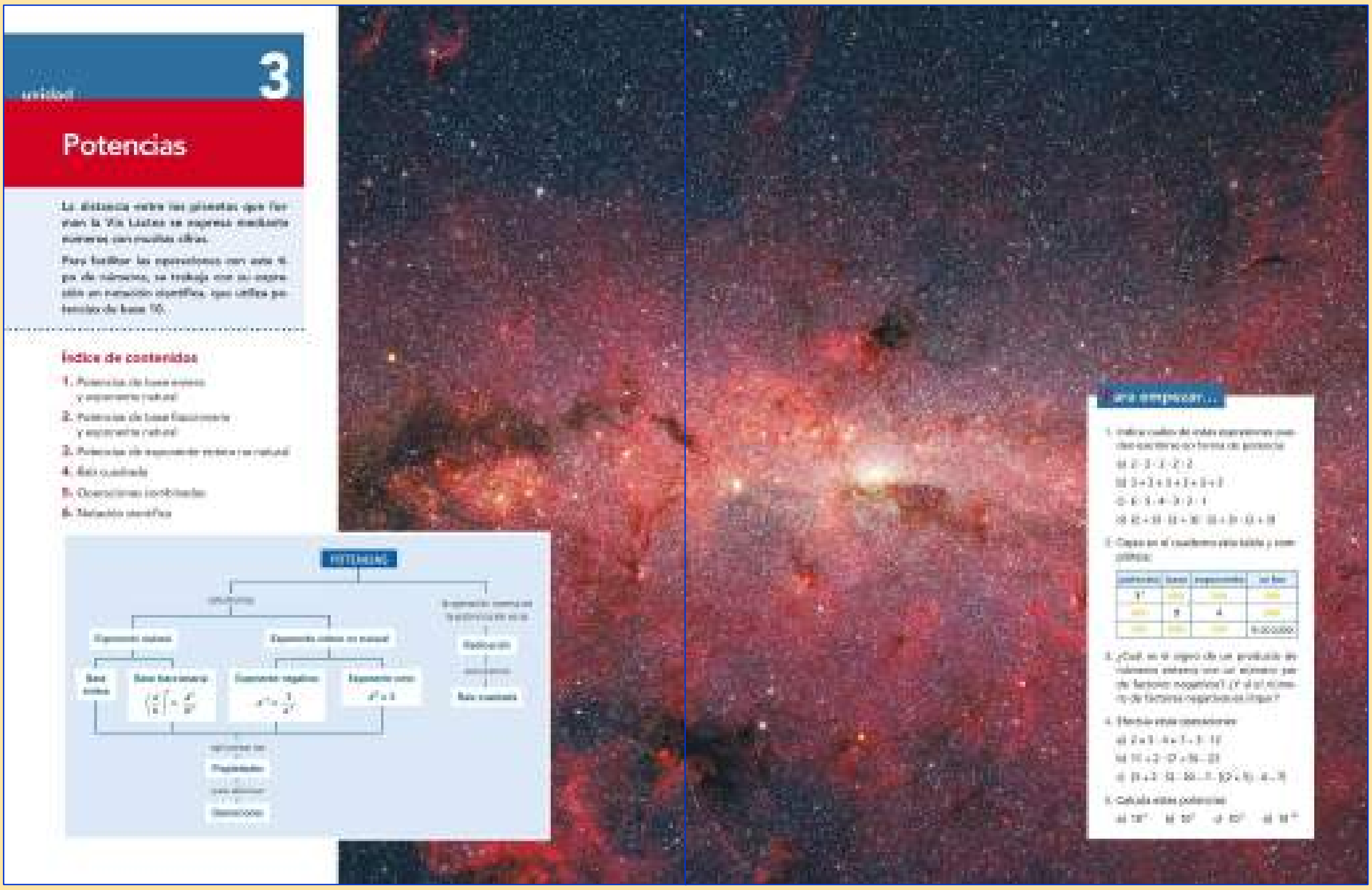


FIGURA 11



DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/735126	http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/fracciones/definic2.htm
http://www.tiching.com/735150	http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/fracciones/equival1.htm
http://www.tiching.com/742944	https://www.youtube.com/watch?v=3R3s9ce3uw4
http://www.tiching.com/742945	https://www.youtube.com/watch?v=hDOxQAkAF9s
http://www.tiching.com/742946	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_fracciones/index_2quincena2.htm
http://www.tiching.com/742947	http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Fracciones_decimales_porcentajes/Fracciones_4.htm
http://www.tiching.com/742948	http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Numeros_Reales_Aproximaciones/numeros8.htm
http://www.tiching.com/742949	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_decimales/index_2quincena3.htm



INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ El objetivo de esta unidad didáctica es el estudio de las potencias y de la raíz cuadrada, así como los procedimientos utilizados al operar con ellas.

Comenzaremos observando la imagen de la portada y atendiendo al texto introductorio al tema.

El docente destacará la importancia de este tipo de potencias a partir de las siguientes cuestiones que comentaremos entre todos:

– *¿Qué significa que una potencia tiene base 10?*
– *¿En qué casos son útiles estas potencias?*
– *¿Sería práctico utilizar las potencias en base 10 para referirnos a la distancia que recorremos? ¿Y para las dimensiones de una casa? ¿Por qué?*

■ A continuación, centraremos nuestra atención en el índice de contenidos y el esquema de la unidad del recuadro azul.

– *Pon un ejemplo de potencia. ¿Cuál es la base y cuál el exponente?*
– *¿Qué operación debemos emplear para calcular una potencia?*
– *¿Se puede expresar una raíz como potencia?*

Empezamos la unidad

■ Antes de entrar en el contenido de la unidad, proponemos una serie de actividades que nos servirán para valorar los conocimientos previos de la materia y enfocar los temas que vamos a tratar a lo largo de este capítulo:

– En la actividad 1 introduciremos el concepto de potencia.
– La actividad 2 trabaja los diferentes elementos de una potencia y su significado.
– La actividad 3 plantea la relación entre el exponente y el signo de una potencia.
– La actividad 4 repasa las reglas de prioridad en las operaciones, ya que más adelante estudiaremos cómo debemos proceder en caso de operar con potencias y raíces.
– En la actividad 5 se introducen las potencias en base 10 o notación científica.

Pediremos ahora a los alumnos que resuelvan las actividades propuestas en *Para empezar...* como introducción al tema que comenzamos.

Finalmente, fomentaremos la colaboración entre compañeros y compañeras realizando estas actividades por parejas.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 1 y 2.* Conocer e utilizar las potencias para expresar un producto de un número por sí mismo.

■ *Act. 3.* Leer e interpretar el enunciado que contiene léxico técnico específico.

■ *Esquema.* Interpretar e integrar información sintetizada en forma de esquema.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1 a 5.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Texto.* Valorar el uso y la necesidad de las potencias para la expresión de números muy extensos y para facilitar las operaciones con los mismos.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para iniciar la unidad sobre las potencias y resaltar aspectos prácticos y aplicables de las mismas, propondremos al alumnado consultar el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/743340

Se trata de un vídeo de aproximadamente 4 minutos, en el que se muestran distintas distancias y medidas en la Tierra y en el Universo.

Pediremos a los alumnos que anoten 4 distancias que se hallen en la Tierra y 6 referentes a los planetas. A continuación, podemos preguntar:

- *¿Sabrías transformar algunas de estas medidas en forma más reducida?*
- *¿Podrías decir una medida de longitud especial para distancias astronómicas?*
- *¿Sabrías abreviar la escritura de esta medida de longitud especial?*
- *¿Qué nombre recibe esta forma de expresar números con tantas cifras?*

Finalmente pediremos que propongan algunas cantidades astronómicas y que en grupo las transformen. Deberán escuchar la propuesta que hagan sus compañeros y debatir entre ellos sobre las ventajas que ofrece esta forma de expresión.

Educamos en valores

Iniciativa personal y estrategias de resolución

■ El desarrollo de estrategias personales eficaces de resolución de problemas también contribuye a valorar las propias capacidades y a sacar partido de su iniciativa personal.

Las matemáticas contribuyen a la aplicación de métodos personales de resolución de problemas que pueden ser de utilidad en otras circunstancias de la vida cotidiana.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de la unidad que contribuyen a conseguir este objetivo:

– En las actividades *Estrategia e ingenio* de la página 72 el alumnado debe diseñar una estrategia de resolución personal que le permita abordar dos problemas que no se resuelven con los métodos estándar estudiados.

– La iniciativa personal se trabaja en aquellas actividades, como la 17 de la página 60, en las que el alumnado debe utilizar sus conocimientos para encontrar la respuesta que cumpla las condiciones requeridas.

Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 51

1. Las soluciones a este ejercicio son:

a) 2^5

d) $(2+3)^4$

2. Las soluciones a este ejercicio son:

Potencia	Base	Exponente	Se lee
3^5	3	5	3 a la quinta
9^4	9	4	9 a la cuarta
6^3	6	3	6 al cubo

3. El signo del producto de un número de factores par es positivo; en cambio, el signo del producto de un número de factores impar es negativo.

4. El resultado de los siguientes apartados es:

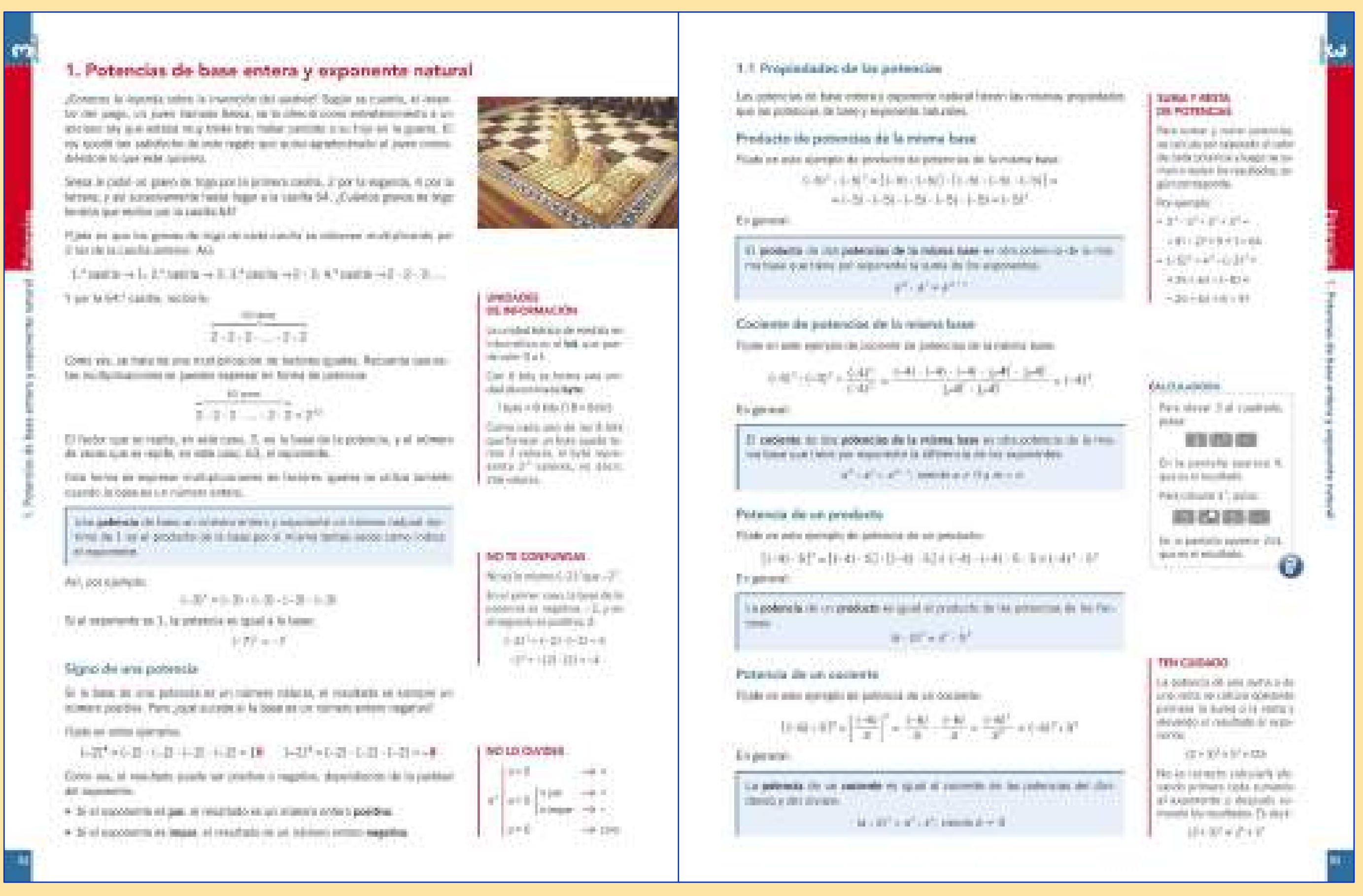
a) $2+5\cdot4+7-3\cdot12=2+20+7-36=-7$

b) $11+2\cdot(7+9)-23=11+2\cdot16-23=20$

c) $(3+2\cdot5)\cdot20-7\cdot[(2+5)\cdot4-7]=$

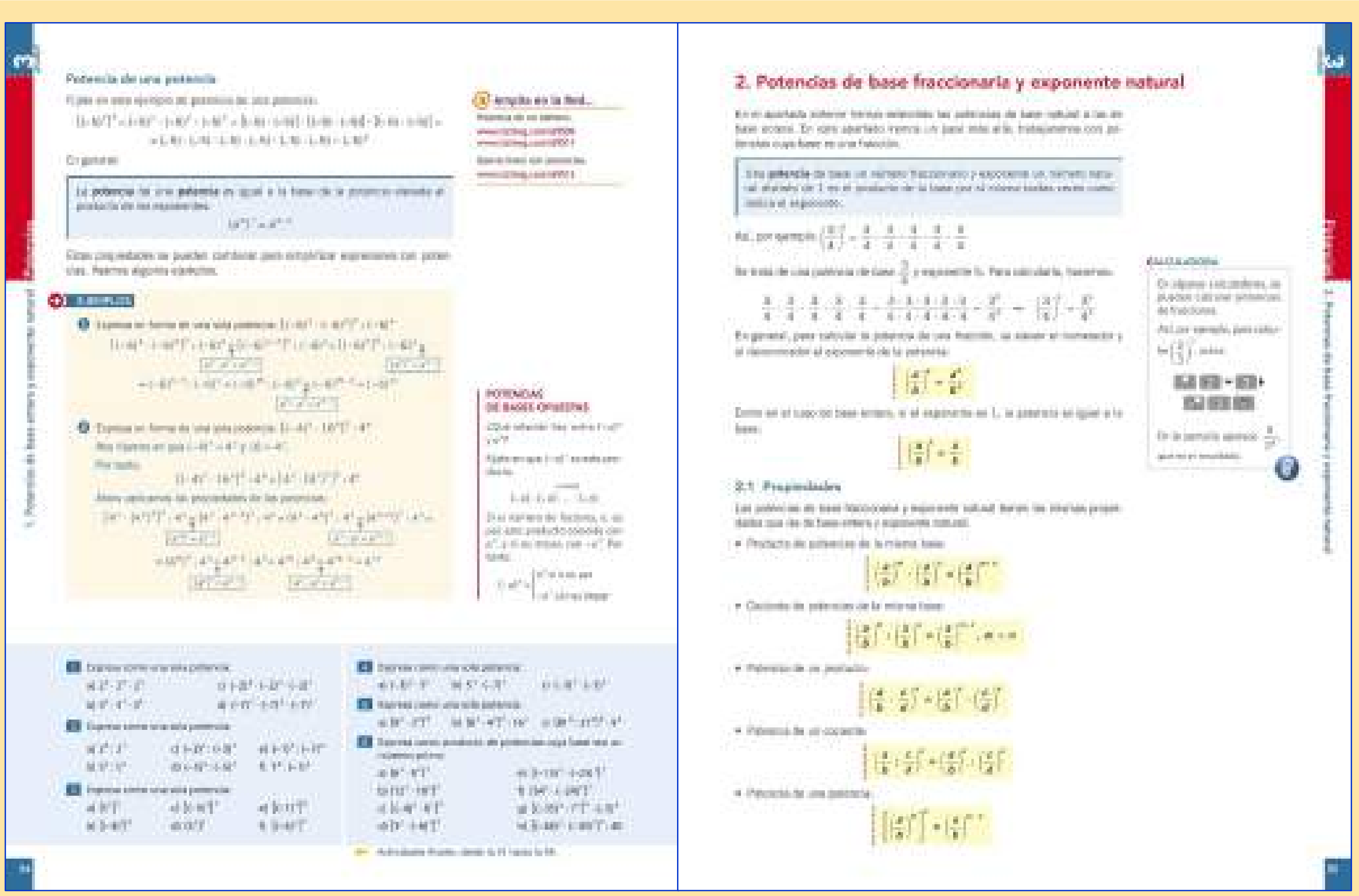
$=13\cdot20-7\cdot(7\cdot4-7)=260-7\cdot21=113$

(Continúa en la página 3-30 de la guía)



1. Potencias de base entera y exponente natural

1.1 Propiedades de las potencias



Potencia de una potencia

2. Potencias de base fraccionaria y exponente natural

■ El objetivo de esta sección es repasar qué representa una potencia y aprender a operar con potencias de base entera y exponente natural.

Empezaremos leyendo la introducción y la definición de potencia en el recuadro coloreado. Podemos formular las siguientes preguntas para valorar el grado de comprensión del alumnado:

– *¿Qué significado tiene la base de una potencia? ¿Y el exponente?*
– *Resuelve estas potencias:* $(-5)^3$ *y* $(-5)^4$.
– *¿Cómo leerías las potencias anteriores?*

Observaremos con los alumnos el apunte del margen *Unidades de información*, enfatizando la aplicación de las potencias a otras disciplinas.

– *¿Qué representa el 2 de la base?*

■ A continuación leeremos el subapartado *Signo de una potencia,* observando los ejemplos. Daremos especial importancia a la nota del margen *No te confundas* y plantearemos las siguientes cuestiones al alumnado:

– *¿Por qué en el primer caso el resultado es positivo?*
– *¿Por qué en el segundo es negativo?*

Para recordar fácilmente las reglas de los signos podemos revisar el esquema *No lo olvides* en el lateral.

El alumnado puede ahora poner en práctica y ampliar estas ideas accediendo a los *Tiching 69509 y 69511.*

Es interesante que también aprendan a manejar la calculadora a la hora de operar con potencias. Para ello se puede seguir la guía *Calculadora* del margen.

1.1 Propiedades de las potencias

■ Aprenderemos cómo resolver las distintas operaciones con potencias, apoyándonos en los diferentes ejemplos.

Un error muy común consiste en aplicar la regla del producto de potencias a expresiones con sumas y restas de potencias de la misma base. Lo veremos preguntando:

– *¿Cuál es el valor de* $(3 + 6)^2$*?*
– *¿Se cumple que* $(a + b)^n = a^n + b^n$*?*
– *¿Por qué se pueden simplificar los (–4) en el caso del cociente de potencias de la misma base?*

Los alumnos pueden responder ahora a la actividad Piensa y contesta que pone a prueba su capacidad para operar con potencias. Pueden trabajar la actividad en grupos para poner estrategias en común y comparar resultados.

Por último pediremos al alumnado que accedan al recurso *69512* de *@Amplía en la Red*, donde asentarán los procedimientos de cálculo con potencias.

(Continúa en la página 3-32 de la guía)

COMPETENCIAS CLAVE

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1 a 3.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos sobre las propiedades de las potencias.

■ *Acts. 4 y 5.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.

■ *Act. 6.* Identificar y manejar las posibles respuestas, tomando decisiones de manera racional.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 1 a 3.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre las potencias.

■ *Acts. 4 a 6.* Afrontar las actividades siendo creativo, flexible y perseverante.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *@Amplía en la Red...* Revisar el concepto de potencia de un número, así como realizar operaciones con potencias utilizando recursos de Internet.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para familiarizarse con las potencias y la manera de simplificar un producto de potencias con la misma base.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Pág. 54

1. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $2^{3+6+5} = 2^{14}$

b) $3^{5+7+4} = 3^{16}$

c) $(-2)^{3+3+1} = (-2)^7$

d) $(-7)^{7+3+5} = (-7)^{15}$

2. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $2^{9-7} = 2^2$

b) $5^{7-4} = 5^3$

c) $(-3)^{4-3} = (-3)^1 = -3$

d) $(-5)^{4-2} = (-5)^2 = 5^2$

e) $(-7)^{5-3} = (-7)^2 = 7^2$

f) $7^4 : (-7)^2 = 7^4 : (-1)^2 \cdot 7^2 = 7^4 : 7^2 = 7^2$

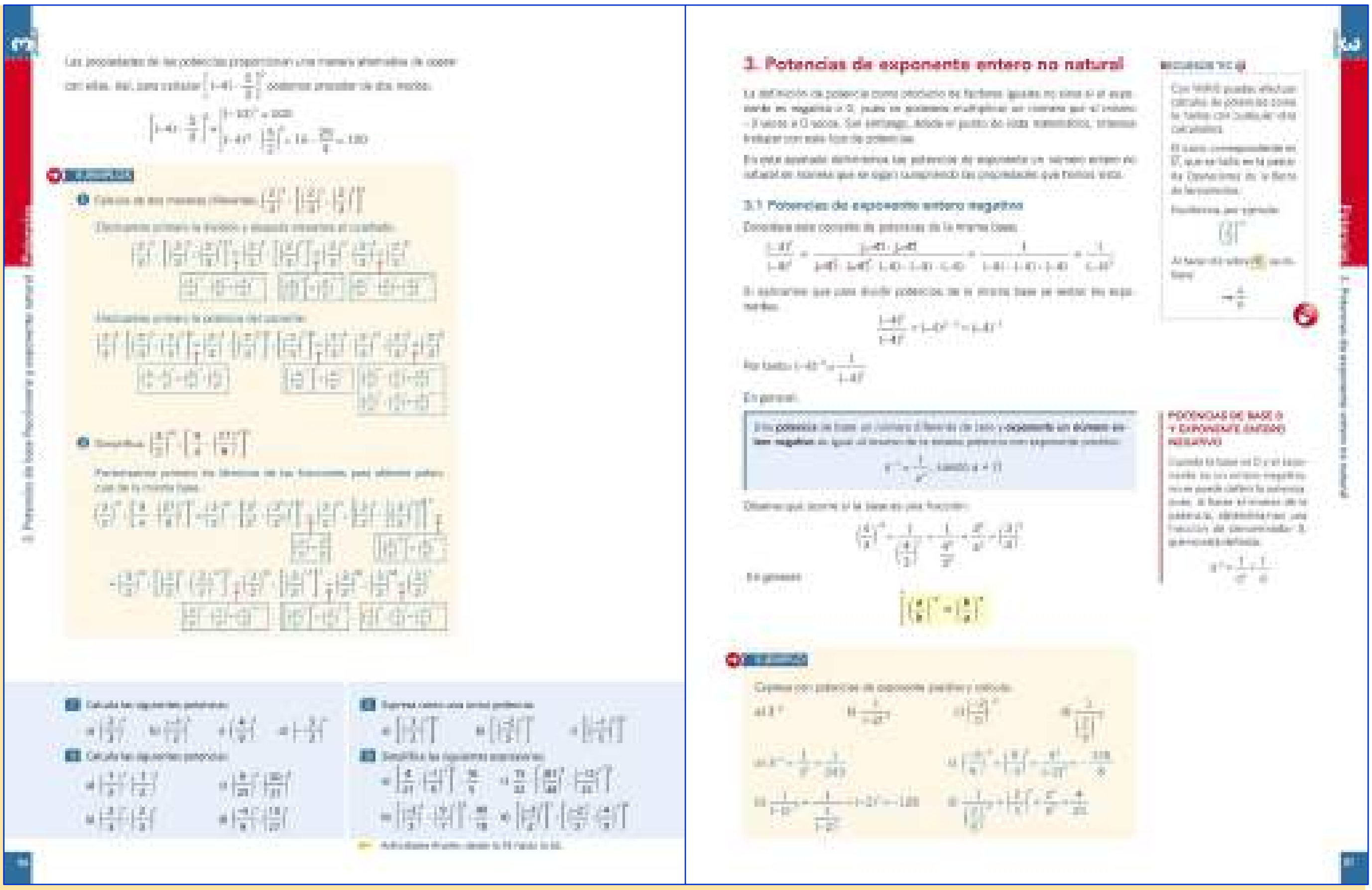
3. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $3^{7 \cdot 5} = 3^{35}$

b) $(-4)^{5 \cdot 4} = (-4)^{20} = 4^{20}$

c) $(-5)^{3 \cdot 7} = (-5)^{21}$

(Continúa en la página 3-30 de la guía)



2. POTENCIAS... (CONT.) / 3. POTENCIAS DE...

■ Terminamos la exposición de las propiedades con la nota *Ten en cuenta* sobre la suma y resta.

A continuación llevaremos a la práctica las propiedades enunciadas anteriormente.

Leeremos el primer párrafo, que nos descubrirá mediante un ejemplo dos maneras de enfocar las operaciones con potencias.

– *¿Qué operación se ha realizado en primer lugar en cada enfoque?*
– *¿Se podrían aplicar ambos métodos si el interior del corchete fuera una suma en lugar de un producto?*

■ Analizaremos ahora los dos ejemplos siguientes, que desarrollan paso a paso cómo operar y simplificar potencias de fracciones.

– *En el ejemplo 1, ¿podemos empezar operando el producto? ¿Por qué?*
– *En el ejemplo 2, ¿qué paso podíamos haber operado de manera diferente?*

El docente destacará la importancia de buscar siempre potencias de la misma base para poder simplificar.

■ Por último, los alumnos se enfrentarán al cálculo con potencias mediante la realización de las actividades 8 a 10 del libro.

3.1 Potencias de exponente negativo

■ El objetivo del apartado 3 es justificar la necesidad de las pontencias de exponente negativo y presentar los métodos para operar con ellas.

■ Para empezar, observaremos el ejemplo del cociente de potencias de la misma base y comprobaremos que se cumple lo enunciado en el recuadro coloreado.

– *¿A qué equivale una potencia de exponente negativo?*
– *¿Qué ocurre si la base de una potencia es cero?*

Para responder a la última cuestión recurriremos a la nota incluída al margen, *Potencias de base 0…*, donde aclararemos este caso particular.

A continuación observaremos con otro ejemplo que en el caso de potencias de fracciones se opera de manera similar.

Terminaremos la exposición de este subapartado con la realización de varios ejemplos, a fin de valorar el nivel de comprensión por parte de los alumnos.

– *¿Por qué en el apartado b el resultado es negativo?*
– *¿Por qué no restamos los exponentes en el c)?*

Para finalizar, los alumnos leerán cómo trabajar con la calculadora online WIRIS, indicado en el margen.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

- *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de la calculadora WIRIS, con la que se pueden efectuar cálculos de potencias, usando el icono correspondiente.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 7.* Aplicar el proceso aprendido para el cálculo de potencias de base fraccionaria.
- *Act. 8.* Aplicar el proceso aprendido para el cálculo del producto de potencias de base fraccionaria con la misma base y diferente exponente.
- *Act. 9.* Aplicar el proceso aprendido para el cálculo de potencias de potencias de base fraccionaria.
- *Act. 10.* Aplicar el proceso aprendido para la simplificación de potencias de base fraccionaria.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 permitirá consolidar el cálculo con potencias de base fraccionaria.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de practicar las operaciones con potencias, proponemos entrar el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/743343

Esta web es un recurso del tipo Descartes. En ella, los alumnos y alumnas podrán repasar con una breve explicación los principales conceptos y propiedades de las potencias. También podrán ir descubriendo de forma intuitiva las escenas y verán los resultados.

Seguidamente, en otra página podrán realizar unas actividades con las que comprobar por sí mismos el afianzamiento de estos contenidos.

Finalmente, pediremos que respondan a las siguientes preguntas:

- *¿Por qué un número elevado a 0 es igual a 1?*
- *¿Qué ocurre cuando queremos calcular 0 elevado a 0?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 56

7. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} = 0{,}1975$

b) $\frac{(-1)^5}{2^5} = \frac{(-1)}{32} = -0{,}0312$

c) $\frac{4^2}{9^2} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} = 0{,}1975$

d) $\left(-\frac{3^4}{2^4}\right) = \frac{81}{16} = 5{,}0625$

8. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\frac{1^5}{2^5} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27} = 0{,}29629$

c) $\left(\frac{6\cdot 50}{25\cdot 27}\right)^4 = \left(\frac{2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 2}{5^2\cdot 3^3}\right)^4 = \left(\frac{2^2}{3^2}\right)^4 =$

$= \frac{2^8}{3^8} = \frac{256}{6561} = 0{,}03901$

d) $\left(\frac{(-5)\cdot 27}{9\cdot 10}\right)^3 = \left(\frac{(-5)\cdot 3^3}{3^2\cdot 2\cdot 5}\right)^3 = \frac{(-5)^3\cdot 3^9}{5^3\cdot 2^3\cdot 3^6}$

$= \frac{(-1)\cdot(3)^3}{2^3} = \frac{-27}{8} = -3{,}375$

9. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^6$

b) $\left(\frac{-2}{5}\right)^9$

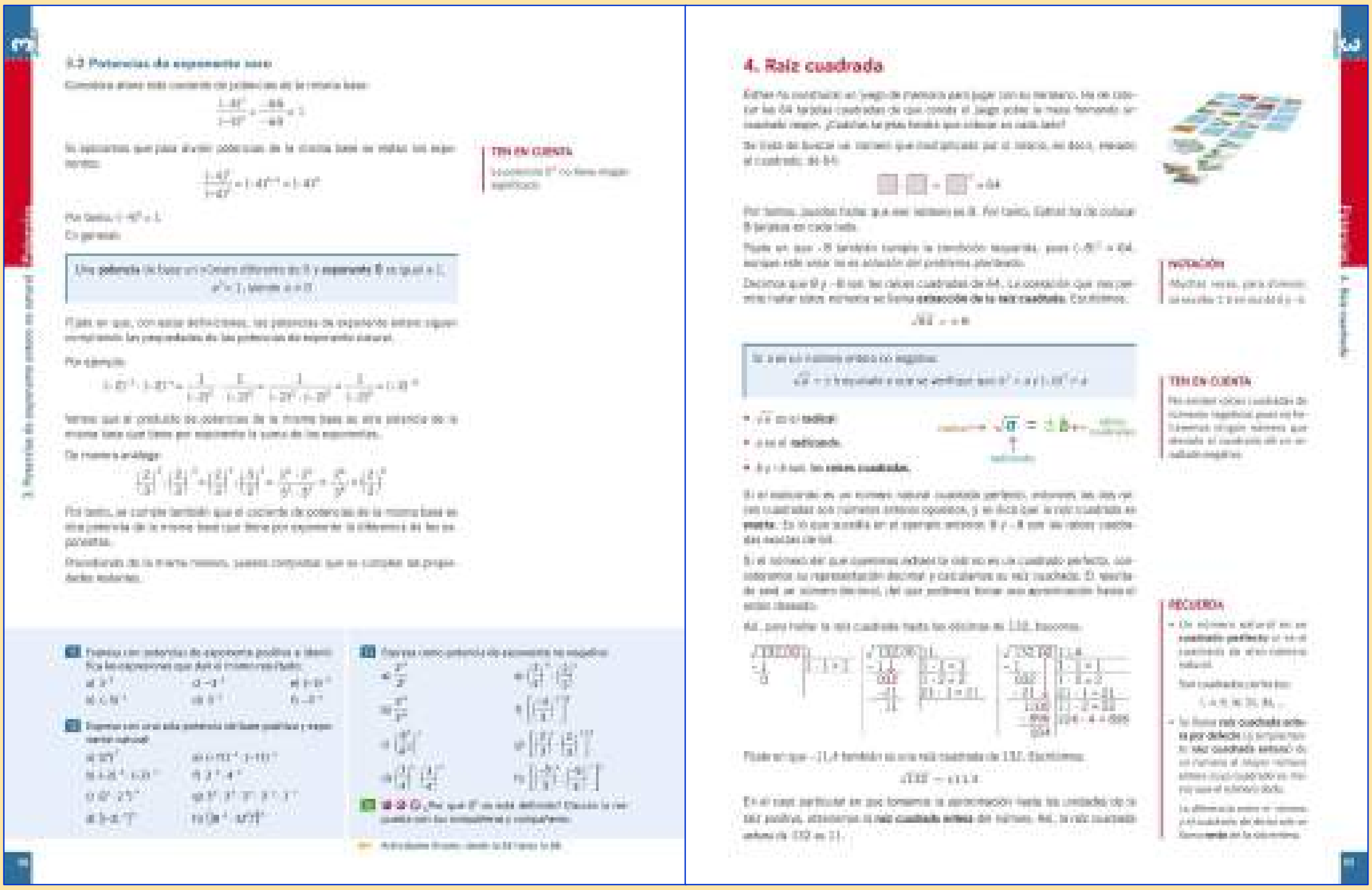
c) $\left(\frac{-1}{5}\right)^6 = \left(\frac{1}{5}\right)^6$

10. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\left(\frac{2^2}{3^3} : \frac{(-1)}{3^6}\right)^2 : \frac{2^4}{5} = [(-1)\cdot 2^2\cdot 3^{6-3}]^2 : \frac{2^4}{5} =$

$= 2^4\cdot 3^6 : \frac{2^4}{5} = 3^6\cdot 5$

(Continúa en la página 3-30 de la guía)


4. Raíz cuadrada

3. POTENCIAS… (CONT.) / 4. RAÍZ CUADRADA

3.2. Potencias de exponente cero

■ Leeremos el recuadro coloreado y comprobaremos fácilmente con los ejemplos que se cumple lo enunciado. Proponemos lanzar las preguntas:

– *¿Qué resulta al elevar un número negativo a cero?*

– *¿Se cumple esa regla para cualquier número?*

A continuación, leeremos los párrafos restantes del subapartado, observando los ejemplos aclaratorios.

Los alumnos pueden practicar su destreza operando con potencias a traves de las actividades 11 a 13.

Después leeremos *Ten en cuenta*, debatiremos entre todos su significado y resolveremos la actividad 14.

4. Raíz cuadrada

■ El objetivo básico de la siguiente sección consiste en introducir el concepto de raíz cuadrada, sus elementos y el procedimiento de cálculo.

Para empezar, los alumnos leerán la introducción donde entenderán la relación entre la radicación y la potenciación. Para comprobar lo aprendido, podemos preguntar:

– *¿Cuántas soluciones tiene una raíz cuadrada?*

A continuación leerán la definición, los elementos y la *Notación* al margen. Preguntaremos:

– *¿Cuál es el radicando en la expresión $\sqrt{8}$?*

– *¿Qué es el radical?*

■ Veremos ahora en el apunte referido como *Ten en cuenta* y plantearemos estas cuestiones a los alumnos:

– *¿Puede ser negativo el resultado de una raíz cuadrada? Pon un ejemplo.*

– *¿Cuál es el resultado de la raíz cuadrada de un número negativo?*

Leeremos a continuación el párrafo siguiente y el epígrafe *Recuerda* de su derecha:

– *¿Qué caracteriza a las raíces cuadradas exactas?*

– *Pon otro ejemplo de cuadrado perfecto.*

El siguiente párrafo aprenderemos a calcular la raíz cuadrada. Seguiremos el ejemplo paso a paso y formularemos estas preguntas a los alumnos:

– *¿Cómo deben separarse las cifras del radicando?*

– *¿Por qué restamos –21?*

■ Por último, leeremos el texto y la nota *Recuerda*, diferenciando los conceptos de raíz entera y resto:

– *¿Cuál es la raíz entera de 20? ¿Y el resto?*

Para afianzar estos conceptos, es muy recomendable acceder a los recursos *Tiching 69513* y *69514* de la página 60.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 14.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios y de generar ideas e hipótesis a partir de la información dada.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 11 a 13.* Reconocer y asimilar los conceptos y las propiedades de las operaciones con potencias y ser capaz de simplificarla y expresarlas con exponente natural.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 11 a 13.* Identificar, en la realización de las actividades, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Act. 14.* Ser capaz de defender las respuestas, mostrando criterio propio ante el grupo.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos entrar en este enlace, para reforzar los automatismos del cálculo de potencias con exponente cero y raíces cuadradas:

http://www.tiching.com/743344

En este recurso accedemos a un portal con actividades resueltas que también pueden ser descargadas en formato PDF.

Se trata de actividades interactivas en las cuales los alumnos podrán pulsar sobre ellas y obterner las soluciones. También se ven cada uno de los mecanismos utilizados para realizar estas operaciones matemáticas.

Este material autoevaluable es interesante porque permite el trabajo autónomo por parte del alumnado, además de ser un buen método de asimilación de nuevos conceptos.

Finalmente, podemos proponer estas preguntas:

- *¿Podrías explicar por qué no existen raíces cuadradas de número negativo?*
- *¿A qué llamamos raíz cuadrada entera por defecto?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 58

11. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\dfrac{1}{3^2}$

b) $\dfrac{1}{(-3)^2}=\dfrac{1}{3^2}$

c) $\dfrac{1}{-3^2}$

d) $\dfrac{1}{3^3}$

e) $\dfrac{1}{(-3)^3}=\dfrac{1}{-3^3}$

f) $\dfrac{1}{-3^3}$

Las expresiones iguales son la a y la b, y la e y la f respectivamente.

12. Las solución a este ejercicio son:

a) $\dfrac{1}{2^6}$

b) $\dfrac{1}{(-2)^4\cdot(-2)^3}=\dfrac{1}{(-2)^7}=\dfrac{-1}{2^7}$

c) $\left(\dfrac{2^3}{2^4}\right)^{-2}=\left(\dfrac{2^4}{2^3}\right)^2=2^2$

d) $\left(\dfrac{1}{(-2)^3}\right)^4=\dfrac{1}{2^{12}}$

e) $\dfrac{1}{(-11)^2\cdot(-11)^7}=\dfrac{1}{(-11)^9}=\dfrac{-1}{11^9}$

f) $\dfrac{1}{2^4\cdot 2^4}=\dfrac{1}{2^8}$

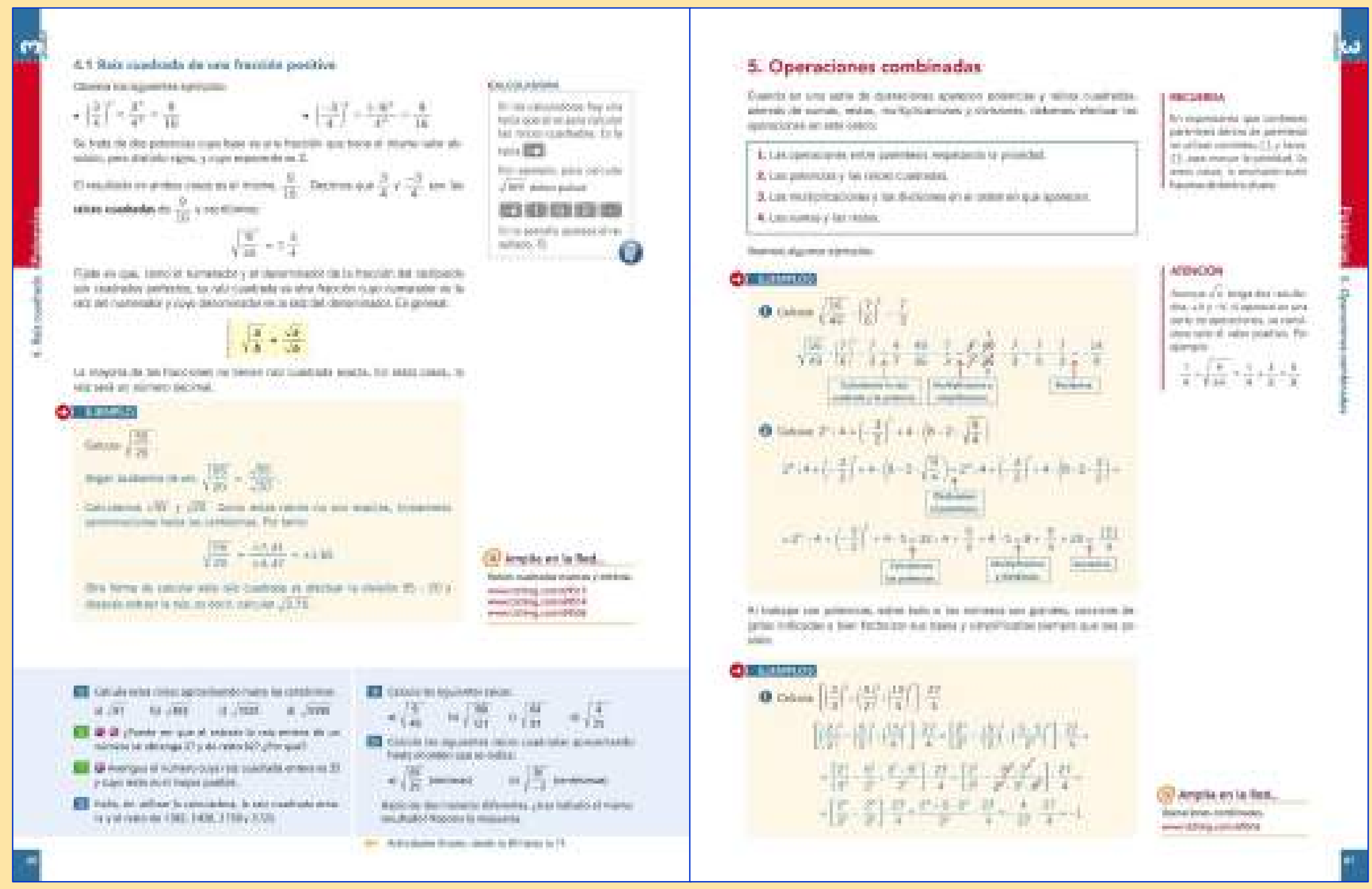
g) $\dfrac{3^4}{3^2\cdot 3^7}=\dfrac{3^4}{3^9}=\dfrac{1}{3^5}$

h) $\left(\dfrac{2^{10}}{2^{10}\cdot 3^5}\right)^{-20}=(3^5)^{20}=3^{100}$

13. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\dfrac{1}{2^3\cdot 2^3}=\dfrac{1}{2^6}$

(Continúa en la página 3-30 de la guía)



4. RAÍZ… (CONT.) / 5. OPERACIONES…

4.1 Raíz cuadrada de una fracción positiva

■ Empezaremos leyendo el subapartado y analizando las transformaciones realizadas en las expresiones con fracciones:

- *¿Qué regla hemos aplicado en los dos primeros cálculos?*
- *¿Por qué utilizamos el signo ± al expresar el resultado de la raíz cuadrada?*
- *¿Cómo resolvemos la raíz de una fracción si el numerador y el denominador son cuadrados perfectos?*

A continuación trabajaremos el ejemplo, para comprobar cómo procedemos cuando las raíces del numerador y del denominador no son exactas.

- *¿De qué dos maneras podemos resolver estas raíces?*

■ Los alumnos practicarán los métodos estudiados consultando el recurso *69536* indicado en *@Amplía en la Red.*

Después contestarán a las actividades 15 a 20 del libro, que servirán de repaso tanto de las raíces cuadradas de enteros no negativos como de fracciones.

Por último, leeremos la pista señalada en el margen para trabajar las raíces con la *Calculadora*.

5 Operaciones combinadas

■ El objetivo de la siguiente sección consiste en aprender a operar expresiones algebraicas que contienen distintas operaciones, incorporando raíces y potencias.

En primer lugar, leeremos las reglas de prioridad de las operaciones y la nota *Recuerda* Asentaremos estas reglas planteando al alumnado las siguientes cuestiones:

- *¿Qué se opera antes, una resta o una potencia?*
- *¿Qué tiene prioridad, una suma o un producto?*
- *¿Qué operamos antes, una potencia o una ráiz?*

A continuación, analizaremos los dos ejemplos propuestos, comprobando el orden en que ejecutamos las operaciones pregutando:

- *¿Qué operaciones se realizan en último lugar?*

Nos fijaremos en el apunte *Atención* del margen, que nos indica cómo actuar con el doble resultado de una raíz.

Continuaremos leyendo el texto y el último ejemplo,. Lanzaremos esta pregunta al alumnado:

- *¿En qué se diferenciaría si no hubiéramos simplificado?*

Los alumnos pueden poner en práctica estos métodos accediendo al recurso *Tiching* indicado.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 16 y 20.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios así como trabajar la búsqueda, recopilación y procesamiento de información.

APRENDER A APRENDER

■ *Act.16.* Identificar y manejar las posibles respuestas, tomando decisiones en base a lo aprendido.

■ *Acts. 15, 18 y 19.* Aplicar el proceso aprendido para operar con raíces, de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 17.* Reflexionar antes de resolver las actividades y tomar decisiones de forma razonada, aplicando las estrategias aprendidas de manera sistemática.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 4 servirá para revisar las raíces cuadradas y las operaciones sencillas que las contienen.

✓ La actividad de ampliación 2 resultará útil para comprobar si el alumnado es capaz de realizar operaciones combinadas con raíces cuadradas y potencias de manera eficaz.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para trabajar en clase el orden en las operaciones combinadas con potencias, raíces, y paréntesis, podemos acceder al siguiente enlace:

http://www.tiching.com/743345

Se trata de un vídeo de poco más de dieciocho minutos en el que los alumnos y alumnas podrán visualizar la mecánica de resoluciones complejas.

Es importante que tengan en cuenta y automaticen la jerarquía de las operaciones.

Como docentes, les pediremos que resuelvan también la actividad propuesta. Podremos detener el vídeo y preguntarles cuál sería el paso siguiente, y seguidamente, comprobarlo en la pantalla.

A continuación, les preguntaremos a nuestro alumnado:

- *¿Qué se utiliza en las expresiones que contienen paréntesis dentro de paréntesis?*
- *¿Qué utilidad tienen?*
- *En estos casos, ¿cómo se realiza la resolución?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 60

15. Las soluciones a este ejercicio son:

a)

$\sqrt{91{,}0000}$	9,53
-81	$9 \cdot 9 = 81$
1000	$9 \cdot 2 = 18$
-925	$185 \cdot 5 = 925$
7500	$95 \cdot 2 = 190$
-5709	$1903 \cdot 3 = 5709$
1791	

b)

$\sqrt{453{,}0000}$	21,28
-4	$2 \cdot 2 = 4$
053	$2 \cdot 2 = 4$
-41	$41 \cdot 1 = 41$
1200	$21 \cdot 2 = 42$
-844	$422 \cdot 2 = 844$
35600	$212 \cdot 2 = 424$
-33984	$4248 \cdot 8 = 33984$
1616	

c)

$\sqrt{1025{,}00}$	32,01
-9	$3 \cdot 3 = 9$
125	$3 \cdot 2 = 6$
- 124	$62 \cdot 2 = 124$
1000	$32 \cdot 2 = 64$
-641	$641 \cdot 1 = 641$
359	

d)

$\sqrt{5590{,}0000}$	74,76
-49	$7 \cdot 7 = 49$
690	$7 \cdot 2 = 14$
-576	$144 \cdot 4 = 576$
11400	$74 \cdot 2 = 148$
-10409	$1487 \cdot 7 = 10409$
99100	$747 \cdot 2 = 1494$
-89676	$14946 \cdot 6 = 89676$
9424	

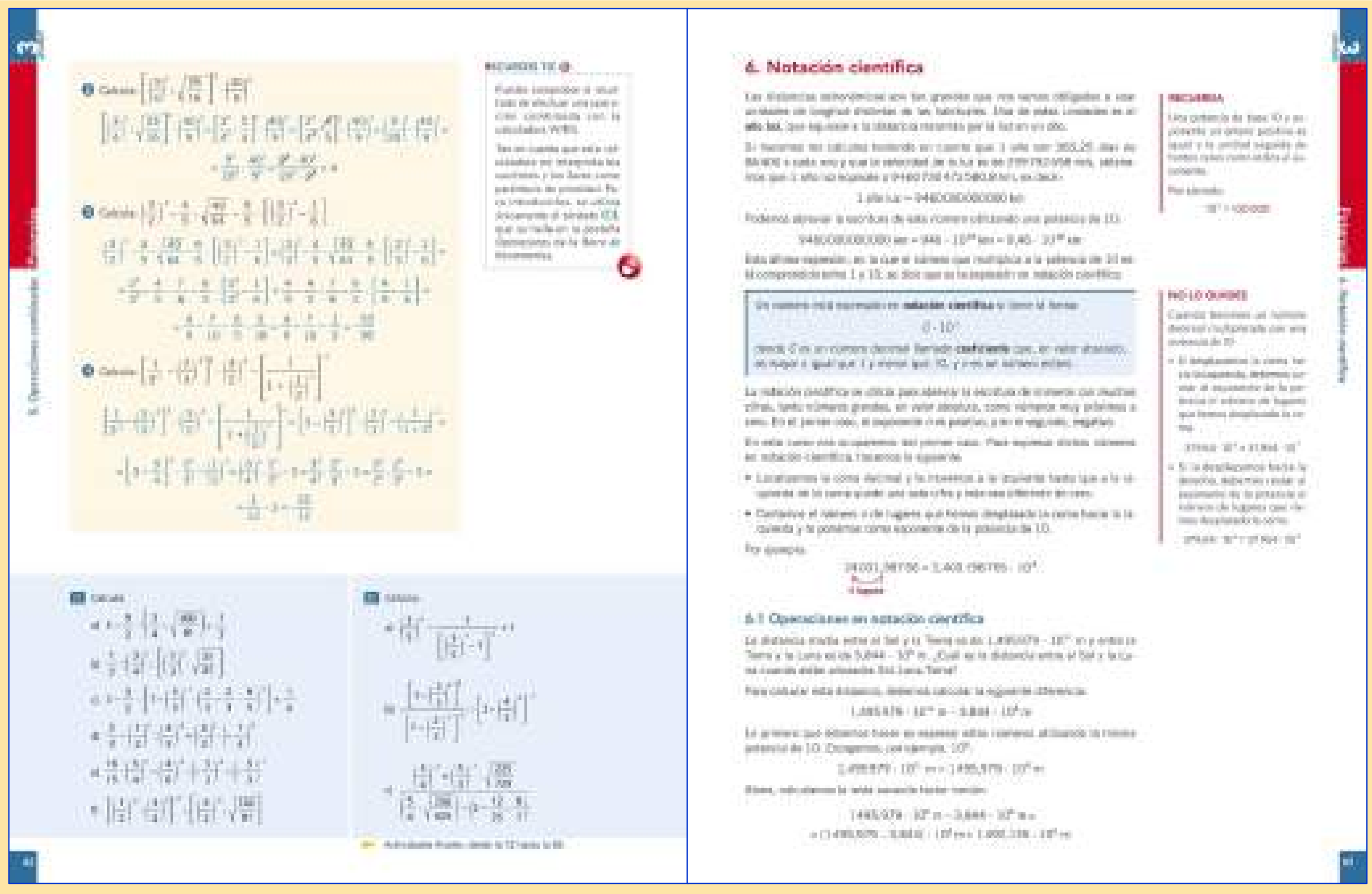
16. El resto de la raíz debe cumplir que la siguiente condición:

resto < (2 · raíx entera) + 1

En nuestro caso, no se cumple esta condición, ya que:

$62 > 27 \cdot 2 + 1 = 55$

(Continúa en la página 3-30 de la guía)



5. OPERACIONES... (CONT.) / 6. NOTACIÓN...

■ Continuamos resolviendo tres ejemplos más sobre operaciones combinadas. Analizaremos el modo de proceder en cada caso y plantearemos estas cuestiones al alumnado para comprobar el grado de comprensión:

- *¿Cómo hemos operado en el último paso del ejemplo 2?*
- *En el ejemplo 3, ¿podríamos haber resuelto en primer lugar el corchete?*
- *¿Cómo operábamos las potencias de fracciones de exponente negativo?*

Después, los alumnos resolverán las actividades propuestas, poniendo en común los resultados y procedimientos empleados.

Para terminar esta sección, propondremos al alumnado practicar las operaciones combinadas con la calculadora WIRIS.

6. Notación científica

■ En la siguiente sección estudiaremos cómo expresar cantidades muy grandes mediante la notación científica.

En primer lugar, leeremos la introducción para apreciar la necesidad de utilizar la notación científica y en qué situaciones. Proponemos preguntar:

- *¿Qué potencias se utilizan en la notación científica?*
- *¿Está expresado correctamente en notación científica el número* $15{,}3 \cdot 10^{7}$ *?*

Leeremos ahora la nota *Recuerda* del margen.

A continuación, leeremos la definición del recuadro y los párrafos siguientes para comprender cómo se expresa un número en notación científica. Para ello preguntaremos:

- *¿Representa una cantidad muy grande o muy pequeña el número* $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ *?*
- *¿Cómo expresarías el número* 75 598 302,6 *en notación científica?*

6.1. Operaciones en notación científica

■ El objetivo de este apartado es presentar las normas básicas para operar con números expresados en notación científica.

Comenzaremos leyendo la nota *No lo olvides*, donde aprenderemos la primera regla para trabajar con potencias de 10.

A continuación, analizaremos entre todos el ejemplo presentado y plantearemos estas preguntas al alumnado:

- *¿Son las distancias de la Tierra al Sol y de la Tierra a la Luna parecidas? Razona tu respuesta.*
- *¿Qué haremos en primer lugar al operar con potencias de 10?*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 21 y 22.* Comprender e interpretar los enunciados de las actividades en los que se incluyen términos específicos sobre potencias y raíces.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de la calculadora WIRIS, con la que se pueden comprobar los resultados de las operaciones combinadas.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 21 y 22.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades referentes a raíces y potencias a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 resultará útil para evaluar si el alumnado ha entendido correctamente y sabe aplicar la notación científica en la expresión de números.

✓ La actividad de ampliación 1 consolidará el método de resolución de operaciones combinadas con raíces cuadradas y potencias.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos ampliar el conocimiento y conocer un poco más la utilidad de la notación científica entrando en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/743346

Con este enlace sobre la escala del universo, a nuestros alumnos les será fácil comparar objetos y lugares a diferentes escalas. Pueden acercarse o alejarse utilizando el zoom, comprobando las distan-cias reales

Además, al hacer clic sobre cada uno de ellos obtendrán más información, entre ella sus medidas reales tanto el las unidades más habituales como en las del SI expresadas en notación científica.

Dejaremos a los alumnos que investiguen un rato por su cuenta, y, a continuación, les preguntaremos:

- *¿Cuáles son las medidas del Sol, Alpha Centauri y Sedna en notación científica?*
- *¿Cuánto tarda Sedna en completar una órbita?*
- *¿A qué distancia está la Tierra del Sol?*
- *¿Puedes explicar la utilidad de la notación científica?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 62

21. Las resoluciones son:

a) $3-\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{20}{9}\right)+\frac{1}{3}=3-\frac{9}{2}\cdot\left(\frac{-53}{36}\right)+\frac{1}{3}=3+\frac{53}{8}+\frac{1}{3}=\frac{72+159+8}{24}=\frac{239}{24}=9{,}958$

b) $\frac{1}{2}:\frac{3^2}{2^4}:\left[\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{5}{9}\right]=\frac{2^3}{3^2}:\left[\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{5}{3^2}\right]=\frac{2^3}{3^2}:\frac{2^2\cdot 5}{3^4}=\frac{2^3\cdot 3^4}{3^2\cdot 2^2\cdot 5}=\frac{2\cdot 3^2}{5}=\frac{18}{5}=3{,}6$

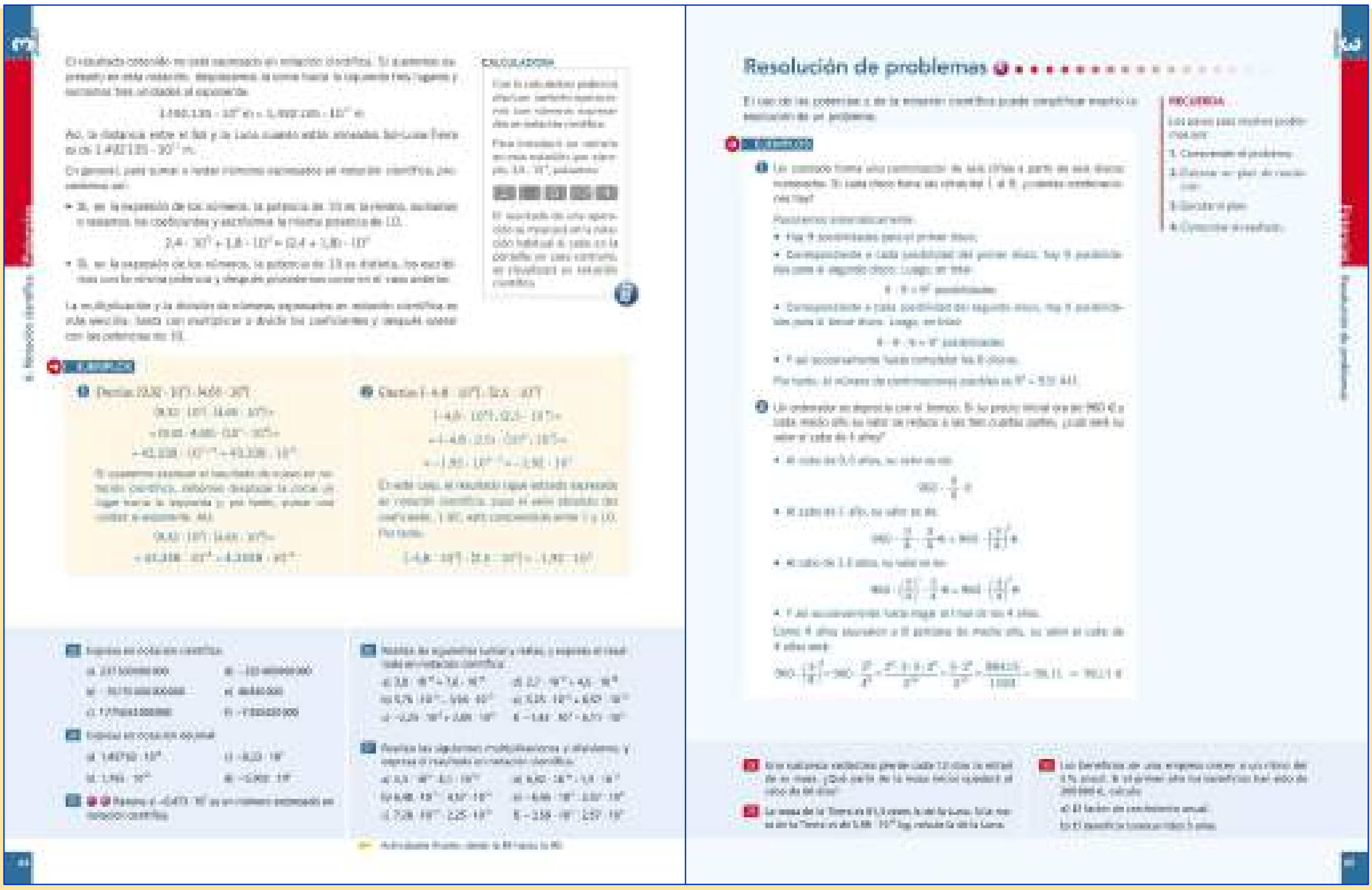
c) $2-\frac{3}{2}\cdot\left[1-\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{-2}{15}\right)^{-1}\right]+\frac{1}{4}=2-\frac{3}{2}\cdot\left[1+\frac{2}{5}\cdot\frac{15}{2}\right]+\frac{1}{4}=2-\frac{3}{2}\cdot(2+3)+\frac{1}{4}=2-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{40-6+5}{20}=1{,}95$

d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{2^2}:\frac{3^2}{2^4}+\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{-2^2}{1}=\frac{2}{3}-\frac{2^2}{3^2}-\frac{3^2}{1}=\frac{6-4-81}{3^2}=-\frac{79}{9}=-8{,}77$

e) $\frac{2^4}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{2^4}+\frac{2^2\cdot 3^2}{2^4}\cdot\frac{2^3}{5^3}+\frac{3}{5}=\frac{5}{3}+\frac{2\cdot 3^2}{5^3}+\frac{3}{5}=\frac{5\cdot 5^3+2\cdot 3^2\cdot 3+5\cdot 5^2\cdot 3}{5^3\cdot 3}=\frac{1054}{375}=2{,}81$

f) $\left[2^2:\frac{3^2}{2^4}\right]^{-2}:\left[\frac{2^5}{3^5}:\frac{12}{9}\right]=\left[\frac{2^6}{3^2}\right]^{-2}:\left[\frac{2^5}{3^5}:\frac{2^2\cdot 3}{3^2}\right]=\left[\frac{3^2}{2^6}\right]^{2}:\left[\frac{2^5\cdot 3^2}{3^5\cdot 3\cdot 2^2}\right]=\frac{3^4}{2^{12}}:\frac{2^3}{3^4}=\frac{3^8}{2^{15}}=\frac{6561}{32768}=0{,}20$

(Continúa en la página 3-31 de la guía)



6. NOTACIÓN… (CONT.) / RESOLUCIÓN…

■ Completamos el desarrollo del ejemplo preguntando a los alumnos:

- *¿Por qué no estaba el resultado expresado en notación científica?*
- *¿Por qué incrementamos la potencia de 10 al expresarla en notación científica?*

Como conclusión del ejercicio que acabamos de resolver, leeremos a continuación las normas básicas para operar con números en notación científica. Preguntaremos:

- *¿Cómo operamos los exponentes de las potencias de 10 al multiplicar dos números en notación científica?*
- *¿Cómo restamos dos números en notación científica si tienen la misma potencia de 10?*

Finalmente, observaremos la nota del margen, donde aprenderemos a introducir números en notación científica en la *Calculadora,* observaremos los dos ejemplos siguientes. Luego haremos las siguientes preguntas:

- *¿Es necesario expresar los números en la misma potencia de 10 antes de multiplicar dos números en notación científica?*
- *¿Y al dividirlos?*

Por último, pediremos al alumnado que resuelva en sus cuadernos las actividades de la página 64.

Resolución de problemas

■ La siguiente sección tiene como finalidad observar las ventajas del uso de las potencias y de la notación científica a la hora de resolver problemas.

En primer lugar leeremos la sección *Recuerda*, donde repasaremos las cuatro fases que se tienen que seguir a la hora de resolver los problemas.

Trataremos de identificar dichas fases de resolución en los dos ejemplos resueltos en el libro, y plantearemos estas cuestiones para comprobar el grado de comprensión:

- *Tras leer el primer enunciado ¿podrías decirme qué buscamos? Nombra una posible combinación.*
- *¿Del segundo enunciado deducimos que el precio buscado será mayor o menor que el inicial?*
- *En la ejecución del segundo ejemplo, ¿cómo hemos simplificado la cantidad de 960?*

Después de realizar los ejemplos anteriores conjuntamente, los alumnos no tendrán dificultad para resolver los problemas planteados en la página 65.

Finalmente haremos una puesta en común de los resultados de las actividades y solucionaremos entre todos las posibles dudas que hayan surgido en su resolución.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 25*. Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios y de generar ideas e hipótesis.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 23 a 25.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridas para resolver las actividades propuestas.
- *Acts. 26 y 27*. Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.
- *Acts. 28 a 30*. Saber transformar la información recopilada y construir sus propias estrategias para aplicarlas en la resolución de los problemas.

SENTIDO DE INICIATIVA I ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Resolución de problemas*. Observar el planteamiento y resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas, así como el orden de las operaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 servirá como práctica del operaciones en notación científica.

✓ La actividad de ampliación 3 consolidará el método de resolución de problemas paso a paso a partir de un problema con potencias y notación científica.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos ampliar la práctica de la notación científica entrando en este enlace:

http://www.tiching.com/743347

En esta la web se proponen siete problemas en los que se utiliza la notación científica.

Pediremos a nuestro alumnado que resuelvan los problemas en el cuaderno y, a continuación, verifiquen el resultado clicando en la solución.

Como se trata ejercicios autocorrectivos, el alumno tiene un conocimiento más personalizado de su proceso de aprendizaje, lo que favorece su compromiso y, asímismo facilita la autonomía.

Finalmente, lanzaremos las siguientes preguntas:

- *¿Cómo podemos sumar y restar números expresados en notación científica elevados a la misma potencia? ¿Sería válido si estuvieran expresados de otra manera?*
- *¿Crees que multiplicar o dividir con notaciones científicas puede resultar complejo?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 64

23. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $2{,}3756\cdot 10^{11}$

b) $-7{,}6751\cdot 10^{13}$

c) $1{,}775653\cdot 10^{12}$

d) $-3{,}254\cdot 10^{11}$

e) $4{,}683\cdot 10^{7}$

f) $-7{,}34562\cdot 10^{9}$

24. Las soluciones a este ejercicio son:

a) 14.579.300.000

b) 765.000.000.000

a) –92.300.000

b) –5.002.000

25. Este número no está expresado en notación científica, ya que en esta notación la parte entera no puede ser 0.

26. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(3{,}8+7{,}6)\cdot 10^{15}=11{,}4\cdot 10^{15}$

b) $(5{,}76-3{,}94)\cdot 10^{13}=1{,}32\cdot 10^{13}$

c) $(-2{,}25+2{,}09)\cdot 10^{8}=-0{,}16\cdot 10^{8}=-1{,}6\cdot 10^{7}$

d) $(2{,}7+4{,}6)\cdot 10^{14}=7{,}3\cdot 10^{14}$

e) $(3{,}25+8{,}57)\cdot 10^{12}=11{,}82\cdot 10^{12}=1{,}18\cdot 10^{13}$

f) $(-1{,}43-6{,}11)\cdot 10^{9}=-7{,}54\cdot 10^{9}$

27. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(5{,}3+610)\cdot 10^{8}=615{,}23\cdot 10^{8}=6{,}15\cdot 10^{10}$

b) $(6{,}48-457)\cdot 10^{11}=-450{,}52\cdot 10^{11}=-4{,}51\cdot 10^{13}$

c) $(72{,}8-2{,}25)\cdot 10^{12}=70{,}55\cdot 10^{12}=7{,}06\cdot 10^{13}$

d) $(692+1{,}3)\cdot 10^{12}=693{,}3\cdot 10^{12}=6{,}93\cdot 10^{14}$

e) $(-64{,}5+2{,}57)\cdot 10^{8}=-61{,}93\cdot 10^{8}=-6{,}19\cdot 10^{9}$

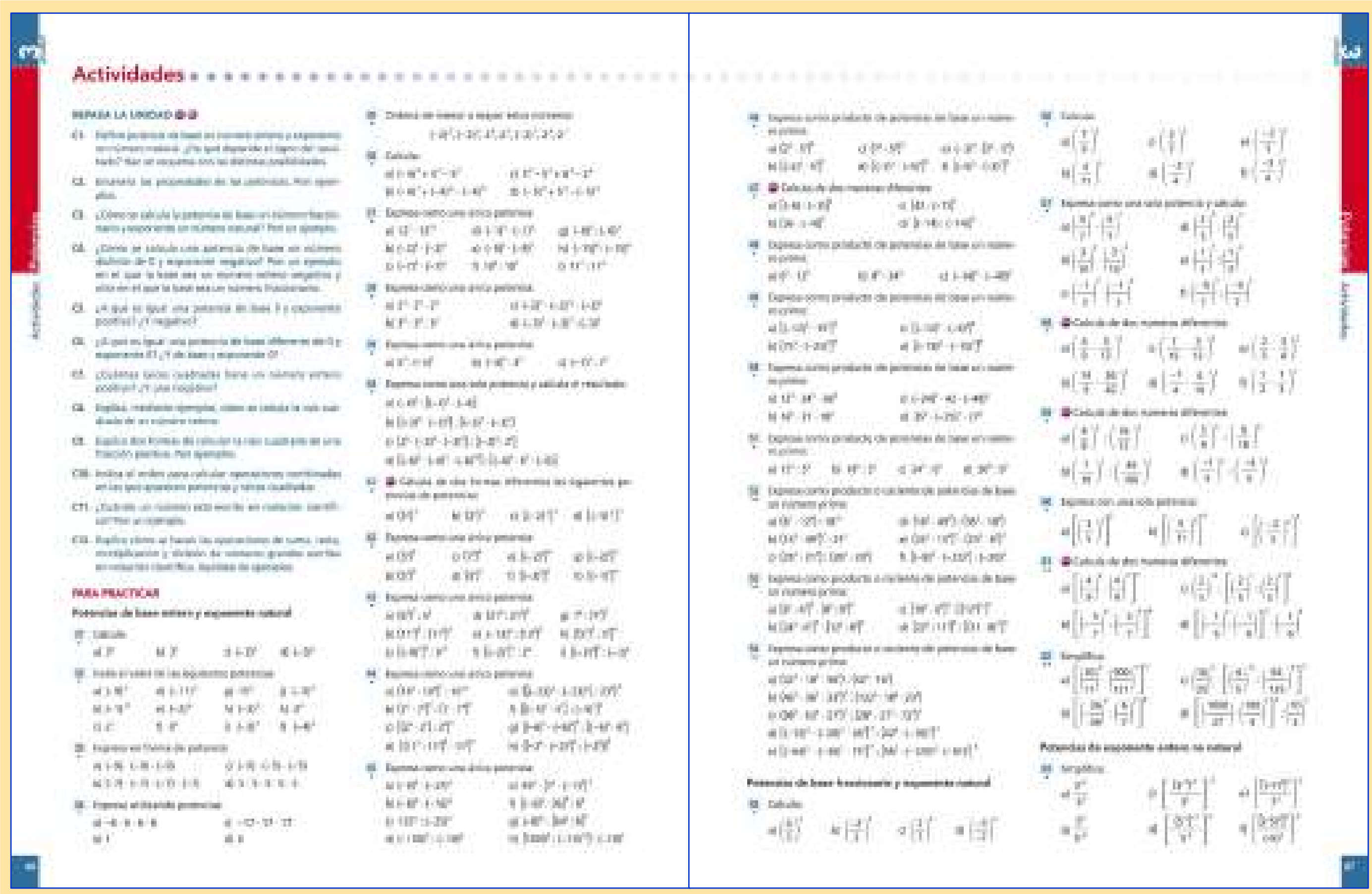
f) $(-358+2{,}57)\cdot 10^{5}=-355{,}43\cdot 10^{5}=-3{,}55\cdot 10^{7}$

Página 65

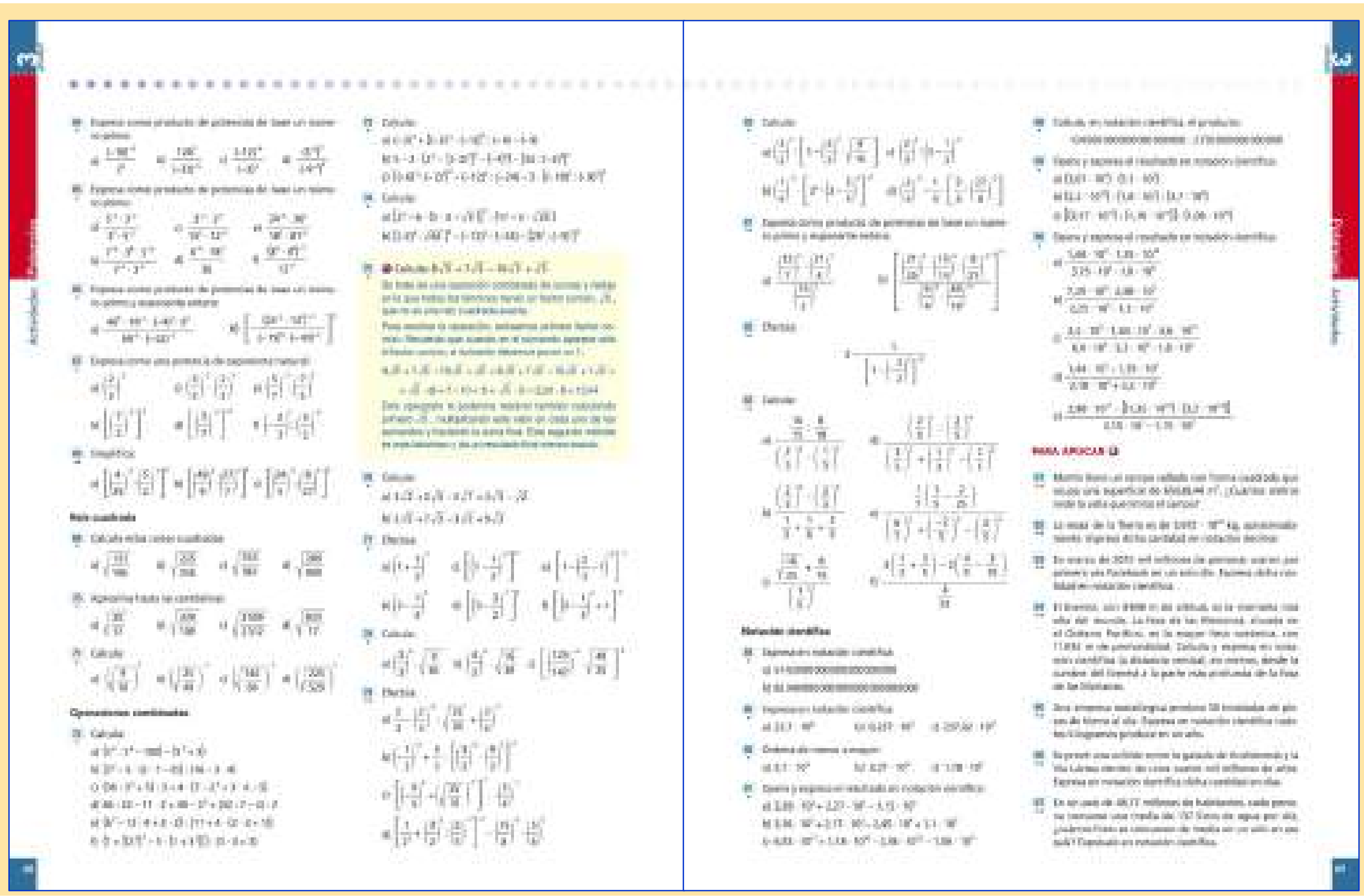
28. Se reducirá la masa cinco veces (60 / 12 = 5), por lo que la masa final pasados los 60 días será:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^5}$ de la masa inicial.

(Continúa en la página 3-31 de la guía)



Actividades



PARA AMPLIAR

CÁLCULO MENTAL

Desarrolla tus competencias

EL SISTEMA SOLAR A ESCALA

Evaluación de estándares

Estrategia e ingenio

1 1 1 1

2 2 2 2

9 9 9

Resumen

Potencias de base entera y exponente natural

Potencias de base fraccionaria y exponente natural

Potencias de exponente entero no natural

Raíz cuadrada

Operaciones combinadas

Notación científica

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Repasa la unidad*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.
- *Act. 99.* Expresar por escrito argumentos propios de manera adecuada a la resolución de las actividades.
- *Desarrolla tus competencias.* Leer y comprender el estímulo y los enunciados de la actividad, generando ideas, supuestos e interrogantes.

APRENDER A APRENDER

- *Repasa la unidad.* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, y ser consciente de las propias capacidades y carencias.
- *Acts. 41, 47, 58, 59, 61, 99 y 101.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.
- *Acts. 75 y 107.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas, buscando una coherencia global al ejecutar el plan de resolución de una actividad o un problema.
- *Cálculo mental.* Aprender estrategias y técnicas de cálculo mental, adquiriendo confianza en las propias capacidades.
- *Desarrolla tus competencias.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.
- *Evaluación de estándares*. Ser consciente de las propias capacidades en el tema estudiado.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Para aplicar.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, aplicando los conocimientos sobre potencias y raíces trabajados en el tema.
- *Acts. 103 a 106 y 109.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo del tema, mostrando criterio propio.
- *Cálculo mental* y *Desarrolla tus competencias*. Buscar las soluciones de forma creativa e imaginativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Desarrolla tus competencias*. Buscar, analizar, seleccionar y manejar información utilizando recursos de Internet.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Desarrolla tus competencias*. Manejar las habilidades sociales en la exposición y debate en grupo.

ACTIVIDADES FINALES

- En la sección de *Actividades* el alumnado se enfrentará a una colección de ejercicios que irán creciendo en nivel de dificultad y que les ayudarán a afianzar todos los contenidos de la unidad.
- La finalidad de la sección *Desarrolla…* consiste en fomentar ciertas habilidades de los alumnos y aplicarlas a las matemáticas. Se plantea un caso práctico donde pondrán en juego su destreza con Internet, su capacidad de comprensión audiovisual y su percepción espacial.
- El apartado *Evaluación…* pretende que el alumnado repase de forma práctica los principales conceptos trabajados en esta unidad didáctica. Consta de una serie de ejercicios y problemas que trabajan todos los contenidos del tema. De esta manera, descubrirán los conocimientos que han asimilado correctamente y aquellos en los que muestran ciertas carencias y, por tanto, conviene que refuercen.
- La sección *Estrategia e ingenio* plantea diversas actividades en forma de pasatiempo o acertijo para estimular en los alumnos la búsqueda de nuevos métodos y la interrelación de los conceptos.
- Por último, la sección *Resumen* sintetiza los principales contenidos estudiados a lo largo de la unidad didáctica, estableciendo relación entre los conceptos teóricos y los procedimientos de cálculo implicados.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 66

C1. La potencia de base un número entero y exponente un número natural, distinto de 1, es el producto del número por sí mismo tantas veces como indica el exponente.

Signo de una potencia:

- Base: núm. natural → núm. positivo.
- Base: núm. entero negativo:
  - Potencia par → núm. entero positivo.
  - Potencia impar → núm. entero negativo.

C2. Actividad personal. A modo de ejemplo: Las propiedades de las potencias son:

Producto de potencias de la misma base:

$(-2)^2 \cdot (-2)^3 = [(-2) \cdot (-2)] \cdot [(-2) \cdot (-2)] \cdot [(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)] = (-2)^5$

Cociente de potencias de la misma base:

$(-2)^5 \cdot (-2)^4 = (-2)^5 / (-2)^4 = -2$

Potencia de un producto

$[(-2) \cdot 3]^2 = [(-2) \cdot 3] \cdot [(-2) \cdot 3] = (-2)^2 \cdot 3^2$

Potencia de un cociente:

$[(-2) : 3]^2 = [(-2) / 3] \cdot [(-2) / 3] = (-2)^2 : 3^2$

Potencia de una potencia:

$(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$

C3. Actividad personal. A modo de ejemplo: La potencia de base una fracción y exponente natural se calcula de la siguiente manera:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{3^2}{4^2}$$

C4. Actividad personal. A modo de ejemplo: La potencia de base un número distino de 0 y exponente negativo siendo la base un número entero negativo:

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^{-3}}$$

Y si la base es una fracción:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{3^2}{2^2}$$

C5. Una potencia de base 0 y exponente positivo siempre es cero. Y una potencia de base 0 y exponente negativo no existe:

C6. Una potencia de base diferente de cero y exponente cero siempre es igual a 1. Y una potencia de base cero y exponente cero no existe.

C7. Un número entero positivo tiene dos raíces cuadradas, el valor positivo y el negativo, puesto que si tenemos:

$\sqrt{b} = \pm a$, ya que $a^2 = b$ y $(-a)^2 = b$

Y la raíz cuadrada de un número negativo no existe, puesto que hallaremos ningún número que elevado al cuadrado dé un resultado negativo.

C8. Actividad personal. A modo de ejemplo: Para calcular la raíz de 132 lo hacemos de la siguiente manera (en este caso queremos calcular la raíz hasta las décimas):

Primero buscaremos un número multiplicado por si mismo sea 1, por tanto 1, y se lo restamos:

$\sqrt{132{,}00}$	1
-1	$1 \cdot 1 = 1$
0	

Luego bajamos los siguientes dos números, multiplicamos el número acumulado en el resultado de la raíz por dos, $1 \cdot 2 = 2$, y buscamos un número x, tal que $2x \cdot x$ se aproxime al número que tenemos:

$\sqrt{132{,}00}$	11,
-1	$1 \cdot 1 = 1$
0 32	$1 \cdot 2 = 2$
-21	$21 \cdot 1 = 21$
11	

Ponemos una coma en el resultado de la raíz, puesto que ya hemos agotado bajado todos los números del 132, y colocamos 2 ceros más, y repetimos el procedimiento del paso anterior:

$\sqrt{1{,}32{,}00}$	11,4
-1	$1 \cdot 1 = 1$
0 32	$1 \cdot 2 = 2$
-21	$21 \cdot 1 = 21$
1100	$11 \cdot 2 = 22$
-896	$224 \cdot 4 = 896$
204	

Entonces escribimos: $\sqrt{132} \approx \pm 11{,}4$

C9. Actividad personal. A modo de ejemplo: Tenemos la fracción 64 / 4 y queremos calcular su raíz cuadrada:

Podemos calcular primero la división y luego la raíz:

$$\sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = \pm 4$$

O calcular las raíces de 64 y 4 y luego dividir:

$$\sqrt{\frac{64}{4}} = \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{4}} = \frac{\pm 8}{\pm 2} = \pm 4$$

C10. El orden a seguir para calcular operaciones combinadas con potencias y raíces cuadradas es:

1. Las operaciones incluidas en los paréntesis respetando la prioridad de las operaciones en su interior.
2. Las potencias y las raíces cuadradas.
3. Las multiplicaciones y las divisiones, en el orden en que aparecen.
4. Las sumas y las restas.

C11. Actividad personal. A modo de ejemplo: Un número está expresado en notación científica si tiene la forma:

$C \cdot 10^n$

Siendo C un número decimal llamado coeficiente que, en valor absoluto, es mayor o igual que 1 y menor que 10, y n, es un número entero. Por ejemplo:

2501,33 expresado en notación científica es:

$2{,}50133 \cdot 10^3$

C12. Actividad personal. A modo de ejemplo: Para los números escritos en notación científica las operaciones se hacen:

Suma:

$2{,}5 \cdot 10^3 + 3{,}2 \cdot 10^2 = 2{,}5 \cdot 10^3 + 0{,}32 \cdot 10^3 =$
$= (2{,}5 + 0{,}32) \cdot 10^3 = 2{,}82 \cdot 10^3$

Resta:

$2{,}5 \cdot 10^3 - 3{,}2 \cdot 10^2 = 2{,}5 \cdot 10^3 - 0{,}32 \cdot 10^3 =$
$= (2{,}5 - 0{,}32) \cdot 10^3 = 2{,}18 \cdot 10^3$

Multiplicación:

$(2{,}5 \cdot 10^3) \cdot (3{,}2 \cdot 10^2) = (2{,}5 \cdot 3{,}2) \cdot (10^3 \cdot 10^2) =$
$= 8 \cdot 10^{3+2} = 8 \cdot 10^5$

División:

$(2{,}5 \cdot 10^3) \,/\, (3{,}2 \cdot 10^2) = (2{,}5 \,/\, 3{,}2) \cdot (10^3 \,/\, 10^2) =$
$= 0{,}78125 \cdot 10^{3-2} = 0{,}78125 \cdot 10 = 7{,}8125 \cdot 10^{-1}$

31. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $3^4 = 81$ b) $3^3 = 27$

c) $(-3)^4 = 81$ d) $(-3)^3 = -27$

32. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(-9)^2 = 81$ g) $13^2 = 169$

b) $(-1)^{21} = -1$ h) $(-2)^5 = -32$

c) $2^1 = 2$ i) $(-3)^1 = -3$

d) $(-11)^3 = -1331$ j) $(-3)^4 = 81$

e) $(-2)^8 = 256$ k) $3^6 = 729$

f) $0^2 = 0$ l) $(-4)^3 = -64$

33. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(-9)^3$ c) $(-5)^3$

b) $(-7)^4$ d) 5^5

34. Las soluciones a este ejercicio son:

a) -6^4 c) -17^3

b) 1^0 d) 0^1

35. La ordenación de estos números es:

$(-2)^3; (-2)^1; 2^1; (-2)^2 = 2^2; 2^3; 2^4$

36. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $-64 + 256 - 25 = 295$

b) $-4 + 16 + 1024 = 1036$

c) $27 - 3125 + 216 - 64 = -2946$

d) $-125 + 625 - 25 = 475$

37. Las soluciones a este ejercicio son:

a) 12^{18} f) 10^2

b) $(-2)^{10} = 2^{10}$ g) $(-6)^3$

c) $(-7)^7$ h) $(-15)^4 = 15^4$

d) $(-1)^4 = 1$ i) 11^3

e) $(-9)^8 = 9^8$

38. Las soluciones a este ejercicio son:

a) 2^{12} c) $(-2)^{19}$

b) 3^3 d) $(-3)^8$

39. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(-5)^1$ b) 3^7 c) $(-1)^1$

40. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(-4)^5 : (-4)^4 = (-4)^1 = -4$

b) $(-3)^{15} : (-3)^{12} = (-3)^3 = -27$

c) $-2^{10} : 2^6 = -2^4 = -16$

d) $(-6)^{15} : (-6^{10}) = 6^5 = 7776$

41. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(3^2)^3 = 9^3 = 729$

$(3^3)^2 = 3^3 \cdot 3^3 = 27 \cdot 27 = 729$

b) $(2^2)^2 = 2^4 = 16$

$(2^2)^2 = 2^2 \cdot 2^2 = 4 \cdot 4 = 16$

c) $\left[(-2)^3\right]^3 = (-2)^9 = -512$

$\left[(-2)^3\right]^3 = (-2)^3 \cdot (-2)^3 (-2)^3 = (-8) \cdot (-8) \cdot (-8) = -512$

d) $\left[(-5)^2\right]^3 = (-5)^6 = 15625$

$\left[(-5)^2\right]^3 = (-5)^2 \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^2 = 25 \cdot 25 \cdot 25 = 15625$

42. Las soluciones a este ejercicio son:

a) 3^{20} e) $(-2)^{12} = 2^{12}$

b) 5^{12} f) $(-3)^{15}$

c) 7^{72} g) $(-2)^{15}$

d) 5^{14} h) $(-1)^{42} = 1^{42}$

43. Las soluciones a este ejercicio son:

a) 6^{23} f) 2^6

b) $11^0 = 1$ g) 7^3

c) 9^{19} h) 5^4

d) 21^{24} i) $(-3)^{18} = 3^{18}$

e) $(-13)^0 = 1$

44. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $10^{63} : 10^{15} = 10^{48}$

b) $7^{21} : 7^{10} = 7^{11}$

c) $(2^{10} : 2^5)^2 = 2^{10}$

d) $(11^4 \cdot 11^9)^5 = 11^{65}$

e) $\left[(-23)^7 : 23^3\right]^3 = -23^{12}$

f) $\left[(-5^8) : (-5)^3\right]^2 = -5^{10}$

g) $(-6)^{32} : (-6^7) = -6^{25}$

h) $\left[(-2^{30}) : (-2)^8\right]^4 = 2^{88}$

45. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(-3^2)^6 \cdot (-3^3)^4 = 3^{12} \cdot 3^{12} = 3^{24}$

b) $(-2^3)^4 \cdot (-2^4)^3 = 2^{12} \cdot 2^{12} = 2^{24}$

c) $(5^3)^4 : (-5^2)^3 = 5^{12} : 5^6 = 5^6$

d) $(-10^2)^5 : (-10)^6 = (-10)^{10} \cdot (-10)^6 = 10^4$

e) $(7^2)^5 \cdot (7^8)^2 = 7^{10} \cdot 7^{16} = 7^{26}$

f) $(6^4)^6 : 6^4 = 6^{24} \cdot 6^4 = 6^{20}$

g) $(-8)^9 \cdot 8^6 = (-8)^{15}$

h) $10^{15} : 10^{10} \cdot 10^2 = 10^5 \cdot 10^2 = 10^7$

Página 67

46. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $2^{12} \cdot 5^{12}$

b) $(-2)^{12} \cdot 5^{12} = 2^{12} \cdot 5^{12}$

c) $7^8 \cdot 5^{16}$

d) $(-7)^8 \cdot (-5)^{16} = 7^8 \cdot 5^{16}$

e) $(-3)^{13} \cdot 5^3$

f) $(-5)^{18} \cdot (-3)^{30} = 5^{18} \cdot 3^{30}$

47. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $(-6)^3 : (-3)^3 = 2^3 = 8$

$$\left(\frac{-6}{-3}\right)^3 = (2)^3 = 8$$

b) $36^2 : (-4)^2 = \dfrac{1296}{256} = \dfrac{81}{16}$

$$\left(\frac{9 \cdot 4}{(-4)^2}\right)^2 = \frac{9^2}{4^2} = \frac{81}{16}$$

c) $6^3 \cdot 7^3 : (-7)^3 = -6^3 = -216$

$$\left(\frac{6 \cdot 7}{(-7)}\right)^3 = -6^3 = -216$$

d) $(-14)^3 : (-14)^3 = (-14)^0 = 1$

$$\left(\frac{-14}{-14}\right)^3 = (1)^3 = 1$$

48. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $2^5 \cdot 3^5 \cdot 2^{10} \cdot 3^5 = 2^{15} \cdot 3^{10}$

b) $2^{18} \cdot 3^3 \cdot 2^9 = 2^{27} \cdot 3^3$

c) $(-7)^5 \cdot 2^5 \cdot (-7)^3 \cdot 7^3 = 7^{11} \cdot 2^5$

49. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\left[(-3)^3 \cdot 2^6 \cdot 5^2 \cdot 3^2\right]^3 = -3^{15} \cdot 2^{18} \cdot 5^6$

b) $\left[5^6 \cdot 3^3 \cdot (-5)^{10}\right]^6 = (5^{16} \cdot 3^3)^6 = 5^{96} \cdot 3^{18}$

c) $\left[(-3)^4 \cdot 2^8 \cdot (-2)^4\right]^4 = 3^{16} \cdot 2^{48}$

d) $\left[(-3)^{11} \cdot 2^3 \cdot 5^5\right]^6 = 3^{66} \cdot 2^{18} \cdot 5^{30}$

50. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $2^6 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot 2^{15} \cdot 3^8 \cdot 2^8 = 2^{29} \cdot 3^{16}$

b) $2^{20} \cdot 3^3 \cdot 3^4 \cdot 2^2 = 2^{22} \cdot 3^7$

c) $-3^3 \cdot 2^9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (-7)^8 = 2^{10} \cdot (-3^4) \cdot 7^9$

d) $7^3 \cdot 5^3 \cdot (-5)^{14} \cdot 3^6 = 7^3 \cdot 5^{17} \cdot 3^6$

51. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $5^4 \cdot 3^4 : 5^3 = 5 \cdot 3^4$

b) $3^{12} \cdot 2^6 : 3^5 = 3^7 \cdot 2^6$

c) $2^{21} \cdot 3^7 : 2^3 \cdot 3^3 = 2^{18} \cdot 3^4$

d) $2^{16} \cdot 3^{16} : 3^4 = 2^{16} \cdot 3^{12}$

52. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $3^5 \cdot 2^5 \cdot 3^5 \cdot 2^8 : (3^{30} \cdot 2^{15}) = 3^{-21} \cdot 2^{-2}$

b) $7^6 \cdot 2^6 \cdot 7^8 : (7^5 \cdot 3^5) = 7^9 \cdot 2^6 \cdot 3^{-5}$

c) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 7^5 \cdot 3^5 : (7^4 \cdot 2^8 \cdot 5^3 \cdot 2^6) = 7^4 \cdot 3^5 \cdot 2^{-14}$

d) $2^{24} \cdot 7^{10} : (2^6 \cdot 7^2 \cdot 2^4 \cdot 3^8) = 2^{14} \cdot 7^8 \cdot 3^{-8}$

e) $3^9 \cdot 2^{27} \cdot 5^{12} \cdot 3^{12} : (5^8 \cdot 3^6 \cdot 2^6) = 2^{21} \cdot 3^{15} \cdot 5^4$

f) $-2^{15} \cdot 5^{12} : ((-5)^4 \cdot 2^4) = -2^{11} \cdot 5^8$

53. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(3^4 \cdot 2^4) : 2^{12} \cdot (2^{18} : 3^8) = 3^{-4} \cdot 2^{10}$

b) $(3^3 \cdot 2^9) : (3^{15} \cdot 2^{15}) \cdot (3^{10} \cdot 2^{20} : 2^{18}) = 3^{-2} \cdot 2^{-4}$

c) $(5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^6 \cdot 2^6) : (2^{16} : 3^8) = 5^4 \cdot 2^{-6} \cdot 3^{-2}$

d) $(11^{20} \cdot 2^{20}) : 11^{12} : (11^3 \cdot 2^{18}) = 11^5 \cdot 2^2$

54. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(2^{15} \cdot 3^4 \cdot 2^2 \cdot 7^5 \cdot 2^{15}) : (2^4 \cdot 7^4 \cdot 3^4 \cdot 2^8) = 2^{20} \cdot 7$

b) $(23^5 \cdot 2^5 \cdot 3^{14} \cdot 2^{14} \cdot 11^5 \cdot 3^5)^4 : (2^2 \cdot 61^2 \cdot 3^{12} \cdot 2^{12} \cdot 23^2) =$

$= 23^{18} \cdot 2^{62} \cdot 3^{64} \cdot 11^{20} \cdot 61^{-2}$

c) $(2^{35} \cdot 7^{70} \cdot 7^{35} \cdot 3^{70} \cdot 3^{63}) : (7^{20} \cdot 2^{40} \cdot 3^{45} \cdot 3^{40} \cdot 2^{60}) =$

$= 2^{-65} \cdot 7^{85} \cdot 3^{48}$

d) $((-3)^3 \cdot 2^6 \cdot (-5)^2 \cdot 2^4 \cdot 2^{15} \cdot 7^5)^3 : (2^4 \cdot 7^4 \cdot 3^4 \cdot 2^8)^2$

$= -3 \cdot 2^{51} \cdot 7^7 \cdot 5^6$

e) $(2^{210} \cdot 2^{98} \cdot 3^{98} \cdot 5^{70} \cdot 3^{35}) : (7^6 \cdot 2^{18} \cdot (-5)^{54} \cdot 3^{24}) =$

$= 2^{290} \cdot 3^{109} \cdot 5^{16} \cdot 7^{-6}$

55. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$

b) $\left(\dfrac{-2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

c) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^3 = \dfrac{8}{343}$

d) $\left(\dfrac{-3}{-7}\right)^2 = \dfrac{9}{49}$

56. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\frac{7^2}{9^2}=\frac{49}{81}$ d) $\frac{(-3)^3}{4^3}=\frac{-27}{64}$

b) $\frac{4^2}{11^2}=\frac{16}{121}$ e) $\frac{(-2)^2}{5^2}=\frac{4}{25}$

c) $\frac{2^2}{7^2}=\frac{4}{49}$ f) $\frac{(-3)^4}{4^4}=\frac{81}{256}$

57. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\frac{4^4\cdot4^3}{7^4\cdot7^3}=\frac{4^7}{7^7}=\frac{16384}{823543}$

b) $\frac{3^2\cdot3^3}{10^2\cdot10^3}=\frac{3^5}{10^5}=\frac{243}{100000}$

c) $\frac{(-1)^2\cdot(-1)^4}{3^2\cdot3^4}=\frac{(-1)^6}{3^6}=\frac{1}{729}$

d) $\frac{2^5\cdot5^2}{5^5\cdot2^2}=\frac{2^3}{5^3}=\frac{8}{125}$

e) $\frac{1^7\cdot3^3}{3^7\cdot1^3}=\frac{1^4}{3^4}=\frac{1}{81}$

f) $\frac{(-9)^5\cdot7^2}{7^5\cdot(-9)^2}=\frac{(-9)^3}{7^3}=-\frac{729}{343}$

58. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $\frac{4^2\cdot3^2}{9^2\cdot12^2}=\frac{1}{9^2}=\frac{1}{81}$

$\left(\frac{12}{108}\right)^2=\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{81}$

b) $\frac{7^2\cdot2^2\cdot2^4\cdot3^4}{3^4\cdot2^2\cdot3^2\cdot7^2}=\frac{2^4}{3^2}=\frac{16}{9}$

$\left(\frac{504}{378}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$

c) $\frac{7^3\cdot3^3}{5^3\cdot3^3\cdot3^3\cdot2^6}=\frac{7^3}{5^3\cdot3^3\cdot2^6}=\frac{343}{216000}$

$\left(\frac{21}{180}\right)^3=\frac{9261}{5832000}=\frac{343}{216000}$

d) $\frac{(-1)^3\cdot3^3\cdot2^3}{2^6\cdot2^3\cdot3^6}=\frac{(-1)^3}{3^3\cdot2^6}=\frac{-1}{1728}$

$\left(\frac{-6}{72}\right)^3=\frac{-216}{373248}=\frac{-1}{1728}$

e) $\frac{2^2\cdot3^2}{5^2\cdot2^4}=\frac{3^2}{5^2\cdot2^2}=\frac{9}{100}$

$\left(\frac{6}{20}\right)^2=\frac{36}{400}=\frac{9}{100}$

f) $\frac{1^2\cdot1^2}{2^2\cdot3^2}=\frac{1^4}{2^2\cdot3^2}=\frac{1}{36}$

$\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$

59. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $\frac{3^4\cdot3^2\cdot2^4}{2^6\cdot2^8}=\frac{3^6}{2^{10}}=\frac{729}{1024}$

$\left(\frac{108}{128}\right)^2=\left(\frac{27}{32}\right)^2=\frac{279}{1024}$

b) $\frac{7^2\cdot5^4\cdot2^4}{5^2\cdot2^2\cdot7^4}=\frac{5^2\cdot2^2}{7^2}=\frac{100}{49}$

$\left(\frac{700}{490}\right)^2=\left(\frac{10}{7}\right)^2=\frac{100}{49}$

c) $\frac{5^3\cdot3^6\cdot2^3}{2^9\cdot3^6}=\frac{5^3}{2^6}=\frac{125}{64}$

$\left(\frac{90}{72}\right)^3=\left(\frac{5}{4}\right)^3=\frac{125}{64}$

d) $\frac{(-1)^3\cdot5^3}{3^3\cdot(-2^2)^3}=\frac{-125}{-1728}=\frac{125}{1728}$

$\left(\frac{-5}{-12}\right)^3=\left(\frac{5}{12}\right)^3=\frac{125}{1728}$

60. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^6$ b) $\left(\frac{5}{11}\right)^{12}$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^6$

61. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $\frac{4^{10}\cdot4^{15}}{9^{10}\cdot9^{15}}=\left(\frac{4}{9}\right)^{25}$

$\frac{(4^2\cdot4^3)^5}{(9^2\cdot9^3)^5}=\frac{4^{25}}{9^{25}}$

b) $\frac{((-5)^9\cdot7^2)^4}{(7^9\cdot5^2)^4}=\frac{5^{28}}{7^{28}}$

$\frac{(-5)^{36}}{7^{36}}:\frac{5^8}{7^8}=\frac{5^{28}}{7^{28}}$

c) $\frac{2^{10}}{5^{10}}:\left(\frac{2^7\cdot5^5}{5^7\cdot2^5}\right)^4=\frac{2^{10}}{5^{10}}:\frac{2^8}{5^8}=\frac{2^2}{5^2}$

$\frac{2^{10}}{5^{10}}:\left(\frac{2^{28}\cdot5^{20}}{5^{28}\cdot2^{20}}\right)=\frac{2^2}{5^2}$

d) $\left(\frac{(-1)^5\cdot6}{6^5\cdot(-1)}\right)^2\cdot\frac{(-1)^8}{6^8}=\frac{(-1)^8}{6^8}\cdot\frac{1^8}{6^8}=\frac{1}{6^{16}}$

$\left(\frac{(-1)^{10}\cdot6^2}{6^{10}\cdot(-1)^2}\right)\cdot\frac{(-1)^8}{6^8}=\frac{6^2\cdot1^{18}}{6^{18}\cdot1^2}=\frac{1}{6^{16}}$

62. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\left(\dfrac{30^2 \cdot 30^6}{11^2 \cdot 11^6}\right)^5 = \dfrac{30^{40}}{11^{40}} = \left(\dfrac{30}{11}\right)^{40}$

b) $\left(\dfrac{(-6)^8 \cdot 7^3}{7^8 \cdot 6^3}\right)^6 = \dfrac{6^{30}}{7^{30}} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^{30}$

c) $\dfrac{4^8}{5^8} \cdot \left(\dfrac{4^{12} \cdot 5^9}{5^{12} \cdot 4^9}\right)^5 = \dfrac{4^{68} \cdot 5^{45}}{5^{68} \cdot 4^{45}} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{13}$

d) $\left(\dfrac{10^3 \cdot 10^6}{3^3 \cdot 3^6}\right)^4 : \dfrac{10^7}{3^7} = \dfrac{10^{36} \cdot 3^7}{3^{36} \cdot 10^7} = \left(\dfrac{10}{3}\right)^{29}$

63. Las soluciones a este ejercicio son:

a) 3^{-5}

b) 5^6

c) $\left(\dfrac{3^{10}}{3^3}\right)^2 = \dfrac{3^{-20}}{3^{-6}} = 3^{-14}$

d) $\left(\dfrac{5^6}{5^{-3}}\right)^2 = \dfrac{5^{12}}{5^{-6}} = 5^{18}$

e) $\left(\dfrac{(-7)^0}{7^3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{7^{-6}} = 7^6$

f) $\left(\dfrac{(-5)^{16}}{(-5)^3}\right)^{-3} = \dfrac{5^{-48}}{(-5)^{-9}} = -5^{-39}$

Página 68

64. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\dfrac{1}{2^3 \cdot 2^4 \cdot 3^8} = \dfrac{1}{2^7 \cdot 3^8}$

b) $\dfrac{2^{49}}{-2^{-25}.} = -2^{74}.$

c) $\dfrac{1}{(-3)^4 \cdot 2^8 \cdot (-3)^3} = \dfrac{1}{(-3)^7 \cdot 2^8}$

d) $\dfrac{3^{-30}}{(-3)^{-16}} = \dfrac{1}{3^{14}}$

65. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\dfrac{5^2}{5^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2} = \dfrac{1}{3^4}$

b) $\dfrac{7^2 \cdot 3^6 \cdot 3^4}{5^4 \cdot 7^4} = \dfrac{3^{10}}{5^4 \cdot 7^2}$

c) $\dfrac{2^2 \cdot 2^8 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = \dfrac{2^{10}}{5^2}$

d) $\dfrac{2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 2^3 \cdot 3^9}{2^2 \cdot 3^2} = \dfrac{3^3}{2^3}$

e) $\dfrac{2^{-9} \cdot 3^{-3} \cdot 2^8 \cdot 3^8}{2^2 \cdot 3^4 \cdot 3^{-20}} = \dfrac{3^{21}}{2^3}$

f) $\dfrac{2^{-27} \cdot 2^{-36}}{2^{-14} \cdot 3^{-7}} = \dfrac{3^7}{2^{49}}$

66. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\dfrac{23^5 \cdot 2^5 \cdot 3^{-4} \cdot 2^{-2} \cdot (-2)^8 \cdot 3^8}{23^{-5} \cdot 3^{-5} \cdot (-7)^{-3} \cdot 2^{-3} \cdot 3^{-3}} = -23^{10} \cdot 2^{14} \cdot 3^{12} \cdot 7^3$

b) $\left(\dfrac{(2^{-15} \cdot 3^{-5} \cdot 2^{14} \cdot 3^7)^{-2}}{(-3)^6 \cdot 5^6 \cdot (-2)^{-6} \cdot 5^{-2}}\right)^3$

$= \dfrac{2^{90} \cdot 3^{30} \cdot 2^{-84} \cdot 3^{-42}}{3^{18} \cdot 5^{18} \cdot 2^{-18} \cdot 5^{-6}} = 2^{24} \cdot 3^{-30} \cdot 5^{-12}$

67. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$

b) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^6$

c) $\dfrac{2^2 \cdot 2^5}{3^2 \cdot 3^5} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^7$

d) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^8$

e) $\dfrac{7^3 \cdot 5^5}{5^3 \cdot 7^5} = \left(\dfrac{5}{7}\right)^2$

f) $\dfrac{(-2)^5 \cdot 2^{-4}}{3^5 \cdot 3^{-4}} = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^1 = -\dfrac{2}{3}$

68. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\left(\dfrac{5^9 \cdot 2^5}{2^6 \cdot 5^5}\right)^2 = \left(\dfrac{5^4}{2}\right)^2 = \dfrac{5^8}{2^2}$

b) $\dfrac{7^4 \cdot 3^{15}}{3^4 \cdot 7^5} = \dfrac{3^{11}}{7}$

c) $\left(\dfrac{5^3 \cdot 3^{15}}{2^9 \cdot 3^3 \cdot 2^{15}}\right)^3 = \left(\dfrac{5^3 \cdot 3^{12}}{2^{24}}\right)^3 = \dfrac{5^9 \cdot 3^{36}}{2^{52}}$

69. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\sqrt{\dfrac{121}{193}} = \pm\dfrac{11}{14} = \pm 0{,}78$

b) $\sqrt{\dfrac{225}{256}} = \pm\dfrac{15}{16} = \pm 0{,}93$

c) $\sqrt{\dfrac{324}{961}} = \pm\dfrac{18}{31} = \pm 0{,}58$

d) $\sqrt{\dfrac{289}{900}} = \pm\dfrac{17}{30} = \pm 0{,}56$

70. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\sqrt{\dfrac{20}{17}} = \sqrt{1{,}17} = \pm 1{,}08$

$\sqrt{1{,}170}$	1,08
-1	1 · 1 = 1
01700	10 · 2 = 20
-1664	208 · 8 = 1664
36	

b) $\sqrt{\dfrac{234}{109}} = \sqrt{2{,}14} = \pm 1{,}46$

$\sqrt{2{,}1400}$	1,46
-1	1 · 1 = 1
114	1 · 2 = 2
-96	24 · 4 = 96
1800	14 · 2 = 28
-1716	286 · 6 = 1716
84	

c) $\sqrt{\dfrac{2509}{2312}} = \sqrt{1{,}08} = \pm 1{,}03$

$\sqrt{1{,}0800}$	1,03
-1	1 · 1 = 1
00800	10 · 2 = 20
-609	203 · 3 = 609
191	

d) $\sqrt{\dfrac{833}{17}} = \sqrt{49} = \pm 7$

71. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\pm\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 = \pm\dfrac{3^5}{4^5} = \pm 0{,}24$

b) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\dfrac{7}{5}\right)^2 = \dfrac{7^2}{5^2} = 1{,}88$

c) $\left(\pm\dfrac{12}{8}\right)^{-3} = \pm\left(\dfrac{8}{12}\right)^3 = \pm\dfrac{8^3}{12^3} = \pm 0{,}29$

d) $\dfrac{225}{529} = 0{,}42$

72. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(2^7 - 100) - (25 + 3) = (128 - 100) - 28 = 0$

b) $(9 - 5 \cdot 5) : 4 = -16 : 4 = -4$

c) $9 : 3 + 4 \cdot (-1 + 7) = 3 + 24 = 27$

d) $3 - 22 + 40 - 32 + 1 = -10$

e) $(36 - 3 + 6) : (11 + 28) = 39 : 39 = 1$

f) $(1 + 64 - 50) : 15 = 15 : 15 = 1$

73. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $-27 + 8^2 : 5 = -27 + 12{,}8 = -14{,}2$

b) $5 - 3 \cdot (-56 + 64) - (-4)^2 = 5 - 24 - 16 = -35$

c) $27^2 - 144 : (-24) - 3 \cdot 8^2 = 729 + 6 - 192 = 543$

74. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(8 - 6 \cdot 12)^2 : 2 = 4096 : 2 = 2048$

b) $(64 : 8)^2 - 144 : -24 - 25 = 64 + 6 - 25 = 45$

75. Ejercicio resuelto en el libro.

76. Las soluciones son:

a) $(3-1)\sqrt{2} + (2+3)\sqrt{3} - 5\sqrt{7}$

$= 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 5\sqrt{7} = -1{,}74$

b) $(2-3)\sqrt{5} + (7+9)\sqrt{3} = -\sqrt{5} + 16\sqrt{3} = 25{,}48$

77. Las soluciones son:

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{27}{4} = 3{,}38$

b) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{25}{9} = 2{,}77$

c) $\left(\dfrac{2^2}{1^2}\right)^3 = 2^6 = 64$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9} = 0{,}44$

e) $\left(1 - \dfrac{(-3)^2}{1}\right)^{-1} = (-8)^{-1} = -0{,}13$

f) $\left(\dfrac{5^2}{3^2} + \dfrac{9}{9}\right)^{-2} = \left(\dfrac{9}{34}\right)^2 = 0{,}07$

78. Las soluciones son:

a) $\dfrac{16}{81} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{48}{648} = \dfrac{2}{3^3} = 0{,}07$

b) $\dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{2^2} = 0{,}25$

c) $\left(\dfrac{125}{147}\right)^4 \cdot \dfrac{25}{47} = 0{,}27$

79. Las soluciones son:

a) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{9}{4} : \dfrac{5}{6} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{27}{10} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{20 - 81 + 40}{30} = -0{,}7$

b) $4 + \dfrac{4}{3} : \left(\dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{81}{4}\right)^{-1} = 4 + \dfrac{4}{3} : \left(\dfrac{1}{9}\right) = 4 + 12 = 16$

c) $\left(\dfrac{36}{25} + \dfrac{4}{5}\right)^{-1} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{25}{56} \cdot \dfrac{4}{3} = \dfrac{25}{42} = 0{,}6$

d) $\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{9}{4} : \dfrac{5}{2}\right)^{-1} - \dfrac{64}{225} \cdot \dfrac{25}{36} = \left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{9}{10}\right)^{-1} - \dfrac{16}{81} =$

$$= \frac{40}{41} - \frac{16}{81} = \frac{2584}{3321} = 0{,}78$$

Página 69

80. Las soluciones son:

a) $\frac{3^3}{2^3} : \left(1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{3^3}{2^3} : \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{3^3}{2^3} : \frac{2}{3} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16} =$

$= 5{,}0625$

b) $5^3 \cdot \left[4 : \left(\frac{4}{3}\right)^4\right]^{-2} = 5^3 \cdot \left[4 : \frac{4^4}{3^4}\right]^{-2} = 5^3 \cdot \left[\frac{3^4}{4^3}\right]^{-2} =$

$= 5^3 \cdot \frac{4^6}{3^8} = 78{,}0368$

c) $\frac{2^3}{3^3} : \left(\frac{8}{3}\right)^{-2} = \frac{2^3}{3^3} : \frac{3^2}{2^6} = \frac{2^9}{3^5} = \frac{512}{243} = 2{,}1069$

d) $\frac{5^2}{2^2} - \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{3}{4} : \frac{(2^3)^2}{(3^3)^2}\right] = \frac{5^2}{2^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3^7}{2^8} = \frac{5^2}{2^2} - \frac{3^6}{2^8} =$

$= \frac{5^2 \cdot 2^6 - 3^6}{2^8} = 3{,}402$

81. Las expresiones son:

a) $\frac{\frac{3^2 \cdot 2^4}{7^2} \cdot \frac{7^3 \cdot 3^3}{2^6}}{\frac{5^3 \cdot 3^3}{2^3}} = \frac{3^5 \cdot 2^4 \cdot 7^3}{7^2 \cdot 2^6} : \frac{5^3 \cdot 3^3}{2^3} = \frac{3^5 \cdot 7}{2^2} :$

$: \frac{5^3 \cdot 3^3}{2^3} = \frac{3^5 \cdot 2^3 \cdot 7}{2^2 \cdot 5^3 \cdot 3^3} = \frac{3^2 \cdot 2 \cdot 7}{5^3} = 3^2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 5^{-3}$

b) $\left[\frac{\frac{7^3 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 3^5 \cdot 3^6}{5^3 \cdot 2^6 \cdot 7^5 \cdot 2^5 \cdot 2^6}}{\frac{3^8 \cdot 3^6 \cdot 2^3}{2^8 \cdot 7^6}}\right]^{-1} = \left[\frac{3^{14} \cdot 5^2}{7^2 \cdot 2^{17}} : \frac{3^{14}}{2^5 \cdot 7^6}\right]^{-1} =$

$= \left[\frac{3^{14} \cdot 5^2 \cdot 2^5 \cdot 7^6}{7^2 \cdot 2^{17} \cdot 3^{14}}\right]^{-1} = \left[\frac{5^2 \cdot 7^4}{2^{12}}\right]^{-1} = \frac{2^{12}}{5^2 \cdot 7^4} =$

$= 2^{12} \cdot 5^{-2} \cdot 7^{-4}$

82. El resultado es:

$$2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{9}{4}\right)^{-2}} = 2 - \frac{1}{\left(-\frac{5}{4}\right)^{-2}} = 2 - \left(\frac{-5}{4}\right)^2 = 2 - \frac{25}{16} =$$

$$= \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

83. Los resultados son:

a) $\frac{\frac{2^4}{3 \cdot 5} : \frac{2^3}{3^2 \cdot 2}}{\frac{2^2}{3^4}} = \frac{\frac{2^2 \cdot 3}{5}}{\frac{2^2}{3^4}} = \frac{2^2 \cdot 3^5}{2^2 \cdot 5} = \frac{3^5}{5} = \frac{243}{5} = 48{,}6$

b) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{13}}{\frac{13}{18}} = \frac{2^{13} \cdot 3^2 \cdot 2}{13 \cdot 3^{13}} = \frac{2^{14}}{13 \cdot 3^{11}} = \frac{16384}{2302911} = 0{,}007$

c) $\frac{\frac{4}{5} + \frac{8}{15}}{\frac{1}{25}} = \frac{20}{15} : \frac{1}{25} = \frac{20 \cdot 25}{15} = \frac{4 \cdot 5^3}{3 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 5^2}{3} =$

$= \frac{100}{3} = 33{,}33$

d) $\frac{\frac{2^3}{5^3}}{\frac{5 \cdot 3^5 + 5^3 - 2^3 \cdot 3^3}{3^3 \cdot 5^3}} = \frac{2^3 \cdot 3^3}{1124} = \frac{216}{1124} = 0{,}19217$

e) $\frac{\frac{3}{175}}{\frac{6^2 \cdot 5^3 + 2^2 \cdot 7^2 \cdot 5 - 2^3 \cdot 7^2}{7^2 \cdot 5^3}} = \frac{3}{175} : \frac{5088}{6125} =$

$= \frac{18375}{890400} = \frac{35}{1696} = 0{,}0206$

f) $\frac{\frac{33}{10} - 1}{\frac{4}{25}} = \frac{23}{10} : \frac{4}{25} = \frac{115}{8} = 14{,}375$

84. En notación científica son:

a) $5{,}143 \cdot 10^{21}$

b) $8{,}234 \cdot 10^{25}$

85. En notación científica son:

a) $2{,}37 \cdot 10^9$ b) $2{,}37 \cdot 10^2$ c) $2{,}3702 \cdot 10^{23}$

86. En notación científica son:

$3{,}27 \cdot 10^4 < 1{,}18 \cdot 10^5 < 2{,}1 \cdot 10^5$

87. Los resultados en notación científica son:

a) $(3{,}28 + 22{,}7 - 1{,}15) \cdot 10^3 = 24{,}83 \cdot 10^3 = 2{,}483 \cdot 10^4$

b) $(316 + 2{,}17 - 24{,}5 + 1{,}1) \cdot 10^3 = 294{,}77 \cdot 10^3 =$

$= 2{,}9477 \cdot 10^5$

c) $(64{,}3 + 1{,}18 - 236 - 10{,}6) \cdot 10^{10} = -181{,}12 \cdot 10^{10} =$

$= -1{,}8112 \cdot 10^{12}$

88. El producto es:

$1{,}345 \cdot 10^{20} \cdot 2{,}75 \cdot 10^{15} = (1{,}345 \cdot 2{,}75) \cdot 10^{20+15} =$
$= 3{,}69875 \cdot 10^{35}$

89. Los resultados son:

a) $(3{,}07 \cdot 1{,}1) \cdot 10^{4+3} = 3{,}377 \cdot 10^7$

b) $(2{,}2 \cdot 1{,}8 : 3{,}7) \cdot 10^{12+7-6} = 1{,}07027 \cdot 10^{13}$

c) $(2{,}17 : 1{,}18 : 1{,}06) \cdot 10^{15-11-23} = 1{,}73488967 \cdot 10^{-19}$

90. Los resultados son:

a) $\dfrac{1{,}944\cdot 10^{17}}{6{,}75\cdot 10^{15}}=0{,}288\cdot 10^{2}=2{,}88\cdot 10^{1}$

b) $\dfrac{20{,}9952\cdot 10^{16}}{3{,}375\cdot 10^{9}}=6{,}2208\cdot 10^{7}$

c) $\dfrac{12{,}4416\cdot 10^{24}}{36{,}864\cdot 10^{14}}=0{,}3375\cdot 10^{14}=3{,}375\cdot 10^{13}$

d) $\dfrac{144\cdot 10^{5}-1{,}35\cdot 10^{5}}{0{,}218\cdot 10^{5}+3{,}2\cdot 10^{5}}=\dfrac{142{,}65\cdot 10^{5}}{3{,}418\cdot 10^{5}}=41{,}73493271=$

$=4{,}173493271\cdot 10^{1}$

e) $\dfrac{2{,}88\cdot 10^{17}-4{,}32\cdot 10^{29}}{21{,}5\cdot 10^{6}-1{,}15\cdot 10^{6}}\approx\dfrac{-4{,}32\cdot 10^{29}}{20{,}35\cdot 10^{6}}=$

$=-2{,}122850123\cdot 10^{22}$

91. Puesto que el área es el lado elevado al cuadrado y el perímetro del campo es lado por 4:

$l^2 = 65\,638{,}44\ \text{m}^2 \rightarrow l=\sqrt{65638{,}44}=256{,}19$ m

$\sqrt{65638{,}44}$	256,2
-4	2 · 2 = 4
256	2 · 2 = 4
-225	45 · 5 = 225
3138	25 · 2 = 50
-3036	506 · 6 = 3036
10244	256 · 2 = 512
-10244	5122 · 2 = 10244
0	

valla = 4 · l = 4 · 256,19 = 1 024,76 m

92. En notación decimal serían: $597{,}2 \cdot 10^{22}$.

93. Expresado en notación científica sería: $1 \cdot 10^{9}$.

94. Tenemos que sumar la altura de la montaña y la profundidad de la fosa:

$8{,}488 \cdot 10^{3} + 10{,}971 \cdot 10^{3} = 19{,}459 \cdot 10^{3} =$

$= 1{,}945\,9 \cdot 10^{4}$ km

Y en metros:

$1{,}945\,9\cdot 10^{4}\,\text{km}\cdot\dfrac{10^{3}\,\text{m}}{1\text{km}}=1{,}945\,9\cdot 10^{7}\,\text{m}$

95. Puesto que $50\ \text{t} = 50 \cdot 10^{3}$ kg / día

$\dfrac{50\cdot 10^{3}\,\text{kg}}{\text{día}}\cdot\dfrac{365\text{días}}{1\text{año}}=\dfrac{18250\cdot 10^{3}\,\text{kg}}{\text{año}}=1{,}825\cdot 10^{7}\ \text{kg}/\text{año}$

96. Expresada en notación científica es:

$4 \cdot 10^{6} \cdot 365 = 1460 \cdot 10^{6} = 1{,}46 \cdot 10^{9}$ días

97. Expresado en notación científica:

$46{,}77\cdot 10^{6}\,\text{hab}\cdot 137\dfrac{\text{L}}{\text{día}}=6407{,}49\cdot 10^{6}\,\dfrac{\text{hab.}\cdot\text{L}}{\text{día}}\cdot\dfrac{365\text{días}}{1\text{año}}=$

$=2338733{,}85\cdot 10^{6}=2{,}33873385\cdot 10^{12}\,\dfrac{\text{hab}\cdot\text{L}}{\text{año}}$

Página 70

98. Los cálculos utilizando la notación científica:

a) $r = 1{,}392 \cdot 10^{6}$ km $= 1{,}392 \cdot 10^{9}$ m

$V=\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(1{,}392\cdot 10^{9}\right)^{3}=\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot 1{,}392^{3}\cdot 10^{27}=$

$=1{,}129812343\cdot 10^{28}\approx 1{,}13\cdot 10^{28}\,\text{m}^{3}$

b) $r = 6{,}371 \cdot 10^{3}$ km $= 6{,}371 \cdot 10^{6}$ m

$V=\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(6{,}371\cdot 10^{6}\right)^{3}=\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot 6{,}371^{3}\cdot 10^{18}=$

$=1{,}0832069\cdot 10^{21}\approx 1{,}08\cdot 10^{21}\,\text{m}^{3}$

99. El número de cuadrados perfectos anteriores a 100.000 corresponderá a la parte entera de la raíz cuadrada:

$\sqrt{100000}=316{,}22...$

Por tanto existen 316 cuadrados perfectos menores que 100 000.

100. Cuando el exponente es 0 o negativo.

101. Las afirmaciones son:

a) Falso. Por ejemplo si a = 0,5:

$0{,}5^{2} = 0{,}25 < 0{,}5$

b) Falso. Por ejemplo si a = 0,5

$0{,}5^{-2}=\dfrac{1}{0{,}5^{2}}=\dfrac{1}{0{,}25}=4\succ 0{,}5$

c) Falso. Por ejemplo:

$\sqrt{4}=\pm 2\rightarrow 2^{3}=8\rightarrow\sqrt{8}=2{,}82...$

102. Las respuestas son:

a) $a=\sqrt{361}=\pm 19$

$(2a)^{3}=(2\cdot 19)^{3}=38^{3}=54872$

También tendremos el resultado negativo.

b) $x=\sqrt{121}=\pm 11$

$(3x)^{3}=(3\cdot 11)^{3}=33^{3}=35937$

También tendremos el resultado negativo.

c) $p=\sqrt{625}=\pm 25$

$\sqrt{p}=\sqrt{25}=5$

En este caso solo tendremos el resultado positivo, porque no existe la raíz cuadrada negativa.

103. Llamaremos x al lado de la parcela de Juan, por tanto:

$x\cdot x=x^{2}=4900\ \text{m}^{2}\rightarrow x=\sqrt{4900}=70$ m

a) Si los lados de la parcela de Laura miden el doble que los de la parcela de Juan:

$2x \cdot 2x = 4x^{2} = 4 \cdot 4900 = 19600\ \text{m}^{2}$

b) Si 1 m cuesta 75 euros:

$4 \cdot 2x = 4 \cdot 2 \cdot 70 = 560$ m

560 m · 75 eu. / m = 39200 euros

104. Teniendo en cuenta que al dividir el cuadrado en cuatro cuadrados, estamos dividiendo el lado entre 2:

a) Si lo dividimos 10 veces:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \approx 9{,}77 \cdot 10^{-4}\ \text{m}$$

b) La longitud del lado después de 5 divisiones será:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}\ \text{m}$$

Por tanto el área será:

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{2} = \frac{1}{1024} \approx 9{,}77 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$

105. Los glóbulos que tiene Miguel son:

$$4{,}3 \cdot 10^{6}\ \frac{\text{glób.}}{\text{mm}^3} \cdot \frac{10^6\ \text{mm}^3}{1\text{L}} = 4{,}3 \cdot 10^{12}\ \frac{\text{glób.}}{\text{L}}$$

$$4{,}3 \cdot 10^{12}\ \frac{\text{glób.}}{\text{L}} \cdot 5\text{L} = 2{,}15 \cdot 10^{13}\ \text{glóbulos}$$

106. Las respuestas son:

a) $3 \cdot 10^{5}\ \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot 1\text{año} \cdot \frac{365\text{días}}{\text{año}} \cdot \frac{24\text{h}}{1\text{día}} \cdot \frac{60\,\text{min}}{1\text{h}} \cdot \frac{60\text{s}}{1\,\text{min}} =$

$= 9{,}4608 \cdot 10^{12}\ \text{km}$

b) $1{,}5 \cdot 10^{5}\ \text{añosluz} \cdot \frac{9{,}4608 \cdot 10^{12}\ \text{km}}{1\text{añoluz}} = 1{,}41912 \cdot 10^{18}\ \text{km}$

107. Actividad resuelta en el libro.

108. Las expresiones son:

a) $2{,}33 \cdot 10^{-6}$ c) $3{,}77 \cdot 10^{-9}$

b) $7{,}8 \cdot 10^{-10}$ d) $2{,}11 \cdot 10^{-14}$

109. El volumen del cubo expresado en notación científica es:

$$V = 2{,}5^3 = 15{,}625\text{cm}^3 \cdot \frac{10^{-6}\ \text{m}^3}{1\text{cm}^3} = 1{,}5625 \cdot 10^{-7}\ \text{m}^3$$

110. Actividad de cálculo mental.

111. Actividad de cálculo mental.

Página. 71

1. Si la el diámetro de la Tierra tiene que ser de 1 cm, por tanto 10 mm, la equivalencia será:

$$\frac{10\text{mm}}{12756\text{km}} = \frac{5}{6378}\ \text{mm}/\text{km}$$

$$\frac{10\text{mm}}{12756\text{km}} \cdot \frac{1\text{m}}{10^3\ \text{mm}} = \frac{1}{1{,}2756 \cdot 10^6}\ \text{m}/\text{km}$$

Factores que utilizaremos para convertir los diámetros y distancias:

planeta	Diámetro (mm)	Distancia al Sol (m)
Mercurio	3,824	45,390
Venus	9,548	84,901
Tierra	10,000	117,357
Marte	5,300	178,818
Júpiter	111,947	610,458
Saturno	94,073	1121,119
Urano	39,1972	2255,017
Neptuno	35,278	3532,926

2. El radio del Sol en nuestro modelo sería:

$$1{,}392 \cdot 10^6\ \text{km} \cdot \frac{1\text{m}}{1{,}2756 \cdot 10^6\ \text{km}} \approx 1{,}09125\text{m}$$

Por tanto la respuesta correcta es la C.

3. El diámetro real de la Luna es de 3 474 km, por tanto en nuestro modelo a escala sería:

$$3\,474\text{km} \cdot \frac{5\text{mm}}{6378\text{km}} \approx 2{,}723\text{mm}$$

Y la distancia entre la Tierra y la Luna es de 384400 km, y en nuestro modelo a escala:

$$384400\text{km} \cdot \frac{1\text{m}}{1{,}2756 \cdot 10^6\ \text{km}} \approx 0{,}30135 = 3{,}0135 \cdot 10^{-1}\ \text{m} =$$

$$= 30{,}135\text{cm}$$

4. Teniendo en cuenta que la superficie de una circunferencia se calcula mediante $A = \pi \cdot r^2$:

$r = 30{,}135$ cm

$A = \pi \cdot 30{,}135^2 \approx 2\,852{,}938\ \text{cm}^2$

$$2\,852{,}938\ \text{cm}^2 \cdot \frac{1\text{m}^2}{10^4\ \text{cm}^2} \approx 0{,}285\text{m}^2$$

5. Las respuestas son:

a) Respuesta personal.

b) Suponiendo que es una circunferencia y tomando como radio la distancia entre el Sol y Neptuno:

$r = 3532{,}926$ m

$A = \pi \cdot 3532{,}926^{\,2} \approx 39211996{,}43\ \text{m}^2 \approx 3{,}921 \cdot 10^7\ \text{m}^2 = 39{,}212\ \text{km}^2$

6. Respuesta personal.

7. Actividad personal.

Página 72

1. Las potencias ordenadas de mayor a menor son:

$-7^4 < (-7)^3 = -7^3 < (-7)^{-3} = -7^{-3} < -7^{-4} < (-7)^{-4} < (-7)^0 < (-7)^4$

2. Los resultados son:

a) $(-5)^{2+7+5-12} = (-5)^2 = 25$

b) $[(-3)^3]^3 : (-3)^8 = (-3)^9 : (-3)^8 = -3$

c) $(2^3 \cdot 2^2)^3 : 2^{12} = 2^{10} : 2^{12} = 2^{-2} = 1 / 2^2 = 1 / 4 = 0{,}25$

d) $[5^4 : 5^2]^3 : 5^6 = 5^6 : 5^6 = 1$

e) $\dfrac{(-1) \cdot 2^{25} \cdot (-1) \cdot 3^{10}}{3^8 \cdot 2^{16} \cdot 2^4 \cdot 3^2} = 2^5 = 32$

3. Los resultados son:

a) $\left(\frac{3}{2^3}\cdot\frac{7\cdot 2}{2^2\cdot 3}\right)^2=\left(\frac{7}{2^4}\right)^2=\frac{7^2}{2^8}=\frac{49}{256}=0{,}1914$

$\left(\frac{42}{96}\right)^2=(0{,}4375)^2=0{,}1914$

b) $\left(\frac{3^2}{2^2}:\frac{3\cdot 5}{2\cdot 5}\right)^3=\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{3^3}{2^3}=\frac{27}{8}=3{,}375$

$\left(\frac{9\cdot 10}{4\cdot 15}\right)^3=\left(\frac{90}{60}\right)^3=1{,}5^3=3{,}375$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{5}{2^2}\right)^3=\frac{2^6\cdot 5^3}{5^6\cdot 2^6}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}=8\cdot 10^{-3}$

$\left(\frac{4}{25}\right)^3\cdot\frac{125}{64}=\frac{64}{15\,625}\cdot\frac{125}{64}=\frac{125}{15\,625}=8\cdot 10^{-3}$

4. La simplificación es:

$$\left[\left(\frac{2^4}{3^4}\right)^2:\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2\cdot\frac{3^3}{2^3}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5:\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^2\cdot\frac{3^3}{2^3}=$$

$$=\left[\left(\frac{2}{3}\right)\right]^2\cdot\frac{3^3}{2^3}=\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{3^3}{2^3}=\frac{3}{2}$$

5. Las expresiones son:

a) $2\cdot 3^{-1}$

b) $\frac{(-1)\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 3^6\cdot 3^4}{(-1)\cdot 2^{10}\cdot 3^5}=2^{-7}\cdot 3^8$

c) $\frac{\left(2^4\cdot 3^2\cdot 2^{-5}\cdot 3^{-5}\right)^{-4}}{(-1)\cdot\left(2^{-7}\cdot 3^{-14}\right)}=\left(2^{-1}\cdot 3^{-3}\right)^{-4}\cdot 2^7\cdot 3^{14}\cdot(-1)=$

$=-2^4\cdot 3^{12}\cdot 2^7\cdot 3^{14}=-2^{11}\cdot 3^{26}$

d) $\frac{(-1)\cdot 3^3\cdot 5^3}{(-3)\cdot(-3)^3\cdot 5^2}=\frac{(-1)\cdot 3^3\cdot 5}{3^4}=-3^{-1}\cdot 5$

6. Los resultados son:

a) $\sqrt{345}=\pm 18{,}57$

$\sqrt{3450000}$	18,57
-1	1 · 1 = 1
245	1 · 2 = 2
-224	28 · 8 = 224
2100	18 · 2 = 36
-1825	365 · 5 = 1825
27500	185 · 2 = 370
-25949	3707 · 7 = 25949
1551	

b) $\frac{\pm 4}{\sqrt{129}}=\frac{\pm 4}{\pm 11{,}35}=\pm 0{,}35$

$\sqrt{1290000}$	11,35
-1	1 · 1 = 1
29	1 · 2 = 2
-21	21 · 1 = 21
800	11 · 2 = 22
-669	223 · 3 = 669
13100	113 · 2 = 226
-11325	2265 · 5 = 11325
1775	

7. Los resultados son:

a) $3^2+(-10)^2=9+100=109$

b) $\frac{3^3}{2^3}-1-\frac{1}{3^2}=\frac{3^3\cdot 3^2-3^2\cdot 2^3-2^3}{2^3\cdot 3^2}=\frac{243-72-8}{72}=$

$=\frac{163}{72}\approx 2{,}264$

c) $\frac{-1}{3^3}-\left(\frac{39}{10}\right)^{-2}=\frac{-1}{3^3}-\left(\frac{10}{39}\right)^2=\frac{-1}{27}-\frac{100}{1521}=-\frac{469}{4563}\approx$

$\approx -0{,}103$

d) $\frac{2^3}{3^3}+\left[2-\frac{5^2}{2^2}:\frac{2^3}{3^3}\right]^2=\frac{2^3}{3^3}+\left[2-\frac{5^2\cdot 3^3}{2^5}\right]^2=$

$=\frac{2^3}{3^3}+\left[\frac{2^6-5^2\cdot 3^3}{2^5}\right]^2=\frac{2^3}{3^3}+\left[\frac{-611}{2^5}\right]^2=$

$=\frac{2^3}{3^3}+\frac{611^2}{2^{10}}=\frac{2^{13}+3^3\cdot 611^2}{3^3\cdot 2^{10}}=\frac{10087859}{27648}\approx 364{,}87$

e) $3^3\cdot\frac{3\cdot 5}{3^2}+\frac{1}{3^2}:\left(\frac{28}{5}\right)^{-2}=45+\frac{1}{9}:\frac{5^2}{28^2}=45+\frac{784}{225}=$

$=\frac{10909}{225}\approx 48{,}48$

f) $\frac{\left(\frac{5}{2^2}\right)^3}{\left[2-\frac{5^2}{2^2}\cdot\frac{5^2}{2^2}\right]^2}=\frac{\frac{5^3}{2^6}}{\left[2-\frac{5^4}{2^4}\right]^2}=\frac{\frac{5^3}{2^6}}{\left[\frac{2^5-5^4}{2^4}\right]^2}=$

$=\frac{\frac{5^3}{2^6}}{\left[\frac{-593}{2^4}\right]^2}=\frac{\frac{5^3}{2^6}}{\frac{593^2}{2^8}}=\frac{5^3\cdot 2^2}{593^2}=\frac{500}{351649}\approx$

$\approx 1{,}423\cdot 10^{-3}$

8. Expresados en notación científica son:

a) $5{,}600\,002\,345\,1\cdot 10^{10}$

b) $4{,}322\,5\cdot 10^{8}$

9. Los resultados son:

a) $20{,}88\cdot 10^7-3{,}6\cdot 10^7=17{,}28\cdot 10^7=1{,}728\cdot 10^8$

b) $(3{,}25\cdot 4{,}8)\cdot 10^{4+3}=15{,}6\cdot 10^7$

c) $(6{,}43\cdot 10^{24}):\left[(2{,}36:1{,}06)\cdot 10^{18-15}\right]=$

$$=6{,}43\cdot 10^{24}:\frac{2{,}36}{1{,}06}\cdot 10^{3}=\frac{6{,}43\cdot 1{,}06}{2{,}36}\cdot 10^{24-3}\approx$$

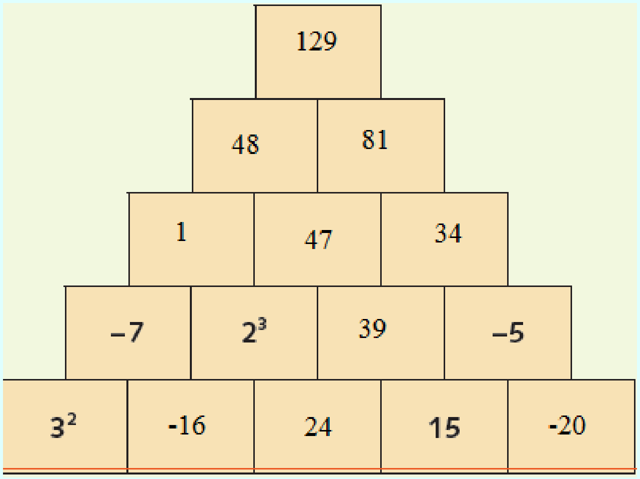
$$\approx 2{,}888\cdot 10^{21}$$

10. Si la computadora puede realizar $3{,}386\cdot 10^{16}$ operaciones por segundo, en un año realizará:

$$\frac{3{,}386\cdot 10^{16}\text{ op.}}{\text{s}}\cdot\frac{3600\text{s}}{1\text{h}}\cdot\frac{24\text{h}}{1\text{día}}\cdot\frac{365\text{días}}{\text{año}}\approx 1{,}06781\cdot 10^{24}$$

Estrategia e ingenio

Pirámide numérica:



Números romanos:

- Las iguldades correctas son:
  a) VIII – III = V
  b) V + IV = IX
  c) XIV – III = XI
- Tenemos que girar la igualdad 180º, y queda:
  X = I + IX

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 3-3 de la guía)

a) $10^4 = 10.000$

b) $10^7 = 10.000.000$

c) $10^5 = 100.000$

d) $10^{10} = 10.000.000.000$

(Viene de la página 3-5 de la guía)

d) $3^{3\cdot 3} = 3^9$

e) $(-1)^{4\cdot 6} = (-1)^{24} = 1^{24} = 1$

f) $(-6)^{2\cdot 5} = (-6)^{10} = 6^{10}$

4. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(-1)^2\cdot 3^2\cdot 5^2 = (3\cdot 5)^2 = 15^2$

b) $[5\cdot(-7)]^3 = (-35)^3$

c) $[(-3)\cdot(-5)]^5 = 15^5$

5. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(3^4\cdot 3^3)^4 = (3^7)^4 = 3^{28}$

b) $[(2^3)^3\cdot(2^2)^2]^4 : (2^4)^2 = (2^9\cdot 2^4)^4 : 2^8 =$
$= 2^{52} : 2^8 = 2^{44}$

c) $(3^{16} : 3^9)^4\cdot 3^8 = 3^{28}\cdot 3^8 = 3^{36}$

6. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $(2^3\cdot 3^3\cdot 2^6)^3 = 2^{27}\cdot 3^9$

b) $(3^3\cdot 2^6\cdot 3^8\cdot 2^4)^5 = (3^{11}\cdot 2^{10})^5 = 3^{55}\cdot 2^{50}$

c) $[(-2^2)^6\cdot 3^2\cdot 2^2]^4 = (2^{14}\cdot 3^2)^4 = 2^{56}\cdot 3^8$

d) $[3^5\cdot(-2)^4\cdot 3^4]^2 = (3^9\cdot 2^4)^2 = 3^{18}\cdot 2^8$

e) $[3^3\cdot(-5)^3\cdot(-5)^5\cdot 5^5]^7 = [3^3\cdot 5^5\cdot(-5)^8]^7 = 3^{21}\cdot 5^{91}$

f) $[2^{18}\cdot(-3)^5\cdot 2^{15}]^5 = [2^{33}\cdot(-3)^5]^5 = 2^{165}\cdot(-3)^{25}$

g) $[(-5)^5\cdot 7^5 : 7^3]^6\cdot 5^4 = [(-5)^5\cdot 7^2]^6\cdot 5^4 = 5^{34}\cdot 7^{12}$

h) $[(-3)^3\cdot 2^{12}\cdot 2^5\cdot(-3)^5\cdot 5^5]^3 : (2^3\cdot 5) =$
$= [(-3)^8\cdot 2^{17}\cdot 5^5]^3 : (2^3\cdot 5) = 3^{24}\cdot 2^{48}\cdot 5^{14}$

(Viene de la página 3-7 de la guía)

b) $$\left(\frac{(-2)^3\cdot 3^4}{3^3\cdot 7^2}\right)^3 : \frac{7^2}{2\cdot 3^2} = \frac{(-2)^9\cdot 3^{12}}{3^9\cdot 7^6}\cdot\frac{2\cdot 3^2}{7^2} =$$
$$= (-1)^9\cdot\frac{2^{12}\cdot 3^5}{7^6} = (-1)\cdot\frac{2^{12}\cdot 3^5}{7^6}$$

c) $$\frac{5\cdot 3}{2^5}\cdot\left[\left(\frac{3^4}{2^4\cdot 3}\right)^5 : \left(\frac{(-1)\cdot 2^2\cdot 3}{5^2}\right)^7\right]^2 =$$
$$= \frac{5\cdot 3}{2^5}\cdot\left(\frac{3^{20}}{2^{20}\cdot 3^5} : \frac{5^{14}}{(-1)\cdot 3^7\cdot 2^{14}}\right)^2 = \frac{5\cdot 3}{2^5}\cdot\left(\frac{3^{20}\cdot 5^{14}}{(-1)\cdot 2^{34}\cdot 3^{12}}\right)^2 =$$
$$= \frac{5\cdot 3}{2^5}\cdot\left(\frac{3^{16}\cdot 5^{28}}{2^{68}}\right) = \frac{3^{17}\cdot 5^{29}}{2^{73}}$$

d) $$\frac{(-3)^{15}}{2^{15}} : \left(\frac{(-2)^{12}}{3^{12}} : \frac{2^{16}}{3^{16}}\right) = \frac{(-3)^{15}}{2^{15}} : \left(\frac{3^4}{2^4}\right) = \frac{(-3)^{11}}{2^{11}}$$

(Viene de la página 3-9 de la guía)

b) $3^0 = 1$

c) $\left(2^9\cdot 2^8\right)^{-3} = \dfrac{1}{2^{51}}$

d) $\dfrac{3^5\cdot 2^{14}}{2^{10}\cdot 3^7} = \dfrac{2^4}{3^2}$

e) $\dfrac{5^5\cdot 5^3}{2^5\cdot 2^3} = \dfrac{5^8}{2^8}$

f) $\left(\dfrac{3^3}{(-2)^3}\right)^3 = \dfrac{3^9}{(-2)^9}$

g) $\left(\dfrac{2^2\cdot 3^3}{3^2\cdot 2^3}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{3^3}{2^3}$

h) $\left(\dfrac{(-5)^3\cdot(-5)}{3^3\cdot 3}\right)^2 = \dfrac{(-5)^8}{3^8} = \dfrac{5^8}{3^8}$

14. Podemos argumentar este ejercicio de la siguiente manera:

1. Observamos qué pasa cuando elevamos cualquier número real a 0:

$$5^0 = 5^{(1-1)} = \frac{5^1}{5^1} = 1$$

2. Vamos a ver qué sucede cuando elevamos el número 0 a 0:

$$0^0 = 0^{(1-1)} = \frac{0^1}{0^1}$$

Vemos que esta potencia no está definida porque no se puede dividir 0 entre 0.

(Viene de la página 3-9 de la guía)

17. El resto de la raíz debe cumplir que la siguiente condición:

$35\cdot 2 + 1 = 71 \succ \textit{resto} \rightarrow \textit{resto} = 70$

Por lo tanto, para saber el número hacemos:

$35^2 + 70 = 1295$

Podemos demostrar que es correcto con $\sqrt{1296} = 36$

18. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\sqrt{1382} \rightarrow \text{raíz} = 37, \text{resto} = 13.$

$\sqrt{13{,}82}$	37
-9	$3\cdot 3 = 9$
482	$3\cdot 2 = 6$
-469	$67\cdot 7 = 469$
13	

b) $\sqrt{2428} \rightarrow \text{raíz} = 49, \text{resto} = 27$

$\sqrt{24{,}28}$	49
-16	4 · 4 = 16
828	4 · 2 = 8
-801	89 · 9 = 801
27	

c) $\sqrt{2750} \rightarrow$ raíz = 52, resto = 46.

$\sqrt{27{,}50}$	52
-25	5 · 5 = 25
250	5 · 2 = 10
-204	102 · 2 = 204
46	

d) $\sqrt{3725} \rightarrow$ raíz = 61, resto = 4

$\sqrt{37{,}25}$	61
-36	6 · 6 = 36
125	6 · 2 = 12
-121	121 · 1 = 121
4	

19. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7} = 0{,}43$

b) $\sqrt{\frac{100}{121}} = \frac{10}{11} = 0{,}91$

c) $\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{8}{9} = 0{,}89$

d) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5} = 0{,}40$

20. Las soluciones a este ejercicio son:

a) $\sqrt{\frac{65}{25}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{25}} = \frac{8{,}0}{5} = 1{,}6$

$\sqrt{\frac{65}{25}} = \sqrt{2{,}6} = 1{,}6$

Se halla el mismo resultado.

b) No existe por tener la raíz un número negativo.

(Viene de la página 3-13 de la guía)

22. Las resoluciones son:

a) $\frac{5}{3} - \frac{1}{\left[\frac{5}{3}-1\right]^{-1}} + 1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}} + 1 =$

$\frac{5}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{5-2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$

b) $\frac{\left(1-\frac{2^2}{3^2}\right)^2}{\left(1-\frac{3}{2}\right)^{-2}} : \left(3-\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{\frac{5^2}{3^4}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}} : \left(\frac{9}{4}\right)^{-1} = \frac{5^2}{3^4 \cdot 2^2} :$

$: \frac{2^2}{3^2} = \frac{3^2 \cdot 5^2}{3^4 \cdot 2^4} = \frac{5^2}{3^2 \cdot 2^4} = \frac{25}{144} = 0{,}1736$

c) $\frac{\frac{2^4}{3^2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3 \cdot 5}{3^3}}{\left(\frac{5}{2^2} \cdot \frac{2^4}{5^2}\right) - \left(2 - \frac{2^2 \cdot 3}{5 \cdot 7} : \frac{2^3}{7}\right)} = \frac{\frac{2^4}{3^2} + \frac{1}{3}}{\frac{2^2}{5} - \left(2 - \frac{3}{2 \cdot 5}\right)} =$

$= \frac{\frac{2^4+3}{3^2}}{\frac{2^2}{5} - \left(\frac{2^2 \cdot 5 - 3}{2 \cdot 5}\right)} = \frac{\frac{2^4+3}{3^2}}{\frac{2^3 - 2^2 \cdot 5 + 3}{2 \cdot 5}} = \frac{\frac{19}{9}}{\frac{-9}{10}} =$

$= \frac{19 \cdot 10}{-9 \cdot 9} = \frac{190}{-81} = -2{,}34568$

(Viene de la página 3-15 de la guía)

29. La masa de la Luna es:

$(5{,}98 / 81{,}3) \cdot 10^{24} \approx 0{,}0736 \cdot 10^{24} = 7{,}36 \cdot 10^{22}$

30. Si los beneficios de la empresa del ultimo año han sido de $2 \cdot 10^5$ euros y crece a un ritmo del 5% anual:

a) Para calcular el factor de crecimiento anual, lo calculamos el beneficio del segundo año y lo dividimos entre 2

$$\frac{2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{5}{100}}{2} = \frac{2 \cdot 10^5 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^5}{2^2 \cdot 5^2}}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 10^5 + \frac{10^5}{2 \cdot 5} = \left(2 + \frac{1}{10}\right) \cdot 10^5}{2} = 1{,}05 \cdot 10^5$$

b) Y para calcular el beneficio al cabo de 5 años, multiplicamos el factor de crecimiento por 5:

$1{,}05 \cdot 10^5 \cdot 5 = 5{,}25 \cdot 10^5$ euros

(Viene de la página 3-5 de la guía)

■ Terminamos las sección dedicada a las potencias de base entera y exponente natural estudiando la potencia de una potencia.

Comprobaremos con un ejemplo el procedimiento a seguir, explicado en el recuadro azul.

– *Calcula* $(-6^4)^3$.

A continuación trabajaremos, mediante dos ejemplos, una de las principales aplicaciones de estas propiedades: la simplificación de expresiones algebraicas.

– *¿Qué propiedades hemos aplicado para simplificar en el primer ejemplo?*

Antes de resolver el segundo ejemplo nos fijaremos en el epígrafe *Potencias de bases opuestas,* indicado en el margen. Analizaremos este último ejemplo y preguntaremos a los alumnos:

– *¿Por qué interesa expresar 16 como potencia de 4?*

– *¿Por qué* $(-4)^2 = 4^2$*?*

Los alumnos contestarán a las actividades propuestas, donde tendrán que aplicar las propiedades estudiadas.

2 Potencias de base fraccionaria y exponente…

■ La siguiente sección propone el aprendizaje de las potencias de base una fracción, de manera similar al caso anterior en que la base era un número entero.

Leeremos el texto, veremos los ejemplos y preguntaremos.

– *¿Cómo se calcula la potencia de una fracción?*

Después valoraremos el grado de asimilación de los nuevos conceptos pidiendo a los alumnos que resuelvan la actividad 7 de la página 56.

2.1 Propiedades

■ En este subapartado leeremos los enunciados de las propiedades de estas potencias, comprobando que las potencias de fracciones tienen las mismas propiedades que las de números enteros. Al acabar haremos las siguientes preguntas:

– *¿Cómo se calcula la potencia de un producto de fracciones?*

Añadiremos la propiedad de la *Suma y resta de poten-cias*, expuesta en la nota lateral. Lanzaremos las pregun-tas:

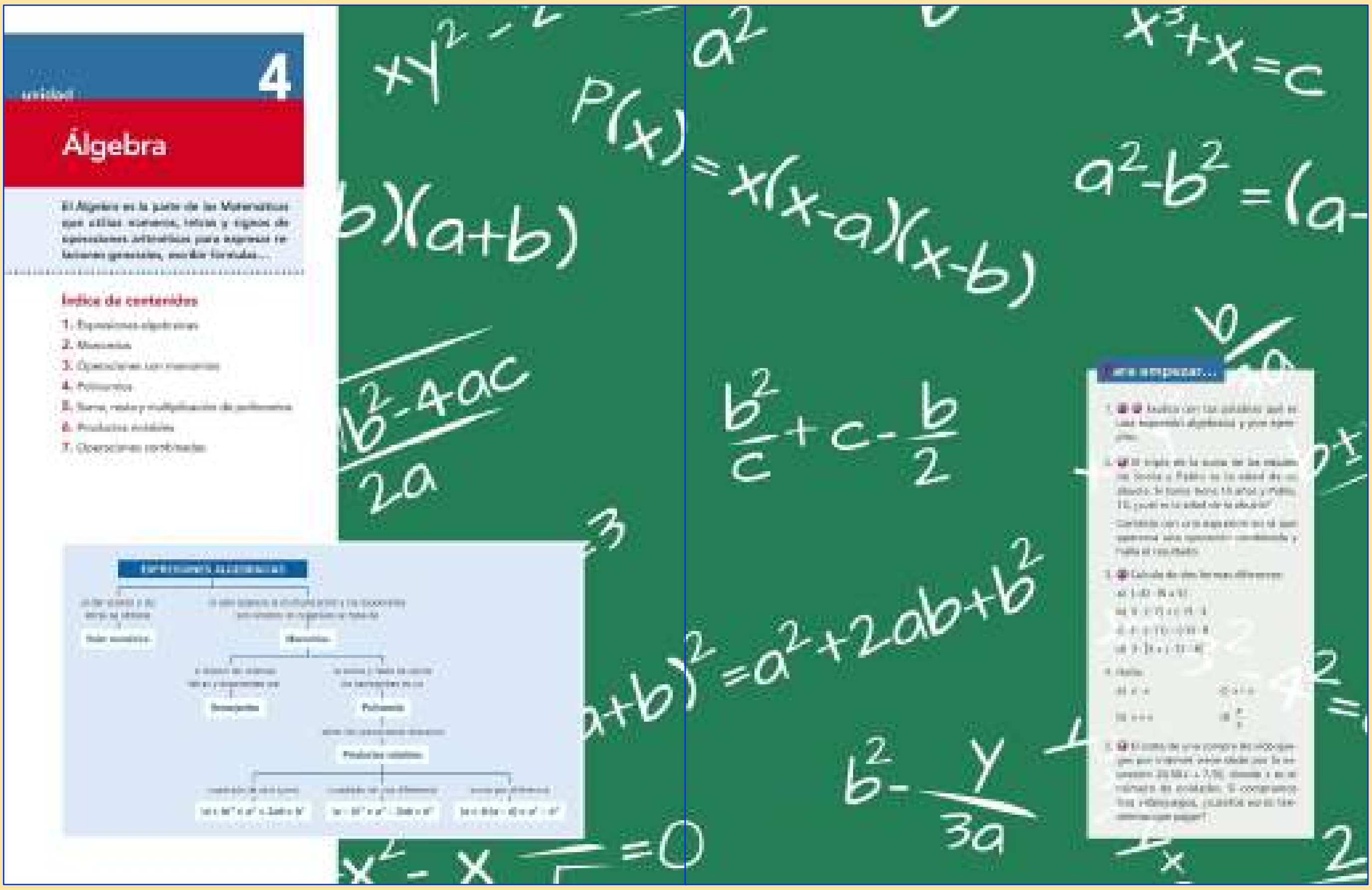
– *¿Cómo se suman potencias con la misma base?*

– *¿Coincide el cuadrado de suma con la suma de los cuadrados?*

Finalmente, los alumnos leerán y pondrán en práctica el apunte al margen titulado *Calculadora*, que indica cómo realizar operaciones con potencias de fracciones con la calculadora.

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/743340	https://www.youtube.com/watch?v=nxs5wye0JXs
http://www.tiching.com/743343	http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/potencia/index.htm
http://www.tiching.com/743344	http://www.masmates.com/mm170003.htm
http://www.tiching.com/743345	https://www.youtube.com/watch?v=PXmTaU4M0gM
http://www.tiching.com/743346	http://htwins.net/scale2/
http://www.tiching.com/743347	http://lasmatematicas.eu/problemas-notacion-cientifica-1/eso/ejercicios/potencias-expresiones-algebraicas/problemas-en-los-que-se-utiliza-la-notacion-cientifica



INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ El objetivo de esta unidad didáctica es repasar y ampliar el estudio de las expresiones algebraicas.

Para introducir a los alumnos en el nuevo tema, les pediremos que observen la imagen e iniciaremos un pequeño debate en torno a esta cuestión:

– *¿Qué entiendes por álgebra?*

A continuación leeremos el texto introductorio y les formularemos estas preguntas, que nos servirán para empezar a aclarar conceptos:

– *¿Cómo se distingue una expresión numérica de una expresión algebraica?*

– *¿Qué representan las letras de una expresión algebraica?*

Continuaremos leyendo el índice de contenidos y el esquema de la unidad que establece la relación entre esos contenidos. Destacaremos la utilidad del álgebra en el día a día comentando entre todos:

– *¿Has utilizado expresiones algebraicas alguna vez en situaciones de la vida cotidiana?*

– *¿Cómo calculamos el precio de las manzanas dependiendo de los kilos que compremos?*

Empezamos la unidad

■ En esta sección se plantean una serie de actividades para comprender y empezar a practicar los conceptos que se desarrollarán a lo largo de la unidad. La finalidad de cada una de estas actividades es:

– La actividad 1 introduce el concepto de expresión algebraica.

– La actividad 2 evidencia la utilidad del álgebra en situaciones comunes y pone en práctica la resolución de problemas mediante expresiones algebraicas.

– En la actividad 3 se revisan las reglas de prioridad al operar, las propiedades de las operaciones y la simplificación, que aplicaremos también a las expresiones algebraicas.

– La actividad 4 introduce las expresiones algebraicas que incluyen letras.

– En la actividad 5 se pone de manifiesto el valor numérico de las expresiones algebraicas.

■ Finalmente, pediremos al alumnado que resuelva estas actividades por parejas con el fin de averiguar el nivel de conocimientos del que parten y, en consecuencia los contenidos en que debemos profundizar.

Competencias Clave

Comunicación lingüística

- *Act. 1* Expresar de forma escrita los conocimientos adquiridos en cursos anteriores al resolver la actividad.

Aprender a aprender

- *Acts. 1 a 5.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.
- *Acts. 1 y 3.* Saber transformar la información sobre álgebra, recopilada en cursos anteriores en conocimiento propio.
- *Esquema.* Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

Competencias sociales y cívicas

- *Texto.* Valorar el álgebra como una parte imprescindible de las Matemáticas que nos permitirá aplicaciones muy amplias.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

- *Acts. 2 y 5.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen sobre álgebra para resolver la actividad.

Recursos didácticos

Navegamos por Tiching

– Para iniciar la unidad sobre el álgebra y revisar los conceptos asimilados en cursos anteriores, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/743435

La página web ofrece diversas propuestas interactivas que permiten repasar definiciones y comprobar el nivel del que parte cada alumno.

Les propondremos que realicen unas cinco actividades: sopa de letras con definiciones, con palabras clave o completar frases explicativas.

Como docentes, les pediremos que las resuelvan sin consultar Internet ni tampoco del libro. Es interesante que los alumnos y alumnas repitan la actividad si no han acertado en el resultado.

Como se trata de actividades autocorrectivas, aportan un plus pedagógico ya que el alumnado podrá reconocer individualmente su nivel, al verificar si las soluciones son correctas.

Educamos en valores

Precisión, orden y claridad en la presentación

- La sociedad de la información se construye a partir de una ingente cantidad de datos que deben expresaser con claridad y rigor. Las matemáticas proporcionan muchas herramientas que facilitan el tratamiento de la información.
- En esta guía se hace referencia a la necesidad de presentar la información con rigor y claridad. Algunas de las actividades que contribuyen a conseguir este objetivo:

– Las reglas de representación de las expresiones, como se indica en la página 76, contribuyen a mejorar la claridad de la información presentada.

– Los métodos de simplificación, como el comentado en las notas de la página 77, mejoran la claridad de las expresiones y reducen el número de errores.

– La expresión de los polinomios en su forma ordenada, como en la actividad 18 de la página 82, es necesaria para realizar determinadas operaciones como la división.

Libro Digital

- *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

Soluciones de las actividades

Pág. 75

Para empezar…

1. Una expresión algebraica es un conjunto de números y de símbolos ligados entre sí por los signos de las operaciones del álgebra y que no contiene más funciones que aquellas que pueden calcularse con las operaciones del álgebra (suma, multiplicación y sus inversas)

Ejemplos

$5 + 3$

$(-4) \cdot (6 + 5)$

2. El enunciado nos dice que el triple de las edades de Sonia (S) y Pablo (P) es igual a la edad de la abuela (A), por lo que nos queda la siguiente expresión:

$3 \cdot (S + P) = A$

Si Sonia tiene 15 años ($S = 15$) y Pablo tiene 13 años ($P = 13$), sustituimos en la expresión y obtenemos la edad de la abuela:

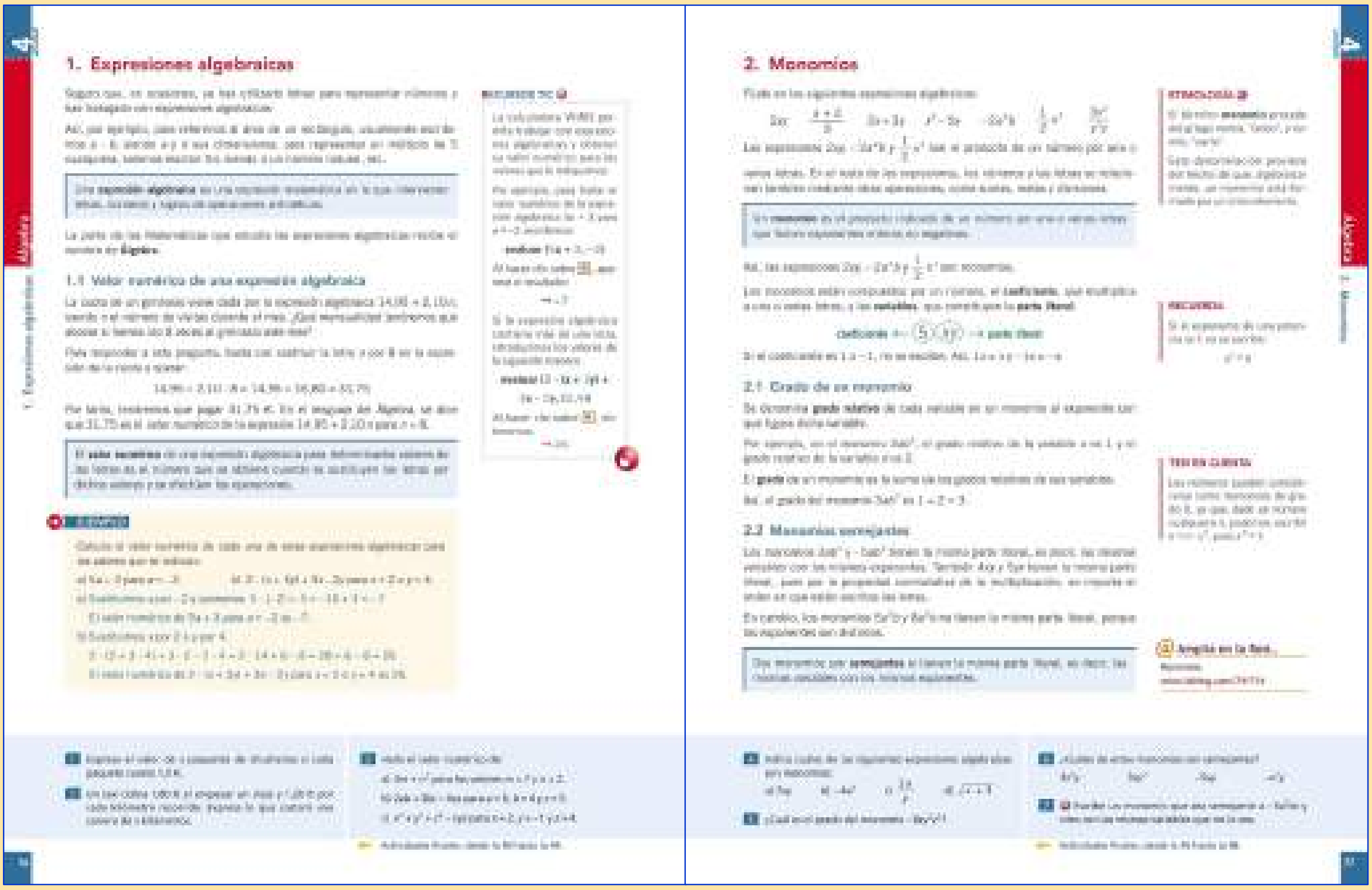
$3 \cdot (15 + 13) = A$

$3 \cdot 28 = A$

$A = 84$

La edad de la abuela es 84 años.

(Continúa en la página 4-28 de la guía)



1. Expresiones algebraicas

2. Monomios

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS / 2. MONOMIOS

■ El objetivo básico de esta sección consiste en identificar las expresiones algebraicas distinguiéndolas de las expresiones numéricas.

Leeremos la introducción y la definición del recuadro y formularemos estas preguntas al alumnado:

– *¿De qué consta una expresión algebraica además de números y letras?*

– *¿Puede una expresión algebraica no tener letras?*

Los alumnos resolverán ahora los ejercicios 1 y 2.

1.1 Valor numérico de una expresión algebraica

■ Leeremos este apartado, comprobando detenidamente en los ejemplos el procedimiento a seguir indicado en el recuadro coloreado.

– *¿Qué se obtiene al sustituir las letras por sus valores en una expresión algebraica?*

– *¿Cuántas variables hay en el ejemplo a)?*

– *¿Cuántos valores necesitamos conocer para calcular el valor numérico de la expresión del ejemplo b)?*

Pediremos a continuación a los alumnos que contesten a la actividad 3 y compararemos los resultados obtenidos.

Por último les indicaremos cómo utilizar la calculadora online WIRIS del apartado *Recursos TIC* cuando trabajemos expresiones algebraicas.

■ La siguiente sección tiene como finalidad repasar y completar los conceptos básicos sobre monomios, introducidos en cursos anteriores.

Leeremos la introducción, la definición y los elementos del monomio y preguntaremos al alumnado:

– *¿Puede incluir un monomio sumas o restas?*

– *¿Cuál es la parte literal del monomio* $3x^2 5y^3$ *?*

A continuación los alumnos leerán el apunte *Recuerda* y como curiosidad la *Etimología* del término *monomio*.

2.1 Grado de un monomio

■ Los alumnos leerán ahora este apartado, donde mediante ejemplos introduciremos el concepto de grado.

Completaremos este apartado con el apunte del margen *Ten en cuenta*.

2.2 Monomios semejantes

■ Leeremos a continuación el siguiente apartado y razonaremos si los siguientes monomios son o no semejantes:

– *¿Son semejantes 3ab y 7ba? ¿Y 7a y 7b?*

Los alumnos pueden afianzar y poner en práctica los conceptos expuestos accediendo al recurso *@Amplía…* y a continuación realizando las actividades propuestas.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Etimología.* Usar el vocabulario adecuado y aprender el orígen etimológico de las palabras clave sobre el tema.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la calculadora WIRIS, que permite trabajar con expresiones algebraicas.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1 a 3.* Aplicar los conceptos algebraicos de forma repetitiva para mejorar la eficacia de resolución.

■ *Acts. 4 a 6.* Aplicar los nuevos conceptos sobre monomios para resolver las actividades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 7.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para practicar la búsqueda del valor numérico de una expresión algebraica.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para repasar las expresiones algebraicas y los monomios, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/743436

En la siguiente página web se encuentra un dosier dentro del proyecto Descartes, dónde se incluyen escenas interactivas en las que se muestran la interpretación de las expresiones algebraicas.

Les pediremos que practiquen en ellas y que luego respondan:

- *¿Cómo distinguiremos una expresión numérica de una algebraica?*
- *¿Qué ha de tener una expresión algebraica además de números y letras?*
- *¿Podrías escribir algunos ejemplos de estas expresiones en la vida real?*
- *¿Cuántos elementos debe tener un monomio? ¿Pueden contener signos los monomios?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Pág. 76

1. La x representa el número de paquetes de chucherías y 1,5 € lo que cuesta cada paqueta. Se representa con la siguiente expresión.

1,5x

2. La expresión para un taxi que cobra 1,80 € al empezar el viaje y 1,20 € por cada kilómetro es:

1,8 + 1,2x

3. Sustituimos los valores numéricos en las expresiones dadas.

a) $3 \cdot 7 + 2^2 = 21 + 4 = 25$

b) $2 \cdot 6 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 6 = 48 + 60 - 120 = -12$

c) $2^2 + (-1)^2 + 4^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 4 = 4 + 1 + 16 + 8 = 29$

Pág. 77

4. Las expresiones algebraicas son monomios el *a* y el *b*. En el *c*, es una división de dos monomios, y en el *d*, la variable *x* está en una raíz cuadrada.

5. El grado del monomio es la suma de los exponentes de la parte literaria que lo componen, por lo que se tiene:

1 + 3 + 2 = 6.

6. Son semejantes el $3x^2y$ y el $-x^2y$, porque en las dos expresiones las *x* y las *y* tienen los mismos exponentes.

7. Actividad personal.

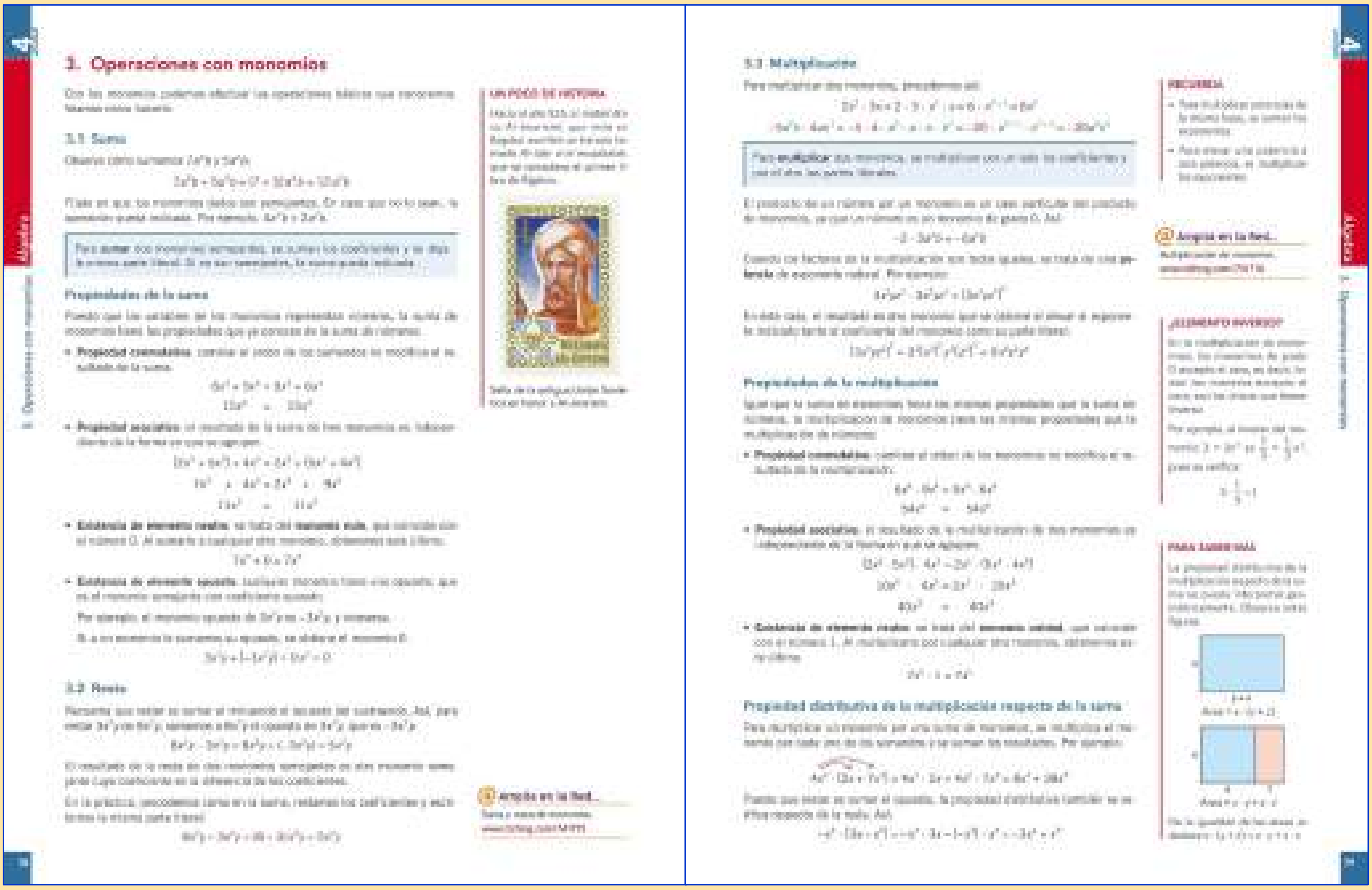
Los polinomios semejantes al dado son los que tienen a^2bc como parte literal.

Ejemplo: a^2bc

Uno con las mismas variables pero que no sea semejante sería abc^2.

Págs. 78 a 81

GUÍA DIDÁCTICA Y SOLUCIONARIO


3. Operaciones con monomios

3.1 Suma

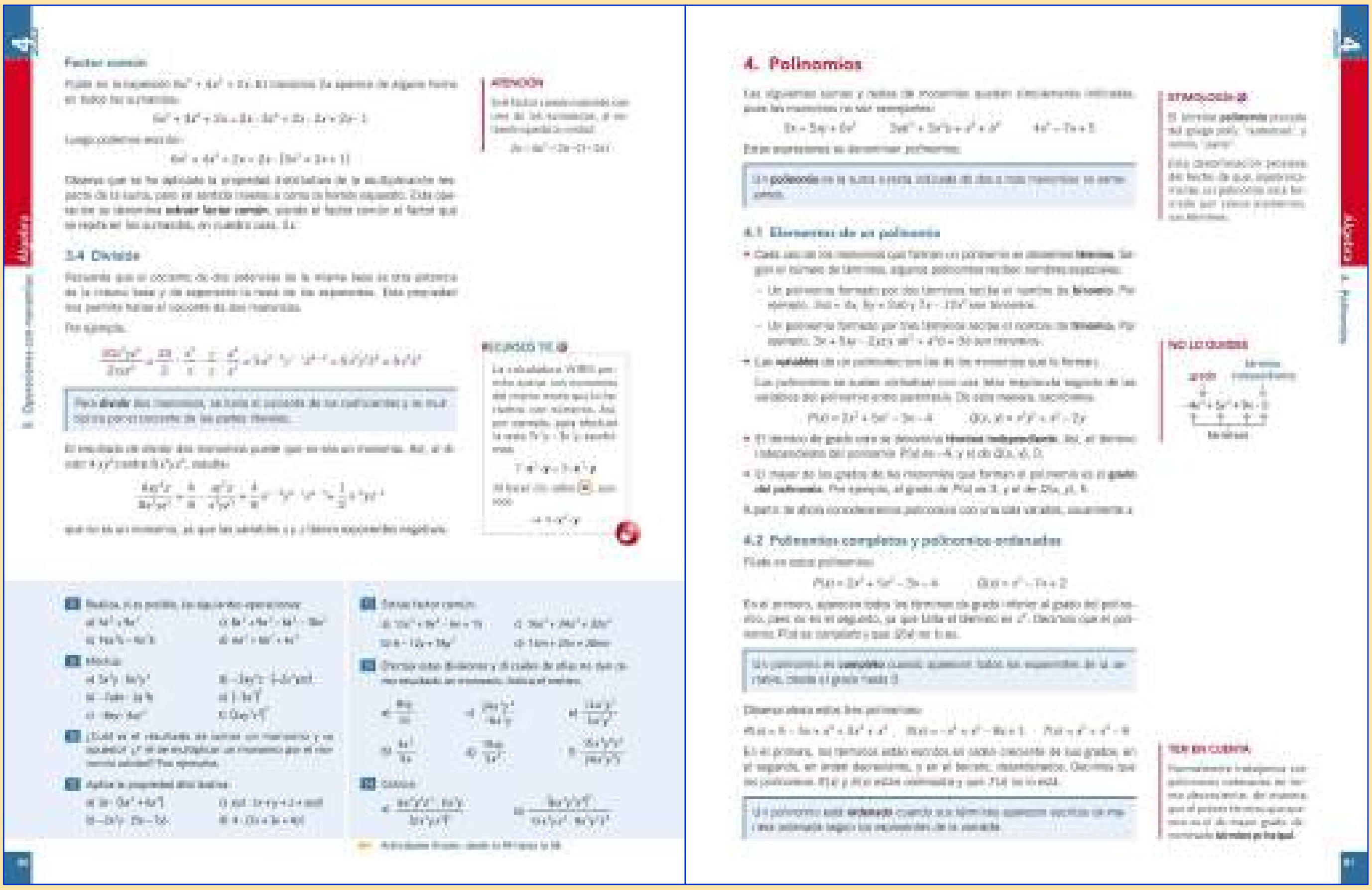
Propiedades de la suma

3.2 Resta

3.3 Multiplicación

Propiedades de la multiplicación

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma


Factor común

3.4 División

4. Polinomios

4.1 Elementos de un polinomio

4.2 Polinomios completos y polinomios ordenados

3.1 Suma

■ El objetivo básico de la primera sección consiste en aprender a operar con monomios aplicando una serie de propiedades.

A modo de preámbulo, el alumnado puede leer el texto del margen *Un poco de historia.* Luego podemos preguntar:

– *¿En qué cultura situarías el origen del álgebra?*

■ A continuación, leeremos el apartado referente a la suma de monomios y plantearemos este cuestionario a los alumnos para destacar los contenidos más importantes:

– *¿Qué parte de los monomios semejantes se suma?*
– *¿Qué parte permanece inalterada?*
– *¿Se pueden sumar $3x^2y^3 + 3x^3y^2$?*

Al acabar, prestaremos atención a las propiedades de la suma, que comprobaremos con los ejemplos propuestos en el libro:

– *¿Cuál es el opuesto de $3b^4$?*
– *¿Cuál es el resultado de sumar dos monomios opuestos?*

3.2 Resta

■ Tras estudiar la suma de monomios, trabajaremos en el la resta, introduciéndola como una transformación de la suma. Leeremos el texto y los ejemplos y plantearemos al alumnado estas cuestiones:

– *¿Cumple la resta la propiedad conmutativa?*
– *¿Cómo tienen que ser los monomios para restarlos?*

Los alumnos practicarán la suma y resta de monomios entrando en el recurso *Tiching* 741715.

3.3 Multiplicación

■ En primer lugar, repasaremos en la nota *Recuerda* las reglas para multiplicar potencias, cuyo dominio es fundamental para poder avanzar con los monomios.

A continuación, leeremos el texto y observaremos los ejemplos y casos particulares presentados:

– *Al elevar un monomio al cuadrado, ¿qué parte del monomio queda elevada a dicha potencia?*

Posteriormente, estudiaremos las propiedades de la multiplicación apoyándonos en múltiples ejemplos del libro. Preguntaremos:

– *En la propiedad distributiva ¿por qué valor multiplicaremos cada monomio dentro del paréntesis?*

Completaremos la exposición de las propiedades con los dos apuntes del margen: *Para saber más* y *¿Elemento inverso?*

– *¿Cuál es el inverso de $7x^3$?*

Finalmente, los alumnos accederán al recurso *Tiching* indicado, donde pondrán en práctica estos conceptos.

(Continúa en la página 4-30 de la guía)

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Etimología.* Usar el vocabulario adecuado y aprender el orígen etimológico de las palabras clave.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de la calculadora WIRIS, que nos permite operar con monomios como si fueran números.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 8, 9, 11 y 12.* Aplicar el proceso aprendido para operar con monomios y mejorar la eficacia de resolución.

■ *Acts. 13 y 14.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos sobre división de monomios a situaciones parecidas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 10.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre monomios.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 4 servirá como práctica a la extracció de factor común en polinomios.

✓ La actividad de ampliación 2 consolidará el método de división de monomios y polinomios.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Pág. 80

8. El resultado de las operaciones es:

a) $5x^3 + 9x^3 = 14x^3$

b) $16a^2b - 9a^2b = 7a^2b$

c) $8x^2 + 9\,x^2 - 6x^2 - 10\,x^2 = x^2$

d) $6\,(a^2 + b^2 + c^2)$

9. Los resultados son:

a) $5x^2y \cdot 65x^2y^2 = 30x^4y^3$

b) $-7abc \cdot 2a^2b \; = -14a^3b^2c$

c) $-8xy \cdot 4xy^3 = 32x^2y^4$

d) $6xy^2z \cdot (-2x^3yzt) = -\,12x^4y^3z^2t$

e) $(-3x^2)^3 = -27x^6$

f) $(4xy^2z^3)^2 = 16x^2y^4z^6$

10. Actividad personal.

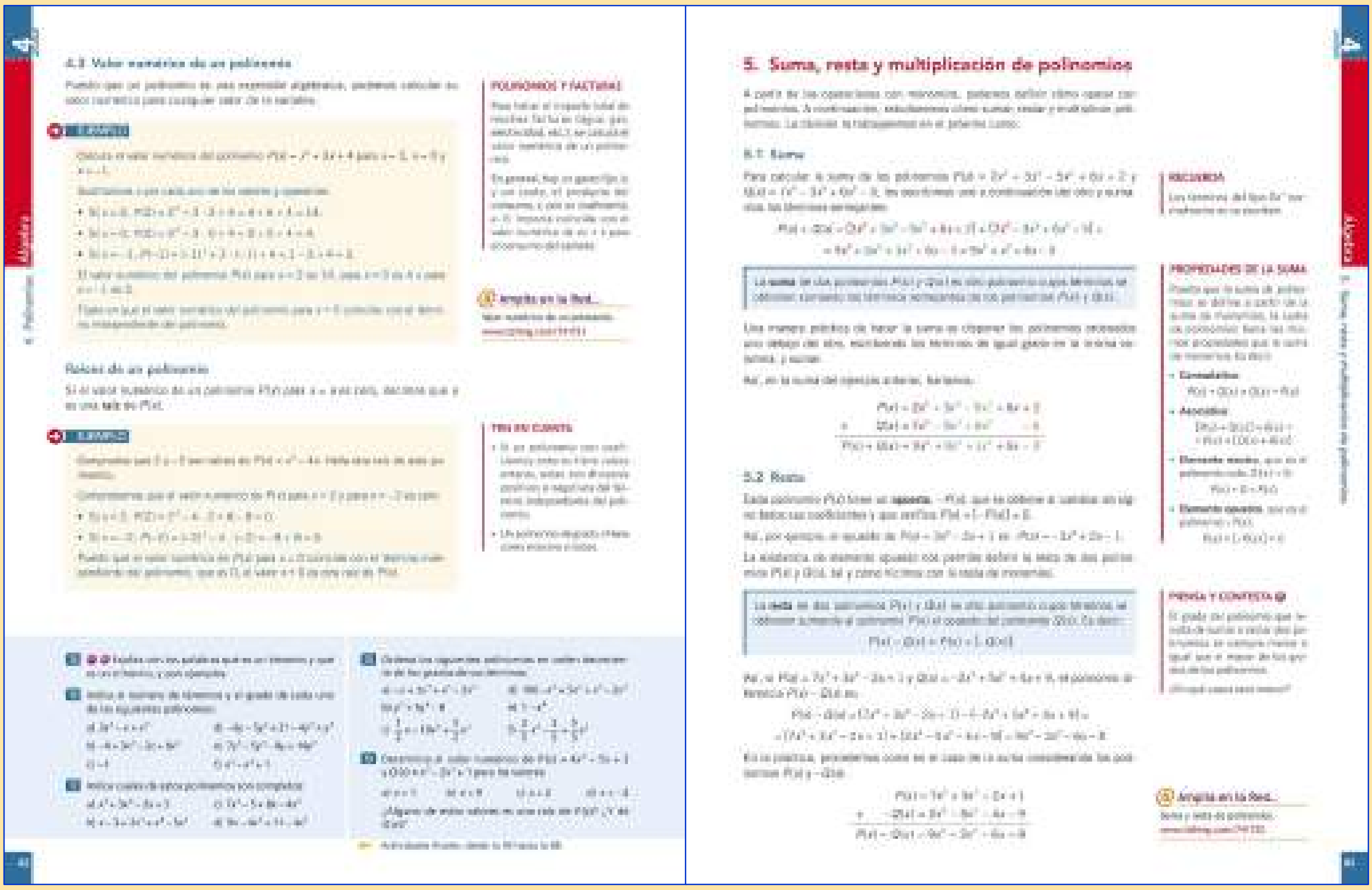
$m(x) + [-m(x)] = 0$

$1 \cdot m(x) = m(x)$

11. Al aplicar la propiedad distributiva obtenemos:

a) $3x \cdot (5x^2 + 6x^3) = 3x \cdot 5x^2 + 3x \cdot 6x^3 = 15x^3 + 18x^4$

(Continúa en la página 4-28 de la guía)



4. Polinomios (cont.) / 5. Suma, resta y…

4.3 Valor numérico de un polinomio

■ Para empezar, el alumnado leerá este apartado y comprobará las operaciones que se realizan en el ejemplo propuesto.

– *¿Qué significa la expresión P(2)?*

En el epígrafe *Polinomios y facturas* observaremos una aplicación de los polinomios en la vida cotidiana.

A continuación, los alumnos pueden practicar estos cálculos accediendo al recurso *@Amplía en la Red.*

Leeremos ahora el siguiente subapartado prestando atención al ejemplo de cálculo de raíces de un polinomio:

– *¿Qué debe cumplir el polinomio para que 0 sea raíz?*

– *¿Qué valor numérico tiene un polinomio al sustituir la variable por una de sus raíces?*

Por último destacaremos la importancia de las observaciones indicadas en el apunte *Ten en cuenta:*

– *¿Cuáles serían las posibles raíces de $x^2 - 4$?*

Después los alumnos pueden contestar a la actividad 19.

5 Suma, resta y multiplicación de polinomios

■ Tras leer el apartado sobre la suma de polinomios plantearemos estas cuestiones al alumnado:

– *¿Qué términos de dos polinomios pueden sumarse?*

– *¿Cómo es el grado del polinomio resultante?*

Es importante prestar atención a la regla que se indica en el margen, bajo el título *Recuerda.*

Leeremos en el lateral las *Propiedades de la suma* de polinomios, derivadas de las de los monomios:

– *¿Existen elemento neutro y opuesto de la suma y la resta de polinomios? ¿Cuáles son?*

■ El siguiente apartado permite ampliar el procedimiento anterior para resolver restas de polinomios. Lo leeremos y lanzaremos las preguntas:

– *¿Qué se hace con los monomios del polinomio sustraendo?*

– *¿Cómo se disponen los términos del polinomio para facilitar el cálculo?*

Leeremos ahora el planteamiento expresado en *Piensa y contesta,* y fomentaremos la participación del alumnado para resolver el interrogante que se propone.

Para finalizar, comprobaremos si los alumnos han asimilado correctamente los conceptos, revisando la teoría y los ejercicios planteados en el recurso *Tiching.*

Completaremos estos ejercicios con las actividades 20 a 23 propuestas en el libro en la página 84.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 15.* Expresar por escrito argumentos propios, utilizando correctamente el léxico sobre el tema.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 15.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades y transformar la información en conocimiento propio.
- *Acts. 16 a 19.* Reconocer y asimilar los conceptos y las propiedades de las operaciones con polinomios y ser capaz de reproducirlos.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Piensa y contesta.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones.
- *Act. 19.* Identificar las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

APRENDER A APRENDER

- *@Amplía en la Red...* Utilizar recursos de Internet para calcular el valor numérico de polinomios.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 resultará útil para practicar la identificación del grado de monomios y polinomios.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para seguir trabajando en clase los polinomios, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/743438

El proyecto Descartes ed@d ofrece diferentes recursos didácticos sobre monomios y polinomios. En esta web podremos encontrar un resumen con las principales características y propiedades.

Mediante ventanas interactivas, los alumnos pueden practicar los diferentes conceptos estudiados en los diferentes apartados.

Propondremos al alumnado realizar los ejercicios de autoevaluación para tener una perspectiva de los conocimientos adquiridos. La web incluye también la posibilidad de enviar los resultados al tutor e imprimir la información de la página.

A modo de ampliación, les pediremos que lean el apartado *Para saber más* y que respondan:

- *¿Recuerdas cuáles son las obras más editadas de la historia?*
- *¿Qué nombre recibió la máquina precursora de los ordenadores modernos?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Pág. 82

15. Actividad personal.

Un binomio es un polinomio de dos términos.

Ejemplo: $2x + 1$

Un trinomio es un polinomio de tres términos.

Ejemplo: $5x^2 + 6x - 7$

16. Las respuestas son:

a) 3 términos, grado 3.

b) 4 términos, grado 3.

c) 1 término, grado 0.

d) 5 términos, grado 4.

e) 4 términos, grado 4.

f) 3 términos, grado 3

17. Las respuestas son las siguientes:

a) Incompleto

b) Completo

c) Completo

d) Completo

18. Al ordenar de forma decreciente obtenemos:

a) $x^5 + 3x^3 - 2x^2 - x$

b) $5y^6 + y^3 - 8$

c) $-10x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

d) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 100$

e) $-x^8 + 1$

f) $\frac{3}{5}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{5}$

19. Los valores numéricos para cada uno de los valores son:

a) $P(1) = 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 4 - 5 + 2 = 1$

$Q(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

b) $P(0) = 4 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 2 = 2$

$Q(0) = 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 1 = 1$

c) $P(2) = 4 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 16 - 10 + 2 = 8$

$Q(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

d) $P(-2) = 4 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = 16 + 10 + 2 = 28$

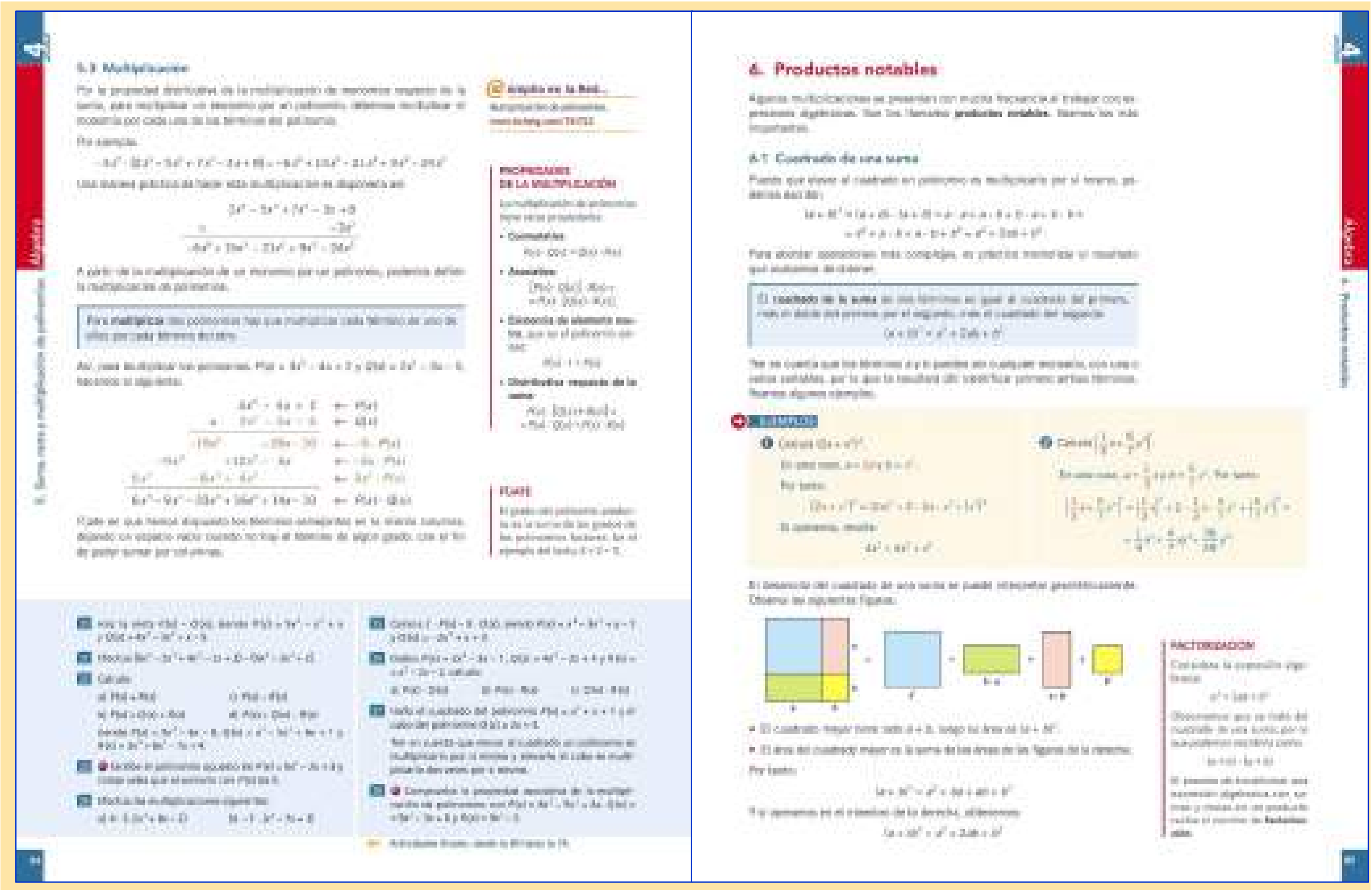
$Q(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 1 = -8 - 8 + 1 = -15$

Ninguno de los valores es raíz de P(x).

$x = 1$ es raíz de Q(x).

Piensa y contesta

El grado del polinomio resultante será menor cuando el monomio de mayor grado sea igual en los dos polinomios en el caso de la resta u opuestos en el caso de la suma.



5. SUMA… (CONT.) / 6. PRODUCTOS NOTABLES

5.3 Multiplicación

■ El objetivo de este apartado es deducir la multiplicación de polinomios, a partir del producto de un polinomio por un monomio. Leeremos la primera parte del apartado observando el ejemplo y preguntaremos:

– *¿Qué grado tiene el polinomio producto obtenido?*

Proseguiremos con la lectura del apartado, trabajando el procedimiento de multiplicación con otro ejemplo. La respuesta al grado del polinomio producto, la obtendremos en la anotación del margen *Fíjate.* Luego preguntaremos:

– *¿Cómo se colocan los polinomios que se multiplican para facilitar el producto?*

– *¿Y los términos que vamos obteniendo al multiplicar?*

– *¿Cuál será el grado del producto de $x^2 - 2x + 4$ por $3x^5 + x^3 - 8$?*

■ Trabajaremos a continuación las *Propiedades de la multiplicación* de polinomios, prestando atención al documento del margen.

– *¿Coinciden con las propiedades de los monomios?*

– *¿Qué propiedad hemos aplicado en el procedimiento estudiado para multiplicar polinomios?*

Ahora practicaremos la multiplicación accediendo al recurso *@Amplía en la Red.*

Por último pediremos al alumnado que resuelvan las actividades 24 a 28 propuestas en el libro.

6.1 Cuadrado de una suma

■ En la sección sobre productos notables trabajaremos ciertas operaciones con expresiones algebraicas, que por su frecuencia es importante que memoricemos.

■ Empezaremos leyendo el apartado referente al cuadrado de una suma. Analizaremos los ejemplos, preguntando a los alumnos:

– *¿Cómo obtenemos el monomio* $-10x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$*?*

A partir de lo anterior podemos deducir el proceso inverso, lo que se conoce como *Factorización*, como se explica en la nota del margen. Propondremos el ejercicio:

– *Factoriza el polinomio: $16 + 8x + x^2$.*

Indicaremos al alumnado la importancia de identificar estos productos notables a la hora de simplificar expresiones.

Por último, comprobaremos, con ayuda de la geometría, la deducción del primer producto notable. Seguiremos atentamente el procedimiento indicado, demostrando la veracidad de la fórmula.

Para ampliar los contenidos, los alumnos pueden acceder al recurso *Tiching 741724* de la página 87.

Competencias clave

Comunicación lingüística

- *Acts. 27 y 28.* Leer, comprender e interpretar los enunciados procesando correctamente los datos.

Aprender a aprender

- *Acts. 20, 21 y 24 a 26.* Identificar y manejar las posibles respuestas, tomando decisiones de manera racional.
- *Acts. 23 y 28.* Trabajar la aplicación de las propiedades de las operaciones con polinomios, tomando decisiones de manera racional.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

- *Act. 20.* Poner en práctica los conocimientos adquiridos sobre las raíces, extrayendo conclusiones y siendo perseverante en la resolución.
- *Act. 27.* Reflexionar antes de resolver las actividades y tomar decisiones de forma razonada, aplicando las estrategias aprendidas de manera sistemática.

Recursos didácticos de la guía

✓ La actividad de refuerzo 3 servirá para practicar las operaciones con monomios y polinomios introduciendo poco a poco el uso de productos notables.

✓ La actividad de refuerzo 5 resultará conveniente para practicar la suma y la multiplicación de polinomios.

Recursos didácticos

Navegamos por Tiching

– Para trabajar en clase los productos notables, proponemos entrar en este enlace del Proyecto Gauss:

http://www.tiching.com/743440

Esta página ofrece diversas propuestas para trabajar los productos notables.

En primer lugar, encontraramos una breve explicación teórica.

Seguidamente, se proponen una serie de actividades interactivas dónde se trabajan las equivalencias geométricas de las operaciones.

Estas actividades son una buena propuesta para que el alumnado no sólo memorice la fórmula algebraica, sino que también la deduzca. A continuación, corregiremos conjuntamente las actividades en clase, para ver cómo han seguido el proceso.

Soluciones de las actividades

Pag. 84

20. Con los polinomios dados:

$P(x) = 5x^3 - x^2 + x$

$Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 5$

Realizamos la resta para obtener:

$P(x) - Q(x) = x^3 + 2x^2 + 5$

21. La solución es:

$(6x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3) - (4x^4 - 3x^3 + 2) =$

$= 2x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x + 1$

22. Con los polinomios dados obtenemos:

a) $3x^3 + 15x^2 - 13x - 4$

b) $x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 7x - 3$

c) $-3x^3 + 3x^2 + x - 12$

d) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 11$

23. Al hacer el polinomio opuesto obtenemos:

$-P(x) = -5x^2 + 2x - 3$

Que al restarse con P(x) original resulta:

$P(x) + (-P(x)) = (5 - 5)x^2 + (-2 + 2)x - (3 - 3) = 0$

24. Los resultados son:

a) $4 \cdot (-2x^3 + 8x - 5) = -8x^3 + 32x - 20$

b) $-7 \cdot (x^2 - 7x + 3) = -7x^2 + 49x - 21$

25. Calculamos primero por separado los polinomios:

$2\,P(x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x - 2$

$3\,Q(x) = -6x^3 + 3x + 9$

Finalmente

$2\,P(x) - 3\,Q(x) = 2x^4 + 6x^3 - 6x^2 - x - 11$

26. Dados los polinomios

$P(x) = 2x^2 - 3x - 1$

$Q(x)= 4x^2 - 2x + 4$

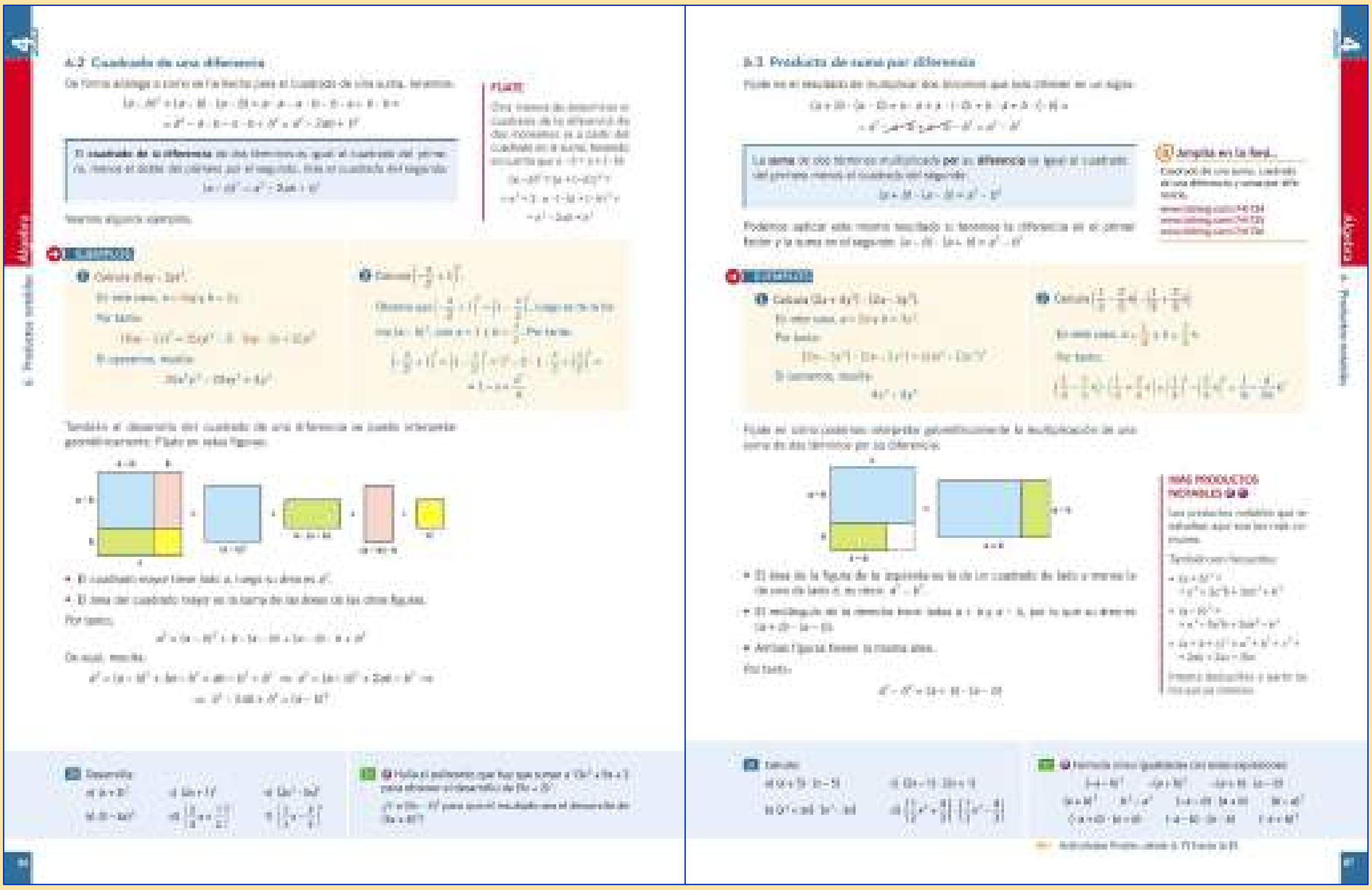
$R(x) = x^2 - 2x - 2$

Resulta:

a) $P(x) \cdot Q(x)$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^2 & -\ 3x & -\ 1 \\
 & & 4x^2 & -\ 2x & +\ 4 \\
\hline
 & & 8x^2 & -\ 12x & -\ 4 \\
 & -4x^3 & +\ 6x^2 & +\ 2x & \\
8x^4 & -\ 12x^3 & -\ 4x^2 & & \\
\hline
8x^4 & -\ 16x^3 & +\ 10x^2 & -\ 10x & -\ 4
\end{array}$$

(Continúa en la página 4-28 de la guía)



6. Productos notables (continuación)

6.2 Cuadrado de una diferencia

■ Los dos apartados que siguen, utilizan la misma metodología para exponer otros dos productos notables que los alumnos deberán memorizar.

■ Primero, leeremos el apartado referente al cuadraro de una diferencia, observandos el desarrollo seguido para llegar a la fórmula y la definición del recuadro. A continuación nos fijaremos en los ejemplos y preguntaremos:

– *¿Cuántos monomios tiene el polinomio resultado del cuadrado de una diferencia?*

– *¿Cómo obtenemos el término –x en el segundo ejemplo?*

Leeremos ahora la nota *Fíjate*, que nos presenta otra manera de enfocar el cuadrado de la diferencia.

Como en el caso del cuadrado de la suma, veremos ahora la equivalencia geométrica del cuadrado de la diferencia y al acabar lanzaremos la pregunta:

– *¿Por qué los dos rectángulos tienen áreas iguales?*

■ Los alumnos ampliarán el contenido de este apartado consultando el *Tiching 741725.*

Por último pediremos al alumnado que resuelva las actividades propuestas, comprobando el grado de asimilación de conceptos.

6.3 Producto de suma por diferencia

■ Comenzaremos la lectura de este apartado con la deducción de la fórmula de la suma de dos términos por su diferencia.

A continuación, pondremos en práctica lo enunciado en el recuadro coloreado, a través de dos ejemplos resueltos. Después formularemos al alumnado las siguientes preguntas:

– *¿Cuántos términos tiene el polinomio resultado de la suma por diferencia?*

– *¿Cómo factorizarías el polinomio $16x^2 - y^2$ aplicando la fórmula anterior?*

De nuevo, verificaremos la expresión de la suma por diferencia a través del cálculo de áreas de varios rectángulos.

Los alumnos pueden practicar ahora este último producto notable accediendo al recurso *Tiching 741526.*

Propondremos después al alumnado el reto sugerido en el epígrafe *Más productos notables,* trabajando por parejas y estimulando la cooperación entre compañeros.

Para finalizar esta sección, los alumnos realizarán las actividades planteadas, donde relacionarán los productos notables estudiados intentando memorizarlos.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 30 y 32.* Comprender e interpretar los enunciados de las actividades en los que se incluyen términos específicos sobre operaciones con polinomios.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 29 y 31.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.
- *Acts. 30 y 32.* Buscar una coherencia global de sus conocimientos al ejecutar las actividades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 30.* Aplicando los conocimientos sobre productos notables de polinomios en la resolución de actividades.
- *Act. 32.* Analizar el enunciado, seleccionar una estrategia, valorar las posibles respuestas y tomar decisiones con criterio propio para resolver la actividad.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de ampliación 1 consolidará el uso de los productos notables en la división de polinomios

✓ La actividad de ampliación 3 servirá para comprobar si el alumnado identifica productos notables en expresiones a simplificar.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para seguir trabajando en clase los productos notables, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/743490

En el apartado de indentidades notables, en primer lugar se les ofrece una breve explicación de cada producto y un ejemplo sencillo.

A continuación deberán acceder a los ejercicios interactivos, en los cuales se les propone que escojan la opción correcta. Si se encuentran con errores, se les facilita que vuelvan a repasar la teoría.

Estas actividades son una forma entretenida de mecanizar el uso de estos productos.

Al acabar, comentaremos en clase las dificultades que los alumnos han encontrado, así como la puntuación obtenida, que reflejará el nivel de errores.También les preguntaremos:

- *¿Qué clase de polinomio se obtiene al hacer el cuadrado de una suma?*
- *¿Cómo se expresa $a^2 – b^2$ en forma de producto de suma por diferencia?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Pág. 86

29. Los resultados son los siguientes:

a) $x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

b) $3^2 – 2 \cdot 3 \cdot 4x + (4x)^2 = 9 – 24x + 16x^2$

c) $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$

d) $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 2\cdot\frac{2}{3}x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}$

e) $(2x^2)^2 – 2 \cdot 2x^2 \cdot 5x + (5x)^2 = 4x^4 – 20x^3 + 25x^2$

f) $\left(\frac{2}{3}x\right)^2 - 2\cdot\frac{2}{3}x\cdot\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{9}{25}$

30. El resultado es:

$(5x + 2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$

El polinomio es:

$25x^2 + 20x + 4 – (13x^2 + 9x + 2) = 12x^2 + 11x + 2.$

Por otra parte, como:

$(3x – 4)^2 = 9x^2 – 24x + 16$

$(3x + 4)^2 = 9x^2 + 24x + 16$

El segundo polinomio que buscamos es:

$9x^2 + 24x + 16 – (9x^2 – 24x + 16) = 48x.$

Pág. 87

31. Aplicando las fórmulas de los productos notables

a) $(x)^2 - (5)^2 = x^2 - 25$

b) $(x^2)^2 - (3x)^2 = x^4 - 9x^2$

c) $(2x)^2 - (1)^2 = 4x^2 - 1$

d) $\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 - \frac{16}{9}$

32. Las 5 igualdades son:

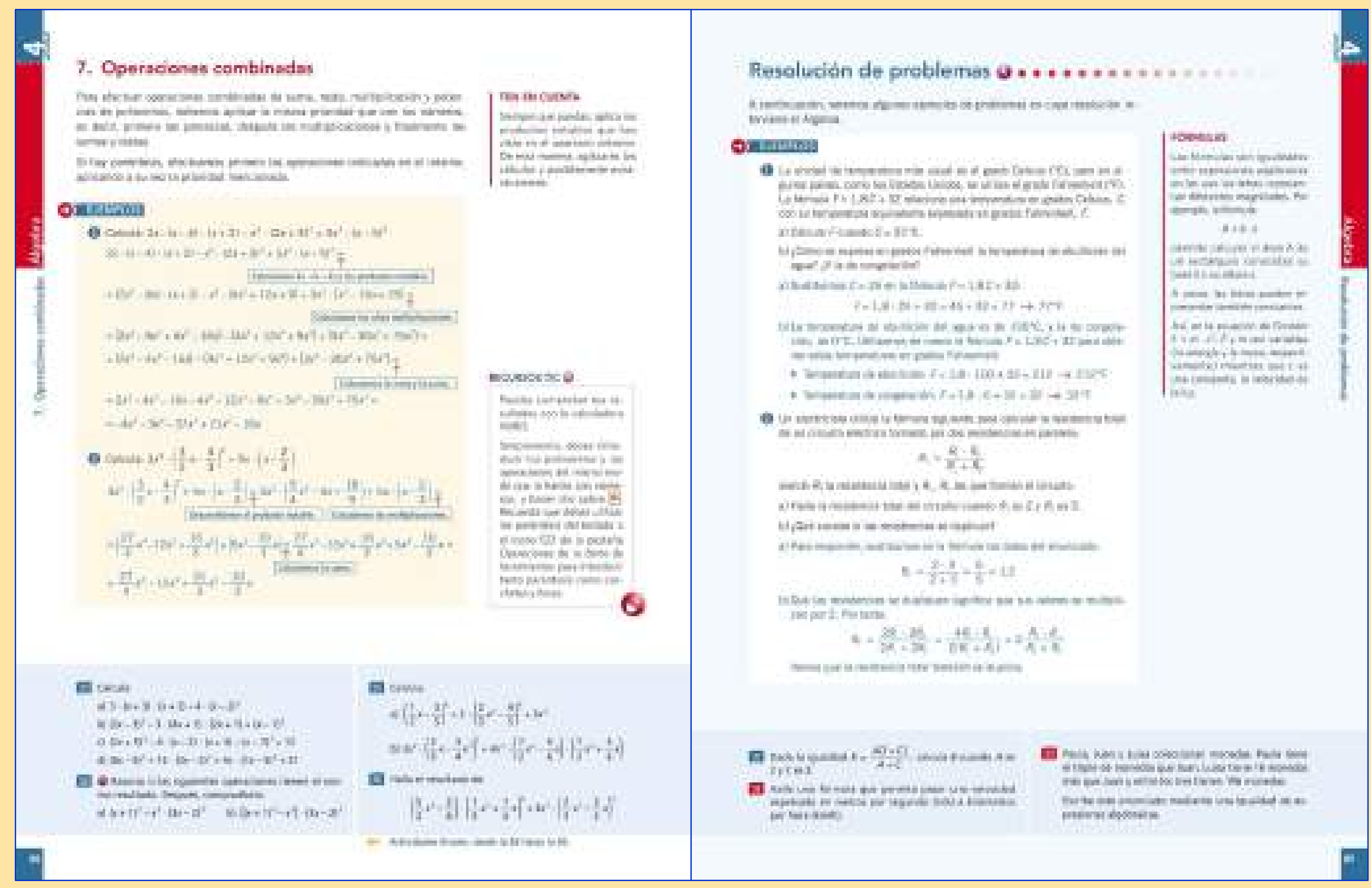
$(-a-b)^2 = (a+b)^2$

$(b-a)^2 = (-a+b)^2$

$b^2 - a^2 = -(a+b)(a-b)$

$-(a+b)^2 = (-a-b)(a+b)$

$(-a+b)\cdot(a+b) = (-a-b)\cdot(a-b)$


7. Operaciones combinadas

Resolución de problemas

7. OPERACIONES COMBINADAS / RESOLUCIÓN...

7. Operaciones combinadas

■ El objetivo de esta sección es revisar las reglas de prioridad de las operaciones estudiadas anteriormente, aplicadas a las expresiones algebraicas.

Haremos hincapié en la búsqueda de productos notables en las expresiones, como se indica en la nota *Ten en cuenta,* lo que simplificará mucho las operaciones.

Observaremos el primer ejemplo y preguntaremos:

– *¿Identificas en el primer ejemplo algún producto notable? Indícalo.*

– *¿Qué operación realizarías a continuación? ¿Por qué?*

Abordaremos ahora el segundo ejemplo, planteando estas cuestiones al alumnado:

– *¿Qué operarías en primer lugar? ¿Por qué?*

– *Después de multiplicar, ¿podemos realizar la suma de esos polinomios resultantes?*

Por último, fomentaremos el uso de la nuevas tecnologías entre los alumnos,leyendo las instrucciones *Recursos TIC* a la hora de trabajar con la calculadora online WIRIS.

Ahora los alumnos pueden practicar la metodología con los ejercicios propuestos en el libro.

Resolución de problemas

■ En esta sección se analiza la resolución de problemas, adaptando el método general presentado en temas anteriores a las particularidades de las situaciones en que se aplica el álgebra.

En primer lugar los alumnos leerán la nota *Fórmulas:*

– *¿Qué es una fórmula? Pon un ejemplo.*

– *¿Qué pueden representar las letras que aparecen en una fórmula?*

– *¿Es una fórmula la expresión para calcular el área de un rectángulo* $A = b \cdot h$ *?*

– *¿Cuál es la fórmula para obtener un número par?*

A continuación, observaremos los ejemplos propuestos, comentándolos entre todos:

– *¿En qué unidad están expresados los datos y en qué unidad nos piden expresarlos en el primer ejemplo?*

– *En el apartado b) del segundo ejemplo, ¿es necesario calcular el valor numérico? Razona tu respuesta.*

Destacaremos la importancia de identificar los datos del problema y las unidades de cada magnitud.

Por último, pediremos a los alumnos que resuelvan las actividades propuestas, donde pondrán a prueba su destreza en la resolución de problemas.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 34*. Desarrollar la capacidad de expresar por escrito un enunciado, utilizando correctamente el léxico.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la calculadora WIRIS, con la que se pueden comprobar los resultados de las operaciones.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 33, 35 y 36.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades para resolver los ejercicios propuestos.
- *Act. 34.* Saber transformar la información recopilada y construir sus propias estrategias para aplicarlas en la resolución de los problemas y saber razonarlo.

SENTIDO DE INICIATIVA I ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Resolución de problemas*. Observar el planteamiento y resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas y el orden de las operaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos ampliar el cálculo de polinomios con el fin de reforzar los conceptos explicados en el apartado sobre operaciones combinadas. Para ello, entraremos en la página:

http://www.tiching.com/743441

En este recurso encontramos diferentes propuestas de actividades.

Los alumnos escogerán el apartado correspondiente en el que encontrarán 15 ejercicios y podrán comprobar la solución, pero no el proceso.

Como docentes, nos servirá para verificar cómo desarrollan el ejercicio nuestros alumnos, y a su vez ellos verán por sí mismos dónde pueden cometer errores.

A continuación, les preguntaremos a nuestros alumnos y alumnas:

- *¿Cuál es la prioridad a seguir en las operaciones combinadas?*
- *¿Sabrías decir exactamente el orden de las operaciones?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Pág. 88

33. Calculamos las siguientes expresiones aplicando productos notables y propiedades de multiplicación.

a) $3\cdot(x+3)(x+2)-4\cdot(x-2)^2 =$

$= 3\cdot(x^2+5x+6)-4\cdot(x^2-4x+4) =$

$= 3x^2+15x+18-4x^2+16x-16 = -x^2+31x+2$

b) $(2x-3)^2-3\cdot(4x+1)(2x+1)+(x-1)^2 =$

$= (4x^2-12x+9)-3\cdot(8x^2+6x+1)+(x^2-2x+1) =$

$= 4x^2-12x+9-24x^2-18x-3+x^2-2x+1 =$

$= -19x^2-32x+7$

c) $(2x+5)^2-4\cdot(x-2)(x+3)-(x-7)^2+12 =$

$= (4x^2+20x+25)-4\cdot(x^2-x-6)-(x^2-14x+49)+$

$+12 = 4x^2+20x+25-4x^2+4x+24-x^2+14x+49+$

$+12 = -x^2+38x+110$

d) $(8x-9)^2+16\cdot(3x-5)^2+4x\cdot(7x-9)^2+27 =$

$= (64x^2-144x+81)+16\cdot(9x^2-30x+25)+$

$+4x(49x^2-126x+81)+27 = 64x^2-144x+81+$

$+144x^2-480x+400+196x^3-504x^2+$

$+324x+27 = 196x^3-296x^2-300x+508$

34. No tienen el mismo resultado, porque en la a) existe un producto que debe resolverse primero, mientras que en la b) se debe resolver primero el corchete que el producto.

a) $(x+1)^2-x^2\cdot(3x-2)^2 = (x^2+2x+1)-$

$-x^2\cdot(9x^2-12x+4) = x^2+2x+1-9x^4+12x^3-4x^2 =$

$= -9x^4+12x^3-3x^2+2x+1$

b) $[(x+1)^2-x^2]\cdot(3x-2)^2$

$= [x^2+2x+1-x^2]\cdot(9x^2-12x+4)$

$= [2x+1]\cdot(9x^2-12x+4)$

$= 18x^3-24x^2+8x+9x^2-12x+4$

$= 18x^3-15x^2-4x+4$

35. Los resultados son:

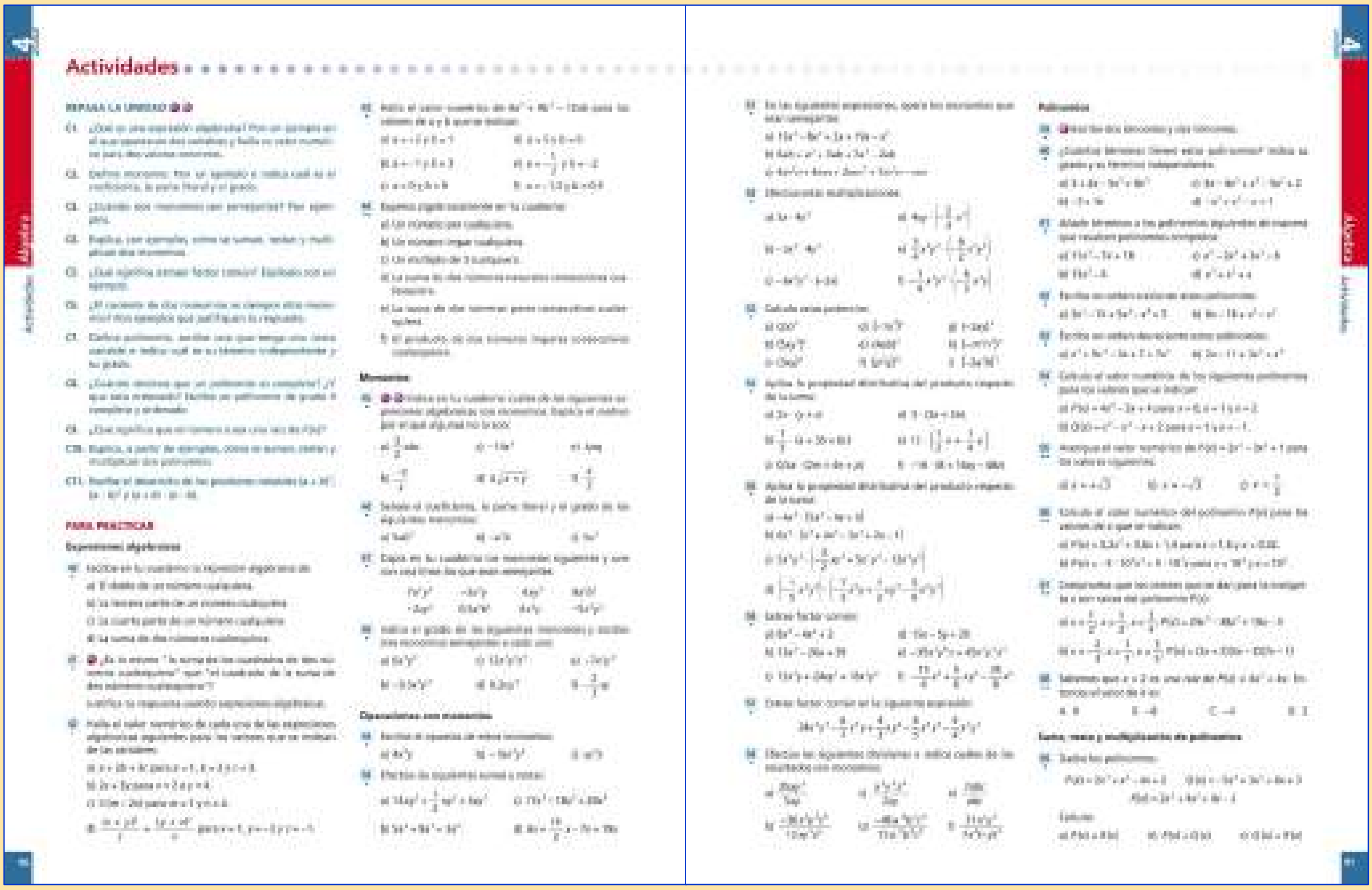
a) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{5}\right)^2-3\cdot\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{5}\right)^2+3x^2 =$

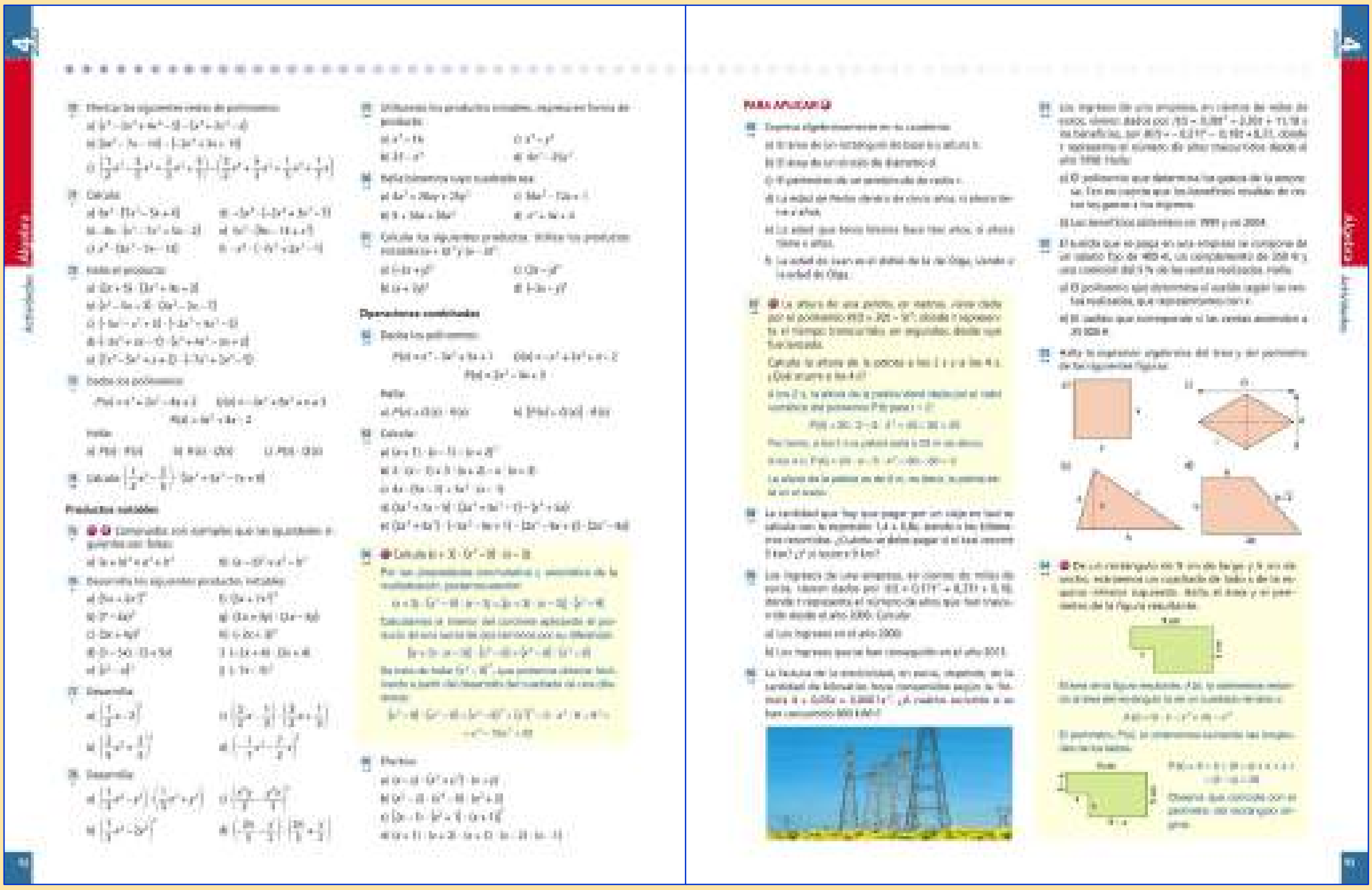
$= \left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{5}x+\frac{9}{25}\right)-3\cdot\left(\frac{4}{9}x^4-\frac{16}{15}x^2+\frac{16}{25}\right)+3x^2$

$= \frac{1}{4}x^2-\frac{3}{5}x+\frac{9}{25}-\frac{4}{3}x^4+\frac{16}{5}x^2-\frac{48}{25}+3x^2$

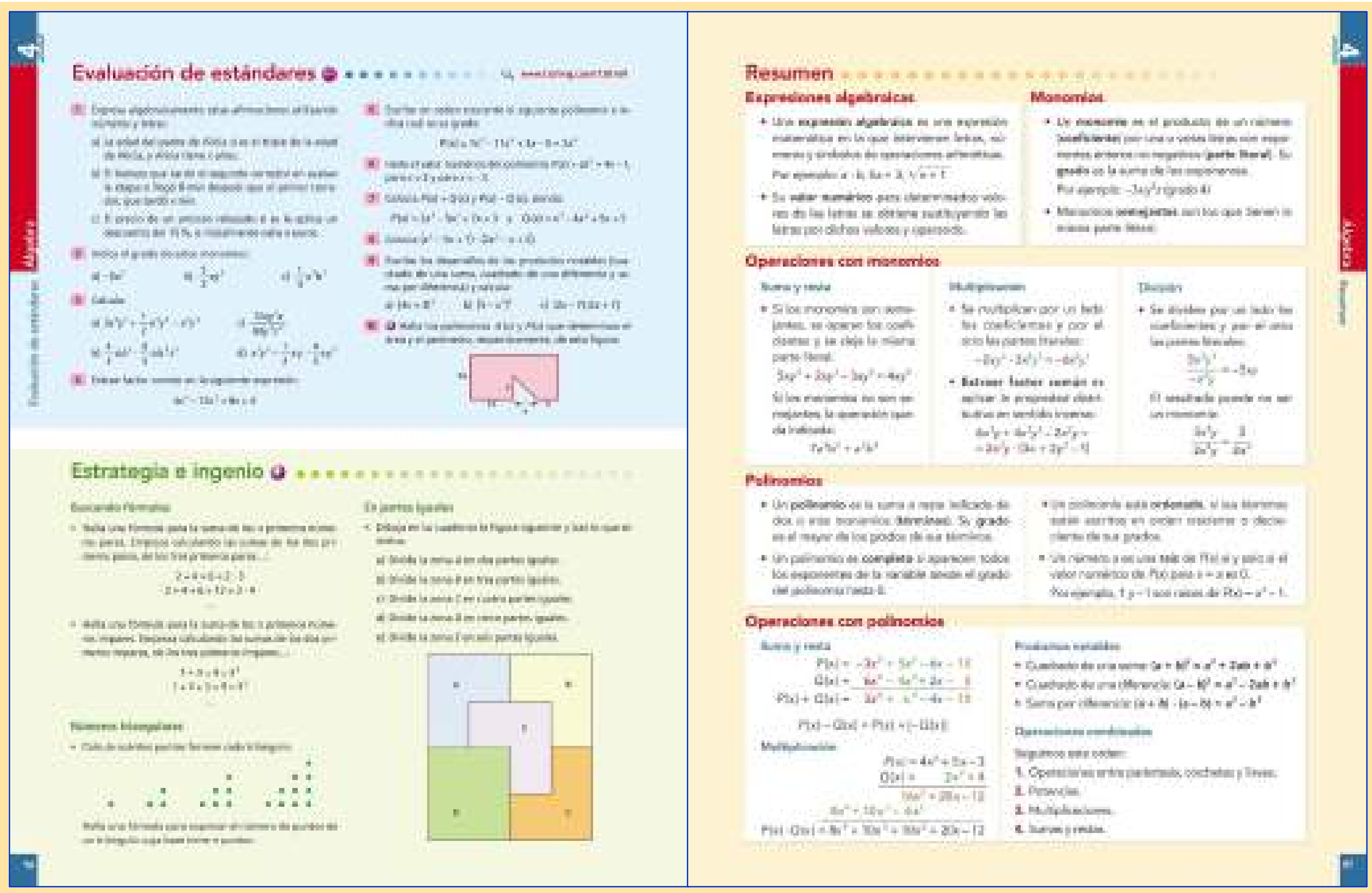
$= -\frac{4}{3}x^4+\frac{84}{5}x^2-\frac{39}{25}$

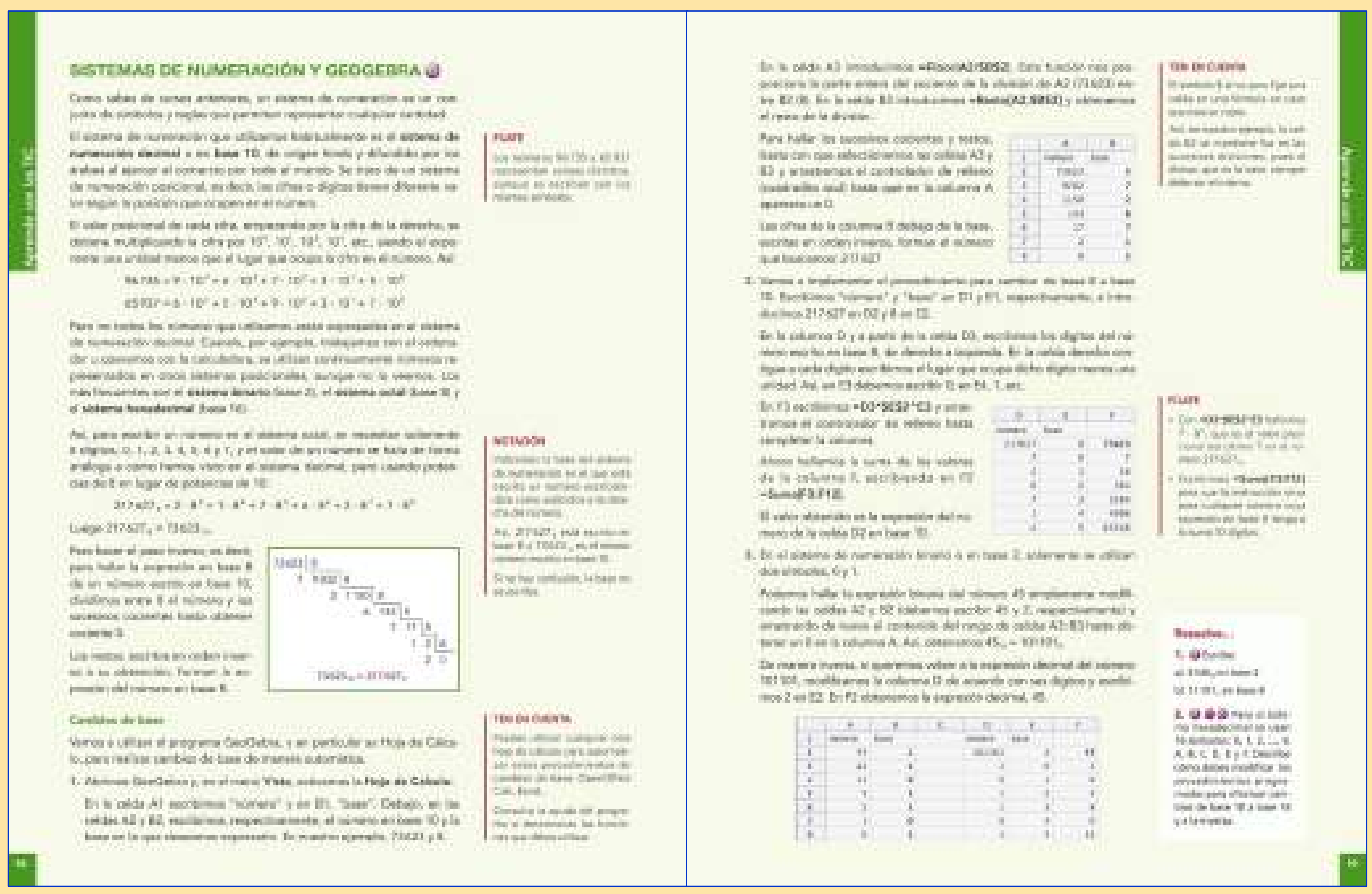
(Continúa en la página 4-29 de la guía)


Actividades




Desarrolla tus competencias
GENIOS MATEMÁTICOS


Evaluación de estándares
Estrategia e ingenio
Resumen
Expresiones algebraicas
Monomios
Operaciones con monomios
Polinomios
Operaciones con polinomios



SISTEMAS DE NUMERACIÓN Y GEOGEBRA

ACTIVIDADES FINALES

■ La sección *Actividades* pretende afianzar los conceptos introducidos a lo largo de la unidad didáctica, tanto desde un punto de vista teórico como práctico. Los ejercicios van incrementando su nivel de dificultad para potenciar las aptitudes individuales de cada alumno.

■ La finalidad de la sección *Desarrolla…* consiste en impulsar las capacidades transversales del alumnado, mediante un caso práctico de aplicación de los métodos matemáticos presentados en esta unidad. El ejercicio requiere iniciativa, visión espacial y destreza con las nuevas tecnologías.

■ La *Evaluación…* establece, a través de una serie de actividades, el contenido básico que los alumnos deben ser capaces de interpretar. Proporciona al alumnado una referencia del nivel alcanzado y de los conceptos que conviene que refuercen.

■ *Estrategia e ingenio* persigue motivar a los alumnos a pensar y utilizar su imaginación para resolver casos prácticos planteados en forma de juego, en los que tendrán que experimentar y buscar nuevos métodos.

■ Por último, la sección *Resumen* recopila de forma esquemática los principales contenidos del tema, para que los alumnos puedan revisarlos fácilmente y, a su vez, relacionar los conceptos estudiados con sus propiedades y aplicaciones.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Pág. 90

C1. Actividad personal. A modo de ejemplo: una expresión algebraica es una expresión matemática en la que intervienen letras, números y signos de operaciones aritméticas.

Ejemplo: $5a + 3b$ para $a = 1$ y $b = 2$

Calculamos: $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 5 + 6 = 11$

C2. Actividad personal. A modo de ejemplo: un monomio es el producto indicado de un número por una o varias letras que tienen exponentes enteros no negativos.

$5xy$ es un ejemplo de monomio donde 5 es el coeficiente y xy es la variable que constituye la parte literal.

C3. Respuesta personal. A modo de ejemplo: dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal, es decir, las mismas variables con los mismos exponentes:

$3a\,b^2$ y $-5ab^2$; son monomios semejantes.

C4. Respuesta personal. A modo de ejemplo

Suma o resta de monomios: Si los monomios son semejantes, se operan los coeficientes y se deja la misma parte literal: $5xy^3 + 2xy^3 = 7xy^3$.
Si los monomios no son semejantes la operación queda indicada: $5xy^3 + 2x^4y^5$.

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Repasa la unidad*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.
- *Act. 2 Pág. 99.* Buscar, recopilar y procesar la información más desta-cable del tema: definiciones, usos y propiedades de mo-nomios y polinomios, así como de las operaciones.
- *Act. 45.* Expresar por escrito argumentos propios de manera adecuada a la resolución de las actividades.

APRENDER A APRENDER

- *Repasa la unidad, Act.2 Pág. 99.* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, y ser consciente de las propias capacidades y carencias.
- *Acts. 41, 45, 75, 87, 94, 97, 100, 101 y 105.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.
- *Acts. 84 y 102.* Observar la resolución de una actividad, identificando las estrategias utilizadas, buscando una coherencia global al ejecutar el plan de resolución de la actividad.
- *Cálculo mental.* Aprender estrategias y técnicas de cálculo mental, adquiriendo confianza.
- *Desarrolla tus competencias.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.
- *Evaluación de estándares.* Ser consciente de las propias capacidades en el tema del álgebra.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Para aplicar, Acts. 1 y 2 Pág. 121.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, aplicando los conocimientos sobre álgebra trabajados en este tema.
- *Acts. 59, 75, 98, 99 y 105.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo del tema, mostrando criterio propio.
- *Cálculo mental y Desarrolla tus competencias*. Buscar las soluciones de forma creativa e imaginativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.
- *Evaluación de estándares, act. 10. Estrategia e ingenio.* Aplicar los conocimientos sobre álgebra, buscar soluciones a los problemas que se plantean y evaluar las acciones realizadas.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Desarrolla tus competencias, Aprende con las TIC.* Buscar, analizar, seleccionar y manejar información utilizando los recursos disponibles en Internet.

Multiplicación de monomios: Se multiplican por un lado los coeficientes y por el otro se suman los exponentes de las partes literales: $-2xy^2 \cdot 3x^2y^5 = -6x^3y^7$.

C5. Respuesta personal. A modo de ejemplo: extraer el factor común es aplicar la propiedad distributiva en sentido inverso:

$6xy^2 + 4x^2y^3 - 6x^2y^4 = 2xy^2 \cdot (3x + 2xy - 3xy^2)$

C6. Respuesta personal. A modo de ejemplo: el cociente de dos monomios puede no ser un monomio:

$$\frac{3x^3y}{2x^5y} = \frac{3}{2x^2}$$

C7. Respuesta personal. A modo de ejemplo: un polinomio es la suma o resta indicada de dos o más monomios no semejantes.

Ejemplo: $4x^2 - 7x + 5$

Término independiente: 5

Grado del polinomio: 2

C8. Respuesta personal. A modo de ejemplo: un polinomio es completo cuando aparecen todos los exponentes de la variable, desde el grado hasta 0.

Un polinomio está ordenado cuando sus términos aparecen escritos de manera ordenada según los exponentes de la variable.

Ejemplo: $x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 5$

C9. Un número a es una raíz de $P(x)$ si y solo si el valor numérico de $P(x)$ para $x = a$ es 0.

C10. Respuesta personal. A modo de ejemplo:

$P(x) = 5x^2 - 6x - 10$

$Q(x) = -4x^2 + 2x - 8$

Suma y resta de polinomios

$P(x) + Q(x) = x^2 - 4x - 18$

Multiplicación de polinomios

$$\begin{array}{r} P(x) = \quad 4x^2 + 5x - 3 \\ Q(x) = \quad 2x^2 + 4 \\ \hline 16x^2 + 20x - 12 \\ 8x^4 + 10x^3 - 4x^2 \quad\quad\quad\quad \\ \hline 8x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 20x - 12 \end{array}$$

C11. Desarrollamos los productos notables:

$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 =$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 =$

$= a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

40. Expresiones algebraicas para cada uno de los casos son:

a) $2x$ b) $x/3$ c) $x/4$ d) $x+y$

41. No es lo mismo, porque: la suma de los cuadrados de dos números es: $x^2 + y^2$.

El cuadrado de la suma de nos números cualesquiera es: $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$.

42. Sustituyendo los valores indicados obtenemos:

a) $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1 + 4 + 9 = 14$

b) $2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 4 + 12 = 16$

c) $3 (1 - 2 \cdot 4) = 3 \cdot (-7) = -21$

d) $\frac{(1-3)^2}{-1}+\frac{(-3-1)^2}{1}=\frac{(-2)^2}{-1}+\frac{(-4)^2}{1}=-4+16=12$

43. Los valores numéricos para cada caso son:

a) $4\cdot(-2)2 + 9\cdot(1)2 = 49$

b) $4\cdot(-1)^2 + 9\cdot(3)^2 = 121$

c) $4\cdot(0)^2 + 9\cdot(0)^2 = 0$

d) $4\cdot(5)^2 + 9\cdot(0)^2 =100$

e) $4\left(-\frac{1}{2}\right)+9(-2)^2=16$

f) $4\cdot(-1{,}2)^2 + 9\cdot(0{,}5)^2 = 15{,}21$

44. Expresiones algebraicas para cada caso son:

a) $2n$ d) $n + (n + 1) = 2n + 1$

b) $2n + 1$ e) $2n + (2n + 2) = 4n + 2$

c) $3n$ f) $(2n + 1) (2n + 3) = 4n^2 + 8n + 3$

45. Las respuestas son:

a) Monomio.

b) No es un monomio porque contiene una letra con exponente negativo.

c) Monomio.

d) No es monomio porque contiene la suma de dos monomios.

e), f) Monomio.

46. En cada caso las partes son:

a) *Coef.* $\to 5$ *Parte lit.* $\to ab^2$ *Grado* $\to 1 + 2 = 3$

b) *Coef.* $\to -1$ *Parte lit* $\to a^3b$ *Grado* $\to 3 + 1 = 4$

c) *Coef.* $\to 5$ *Parte lit.* $\to x^5$ *Grado* $\to 5$.

47. Las siguientes parejas son de monomios semejantes:

$7x^2y^2, -5x^2y^2$ $-3x^2y, 6x^2y$

$-2xy^2, 4xy^2$ $0{,}5a^2b^2, 9a^2b^2$

48. Las soluciones son:

a) Grado: $3 + 2 = 5$
$-6x^3y^2; x^3y^2; 5x^3y^2$

b) Grado: $2 + 3 = 5$
$-x^2y^3; -1{,}5x^2y^3; x^2y^3$

c) Grado: $2 + 3 + 4 = 9$
$6x^2y^3z^4; -2x^2y^3z^4; x^2y^3z^4$

d) Grado: $1 + 3 = 4$
$-0{,}2xy^3; xy^3; 10\,xy^3$

e) Grado: $2 + 3 = 5$
$7x^2y^3; -5x^2y^3; x^2y^3$

f) Grado: $1 + 1 = 2$
$2xy; 3xy; -xy$

49. Los opuestos de los monomios:

a) $-4x^3y$ b) $16x^2y^2$ c) $-xy^2z$

50. Efectuamos las siguientes operaciones de monomios:

a) $14xy^2+\frac{1}{2}xy^2+3xy^2=\frac{35}{2}xy^2$

b) $5a^2 + 9a^2 + 3a^2 = 17a^2$

c) $17x^3 - 18x^3 + 29x^3 = -x^3$

d) $6x+\frac{15}{2}x-7x+19x=\frac{51}{2}x$

Pág. 91

51. Sumar o restar los monomios que sean semejantes:

a) $6x^2 + 21x$

b) $7ab + 8a^2$

c) $11m^2n + 2mn^2 + 3mn$

52. Efectuamos las siguientes multiplicaciones:

a) $20x^3$ d) $\frac{8}{3}x^4y$

b) $-12x^3y^3$; e) $\frac{27}{8}x^8y^{11}$

c) $12x^5y^2$ f) $\frac{3}{10}x^8y^5$

53. Las potencias son las siguientes:

a) $8x^3$ d) $49x^4$ g) $-27x^3y^3$

b) $25x^2y^6$ e) $16a^2b^2$ h) $-m^6n^9$

c) $27x^3y^3$ f) p^8q^4 i) $-8x^6b^3$

54. Aplicamos de la propiedad distributiva para obtener:

a) $2xy + 2xz$ d) $15a + 10b$

b) $\frac{a}{3}+b+2c$ e) $6x + 3y$

c) $am + 2an + 0{,}5ap$ f) $-128 - 256xy + 768z$

55. Aplicamos la propiedad distributiva de la suma:

a) $-20x^5 + 16x^3 - 20x^2$

b) $6x^7 + 24x^6 - 18x^5 + 12x^4 - 6x^3$

c) $-\frac{15}{3}x^3y^5+25x^9y^6-60x^6y^8$

d) $\frac{7}{15}x^8y^3-\frac{1}{10}x^4y^7+\frac{1}{10}x^6y^4$

56. Extraemos el factor común:

a) $2 (4x^4 - 2x^2 + 1)$.

b) $13 (a^2 - 2a + 3)$.

c) $6xy (2x + 4y + 3xy)$.

d) $5 (3x - y + 4)$.

e) $5x^2y^6z (-7x + 9yz^2)$

f) $\frac{5}{2}x\left(-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{3}y^4-\frac{7}{4}x\right)$

57. Extraemos el factor común en la siguiente expresión:

$$xy\left(24xy^2-\frac{6}{7}x^2+\frac{4}{3}y-\frac{8}{5}x^3y^4-\frac{9}{4}xy^6\right)$$

58. Las soluciones son:

a) $5y^2$ → monomio

b) $\frac{-3y^2z^3}{x^2}$ → no es un monomio

c) $\frac{xy^2z^4}{2}$ → monomio

d) $\frac{-2ac^3}{3b^2}$ → no es un monomio

e) 7 → monomio

f) $\frac{-3x^2}{y^4}$ → no es un monomio

59. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Binomios:	Trinomios:
$4x^4 - 2x^2$	$2x + 4y + 3xy$
$a^2 - 2a$	$3x - y + 4$

60. Las partes son las siguientes en casa caso:

a) 4 términos	grado 3	término ind. 3
b) 2 términos	grado 1	término ind. –3
c) 5 términos	grado 4	término ind. 2
d) 4 términos	grado 5	término ind. 1

61. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) Falta el término de grado 2.
$11x^3 + x^2 - 7x + 18$

b) Falta el de grado 1.
$13x^2 + x - 6$

c) Falta el de grado 1.
$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + x - 6$

d) Falta el término independiente.
$x^3 + x^2 + x + 1$

62. Ordenamos los polinomios de forma creciente:

a) $5 - 7x + 3x^2 + 5x^3 - x^4$

b) $-18 + 6x - x^2 + x^3$

63. Ordenamos los polinomios de forma decreciente:

a) $9x^4 + x^3 + 7x^2 - 3x + 7$

b) $x^3 + 3x^2 + 2x - 11$

64. Las soluciones son:

a) $x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 4 = 4.$
$x = 1 \rightarrow 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 4 = 4 - 3 + 4 = 5$
$x = 2 \rightarrow 4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 16 - 6 + 4 = 14$

b) $x = 1 \rightarrow 1^3 - 1^2 - 1 + 2 = 1 - 1 - 1 + 2 = 1$
$x = -1 \rightarrow (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 2 = -1 - 1 + 1 + 2 = 1$

65. Calculamos el valor numérico del polinomio para los valores de las variables definidos:

a) $P\left(+\sqrt{3}\right) = 2\left(+\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(+\sqrt{3}\right)^4 + 1 = 2\cdot3 - 3\cdot9 + 1 = -20$

b) $P\left(-\sqrt{3}\right) = 2\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(-\sqrt{3}\right)^4 + 1 = 2\cdot3 - 3\cdot9 + 1 = -20$

c) $P\left(+\frac{1}{2}\right) = 2\left(+\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(+\frac{1}{2}\right)^4 + 1 = 2\cdot\frac{1}{4} - 3\cdot\frac{1}{16} + 1 =$
$= \frac{1}{2} - \frac{3}{16} + 1 = \frac{21}{16}$

66. Calculamos los valores numéricos del polinomio para cada uno de los casos:

a) $x = 1{,}6 \rightarrow 0{,}2 \cdot 1{,}6^2 + 0{,}6 \cdot 1{,}6 + 1{,}4 = 2{,}87$
$x = 0{,}02 \rightarrow 0{,}2 \cdot 0{,}02^2 + 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 1{,}4 = 1{,}41$

b) $x = 10^9 \rightarrow -3 \cdot 10^5 \cdot 10^{27} + 5 \cdot 10^7 \cdot 10^9 = -3\cdot10^{32}$
$x = 10^4 \rightarrow -3 \cdot 10^5 \cdot 10^{12} + 5 \cdot 10^7 \cdot 10^4 = -3\cdot10^{17}$

67. Comprobamos las raíces del polinomio:

a) $x = \frac{1}{2} \rightarrow P(x) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 38\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 19\cdot\frac{1}{2} - 3 = 0$

$x = \frac{1}{3} \rightarrow P(x) = 24\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 38\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 19\cdot\frac{1}{3} - 3 = 0$

$x = \frac{3}{4}$

$P(x) = 24\left(\frac{3}{4}\right)^3 - 38\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 19\cdot\frac{3}{4} - 3 = 0$

b) $x = -\frac{2}{3}$

$P(x) = \left(3\frac{-2}{3} + 2\right)\cdot\left(5\frac{-2}{3} - 3\right)\cdot\left(7\frac{-2}{3} - 1\right) = 0$

$x = \frac{1}{7}$

$P(x) = \left(3\frac{1}{7} + 2\right)\cdot\left(5\frac{1}{7} - 3\right)\cdot\left(7\frac{1}{7} - 1\right) = 0$

$x = \frac{3}{5}$

$P(x) = \left(3\frac{3}{5} + 2\right)\cdot\left(5\frac{3}{5} - 3\right)\cdot\left(7\frac{3}{5} - 1\right) = 0$

68. Conociendo que *x=2* es raíz de polinomio:

$P(x)=4x^2+kx$

El valor de *k* se obtiene sustituyendo en el polinomio la raíz e igualando a 0.

$4\cdot(2)^2 + k2 = 0$

$k = -8$

Suma, resta y multiplicación de polinomios

69. Calculamos las sumas de los polinomios:

$P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 2$

$Q(x) = -5x^3 + 3x^2 + 6x + 3$

$R(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4x - 2$

a) $P(x) + R(x) = 4x^3 + 5x^2$

b) $P(x) + Q(x) = -3x^3 + 4x^2 + 2x + 5$

c) $Q(x) + R(x) = -3x^3 + 7x^2 + 10x + 1$.

Pág. 92

70. Efectuamos las siguientes restas de polinomios:

a) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5$

b) $6x^2 - 10x - 29$.

c) $\frac{1}{2}x^7 - \frac{3}{2}x^6 - \frac{34}{15}x^5 + \frac{7}{15}x^3 - \frac{1}{7}x + \frac{5}{7}$

71. Calculamos los siguientes productos:

a) $42x^4 - 30x^3 + 24x^2$

b) $-8x^4 + 56x^3 - 40x^2 + 16x$;

c) $3x^7 - 7x^5 - 13x^4$

d) $6x^9 - 9x^6 + 21x^4$

e) $45x^4 - 90x^3 + 5x^5$.

f) $7x^{10} - 2x^8 + x^3$

73. Realizamos el producto:

a)
$$\begin{array}{r}
x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \\
4x^2 + 4x - 2 \\
\hline
-2x^3 - 4x^2 + 8x - 4 \\
4x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 8x \quad\; \\
4x^5 + 8x^4 - 16x^3 + 8x^2 \qquad\quad\; \\
\hline
4x^5 + 12x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 16x - 4
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r}
x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \\
-3x^3 + 8x^2 + x + 3 \\
\hline
3x^3 + 6x^2 - 12x + 6 \\
x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 2x \quad\; \\
8x^5 + 16x^4 - 32x^3 + 16x^2 \qquad\quad\; \\
-3x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 6x^3 \qquad\qquad\quad\; \\
\hline
-3x^6 + 2x^5 + 29x^4 - 33x^3 + 18x^2 - 10x + 6
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r}
4x^2 + 4x - 2 \\
-3x^3 + 8x^2 + x + 3 \\
\hline
12x^2 + 12x - 6 \\
4x^3 + 4x^2 - 2x \quad\; \\
32x^4 + 32x^3 - 16x^2 \qquad\quad\; \\
-12x^5 - 12x^4 + 6x^3 \qquad\qquad\quad\; \\
\hline
-12x^5 + 20x^4 + 42x^3 \qquad + 10x - 6
\end{array}$$

74. Calculamos el siguiente producto:

$$\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}\right)\cdot\left(3x^3 + 5x^2 - 7x + 9\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^2\cdot\left(3x^3 + 5x^2 - 7x + 9\right) - \frac{2}{5}\cdot\left(3x^3 + 5x^2 - 7x + 9\right)$$

$$= \left(x^5 + \frac{5}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 3x^2\right)$$

$$+ \left(-\frac{6}{5}x^3 - 2x^2 + \frac{14}{5}x - \frac{18}{5}\right)$$

$$= x^5 + \frac{5}{3}x^4 - \frac{53}{15}x^3 + x^2 + \frac{14}{5}x - \frac{18}{5}$$

75. Comprobamos que las siguientes afirmaciones son falsas con ejemplos

a) $(7 + 4x)^2 = 7^2 + (4x)^2$
$49 + 56x + 16x^2 = 49 + 16x^2$
La afirmación es falsa

b) $(7 - 4x)^2 = 7^2 - (4x)^2$
$49 - 56x + 16x^2 = 49 - 16x^2$
La afirmación es falsa

76. Calculamos los siguientes productos notables, aplicando las fórmulas:

a) $(5x + 2x^2)^2 = 25x^2 + 20x^3 + 4x^4$

b) $(7 - 4x)^2 = 49 - 56x + 16x^2$

c) $(3x + 4y)^2 = 9x^2 + 24xy + 16y^2$

d) $(3 - 5x)(3 + 5x) = 9 - 25x^2$

e) $(x^2 - x)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$

f) $(3x + 7x^2)^2 = 9x^2 + 42x^3 + 49x^4$

g) $(2x + 3y)(2x - 3y) = 4x^2 - 9y^2$

h) $(-2x + 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

i) $(-2x + 4)(2x + 4) = 16 - 4x^2$

j) $(-7x - 5)^2 = 49x^2 + 70x + 25$

77. Las soluciones son:

a) $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 4 + 2x$

b) $\left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{4}{25}x^4 + \frac{3}{5}x^2 + \frac{9}{16}$

c) $\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{9}\right)$

d) $\left(-\frac{1}{7}x^2 - \frac{7}{2}x\right)^2 = \frac{1}{49}x^4 + x^3 + \frac{49}{4}x^2$

78. Calculamos los siguientes productos notables aplicando las fórmulas:

a) $\left(\frac{1}{3}x^2 - y^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x^2 + y^2\right) = \frac{1}{9}x^4 - y^4$

b) $\left(\frac{1}{3}x^2 - 2y^3\right)^2 = \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^2y^3 + 4y^6$

c) $\left(\frac{x^2y}{2} - \frac{y^2x}{3}\right)^2 = \frac{x^4y^2}{4} - \frac{x^3y^3}{3} + \frac{x^2y^4}{9}$

d) $\left(-\frac{2}{5}x - \frac{1}{2}y\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y\right)$

$= -\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}y\right)^2 = -\frac{4}{25}x^2 - \frac{2}{5}xy - \frac{1}{4}y^2$

79. Utilizamos los productos notables para simplificar las expresiones en forma de productos:

a) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x + 4)\cdot(x - 4)$

b) $25 - x^4 = 5^2 - (x^2)^2 = (5 + x^2)\cdot(5 - x^2)$

c) $x^2 - y^2 = (x + y)\cdot(x - y)$

d) $4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x + 5y)\cdot(2x - 5y)$

80. Las soluciones son:

a) $4x^2 + 20xy + 25y^2 == (2x)^2 + 2{\cdot}2x{\cdot}5y + (5y)^2 =$
$= (2x + 5y)^2$

b) $9 + 36x + 36x^2 = 3^2 + 2{\cdot}3{\cdot}6x + (6x)^2 = (3 + 6x)^2$

c) $36x^2 - 12x + 1 = (6x)^2 - 2{\cdot}6x{\cdot}1 + 1^2 = (6x - 1)^2$

d) $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

81. Calculamos los productos notables:

a) $(-3x + y)^2 = (-3x)^2 + 2{\cdot}- 3x{\cdot}y + (y)^2 = 9x^2 - 6xy + y^2$

b) $(x + 3y)^2 = x^2 + 2{\cdot}x{\cdot}3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

c) $(3x - y)^2 = (3x)^2 - 2{\cdot}3x{\cdot}y + y^2 = 9x^2 - 6xy + y^2$

d) $(-3x - y)^2 = (-3x)^2 + 2{\cdot}- 3x{\cdot} -y + (-y)^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$

82. Resolvemos las siguientes operaciones:

a) $P(x) + Q(x){\cdot}R(x)$
$(x^4 - 3x^2 + 5x + 1) + (-x^3 + 2x^2 + x - 2){\cdot}(2x^2 - 4x + 3) = (x^4 - 3x^2 + 5x + 1) + (-2x^5 + 4x^4 - 3x^3) + (4x^4 - 8x^3 + 6x^2) + (2x^3 - 4x^2 + 3x) + (-4x^2 + 8x - 6) =$
$= -2x^5 + 9x^4 - 9x^3 - 5x^2 + 16x - 5$

b) $[P(x) + Q(x)]{\cdot}R(x)$
$[(x^4 - 3x^2 + 5x + 1) + (-x^3 + 2x^2 + x - 2)]{\cdot}(2x^2 - 4x + 3) = (x^4 - x^3 - x^2 + 6x - 1){\cdot}(2x^2 - 4x + 3) = (2x^6 - 4x^5 + 3x^4) + (-2x^5 + 4x^4 - 3x^3) + (-2x^4 + 4x^3 - 3x^2) + (12x^3 - 24x^2 + 18x) + (-2x^2 + 4x - 3) =$
$= 2x^6 - 6x^5 + 5x^4 + 13x^3 - 29x^2 + 22x - 3$

83. Calculamos las siguientes operaciones:

a) $(x + 1)(x - 1) - (x + 2)^2 == (x^2 - 1) - (x^2 + 2x + 4) =$
$= -2x - 5$

b) $2(x - 1) + 3(x + 2) - x(x + 3) = (2x - 2) + (3x + 6) + (-x^2 - 3x) = -x^2 + 2x + 4$

c) $4x(5x - 2) + 3x^2(x - 1) = (20x^2 - 8x) + (3x^3 - 3x^2) =$
$= 3x^3 + 17x^2 - 8x$

d) $(3x^2 + 7x - 5)(2x^3 + 3x^2 - 7) - (x^4 + 5x) = (6x^5 + 9x^4 - 21x^2) + (14x^4 + 21x^3 - 49x) + (-10x^3 - 15x^2 + 35) = 6x^5 + 23x^4 + 11x^3 - 36x^2 - 49x + 35$

e) $(2x^5 + 3x^2)(-5x^2 - 9x + 1) - (2x^2 - 9x + 3)(2x^5 - 8x) = [(-10x^7 - 18x^6 + 2x^5) + (-15x^4 - 27x^3 + 3x^2)] - [(4x^7 - 16x^3) + (-18x^6 + 72x^2) + (6x^5 - 24x)] = (-10x^7 - 18x^6 + 2x^5 - 15x^4 - 27x^3 + 3x^2) - (4x^7 - 18x^6 + 6x^5 - 16x^3 + 72x^2 - 24x) =$
$= -14x^7 - 4x^5 - 15x^4 - 11x^3 - 69x^2 + 24x$

84. Actividad resuelta en el libro.

85. Efectuamos los siguientes productos

a) $(x - y)(x^2 + y^2)(x + y) = [(x - y)(x + y)](x^2 + y^2) =$
$= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = x^4 - y^4$

b) $(x^2 - 2)(x^4 - 4)(x^2 + 2) = [(x^2 - 2)(x^2 + 2)](x^4 - 4) =$
$= (x^4 - 4)(x^4 - 4) = (x^4 - 4)^2 = x^8 - 8x^4 + 16$

c) $[(x - 1)(x^2 + 1)(x + 1)]^2 = [(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)]^2 =$
$= [(x^2 - 1)(x^2 + 1)]^2 = (x^4 - 1)^2 = x^8 - 2x^4 + 1$

d) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x - 2)(x - 1) =$
$= [(x + 1)(x - 1)][(x + 2)(x - 2)](x + 3) =$
$= [(x^2 - 1)(x^2 - 4)](x + 3) = [(x^4 - 4x^2) + (-x^2 + 4)]$
$\cdot (x + 3) = (x^4 - 5x^2 + 4)\ (x + 3) =$
$= (x^5 + 3x^4) + (-5x^3 - 15x^2) + (4x + 12)$
$= x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x + 12$

86. Expresamos algebraicamente las afirmaciones:

a) $A = b \cdot h$

b) $A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$

c) $P = \pi \cdot r$

d) $x + 5$, siendo x la edad actual

e) $x - 3$, siendo x su edad actual

f) $2x$, donde x es la edad de Olga

87. Actividad resuelta en el libro.

88. Consideramos el polinomio $P(x) = 1{,}4 + 0{,}8x$, y calculamos sus valores numéricos en $x = 5$ y en $x = 9$:

$P(5) = 1{,}4 + 0{,}8{\cdot}5 = 1{,}4 + 4 = 5{,}4$

$P(9) = 1{,}4 + 0{,}8{\cdot}9 = 1{,}4 + 7{,}2 = 8{,}6$

Luego, deberá pagar 5,4 euros en 5 km y 8,6 euros en 9 km

89. Considerando que los ingresos de una empresa vienen dados por:

$I(t) = 0{,}17{\cdot}t^2 + 0{,}27{\cdot}t + 0{,}18$

Calculamos:

a) Calculamos el valor numérico del polinomio en $t = 0$:
$I(0) = 0{,}18$. Como son cientos de miles de euros, $0{,}18{\cdot}100000 = 18000$, y por tanto los ingresos son 18000 euros en el año 2000

b) Calculamos el valor numérico del polinomio en $t = 15$:
$I(15) = 0{,}17{\cdot}15^2 + 0{,}27{\cdot}15 + 0{,}18 = 42{,}48$. Como son cientos de miles de euros, $42{,}48{\cdot}100000 = 4248000$, y por tanto los ingresos son 4248000 euros en el año 2015

90. Consideramos el polinomio $F(x) = 4 + 0{,}05x + 0{,}0001x^2$ y hallamos el valor numérico en $x = 800$:
$F(800) = 4 + 0{,}05{\cdot}800 + 0{,}0001{\cdot}800^2 =$
$= 4 + 40 + 64 = 108$

Luego, la factura asciende a 108 euros

91. Si los ingresos de una empresa vienen dados por:

$I(t) = 0{,}38{\cdot}t^2 + 2{,}95{\cdot}t + 11{,}18$

Y los beneficios de esta por la expresión:

$B(t) = -0{,}27{\cdot}t^2 - 0{,}18{\cdot}t + 8{,}27$

Hallamos:

a) Si llamamos G(t) al polinomio de gastos, será $B(t) = I(t) - G(t)$ y por tanto $G(t) = I(t) - B(t) = (0{,}38t^2 + 2{,}95t + 11{,}18) - (-0{,}27t^2 - 0{,}18t + 8{,}27) = 0{,}65t^2 + 3{,}13t + 2{,}91$

b) Se calcula el valor numérico en $t = 2$ y en $t = 6$:
$G(2) = 0{,}65{\cdot}2^2 + 3{,}13{\cdot}2 + 2{,}91 = 2{,}6 + 6{,}26 + 2{,}91 = 11{,}\ 77$. Como son cientos de miles de euros, $11{,}77{\cdot}100000 = 1177000$, y por tanto los beneficios son 1177000 euros el segundo año;
$G(6) = 0{,}65{\cdot}6^2 + 3{,}13{\cdot}6 + 2{,}91 = 23{,}4 + 18{,}78 + 2{,}91 = 45{,}\ 09$. Como son cientos de miles de euros,

45,09·100 000 = 4 509 000, y por tanto los beneficios son 4 509 000 euros el sexto año;

92. Si el sueldo que se paga en la empresa viene dado por un salario fijo de 400 €, un complemento de 350 € y una comisión del 5 %. Hallamos:

a) Si $S(x)$ es el polinomio que determina el sueldo, sumamos las cantidades fijas 400 + 350 = 750 y expresamos el 5 % de x de forma algebraica: $S(x) = 750 + 0{,}05x$

b) Calculamos el valor numérico en x = 25 000: $S(25\,000) = 750 + 0{,}05\cdot 25000 = 750 + 1250 = 2000$. Por tanto el sueldo es de 2000 euros.

93. Si nos piden hallar una expresión algebraica para:

a) Utilizamos la fórmula del área A de un cuadrado: $A = x^2$

Y como el perímetro P es la suma de todos sus lados: $P = 4x$

b) Utilizando la fórmula del área A de un triángulo:

$A = \frac{b\cdot h}{2}$, y el perímetro: $P = a + b + c$

c) Por la fórmula del área A de un rombo:

$A = \frac{D\cdot d}{2}$, y el perímetro: $P = 5\cdot 4 = 20$

d) Según el área A de un trapecio:

$A = \frac{2b+b}{2}\cdot h = \frac{3b^2}{2}$, y el perímetro:

$P = b + b + 2b + b\sqrt{2} = (4 + \sqrt{2})b$

94. Actividad resuelta en el libro.

Pág. 94

95. Utilizando la fórmula del área A de un paralelogramo, llamando x a la altura y por tanto a la base 3x, el polinomio será $A(x) = 3x\cdot x = 3x^2$

96. Si vuela 25 minutos sin carga y por cada kilo de carga le restamos 3 minutos, habrá que restarle en total 3x si x son los kilos de carga. Así, el polinomio será $P(x) = 25 - 3x$.

Si tiene 3,7 kilos de carga, calculamos el valor numérico para x = 3,7: $P(3{,}7) = 25 - 3\cdot 3{,}7 = 25 - 11{,}1 = 13{,}9$. Luego, podrá volar 13,9 minutos, es decir, 13 minutos y 54 segundos.

97. Identificamos si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Falso. Por ejemplo si $P(x) = x^2$ y $Q(x) = 3x^2$ son de grado 2, la suma $P(x) + Q(x) = x^2 + 3x^2 = 4x^2$ es de grado 2

b) Falso. Por ejemplo si $P(x) = x^2$ es de grado 2 y $Q(x) = x^3$ es de grado 3, el producto $P(x)\cdot Q(x) = x^2\cdot x^3 = x^5$ es de grado 5

c) Falso. Por ejemplo si $P(x) = x^3 + 2x$ y $Q(x) = x^3 + 3$ son de grado 3, la resta $P(x) - Q(x) = x^3 + 2x - x^3 - 3 = 2x - 3$ es grado 1.

d) Falso. Por ejemplo si $P(x) = 4x^3$ y $Q(x) = 2x^3$ son de grado 3, el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{4x^3}{2x^3} = 2$ es de grado 0.

98. Determinamos el área y el perímetro de las siguientes figuras:

a) Se trata de un trapecio, por tanto el área vendrá dada por:

$$A(x) = \frac{(2x+3)+(x+3)}{2} = \frac{3x+6}{2}\cdot x = \frac{3}{2}x^2 + 3x$$

Para el perímetro necesitamos obtener el lado l que falta, para ello utilizamos el teorema de Pitágoras en el triángulo donde un cateto es x, y el otro $(2x + 3) - (x + 3) = x$ también:

$l^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow l = \sqrt{2}\,x$. Así, el perímetro es $P(x) = (x + 3) + x + (2x + 3) + \sqrt{2}\,x = 4x + 6 + \sqrt{2}\,x = (4 + \sqrt{2})x + 6$

b) El área es la diferencia entre el rectángulo grande y el rectángulo pequeño:

$A(x) = [4x\cdot(3x + 1)] - [(2x + 3)\cdot x] =$

$= (12x^2 + 4x) - (2x^2 + 3x) = 10x^2 + x$

El perímetro es la suma de los perímetros de ambos rectángulos:

$P(x) = [2(3x + 1) + 2\cdot 4x] + [2x + 2(2x + 3)] =$

$= 6x + 2 + 8x + 2x + 4x + 6 = 20x + 8$

c) Se trata del área de una corona circular:

$$A(x) = \pi\left[\left(\frac{2r+8}{2}\right)^2 - r^2\right]$$

$$= \pi\left[(r+4)^2 - r^2\right] = \pi\left[r^2 + 8r + 16 - r^2\right]$$

$$= \pi\cdot(8r+16) = 8\pi\cdot(r+2)$$

El perímetro es la suma de los perímetros de ambas circunferencias:

$P(x) = 2\pi(r + 4) + 2\pi r = 2\pi r + 8\pi + 2\pi r = 4\pi(r + 2)$

d) El área está formada por un cuarto de círculo y un cuadrado, al que se le quita un cuarto de círculo más pequeño:

$$A(x) = \frac{1}{4}\pi x^2 + x^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\cdot x^2 - \frac{\pi}{16}x^2 = \left(\frac{3\pi+16}{16}\right)\cdot x^2$$

El perímetro será:

$$P(x) = x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + x + \frac{1}{4}2\pi x + \frac{1}{4}2\pi\frac{x}{2} =$$

$$= 3x + \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}x = \left(\frac{12+3\pi}{4}\right)\cdot x$$

99. La figura se puede descomponer en un cuadrado de lado x + 4, un rectángulo de dimensiones 3, (4x + 2), y otro rectángulo de dimensiones (x + 2), (x + 3). Por tanto el área será:

$A(x) = (x+4)^2 + 3\cdot(4x + 2) + (x + 2)\cdot(x + 3) =$

$= x^2 + 8x + 16 + 12x + 6 + x^2 + 3x + 2x + 6 =$

$= 2x^2 + 25x + 28$

El perímetro:

$P(x) = (4x + 2) + (x + 5) + (x + 3) + (x + 2) + (2x – 5) + (x + 4) + (x + 4) + (x + 7) = 12x + 17$

100. Lo resaltado representa el error en la igualdad:

a) $(– a – b)^2 = a^2 \mathbf{+ 2ab} + b^2$

b) $(a^2 – b^2)^2 = a^4 \mathbf{– 2a^2b^2} + b^4$

c) $(a – b + c)^2 = (a – b + c)\,(a – b + c) = a^2 + b^2 + c^2 – 2(\mathbf{–ac} + ab + bc)$

101. Dos números consecutivos son de la forma x, x+1. Por tanto, la diferencia de sus cuadrados:

$(x + 1)^2 – x^2 = (x^2 + 2x + 1) – x^2 = 2x + 1$

102. Actividad resuelta en el libro.

103. Efectuamos los siguientes productos:

a) $(5x + 5)^2(5x – 5)^2 = [(5x + 5)(5x – 5)]^2 =$

$= [(5x)^2 – 5^2]^2 = (25x^2 – 25)^2 =$

$= (25x^2)^2 – 2·25x^2·25 + 25^2 = 625x^4 – 1250x^2 + 625$

b) $(a – b + c)(a + b + c) = [(a + c) – b][(a + c) + b] =$

$= (a + c)^2 – b^2 = a^2 + 2ac + c^2 – b^2$

c) $(2x^4 – 3x^2)^2(2x^4 +3x^2)^2 = [(2x^4 – 3x^2)(2x^4 + 3x^2)]^2 =$

$= [(2x^4)^2 – (3x^2)^2]^2 = (4x^8 – 9x^4)^2 =$

$= (4x^8)^2 – 2·4x^8·9x^4 + (9x^4)^2 = 16x^{16} – 72x^{12} + 81x^8$

d) $(x + 1)^2(x – 1)^2(x^2 + 1) = [(x + 1)(x – 1)]^2(x^2 + 1) =$

$= (x^2 – 1)^2(x^2 + 1) = (x^2 – 1)[(x^2 – 1)\,(x^2 + 1)] =$

$= (x^2 – 1)(x^4 – 1) = x^6 – x^4 – x^2 + 1$

104. Calculamos:

a) $\left[\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{2}y\right)\left(-\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{2}y\right)\right]^2 =$

$=\left[\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{2}y\right)\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}y\right)\right]^2=\left(\frac{4}{9}x^4-\frac{9}{4}y^2\right)^2=$

$=\frac{16}{81}x^8-2x^4y^2+\frac{81}{16}y^4$

b) $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x^2y+\frac{1}{3}y^2\right)\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^2y+\frac{1}{3}y^2\right)=$

$=\left[\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2\right)-\frac{2}{3}x^2y\right]\left[\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2\right)+\frac{2}{3}x^2y\right]=$

$=\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}y^2\right)^2-\left(\frac{2}{3}x^2y\right)^2=$

$=\frac{1}{9}x^4+\frac{1}{3}x^2y^2+\frac{1}{9}y^4-\frac{4}{9}x^4y^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)^2=$

$=\left[\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)\right]\left[\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)\right]-$

$-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)^2-$

$-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2-2\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}\right)^2=$

$=\frac{1}{4}x^2-2\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x^4-3x^2-$

$-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}x^4+\frac{13}{4}x^2-\frac{9}{2}$

105. Un número impar es de la forma 2x + 1, y el siguiente impar 2x + 1 + 2 = 2x + 3, por tanto:

$(2x + 1)·(2x + 3) + 1 = 4x^2 + 6x + 2x + 3 + 1 = 4x^2 + 8x + 4 = (2x + 2)^2$, que es un cuadrado.

Ejemplo: $5·7 + 1 =35 + 1 = 36 = 6^2$

106. Calculamos las siguientes expresiones:

a) (120 – 1) (120 + 1) = 14 400 – 1 = 14 399

b) (1 100 – 1) (1100 + 1) = 1 210 000 – 1 = 1 209 999

c) $10\,000^2 – (10\,000 + 1)\,(10\,000 – 1) =$

$= 10\,000^2 – 10\,000^2 + 1 = 1$

d) $239\,654^2 – (239\,654 – 10)\,(239\,654 + 10) =$

$= 239\,654^2 – 239\,654^2 + 100 = 100$

Pág. 95

1. Consideramos el triángulo rectángulo cuyos catetos miden ambos x, de manera que el lado (L) del cuadrado coincide con su hipotenusa, y aplicamos el teorema de Pitágoras: $L^2 = x^2 + x^2$

Despejamos L: $L^2 = 2x^2 \Rightarrow L = \sqrt{2}x$

2. El área de la zona coloreada se obtiene restando al área del círculo mayor, de radio x, el área del cuadrado mayor de lado $L=\sqrt{2}x$:

Área del círculo mayor: $A_1 = \pi·x^2$

Área del cuadrado mayor: $A_2 = L^2 = 2x^2$

Área de la zona coloreada:

$A = A_1 – A_2 = \pi·x^2 – 2x^2 = (\pi – 2) · x^2$

3. El radio del círculo menor coincide con la mitad del lado L del cuadrado mayor: $\frac{\sqrt{2}x}{2}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo de catetos $\frac{\sqrt{2}x}{2}$, cuya hipotenusa coincide con el lado (l) del cuadrado menor:

$l^2=\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2$

Despejamos:

l: $l^2 = 2·\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2 = 2·\frac{2x^2}{4} = x^2 \Rightarrow l = x$

Por tanto, el lado del cuadrado menor, donde se colocará la foto, mide x.

4. La zona azul del marco se obtiene sumando a la zona coloreada exterior (calculada en la actividad 2), la zona azul central.

La zona azul central se obtiene restando al área del círculo menor, de radio $\frac{\sqrt{2}x}{2}$, el área del cuadrado menor, de lado x:

Área del círculo menor:

$$A_1 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2 = \frac{\pi 2x^2}{4} = \frac{\pi x^2}{2}$$

Área del cuadrado menor: $A_2 = x^2$

Área de la zona azul central:

$$A = A_1 - A_2 = \frac{\pi x^2}{2} - x^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cdot x^2$$

Finalmente, obtenemos la zona azul del marco:

$$(\pi - 2)\cdot x^2 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cdot x^2 = 3\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cdot x^2$$

5. El radio x del círculo mayor del marco coincide con el lado x del cuadrado menor donde se colocará la fotografía (actividad 3), por tanto el radio tiene 9 cm.

Para hallar el área azul del marco sustituimos en la fórmula x = 9:

$$A = 3\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\cdot 9^2 = 3\cdot 81\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 243\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)cm^2$$

6. Primero calculamos (de forma aproximada) el área de la zona azul del marco con $\pi = 3{,}14$:

$$A = 3\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x^2 = 3\cdot\left(\frac{3{,}14}{2} - 1\right)x^2 = 1{,}71x^2$$

Si para una superficie de 20 cm x 20 cm = 400 cm^2 se necesitan 0,03 mL de tinta, mediante proporcionalidad (regla de tres) calculamos la tinta (t) para $1{,}71x^2$ cm^2:

$$t = \frac{0{,}03\cdot 1{,}71x^2}{400} = 0{,}00\,012\,825x^2 \text{ mL}$$

Por tanto, aproximadamente, se necesitan $0{,}00013x^2$ ml de tinta azul (opción B)

7. Si 7,5 ml cuestan 27 euros, mediante proporcionalidad (regla de tres) calculamos el precio (p), en euros, de $0{,}00\,013x^2$ mL:

$$p = \frac{27\cdot 0{,}00013x^2}{7{,}5} = 0{,}000468x^2 \text{ euros}$$

8. El coste total es la suma del precio de la tinta de todos los marcos, y el precio de las cartulinas (9,15 euros)

Según la actividad 7, imprimir un marco cuesta en tinta $0{,}000\,468x^2$ euros. Como queremos imprimir 150 marcos, la tinta costará:

$150 \cdot 0{,}000\,468x^2 = 0{,}07x^2$ euros

Así, el coste de imprimir todos los marcos es $0{,}07x^2$ + + 9,15 euros (opción A)

Pág. 96

1. Expresamos algebraicamente las siguientes expresiones utilizando números y letras:

a) 3x, siendo x la edad de Alicia.

b) x + 8, siendo x los minutos que tardó el primer corredor.

c) 0,85x, siendo x el precio sin rebajar (si se descuenta un 15 % se paga un 85 %)

2. Indicamos el grado del monomio:

a) $-5a^3$ tiene grado 3.

b) $\frac{5}{3}xy^5$ tiene grado 6.

c) $\frac{5}{3}a^2b^3$ tiene grado 5.

3. Calculamos:

a) $3x^3y^2 + \frac{1}{2}x^3y^2 - x^3y^2 = \left(3 + \frac{1}{2} - 1\right)x^3y^2 = \frac{5}{2}x^3y^2$

b) $\frac{4}{3}ab^2\cdot\frac{6}{5}ab^3c^2 = \frac{8}{5}a^2b^5c^2$

c) $\frac{12xy^4z}{60y^3z^2} = \frac{1}{5}xyz^{-1}$

d) $x^2y^4 - \frac{1}{2}xy\cdot\frac{4}{3}xy^3 = x^2y^4 - \frac{2}{3}x^2y^4 = \frac{1}{3}x^2y^4$

4. Extraemos factor común:

$4\cdot(x^4 - 3x^3 + 2x + 1)$

5. El polinomio ordenado en forma creciente es:

$P(x) = -5 + 3x + 7x^2 - 11x^3 + 2x^4$, y tiene grado 4

6. Evaluamos el polinomio en los diferentes valores de x:

$x = 2$; $P(2) = 2\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - 1 = 8 + 8 - 1 = 15$

$x = -3$; $P(-3) = 2\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3) - 1 =$

$= 18 - 12 - 1 = 5$

7. Para los polinomios dados, calculamos:

$P(x) + Q(x) = (2x^3 - 5x^2 + 7x + 3) + (x^3 - 4x^2 + 5x + 5) =$

$= 3x^3 - 9x^2 + 12x + 8$

$P(x) - Q(x) = (2x^3 - 5x^2 + 7x + 3) - (x^3 - 4x^2 + 5x + 5) =$
$= (2x^3 - 5x^2 + 7x + 3) + (-x^3 + 4x^2 - 5x - 5) =$

$= x^3 - x^2 + 2x - 2$

8. $(x^2 - 5x + 7)\cdot(2x^2 - x + 5) = x^2\cdot(2x^2 - x + 5) - 5x\cdot$ $\cdot(2x^2 - x + 5) + 7\cdot(2x^2 - x + 5) = (2x^4 - x^3 + 5x^2) +$ $+ (-10x^3 + 5x^2 - 25x) + (14x^2 - 7x + 35) =$

$= 2x^4 - 11x^3 + 24x^2 - 32x + 35$

9. a) $(4x + 3)^2 = (4x)^2 + 2\cdot 4x\cdot 3 + 3^2 = 16x^2 + 24x + 9$

b) $(5 - x^2)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot x^2 + (x^2)^2 = 25 - 10x^2 + x^4$

c) $(2x - 7)(2x + 7) = (2x)^2 - 7^2 = 4x^2 - 49$

10. El área se puede obtener restando al área de un rectángulo el área de un triángulo:

Área del rectángulo: $A_1 = 4x \cdot 2x = 8x^2$

Área del triángulo: $A_2 = \dfrac{x \cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{2}$

Área de la figura:

$A(x) = A_1 - A_2 = 8x^2 - \dfrac{x^2}{2} = \left(8 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot x^2 = \dfrac{15}{2}x^2$

Para el perímetro, suma de todos sus lados, necesitamos calcular la hipotenusa h del triángulo utilizando el teorema de Pitágoras:

$h^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow h = \sqrt{2}x$

Perímetro de la figura: $P(x) = 4x + 2x + 2x + x + \sqrt{2}x + x + 2x = 12x + \sqrt{2}x = (12 + \sqrt{2})x$

Estrategia e ingenio

Buscando fórmulas

La última simplificación no es correcta pues al cumplirse que a + b = c, tenemos que a + b – c = 0 y sólo puede simplificarse un factor cuando es diferente de 0.

De hecho, 3 (a + b – c) = 2 (a + b – c) es, en este caso, otra forma de escribir 0 = 0, igualdad de la que no podemos deducir que 3 = 2.

$2 + 4 = 6 = 2 \cdot 3$ $\quad 2 + 4 + 6 = 12 = 3 \cdot 4$

$2 + 4 + 6 + 8 = 20 = 4 \cdot 5$ ...

La suma de los *n* primeros pares es S(n) = n (n + 1).

$1 + 3 = 4 = 2^2$ $\quad 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$ ....

La suma de los *n* primeros impares es $S(n) = n^2$.

Números triangulares

En este orden: 1 punto, 3 puntos, 6 puntos y 10 puntos.

A cada triángulo de base *n* se le añaden *n* + 1 puntos para construir el de base *n* + 1. Por lo tanto, el número de puntos del triángulo de base *n* es la suma de los primeros *n* números naturales, es decir, n (n + 1) / 2.

Página 99

1. Los cambios de base son los siguientes:

a) $3 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 1\ 888$

1888 | 2
0 944 | 2
0 472 | 2
0 236 | 2
0 118 | 2
0 59 | 2
1 29 | 2
1 14 | 2
0 7 | 2
1 3 | 2
1 1

Obtenemos: $1\ 1101\ 100\ 000_2$

b) $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 29$

29 | 8
5 3

Obtenemos: 53_8

2. Para pasar de base 10 a base 16, de manera análoga a como lo haríamos para pasar a base 8 o base 2, dividiremos nuestro número en base 10 entre 16 e iremos dividiendo el cociente de la división anterior hasta obtener un 0 en el cociente. El número que buscamos será el formado por los restos de cada división, tal y como lo hacíamos con otros cambios de base.

Para volver a la base decimal igual que con las otras bases, multiplicaremos por potencias de 16.

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 4-3 de la guía)

3. Calcula de dos formas diferentes:

a) $(-4)\cdot(6+5) = -24-20 = -44$
$(-4)\cdot(11) = -44$

b) $5\cdot(-7)+(-7)\cdot 3 = -35-21 = -56$
$(-7)\cdot(5+3) = (-7)\cdot(8) = -56$

c) $2\cdot(-11)-(-2)\cdot 9 = -22+18 = -4$
$2\cdot(-11+9) = 2\cdot(-2) = -4$

d) $3\cdot[5+(-7)-8] = 3\cdot[5-7-8] = 3\cdot(-10) = -30$
$15-21-24 = -30$

4. Las soluciones son:

a) $x\cdot x = x^2$

b) $x - x = 0$

c) $x + x = 2\cdot x$

d) $\dfrac{x}{x} = 1$

5. La expresión representa la compra de videojuegos por Internet: $24{,}50\cdot x + 7{,}50$

Donde x representa el número de unidades. Si se compran tres videojuegos, se tiene:

$24{,}50\cdot 3 + 7{,}50 = 73{,}50 + 7{,}50 = 81$

(Viene de la página 4-7 de la guía)

b) $-2x^2y\cdot(5x-7y) = -2x^2y\cdot 5x - 2x^2y\cdot(-7y)$
$= -10x^3y + 14x^2y^2.$

c) $xyz\cdot(x+y+z+xyz)$
$= xyz\cdot x + xyz\cdot y + xyz\cdot z + xyz\cdot xyz$
$= x^2yz + xy^2z + xyz^2 + x^2y^2z^2$

d) $4\cdot(2x+3y+4z) = 4\cdot 2x + 4\cdot 3y + 4\cdot 4z$
$= 8x + 12y + 16z$

12. Al extraer el factor común obtenemos:

a) $3\,(4x^3+3x^2-2x+5)$

b) $6\,(1-2y+3y^2)$

c) $8a^2\,(6+3a)$

d) $5\,(3m+5n+4mn)$

13. Las soluciones son:

a) $\dfrac{8xy}{2x} = 4y$

Es un monomio.

b) $\dfrac{3x^3}{9x} = \dfrac{x^2}{3}$

Es un monomio.

c) $\dfrac{24x^3y^4}{-6x^2y} = -4xy^3$

Es un monomio

d) $\dfrac{10xy}{5x^2} = \dfrac{2y}{x}$

No es un monomio porque contiene una letra con exponente negativo.

e) $\dfrac{12x^3y^5}{3x^2y^7} = \dfrac{4x}{y^2}$

No es un monomio porque contiene una letra con exponente negativo.

f) $\dfrac{15x^5y^8z^4}{24x^2y^9z} = \dfrac{5x^3z^3}{8y}$

No es un monomio porque contiene una letra con exponente negativo.

14. Calcula

a) $\dfrac{6x^2y^4z^3\cdot 3x^3y}{\left(2x^2yz^3\right)^2} = \dfrac{18x^5y^5z^3}{4x^4y^2z^6} = \dfrac{9xy^3}{2z^3}$

b) $\dfrac{\left(6x^3y^4z^5\right)^3}{12x^2yz^2\cdot 9x^5y^7z^9} = \dfrac{216x^9y^{12}z^{15}}{108x^7y^8z^{11}} = 2x^2y^4z^4$

(Viene de la página 4-11 de la guía)

b) $P(x)\cdot R(x)$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^2 & -\ 3x & -\ 1 \\
 & & x^2 & -\ 2x & -\ 2 \\
\hline
 & & -4x^2 & +\ 6x & +\ 2 \\
 & -4x^3 & +\ 6x^2 & +\ 2x & \\
2x^4 & -\ 3x^3 & -\ x^2 & & \\
\hline
2x^4 & -\ 7x^3 & +\ x^2 & +\ 8x & +\ 2
\end{array}$$

c) $Q(x)\cdot R(x)$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 4x^2 & -\ 2x & +\ 4 \\
 & & x^2 & -\ 2x & -\ 2 \\
\hline
 & & 8x^2 & -\ 4x & +\ 8 \\
 & -8x^3 & +\ 4x^2 & -\ 8x & \\
4x^4 & -\ 2x^3 & +\ 4x^2 & & \\
\hline
4x^4 & -\ 10x^3 & +\ 16x^2 & -12x & +\ 8
\end{array}$$

27. Calcular:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & +\ x & +\ 1 \\
 & & x^2 & +\ x & +\ 1 \\
\hline
 & & x^2 & +\ x & +\ 1 \\
 & x^3 & +\ x^2 & +\ x & \\
x^4 & +\ x^3 & +\ x^2 & & \\
\hline
x^4 & +\ 2x^3 & +\ 3x^2 & +\ 2x & +\ 1
\end{array}$$

Por lo tanto $[P(x)]^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$

$$\begin{array}{rrr}
 & 2x & +\ 3 \\
 & 2x & +\ 3 \\
\hline
 & 6x & +\ 9 \\
4x^2 & +\ 6x & \\
\hline
4x^2 & +\ 12x & +\ 9
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
4x^2 + 12x + 9 \\
2x + 3 \\ \hline
12x^2 + 36x + 27 \\
8x^3 + 24x^2 + 18x \quad\;\; \\ \hline
8x^3 + 36x^2 + 54x + 27
\end{array}$$

Por lo tanto: $(2x + 3)^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$.

28. Comprobamos la propiedad asociativa de:

$P(x) = 8x^3 - 5x^2 + 6x$

$Q(x) = 9x3 - 3x + 6$

$R(x) = 9x2 - 5$

Donde

$(P(x)\cdot Q(x))\cdot R(x) = P(x)\cdot (Q(x)\cdot R(x))$

Primero calculamos $(P(x)\cdot Q(x))\cdot R(x)$

$$\begin{array}{r}
8x^3 - 5x^2 + 6x \\
9x^3 - 3x + 6 \\ \hline
48x^3 - 30x^2 + 36x \\
-24x^4 + 15x^3 - 18x^2 \qquad\quad \\
72x^6 - 45x^5 + 54x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \hline
72x^6 - 45x^5 + 30x^4 + 63x^3 - 48x^2 + 36x \\
9x^2 - 5 \\ \hline
-360x^6 + 225x^5 - 150x^4 - 315x^3 + 240x^2 - 180x \\
648x^8 - 405x^7 + 270x^6 + 567x^5 - 432x^4 + 324x^3 \qquad\qquad\qquad \\ \hline
648x^8 - 405x^7 - 90x^6 + 792x^5 - 582x^4 + 9x^3 + 240x^2 - 180x
\end{array}$$

Ahora calculamos $P(x)\cdot (Q(x)\cdot R(x))$

$$\begin{array}{r}
9x^3 - 3x + 6 \\
9x^2 - 5 \\ \hline
-45x^2 + 15x - 30 \\
81x^5 \qquad - 27x^3 + 54x^2 \qquad\qquad \\ \hline
81x^5 \qquad - 27x^3 + 9x^2 + 15x - 30 \\
8x^3 - 5x^2 + 6x \\ \hline
486x^6 \qquad -162x^4 + 54x^3 + 90x^2 - 180x \\
-405x^7 + \qquad 135x^5 - 45x^4 - 75x^3 + 150x^2 \qquad\quad \\
648x^8 \qquad -216x^6 + 72x^5 + 120x^4 - 240x^3 \qquad\qquad\qquad \\ \hline
648x^8 - 405x^7 - 90x^6 + 792x^5 - 582x^4 + 9x^3 + 240x^2 - 180x
\end{array}$$

Se comprueba la propiedad asociativa

(Viene de la página 4-15 de la guía)

$$= \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{25}\right) - 3\cdot\left(\frac{4}{9}x^4 - \frac{16}{15}x^2 + \frac{16}{25}\right) + 3x^2 =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{25} - \frac{4}{3}x^4 + \frac{16}{5}x^2 - \frac{48}{25} + 3x^2 =$$

$$= -\frac{4}{3}x^4 + \frac{84}{5}x^2 - \frac{39}{25}$$

b) $3x^2\left(\frac{2}{5}x - \frac{3}{4}x^3\right)^2 + 4x^2\cdot\left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{6}x\right)\cdot\left(\frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{6}x\right) =$

$$= 3x^2\left(\frac{4}{25}x^2 - \frac{6}{10}x^4 + \frac{9}{16}x^6\right) +$$

$$+ 4x^2\cdot\left(\frac{49}{4}x^4 - \frac{25}{36}x^2\right) =$$

$$= \frac{12}{25}x^4 - \frac{18}{10}x^6 + \frac{27}{16}x^8 + 49x^6 - \frac{25}{9}x^4 =$$

$$= \frac{27}{16}x^8 + \frac{236}{5}x^6 - \frac{517}{225}x^4$$

36. Hallamos el resultado:

$$\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x\right)^2 + 3x^3\cdot\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{2}x\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{16}x^2\right) +$$

$$+ 3x^3\cdot\left(\frac{4}{9}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{4}x^2\right) =$$

$$= \frac{5}{18}x^7 + \frac{5}{12}x^6 + \frac{5}{32}x^5 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{64}x^2 +$$

$$+ \frac{4}{3}x^7 - 6x^6 + \frac{27}{4}x^5 =$$

$$= \frac{29}{18}x^7 - \frac{67}{12}x^6 + \frac{221}{32}x^5 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{64}x^2$$

Pág. 89

37. Calculamos el valor de B, mediante la igual dada, sustituyendo los valores de A y C

$$B = \frac{2(1+3)}{2+3} = \frac{8}{5}$$

38. Hallamos una formula que permita transformar de metros por segundo (m/s) a kilómetros por hora (km/h). Para ello consideramos que:

1 km tiene 1000 m

3600 s están contenidos en 1 hora

La formula que se obtiene es:

$T = \frac{18}{5}\cdot x$ Donde *x* representa el valor a transformar.

39. x: monedas de Pedro

y: monedas de Juan

z: monedas de Luis

$x = 3y$; $z = y + 16$; $x + y + z = 196$;

$3y + y + y + 16 = 196$; $5y = 180$; $y = 36$

Pedro tiene 108 monedas

Juan tiene 36

Luis tiene 52 monedas.

ORIENTACIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 4-7 de la guía)

■ Empezaremos el apartado sobre factor común leyendo el texto y los ejemplos. Plantearemos a los alumnos estas cuestiones:

– *¿Cuándo podemos sacar factor común?*

– *¿Qué propiedad aplicamos al sacar factor común?*

Leeremos ahora la llamada de *Atención* del margen que destaca uno de los aspectos del procedimiento que suele conducir a errores. Al acabar preguntaremos:

– *¿Cuántos monomios tiene la expresión inicial?*

– *¿Cuántos monomios hay dentro del paréntesis?*

3.4 División

■ A continuación, leeremos el apartado sobre la división, fijándonos en el procedimiento seguido en los ejemplos:

– *¿Por qué desaparece la* y *en el primer ejemplo?*

– *¿Cómo operamos los coeficientes en una división?*

– *¿El resultado de un cociente de monomios es un monomio? Razona tu respuesta.*

Nos fijaremos ahora en la observación de la derecha, donde se explica cómo utilizar la calculadora WIRIS para operar con monomios.

Para terminar, resolveremos las actividades propuestas, que servirán de repaso de todos los métodos operativos estudiados a lo largo de esta sección.

4 Polinomios

■ Esta sección tiene como finalidad el estudio de los polinomios y sus principales características.

Leeremos la introducción y la definición del recuadro, y preguntaremos:

– *¿Un monomio es un polinomio? Razona tu respuesta.*

Nos fijaremos ahora en la nota del margen sobre la *Etimología* del término *Polinomio.*

■ A continuación, leeremos el texto referente a los elementos de un polinonio, que nos permitirá familiarizarnos con la terminología propia de los polinomios. Como resumen podemos consultar la nota *No lo olvides*. Para comprobar que los alumnos han comprendido la explicación, les podemos proponer los ejercicios:

– Describe el polinomio $3x^3 + 5x^2 – 4$

– Pon un ejemplo de un binomio que no tenga término independiente.

■ En el apartado sobre polinomios completos y ordenados, leeremos el texto y preguntaremos:

– *¿Un polinomio de grado 1 puede ser incompleto?*

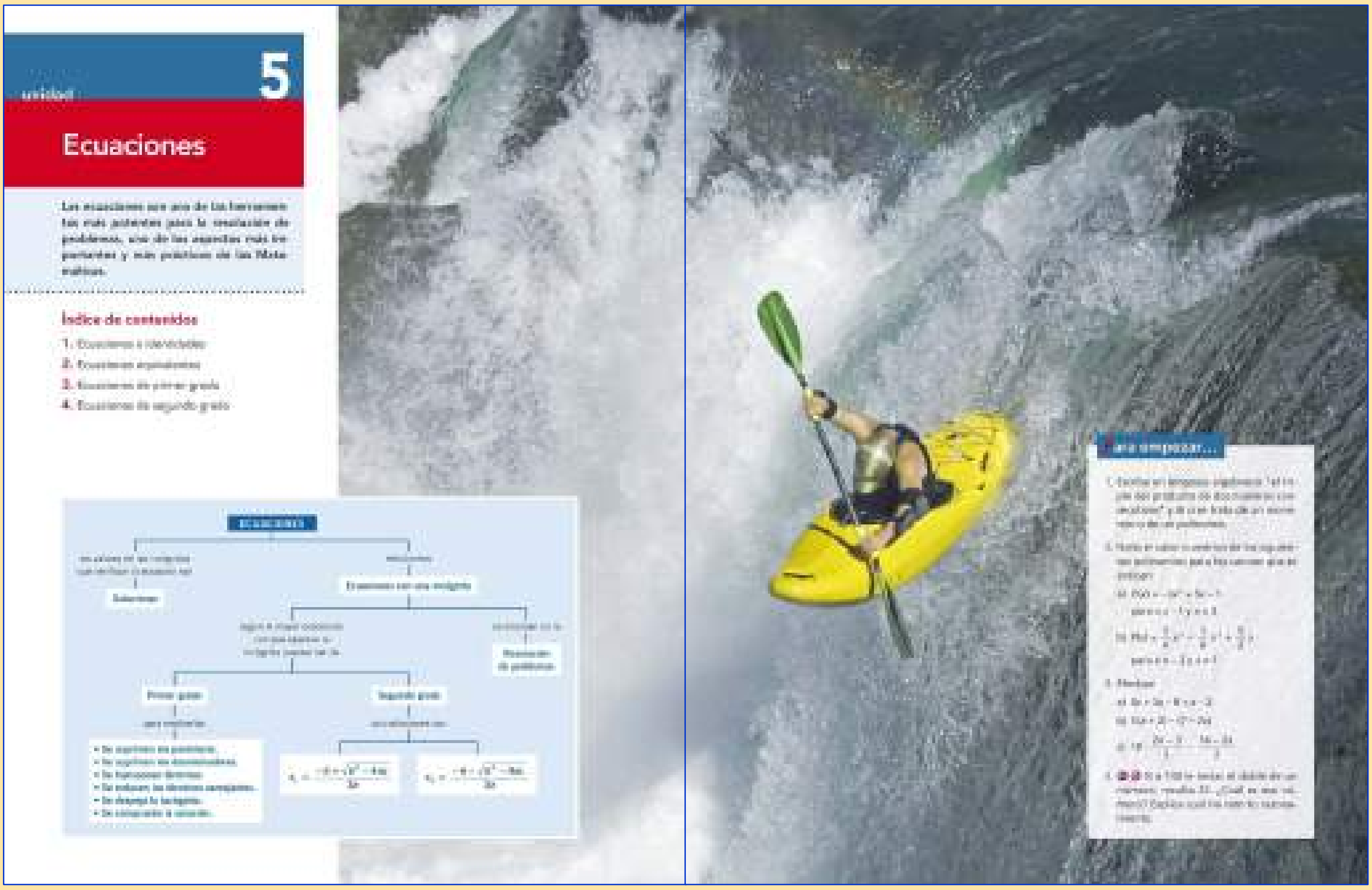
– *¿Es completo el polinomio* $3x^3 + 5x^2 – x$*?*

Para saber cómo ordenaremos los polinomios en la práctica, leeremos el apunte *Ten en cuenta* del margen.

Los alumnos pueden resolver ahora las actividades 15 a 18 de la página 82.

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/741715	http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/2quincena5/2quincena5_contenidos_2b.htm?utm_source=tiching&utm_medium=referral
http://www.tiching.com/743435	http://www.educaplay.com/es/recursosEducativos.php?bus=algebra&buscar=+&opbus=Actividades
http://www.tiching.com/743436	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Interpretacion_expresiones_algebraicas_d3/indice.htm
http://www.tiching.com/743438	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_expresiones_algebraicas/index_2quincena5.htm
http://www.tiching.com/743440	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/algebra_identidades.htm
http://www.tiching.com/743441	http://www.alfonsogonzalez.es/asignaturas/2_eso/ejercicios_2_eso_propuestos.php
http://www.tiching.com/743490	http://www.vitutor.com/ab/p/polinomios_2.html



INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ El objetivo de esta unidad es profundizar en el estudio de las ecuaciones e identidades.

Las ecuaciones de primer y segundo grado proporcionan un método de resolución que permite abordar el análisis de muchas situaciones del entorno inmediato del alumnado que no pueden resolverse con métodos exclusivamente numéricos.

Después de leer el texto y observar la fotografía de presentación, el alumnado contestará un cuestionario que introduzca este tema:

- *¿Una ecuación es una expresión numérica o algebraica?*
- *¿Por qué crees que se ha puesto esta ilustración para introducir la importancia de las ecuaciones?*
- *¿Conoces diferentes tipos de ecuaciones?*
- *¿De qué elementos constan las ecuaciones?*

A continuación, leerán el índice de contenidos básicos y observarán cómo se relacionan dichos conceptos en el esquema de la unidad. Enlazando con el tema anterior, plantearemos esta cuestión:

- *¿Qué son los coeficientes de una ecuación?*

Empezamos la unidad

■ En la siguiente página, el objetivo que se persigue con las actividades propuestas es el siguiente en cada caso:

- La actividad 1 pretende relacionar las ecuaciones que estudiaremos en esta unidad con las expresiones algebraicas del tema anterior.
- En la actividad 2 se trabaja el cálculo del valor numérico de un polinomio, tal como se hace en la comprobación de las soluciones de una ecuación.
- La actividad 3 revisa las propiedades operativas de los monomios y polinomios, como base para poder transformar las ecuaciones en otras equivalentes.
- La actividad 4 introduce el concepto de ecuación, planteando un problema que se resuelve mediante una sencilla ecuación.

■ Finalmente los alumnos y alumnas pueden resolver las actividades planteadas en el libro trabajando por parejas.

De esta manera serán conscientes de sus errores conceptuales y procedimentales y, por consiguiente, si necesitan repasar la unidad anterior antes de proseguir con el estudio de las ecuaciones.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 1 y 4.* Interpretar un texto con términos propios de las ecuaciones y explicar el razonamiento para resolverlo aplicando el vocabulario técnico relativo al tema.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Esquema.* Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender información integrada en un esquema.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1 a 4.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza sobre las ecuaciones por medio de la realización de estas actividades iniciales.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 1.* Desarrollar sus propios métodos para resolver el problema planteado.

■ *Act. 4.* Analizar y planificar una estrategia de resolución de la situación problemática planteada.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Texto.* Aprender a valorar la importancia de las ecuaciones como herramienta de resolución de proble-mas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para empezar el tema, podemos entrar en esta página web:

http://www.tiching.com/742614

Se trata de un artículo de la enciclopedia virtual Wikipedia en la que se define el concepto de ecuación, se incluye un resumen histórico y se describe con detalle el método de resolución de una ecuación de primer grado acompañado de un problema tipo.

Con este recurso, los alumnos y las alumnas podrán comenzar a familiarizarse con las ecuaciones:

A continuación, para seguir introduciendo la unidad podemos preguntarles:

- *¿Una ecuación es una expresión numérica o algebraica?*
- *¿Conoces diferentes tipos de ecuaciones? ¿En qué se diferencian cada uno de ellos?*

Educamos en valores

Educación para la igualdad de sexos

■ Como desde otras áreas de conocimiento, en las matemáticas se puede trabajar la toma de conciencia de los fenómenos de discriminación sexista.

■ En el libro de texto y en la guía didáctica se ha procurado no dar predominio a uno de los sexos en detrimento del otro al considerar las actividades, las situaciones o el material gráfico.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de esta unidad que contribuyen a conseguir este objetivo:

– En la actividad 85 de la página 116 se presenta una situación problemática en la que pueden intervenir personas de cualquier sexo.

– En diferentes actividades propuestas, como la 88 de la página 116, se muestran chicas y chicos participando en actividades equivalentes.

Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 101

1. La respuesta es: $3 \cdot [x \cdot (x + 1)] = 3x^2 + 3x$, es un polinomio.

2. Las respuestas son:

a) $P(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 1 = -3 - 5 - 1 = -9$

$P(3) = -3 \cdot (3)^2 + 5 \cdot 3 - 1 = -27 + 15 - 1 = -13$

b) $P(-2) = \frac{3}{4}(-2)^5 - \frac{1}{8}(-2)^3 + \frac{5}{2}(-2) = \frac{3}{4}(-32) - \frac{1}{8}(-8) - 5 = -24 + 1 - 5 = -28$

$P(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{5}{2} = \frac{25}{8}$

3. Efectuando:

a) $5x + 3x + x - 8 - 2 = 9x - 10$

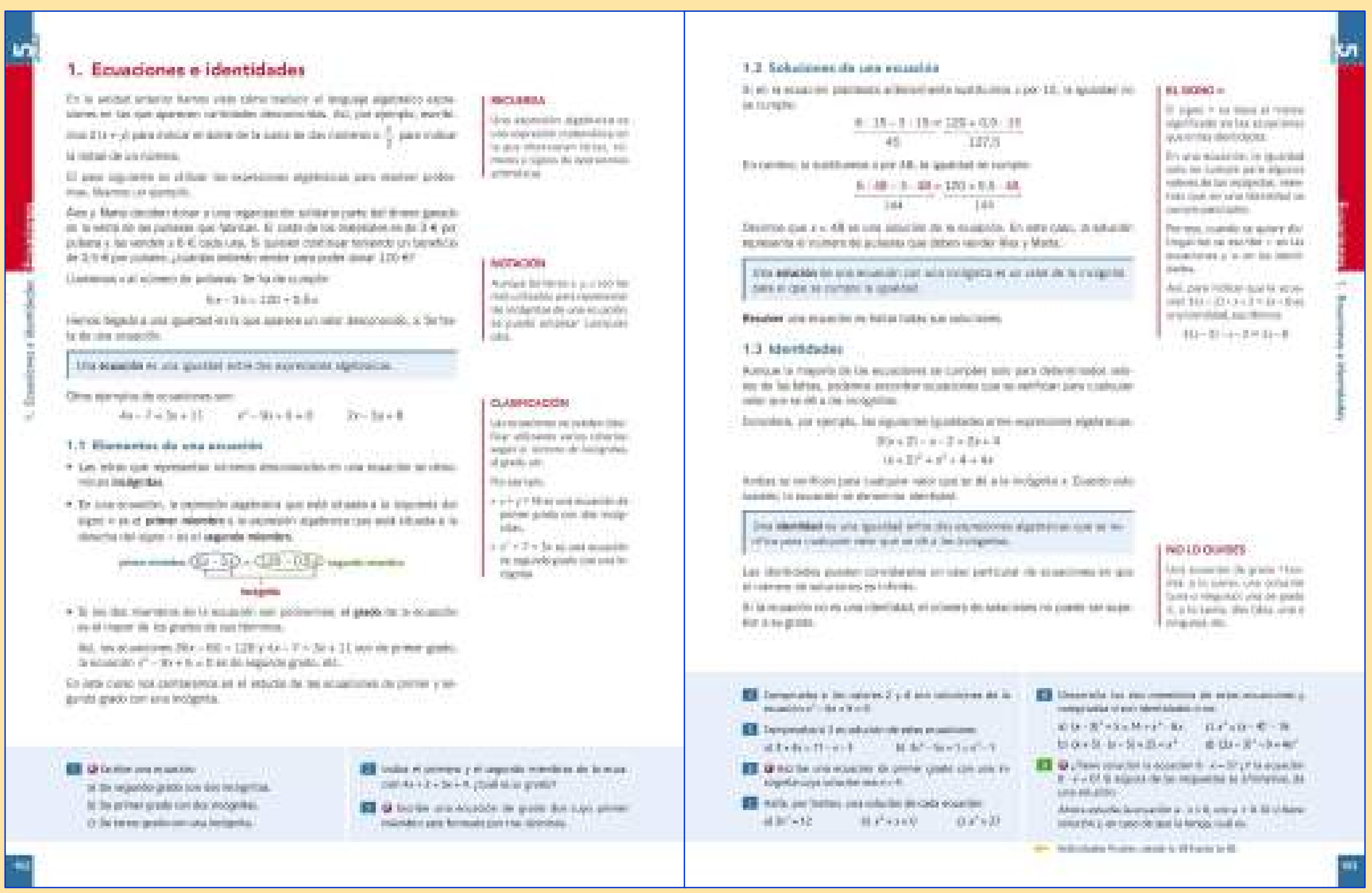
b) $5x + 10 - 7 + 2x = 7x + 3$

c) $2(2x - 3) - (7 - x) = 4x - 6 - 7 + x = 5x - 13$

4. Si llamamos x a ese número, la operación que se nos dice es: $144 - 2x = 22$.

Ahora despejamos x en esa igualdad: $144 - 22 = 2x \rightarrow$

$\rightarrow 122 = 2x \rightarrow x = \frac{122}{2} = 61$



1. ECUACIONES E IDENTIDADES

■ El objetivo básico de esta sección es introducir las ecuaciones, a partir de las expresiones algebraicas ya conocidas, y aprender a diferenciarlas de las identidades.

Comenzamos recordando las expresiones algebraicas en el primer párrafo y en el apunte *Recuerda* del margen. Continuaremos leyendo el ejemplo del texto hasta llegar a la definición de ecuación y la *Notación* empleada.

– *¿Cómo se reconoce una ecuación?*

– *¿Existe algún valor desconocido en las ecuaciones de los ejemplos?*

1.1 Elementos de una ecuación

■ Leeremos detenidamente el texto de este apartado y plantearemos a los alumnos un cuestionario que destaque los aspectos más importantes:

– *¿Qué es la incógnita de una ecuación?*

– *¿Puede haber incógnitas en ambos miembros de una ecuación?*

– *¿Cuáles son los miembros de la ecuación* $x^2 + 3x - 2 = x + 5$ *? ¿De qué grado es?*

Después, los alumnos pueden leer la nota del margen referente a la clasificación de las ecuaciones.

A continuación, pueden practicar todo lo anterior en las actividades 1 a 3 del libro.

1.2 Soluciones de una ecuación

■ En primer lugar, los alumnos leerán este apartado, prestando especial atención al procedimiento de comprobación de soluciones que se comenta. Preguntaremos:

– *¿Cómo podemos saber que un valor es solución de una ecuación?*

– *¿Qué significa resolver una ecuación?*

Leeremos ahora el apunte *No lo olvides* y preguntaremos:

– *¿Si una ecuación tiene dos soluciones es de segundo grado?*

– *¿Tienen solución todas las ecuaciones?*

1.3 Identidades

■ Después de leer el apartado, lanzaremos a los alumnos los siguientes retos:

– *¿Sabrías poner un ejemplo de identidad?*

– *¿Son identidades los productos notables estudiados?*

– *¿Es una identidad una ecuación siempre? ¿Y viceversa?*

Completaremos la exposición leyendo el apunte del margen sobre *El signo =*.

Por último, pediremos al alumnado que resuelvan en su cuaderno las actividades propuestas.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 1 y 2*. Interpretar un texto con términos matemáticos específicos de este tema.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 4, 5, 7 y 8*. Trabajar de forma reiterada la aplicación de un procedimiento, en este caso métodos de comprobación de resultados.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 1 y 3*. Analizar, planificar, organizar y gestionar sus propios métodos para escribir ecuaciones según el enunciado propuesto.
- *Acts. 6 y 9*. Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación reflexionando sobre el enunciado y valorando las posibles soluciones de la actividad.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para refrescar los conocimientos sobre ecuaciones de primer grado.

✓ La actividad de ampliación 3 resultará útil para evaluar si el alumnado ha entendido correctamente y sabe utilizar el lenguaje algebraico para traducir expre-siones.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para introducir el tema de las ecuaciones recomendamos consultar el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/742665

En esta web se incluye un resumen de los contenidos básicos de álgebra relacionados con las ecuaciones. Se tratan el lenguaje algebraico, las expresiones algebraicas equivalentes, igualdades, identidades, ecuaciones y métodos para resolver ecuaciones

El alumnado tiene a su disposición las definiciones de los conceptos fundamentales y una explicación de los métodos de resolución de ecuaciones, tanto algebrai-camente como por tanteo.

Al finalizar la consulta de esta web podremos realizar preguntas como:

- *¿Cuáles son los criterios para clasificar una ecuación?*
- *¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de primer grado?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 102

1. Un ejemplo en cada caso:

a) $3xy + x = 7$ c) $x^3 + 2x = 3$

b) $x + y = 5$

2. Primer miembro: $4x + 2$; segundo miembro: $5x + 4$; grado 1.

3. Un ejemplo es: $x^2 + 3x + 1 = x + 2$

Página 103

4. Sustituimos $x = 2$ en la ecuación:

$2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 4 - 12 + 8 = 12 - 12 = 0$ Sí es solución.

Sustituimos $x = 4$ en la ecuación:

$4^2 - 6 \cdot 4 + 8 = 16 - 24 + 8 = 24 - 24 = 0$ Sí es solución.

5. Comprobamos:

a) Si $x = 2$, en el primer miembro se obtiene: $2 + 4 \cdot 2 = 2 + 8 = 10$, y en el segundo miembro: $17 - 2 - 5 = 17 - 7 = 10$. Coinciden, luego es solución.

b) Si $x = 2$, en el primer miembro se obtiene: $3 \cdot 22 - 5 \cdot 2 + 1 = 12 - 10 + 1 = 3$, y en el segundo miembro: $22 - 1 = 4 - 1 = 3$. También coinciden los valores, y por tanto sí es solución.

6. Un ejemplo es $6 - x = 2$

7. Por tanteo, las soluciones salen:

a) $x = 2$

b) $x = -1$

c) $x = 3$

8. Los resultados son:

a) El primer miembro: $(x - 3)^2 + 5 = x^2 - 6x + 9 + 5 = x^2 - 6x + 14$, y coincide con el segundo, por lo tanto es una identidad.

b) Primer miembro: $(x + 5)(x - 5) + 25 = x^2 - 25 + 25 = x^2$; coincide con el segundo, por lo tanto es una identidad.

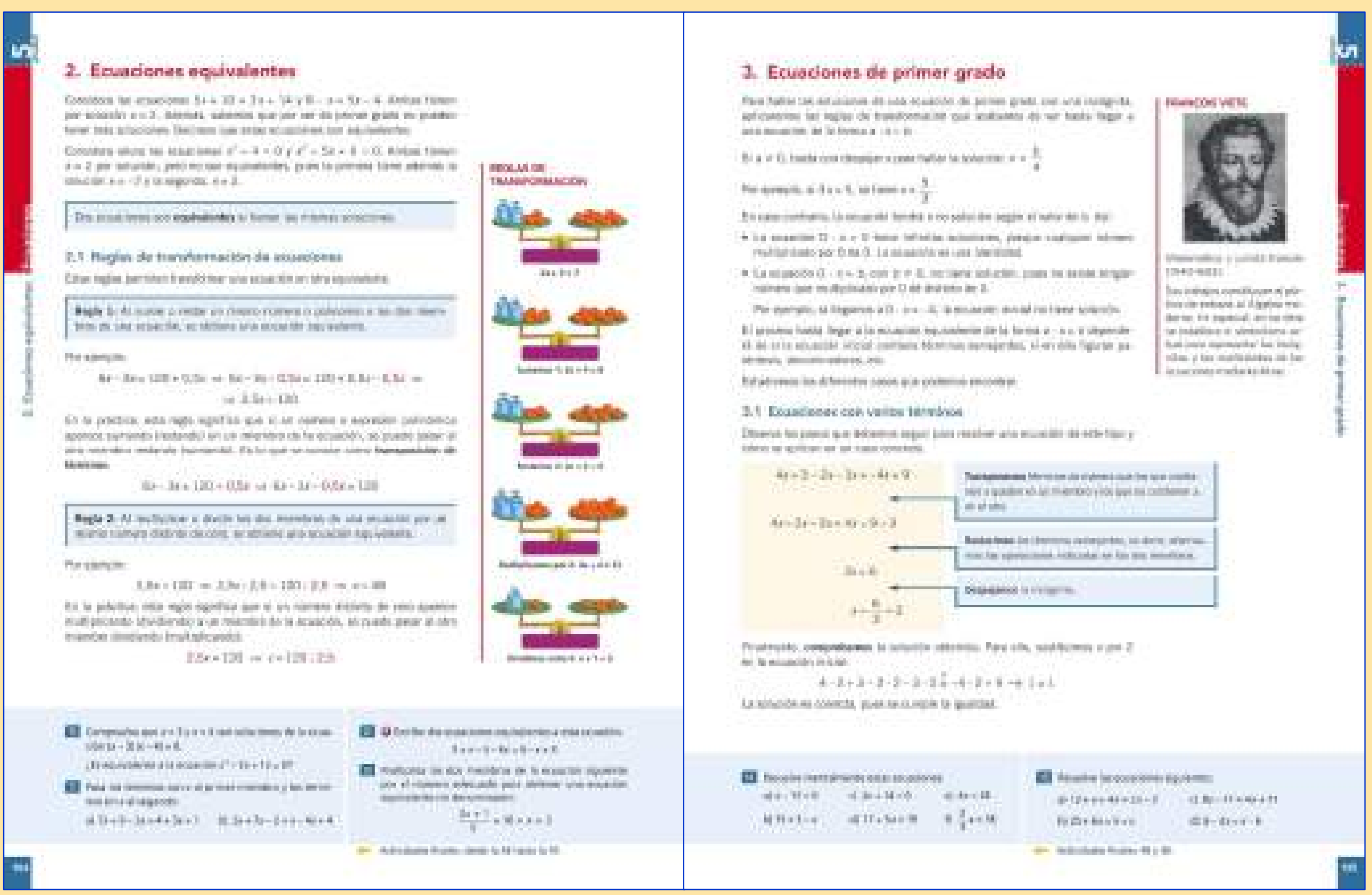
c) Desarrollamos el segundo miembro: $(x - 4)^2 - 16 = x^2 - 8x + 16 - 16 = x^2 - 8x$, que no coincide con el primer miembro, por tanto no es una identidad

d) Desarrollamos el primer miembro: $(2x - 3)^2 - 9 = 4x^2 - 12x + 9 - 9 = 4x^2 - 12x$, que no coincide con el segundo miembro, por tanto no es una identidad.

9. La ecuación $0 \cdot x = 5$ no tiene solución

La ecuación $0 \cdot x = 0$ sí tiene solución, cualquier número; por ejemplo, una solución sería $x = 1$

La ecuación $a \cdot x = 0$, con $a \neq 0$, sí tiene solución, $x = 0$.



2. ECUACIONES... / 3. ECUACIONES DE...

2.1 Reglas de transformación de ecuaciones

■ El objetivo básico de esta sección es introducir las reglas básicas de transformación de ecuaciones en otras equivalentes.

Empezaremos leyendo la introducción y el recuadro, preguntando a los alumnos:

– *¿Cuándo dos ecuaciones son equivalentes?*
– *¿Si dos ecuaciones tienen como solución el valor 4, son equivalentes?*

■ A continuación leeremos el siguiente apartado, donde se enuncian dos reglas básicas que serán de gran utilidad al trabajar con ecuaciones:

– *¿Qué significa transposición de términos?*
– *¿Cómo se despeja x en la ecuación* $20 = 5 \cdot x$ *?*

En el margen podemos observar visualmente la aplicación de dichas *Reglas de transformación.*

Los alumnos completarán ahora las actividades 10 a 13 propuestas en el libro.

3.1 Ecuaciones con varios términos

■ En la siguiente sección se introducen los procedimientos básicos que permiten resolver una ecuación de primer grado.

Leeremos la introducción, prestando atención a los casos especiales mostrados, en que la ecuación tiene infinitas o ninguna solución.

– *¿Qué debe pasar para que una ecuación tenga una única solución?*
– *¿Cuántas soluciones tiene la ecuación* $a \cdot x = 0$ *?*
– *¿Cuántas soluciones tiene la ecuación* $x = x$ *?*

■ En el apartado siguiente, sobre ecuaciones con varios términos, seguiremos los pasos del ejemplo, que nos detallan cómo resolver ecuaciones de primer grado. Valoraremos la comprensión del procedimiento preguntando:

– *¿Qué transposición debe realizarse para resolver la ecuación* $6x - 3 = 15 + 7$ *?*
– *¿Qué quiere decir reducir los términos semejantes de una ecuación?*
– *¿Cómo se comprueba que el resultado el correcto?*

Como docentes, haremos hincapié en la importancia de comprobar siempre la solución obtenida.

Finalmente, los alumnos resolverán en su cuaderno las actividades propuestas en el libro.

Como actividad complementaria pueden leer el documento del margen sobre *François Viéte*, que esboza alguna de las aportaciones de este matemático.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 13*. Interpretar un texto con términos matemáticos específicos del tema.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 13*. Aplicar las estrategias de planificación para resolver la actividad y evaluar el resultado y el proceso llevado a cabo.
- *Acts. 14 y 15*. Trabajar de forma reiterada la aplicación de un procedimiento.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 12*. Ser capaz de analizar, planificar y organizar los datos de un enunciado para escribir dos ecuaciones equivalentes a la que nos dan.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *François Viète*. Reconocer la importancia de la labor de matemáticos y científicos en los campos estudiados.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 permitirá consolidar los conocimientos sobre métodos de resolución de ecuaciones de primer grado.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para repasar los conceptos de ecuación y trabajar con ecuaciones equivalentes proponemos consultar la siguiente web:

http://www.tiching.com/742616

El alumnado puede trabajar con una amplia variedad de recursos didácticos y actividades para ampliar o reforzar los contenidos tratados en clase.

La web muestra una ventana interactiva en la que los alumnos y las alumnas pueden resolver ecuaciones de primer grado pudiendo seleccionar opciones alternativas como paréntesis y denomina-dores.

Asimismo, en otra escena interactiva el alumnado puede resolver problemas con datos generados al azar, aplicando ecuaciones de primer grado.

Como docentes también les podemos plantear que elaboren un esquema de como se resuelve una ecuación de primer grado.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 104

10. Si x = 3: $(3-3)\cdot(3-4) = 0\cdot(-1) = 0$; sí es solución.

Si x = 4: $(4-3)\cdot(4-4) = 1\cdot 0 = 0$; por lo tanto también es solución.

Sí es equivalente, porque la primera ecuación es:

$(x-3)\cdot(x-4) = x^2-4x-3x+12 = x^2-7x+12$,

que coincide con la segunda ecuación.

11. Los resultados son:

a) $7x-2x-3x = 4+1-9 \rightarrow 2x = -4$

b) $2x+7x-x+4x = 4+2 \rightarrow 12x = 6$

12. Sumando 1 a los dos miembros de la ecuación:

$3+x-5-6x+1 = 4-x+3+1$

Ahora, si restamos x a cada lado de la igualdad, obtenemos:

$3+x-5-6x-x = 4-x+3-x$

13. Multiplicamos por 5 la ecuación:

$$5\cdot\frac{2x+1}{5}+5\cdot 10 = 5(x+3)$$

$$2x+1+50 = 5x+15$$

Página 105

14. Las respuestas son:

a) $x = 13$

b) $x = -12$

c) $x = -7$

d) $x = \frac{2}{5}$

e) $x = 7$

f) $x = 27$

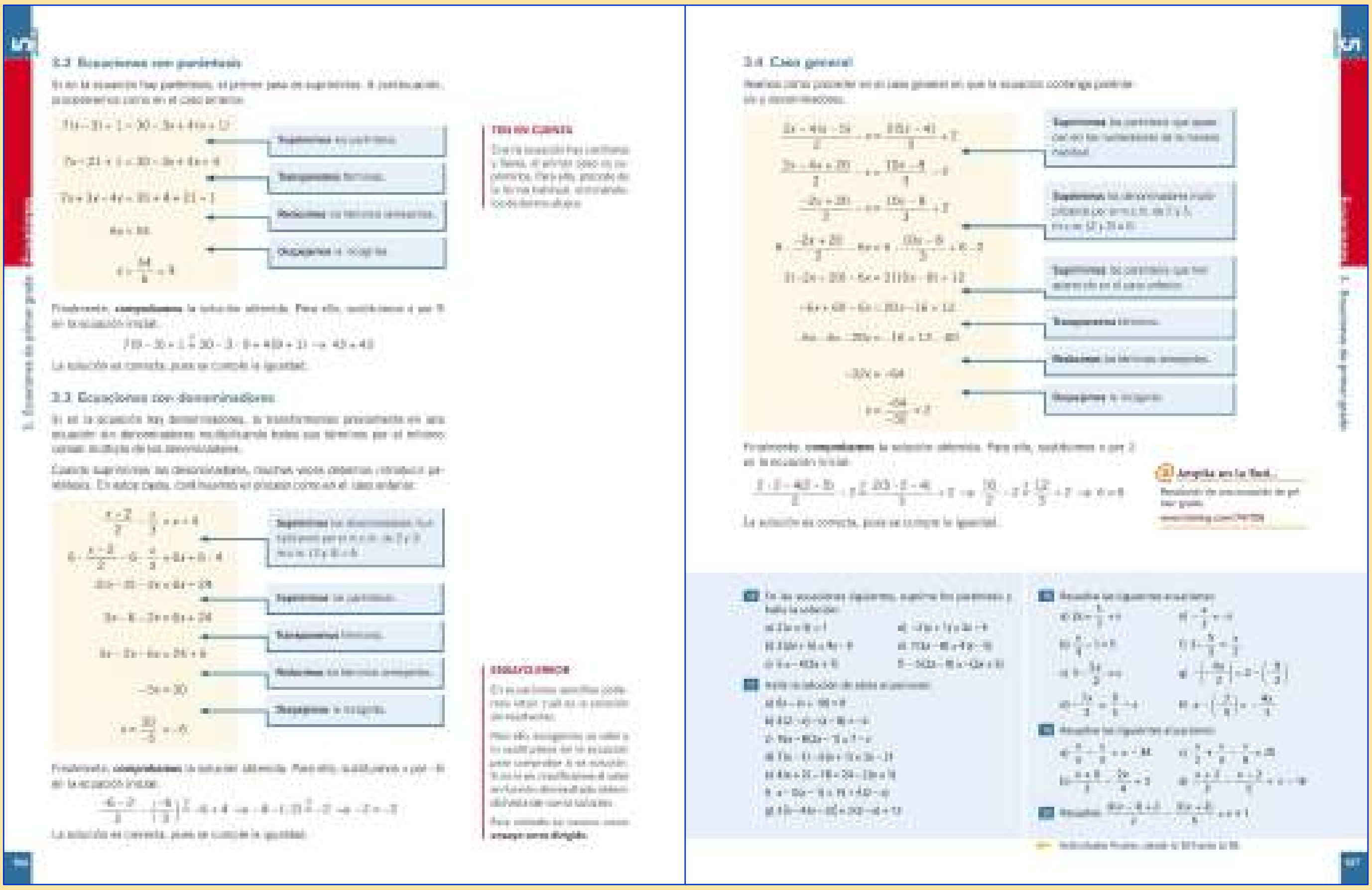
15. El proceso a seguir es el mismo para todos los apartados del problema: en primer lugar transponemos términos, después los reducimos y por último despejamos la incógnita x:

a) $x+4x-2x = -3-12 \rightarrow 3x = -15 \quad x = -\frac{15}{3} = -5$

b) $6x-x = 5-25 \rightarrow 5x = -20 \rightarrow x = -\frac{20}{5} = -4$

c) $8x-4x = 11+17 \rightarrow 4x = 28 \rightarrow x = \frac{28}{4} = 7$

d) $-3x-x = -6-6 \rightarrow -4x = -12 \rightarrow x = \frac{-12}{-4} = 3$



3. ECUACIONES DE PRIMER GRADO (CONT.)

3.2 Ecuaciones con paréntesis

■ Este apartado expone cómo reducir ecuaciones que incluyen paréntesis a ecuaciones como las estudiadas en el apartado anterior, para poder aplicar el método presentado anteriormente.

Revisaremos el ejemplo paso a paso y comprobaremos su comprensión por los alumnos a través de este cuestionario:

– *¿Qué propiedad se utiliza para suprimir los paréntesis?*
– *¿Qué operación estamos aplicando al despejar la incógnita en la ecuación final 6x = 54?*
– *¿Cuál es el último paso que debe realizarse al resolver una ecuación?*

A continuación prestaremos atención al apunte *Ten en cuenta del margen.*

3.3 Ecuaciones con denominadores

■ Seguiremos el mismo procedimiento para analizar este apartado, con el fin de aprender a resolver en este caso las ecuaciones con denominadores. Preguntaremos:

– *¿Qué suprimirías antes, paréntesis o denominadores?*
– *¿Cómo eliminamarías los denominadores de una ecuación?*
– *¿Por qué multiplicamos por 6 en el ejemplo?*

Por último observaremos otro método de resolución de ecuaciones, explicado en la nota del margen *Ensayo-error*, y lanzaremos las preguntas:

– *¿Crees que hubiera sido más rápido resolver las ecuaciones de los ejemplos anteriores con el método ensayo-error?*
– *¿Podrías aplicar este método para resolver la ecuación 7 + 2x = 10?*

3.4 Caso general

■ Como conclusión, los alumnos pueden analizar con detalle el ejemplo resuelto, en el que se combinan todos los casos estudiados anteriormente.

– *¿Cómo suprimes los paréntesis?*
– *¿Por qué crees que es necesario eliminar los denominadores antes de agrupar adecuadamente los monomios de una ecuación?*

A continuación los alumnos pueden ampliar información y poner en práctica la metodología explicada con ejercicios interactivos, accediendo al recurso *@Amplía en la Red.*

Para terminar, pediremos a los alumnos que completen en sus cuadernos las actividades del libro.

COMPETENCIAS CLAVE

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 16*. Adquirir habilidad en el trabajo con paréntesis para aplicarla en la resolución de ecuaciones de primer grado.

■ *Acts. 17 a 19*. Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, gracias al carácter repetitivo de las actividades.

■ *Act. 20*. Aplicar los conocimientos adquiridos para calcular el resultado de ecuaciones con paréntesis y denominadores.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 20*. Analizar, planificar y organizar estrategias para resolver una ecuación con paréntesis y denominadores.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *@Amplía en la Red...* Utilizar recursos de Internet para practicar la resolución de ecuaciones de primer grado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 servirá para revisar la resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis.

✓ La actividad de refuerzo 4 servirá para revisar la resolución de ecuaciones de primer grado con denominadores.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos visitar este recurso para consolidar los conocimientos adquiridos sobre ecuaciones de primer grado con paréntesis y con denominadores

http://www.tiching.com/742693

En este enlace el alumnado encontrará diferentes test con ecuaciones para resolver paso por paso.

En el caso de ecuaciones con paréntesis, deberán resolver el test rellenando cuatro columnas. En la primera tendrán que suprimir los paréntesis, en la segunda transpondrán los términos, en la tercera reducirán los términos semejantes y en la última despejarán la incógnita.

En el caso de ecuaciones con denominadores también rellenarán paso a paso e irán verificando cada respuesta.

Una vez realizado algún test, podemos plantearles preguntas tales como:

- *¿Qué se suprime primero, los paréntesis o los denominadores?*
- *¿Qué debemos hacer para eliminar los paréntesis de una ecuación?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 107

16. Suprimidos los paréntesis, seguimos los pasos habituales:

a) $2x + 6 = 1 \rightarrow 2x = 1 - 6 \rightarrow 2x = -5 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$

b) $6x + 15 = 4x - 9 \rightarrow 6x - 4x = -9 - 15 \rightarrow 2x = -24$

$x = -\frac{24}{2} = -12$

c) $5 = -12x - 28 \rightarrow 12x = -28 - 5 \rightarrow 12x = -33$

$x = -\frac{33}{12} = -\frac{11}{4}$

d) $-2x - 2 = 3x - 9 \rightarrow -2x - 3x = -9 + 2 \rightarrow -5x = -7$

$x = \frac{7}{5}$

e) $21x - 56 = 4x - 20 \rightarrow 17x = 36 \rightarrow x = \frac{36}{17}$

f) $-10x + 45 = -2x - 5 \rightarrow -8x = -50$

$x = \frac{-50}{-8} = \frac{25}{4}$

17. En todas estas ecuaciones, una vez suprimidos los paréntesis, seguimos los pasos habituales:

a) $6x - x - 10 = 0 \Rightarrow 6x - x = 10 \Rightarrow 5x = 10$

$x = \frac{10}{5} = 2$

b) $8 - 4x - x + 8 = -4 \Rightarrow -5x = -20$

$x = \frac{-20}{-5} = 4$

c) $16x - 16x + 8 = 7 - x \Rightarrow x = 7 - 8 \Rightarrow x = -1$

d) $7x - 7 - 6x - 6 = 3x \Rightarrow -2x = -8$

$x = \frac{-8}{-2} = 4$

e) $4x + 8 - 18 = 24 - 2x - 2 \Rightarrow 6x = 32$

$x = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$

f) $x - 3x + 3 = 15 + 8 - 4x \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$

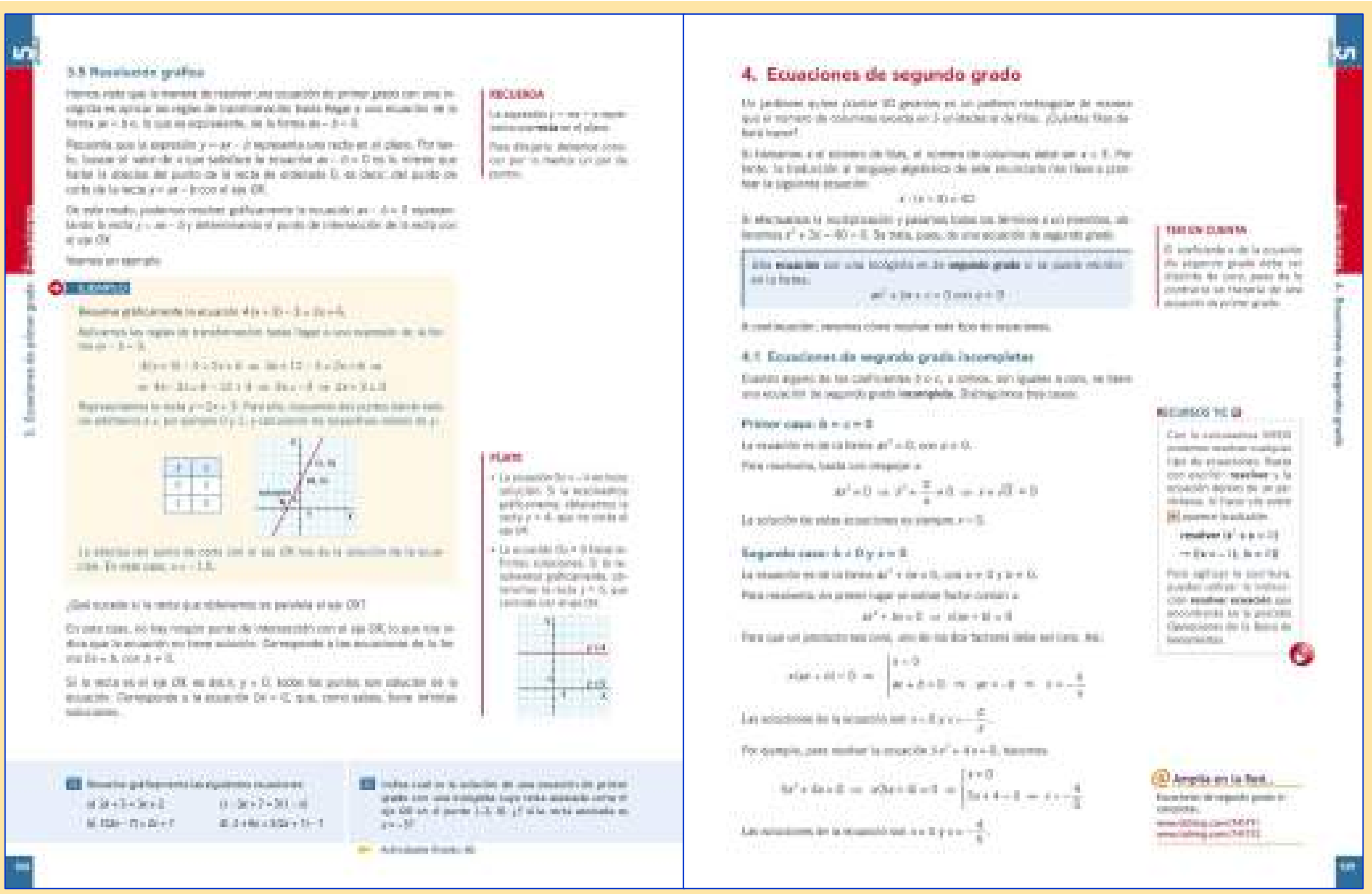
g) $2(x - 4x + 12) = 6 - 2x + 12$

$2x - 8x + 24 = 6 - 2x + 12$

$-4x = -6$

$x = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

(Continúa en la página 5-35 de la guía)



3. ECUACIONES… (CONT.) / 4. ECUACIONES…

3.5. Resolución gráfica

■ En este apartado veremos un último método para resolver ecuaciones de primer grado, que aunque no se usa tan habitualmente como los anteriores, sí es interesante conocer.

Leeremos el planteamiento junto con la nota del margen *Recuerda:*

– *¿La intersección de qué dos rectas da solución a la ecuación 5x = 8?*

A continuación, observaremos juntos la solución del ejemplo expuesto en el libro y nos aseguraremos de su comprensión por parte del alumnado preguntando:

– *¿Por qué en este caso no despejamos la incógnita?*
– *¿Por qué la solución es el punto de corte con el eje X?*
– *¿Podíamos haber elegido otros puntos diferentes para representar la recta?*

Leeremos después el texto que sigue, para analizar varios casos particulares.

Para comprenderlos mejor podemos revisar los ejemplos explicados bajo el epígrafe *Fíjate.*

– *¿Cuántas soluciones tienen las ecuaciones que representan rectas paralelas al eje X?*

Los alumnos resolverán ahora las actividades propuestas.

4. Ecuaciones de segundo grado

■ El objetivo de esta sección consiste en presentar el procedimiento de resolución de una ecuación de segundo grado.

Empezaremos leyendo el ejemplo introductorio, la definición y la nota lateral, y lanzaremos las preguntas:

– *¿Cómo se reconoce una ecuación de segundo grado?*
– *¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de segundo grado?*
– *¿Si b = 0, tenemos una ecuación de segundo grado?*

■ A continuación leeremos el apartado sobre ecuaciones incompletas, analizando los ejemplos que ilustran el contenido y preguntando:

– *¿Cuántas soluciones tiene la ecuación de segundo grado de la forma* $ax^2 = 0$ *?*
– *¿Cuál es el primer paso para resolver una ecuación de la forma* $ax^2 + bx = 0$ *?*
– *¿Cuáles son las soluciones de la ecuación* $x(5x - 5) = 0$ *?*

Después investigaremos cómo resolver ecuaciones con la calculadora online WIRIS, con los consejos del margen.

Los alumnos practicarán ahora la resolución de estas ecuaciones accediendo al recurso *Tiching* 741711.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 22.* Interpretar un enunciado en el que se incluyen términos técnicos específicos de la materia.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 21.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para resolver gráficamente las ecuaciones dadas.
- *Act. 22.* Representar ecuaciones de primer grado.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 22.* Conocer la forma adecuada de representar una ecuación de primer grado dada.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de la calculadora WIRIS para resolver todo tipo de ecuaciones.

COMPETENCIA DIGITAL

- *@Amplía en la Red...* Utilizar recursos de Internet para practicar la resolución de ecuaciones de segundo grado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 servirá para practicar la resolución de ecuaciones de sgundo grado.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para repasar y asimilar los conceptos relacionados con la resolución gráfica de ecuaciones podemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/742701

En esta web el alumnado trabajará con actividades interactivas en las que tendrán que ir escogiendo las respuestas correctas.

Si tienen alguna duda, al final de cada página podrán consultar la teoría donde repasarán los diferentes conceptos para poder continuar realizando las actividades.

Además, el documento contiene las soluciones, de manera que los alumnos y las alumnas podrán autoevaluarse para ser conscientes de sus propias puntos fuertes y carencias.

Una vez realizadas estas actividades, podemos plantear preguntas como:

- *¿Qué sucede si la recta que se obtiene en una representación gráfica es paralela al eje OX? ¿Y si la recta es el eje OX?*

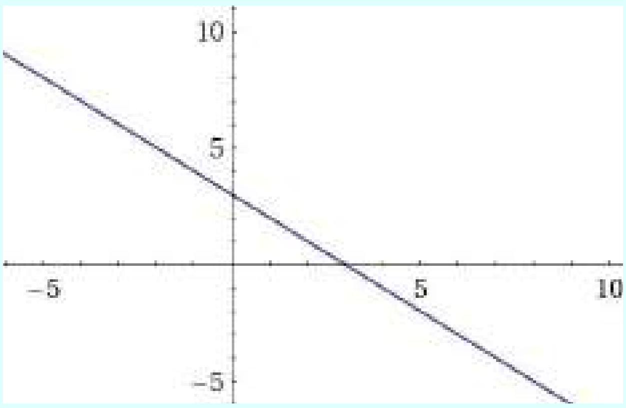
SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 109

21. En primer lugar, transformamos todas estas ecuaciones hasta llegar a una expresión de la forma $ax - b = 0$, y después representamos la recta correspondiente:

a) $2x - 3x = 2 - 5 \rightarrow -x = -3 \rightarrow -x + 3 = 0$

Representamos la recta $y = -x + 3$ utilizando una tabla de valores, dando dos valores a x arbitrarios, y calculando sus respectivos valores de y:

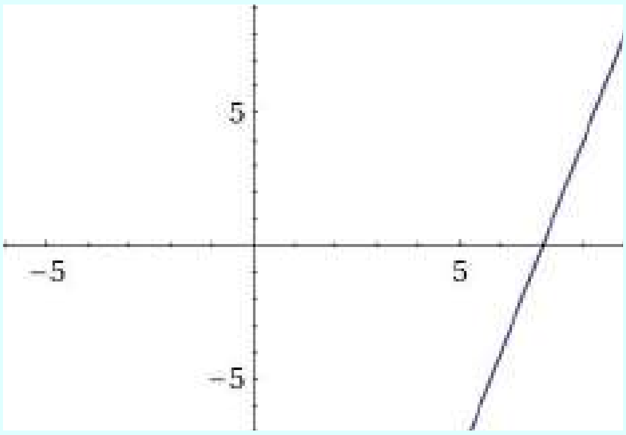


La abscisa del punto de corte con el eje OX nos da la solución de la ecuación, $x = 3$.

b) $6x - 21 = 2x + 7 \rightarrow 6x - 2x = 7 + 21 \rightarrow$

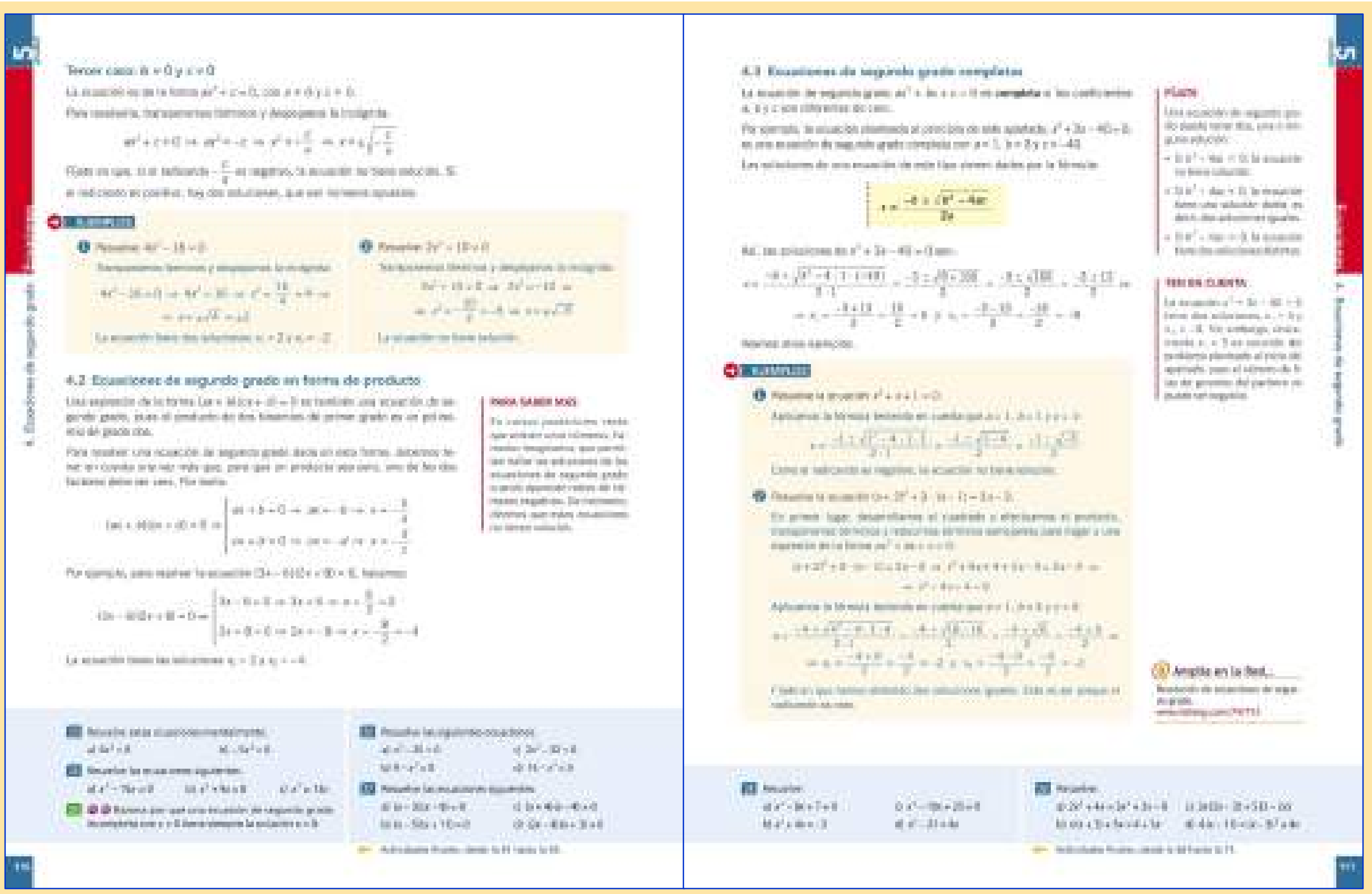
$4x = 28 \rightarrow 4x - 28 = 0$

Representamos la recta $y = 4x - 28$ utilizando una tabla de valores, dando dos valores a x arbitrarios, y calculando sus respectivos valores de y:



La abscisa del punto de corte con el eje OX nos da la solución de la ecuación, $x = 7$.

(Continúa en la página 5-36 de la guía)



4. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO (CONT.)

■ De la misma forma que en la doble página anterior, analizaremos el tercer caso de ecuaciones de segundo grado incompletas y plantearemos estas cuestiones:

– *¿Cuál es la solución de* $2x^2 - 8 = 0$ *?*

– *¿Cuántas soluciones tiene* $3x^2 + 27 = 0$ *?*

A continuación observaremos los dos ejemplos resueltos y preguntaremos:

– *¿Cuál es el primer paso para resolver estas ecuaciones?*

Por último, los alumnos accederán al recurso *Tiching* 741712 de la página anterior, donde encontrarán actividades resueltas paso a paso.

4.2 Ecuaciones de segundo grado en forma de…

■ Leeremos este apartado prestando atención al método de resolución de una ecuación de segundo grado factorizada. Luego lanzaremos las preguntas:

– *¿Qué grado tienen los binomios factores?*

– *¿Cuál es el primer paso para resolver estas ecuaciones?*

Como curiosidad, leeremos la nota *Para saber más*.

Los alumnos resolverán ahora las actividades 23 a 27, con el fin de repasar y asentar la resolución de ecuaciones incompletas y en forma de producto.

4.3 Ecuaciones de segundo grado completas

■ En este apartado nos familiarizaremos con la expresión que permite obtener las soluciones de una ecuación de segundo grado completa.

Leeremos el texto y complementaremos la explicación con las dos notas del margen *Fíjate* y *Ten en cuenta,* en las que aclararemos cuantas soluciones tiene la ecuación de segundo grado y por qué:

– *¿Qué debe ocurrir para que la ecuación tenga dos soluciones?*

– *¿Qué ocurre si el radicandode una ecuación de segundo grado completa es negativo?*

A continuación, analizaremos los ejemplos para afianzar la metodología de resolución. Preguntaremos:

– *¿De qué forma necesitamos expresar la ecuación para poder resolverla?*

– *¿Qué relación hay entre el radicando y la solución en el segundo ejemplo?*

Los alumnos pueden seguir practicando la ecuaciones de segundo grado consultando el recurso *@Amplía en el Red.*

Finalmente, pediremos al alumnado que realicen las actividades 28 y 29.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 25*. Interpretar y justificar con el vocabulario específico un enunciado en el que se incluyen términos técnicos específicos de la materiar.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 25*. Conocer la disciplina y el contenido concreto de la materia relacionada con las ecuaciones de segundo grado para afrontar la actividad.
- *Acts. 26 a 29*. Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, gracias al carácter repetitivo de las actividades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 25*. Establecer relaciones entre los datos del enunciado, planificar su resolución y buscar la solución, evaluando las acciones realizadas.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 6 resultará útil para repasar la resolución de ecuaciones de segundo grado completas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Recomendamos consultar este recurso para ampliar el estudio sobre ecuaciones de segundo grado:

http://www.tiching.com/742787

En esta página web se incluyen escenas que aplican el procedimiento de resolución de ecuaciones incompletas de segundo grado.

En la primera escena el usuario puede analizar la resolución de ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$ que se generan al azar al pulsar un control.

En la segunda escena, los alumnos y las alumnas pueden analizar la resolución de ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$, también generadas al azar.

Finalmente, se incluye una escena en la que se proponen ecuaciones de segundo grado incompletas que el alumnado puede resolver e introducir la respuesta para comprobar si el resultado obtenido es correcto.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 110

23. Resolvemos:

a) $x = 0$

b) $x = 0$

24. Son ecuaciones de segundo grado incompletas ($c = 0$):

a) $x(x - 15) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 15 = 0 \rightarrow x = 15 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x = 0$, $x = 15$

b) $x(x + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 9 = 0 \rightarrow x = -9 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x = 0$, $x = -9$

c) $x(x - 13) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 13 = 0 \rightarrow x = 13 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x = 0$, $x = 13$

25. Al ser de la forma $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$), se puede poner como producto de dos factores igualados a cero:

$x \cdot (ax + b) = 0$,

siendo uno de los factores x, de manera que 0 multiplicado por cualquier número es 0.

26. Son ecuaciones de segundo grado incompletas ($b = 0$):

a) $x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 5$, $x_2 = -5$

b) $9 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

c) $2x^2 = 32 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{32}{2}} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 4$, $x_2 = -4$

d) $16 = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 4$, $x_2 = -4$

27. Se trata de ecuaciones de segundo grado en forma de producto:

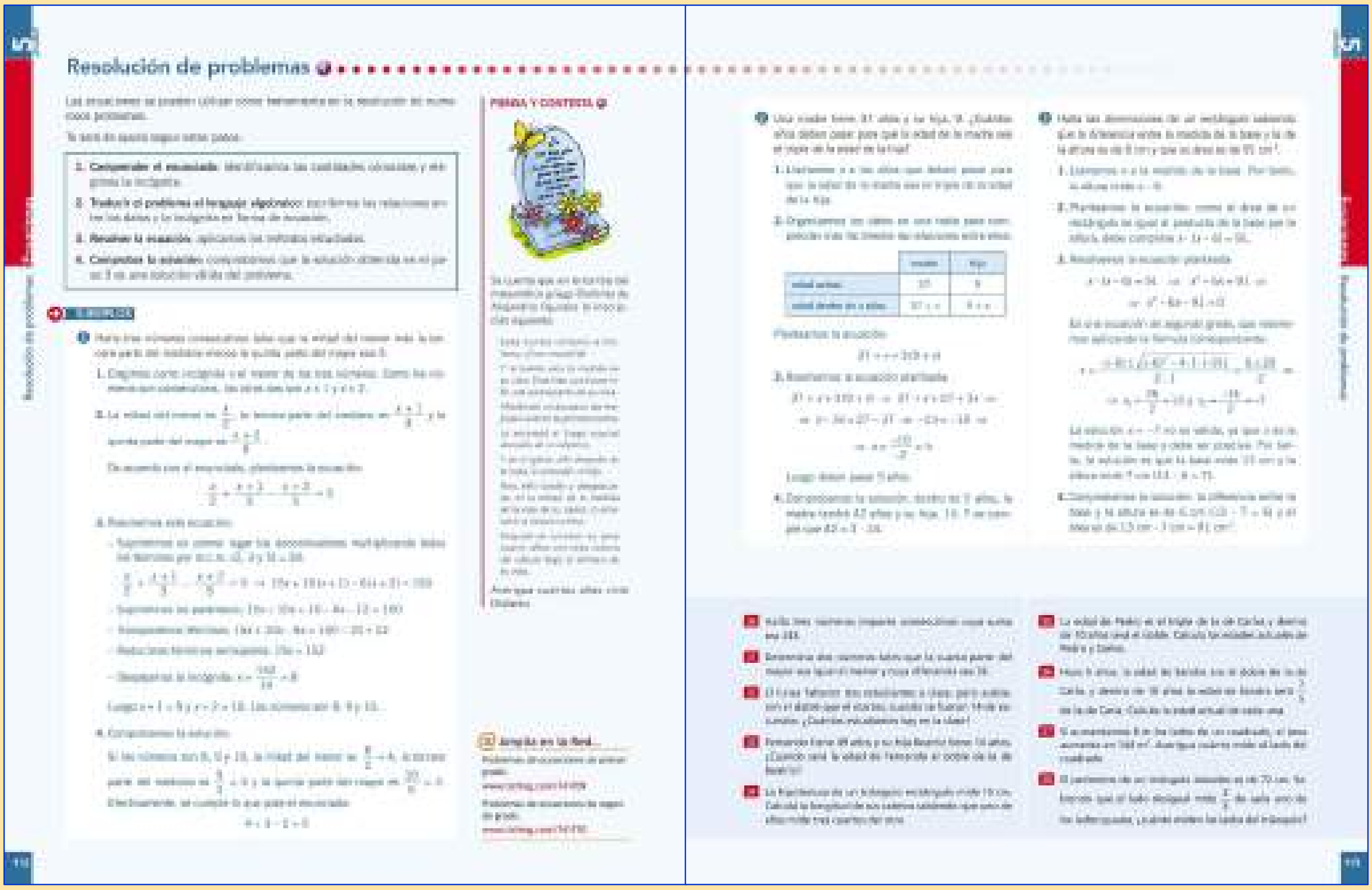
a) $(x - 3)(x - 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ x - 9 = 0 \rightarrow x = 9 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 3$, $x_2 = 9$

b) $(x - 5)(x + 11) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 \\ x + 11 = 0 \rightarrow x = -11 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 5$, $x_2 = -11$

(Continúa en la página 5-36 de la guía)


Resolución de problemas

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

■ Comenzaremos este apartado repasando el método general de resolución de problemas estudiado en temas anteriores, y adaptándolo al caso en que tengamos ecuaciones. Luego preguntaremos:

– *¿Cómo expresamos la relación entre los datos y la incógnita?*

– *¿Son válidas todas las soluciones de la ecuación para el problema que queremos resolver?*

Analizaremos ahora el primero de los ejemplos, identificando cada una de las fases expuestas en la introducción:

– *¿Se podía haber elegido otra incógnita?*

– *¿De qué tipo es la ecuación que hemos obtenido en el paso 2?*

– *¿Cómo comprobamos que la solución verifica el enunciado?*

Después pueden leer el documento *Piensa y contesta* y resolver por parejas el reto planteado.

A continuación los alumnos accederán al recurso *@Amplía en la Red* 741709*,* que incluye una serie de problemas resueltos aplicando la metodología anterior y el uso de ecuaciones de primer grado.

■ Continuaremos leyendo el segundo enunciado y, previamente a observar la resolución expuesta en el libro, lanzaremos estas cuestiones al alumnado con el fin de comprobar su comprensión:

– *¿Cuál es el primer paso para resolver el problema del ejemplo?*

– *¿Cuál es la incógnita?*

– *¿Cómo expresamos los datos en función de dicha incógnita?*

■ Por último, analizaremos el tercero de los ejemplos, en este caso un problema que se resuelve por medio de una ecuación de segundo grado.

– *¿Cuál es nuestra incógnita?*

– *¿Podríamos haber elegido la otra dimensión del rectángulo como incógnita? ¿Cómo expresaríamos en este caso la base y la altura?*

– *¿Qué tipo de ecuación obtenemos?*

– *¿Son válidas las dos soluciones de la ecuación para resolver el problema? Razona tu respuesta.*

Los alumnos pueden acceder ahora al recurso *Tiching* 741710, con el fin de practicar la resolución de problemas con ecuaciones de segundo grado, a traves de más ejemplos resueltos.

Finalmente los alumnos desarrollarán su destreza en la resolución de este tipo de problemas, practicando con los propuestos en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 30 y 31*. Conocer la disciplina y el contenido concreto de la materia relacionada con las ecuaciones para afrontar las actividades.
- *Acts. 32 a 38*. Ser capaz de establecer relaciones entre los datos del enunciado de las actividades, planificar su resolución y buscar la solución..

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Piensa y contesta*. Interpretar los textos matemáticos para obtener una información.
- *Resolución de problemas*. Afrontar los problemas con creatividad, flexibilidad en los planteamientos y perseverancia en su resolución

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de ampliación 1 consolidará el método de resolución de problemas paso a paso a partir de un problema con una ecuación de primer grado.

✓ La actividad de ampliación 2 consolidará el método de resolución de problemas paso a paso a partir de un problema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para profundizar en la resolución de problemas relacionados con ecuaciones, aconsejamos utilizar el siguiente recurso:

http://www.tiching.com/742788

En esta web se utiliza una ventana interactiva para resolver situaciones problemáticas aplicando ecuaciones de segundo grado que el usuario debe plantear

Inicialmente se explica el proceso de traducción del enunciado a una expresión algebraica y se dan las soluciones de la ecuación correspondiente.

A contingüación, los alumnos y las alumnas pueden comprobar las soluciones obtenidas utilizando una escena en la que se representa gráficamente la parábola correspondiente.

Finalmente, podemos pedir al alumnado que realice un esquema de los pasos a seguir para la resolución de problemas en los que se utilizan las ecuaciones como estrategia de resolución.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 112

Piensa y contesta

Utilizaremos los 4 pasos como se nos indica:

1. El enunciado solo hace referencia al total de años que vivió Diofanto como cantidad concreta, que además es nuestra incógnita *x*.
2. El escrito en la tumba nos dirá los años que vivió el matemático, así que en un lado de nuestra igualdad tendremos una sola *x*. Una sexta parte fue niño: *x* / 6, añadimos un doceavo: *x* / 12, se casó después de un séptimo: *x* / 7, cinco años después tiene un hijo: 5, la muerte del niño ocurre en la mitad de la vida de Diofanto: *x* / 2, por último cuatro años depuse de esto él muere: 4. Juntando todos los datos dados llegamos a la ecuación:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$$

3. Resolvemos la ecuación:

$$x - \frac{x}{6} - \frac{x}{12} - \frac{x}{7} - \frac{x}{2} = 9$$

$$\frac{84x - 14x - 7x - 12x - 42x}{84} = \frac{756}{84}$$

$$9x = 756 \rightarrow x = \frac{756}{9} = 84$$

4. Comprobamos el resultado:

$$\frac{84}{6} + \frac{84}{12} + \frac{84}{7} + 5 + \frac{84}{2} + 4 = 14 + 7 + 12 + 5 + 42 + 4 = 84$$

Así pues Diofanto vivió 84 años.

Página 113

30. Un número impar es de la forma 2x + 1, y los dos siguientes impares son 2x + 3, 2x + 5. Planteamos y resolvemos la ecuación:

$(2x + 1) + (2x + 3) + (2x + 5) = 243$

$2x + 2x + 2x = 243 - 1 - 3 - 5$

$6x = 234$

$x = 234/6 = 39$

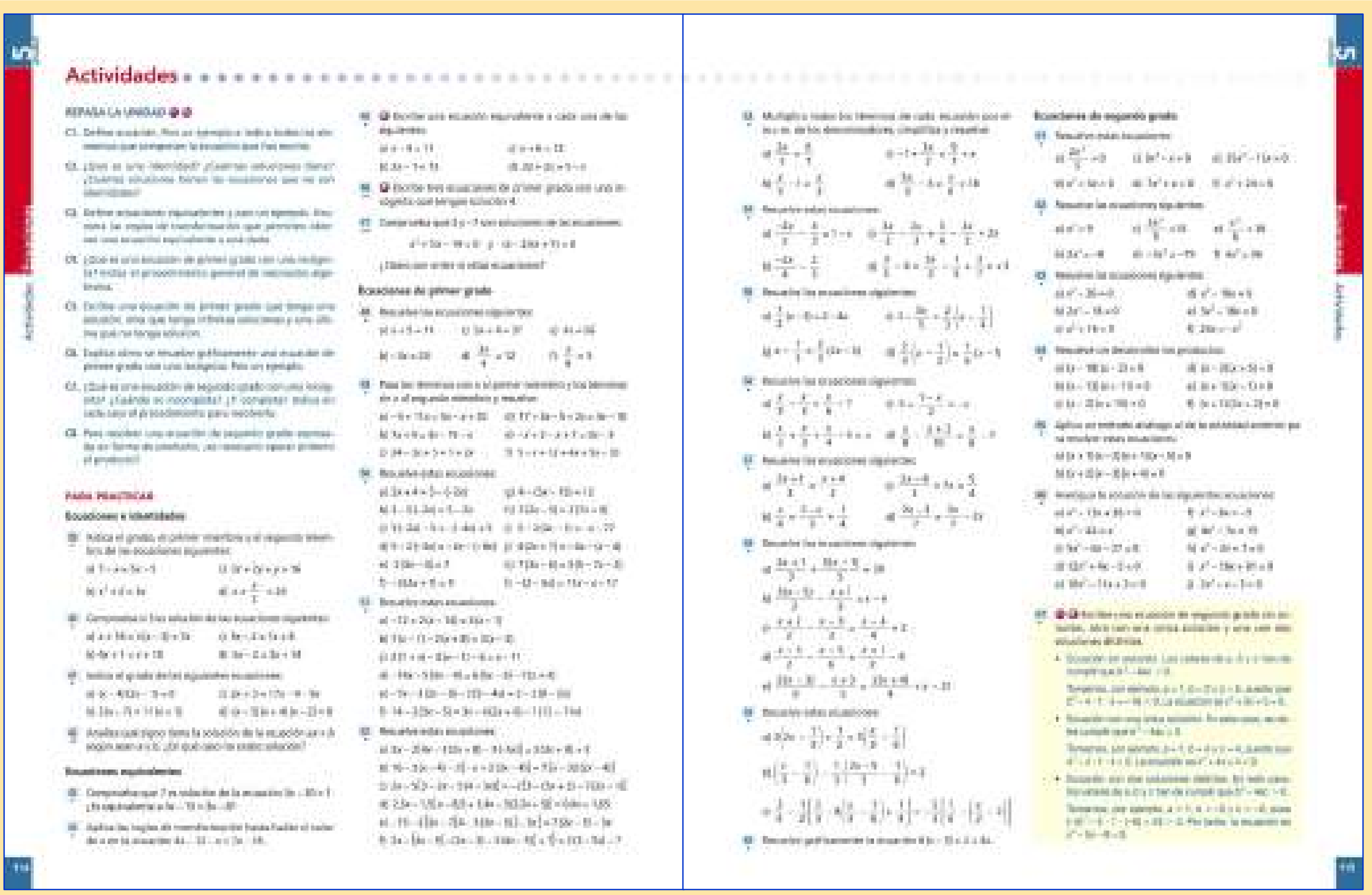
Sustituimos x = 39 en las expresiones iniciales:

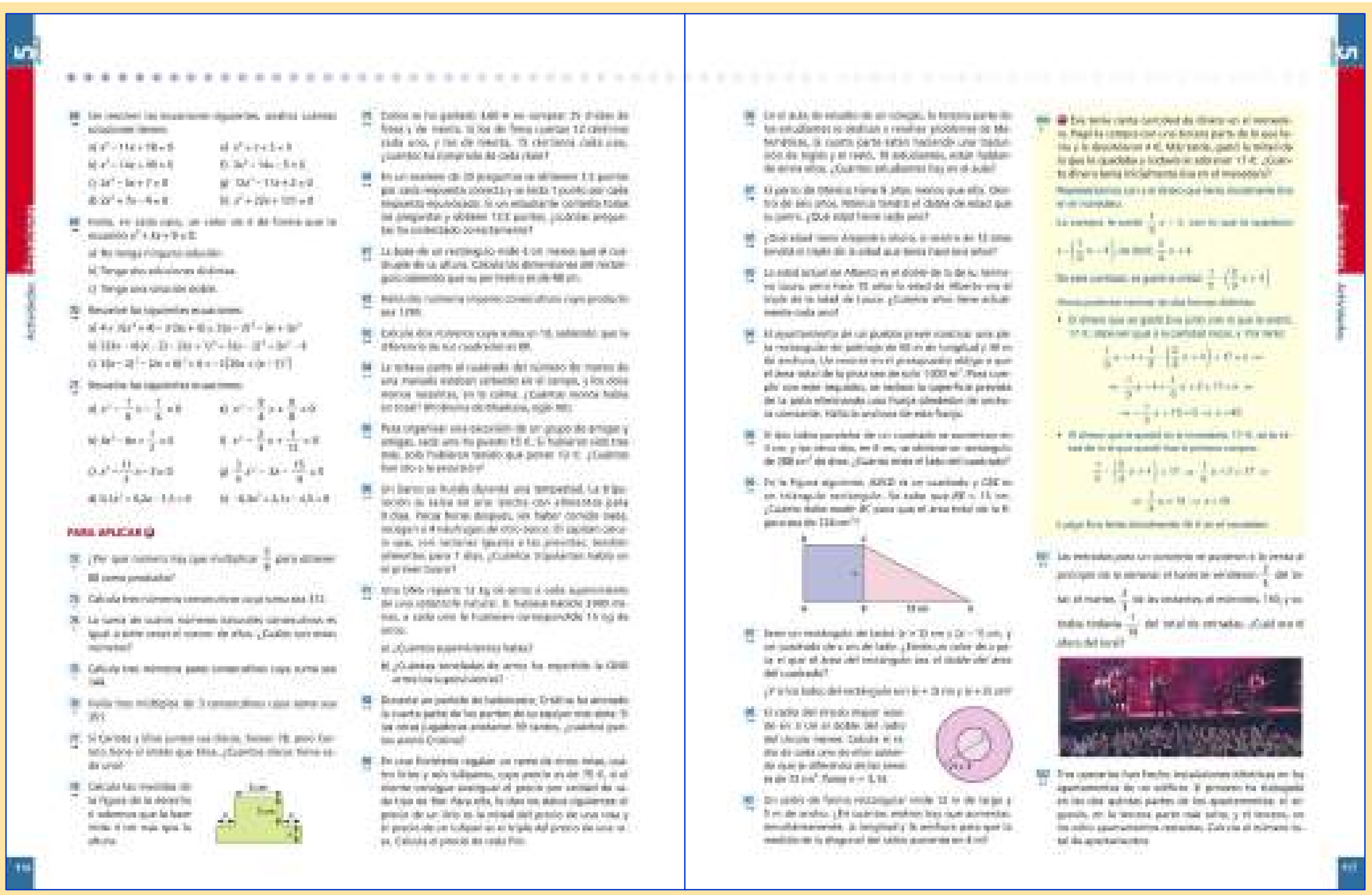
$2 \cdot 39 + 1 = 79;\ 2 \cdot 39 + 3 = 81;\ 2 \cdot 39 + 5 = 83$

Los tres números impares son: 79, 81 y 83

Comprobamos la solución: son impares y su suma es: $79 + 81 + 83 = 243$

(Continúa en la página 5-36 de la guía)


Actividades




PARA AMPLIAR
Desarrolla tus competencias
FÓRMULAS FAMOSAS
CÁLCULO MENTAL


Evaluación de estándares
Estrategia e ingenio
Resumen
Ecuaciones e identidades
Ecuaciones equivalentes
Ecuaciones de primer grado
Ecuaciones de segundo grado
Problemas con ecuaciones

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Repasa la unidad.* Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos en la unidad.
- *Acts. 106, 110 y 114*. Formular y expresar argumentos propios para explicar y justificar la respuesta dada.
- *Desarrolla tus competencias*. Leer y comprender el estímulo y los enunciados de las actividades, generando ideas, hipótesis, supuestos e interrogantes.

APRENDER A APRENDER

- *Repasa la unidad*. Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio.
- *Acts. 67, 100, 106, 107, 110, 112 y 114* y *Desarrolla tus competencias.* Buscar una coherencia global de sus conocimientos al ejecutar el plan de resolución de una actividad o un problema.
- *Cálculo mental*. Conocer estrategias y técnicas de cálculo mental.
- *Evaluación de estándares*. Ser consciente de las propias capacidades y carencias.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 45, 46, 67*. Establecer relaciones entre los datos de actividades, planificar su resolución y buscar soluciones, evaluando las acciones realizadas.
- *Para aplicar*. Identificar las posibles estrategias y respuestas en la realización de actividades y problemas,, tomando decisiones de manera racional.
- *Acts. 103, 110, 111, 112, 113 y 114*. Realizar los ejercicios siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en su resolución.
- *Cálculo mental*. Buscar formas de resolución utilizando cálculo mental de manera creativa.
- *Desarrolla tus competencias*. Aplicar diferentes habilidades de pensamiento, perceptivas y comunicativas y ser capaz de aplicar diferentes técnicas en el diseño de proyectos.
- *Evaluación de estándares, acts. 3, 8, 9 y 10*. Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Desarrolla tus competencias*. Buscar, analizar, seleccionar y manejar información en Internet.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Act. 114*. Desarrollar la capacidad de trabajar en grupo, exponinendo oralmente la resolución de una actividad.

ACTIVIDADES FINALES

- En las *Actividades* se proponen una colección de actividades que cubren y amplían todos los contenidos desarrollados a lo largo de esta unidad didáctica, tanto desde un punto de vista teórico como práctico.
- La sección *Desarrolla…* persigue ofrecer al alumnado una visión más amplia del uso de las ecuaciones en otras ramas de la ciencia. Plantea una serie de retos que los alumnos tienen que ir solventando, favoreciendo su iniciativa y el uso de otros recursos a la hora de resolver cuestiones diferentes.
- En *Evaluación…* los alumnos podrán comprobar su dominio del tema que nos ocupa, a través de una serie de actividades que repasan los principales conceptos y procedimientos estudiados a lo largo de la unidad. De esta manera detectarán sus carencias y fortalezas en estos contenidos.
- *Estrategia e ingenio* propone a los alumnos un desafío, con el fin de estimularlos a pensar e idear nuevos métodos de enfrentarse a un problema o un juego.
- El objetivo de la sección *Resumen* es recopilar las principales ideas estudiadas a lo largo de la unidad. Servirá al alumnado como guía donde repasar todos los contenidos del tema y su interrelación, de manera estructurada facilitando el aprendizaje.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 114

C1. Actividad personal. A modo de ejemplo. Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Por ejemplo $3x + 4 = x - 1$ es una ecuación de grado 1, con incógnita x, cuyo primer miembro es la expresión $3x + 4$, y su segundo miembro $x - 1$.

C2. Una identidad es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para cualquier valor que se dé a las incógnitas. Tienen infinitas soluciones. Las ecuaciones que no son identidades tienen como máximo tantas soluciones como su grado.

C3. Actividad personal. A modo de ejemplo: Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Por ejemplo las ecuaciones $x + 1 = 3$, y $x + 2 = 4$ son equivalentes.

Las reglas son las siguientes:

Regla 1: Al sumar o restar un mismo número o expresión polinómica a los dos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente.

Regla 2: Al multiplicar o dividir los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

C4. Una ecuación de primer grado con una incógnita es aquella que después de aplicarle las reglas de transformación que permiten transformarla en otra ecuación equivalente, es de la forma ax = b.

El procedimiento general de resolución es el siguiente:

1. Eliminamos los paréntesis si los hay.
2. Suprimimos los denominadores, si los hay, multiplicando por el m.c.m. de los denominadores.
3. Transponemos términos.
4. Reducimos los términos semejantes.
5. Despejamos la incógnita.

C5. Actividad personal. A modo de ejemplo: Ecuación de primer grado con una solución: x + 6 = 9

Ecuación de primer grado con infinitas soluciones:

3x + 2 + x = 4x + 2

Ecuación de primer grado sin solución:

x + x + 6 = 2x – 1

C6. Actividad personal. A modo de ejemplo: Para resolver gráficamente seguimos los siguientes pasos:

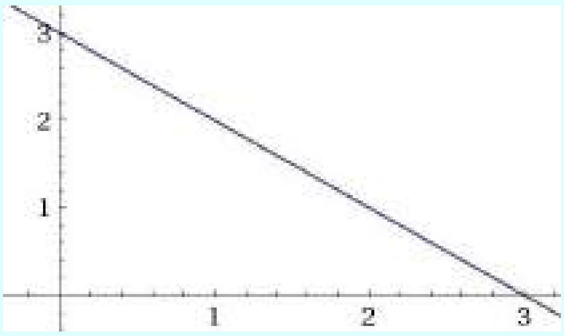
1. Aplicamos las reglas de transformación hasta llegar a una expresión de la forma ax – b = 0
2. Representamos la recta y = ax – b, dando dos valores arbitrarios a *x*, obteniendo los corres-pondientes dos valores de *y*, y señalando los puntos obtenidos en unos ejes cartesianos
3. La abscisa del punto de corte con el eje OX nos da la solución de la ecuación.

Por ejemplo:

2x + 5 = 3x + 2 2x – 3x = 2 – 5 – x = – 3 – x + 3 = 0

Representamos la recta y = – x + 3 utilizando una tabla de valores, dando dos valores a *x* arbitrarios, y calculando sus respectivos valores de *y*:

Para x = 0, y = 3; para x = 1, y = 2



La abscisa del punto de corte con el eje OX nos da la solución de la ecuación, x = 3.

C7. Una ecuación con una incógnita es de segundo grado si se puede escribir en la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$

Es incompleta cuando alguno de los coeficientes b o c, o ambos, son iguales a cero; y es completa si los coeficientes a, b y c son diferentes de cero.
Para resolver las ecuaciones incompletas distinguimos tres casos:

Caso 1: b = c = 0

Es de la forma $ax^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{0}{a} = 0 \rightarrow x = \sqrt{0} = 0$

La solución de estas ecuaciones es siempre x = 0

Caso 2: c = 0

Es de la forma $ax^2 + bx = 0 \rightarrow x(ax + b) = 0$

Extrayendo factor común, se igualan a cero ambos factores:

$$\begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son x = 0 y x = –b/a

Caso 3: b = 0

Es de la forma $ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c$

$$x^2 = -\frac{c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Si el radicando es negativo, la ecuación no tiene solución. Si el radicando es positivo, hay dos solu-ciones. Para las ecuaciones completas, con a,b,c ≠ 0, las soluciones se obtienen utilizando la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

C8. No es necesario desarrollar el producto, basta igualar a cero cada factor y despejar la incógnita.

39. Las respuestas son:

a) Grado 1, primer miembro 7 – x, segundo miembro 5x – 5

b) Grado 2, primer miembro $x^2 + 4$, segundo miembro 3x

c) Grado 1, primer miembro 3x + 2y, segundo miembro y + 16

d) Grado 1, primer miembro x + x/2, segundo miembro 24

40. Se trata de comprobar si al sustituir x = 3 se cumple la igualdad:

a) 3 + 18 = 21

2(3 – 3) + 7 · 3 = 2 · 0 + 21 = 21; Sí es solución.

b) 4 · 3 + 1 = 13

3 + 10 = 13; Sí es solución.

c) 5 · 3 – 2 = 15 – 2 = 13

7 · 3 + 8 = 21 + 8 = 28; No es solución.

d) 5 · 3 – 2 = 15 – 2 = 13

3 · 3 + 14 = 9 + 14 = 23; No es solución.

41. El grado en cada caso es:

a) Grado 2 b) Grado 1 c) Grado 1 d) Grado 3

42. La solución de la ecuación ax = b es el cociente que se obtiene despejando, x = b / a.

Si a y b tienen el mismo signo, la solución es positiva.

Si a y b tienen distinto signo, la solución es negativa.

Si b = 0 y a ≠ 0, la solución es x = 0.

Si a = 0, no tiene solución.

43. Sustituimos x = 7 en la ecuación 3x – 20 = 1 y comprobamos si se cumple la igualdad:

3 · 7 – 20 = 21 – 21 = 1, luego Sí es solución.

Ahora comprobamos si x = 7 también es solución de la ecuación 4x – 15 = 3x – 8:

4 · 7 – 15 = 28 – 15 = 13

3 · 7 – 8 = 21 – 8 = 13; Sí es equivalente

44. Aplicamos las reglas de transformación en la ecuación 4x – 12 – x = 7x – 16:

Transponemos los términos: 4x – x – 7x = – 16 + 12

Reducimos los términos semejantes: – 4x = – 4

Despejamos la incógnita: $x = \frac{-4}{-4} = 1$

45. Actividad personal. A modo de ejemplo: Tratamos de buscar ecuaciones que tengan la misma solución:

a) x – 4 = 11 ⇔ x + 1 = 16 (las dos ecuaciones tienen solución x = 15)

b) 2x – 1 = 13 ⇔ x – 1 = 6 (las dos ecuaciones tienen solución x = 7)

c) x + 6 = 12 ⇔ 2x = 12 (las dos ecuaciones tienen solución x = 6)

d) 32 + 2x = 5 – x ⇔ x + 1 = – 8 (las dos ecuaciones tienen solución x = – 9)

46. Actividad personal. A modo de ejemplo: Estas tres ecuaciones son de primer grado con una incógnita y con solución 4:

x – 4 = 0;   2x + 1 = 9;   7 – x = 2x – 5

47. Comprobamos si sustituyendo x = 2, x = – 7 en las ecuaciones, se cumplen las igualdades:

En la ecuación $x^2 + 5x - 14 = 0$:

$x = 2 \to 2^2 + 5 \cdot 2 - 14 = 4 + 10 - 14 = 14 - 14 = 0$; Sí es solución.

$x = -7 \to (-7)^2 + 5 \cdot (-7) - 14 = 49 - 35 - 14 = 49 - 49 = 0$; Sí es solución.

En la ecuación: (x – 2)(x + 7) = 0:

x = 2 → (2 – 2)(2 + 7) = 0 · 9 = 0; Sí es solución.

x = – 7 → (– 7 – 2)(– 7 + 7) = – 9 · 0 = 0; Sí es solución.

Ambas ecuaciones son por tanto equivalentes.

48. Resolvemos:

a) x = 11 – 5 = 6

b) $x = \frac{24}{-3} = -8$

c) $3x = 37 - 4 = 33 \to x = \frac{33}{3} = 11$

d) $3x = 12 \cdot 4 = 48 \to x = \frac{48}{3} = 16$

e) $x = \frac{56}{4} = 14$

f) x = 5 · 8 = 40

49. Las soluciones son:

a) $11x - 5x + x = 32 + 4 \to 7x = 36 \to x = \frac{36}{7}$

b) 7x – 3x + x = – 15 – 5 → 5x = – 20

$x = \frac{-20}{5} = -4$

c) – 3x – 2x = 1 – 24 – 5 → – 5x = – 28

$x = \frac{-28}{-5} = \frac{28}{5}$

d) 3x + 2x – 4x = – 10 + 5 – 17 → x = – 22

e) – x – x – 3x = – 3 – 7 – 2 → – 5x = – 12

$x = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$

f) – x + 4x – 5x = – 33 – 5 – 12 → – 2x = – 50

$x = \frac{-50}{-2} = 25$

50. Resolvemos:

a) 2x + 4 = 5 + 2x → 2x – 2x = 5 – 4

0x = 1; No tiene solución.

b) 3 + 10x = 5 – 2x → 10x + 2x = 5 – 3 → 12x = 2

$x = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

c) – 6x – 5 = 4x + 5 → – 6x – 4x = 5 + 5 → – 10x = 10

$x = \frac{10}{-10} = -1$

d) 5 + 6x = – 2x + 8x → 6x + 2x – 8x = – 5

0x = – 5; No tiene solución.

e) 6x – 8 = 7 → 6x = 7 + 8 → 6x = 15

$x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

f) – 6x – 21 = 9 → – 6x = 9 + 21 → – 6x = 30

$x = \frac{30}{-6} = -5$

g) 4 – 5x + 15 = 12 → – 5x = 12 – 4 – 15 → – 5x = – 7

$x = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5}$

h) 14x – 35 = 14x + 18 → 14x – 14x = 18 + 35

0x = 53; No tiene solución.

i) 5 – 6x + 2 = – x – 77 → – 6x + x = – 77 – 5 – 2

$-5x = -84 \to x = \frac{-84}{-5} = \frac{84}{5}$

j) 8x + 28 = – 4x – x + 4 → 8x + 4x + x = 4 – 28

$13x = -24 \to x = \frac{-24}{13} = -\frac{24}{13}$

k) 21x – 42 = 15 – 21x – 6 → 21x + 21x = 15 – 6 + 42

$42x = 51 \to x = \frac{51}{42}$

l) $-2+5x=11x-x-17 \rightarrow 5x-11x+x=-17+2$

$-5x=-15 \rightarrow x=\frac{-15}{-5}=3$

51. Las soluciones son:

a) $-12+2x-28=3x-3 \rightarrow 2x-3x=12+28-3$

$-x=37 \rightarrow x=-37$

b) $7x-7-2x-16=3x-9$

$7x-2x-3x=7+16-9 \rightarrow 2x=14 \rightarrow x=\frac{14}{2}=7$

c) $2+2x-3x+3-6=x-11$

$2x-3x-x=6-3-2-11 \rightarrow -2x=-10$

$x=\frac{-10}{-2}=5$

d) $-14x-15x+20=30x-18-7x-28$

$-14x-15x-30x+7x=-18-28-20$

$-52x=-66 \rightarrow x=\frac{-66}{-52}=\frac{33}{26}$

e) $-7x-6x+27-10+8x=3-18+4x$

$-7x-6x+8x-4x=3-18-27+10$

$-9x=-32 \rightarrow x=\frac{-32}{-9}=\frac{32}{9}$

f) $14-6x+10=3x-8x-24-84+77x$

$-6x-3x+8x-77x=-24-84-10-14$

$-78x=-132 \rightarrow x=\frac{-132}{-78}=\frac{22}{13}$

52. Resolvemos las ecuaciones:

a) $3x-2[4x-6x-24+15x]=6x+16+3$

$3x-8x+12x+48-30x=6x+16+3$

$3x-8x+12x-30x-6x=16+3-48$

$-29x=-29 \rightarrow x=1$

b) $16-2x+8-3[-x+6x-8]=7[x-64x+128]$

$24-2x+3x-18x+24=7x-448x+896$

$-2x+3x-18x-7x+448x=896-24-24$

$424x=848 \rightarrow x=\frac{848}{424}=2$

c) $2x-5[3-2x-20+15x]=-2[3-5x-2-14x+7]$

$2x-15+10x+100-75x=-6+10x+4+28x-14$

$2x+10x-75x-10x-28x=-6+4-14-100+15$

$-101x=-101 \rightarrow x=1$

d) $2{,}5x-1{,}5[x-8{,}5+1{,}4x-6{,}6x-15]=0{,}4x+1{,}65$

$2{,}5x-1{,}5x+12{,}75-2{,}1x+9{,}9x+22{,}5=0{,}4x+1{,}65$

$2{,}5x-1{,}5x-2{,}1x+9{,}9x-0{,}4x=1{,}65-22{,}5-12{,}75$

$8{,}4x=-33{,}6 \rightarrow x=\frac{-33{,}6}{8{,}4}=-4$

e) $-13-2\{2x-7[4-6x+15)]-3x\}=14x-35-3x$

$-13-2\{2x-28+42x-105-3x\}=11x-35$

$-13-4x+56-84x+210+6x=11x-35$

$-4x-84x+6x-11x=-35+13-56-210$

$-93x=-288 \rightarrow x=\frac{-288}{-93}=\frac{96}{31}$

f) $2x-\{4x-5[-2x+3-12x+15]+7\}=6-10x-7$

$2x-4x-10x+15+60x+75-7=-1-10x$

$2x-4x-10x+60x+10x=-1+7-75-15$

$58x=-84 \rightarrow x=\frac{-84}{58}=-\frac{42}{29}$

Página 115

53. Multiplicamos por el m.c.m. y resolvemos:

a) $35\cdot\frac{2x}{5}=35\cdot\frac{6}{7} \rightarrow 14x=30 \rightarrow x=\frac{30}{14}=\frac{15}{7}$

b) $6\cdot\frac{x}{3}-6=6\cdot\frac{x}{2} \rightarrow 2x-6=3x \rightarrow 2x-3x=6$

$x=-6$

c) $-14+14\cdot\frac{3x}{2}=14\cdot\frac{9}{7}+14x$

$-14+21x=18+14x \rightarrow 21x-14x=18+14$

$7x=32 \rightarrow x=\frac{32}{7}$

d) $6\cdot\frac{5x}{2}-6\cdot 3=6\cdot\frac{x}{6}+6\cdot 187 \rightarrow 15x-18=x+1122$

$15x-x=1122+18 \rightarrow 14x=1140$

$x=\frac{1140}{14}=\frac{570}{7}$

54. Resolvemos:

a) $15\cdot\frac{3x}{5}-15\cdot\frac{4}{3}=15-15x \rightarrow 9x-20=15-15x$

$24x=35 \rightarrow x=\frac{35}{24}$

b) $12\cdot\frac{-2x}{4}-12\cdot\frac{2}{3}=12\cdot\frac{7x}{2}-12\cdot\frac{1}{4}$

$-6x-8=42x-3 \rightarrow -48x=5 \rightarrow x=-\frac{5}{48}$

c) $30\cdot\frac{3x}{2}-30\cdot\frac{2x}{3}-30\cdot\frac{5}{6}=30\cdot\frac{3x}{2}-30\cdot\frac{1}{5}+30\cdot 2x$

$45x-20x-25=45x-6+60x \rightarrow -80x=19$

$x=-\frac{19}{80}$

d) $70\cdot\frac{3}{5}-70\cdot 4=70\cdot\frac{3x}{2}-70\cdot\frac{1}{5}+70\cdot\frac{3x}{7}+70\cdot 5$

$42-280=105x-14+30x+350$

$-574=135x \rightarrow x=-\frac{574}{135}$

55. Resolvemos las ecuaciones:

a) $2\cdot\frac{1}{2}\cdot(x-3)=2\cdot 2-2\cdot 4x \rightarrow x-3=4-8x$

$$9x=7 \rightarrow x=\frac{7}{9}$$

b) $x-\frac{1}{3}=\frac{4}{3}x-\frac{10}{3} \rightarrow x\left(1-\frac{4}{3}\right)=-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}$

$$3=\frac{1}{3}x \rightarrow x=9$$

c) $2-\frac{3x}{5}=\frac{2x}{3}-\frac{2}{12}$

$$60\cdot 2-60\cdot\frac{3x}{5}=60\cdot\frac{2x}{3}-60\cdot\frac{2}{12}$$

$$120-36x=40x-10 \rightarrow -76x=-130$$

$$x=\frac{-130}{-76}=\frac{65}{38}$$

d) $\frac{2x}{3}-\frac{2}{6}=\frac{x}{6}-\frac{1}{6} \rightarrow 6\cdot\frac{2x}{3}-6\cdot\frac{2}{6}=6\cdot\frac{x}{6}-6\cdot\frac{1}{6}$

$$4x-2=x-1 \rightarrow 3x=1 \rightarrow x=\frac{1}{3}$$

56. Las soluciones son:

a) $18\cdot\frac{x}{9}-18\cdot\frac{x}{3}=18\cdot\frac{x}{6}-18\cdot 7$

$$2x-6x=3x-126 \rightarrow -7x=-126$$

$$x=\frac{-126}{-7}=18$$

b) $12\cdot\frac{x}{2}+12\cdot\frac{x}{3}+12\cdot\frac{x}{4}-12\cdot 5=12x$

$$6x+4x+3x-60=12x \rightarrow x=60$$

c) $2\cdot 3+2\cdot\frac{1-x}{2}=-2x \rightarrow 6+1-x=-2x$

$$x=-7$$

d) $120\cdot\frac{x}{8}-120\cdot\frac{x+2}{10}=120\cdot\frac{x}{6}-120\cdot 7$

$$15x-12x-24=15x-840 \rightarrow -17x=-816$$

$$x=\frac{-816}{-17}=48$$

57. Resolvemos:

a) $6\cdot\frac{2x+1}{3}=6\cdot\frac{x+4}{2} \rightarrow 2(2x+1)=3(x+4)$

$$4x+2=3x+12 \rightarrow x=10$$

b) $12\cdot\frac{x}{4}=12\cdot\frac{2-x}{3}+12\cdot\frac{1}{4} \rightarrow 3x=4(2-x)+3$

$$3x=8-4x+3 \rightarrow 7x=11 \rightarrow x=\frac{11}{7}$$

c) $12\cdot\frac{2x-8}{3}+12\cdot 7x=12\cdot\frac{5}{4}$

$$4(2x-8)+84x=15 \rightarrow 8x-32+84x=15$$

$$92x=37 \rightarrow x=\frac{37}{92}$$

d) $7\cdot\frac{2x-3}{7}=7\cdot\frac{3x}{7}-7\cdot 2x \rightarrow 2x-3=3x-14x$

$$13x=3 \rightarrow x=\frac{3}{13}$$

58. Las soluciones quedan:

a) $\frac{2x+1}{3}+\frac{3x-3}{5}=20$

$$15\cdot\frac{2x+1}{3}+15\cdot\frac{3x-3}{5}=15\cdot 20$$

$$5(2x+1)+3(3x-3)=300$$

$$10x+5+9x-9=300 \rightarrow 19x=304$$

$$x=\frac{304}{19}=16$$

b) $\frac{3x-15}{2}-\frac{x+1}{3}=x-6$

$$6\cdot\frac{3x-15}{2}-6\cdot\frac{x+1}{3}=6x-6\cdot 6$$

$$3(3x-15)-2(x+1)=6x-36$$

$$9x-45-2x-2=6x-36 \rightarrow x=11$$

c) $12\cdot\frac{x+2}{2}-12\cdot\frac{x-3}{3}=12\cdot\frac{x-4}{4}+12\cdot 2$

$$6(x+2)-4(x-3)=3(x-4)+24$$

$$6x+12-4x+12=3x-12+24$$

$$-x=-12 \rightarrow x=12$$

d) $6\cdot\frac{x-3}{2}-6\cdot\frac{x-5}{6}=6\cdot\frac{x+1}{2}-6\cdot 4$

$$3(x-3)-x+5=3(x+1)-24$$

$$3x-9-x+5=3x+3-24$$

$$-x=-17 \rightarrow x=17$$

e) $\frac{2x-6}{9}-\frac{x+3}{5}=\frac{2x+8}{4}+x-21$

$$180\cdot\left(\frac{2x-6}{9}-\frac{x+3}{5}\right)=180\cdot\left(\frac{2x+8}{4}+x-21\right)$$

$$20(2x-6)-36(x+3)=45(2x+8)+180x-3780$$

$$40x-120-36x-108=90x+360+180x-3780$$

$$-266x=-3192 \rightarrow x=\frac{-3192}{-266}=12$$

59. Resolvemos las ecuaciones:

a) $4x-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5x}{3}-\frac{5}{6}$

$$6\cdot 4x-6\cdot\frac{2}{3}+6\cdot\frac{1}{2}=6\cdot\frac{5x}{3}-6\cdot\frac{5}{6}$$

$$24x-4+3=10x-5 \rightarrow 14x=-4$$

$$x=\frac{-4}{14}=-\frac{2}{7}$$

b) $\frac{x}{3}+\frac{1}{6}-\frac{2x-5}{9}+\frac{1}{18}=2$

$$18\cdot\frac{x}{3}+18\cdot\frac{1}{6}-18\cdot\frac{2x-5}{9}+18\cdot\frac{1}{18}=18\cdot 2$$

$$6x+3-2(2x-5)+1=36$$

$$6x+3-4x+10+1=36 \;\rightarrow\; 2x=22$$

$$x=\frac{22}{2}=11$$

c) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-\frac{8x}{3}+\frac{8}{6}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{x}{2}+2\right)$

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{6}+\frac{8x}{6}-\frac{8}{12}-\frac{1}{8}=-\frac{3}{30}+\frac{3x}{10}-\frac{6}{5}$$

$$120\cdot\frac{3}{4}-120\cdot\frac{2}{6}+120\cdot\frac{8x}{6}-120\cdot\frac{8}{12}-120\cdot\frac{1}{8}=$$

$$=-120\cdot\frac{3}{30}+120\cdot\frac{3x}{10}-120\cdot\frac{6}{5}$$

$$90-40+160x-80-15=-12+36x-144$$

$$124x=-111 \;\rightarrow\; x=-\frac{111}{124}$$

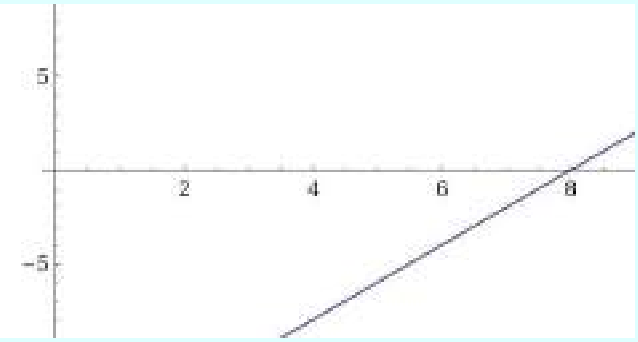
60. Transformamos la ecuación hasta llegar a una expresión de la forma ax – b = 0:

6x – 18 + 2 = 4x → 6x – 4x – 18 + 2 = 0

2x – 16 = 0

Representamos la recta y = 2x – 16 utilizando una tabla, dando dos valores a *x* arbitrarios, y calculando sus respectivos valores de *y*:

x	y
5	–6
6	–4



La abscisa del punto de corte con el eje OX nos da la solución de la ecuación, x = 8.

61. Resolvemos estas ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $5\cdot\frac{2x^2}{5}=5\cdot 0\rightarrow 2x^2=0\rightarrow x=\pm\sqrt{0}=0$

b) $x(x+5)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x+5=0\rightarrow x=-5\end{cases}$

Las soluciones son: $x_1 = 0$ y $x_2 = -5$

c) $x(9x-1)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ 9x-1=0\rightarrow x=\frac{1}{9}\end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1/9$

d) $x(7x+1)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ 7x+1=0\rightarrow x=-\frac{1}{7}\end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0$ y $x_2 = -1/7$

e) $5x(5x-3)=0\rightarrow\begin{cases}5x=0\rightarrow x=0\\ 5x-3=0\rightarrow x=\frac{3}{5}\end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0$ y $x_2 = 3/5$

f) $x^2=-24\rightarrow x=\pm\sqrt{-24}$

La ecuación no tiene solución, porque el radicando es negativo.

62. Son ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

b) $x^2=\frac{-8}{2}=-4\rightarrow x=\pm\sqrt{-4}$

La ecuación no tiene solución, porque el radicando es negativo.

c) $5\cdot\frac{2x^2}{5}=5\cdot 10\;\rightarrow\; 2x^2=50\;\rightarrow\; x^2=\frac{50}{2}=25$

$x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$

d) $x^2=\frac{-75}{-3}=25\rightarrow x=\pm\sqrt{25}=\pm 5$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$

e) $9\cdot\frac{x^2}{9}=9\cdot 36\;\rightarrow\; x^2=324\;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{324}=\pm 18$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 18$ y $x_2 = -18$

f) $x^2=\frac{36}{4}=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

63. Se trata de ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $x^2=36\rightarrow x=\pm\sqrt{36}=\pm 6$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 6$ y $x_2 = -6$

b) $2x^2=18\;\rightarrow\; x^2=\frac{18}{2}=9\;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 3$ y $x_2 = -3$

c) $x^2=-16\rightarrow x=\pm\sqrt{-16}$

La ecuación no tiene solución, porque el radicando es negativo.

d) $x(x-18)=0\rightarrow\begin{cases}x=0\\ x-18=0\rightarrow x=18\end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0$ y $x_2 = 18$

e) $3x(x-6)=0\rightarrow\begin{cases}3x=0\rightarrow x=0\\ x-6=0\rightarrow x=6\end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0$ y $x_2 = 6$

f) $x^2 + 24x = 0$

$$x(x+24)=0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+24 = 0 \rightarrow x = -24 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 0$ y $x_2 = -24$

64. Resolvemos estas ecuaciones en forma de producto:

a) $(x-18)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-18=0 \Rightarrow x=18 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 18$, $x_2 = 2$

b) $(x-13)(x+11)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-13=0 \Rightarrow x=13 \\ x+11=0 \Rightarrow x=-11 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 13$, $x_2 = -11$

c) $(x-2)(x+15)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+15=0 \Rightarrow x=-15 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 2$, $x_2 = -15$

d) $(x-3)(x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 3$, $x_2 = -5$

e) $(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

f) $(x+1)(2x+2)=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ 2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=\dfrac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$

En este caso la solución de la ecuación es doble, y es $x = -1$

65. Resolvemos estas ecuaciones en forma de producto:

a) $(x+1)(x-2)(x+1)(x-5)=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -1$ (doble), $x_2 = 2$, $x_3 = 5$

b) $(x+2)(x-3)(x+4)=0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$

66. Resolvemos estas ecuaciones de segundo grado:

a) $x = \dfrac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4\cdot1\cdot36}}{2\cdot1} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169-144}}{2} =$

$= \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{13 \pm 5}{2}$

$x_1 = \dfrac{13+5}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$; $x_2 = \dfrac{13-5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

b) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot1\cdot(-42)}}{2\cdot1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} =$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{169}}{2} = \dfrac{1 \pm 13}{2}$

$x_1 = \dfrac{1+13}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$; $x_2 = \dfrac{1-13}{2} = \dfrac{-12}{2} = -6$

c) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot5\cdot(-27)}}{2\cdot5} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36+540}}{10} =$

$= \dfrac{6 \pm \sqrt{576}}{10} = \dfrac{6 \pm 24}{10}$

$x_1 = \dfrac{6+24}{10} = \dfrac{30}{10} = 3$; $x_2 = \dfrac{6-24}{10} = \dfrac{-18}{10} = -\dfrac{9}{5}$

d) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot12\cdot(-5)}}{2\cdot12} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+240}}{24} =$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{256}}{24} = \dfrac{-4 \pm 16}{24}$

$x_1 = \dfrac{-4+16}{24} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{-4-16}{24} = \dfrac{-20}{24} = -\dfrac{5}{6}$

e) $x = \dfrac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4\cdot10\cdot3}}{2\cdot10} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121-120}}{20} =$

$= \dfrac{11 \pm \sqrt{1}}{20} = \dfrac{11 \pm 1}{20}$

$x_1 = \dfrac{11+1}{20} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$; $x_2 = \dfrac{11-1}{20} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$

f) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} =$

$= \dfrac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{6 \pm 0}{2} = 3$

La solución es doble.

g) $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot4\cdot(-15)}}{2\cdot4} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+240}}{8} =$

$= \dfrac{7 \pm \sqrt{289}}{8} = \dfrac{7 \pm 17}{8}$

$x_1 = \dfrac{7+17}{8} = \dfrac{24}{8} = 3$; $x_2 = \dfrac{7-17}{8} = \dfrac{-10}{8} = -\dfrac{5}{4}$

h) $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-28}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-24}}{2}$

No tiene solución.

i) $x = \dfrac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4\cdot1\cdot81}}{2\cdot1} = \dfrac{18 \pm \sqrt{324-324}}{2} =$

$= \dfrac{18 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{18 \pm 0}{2} = 9$

La solución es doble.

j) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} =$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \dfrac{1 \pm 5}{4}$

$x_1 = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2};\ x_2 = \dfrac{1-5}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1$

67. Actividad resuelta en el libro.

Página 116

68. Tenemos en cuenta la expresión general de las ecuaciones de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, y calculamos si el valor de $b^2 - 4ac$ es positivo (dos soluciones), cero (una solución) o negativo (no tiene solución):

a) $(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 121 - 72 = 49 > 0$

Tiene dos soluciones.

b) $(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49 = 196 - 196 = 0$

Tiene una solución.

c) $(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 25 - 56 = -31 < 0$

No tiene solución.

d) $7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81 > 0$

Tiene dos soluciones.

e) $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 1 - 20 = -19 < 0$

No tiene solución.

f) $(-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 196 + 60 = 256 > 0$

Tiene dos soluciones.

g) $(-11)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 2 = 121 - 96 = 25 > 0$

Tiene dos soluciones.

h) $22^2 - 4 \cdot 1 \cdot 121 = 484 - 484 = 0$

Tiene una solución.

69. Calculamos el valor de

$b^2 - 4ac = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = k^2 - 36$,

y buscamos valores de k que hacen que $k^2 - 36$ sea negativo (apartado a), positivo (apartado b) o cero (apartado c)

a) No tiene solución si k = 1

b) Tiene dos soluciones distintas si k = 10

c) Tiene una única solución si k = 6

70. Resolvemos la ecuación correspondiente en cada uno de los apartados:

a) $4 + 3x^2 + 12 - 6x - 10 = 3(x^2 - 4x + 4) - 3x + 3x^2$

$4 + 3x^2 + 12 - 6x - 10 = 3x^2 - 12x + 12 - 3x + 3x^2$

$-3x^2 + 9x - 6 = 0 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} =$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2}$

$x_1 = \dfrac{-3+1}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1;\ x_2 = \dfrac{-3-1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$

b) $(6x - 8)(x - 2) - 2(x^2 + 2x + 1) =$

$= 3(x^2 - 4x + 4) + 2x^2 + 13$

$6x^2 - 12x - 8x + 16 - 2x^2 - 4x - 2 =$

$= 3x^2 - 12x + 12 + 2x^2 + 13$

$-x^2 - 12x - 11 = 0 \rightarrow x^2 + 12x + 11 = 0$

$x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 44}}{2} =$

$= \dfrac{-12 \pm \sqrt{100}}{2} = \dfrac{-12 \pm 10}{2}$

$x_1 = \dfrac{-12+10}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1;$

$x_2 = \dfrac{-12-10}{2} = \dfrac{-22}{2} = -11$

c) $3(x^2 - 4x + 4) - (4x^2 + 24x + 36) + 6 =$

$= -2(20x + x^2 - 2x + 1)$

$3x^2 - 12x + 12 - 4x^2 - 24x - 36 + 6 =$

$= -40x - 2x^2 + 4x - 2$

$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

$x_1 = 4,\ x_2 = -4$

71. La solución para cada uno de los casos queda como sigue:

a) $6 \cdot x^2 - 6 \cdot \dfrac{1}{6} x - 6 \cdot \dfrac{1}{6} = 6 \cdot 0 \rightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} =$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \dfrac{1 \pm 5}{12}$

$x_1 = \dfrac{1+5}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2};\ x_2 = \dfrac{1-5}{12} = \dfrac{-4}{12} = -\dfrac{1}{3}$

b) $2 \cdot 4x^2 - 2 \cdot 6x + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 2 \cdot 0 \rightarrow 8x^2 - 12x + 1 = 0$

$x = \dfrac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 32}}{16} =$

$= \dfrac{12 \pm \sqrt{112}}{16}$

$x_1 = \dfrac{12 + \sqrt{112}}{16};\ x_2 = \dfrac{12 - \sqrt{112}}{16}$

c) $2 \cdot x^2 - 2 \cdot \dfrac{11}{2} x - 2 \cdot 3 = 2 \cdot 0 \rightarrow 2x^2 - 11x - 6 = 0$

$x = \dfrac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{4} =$

$= \dfrac{11 \pm \sqrt{169}}{4} = \dfrac{11 \pm 13}{4}$

$x_1 = \dfrac{11+13}{4} = \dfrac{24}{4} = 6;\ x_2 = \dfrac{11-13}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

d) $10\cdot 0{,}1x^2+10\cdot 0{,}2x-10\cdot 1{,}5=10\cdot 0$

$x^2+2x-15=0$

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=$

$=\dfrac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\dfrac{-2\pm 8}{2}$

$x_1=\dfrac{-2+8}{2}=\dfrac{6}{2}=3;\ x_2=\dfrac{-2-8}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5$

e) $8\cdot x^2-8\cdot\dfrac{9}{4}x+8\cdot\dfrac{9}{8}=8\cdot 0\ \rightarrow\ 8x^2-18x+9=0$

$x=\dfrac{18\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot 8\cdot 9}}{2\cdot 8}=\dfrac{18\pm\sqrt{324-288}}{16}=$

$=\dfrac{18\pm\sqrt{36}}{16}=\dfrac{18\pm 6}{16}$

$x_1=\dfrac{18+6}{16}=\dfrac{24}{16}=\dfrac{3}{2};\ x_2=\dfrac{18-6}{16}=\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$

f) $12\cdot x^2-12\cdot\dfrac{2}{3}x+12\cdot\dfrac{1}{12}=12\cdot 0$

$12x^2-8x+1=0$

$x=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 12\cdot 1}}{2\cdot 12}=\dfrac{8\pm\sqrt{64-48}}{24}=$

$=\dfrac{8\pm\sqrt{16}}{24}=\dfrac{8\pm 4}{24}$

$x_1=\dfrac{8+4}{24}=\dfrac{12}{24}=\dfrac{1}{2};\ x_2=\dfrac{8-4}{24}=\dfrac{4}{24}=\dfrac{1}{6}$

g) $4\cdot\dfrac{3}{4}x^2-4\cdot 3x-4\cdot\dfrac{15}{4}=4\cdot 0$

$3x^2-12x-15=0$

$x=\dfrac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 3\cdot(-15)}}{2\cdot 3}=\dfrac{12\pm\sqrt{144+180}}{6}=$

$=\dfrac{12\pm\sqrt{324}}{6}=\dfrac{12\pm 18}{6}$

$x_1=\dfrac{12+18}{6}=\dfrac{30}{6}=5;\ x_2=\dfrac{12-18}{6}=\dfrac{-6}{6}=-1$

h) $10\cdot(-0{,}3x^2)+10\cdot 2{,}1x-10\cdot 4{,}5=0$

$3x^2-21x+450=0$

$x=\dfrac{21\pm\sqrt{(-21)^2-4\cdot 3\cdot 45}}{2\cdot 3}=$

$=\dfrac{21\pm\sqrt{441-540}}{60}=\dfrac{-21\pm\sqrt{-99}}{6}$

La ecuación no tiene solución, al ser el radicando negativo.

72. Llamamos x al número.

Planteamos la ecuación: $\dfrac{5}{8}x=80$

Resolvemos la ecuación:

$8\cdot\dfrac{5}{8}x=8\cdot 80\ \rightarrow\ 5x=640\ \rightarrow\ x=\dfrac{640}{5}=128$

Hay que multiplicar por el número 128

73. Llamamos x al primer número, de manera que los siguientes son x + 1, y x + 2.

Planteamos la ecuación:

$x+(x+1)+(x+2)=312$

Resolvemos la ecuación:

$x+x+x=312-1-2\rightarrow 3x=309\rightarrow x=\dfrac{309}{3}=103$

Los tres números son 103, 104, 105.

74. Llamamos x al primer número, de manera que los siguientes son x + 1, x + 2, x + 3, y siete veces el menor será 7x

Planteamos la ecuación:

$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=7x$

Resolvemos la ecuación:

$x+x+x+x-7x=-1-2-3\rightarrow -3x=-6$

$x=\dfrac{-6}{-3}=2$

Los números son 2, 3, 4, y 5.

75. Un número par es de la forma 2x, de manera que los siguientes pares son 2x + 2, y 2x + 4.

Planteamos y resolvemos la ecuación:

$2x+(2x+2)+(2x+4)=144$

$2x+2x+2x=144-2-4\rightarrow 6x=138$

$x=\dfrac{138}{6}=23$

Como 2x = 2 · 23 = 46, los números pares consecutivos son 46, 48, y 50.

76. Un múltiplo de 3 es de la forma 3x, de forma que los siguientes múltiplos de 3 son 3x + 3, y 3x + 6.

Planteamos y resolvemos la ecuación:

$3x+(3x+3)+(3x+6)=351$

$3x+3x+3x=351-3-6\rightarrow 9x=342$

$x=\dfrac{342}{9}=38$

Como 3x = 3 · 38 = 144, los múltiplos de 3 consecutivos son 144, 147, y 150.

77. Llamamos x a los discos que tiene Elisa, siendo los que tiene Carlota 2x (el doble)

Planteamos la ecuación: $x+2x=78$

Resolvemos la ecuación: $3x=78\rightarrow x=\dfrac{78}{3}=26$

Como 2x = 2 · 26 = 52, Elisa tiene 26 discos y Carlota 52 discos.

78. Según la figura la altura es x + 3, por tanto la base es (x + 3) + 4 = x + 7.

Planteamos la ecuación: $x+7-2x=5$

Resolvemos la ecuación:

$x - 2x = 5 - 7 \rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$

En definitiva, la figura está formada por dos rectángulos superpuestos, el menor (encima) tiene dimensiones 3 cm x 5 cm, y el mayor (debajo) 9 cm x 2 cm.

79. Llamamos x a los chicles de fresa, de manera que 25 – x son los de menta, y tenemos en cuenta que 3,60 euros son 360 céntimos:

Planteamos la ecuación: $12x + 15(25 - x) = 360$

Resolvemos la ecuación:

$12x + 375 - 15x = 360 \rightarrow 12x - 15x = 360 - 375$

$-3x = -15 \rightarrow x = \frac{-15}{-3} = 5$

Ha comprado 5 chicles de fresa y 25 – 5 = 20 chicles de menta.

80. Llamamos x a las respuestas acertadas, de manera que 20 – x serán las equivocadas. Planteamos y resolvemos la ecuación:

$1{,}5x - (20 - x) = 12{,}5 \rightarrow 1{,}5x + x = 12{,}5 + 20$

$2{,}5x = 32{,}5 \rightarrow x = \frac{32{,}5}{2{,}5} = 13$

Ha acertado 13 respuestas.

81. Llamamos x a la altura, siendo la base 4x – 3, y tenemos en cuenta que el perímetro es la suma de los cuatro lados.

Planteamos la ecuación:

$x + x + (4x - 3) + (4x - 3) = 48$

Resolvemos la ecuación:
$x + x + 4x + 4x = 48 + 3 + 3 \rightarrow 10x = 54$

$x = \frac{54}{10} = 5{,}4$ cm

Obtenemos la base:

$4x - 3 = 4 \cdot 5{,}4 - 3 = 21{,}6 - 3 = 18{,}6$ cm.

El rectángulo tiene dimensiones 18,6 cm x 5,4 cm

82. Un número impar es de la forma 2x + 1, y el siguiente será 2x + 3. Planteamos y resolvemos la ecuación:

$(2x + 1) \cdot (2x + 3) = 1295 \rightarrow 4x^2 + 6x + 2x + 3 = 1295$

$4x^2 + 8x - 1292 = 0$

$x^2 + 2x - 323 = 0$ (simplificando entre 4)

Aplicamos la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-323)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 1292}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{1296}}{2} = \frac{-2 \pm 36}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 36}{2} = \frac{34}{2} = 17\ ;\ x_2 = \frac{-2 - 36}{2} = \frac{-38}{2} = -19$$

Como tiene que ser un número natural nos quedamos sólo con la solución positiva $x_1 = 17$, además $2 \cdot 17 + 1 = 34 + 1 = 35$, y $2 \cdot 17 + 3 = 37$

Los números naturales impares consecutivos son 35 y 37.

83. Llamamos x a un número, siendo el otro 10 – x. Planteamos la ecuación:

$(10 - x)^2 - x^2 = 80$

Resolvemos la ecuación (utilizando la igualdad notable: "cuadrado de una diferencia"):

$10^2 - 2 \cdot 10x + x^2 - x^2 = 80 \rightarrow 100 - 20x = 80$

$100 - 80 = 20x \rightarrow 20 = 20x \rightarrow x = 1$

Como 10 – x = 10 – 1 = 9, los dos números son 1 y 9.

84. Llamamos x a los monos que había, siendo la octava parte al cuadrado $\left(\frac{x}{8}\right)^2$.

Planteamos la ecuación: $\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$

Resolvemos la ecuación:

$\frac{x^2}{64} + 12 = x \rightarrow \frac{x^2}{64} - x + 12 = 0$

$64 \cdot \frac{x^2}{64} - 64 \cdot x + 64 \cdot 12 = 0 \rightarrow x^2 - 64x + 768 = 0$

$$x = \frac{64 \pm \sqrt{64^2 - 4 \cdot 1 \cdot 768}}{2} = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - 3072}}{2} =$$

$$= \frac{64 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{64 \pm 32}{2}$$

$$x_1 = \frac{64 + 32}{2} = \frac{96}{2} = 48\ ;\ x_2 = \frac{64 - 32}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

El problema tiene dos soluciones posibles: 48 monos y 16 monos.

85. Llamamos x a los amigos y amigas que han ido de excursión, siendo 15x el dinero que cuesta la excursión. Si hubieran ido tres más, serían x + 3 amigos y amigas y 12(x + 3) el dinero que cuesta la excursión.

Planteamos y resolvemos la ecuación:

$15x = 12(x + 3) \rightarrow 15x = 12x + 36$

$15x - 12x = 36 \rightarrow 3x = 36$

$x = \frac{36}{3} = 12$

Han ido de excursión 12 amigos y amigas.

86. Llamamos x al número de tripulantes que había en el primer barco, que tienen alimentos para 9 días. Si recogen 4 tripulantes serán x + 4 (más tripulantes), y tienen alimentos para 7 días (menos días).

Utilizamos la proporcionalidad inversa (más tripulantes, menos días); planteamos la ecuación:

$9x = 7(x + 4)$

Resolvemos:

$9x = 7x + 28 \rightarrow 9x - 7x = 28 \rightarrow 2x = 28$

$x = \frac{28}{2} = 14$

En el barco había 14 tripulantes.

87. Las respuestas son:

a) Llamamos x al número de supervivientes que había, de manera que se reparten 12x kilos de arroz. Y si hubiese habido 3000 supervivientes menos, serían x – 3000 supervivientes y se repartirían 15(x – – 3000) kilos de arroz.

Planteamos la ecuación (se reparten los mismos kilos de arroz):

$12x = 15(x – 3000)$

Resolvemos la ecuación:

$12x = 15x – 45000 \rightarrow 12x – 15x = – 45000$

$– 3x = – 45000 \rightarrow x = \frac{-45000}{-3} = 15000$

Había 15000 supervivientes.

b) Se reparten 12x kilos de arroz, es decir, 12 · 15000 = 180000 kilos, que son 180 toneladas.

88. Llamamos x a los puntos que marcó Cristina, de manera que si el resto marcó 59 puntos, en total marcaron x + 59 puntos. Y la cuarta parte del total es $\frac{x+59}{4}$.

Planteamos la ecuación: x = + 7

Resolvemos la ecuación:

$4 \cdot x = 4 \cdot \frac{x+59}{4} + 4 \cdot 7 \rightarrow 4x = x + 59 + 28$

$4x – x = 59 + 28 \rightarrow 3x = 87 \rightarrow x = \frac{87}{3} = 29$

Cristina marcó 29 puntos.

89. Llamamos x al precio (en euros) de las rosas, de manera que el precio de los lirio es x/2 euros, y el de los tulipanes 3x euros. Así, 5 rosas cuestan 5x euros, 4 lirios cuestan 4 · (x/2) = 2x euros, y 6 tulipanes 6 · 3x = = 18x euros.

Planteamos y resolvemos la ecuación:

$x + 2x + 18x = 75 \rightarrow 25x = 75 \rightarrow x = \frac{75}{25} = 3$

Cada rosa cuesta 3 euros, cada lirio 1,5 euros, y cada tulipán 9 euros.

Página 117

90. Llamamos x a los estudiantes que hay en el aula, siendo su tercera parte x / 3, y su cuarta parte x / 4.

Planteamos la ecuación: $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+10=x$

Resolvemos la ecuación:

$12\cdot\frac{x}{3}+12\cdot\frac{x}{4}+12\cdot 10=12\cdot x \rightarrow 4x+3x+120=12x$

$-5x=-120 \rightarrow x=\frac{-120}{-5}=24$

En el aula hay 24 estudiantes.

91. Llamamos x a la edad de Mónica, siendo la edad de su perro x – 8 años. Dentro de 6 años Mónica tendrá x + 6 años, y su perro (x – 8) + 6 = x – 2 años

Planteamos y resolvemos la ecuación:

$x + 6 = 2(x – 2) \rightarrow x + 6 = 2x – 4 \rightarrow – x = – 10$

$x = 10$

Mónica tiene 10 años, y su perro 10 – 8 = 2 años.

92. Llamamos x a la edad actual de Alejandro, de manera que dentro de 12 años tendrá x + 12 años, y hace 6 años tenía x – 6

Planteamos la ecuación: x + 12 = 3(x – 6)

Resolvemos:

$x + 12 = 3x – 18 \rightarrow 12 + 18 = 3x – x \rightarrow 30 = 2x$

$x = \frac{30}{2} = 15$

Alejandro tiene ahora 15 años.

93. Llamamos x a la edad actual de Laura, siendo 2x la de Alberto. Hace 10 años Laura tenía x – 10 años, y Alberto 2x – 10 años. Planteamos y resolvemos la ecuación:

$2x – 10 = 3(x – 10) \rightarrow 2x – 10 = 3x – 30$

$30 – 10 = 3x – 2x \rightarrow 20 = x$

Laura tiene 20 años, y Alberto 2 · 20 = 40 años.

94. Llamamos x a la anchura del borde que se quita, de manera que la pista tiene 60 – 2x metros de longitud, y 30 – 2x de anchura. Tenemos en cuenta que el área de un rectángulo es base x altura.

Planteamos la ecuación: 1000 = (60 – 2x) · (30 – 2x)

Resolvemos la ecuación:

$1000 = 1800 – 120x – 60x + 4x^2$

$4x^2 – 180x + 800 = 0$

$x^2 – 45x + 200 = 0$ (simplificando)

Utilizamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{45 \pm \sqrt{45^2 - 4\cdot 200}}{2} = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - 800}}{2} =$$

$$= \frac{45 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{45 \pm 35}{2}$$

$$x_1 = \frac{45+35}{2} = \frac{80}{2} = 40\ ;\ x_2 = \frac{45-35}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Como 40 es mayor que el ancho (30 metros.) lo descartamos, y la solución sería 5 m. de anchura de borde.

95 Llamamos x al lado del cuadrado, de manera que el rectángulo que se obtiene tiene un lado de (x + 4) cm, y el otro de (x + 6) cm. Tenemos en cuenta que el área de un rectángulo es base por altura. Planteamos y resolvemos la ecuación:

$(x + 6)(x + 4) = 288 \rightarrow x^2 + 4x + 6x + 24 = 288$

$x^2 + 10x – 264 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot(-264)}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100+1056}}{2} =$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{1156}}{2} = \frac{-10 \pm 34}{2}$$

$$x_1 = \frac{-10+34}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{-10-34}{2} = \frac{-44}{2} = -22$$

Descartamos – 22 porque el lado de un cuadrado no puede ser negativo; Por tanto, el cuadrado mide 12 cm de lado.

96. La figura está compuesta por un cuadrado de lado x, y un triángulo de base 15 cm y altura x, siendo el área del cuadrado x^2, y del triángulo $\frac{15 \cdot x}{2}$

Planteamos la ecuación: $x^2 + \frac{15 \cdot x}{2} = 124$

Resolvemos la ecuación:

$$2 \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{15x}{2} = 2 \cdot 124 \rightarrow 2x^2 + 15x = 248$$

$$2x^2 + 15x - 248 = 0$$

Utilizamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-248)}}{2 \cdot 2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225+1984}}{4} =$$

$$= \frac{-15 \pm \sqrt{2209}}{4} = \frac{-15 \pm 47}{4}$$

$$x_1 = \frac{-15+47}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

$$x_2 = \frac{-15-47}{4} = \frac{-62}{4} = -22 = -15,5$$

No puede ser el lado negativo y descartamos – 15,5. Luego x debe ser 8 cm.

97. El área del rectángulo viene dada por (x + 3) · (x – 1), y el área del cuadrado x^2. La pregunta se traduce en si tiene solución la ecuación

$(x + 3) \cdot (x - 1) = 2x^2$

Resolvemos:

$x^2 - x + 3x - 3 = 2x^2 \rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$

Utilizamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Como el radicando es negativo, la ecuación no tiene solución, y por tanto no existe ningún valor de x.

Para la segunda pregunta planteamos y resolvemos la ecuación

$(x + 3) \cdot (x + 2) = 2x^2 \rightarrow x^2 + 2x + 3x + 6 = 2x^2$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

Utilizamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{2} = \frac{12}{2} = 6; \; x_2 = \frac{5-7}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Como no puede ser negativo el lado descartamos x = – 1. Pero sí existe el valor x = 6.

98. El área del círculo menor es πr^2, y el del círculo mayor $\pi(2r + 3)^2$. Planteamos y resolvemos la ecuación:

$\pi(2r + 3)^2 - \pi r^2 = 72$

$\pi[(2r)^2 + 2 \cdot 2r \cdot 3 + 32] - \pi r^2 = 72$

$\pi(4r^2 + 12r + 9) - \pi r2 = 72$

$4\pi r^2 + 12\pi r + 9\pi - \pi r^2 = 72$

$3\pi r^2 + 12\pi r + 9\pi - 72 = 0$

$9,42r^2 + 37,68r - 43,74 = 0$

$942r^2 + 3768r - 4374 = 0$

Utilizamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$r = \frac{-3768 \pm \sqrt{3768^2 - 4 \cdot 492 \cdot (-5374)}}{2 \cdot 942} =$$

$$= \frac{-3768 \pm \sqrt{14197824+16481232}}{1884} =$$

$$= \frac{-3768 \pm \sqrt{30679056}}{1884} = \frac{-3768 \pm 5538,87}{1884}$$

$$r_1 = \frac{-3768+5538,87}{1884} = \frac{1770,87}{1884} = 0,94$$

$$r_2 = \frac{-3768-5538,87}{1884} = \frac{-9306,87}{1884} = -4,94$$

Como el radio del círculo no puede ser negativo descartamos r = – 4,94. Por tanto, el radio menor mide 0,94 cm y el radio mayor 2 · 0,94 + 3 = 4,88 cm.

99. Llamamos x a los metros que hay que aumentar la longitud y la anchura del salón, de manera que sus dimensiones serán 12 + x de longitud y 5 + x de anchura

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que resulta al trazar la diagonal (d) del rectángulo sin aumentar:

$d^2 = 52 + 122 = 25 + 144 = 169 \rightarrow d = \sqrt{169} = 13$

La diagonal (D) del rectángulo aumentado tiene que ser D = 13 + 4 = 17

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que resulta al trazar la diagonal (D) del rectángulo aumentado:

$17^2 = (5 + x)^2 + (12 + x)^2$

Resolvemos la ecuación (aplicamos las identidades notables):

$289 = 25 + 10x + x^2 + 144 + 24x + x^2$

$2x^2 + 34x + 169 = 289 \rightarrow 2x^2 + 34x - 120 = 0$

$x^2 + 17x - 60 = 0$ (simplificando)

$$x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot (-60)}}{2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289+240}}{2} =$$

$$= \frac{-17 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-17 \pm 23}{2}$$

$$x_1 = \frac{-17+23}{2} = \frac{6}{2} = 3; \; x_2 = \frac{-17-23}{2} = \frac{-40}{2} = -20$$

Como no se puede aumentar una longitud en una cantidad negativa descartamos x = – 20. Hay que aumentarla en 3 metros.

100. Actividad resuelta en el libro.

101. Llamamos x al aforo del local, de manera que el lunes se vendieron $\frac{2}{5}x$ entradas; y quedan $\frac{3}{5}x$.

El martes se vendieron $\frac{2}{3}\frac{3}{5}x = \frac{2}{5}x$ entradas, el miércoles 150 entradas, y sobran $\frac{1}{10}x$.

Planteamos y resolvemos la ecuación:

$\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x + 150 + \frac{1}{10}x = x$

$10 \cdot \frac{2}{5}x + 10 \cdot \frac{2}{5}x + 10 \cdot 150 + 10 \cdot \frac{1}{10}x = 10 \cdot x$

$4x + 4x + 1500 + x = 10x \quad 1500 = 10x - 9x$

$1500 = x$

El aforo del local era de 1500 personas.

102. Llamamos x al número total de apartamentos, de manera que el primer electricista ha hecho instalaciones en $\frac{2}{5}x$ apartamentos, el segundo en $\frac{x}{3}+8$, y el tercero en 8 apartamentos.

Planteamos la ecuación: $\frac{2}{5}x + \frac{x}{3}+8 + 8 = x$

Resolvemos:

$15 \cdot \frac{2}{5}x + 15 \cdot \frac{x}{3} + 15 \cdot 16 = 15 \cdot x$

$6x + 5x + 240 = 15x \rightarrow 6x + 5x - 15x = -240$

$-4x = -240 \quad x = \frac{-240}{-4} = 60$

El número de apartamentos es 60.

Página 118

103. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $0x = 2$ es de grado 1 y no tiene solución.

b) $x^2 + 4 = 0$ es de grado 2 y sin soluciones.

c) $0x^2 = 0$ es de grado 2 y tiene infinitas soluciones.

d) $(x - 5)^2 = 0$ es de grado 2 y tiene como única solución $x = 5$.

e) $x^2 - 9 = 0$ es de grado 2 tiene dos soluciones ($x_1 = 3$, y $x_2 = -3$).

104. Resolvemos la ecuación:

$mx + 3 = 4m + x \rightarrow mx - x = 4m - 3$

$(m - 1)x = 4m - 3 \rightarrow x = \frac{4m-3}{m-1}$

Como el denominador no puede ser cero, si $m - 1 = 0$, $m = 1$, y por tanto para este valor de m no existe solución.

105. Resolvemos la ecuación:

$4m \cdot \frac{x}{4} - 4m \cdot \frac{x}{m} = 4m \cdot 1 \rightarrow mx - 4x = 4m$

$(m-4)x = 4m \rightarrow x = \frac{4m}{m-4}$

a) Si m es un valor entre 0 y 4 (sin incluirlos), la solución es negativa.

b) No existe solución cuando el denominador es cero, es decir, cuando $m = 4$.

106. Actividad personal. A modo de ejemplo. No se obtiene una ecuación equivalente. Por ejemplo:

$x + 1 = 2$ tiene solución $x = 1$

Sin embargo, al elevar al cuadrado:

$(x + 1)^2 = 2^2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

Utilizamos la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1;\ x_2 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Como no tiene las mismas soluciones que la primera ecuación, no es equivalente.

107. Actividad resuelta en el libro.

108. En todas estas ecuaciones utilizamos la definición de valor absoluto, obteniendo dos ecuaciones:

a) Primera ecuación: $x = 3$

Segunda ecuación: $-x = 3 \rightarrow x = -3$

Las soluciones de la ecuación son $x = 3$, y $x = -3$.

b) Primera ecuación: $x + 1 = 7 \rightarrow x = 6$

Segunda ecuación: $-(x + 1) = 7$

$-x - 1 = 7 \rightarrow x = -8$

Las soluciones de la ecuación son $x = 6$, y $x = -8$.

c) Primera ecuación: $3x - 7 = 5$

$3x = 12 \rightarrow x = 4$

Segunda ecuación: $-(3x - 7) = 5$

$-3x + 7 = 5 \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$

Las soluciones de la ecuación son $x = 4$, y $x = \frac{2}{3}$.

d) Primera ecuación: $6x + 2 = 2 - x$

$6x + x = 2 - 2 \rightarrow 7x = 0 \rightarrow x = 0$

Segunda ecuación: $-(6x + 2) = 2 - x$

$-6x - 2 = 2 - x \rightarrow -6x + x = 2 + 2$

$-5x = 4 \rightarrow x = -\frac{4}{5}$

Las soluciones de la ecuación son $x = 0$, y $x = -\frac{4}{5}$

e) Primera ecuación: $5x - 4 = x + 3$

$5x - x = 3 + 4 \to 4x = 7 \to x = \frac{7}{4}$

Segunda ecuación: $-(5x - 4) = x + 3$

$-5x + 4 = x + 3 \to 4 - 3 = x + 5x$

$1 = 6x \to x = \frac{1}{6}$

Así las soluciones son $x = \frac{7}{4}$, y $x = \frac{1}{6}$

f) Primera ecuación: $3x - 7 = 2x + 8$

$3x - 2x = 8 + 7 \to x = 15$

Segunda ecuación: $-(3x - 7) = 2x + 8$

$-3x + 7 = 2x + 8 \to 7 - 8 = 2x + 3x$

$5x = -1 \to x = -\frac{1}{5}$

Las soluciones de la ecuación son $x = 15$, y $x = -\frac{1}{5}$

109. En todas estas ecuaciones utilizamos la definición de valor absoluto, obteniendo dos ecuaciones:

a) Primera ecuación: $x - \frac{1}{2} = 4$

$x = 4 + \frac{1}{2} \to x = \frac{9}{2}$

Segunda ecuación: $-\left(x - \frac{1}{2}\right) = 4 \to -x + \frac{1}{2} = 4$

$\frac{1}{2} - 4 = x \to x = -\frac{7}{2}$

Las soluciones son $x = \frac{9}{2}$, y $x = -\frac{7}{2}$

b) Primera ecuación: $\frac{2x-3}{6} = 7 \to 2x - 3 = 42$

$2x = 45 \to x = \frac{45}{2}$

Segunda ecuación: $-\left(\frac{2x-3}{6}\right) = 7$

$\frac{-2x+3}{6} = 7 \to -2x + 3 = 42$

$-2x = 39 \to x = -\frac{39}{2}$

Así que las soluciones de la ecuación son $x = \frac{45}{2}$, y $x = -\frac{39}{2}$

c) Primera ecuación: $\frac{x}{3} - \frac{1}{4} = x + \frac{5}{4}$

$12 \cdot \frac{x}{3} - 12 \cdot \frac{1}{4} = 12 \cdot x + 12 \cdot \frac{5}{4}$

$4x - 3x = 12x + 15 \to -15 = 11x \to x = -\frac{15}{11}$

Segunda ecuación: $-\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\right) = x + \frac{5}{4}$

$-\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = x + \frac{5}{4}$

$-12 \cdot \frac{x}{3} + 12 \cdot \frac{1}{4} = 12 \cdot x + 12 \cdot \frac{5}{4}$

$-4x + 3x = 12x + 15 \to -13x = 15 \to x = -\frac{15}{13}$

Las soluciones son $x = -\frac{15}{11}$, y $x = -\frac{15}{13}$

d) Primera ecuación: $\frac{x-3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$

$30 \cdot \frac{x-3}{5} - 30 \cdot \frac{1}{5} = 30 \cdot \frac{x}{2} - 30 \cdot \frac{1}{3}$

$6x - 18 - 6 = 15x - 10$

$6x - 15x = -10 + 18 + 6 \to -9x = 14$

$x = -\frac{14}{9}$

Segunda ecuación: $-\left(\frac{x-3}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$

$\frac{-x+3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{x}{2} - \frac{1}{3}$

$30 \cdot \frac{-x+3}{5} + 30 \cdot \frac{1}{5} = 30 \cdot \frac{x}{2} - 30 \cdot \frac{1}{3}$

$-6x + 18 + 6 = 15x - 10$

$-6x - 15x = -10 - 18 - 6 \to -21x = -34$

$x = \frac{-34}{-21} = \frac{34}{21}$

Las soluciones son $x = -\frac{14}{9}$, y $x = \frac{34}{21}$

110. Las respuestas son:

a) Calculamos el valor numérico de la altura h cuando el tiempo es: $t = 2$ s:

$h = 24 + 15 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 24 + 30 - 20 = 34$ m

b) Sustituimos en la fórmula $h = 34$ m y despejamos t:

$34 = 24 + 15t - 5t^2$

$5t^2 - 15t + 10 = 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0$ (simplificando entre 5)

Utilizamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$t = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

$t_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$; $t_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Ya sabíamos, por el apartado anterior, que la pelota alcanzaba 34 metros pasados 2 segundos, pero resulta que también los alcanza pasado 1 segundo (al subir primero, y al bajar después).

111. Llamamos x a las veces que la gerenta rebaja 0,2 euros por entrada, de manera que la entrada debe valer 12 – 0,2x, y el número de espectadores será 300 + 20x

Planteamos la ecuación:

$(300 + 20x) \cdot (12 - 0,2x) = 4784$

Resolvemos la ecuación:

$3600 - 60x + 240x - 4x^2 = 4784$

$-4x^2 + 180x - 1184 = 0 \rightarrow x^2 - 45x + 296 = 0$

Utilizamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{45 \pm \sqrt{45^2 - 4 \cdot 296}}{2} = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - 1184}}{2} =$$

$$\frac{45 \pm \sqrt{841}}{2} = \frac{45 \pm 29}{2}$$

$$x_1 = \frac{45+29}{2} = \frac{74}{2} = 37 \; ; \; x_2 = \frac{45-29}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Hay dos posibles soluciones:

Si x = 37, cada entrada debe valer:

$12 - 0,2 \cdot 37 = 12 - 7,4 = 4,6$ euros

(asistirán 300 + 740 = 1040 espectadores).

Si x = 8, cada entrada debe valer:

$12 - 0,2 \cdot 8 = 12 - 1,6 = 10,4$ euros

(asistirán 300 + 160 = 460 espectadores).

La solución más real sería la segunda: 10,4 euros debe valer cada entrada.

112. Actividad resuelta en el libro.

113. Llamamos x a los litros de bebida que debemos añadir con un 12% de zumo natural, de manera que estamos añadiendo 0,12x litros de zumo natural.

Si debemos obtener 140 litros al 8% de zumo natural, quiere decir que obtendremos $0,08 \cdot 140 = 11,2$ litros de zumo natural al final.

Inicialmente había 140 – x litros de bebida al 5% de zumo natural, es decir, $0,05 \cdot (140 - x)$ litros de zumo natural.

Planteamos y resolvemos la ecuación:

$0,05 \cdot (140 - x) + 0,12x = 11,2$

$7 - 0,05x + 0,12x = 11,2 \rightarrow 0,12x - 0,05x = 11,2 - 7$

$$0,07x = 4,2 \rightarrow x = \frac{4,2}{0,07} = 60$$

Debemos añadir 60 litros de bebida con un 12% de zumo natural

114. La circunferencia del reloj de agujas se puede dividir en partes iguales de varias formas (dependiendo de la unidad de medida que queramos utilizar): en 12 horas, en 60 minutos, en 3600 segundos, en 360 grados).

En cualquier caso, si la aguja grande (de los minutos) da una vuelta completa (recorre las 12 horas), la aguja pequeña (de las horas) recorre 1 hora, y por tanto, el recorrido de la aguja grande es 12 veces mayor que el recorrido de la aguja pequeña.

Llamamos x a los segundos que ha recorrido la aguja grande cuando coinciden las dos agujas, de manera que la aguja pequeña habrá recorrido:

$x - (15 \text{ minuos} \cdot 60 \text{ segundos}) = x - 900$ segundos

Planteamos la ecuación: $x = 12(x - 900)$

Resolvemos la ecuación:

$x = 12x - 10\,800$

$12x - x = 10\,800$

$11x = 10\,800$

$$x = \frac{10800}{11} \simeq 981 \text{ segundos}$$

981 segundos = $60 \cdot 16 + 21$ segundos = 16 minutos y 21 segundos

La aguja de los minutos ha recorrido 16 minutos y 21 segundos, y por tanto, las agujas coinciden a las 3 horas, 16 minutos, 21 segundos.

115. Las soluciones son:

a) x = 12

b) x = 13

c) x = 12

d) x = 27

e) x = 11

f) $x = \frac{16}{3}$

116. Las respuestas son:

a) Tiene dos soluciones x = 17; x = – 21.

b) Tiene dos soluciones x = – 15; x = – 8.

c) Tiene dos soluciones x = – 8; x = – 13.

d) Tiene tres soluciones x = 2; x = – 5; x = 9.

Página 119

DESARROLLA TUS COMPETENCIAS

1. La primera fórmula 1 + 1 = 2 no es una ecuación, porque no interviene ninguna incógnita (letra); es una igualdad entre números.

2. Expresa el teorema de Pitágoras la opción C: $c^2 = a^2 + b^2$, siendo c la hipotenusa y a y b los catetos.

Es falsa la opción B: $c^2 = (a + b)^2$

Es ambigua la opción A: se puede entender como $c^2 = (a + b)^2$ o bien como $c^2 = a^2 + b^2$

3. Las respuestas son:

a) Si c es la hipotenusa, b el cateto conocido y a el cateto desconocido, y despejamos a de la expresión c2 = a2 + b2, obtenemos a2 = c2 – b2

b) En primer lugar expresamos las dos medidas con la misma unidad: 1,2 dm = 12 cm, y después aplicamos la fórmula obtenida en el apartado anterior:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{255 - 144} =$$
$$= \sqrt{81} = 9 \text{ cm}$$

4. a) $E = m \cdot c^2$: La energía de un cuerpo es igual al producto de su masa por el cuadrado de la velocidad de la luz.

b) Sustituimos m = 2 en la fórmula de Einstein:

$E = m \cdot c^2 \rightarrow E = 2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot (10^8)^2 =$

$= 2 \cdot 9 \cdot 10^{16} = 18 \cdot 10^{16}$

La energía asociada es de $18 \cdot 10^{16}$ J

c) Despejamos m en la fórmula de Einstein:

$$E = m \cdot c^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{2,7 \cdot 10^{16}}{9 \cdot 10^{16}} = \frac{2,7}{9} = 0,3$$

La masa asociada es de 0,3 kg

5. La palanca es una máquina simple cuya función consiste en transmitir fuerza y desplazamiento. Está compuesta por una barra rígida que puede girar libremente alrededor de un punto de apoyo llamado fulcro. Sobre la barra rígida actúan tres fuerzas:

La potencia F_1: es la fuerza que aplicamos voluntariamente con el fin de obtener un resultado

La resistencia F_2: es la fuerza que vencemos, ejercida sobre la palanca por el cuerpo a mover. Su valor será equivalente, por el principio de acción y reacción, a la fuerza transmitida por la palanca a dicho cuerpo.

La fuerza de apoyo: es la ejercida por el fulcro sobre la palanca.

Brazo de potencia x_1: es la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza de potencia y el punto de apoyo.

Brazo de resistencia x_2: es la distancia entre la fuerza de resistencia y el punto de apoyo.

La ley de la palanca de Arquímedes, en Física, es la ley que relaciona las fuerzas de una palanca en equilibrio.

6. En los seis restantes sellos aparecen las fórmulas asociadas a los siguientes científicos: Broglie, Napier, Tsiolkovsky, Newton, Boltzmann y Maxwell.

Por ejemplo, para una biografía de Newton, se puede visitar la siguiente página web:

http://www.tiching.com/744566

Página 120

1. Comprobamos:

a) Sustituimos x = – 2 en la ecuación y vemos si se cumple la igualdad:

$2 \cdot (-2) + 4 = -4 + 4 = 0$

$5(-2 \cdot (-2) + 1) = 5(4 + 1) = 5 \cdot 5 = 25$

No es solución.

b) Sustituimos x = 7 en la ecuación y vemos si se cumple la igualdad:

$13 - 2 \cdot 7 = 13 - 14 = -1$

$2(7 - 5) - 5 = 2 \cdot 2 - 5 = 4 - 5 = -1$

Sí es solución.

c) Sustituimos x = 5, x = 6 en la ecuación y vemos si se cumple la igualdad:

Si x = 5:

$5^2 - 11 \cdot 5 + 30 = 25 - 55 + 30 = 30 - 30 = 0$

Sí es solución.

Si x = 6:

$6^2 - 11 \cdot 6 + 30 = 36 - 66 + 30 = 30 - 30 = 0$

Sí es solución.

2. Desarrollamos un miembro de la ecuación y vemos si coincide con el otro:

a) $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$ Sí es una identidad.

b) $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ No es una identidad.

c) $2(x + 9) = 2x + 18$ Sí es una identidad.

d) $-7(-x - 5) = 7x + 35$ No es una identidad.

3. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $3x + 1 = 7$

b) $2x + y = 5$

c) x2 – 16 = 0

d) $5x + 4 = 2x - 8$, es una ecuación equivalente a $5x + 3 = 2x - 9$, porque tiene la misma solución.

4. Resolvemos estas ecuaciones de primer grado:

a) $6x - 6 - 2x - 6 = 4 \rightarrow 6x - 2x = 4 + 6 + 6$

$$4x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{4} = 4$$

b) $$30 \cdot \frac{3x-1}{2} + 30 \cdot \frac{x+3}{6} - 30 \cdot \frac{x-4}{5} = 30 \cdot 14$$

$15(3x - 1) + 5(x + 3) - 6(x - 4) = 420$

$45x - 15 + 5x + 15 - 6x + 24 = 420$

$45x + 5x - 6x = 420 - 24 - 15 + 15$

$$44x = 396 \rightarrow x = \frac{396}{44} = 9$$

c) $$\frac{x+2}{3} - \frac{3x-12}{4} = -8$$

$$12 \cdot \frac{x+2}{3} - 12 \cdot \frac{3x-12}{4} = -12 \cdot 8$$

$4(x + 2) - 3(3x - 12) = -96$

$4x + 8 - 9x + 36 = -96 \rightarrow 4x - 9x = -96 - 36 - 8$

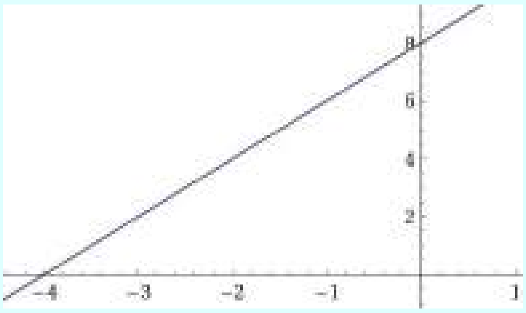
$$-5x = -140 \rightarrow x = \frac{-140}{-5} = 28$$

5. Transformamos la ecuación:

$5x + 7 - 4x + 8 - 7 + x = 0 \rightarrow 2x + 8 = 0$

Representamos la recta y = 2x + 8 utilizando una tabla de valores, dando dos valores a x arbitrarios, y calculando sus respectivos valores de y:

x	y
0	8
–1	6



La abscisa del punto de corte con el eje OX nos da la solución de la ecuación, x = – 4.

6. Resolvemos las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas:

a) $3x^2 = 21 \Rightarrow x^2 = \frac{21}{3} = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$

Las soluciones de la ecuación son: $x_1 = \sqrt{7}$, y $x_2 = -\sqrt{7}$

b) $x^2 = -64 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-64}$

No tiene solución, pues el radicando es negativo.

c) $x(x-17) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 17 = 0 \Rightarrow x = 17 \end{cases}$

Las soluciones son $x_1 = 0$, y $x_2 = 17$

d) $6x^2 + 24x = 0 \rightarrow 6x(x+4) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$

Las soluciones son $x_1 = 0$, y $x_2 = -4$

7. Tenemos en cuenta la expresión general de las ecuaciones de segundo grado, y calculamos si el valor de $b^2 - 4ac$ es positivo (dos soluciones), cero (una solución) o negativo (no tiene solución):

a) $1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$, dos soluciones:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \;;\; x_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

b) $1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 - 25 = -24 < 0$, no tiene solución.

c) $3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7) = 9 - 56 = -47 < 0$, no tiene solución.

d) $100^2 - 4 \cdot 200 \cdot 300 = 10000 - 240000 =$

$= -230000 < 0$,

no tiene solución.

e) $(-20)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10 = 400 - 200 = 200 > 0$, tiene dos soluciones:

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{200}}{10} \rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{2} \;;\; x_2 = 2 - \sqrt{2}$$

f) $(-1)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4) = 1 - 48 = -47 < 0$, no tiene solución.

8. Resolvemos:

a) Llamamos x al número de hombres que hay, de manera que habrá x + 48 mujeres. Planteamos la ecuación: x + (x + 48) = 570

Resolvemos la ecuación:

x + x + 48 = 570 → x + x = 570 – 48

$2x = 522 \rightarrow x = \frac{522}{2} = 261$

Hay 261 hombres y 261 + 48 = 309 mujeres.

Comprobamos que hay 261 + 309 = 570 personas.

b) Llamamos x al dinero que recibe la primera persona, de manera que la segunda recibe x + 65, y la tercera x – 300.

Planteamos y resolvemos la ecuación:

x + (x + 65) + (x – 300) = 5000

x + x + 65 + x – 300 = 5000

x + x + x = 5000 + 300 – 65

$3x = 5235 \rightarrow x = \frac{5235}{3} = 1745$

Una persona recibe 1745 euros, otra 1745 + 65 = = 1810 euros, y una tercera 1745 – 300 = 1445 €.

Comprobamos que suman 5000:

1745 + 1810 + 1445 = 5000 €.

9. Llamamos x al dinero que tenía al principio, de manera que se gastó el primer día x / 4 , el segundo día se gastó x / 5, el tercer día 3 euros, y le sobró x / 2.

Planteamos la ecuación: $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 3 + \frac{x}{2} = x$

Resolvemos la ecuación:

$$20 \cdot \frac{x}{4} + 20 \cdot \frac{x}{5} + 20 \cdot 3 + 20 \cdot \frac{x}{2} = 20 \cdot x$$

$$5x + 4x + 60 + 10x = 20x$$

$$5x + 4x + 10x - 20x = -60 \;\rightarrow\; -x = -60 \;\rightarrow\; x = 60$$

Tenía al principio 60 euros.

Comprobamos que se gastó $\frac{60}{4} + \frac{60}{5} + 3 = 15 + 12 +$ $+3 = 30$ euros, y le sobró $\frac{60}{2} = 30$ euros, es decir, tenía 30 + 30 = 60 euros.

10. Llamamos x a la medida del lado del cuadrado inicial, de manera que al aumentarlo en 3 cm medirá x + 3 cm

Planteamos y resolvemos la ecuación:

$(x + 3)^2 = 324 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = 324$

$x^2 + 6x + 9 - 324 = 0 \;\rightarrow\; x^2 + 6x - 315 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-315)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 1260}}{2} =$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{1296}}{2} = \frac{-6 \pm 36}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6+36}{2} = \frac{30}{2} = 15\ ;\ x_2 = \frac{-6-36}{2} = \frac{-42}{2} = -21$$

Como la medida del lado de un cuadrado no puede ser negativa, la solución es que el lado mide 15 cm.

Comprobamos que el área del cuadrado aumentado es (15 + 3)2 = 182 = 324 cm^2.

ESTRATEGIA E INGENIO

El viaje de la mosca

Si la velocidad de la mosca es constante, para calcular toda la distancia que recorre solo nos hace falta saber durante cuánto tiempo está viajando entre ciclistas, es decir, cuánto tardan ambos cicilistas en encontrarse.

Si se encuentran a una distancia x del punto de partida del primer ciclista, el tiempo que tarda este en llegar es:

$$v = \frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}} = \frac{x}{t} \rightarrow t = \frac{x}{15}$$

Y el tiempo que tarda el segundo ciclista en llegar es el mismo (salen a la vez), y en su caso se expresará como: $t = \frac{100-x}{25}$

Igualando ambos tiempos:

$$\frac{x}{15} = \frac{100-x}{25} \ \rightarrow\ 75\cdot\frac{x}{15} = 75\cdot\frac{100-x}{25}$$

$$5x = 3(100-x)\ \rightarrow\ 8x = 300$$

$$x = \frac{300}{8} = 37{,}5\ \text{km}$$

Y el tiempo correspondiente a esta distancia es:

$$t = \frac{37{,}5}{15} = 2{,}5\ \text{h}$$

Si durante ese tiempo la mosca estuvo volando a 50 km/h, habrá recorrido: $50\cdot 2{,}5 = 125$ km.

¿3 = 2?

El fallo está en que, según la condición inicial:

$$a+b=c \rightarrow a+b-c=0,$$

así que el último paso del razonamiento es imposible, pues implica dividir entre cero.

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 5-9 de la guía)

18. En todas estas ecuaciones, una vez eliminados los paréntesis si los hay, suprimimos los denominadores multiplicando por el m.c.m. de los denominadores, y finalmente seguimos con los pasos habituales:

a) $3\cdot 2x = 3\cdot\frac{5}{3} + 3x \rightarrow 6x - 3x = 5 \rightarrow 3x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{3}$

b) $3\cdot\frac{x}{3} - 3 = 3\cdot 5 \rightarrow x - 3 = 15 \rightarrow x = 18$

c) $2\cdot 3 - 2\cdot\frac{5x}{2} = 2x \rightarrow 6 = 5x + 2x \rightarrow x = \frac{6}{7}$

d) $-10\cdot\frac{7x}{2} = 10\cdot\frac{9}{5} - 10x \rightarrow -35x = 18 - 10x \rightarrow$

$-25x = 18 \rightarrow x = -\frac{18}{25}$

e) $-2\cdot\frac{x}{2} = -2x \rightarrow -x = -2x \rightarrow x = 0$

f) $6\cdot 3 - 6\cdot\frac{5}{3} = 6\cdot\frac{x}{2} \rightarrow 18 - 10 = 3x \rightarrow x = \frac{8}{3}$

g) $\frac{4x}{2} = 2 + \frac{9}{2} \rightarrow 2\cdot\frac{4x}{2} = 2\cdot 2 + 2\cdot\frac{9}{2} \rightarrow$

$4x = 4 + 9 \rightarrow 4x = 13 \rightarrow x = \frac{13}{4}$

h) $x + \frac{7}{5} = -\frac{4x}{3} \rightarrow 15x + 15\cdot\frac{7}{5} = -15\cdot\frac{4x}{3} \rightarrow$

$15x + 21 = -20x \rightarrow 35x = -21 \rightarrow x = -\frac{21}{35} = -\frac{3}{5}$

19. En todas estas ecuaciones suprimimos los denominadores multiplicando por el m.c.m. de los denominadores, y finalmente seguimos con los pasos habituales:

a) $15\cdot\frac{x}{5} - 15\cdot\frac{x}{3} = 15x - 15\cdot 34 \rightarrow$

$3x - 5x = 15x - 510 \rightarrow -17x = -510 \rightarrow x = 30$

b) $4\cdot\frac{x+6}{2} - 4\cdot\frac{2x}{4} = 4\cdot 3 \rightarrow 2x + 12 - 2x = 12 \rightarrow$

$2x - 2x = 12 - 12 \rightarrow 0 = 0$

En realidad se trata de una identidad, por tanto cualquier valor de x es una solución de la ecuación.

c) $8\cdot\frac{x}{2} + 8\cdot\frac{x}{4} - 8\cdot\frac{x}{8} = 8\cdot 25 \rightarrow 4x + 2x - x = 200 \rightarrow$

$5x = 200 \rightarrow x = 40$

d) $15\cdot\frac{x+2}{3} - 15\cdot\frac{x-2}{5} = 15x - 15\cdot 18 \rightarrow$

$5x - 3x - 15x = -270 - 10 - 6 \rightarrow -13x = -286 \rightarrow$

$x = 22$

20. Primero eliminamos paréntesis, después suprimimos los denominadores y finalmente seguimos con los pasos habituales:

$\frac{4x-12+2}{2} - \frac{3x+6}{5} = x + 1 \rightarrow$

$10\cdot\frac{4x-10}{2} - 10\cdot\frac{3x+6}{5} = 10x + 10 \rightarrow$

$20x - 50 - 6x - 12 = 10x + 10 \rightarrow 4x = 72 \rightarrow x = \frac{72}{4}$

$x = 18$

(Viene de la página 5-11 de la guía)

Página 108

c) – 3x + 7 = 3 – 3x → – 3x + 3x = 3 – 7

0x = – 4

Representamos la recta y = -4 (paralela al eje OX):

x	y
1	4
2	4

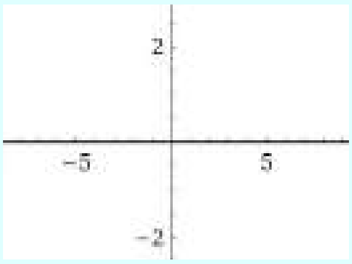
La recta no corta al eje OX, lo que indica que la ecuación no tiene solución.

d) 2 + 6x = 6x + 3 – 1 → 6x – 6x = 3 – 1 – 2

0x = 0 → 0x – 0 = 0

Representamos la recta y = 0 (es el eje OX):

x	y
0	0
1	0



Como la recta es el propio eje OX, tiene infinitas soluciones.

22. La solución es x = – 2, porque es la abscisa del punto (– 2, 0) donde la recta corta al eje OX

Si la recta es y = – 3, es paralela al eje OX y por tanto no lo corta. La ecuación no tiene solución

(Viene de la página 5-13 de la guía)

c) (x + 4)(x – 4) = 0 → $\begin{cases} x+4=0 \rightarrow x=-4 \\ x-4=0 \rightarrow x=4 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -4$, $x_2 = 4$

d) (2x – 4)(x + 3) = 0 → $\begin{cases} 2x-4=0 \rightarrow x=2 \\ x+3=0 \rightarrow x=-3 \end{cases}$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 2$, $x_2 = -3$

Página 111

28. Resolvemos estas ecuaciones de segundo grado completas, reordenando los sumandos si es necesario, y aplicando la fórmula correspondiente:

a) $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 7}}{2\cdot 1} = \dfrac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \dfrac{8 \pm 6}{2}$

$x_1 = \dfrac{14}{2} = 7\,,\ x_2 = \dfrac{2}{2} = 1$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2}{2} = -1\,,\ x_2 = \dfrac{-6}{2} = -3$

c) $x = \dfrac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot 1\cdot 25}}{2\cdot 1} = \dfrac{10 \pm 0}{2}$

$x_1 = x_2 = \dfrac{10}{2} = 5$

d) $x^2 - 4x - 21 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot (-21)}}{2\cdot 1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{100}}{2} = \dfrac{4 \pm 10}{2}$

$x_1 = \dfrac{14}{2} = 7\,,\ x_2 = \dfrac{-6}{2} = -3$

29. Resolvemos estas ecuaciones de segundo grado completas, reordenando los sumandos, y aplicando la fórmula correspondiente:

a) $2x^2 - 3x^2 + 4x - 2x + 8 = 0 \rightarrow -x^2 + 2x + 8 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 8}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \dfrac{-2 \pm 6}{-2}$

$x_1 = \dfrac{4}{-2} = -2\,,\ x_2 = \dfrac{-8}{-2} = 4$

b) $x^2 + 3x + 5x = 4 + 5x \rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2}$

$x_1 = \dfrac{2}{2} = 1\,,\ x_2 = \dfrac{-8}{2} = -4$

c) $6x^2 - 9x = 15 - 10x \rightarrow 6x^2 + x - 15 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 6\cdot(-15)}}{2\cdot 6} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{361}}{12}$

$x_1 = \dfrac{-1+19}{12} = \dfrac{3}{2}\,,\ x_2 = \dfrac{-1-19}{12} = -\dfrac{5}{3}$

d) $4x - 44 = x^2 - 6x + 9 + 4x \rightarrow x^2 - 6x + 53 = 0$

$x = \dfrac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 53}}{2\cdot 1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-176}}{2}$

Como el radicando es negativo, la ecuación no tiene solución.

(Viene de la página 5-15 de la guía)

31. Si llamamos x al número mayor, el menor es x – 36, y la cuarta parte del mayor es x/4. Planteamos y resolvemos la ecuación:

$\frac{x}{4} = x - 36 \rightarrow x = 4x - 144 \rightarrow 3x = 144$

x= 144 / 3 = 48

Sustituimos x = 48 en la expresión del número menor: 48 – 36 = 12

Los números son: 48 y 12

Comprobamos la solución: la diferencia es 48 – 12 = 36, y la cuarta parte del mayor coincide con el menor.

32. Si llamamos x a los estudiantes que hay en clase, el lunes había x – 2, y el martes x – 14. Planteamos y resolvemos la ecuación:

x – 2 = 2(x – 14) → x – 2 = 2x – 28 → 28 – 2 = 2x – x

x = 26 estudiantes

Comprobamos la solución: el martes había 26 – 14 = 12 estudiantes, y el lunes 26 – 2 = 24 estudiantes, que son el doble que el lunes.

33. Si llamamos x a los años que deben transcurrir para que la edad de Fernando sea el doble de la de Beatriz, Fernando tendrá 49 + x años y Beatriz 14 + x. Planteamos y resolvemos la ecuación:

49 + x = 2 (14 + x) → 49 – 28 = 2x – x

x = 21 años

Comprobamos la solución: Beatriz tendrá 14 + 21 = 35 años, y Fernando 49 + 21 = 70 años, que es el doble.

34. Si llamamos x a un cateto, el otro es $\frac{3}{4}x$. Planteamos la ecuación, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$15^2 = x^2 + \left(\frac{3}{4}x\right)^2 \rightarrow 225 = x^2 + \frac{9}{16}x^2$$

$$225 = \left(1 + \frac{9}{16}\right)x^2 = \frac{25}{16}x^2 \rightarrow 225 \cdot 16 = 25x^2$$

$$x^2 = \frac{3600}{25} = 144 \rightarrow x = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

La solución x = – 12 no es válida, por ser la medida de un cateto.

Por lo tanto, un cateto mide 12 cm y el otro mide $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ cm.

35. Si llamamos x a la edad actual de Carlos, su triple es 3x, que es la edad actual de Pedro. Además, dentro de 10 años Carlos tendrá x + 10 años, y Pedro 3x + 10 años.

Empezamos planteando la ecuación:

3x + 10 = 2(x + 10)

Resolvemos:

3x + 10 = 2x + 20 → 3x – 2x = 20 – 10 → x = 10

La edad actual de Carlos es 10 años y la de Pedro 3 · 10 = 30 años

Para finalizar, comprobamos la solución: dentro de 10 años Carlos tendrá 10 + 10 = 20 años, y Pedro 30 + 10 = = 40 años, que se trata del doble de la edad que tiene Carlos.

36. Llamamos x a la edad actual de Carla, y organizamos los datos de edades en la tabla siguiente:

	Hace 5 años	Actual	Dentro de 10 años
Sandra	2(x – 5)	2(x – 5) + 5	2(x – 5) + 15
Carla	x – 5	x	x + 10

Planteamos la ecuación (nos fijamos en las expresiones dentro de 10 años), y la resolvemos:

$$2(x - 5) + 15 = \frac{7}{5}(x + 10)$$

$$5 \cdot 2(x - 5) + 5 \cdot 15 = 5 \cdot \frac{7}{5}(x + 10)$$

10(x – 5) + 75 = 7(x + 10) → 10x – 7x = 70 + 50 – 75

$$3x = 45 \rightarrow x = \frac{45}{3} = 15$$

Sustituimos x = 15 en la expresión de la edad actual de Sandra: 2(15 – 5) + 5 = 20 + 5 = 25

Así pues, la edad actual de Carla es 15 años, y la de Sandra 25 años.

37. Llamamos x a lo que mide el lado del cuadrado (antes de aumentarlo), y su área será x^2. Si aumentamos el lado 8 m, el nuevo cuadrado tiene de lado x + 8, y su área será $(x + 8)^2$. Planteamos y resolvemos la ecuación:

$(x + 8)^2 = x^2 + 144 \rightarrow x^2 + 16x + 64 = x^2 + 144$

$x^2 - x^2 + 16x = 144 - 64 \rightarrow 16x = 80$

$$x = \frac{80}{16} = 5 \text{ m}$$

Comprobamos la solución: $5^2 = 25$ m^2 es el área sin aumentar el lado, $(5 + 8)^2 = 13^2 = 169$ m^2 es el área al aumentar el lado, y efectivamente 25 + 144 = 169.

38. Llamamos x a lo que mide cada uno de los lados iguales del triángulo, siendo la medida del desigual $\frac{2}{3}x$, y tenemos en cuenta que el perímetro es la suma de todos sus lados. Planteamos la ecuación:

$$x + x + \frac{2}{3}x = 72$$

Y resolvemos:

$$\left(2 + \frac{2}{3}\right)x = 72 \rightarrow \frac{8}{3}x = 72$$

$$x = \frac{3 \cdot 72}{8} = \frac{216}{8} = 27$$

Además $\frac{2}{3} \cdot 27 = 18$. Por tanto, los lados iguales miden 27 cm y el desigual 18 cm.

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/742614	https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n
http://www.tiching.com/742616	http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/46-1-u-ecuaciones.html
http://www.tiching.com/742665	http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Ecuaciones_de_primer_grado
http://www.tiching.com/742693	http://www.amolasmates.es/algebraconpapas/recurso/tests/primerbasico/prbas0601.htm
http://www.tiching.com/742701	http://www.vitutor.com/fun/1/a_1_e.html
http://www.tiching.com/742787	http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Ecuaciones2grado/eg21.htm
http://www.tiching.com/742788	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/ecuacion.htm#4
http://www.tiching.com/744566	http://www.biografiasyvidas.com/monografia/newton/

INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ La finalidad de esta unidad consiste en el estudio de los sistemas de ecuaciones y los métodos de resolución.

En primer lugar leeremos el texto introductorio y observaremos la imagen de presentación. Después lo comentaremos siguiendo este cuestionario:

– *¿Cuál es la diferencia entre una ecuación y un sistema de ecuaciones?*

– *¿En qué situaciones de la vida humana crees que son útiles los sistemas de ecuaciones?*

– *¿Has resuelto alguna situación o problema mediante una ecuación o sistema de ecuaciones?*

■ A continuación prestaremos atención al índice de contenidos de esta unidad didáctica y al esquema que los relaciona, y plantearemos estas preguntas:

– *¿Cuándo una ecuación es lineal? Pon un ejemplo.*

– *¿Y una ecuación lineal con dos incógnitas?*

– *¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de ecuaciones lineales?*

– *¿Cómo podemos asegurarnos de que la solución obtenida es realmente una solución del sistema?*

Empezamos la unidad

■ Con el fin de introducir y repasar ciertos conceptos que se desarrollarán a lo largo de la unidad, se proponen una serie de actividades, cuyos objetivos particulares son:

– La actividad 1 recuerda el tipo de situaciones que podemos describir matemáticamente a partir de expresiones algebraicas, lo que nos será muy útil después para construir las ecuaciones.

– La actividad 2 repasa la operativa con ecuaciones e introduce el concepto de valor numérico de una ecuación para una valor dado de la incógnita.

– La actividad 3 revisa los métodos de resolución de ecuaciones lineales.

■ Para concluir esta introducción a la unidad, pediremos a los alumnos que resuelvan por parejas las actividades planteadas en el apartado *Para empezar*.

De esta manera, facilitamos la interacción del alumnado así como la toma de consciencia de sus fortalezas y carencias en relación al tema que comienza.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 1*. Interpretar un enunciado en el que se incluyen términos técnicos específicos de la materia.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 1, 2 y 3*. Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.
- *Acts. 2 y 3*. Saber transformar la información sobre álgebra, recopilada en cursos anteriores en conocimiento propio.
- *Esquema pág. 122*. Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Texto pág. 122.* Valorar el uso y la aplicación de los sistemas de ecuaciones, como herramienta matemática al servicio de cuestiones cotidianas y en la Ciencia.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Actividades.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen sobre polinomios.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para iniciar la unidad sobre sistemas de ecuaciones y destacar el uso del álgebra, les propondremos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747012

La página web ofrece una breve historia de la aparición del álgebra que permite repasar su evolución en diferentes culturas.

Les propondremos que realicen una lectura con detalle y que respondan a estas preguntas que les planteamos a continuación:

- *¿Qué es lo que más te ha sorprendido de esta parte de la historia matemática? ¿Sabrías decir qué tipo de álgebra desarrollaron los griegos?*
- *En la tumba de Diophante aparece un epigrama algebraico. ¿Sabrías resolverlo?*
- *Ahora deberás proponer tu alguno, sobre tu vida y compartirlo en clase para resolverlos entre todos.*

Estas actividades nos permitirán resaltar los aspectos prácticos y aplicables del álgebra.

Educamos en valores

Educación vial y los medios de transporte

- El área de matemáticas puede estudiar varios aspectos del transporte, desde el físico, como la velocidad o la dirección, hasta el ecológico, como la contaminación o el ahorro energético.

El mundo del transporte da pie a situaciones que pueden analizarse con el empleo de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, como el tiempo transcurrido, la distancia recorrida o la velocidad alcanzada en un desplazamiento.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de la unidad que contribuyen a conseguir este objetivo:

– Podemos aprovechar la imagen de las págs. 122 y 123 para comentar los diferentes medios de transporte colectivo que conocemos y su impacto ambiental.

– Las actividades 77 y 79 trabajan con velocidades y pueden permitirnos hablar sobre límites de velocidad y educación vial.

Libro Digital

- *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 123

Para empezar…

1. Las situaciones dadas se expresan como:

a) $x+10$ b) $2\cdot(x+y)$ c) $(4z)^2$ d) $2a\cdot(5+b^2)$

2. Sustituyendo la incógnita por el valor dado en cada caso, se obtiene:

a) $0^2-2\cdot 0+15=15$

b) $3^2-2\cdot 3+15=18$

c) $5^2-2\cdot 5+15=18$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}+15=\frac{57}{4}$

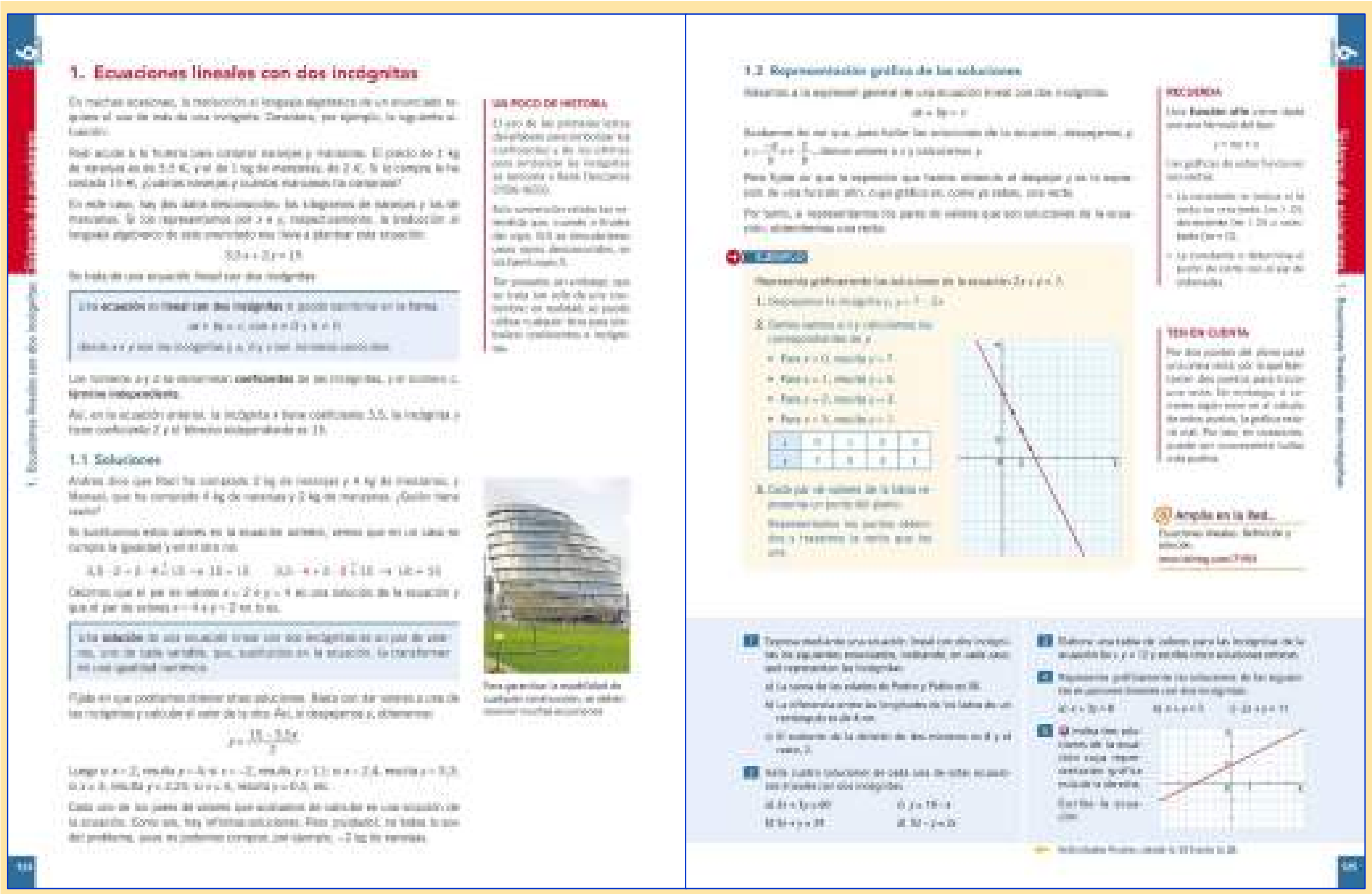
e) $(-1)^2-2\cdot(-1)+15=18$

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+15=\frac{151}{9}$

3. Las soluciones de cada ecuación son:

a) $5x=-5 \Leftrightarrow x=-1$ c) $-2=4x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

b) $-x=4 \Leftrightarrow x=-4$ d) $3+3x=2x-3 \Leftrightarrow x=-6$



1. ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

■ El objetivo de esta sección es el estudio de las ecuaciones lineales con dos incógnitas y su resolución.

Después de leer la introducción de la sección, preguntaremos al alumnado:

– *¿Qué forma tiene una ecuación lineal con dos incógnitas?*

– *¿Cuáles son los coeficientes y el término independiente?*

– *¿Si el término independiente es cero, sigue siendo una ecuación lineal con dos incógnitas?*

A continuación leeremos el apunte *Un poco de historia,* que nos explica el origen de la convención de las letras a usar para designar los coeficientes e incógnitas de una ecuación.

1.1 Soluciones

■ Los alumnos y alumnas leerán ahora el primer apartado, atendiendo al ejemplo y la ilustración. Luego les formularemos este cuestionario:

– *¿Cuántos valores forman la solución de una ecuación de dos incógnitas?*

– *¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de dos incógnitas?*

– *¿Son todas las soluciones de la ecuación soluciones del problema planteado? Razona tu respuesta.*

1.2 Representación gráfica de las soluciones

■ Proseguiremos con la lectura del siguiente apartado, repasando algunos conceptos importantes en la nota del margen *Recuerda*:

– *¿Qué tipo de gráfica obtenemos si representamos las soluciones de una ecuación lineal de dos incógnitas?*

– *¿Y si el término independiente fuera cero?*

■ Como aplicación de lo anterior observaremos el ejemplo resuelto, y plantearemos estas cuestiones:

– *¿Podríamos haber despejado la incógnita x en lugar de la incógnita y?*

– *¿Puedes identificar las soluciones de la ecuación a partir de la gráfica?*

Después leeremos la nota *Ten en cuenta* del margen, que nos aporta una sugerencia interesante a la hora de resolver ecuaciones por el método gráfico.

■ El alumnado podrá repasar y practicar estos conceptos accediendo al recurso *@Amplía en la Red.*

Por último los alumnos y alumnas resolverán las actividades propuestas en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 1, 3 y 5.* Leer e interpretar el enunciado procesando los datos de manera ordenada.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 1, 3 y 4.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos sobre ecuaciones lineales.
- *Act. 2.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.
- *Act. 5.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos a situaciones parecidas propuestas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 1, 2, 3 y 4.* Afrontar los ejercicios siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante al buscar las respuestas.
- *Act. 5.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre ecuaciones lineales.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de practicar el concepto de ecuación lineal, ahora con dos incógnitas, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/747013

– La siguiente página web es un recurso del tipo Descartes. En ella nuestros alumnos podrán seguir una explicación, entretenida y lúdica, sobre la ecuación lineal y sus características, descubriendo de forma interactiva las escenas y los resultados.

Seguidamente, podrán realizar los seis ejercicios interactivos y comprobar por sí mismos el afianzamiento de estos contenidos.

Al final hay varios sistemas de ecuaciones para resolver. Como son actividades autocorrectivas facilitan la autonomía en los aprendizajes.

Se requiere instalar el programa Java para visualizar correctamente las ventanas interactivas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 125

1. Los enunciados dados quedan como:

a) Si x representa la edad de Pedro e y representa la edad de Pablo: $x + y = 56$.

b) Si x representa los centímetros que mide de largo e y representa los que mide de ancho: $x - y = 4$.

c) Si x representa el dividendo e y representa el divisor: $x = 8y + 2$.

2. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $x = 3;\quad y = 18$

b) $x = 5;\quad y = -1$

c) $x = 10;\quad y = 8$

d) $x = 3;\quad y = 46$

3. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Para x = -1, resulta y = 18.

Para x = 0, resulta y = 12.

Para x = 1, resulta y = 6.

Para x = 2, resulta y = 0.

Para x = 3, resulta y = -6.

Por lo tanto, la tabla de valores sería:

x	-1	0	1	2	3
y	18	12	6	0	-6

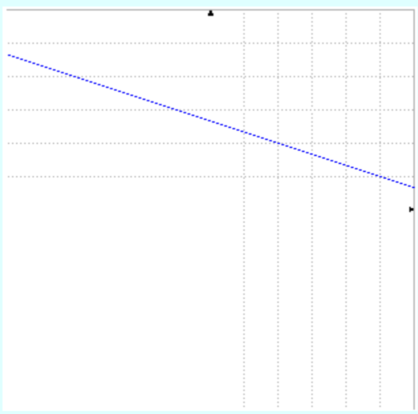
4. Se representa cada uno de los apartados:

a) Despejamos la incógnita y: $y = \dfrac{8 - x}{3}$.

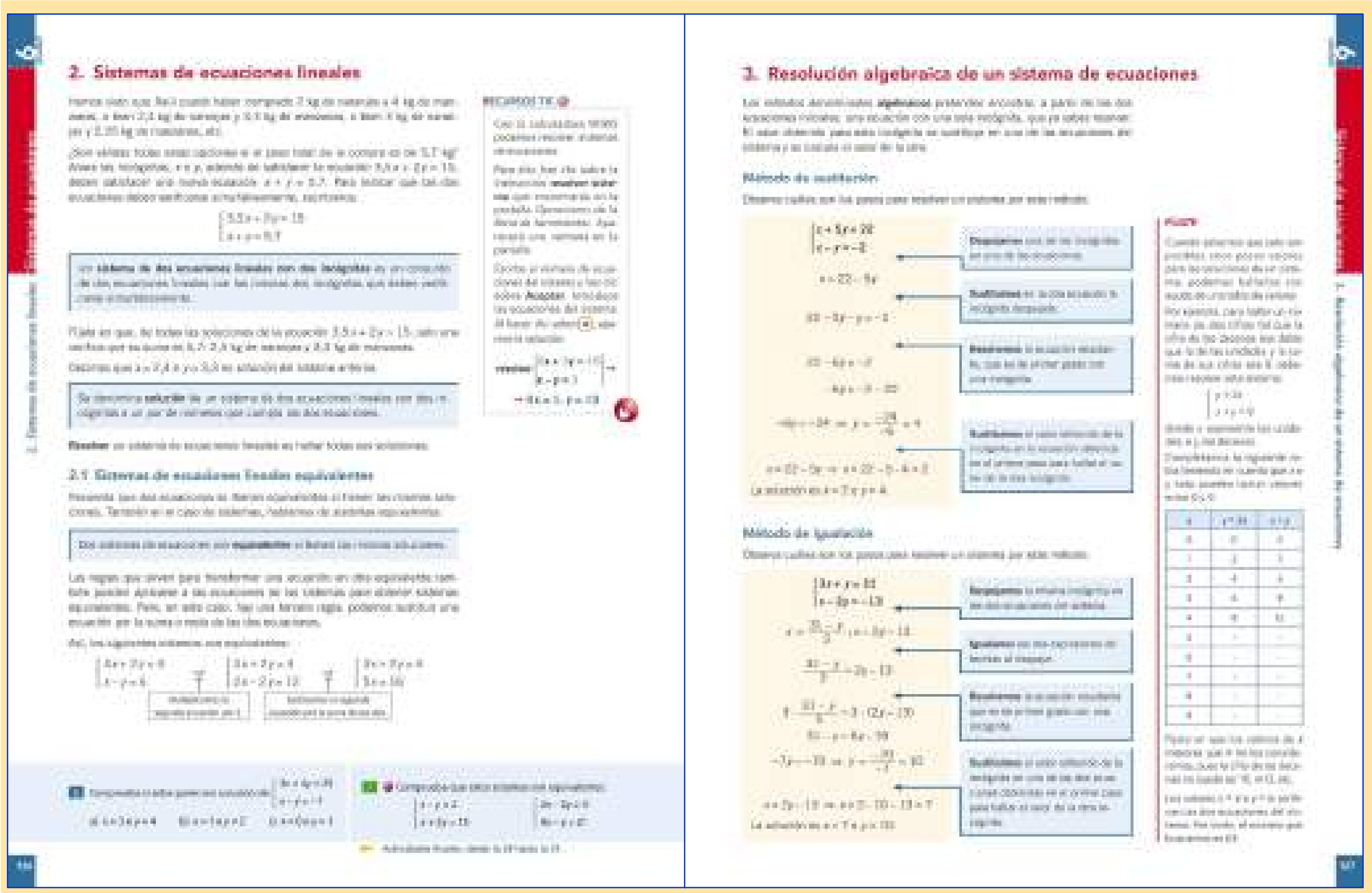
A continuación formamos la tabla de valores:

x	-4	-1	2	5
y	4	3	2	1

Cada par de valores de la tabla representa un punto en el plano. Trazando la recta que los unen:



(Continúa en la página 6-40 de la guía)



2. SISTEMAS DE EC… / 3. RESOLUCIÓN…

■ El objetivo de estas dos secciones es introducir los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y los procedimientos empleados en su resolución.

Comenzaremos leyendo la primera parte de la sección, donde se describe este tipo de sistemas de ecuaciones y sus soluciones:

– *¿Cuántos valores forman la solución del sistema?*

– *¿Qué representa cada ecuación del sistema?*

2.1 Sistemas de ec. lineales equivalentes

■ A continuación leeremos el siguiente apartado, destacando su importancia a la hora de resolver sistemas, como veremos más adelante:

– *¿Cómo podemos obtener sistemas de ecuaciones equivalentes? ¿Recuerdas las reglas de transformación de ecuaciones en sus equivalentes?*

– *¿Por qué crees que es de gran utilidad transformar sistemas en equivalentes?*

■ Los alumnos y alumnas resolverán ahora las actividades propuestas en el libro.

Después el docente mostrará al alumnado la posibilidad que ofrece la calculadora online *Wiris* de resolver sistemas de ecuaciones, siguiendo el procedimiento que se indica en el margen.

■ Posteriormente leeremos la introducción de la siguiente sección, donde se resume el procedimiento general de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

– *¿En qué se diferenciará cada método de resolución?*

■ A continuación examinaremos con el alumnado el ejemplo, para comprender el método de sustitución:

– *¿En qué se basa este método?*

– *¿Podemos despejar cualquiera de las dos incógnitas?*

– *¿Por qué crees que hemos despejado la x?*

– *¿Cómo podríamos comprobar la solución obtenida?*

■ En el siguiente ejemplo observaremos los pasos a seguir para resolver un sistema por igualación:

– *¿Cuál es el primer paso en la aplicación de este método?*

– *¿Qué tienen en común ambos métodos?*

– *Comprueba que las soluciones satisfacen el sistema.*

Después los alumnos y alumnas observarán en el apunte *Fíjate* del margen, otro método para resolver sistemas:

– *¿En qué consiste este método? ¿Se puede aplicar siempre?*

– *¿Cómo hemos obtenido las dos ecuaciones del sistema en el ejemplo?*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Recursos TIC, pág 126.* Desarrollar la capacidad de comprender un texto que incluye vocabulario específico para operar y utilizar elementos de la tecnología.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Recursos TIC pág. 126.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la calculadora WIRIS, con el cual se pueden resolver sistemas de ecuaciones.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 7.* Trabajar la aplicación de los conocimientos sobre ecuaciones equivalentes de manera sistemática.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 6 y 7.* Desarrollar la capacidad de poner en práctica los conocimientos adquiridos sobre sistemas de ecuaciones, extrayendo conclusiones y siendo perseverante en la resolución.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 nos permitirá afianzar el concepto de solución de un sistema de ecuaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para ampliar la información sobre sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, y practicar los diferentes métodos de resolución, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/747014

Esta página web ofrece diferentes recursos didácticos sobre los sistemas de ecuaciones.

Primeramente explica que es un sistema de ecuaciones y da la información teórica del procedimiento y los pasos muy bien detallados, para resolver un sistema de ecuaciones por los diferentes métodos.

Nuestros alumnos leerán el proceso a seguir, así como los consejos prácticos que se incluyen. A continuación, les pediremos que completen los ejercicios interactivos que se hallan al final de cada apartado.

Son actividades autocorrectivas que los alumnos realizarán para que sean conscientes del proceso y de su aprendizaje.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 126

6. Sustituyendo en el sistema de ecuaciones las incógnitas por los valores dados en cada apartado, se obtiene:

a) $x = 3$ e $y = 4$

Sí es solución, ya que:

$$\begin{cases} 3\cdot 3+4\cdot 4=25 \\ 3-4=-1 \end{cases}$$

b) $x = 1$ e $y = 2$

No es solución, ya que:

$$\begin{cases} 3\cdot 1+4\cdot 2=11\neq 25 \\ 1-2=-1 \end{cases}$$

c) $x = 0$ e $y = 1$

No es solución, ya que:

$$\begin{cases} 3\cdot 0+4\cdot 1=4\neq 25 \\ 0-1=-1 \end{cases}$$

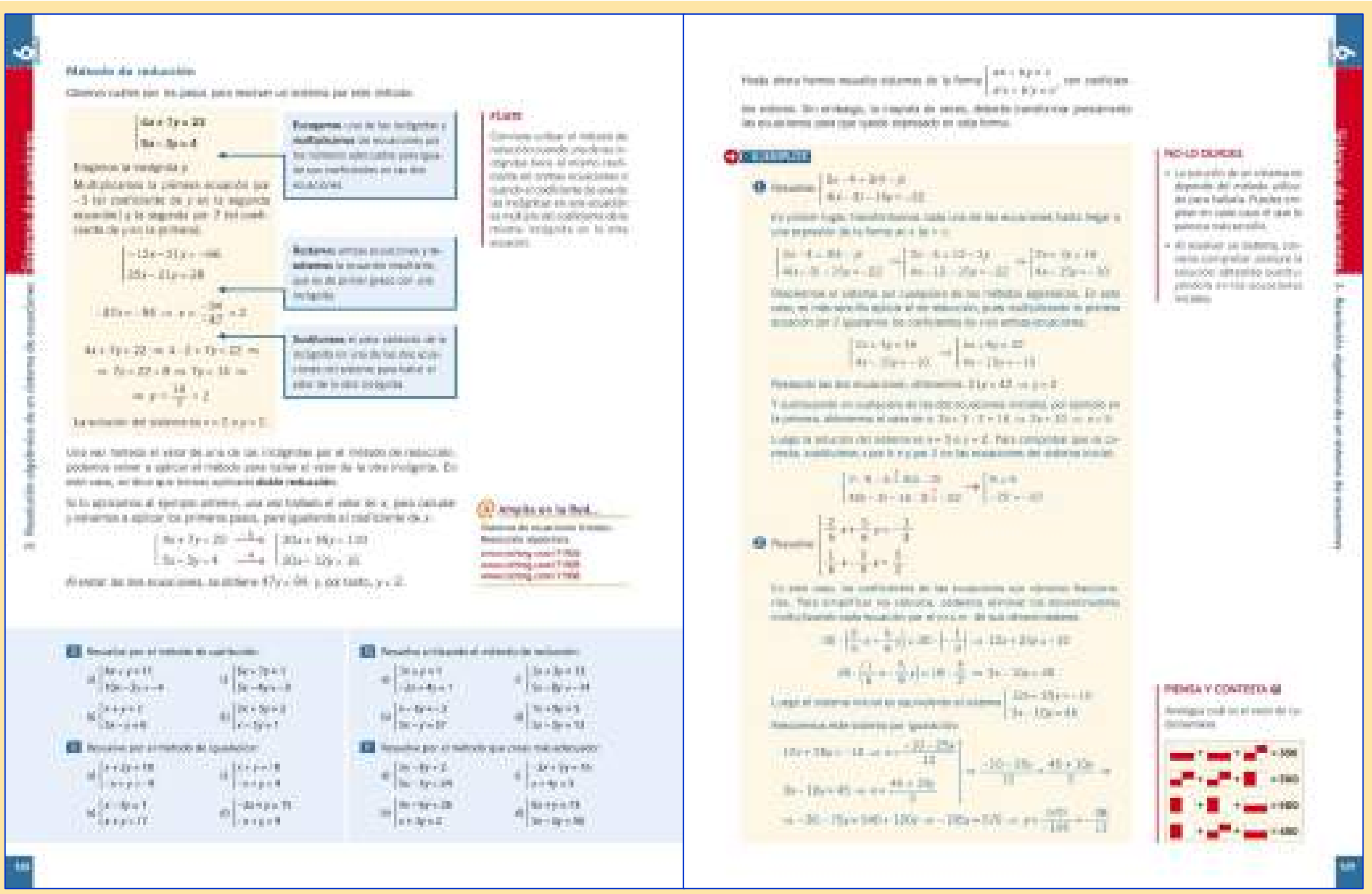
7. En primer lugar, se sustituye la segunda ecuación por la suma de ésta y el triple de la primera:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 4x-y=21 \end{cases}$$

A continuación, se multiplica la primera ecuación por 2, obteniendo así el sistema indicado:

$$\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 4x-y=21 \end{cases}$$

Por lo tanto podemos afirmar que los dos sistemas son equivalentes.



3. RESOLUCIÓN ALGEBRAICA... (CONT.)

■ Observaremos ahora una tercera estrategia de resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas.

En primer lugar analizaremos los pasos seguidos en el ejemplo y después prestaremos atención a la nota *Fíjate:*

– *¿Cuál es la primera transformación aplicada en este método?*
– *¿Cómo es el sistema obtenido al aplicar dicha transformación?*
– *¿En qué casos es interesante aplicar este método?*

Continuaremos leyendo este subapartado, donde se expone el método de doble reducción.

■ Con el fin de practicar los procedimientos presentados, el alumnado puede acceder a los recursos web de *@Amplía en la Red*, que incluyen un repaso de la teoría, ejemplos resueltos y una colección de ejercicios.

Después comprobaremos el nivel de asimilación de conceptos por parte de los alumnos y alumnas, resolviendo las actividades propuestas en el libro.

■ A continuación veremos una serie de ejemplos en los que se añade un nivel de complejidad más a los sistemas de ecuaciones.

Leeremos previamente la nota del margen *No lo olvides*, que nos destaca un par de pautas importantes a la hora de resolver sistemas de ecuaciones:

– *¿Se puede aplicar cualquiera de los métodos estudiados para resolver un sistema? ¿Llegaríamos a la misma solución?*
– *¿Cuál debería ser el último paso al resover un sistema?*

■ Ahora leeremos el párrafo introductorio a los ejemplos y examinaremos el primero de ellos:

– *¿Qué transformación hemos aplicado en primer lugar?*
– *¿Por qué es necesario realizar dicha transformación?*
– *¿Por qué hemos aplicado el método de reducción?*
– *¿Cómo podríamos haber eliminado la incógnita y en lugar de x, para obtener una ecuación de primer grado de incógnita x?*

■ A continuación observaremos detenidamente las transformaciones realizadas en el segundo ejemplo:

– *¿En este caso obtenemos alguna ventaja al aplicar el método de igualación frente a los otros dos métodos?*
– *Comprueba que las soluciones cumplen el sistema.*

En este punto indicaremos a los alumnos y alumnas que observen el planteamiento de la derecha, en el epígrafe *Piensa y contesta*, y piensen cómo lo resolverían. Después pondrermos en común los procedimientos seguidos por el alumnado.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 8 a 11.* Trabajar los términos específicos sobre las operaciones con sistemas de ecuaciones.

APRENDER A APRENDER

- *Actividades.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia de resolución de los sistemas de ecuaciones.
- *Acts. 8, 9, 10 y 11.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 8, 9, 10 y 11.* Afrontar una situación problemática aplicando los métodos y conocimientos adquiridos para resolver sistemas de ecuaciones.
- *Piensa y contesta, pág. 129.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ Mediante la realización de las actividades de refuerzo 2 y 3 podremos recordar los dos métodos de resolución estudiados en primer lugar: sustitución e igualación.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de seguir practicando los métodos algebraicos para resolver un sistema de ecuaciones, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/747015

En la página encontraremos una breve descripción y a continuación, propuestas de actividades con soluciones.

Pediremos a nuestros alumnos que para automatizar los diferentes mecanismos, resuelvan los cuatro sistemas de ecuaciones propuestos en el ejercicio.

También, siguiendo las consignas, podrán comprobar la resolución de forma gráfica e interectuar con varias escenas.

Como docentes nos interesará que los alumnos adquieran habilidades y destrezas al resolver y observar la ecuación, de manera que también desarrollen la capacidad de autoavaluarse y ser conscientes de sus propios errores.

Se requiere instalar el programa Java para visualizar correctamente las ventanas interactivas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 128

8. Siguiendo los pasos del método de sustitución, se resuelven:

a) Despejamos la incógnita “y” de la primera ecuación:

$y = 11 - 4x$

A continuación, se sustituye “y” en la segunda ecuación:

$10x - 2\cdot(11 - 4x) = -4$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$10x - 22 + 8x = -4 \Leftrightarrow 18x = 18 \Leftrightarrow x = 1$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y = 11 - 4\cdot 1 \Leftrightarrow y = 11 - 4 \Leftrightarrow y = 7$

La solución es x = 1 e y = 7.

b) Despejamos la incógnita “y” de la segunda ecuación:

$y = 5x - 6$

A continuación, se sustituye “y” en la segunda ecuación:

$x + (5x - 6) = 3$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$x + 5x - 6 = 3 \Leftrightarrow 6x = 9 \Leftrightarrow x = 3/2$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y = 5\cdot(3/2) - 6 \Leftrightarrow y = 15/2 - 6 \Leftrightarrow y = 3/2$

La solución es x = 3/2 e y = 3/2.

c) Despejamos la incógnita “x” de la primera ecuación:

$$x = \frac{1 - 7y}{6}$$

A continuación, se sustituye “x” en la segunda ecuación:

$$5\cdot\left(\frac{1 - 7y}{6}\right) - 4y = -9$$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

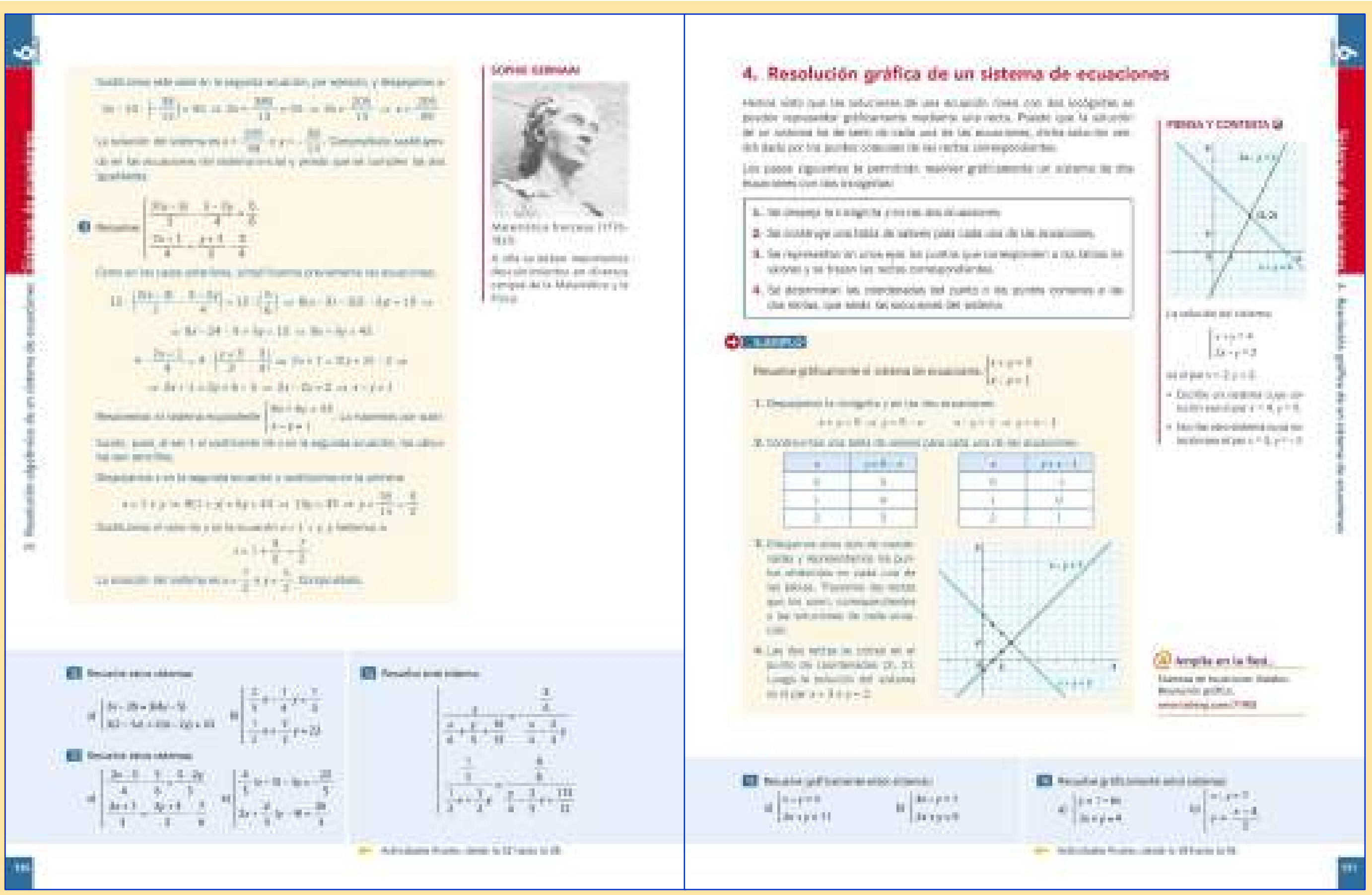
$5 - 35y - 24y = -54 \Leftrightarrow 59 = 59y \Leftrightarrow y = 1$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = \frac{1 - 7\cdot 1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1 - 7}{6} \Leftrightarrow x = -1$$

La solución es x = -1 e y = 1.

(Continúa en la página 6-41 de la guía)



3. RESOLUCIÓN... (CONT.) / 4. RESOLUCIÓN...

■ Seguiremos con el último ejemplo de resolución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Observaremos el procedimiento seguido paso a paso y lo comentaremos a través de este cuestionario:

– *¿Por qué hemos multiplicado por 12 la primera ecuación en el primer paso? ¿Y la segunda por 4?*
– *¿Por qué el sistema obtenido es equivalente al primero?*
– *¿Por qué resulta más sencillo aplicar el método de sustitución en este caso?*

Después el alumnado leerá la nota del margen, dedicado a la matemática *Sophie Germain* y, para terminar esta sección, el alumnado resolverá los sistemas propuestos en las actividades del libro.

■ El objetivo de la siguiente sección consiste en presentar un método alternativo de resolución de sistemas lineales con dos incógnitas, basado en la representación gráfica de sus ecuaciones.

En primer lugar leeremos la introducción y el procedimiento para aplicar este método:

– *¿Qué forma tendrá la representación gráfica de cada ecuación?*
– *¿Cuál será la solución del sistema?*
– *¿Puede haber más de una solución?*

■ A continuación observaremos el ejemplo resuelto, comprobando la aplicación de cada uno de los pasos indicados anteriormente. Para valorar su comprensión por parte del alumnado les formularemos estas preguntas:

– *¿Por qué despejamos la variable y?*
– *¿Cómo obtenemos las tablas de valores?*
– *¿Cuántos valores necesitamos para representar cada ecuación?*
– *¿Por qué la solución del sistema es el punto de corte de las dos rectas?*
– *¿Crees que se puede aplicar este método a cualquier sistema lineal de dos incógnitas?*

■ Un buen ejercicio para poner en práctica este método es que se plantea en el apunte del margen *Piensa y contesta.* Propondremos a los alumnos y alumnas su resolución y después lo corregiremos.

A continuación pueden seguir practicando la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones, accediendo al recurso *@Amplía en le Red.*

Por último pediremos al alumnado que conteste a las actividades propuestas en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Actividades.* Interpretar los enunciados de las actividades propuestas, que contienen términos específicos sobre álgebra.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 12, 13 y 14.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.
- *Acts. 15 y 16.* Reconocer y asimilar los procedimientos de representación gráfica, y ser capaz de reproducirlos y explicarlos.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 15 y 16.* Identificar, en la realización de las actividades, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.
- *Piensa y contesta, pág. 131.* Afrontar una situación problemática, aplicando los conocimientos adquiridos sobre resolución de sistemas de ecuaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ En la actividad de refuerzo 4 podemos continuar trabajando la resolución gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Naveguemos por Tiching

– Para completar las matemáticas con otros conocimientos, accederemos a este enlace:

http://www.tiching.com/747016

En este caso, es un portal divulgativo de diferentes aspectos y recursos de las matemáticas. El profesor les propondrá una lectura de la biografía de la matemática francesa, Sophie Germain.

A continuación les preguntaremos:

- *Anota tres rasgos de su persona que destacarías como relevantes y que te hayan producido una satisfacción o admiración.*
- *¿Qué fue lo que la conmovió y la motivó a adentrarse en el mundo de las Matemáticas? ¿De qué le servía en aquel momento?*
- *¿Por qué crees que mantuvo su identidad en secreto mientras se carteaba con el matemático K. F. Gauss?*

Conocer personajes ilustres que han ayudado al avance de la humanidad, reconocer sus dificultades y admirar su tenacidad y valentía, fomentan en nuestros alumnos claros ejemplos a tener en cuenta.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 130

12. A continuación se resuelven los sistemas indicando, en cada caso, el método empleado:

a) Simplificamos previamente las ecuaciones:

$2x-39=12y-15 \Rightarrow 2x-12y=24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-6y=12$

$6-15x=8-4y+63 \Rightarrow 15x-4y=-65$

Resolvemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x-6y=12 \\ 15x-4y=-65 \end{cases}$$

Utilizando el método de REDUCCIÓN DOBLE, escogemos la incógnita “x” para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 15 y la segunda ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 15x-90y=180 \\ 15x-4y=-65 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-86y=245$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y=-245/86$

Para calcular el valor de la otra incógnita, x, volviendo al sistema inicial, se igualan los coeficientes de y, multiplicando la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 3:

$$\begin{cases} 2x-12y=24 \\ 45x-12y=-195 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-43x=219$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x=-219/43$

La solución es x = -219/43 e y = -245/86.

b) Simplificamos previamente las ecuaciones:

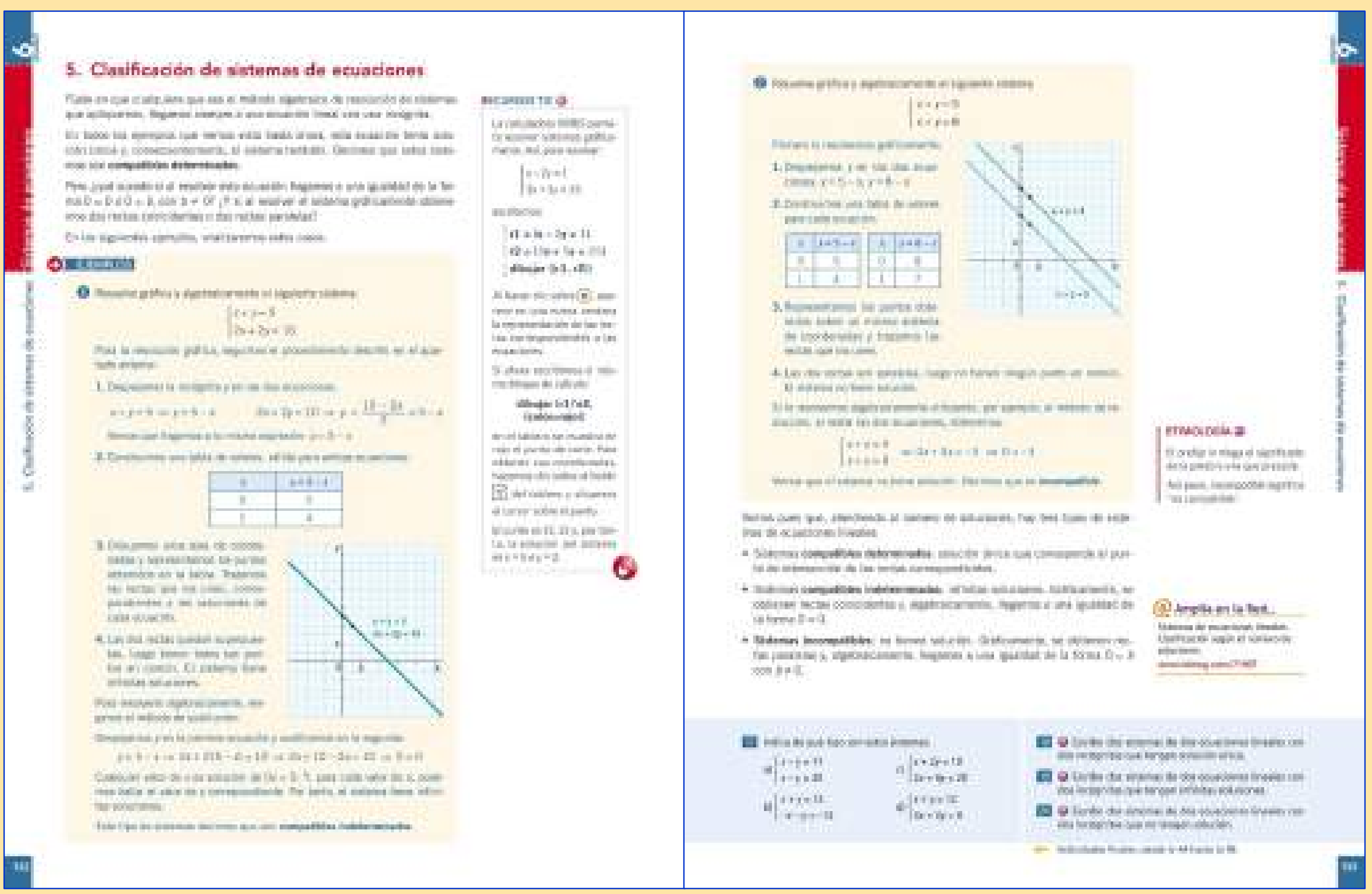
$$12\cdot\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y\right)=12\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow 8x-3y=4$$

$$6\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{3}y\right)=6\cdot 23 \Rightarrow 3x+10y=138$$

Resolvemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 8x-3y=4 \\ 3x+10y=138 \end{cases}$$

(Continúa en la página 6-43 de la guía)


5. Clasificación de sistemas de ecuaciones

5. CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS DE EC.

■ El objetivo básico de esta sección es el estudio de los distintos tipos de sistemas de ecuaciones atendiendo al número de soluciones que tengan.

En primer lugar los alumnos y alumnas leerán la introducción, donde se presentan los casos particulares que analizaremos detenidamente a continuación:

– *¿Qué significa que un sistema sea compatible determinado?*

■ Después examinaremos el primer ejemplo, en el que se resolverá el primer caso particular que nos podemos encontrar al resolver sistemas de ecuaciones.

Analizaremos los pasos seguidos para la resolución gráfica y algebraica y preguntaremos al alumnado:

– *¿Puede tener más de una solución un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?*

– *¿Cómo se denominan los sistemas con infinitas soluciones?*

– *¿Cómo será la representación gráfica de su solución? Razona tu respuesta.*

– *¿A qué igualdad llegaremos si lo resolvemos algebráicamente?*

■ Continuaremos observando detenidamente el segundo ejemplo propuesto, y lanzaremos estos retos a los alumnos:

– *¿Qué ocurre cuando al representar gráficamente un sistema de ecuaciones obtenemos dos rectas paraleras? Razona tu respuesta.*

– *¿Cómo denominamos a estos sistemas?*

– *¿Podemos resolverlos por el método algebraico?*

El alumnado prestará atención a la nota *Etimología*, donde se explica por qué estos sistemas se denominan “incompatibles”, a partir del origen de dicho término.

■ A continuación leeremos las conclusiones obtenidas de los ejemplos analizados, donde se describen los tipos de sistemas en base a su número de soluciones:

– *¿Tiene siempre solución un sistema de ecuaciones?*

– *¿Qué obtenemos en la resolución gráfica de un sistema compatible indeterminado?*

– *¿A qué igualdad llegamos al resolver algebraicamente un sistema incompatible?*

– *¿Cómo se llaman los sistemas con solución única?*

■ El alumnado puede acceder ahora al recurso *@Amplía en la Red,* para completar estos conceptos.

En este punto pediremos a los alumnos y alumnas que resuelvan las actividades propuestas en el libro.

Por último el docente indicará a los alumnos cómo se pueden resolver sistemas mediante la calculadora *Wiris.*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Etimología, pág. 133.* Usar el vocabulario adecuado y aprender sobre el origen etimológico de palabras clave del tema.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Recursos TIC, pág. 132.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la calculadora WIRIS, con la que se puede resolver sistemas gráficamente.

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 17.* Aplicar el proceso aprendido de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 18, 19 y 20.* Reflexionar antes de resolver las actividades y tomar decisiones de forma razonada, aplicando los conocimientos y las estrategias aprendidas de manera sistemática.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 servirá para poner en práctica los métodos de resolución aprendidos en el contexto de un problema.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para trabajar en clase la clasificación de los sistemas de ecuaciones, podemos acceder al siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747017

Este recurso propone diferentes ejercicios interactivos. Antes de iniciar los ejercicios, les preguntaremos, sin que consulten al libro:

- *¿Podrías recordar cómo es la ecuación a la que llegamos al resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?*

Al finalizar, les pediremos que comprueben los resultados. Si el resultado es erróneo, facilita el desarrollo del ejercicio, con lo que el alumno puede comprobar por sí mismo dónde ha fallado. Pueden imprimir los ejercicios con el desarrollo completo.

Es un recurso que promueve la autonomía en los aprendizajes, ya que ellos pueden repasar la teoría, volver a repetir el ejercicio o repasar alguna parte del procedimiento cuando tengan dudas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 133

17. Clasificamos los sistemas resolviéndolos:

a) MÉTODO DE IGUALACIÓN: Despejamos la incógnita “x” de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 11 + y \\ x = 20 + y \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$11 + y = 20 + y$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$0y = 9 \Leftrightarrow 0 = 9$$

Vemos que el sistema no tiene solución. Por lo tanto el sistema es **INCOMPATIBLE**.

b) MÉTODO DE REDUCCIÓN: Ya tienen el mismo coeficiente, pero de signo opuesto, por lo que sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$$0x + 0y = 0$$

De donde:

$$0 = 0$$

Se obtiene que para cualquier valor de x o de y se cumple la ecuación. Por lo tanto, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

c) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN: Despejamos la incógnita “x” de la primera ecuación:

$$x = 10 - 2y$$

A continuación, se sustituye “x” en la segunda ecuación:

$$2 \cdot (10 - 2y) + 4y = 20$$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$$20 - 4y + 4y = 20 \Leftrightarrow 0y = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Se obtiene que para cualquier valor de y se cumple la ecuación. Por lo tanto, el sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**.

d) MÉTODO DE REDUCCIÓN: Escogemos la incógnita “x” para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación se mantiene igual:

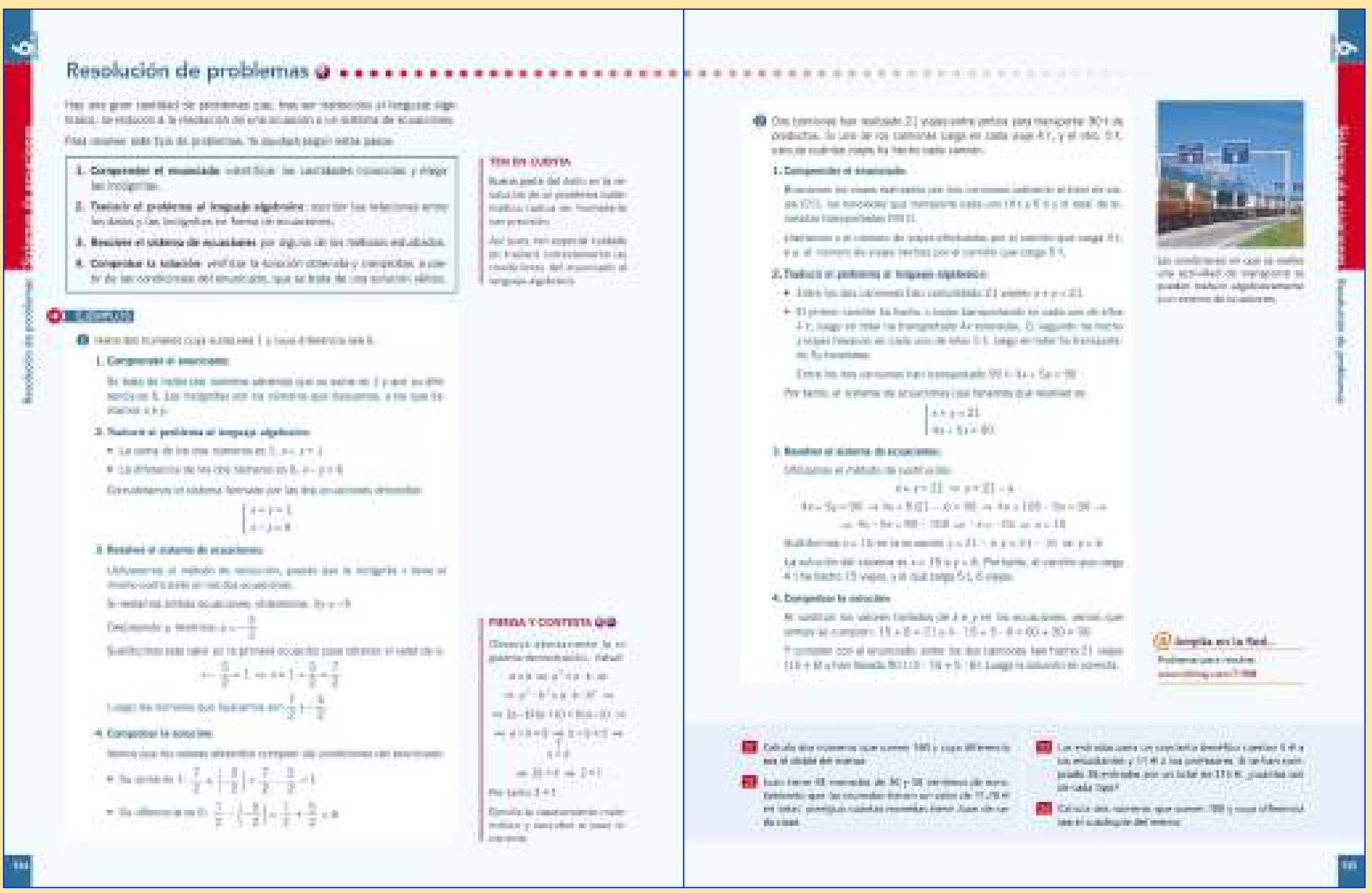
$$\begin{cases} 3x + 3y = 36 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo:

$$0x + 0y = 36$$

Vemos que el sistema es **INCOMPATIBLE**.

(Continúa en la página 6-45 de la guía)



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

■ El objetivo de esta sección es comprobar la utilidad de los sistemas de ecuaciones a la hora de resolver diversos tipos de problemas.

Para empezar leeremos la introducción y el procedimiento a seguir para resolver problemas mediante sistemas.

El docente hará hincapié en la trascendencia del segundo paso, tal como indica la nota al margen *Ten en cuenta.*

■ A continuación analizaremos el primer ejemplo, identificando los pasos indicados anteriormente y destacando la importancia de comprobar siempre las soluciones:

– *¿Cómo hemos obtenido las dos ecuaciones del sistema?*

– *¿Podríamos haber traducido la segunda condición como $y - x = 0$? ¿Habríamos llegado al mismo resultado?*

– *¿Qué tipo de sistema de ecuaciones hemos obtenido?*

– *¿Hubieras elegido el mismo método para resolver el sistema de ecuaciones? Razona tu respuesta.*

■ Después observaremos el segundo ejemplo y formularemos las siguientes preguntas al alumnado:

– *¿Cómo identificamos las incógnitas?*

– *¿En qué parte del enunciado se establecen las condiciones para construir cada ecuación?*

– *¿Crees que el método elegido para resolver el sistema es el más adecuado a la vista de las ecuaciones?*

– *¿Qué otro método de resolución podríamos haber aplicado?*

– *¿Cuál es el último paso a la hora de resolver este tipo de problemas?*

– *¿Cómo comprobamos que las soluciones verifican el problema propuesto?*

Los alumnos leerán ahora la nota del margen, en la que se destaca la utilidad de los sistemas de ecuaciones a la hora de resolver problemas de la vida cotidiana.

■ Una vez comprendida la lógica de resolución de este tipo de problemas, el docente propondrá un reto a los alumnos y alumnas. Para ello leeremos el epígrafe *Piensa y contesta,* en el margen derecho de la página 134, y pediremos al alumnado que lo resuelva por parejas.

A continuación, los alumnos y alumnas practicarán la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones, accediendo al recurso *@Amplía en la Red.*

Por último pueden resolver los ejercicios propuestos, en los que pondrán a prueba su destreza aplicando el procedimiento descrito en los ejemplos.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 21 a 24.* Leer e interpretar los enunciados procesando los datos de manera ordenada.

APRENDER A APRENDER

- *Piensa y contesta, pág. 134.* Analizar situaciones problemáticas, identificar los procesos y aprender de los errores observados.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 22 y 23.* Afrontar la situación problemática propuesta, aplicando los conocimientos adquiridos.
- *Resolución de problemas, pág. 134*. Observar el planteamiento y la resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas, así como el orden de las operaciones.
- *Piensa y contesta, pág. 134.* Afrontar una situación problemática, aplicando los conocimientos adquiridos y extrayendo conclusiones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ En las actividades de ampliación encontraremos diferentes situaciones problemáticas en las que hacer uso del lenguaje algebráico y la resolución de sistemas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos ampliar la información sobre la resolución de problemas con sistemas de ecuaciones entrando en este enlace:

http://www.tiching.com/747018

Esta dirección nos dará acceso a una página interactiva dónde nuestros alumnos podrán repasar la metodología a seguir. Les pediremos que observen el ejemplo y que lo comparen con el libro.

Para que el aprendizaje pueda resultar al mismo tiempo un proceso lúdico y formativo, propondremos a nuestros alumnos que realicen un trabajo en equipo, completando las actividades que hay al final de la página y que son una propuesta de investigación en grupo.

La evaluación será grupal e individual, para ello les indicaremos nuestras pautas de observación:

- *Cooperación en el trabajo grupal.*
- *Implicación en el desarrollo de la actividad.*
- *Respeto por las aportaciones de otros.*
- *Mantener clima de trabajo en el aula y cumplir con los tiempos asignados.*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 134

Para empezar…

El paso incorrecto es el siguiente:

$$(a-b)(a+b)=b(a-b)\Rightarrow a+b=b$$

Ya que, como a = b, entonces a – b = 0, por lo que no se puede dividir entre a – b.

Página 135

21. Tomamos como incógnitas x: el número mayor, y: el número menor. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases}x+y=160\\x-y=2y\end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases}x+y=160\\x-3y=0\end{cases}$$

A continuación resolvemos el sistema utilizando el método de REDUCCIÓN: Como la incógnita x ya tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$$4y=160$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$y=40$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$$x+40=160 \Leftrightarrow x=120$$

La solución del sistema es x = 120 e y = 40. Por tanto, los números buscados son 120 y 40.

22. Tomamos como incógnitas x: el número de monedas de 20 céntimos, y: el número de monedas de 50 céntimos. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases}x+y=48\\0,20x+0,50y=11,70\end{cases}$$

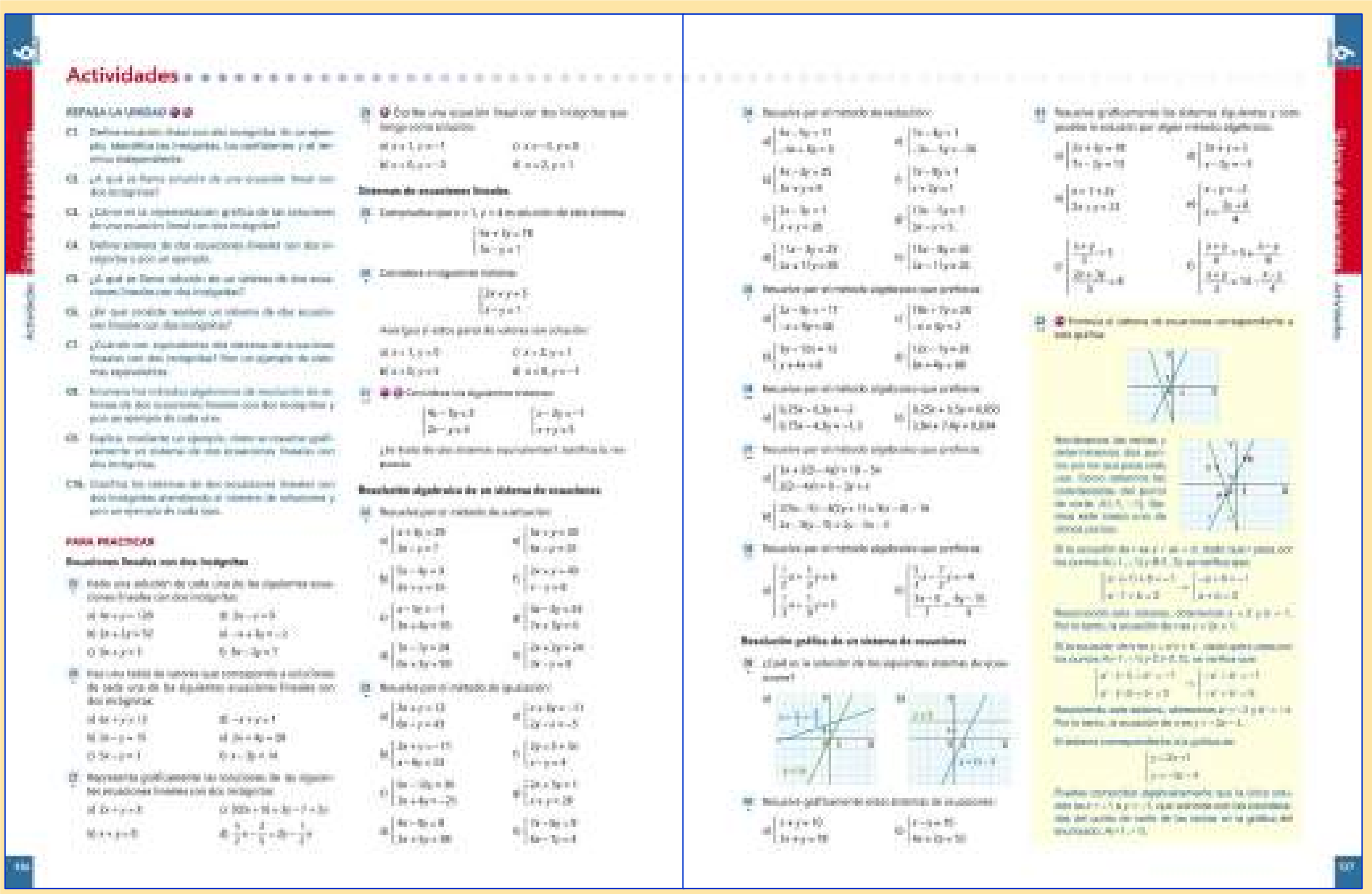
A continuación resolvemos el sistema utilizando el método de SUSTITUCIÓN: Despejamos la incógnita “x” de la primera ecuación, obteniendo:

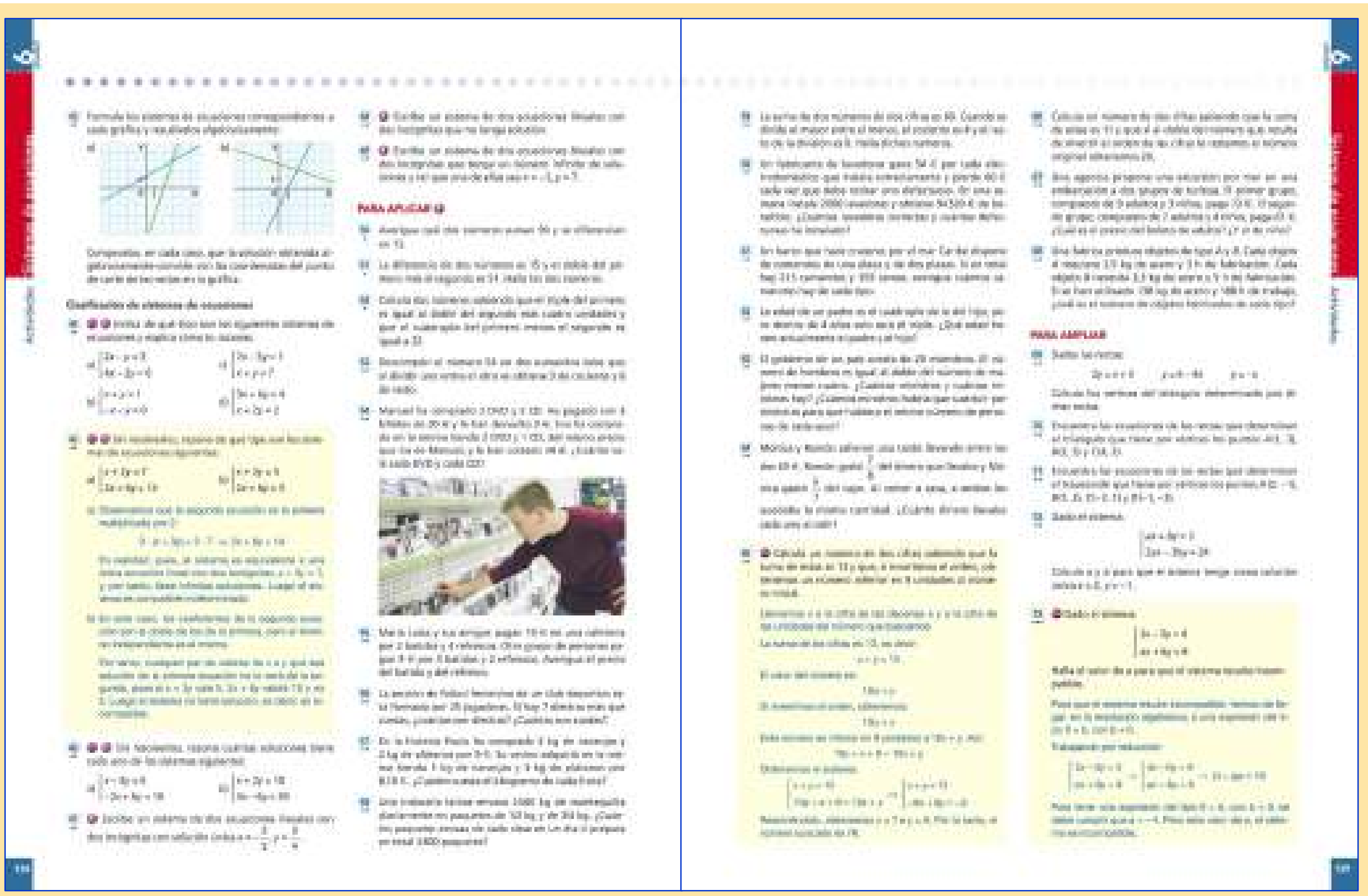
$$x=48-y$$

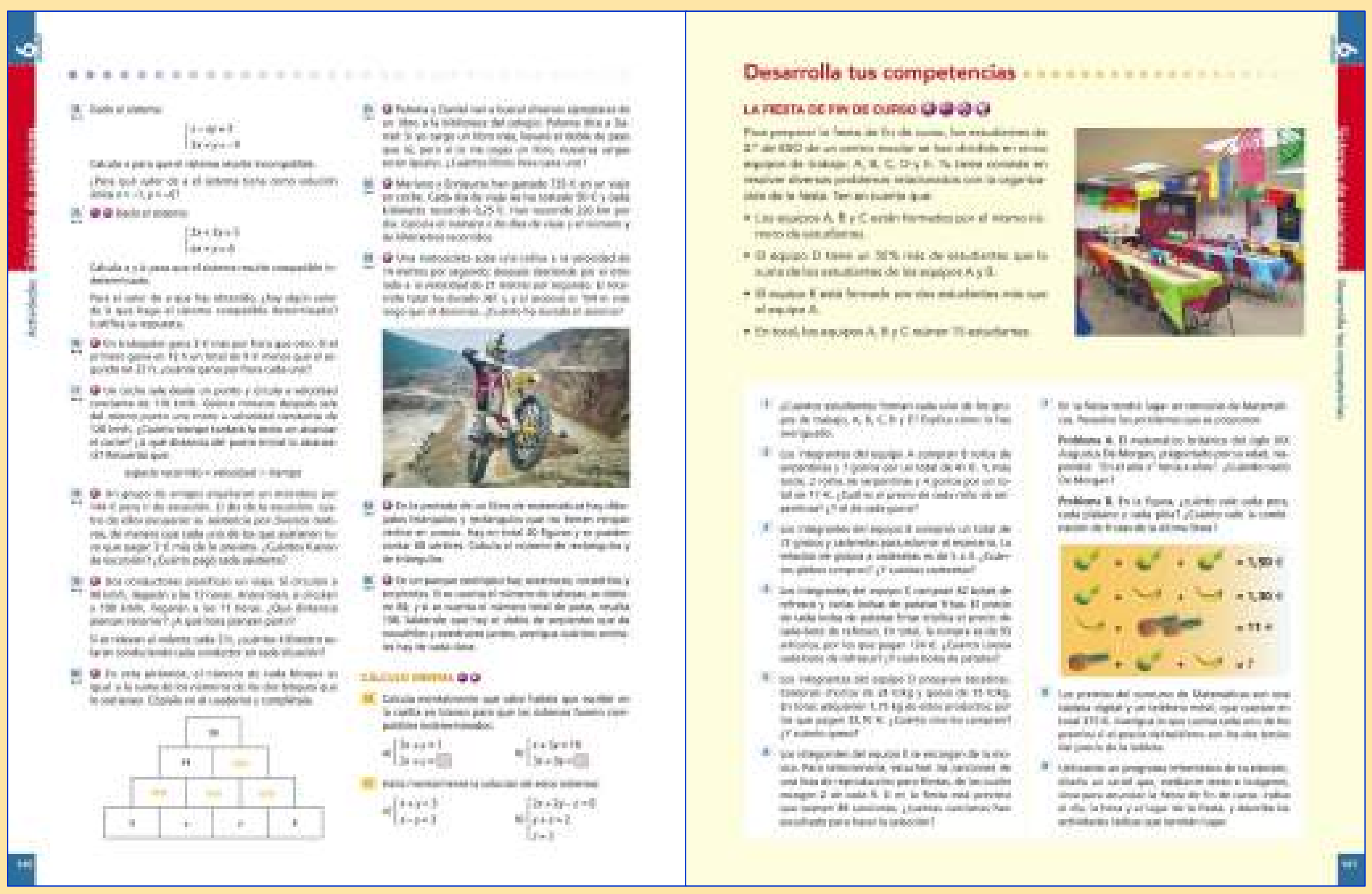
Se sustituye ahora “x” en la segunda ecuación:

$$0,20\cdot(48-y)+0,50y=11,70$$

(Continúa en la página 6-45 de la guía)

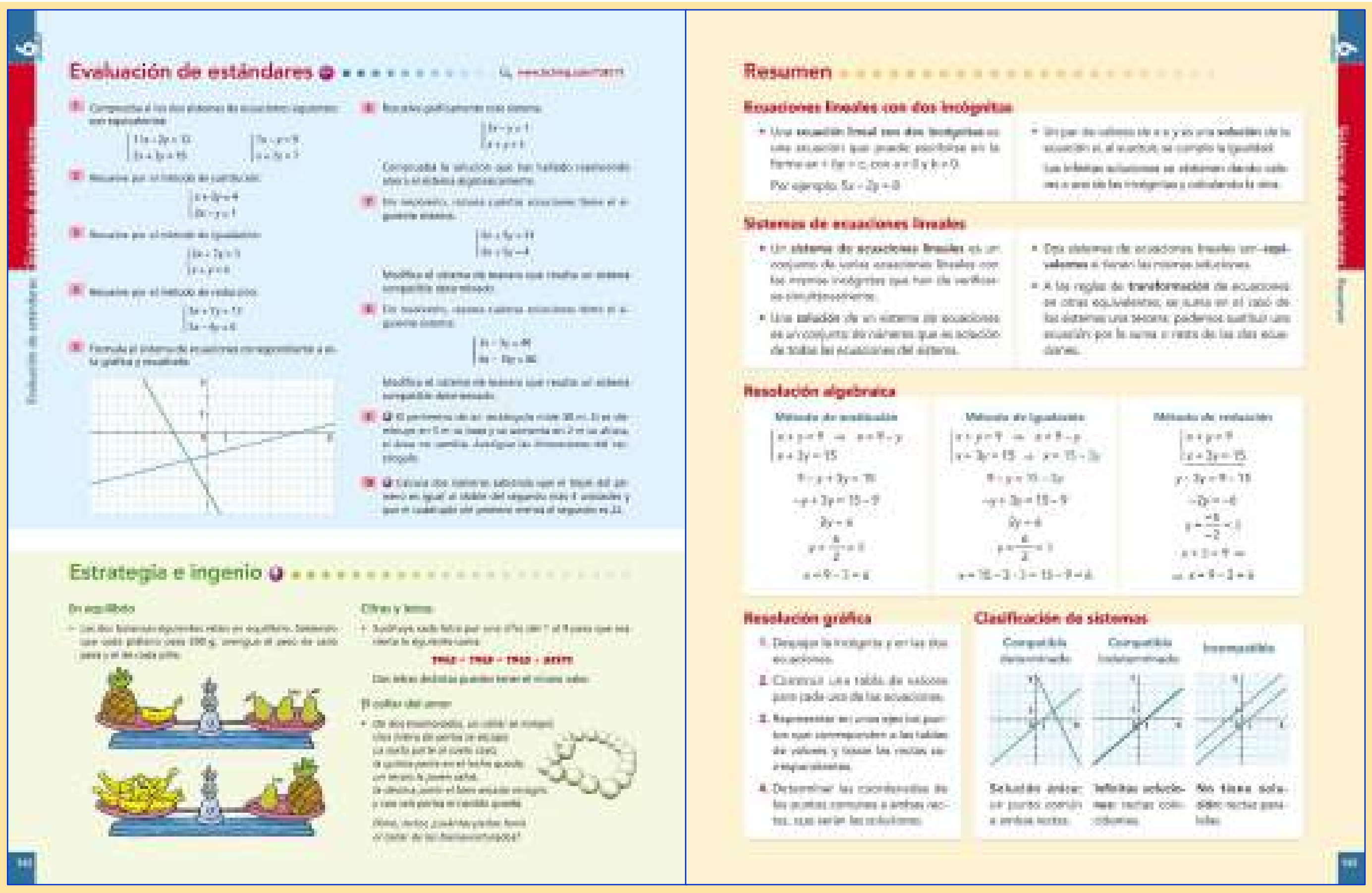

Actividades





Desarrolla tus competencias

LA FIESTA DE FIN DE CURSO



Evaluación de estándares

Estrategia e ingenio

Resumen

Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Sistemas de ecuaciones lineales

Resolución algebraica

Resolución gráfica

Clasificación de sistemas

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Repasa la unidad, pág. 136*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.

■ *Acts. 31, 44, 45, 46 y 75. Desarrolla tus competencias, pág. 141*. Leer y comprender el estímulo y los enunciados y expresar por escrito argumentos propios de manera adecuada a la actividad.

APRENDER A APRENDER

■ *Repasa la unidad, pág. 136.* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, y ser consciente de las propias capacidades y carencias.

■ *Acts. 31, 44, 46 y 75.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

■ *Acts. 42, 45, 65 y 73.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas, buscando una coherencia global al ejecutar el plan de resolución de una actividad o un problema.

■ *Cálculo mental, pág. 140.* Aprender estrategias y técnicas de cálculo mental, adquiriendo confianza.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 141.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.

■ *Evaluación de estándares, pág. 142*. Ser consciente de las propias capacidades en el tema estudiado.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Para aplicar, pág. 138.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, aplicando los conocimientos adquiridos.

■ *Cálculo mental, pág. 140.* Elegir entre diferentes alternativas y ser capaz de planificar mentalmente la resolución.

■ *Acts. 28, 47, 48 y 49.* Afrontar una situación problemática, aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo del tema, mostrando criterio propio al resolverla.

■ *Acts. 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84 y 85.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, evaluando las acciones realizadas.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 141. Evaluación de estándares, pág. 142, acts. 9 y 10.* Buscar las soluciones de forma creativa e imaginativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 141.* Estimular la competencia para organizar actividades grupales y llevarlas a término.

ACTIVIDADES FINALES

■ En la sección de *Actividades* el alumnado se enfrentará a una colección de ejercicios en orden creciente de dificultad, con el fin de afianzar todos los contenidos del tema, desde un punto de vista tanto teórico como práctico.

■ La sección *Desarrolla…* persigue fomentar la autonomía del alumnado y la utilización de distintos recursos para resolver un planteamiento dado. A través de un caso práctico, el alumno ejercitará su capacidad de análisis y su actitud proactiva en la búsqueda de soluciones, además de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica.

■ Con la sección de *Evaluación…* se pretende que los alumnos valoren el nivel de conocimientos alcanzados. Propone una serie de actividades que repasan la unidad de un modo completo y práctico.

■ La sección *Estrategia…* propone una serie de acertijos relacionados con los conceptos trabajados durante el tema, con el fin de que el alumnado desarrolle su imaginación y adquiera destreza relacionando ideas.

■ La finalidad de la sección *Resumen* es recopilar los contenidos fundamentales de la unidad en un mapa conceptual que destaque las relaciones entre los conceptos y los procedimientos estudiados.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 136

C1. Una ecuación es lineal con dos incógnitas se puede escribirse en la forma:

$$ax + by = c\text{, con } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0$$

donde x e y son las incógnitas y a, b y c son números conocidos. A modo de ejemplo, en la expresión

$$7x - 2y = 3$$

las incógnitas son x e y, los coeficientes son 7 y -2 y, el término independiente, es 3.

C2. Una solución de una ecuación lineal con dos incógnitas es un par de valores, uno de cada variable, que, sistituidos en la ecuación, la transforman en una igualdad numérica.

C3. Al despejar la incógnita “y” de una ecuación lineal con dos incógnitas, se obtiene la expresión de una función afín, cuya gráfica es una recta. Por tanto, si se representan los pares de valores que son solución de la ecuación, se obtiene una recta.

C4. Un sistema de dos ecuaciones lintales con dos incógnitas es un conjunto de dos ecuaciones lineales con las mismas dos incógnitas que deben verificarse simultáneamente. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} x+y=36 \\ 4x+11y=214 \end{cases}$$

C5. Se denomina solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a un par de números que cumpla las dos ecuaciones.

C6. Resolver un sistema de ecuaciones lineales es hallar todas sus soluciones.

C7. Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ x-y=6 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} 3x+2y=4 \\ 5x=16 \end{cases}$$

C8. Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas son:

– **Método de Sustitución**. A modo de ejemplo, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y=48 \\ 2x+5y=117 \end{cases}$$

A continuación resolvemos el sistema utilizando el método de SUSTITUCIÓN: Despejamos la incógnita "x" de la primera ecuación, obteniendo:

$x=48-y$

Se sustituye ahora "x" en la segunda ecuación:

$2\cdot(48-y)+5y=117$

Resolvemos ahora la ecuación:

$96-2y+5y=117 \Rightarrow 3y=21 \Rightarrow y=7$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$x=48-7 \Leftrightarrow x=41$

La solución del sistema es x = 41 e y = 7.

– **Método de Igualación**. A modo de ejemplo, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y=36 \\ 4x+11y=214 \end{cases}$$

A continuación resolvemos el sistema utilizando el método de IGUALACIÓN: Despejamos la incógnita "x" de las dos ecuaciones, obteniendo:

$$\begin{cases} x=36-y \\ x=\dfrac{214-11y}{4} \end{cases}$$

Igualando las dos ecuaciones obtenidas:

$$36-y=\frac{214-11y}{4}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$144-4y=214-11y \Rightarrow 7y=70 \Rightarrow y=10$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$x=36-10 \Leftrightarrow x=26$

La solución del sistema es x = 26 e y = 10.

– **Método de Reducción**. A modo de ejemplo, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y=180 \\ x-y=4y \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x+y=180 \\ x-5y=0 \end{cases}$$

A continuación resolvemos el sistema utilizando el método de REDUCCIÓN: Como la incógnita x ya tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$6y=180$

Resolvemos ahora la ecuación: $y=30$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$x+30=180 \Leftrightarrow x=150$

La solución del sistema es x = 150 e y = 30. Por tanto, los números buscados son 150 y 30.

C9. Ejercicio libre. A modo de ejemplo, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x-y=7 \\ x-2y=-4 \end{cases}$$

Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

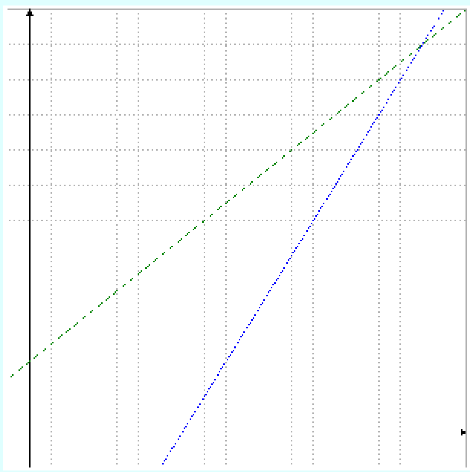
$$y=x-7 \qquad y=\frac{x+4}{2}$$

Construimos una tabla de valores para cada ecuación:

x	$y=x-7$
0	-7
1	-6
2	-5

x	$y=\frac{x+4}{2}$
-2	2
0	1
2	3

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (18, 11). Por lo tanto, la solución del sistema es x = 18 e y = 11.

C10. Los sistemas, según el número de soluciones, se clasifican en:

– Sistemas compatibles determinados: solución única que corresponde al punto de intersección de las rectas correspondientes. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 7 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

– Sistemas compatibles indeterminados: infinitas soluciones. Gráficamente, se obtienen rectas coincidentes y, algebraicamente, llegamos a una igualdad de la forma 0 = 0. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} 6x - 2y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

– Sistemas incompatibles: no tienen solución. Gráficamente, se obtienen rectas paralelas y, algebraicamente, llegamos a una igualdad de la forma 0 = b, con $b \neq 0$. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

25. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $x = 10; \quad y = 80$

b) $x = 8; \quad y = 8$

c) $x = 1; \quad y = 2$

d) $x = 7; \quad y = 5$

e) $x = 5; \quad y = 1$

f) $x = 3; \quad y = 1$

26. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $y = 12 - 6x$

Para x = 0, resulta y = 12.

Para x = 1, resulta y = 6.

Para x = 2, resulta y = 0.

Para x = 3, resulta y = -6.

Por lo tanto, la tabla de valores sería:

x	0	1	2	3
y	12	6	0	-6

b) $y = 3x - 15$

Para x = 0, resulta y = -15.

Para x = 1, resulta y = -12.

Para x = 2, resulta y = -9.

Para x = 3, resulta y = -6.

Por lo tanto, la tabla de valores sería:

x	0	1	2	3
y	-15	12	-9	-6

c) $y = 5x - 3$

Para x = 0, resulta y = -3.

Para x = 1, resulta y = 2.

Para x = 2, resulta y = 7.

Para x = 3, resulta y = 12.

Por lo tanto, la tabla de valores sería:

x	0	1	2	3
y	-3	2	7	12

d) $y = x + 1$

Para x = 0, resulta y = 1.

Para x = 1, resulta y = 2.

Para x = 2, resulta y = 3.

Para x = 3, resulta y = 4.

Por lo tanto, la tabla de valores sería:

x	0	1	2	3
y	1	2	3	4

e) $y = 7 - x/2$

Para x = 0, resulta y = 7.

Para x = 2, resulta y = 6.

Para x = 4, resulta y = 5.

Para x = 6, resulta y = 4.

Por lo tanto, la tabla de valores sería:

x	0	2	4	6
y	7	6	5	4

f) $y = \dfrac{x - 14}{3}$

Para x = 2, resulta y = -4.

Para x = 5, resulta y = -3.

Para x = 8, resulta y = -2.

Para x = 11, resulta y = -1.

Por lo tanto, la tabla de valores sería:

x	2	5	8	11
y	-4	-3	-2	-1

27. A continuación se representan las soluciones de cada ecuación:

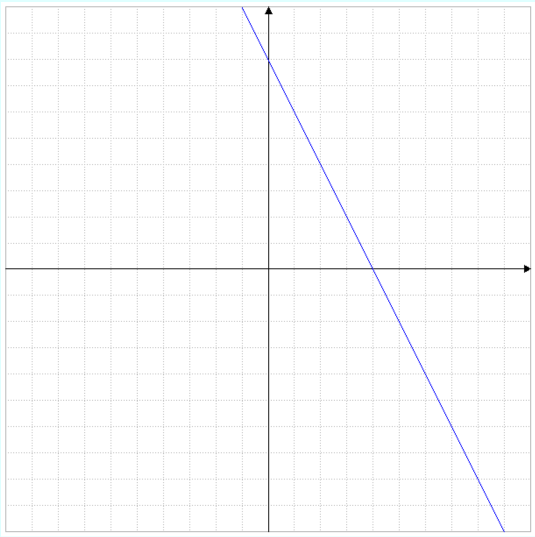
a) Despejamos la incógnita *y*:

$y = 8 - 2x$.

A continuación formamos la tabla de valores, dando valores a *x* y calculando los correspondientes de *y*:

x	0	1	2
y	8	6	4

Cada par de valores de la tabla representa un punto en el plano, por lo que, representando los puntos obtenidos y trazando la recta que los une, quedaría representada como:



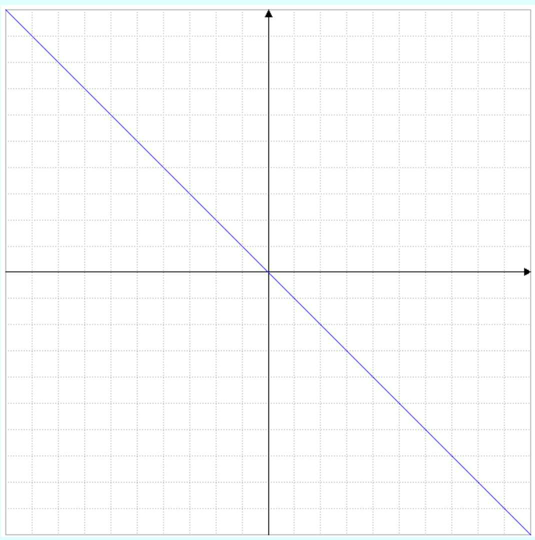
b) Despejamos la incógnita *y*:

$y = -x$

A continuación formamos la tabla de valores, dando valores a *x* y calculando los correspondientes de *y*:

x	0	1	2
y	0	-1	-2

Cada par de valores de la tabla representa un punto en el plano, por lo que, representando los puntos obtenidos y trazando la recta que los une, quedaría representada como:



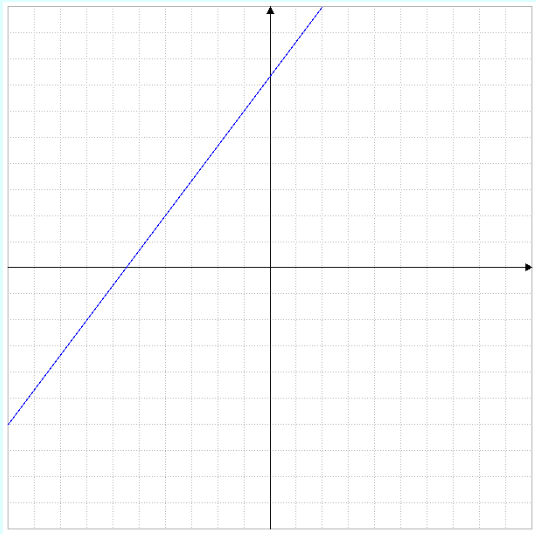
c) Despejamos la incógnita y:

$$y = \frac{4x + 22}{3}$$

A continuación formamos la tabla de valores, dando valores a *x* y calculando los correspondientes de *y*:

x	-4	-1	2
y	2	6	10

Cada par de valores de la tabla representa un punto en el plano, por lo que, representando los puntos obtenidos y trazando la recta que los une, quedaría representada como:



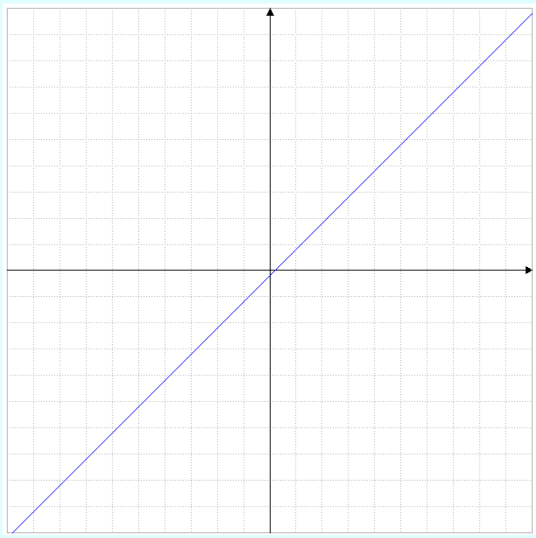
d) Despejamos la incógnita *y*:

$$y = \frac{5x - 1}{5}$$

A continuación formamos la tabla de valores, dando valores a *x* y calculando los correspondientes de *y*:

x	0	1	2
y	-1/5	4/5	9/5

Cada par de valores de la tabla representa un punto en el plano, por lo que, representando los puntos obtenidos y trazando la recta que los une, quedaría representada como:



28. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) $2x + 3y = -1$

b) $-5x + 7y = -21$

c) $\frac{x}{3} - \frac{2}{5}y = -1$

d) $3x - 4y = 2$

29. Sustituyendo en el sistema de ecuaciones las incógnitas por los valores dados se obtiene que sí es solución, ya que:

$$\begin{cases} 6\cdot 1+3\cdot 4=18 \\ 5\cdot 1-4=1 \end{cases}$$

30. Sustituyendo en el sistema de ecuaciones las incógnitas por los valores dados en cada apartado, se obtiene:

a) No es solución, ya que:

$$\begin{cases} 2\cdot 1+0=2\neq 5 \\ 1-0=1 \end{cases}$$

b) No es solución, ya que:

$$\begin{cases} 2\cdot 0+5=5 \\ 0-5=-5\neq 1 \end{cases}$$

c) Sí es solución, ya que:

$$\begin{cases} 2\cdot 2+1=5 \\ 2-1=1 \end{cases}$$

d) No es solución, ya que:

$$\begin{cases} 2\cdot 0-1=-1\neq 5 \\ 0-(-1)=1 \end{cases}$$

31. En primer lugar, se sustituye la primera ecuación por la resta de ésta menos la segunda:

$$\begin{cases} 2x-4y=-2 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

A continuación, se divide la primera ecuación entre 2:

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

Por último, se sustituye la segunda ecuación por la resta de ésta menos la primera:

$$\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+y=5 \end{cases}$$

Se llega al sistema indicado, por lo que, se puede afirmar que sí son equivalentes.

32. Siguiendo los pasos del método de sustitución, se resuelven:

a) Despejamos la incógnita "x" de la primera ecuación:

$x=29-3y$

A continuación, se sustituye "x" en la segunda ecuación:

$3\cdot(29-3y)-y=7$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$87-9y-y=7\Leftrightarrow 80=10y\Leftrightarrow y=8$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$x=29-3\cdot 8\Leftrightarrow x=5$

La solución es x = 5 e y = 8.

b) Despejamos la incógnita "y" de la segunda ecuación:

$y=35-2x$

A continuación, se sustituye "y" en la primera ecuación:

$5x-4\cdot(35-2x)=3$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$5x-140+8x=3\Leftrightarrow 13x=143\Leftrightarrow x=11$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y=35-2\cdot 11\Leftrightarrow y=13$

La solución es x = 11 e y = 13.

c) Despejamos la incógnita "x" de la primera ecuación:

$x=-1+5y$

A continuación, se sustituye "x" en la primera ecuación:

$3\cdot(-1+5y)+4y=35$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$-3+15y+4y=35\Leftrightarrow 19y=38\Leftrightarrow y=2$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$x=-1+5\cdot 2\Leftrightarrow x=9$

La solución es x = 9 e y = 2.

d) Despejamos la incógnita "y" de la segunda ecuación y simplificamos la expresión obtenida:

$y=33-2x$

A continuación, se sustituye "y" en la primera ecuación:

$3x-7\cdot(33-2x)=24$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$3x-231+14x=24\Leftrightarrow 17x=255\Leftrightarrow x=15$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y=33-2\cdot 15\Leftrightarrow y=3$

La solución es x = 15 e y = 3.

e) Despejamos la incógnita "y" de la primera ecuación:

$y=30-5x$

A continuación, se sustituye "y" en la segunda ecuación:

$6x-(30-5x)=25$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$6x-30+5x=25\Leftrightarrow 11x=55\Leftrightarrow x=5$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y=30-5\cdot 5\Leftrightarrow y=5$

La solución es x = 5 e y = 5.

f) Despejamos la incógnita "y" de la segunda ecuación:

$y = x - 8$

A continuación, se sustituye "y" en la primera ecuación:

$2x + (x - 8) = 40$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$2x + x - 8 = 40 \Leftrightarrow 3x = 48 \Leftrightarrow x = 16$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y = 16 - 8 \Leftrightarrow y = 8$

La solución es x = 16 e y = 8.

g) Despejamos la incógnita "y" de la primera ecuación y simplificamos la expresión obtenida:

$y = 2x - 12$

A continuación, se sustituye "y" en la segunda ecuación:

$7x + 3 \cdot (2x - 12) = 4$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$7x + 6x - 36 = 4 \Leftrightarrow 13x = 40 \Leftrightarrow x = 40/13$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y = 2 \cdot (40/13) - 12 \Leftrightarrow y = -76/13$

La solución es x = 40/13 e y = -76/13.

h) Despejamos la incógnita "y" de la segunda ecuación:

$y = 3x - 8$

A continuación, se sustituye "y" en la primera ecuación:

$2x + 2 \cdot (3x - 8) = 12$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$2x + 6x - 16 = 24 \Leftrightarrow 8x = 40 \Leftrightarrow x = 5$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y = 3 \cdot 5 - 8 \Leftrightarrow y = 7$

La solución es x = 5 e y = 7.

33. Siguiendo los pasos del método de igualación, se resuelven:

a) Despejamos la incógnita "y" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 12 - 3x \\ y = 8x - 43 \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$12 - 3x = 8x - 43$

Resolvemos ahora la ecuación:

$55 = 11x \Leftrightarrow x = 5$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y = 8 \cdot 5 - 43 \Leftrightarrow y = -3$

La solución es x = 5 e y = -3.

b) Despejamos la incógnita "x" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-11 - y}{2} \\ x = 53 + 6y \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{-11 - y}{2} = 53 + 6y$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$-11 - y = 106 + 12y \Leftrightarrow -117 = 13y \Leftrightarrow y = -9$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$x = 53 + 6 \cdot (-9) \Leftrightarrow x = -1$

La solución es x = -1 e y = -9.

c) Despejamos la incógnita "y" de las dos ecuaciones y simplificamos la expresión obtenida de la primera:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{5 - x}{2} \\ y = \dfrac{-25 - 3x}{4} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$-\frac{5 - x}{2} = \frac{-25 - 3x}{4}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$20 - 4x = 50 + 6x \Leftrightarrow -30 = 10x \Leftrightarrow x = -3$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$$y = -\frac{5 - (-3)}{2} \Leftrightarrow y = -4$$

La solución es x = -3 e y = -4.

d) Despejamos la incógnita "x" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \dfrac{9y}{4} \\ x = \dfrac{38 - 5y}{2} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{9y}{4} = \frac{38 - 5y}{2}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$9y = 76 - 10y \Leftrightarrow 19y = 76 \Leftrightarrow y = 4$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = \frac{9 \cdot 4}{4} \Leftrightarrow x = 9$$

La solución es x = 9 e y = 4.

e) Despejamos la incógnita “x” de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = -11 - 6y \\ x = 2y + 5 \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$-11 - 6y = 2y + 5$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$-16 = 8y \Leftrightarrow y = -2$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = 2 \cdot (-2) + 5 \Leftrightarrow x = 1$$

La solución es x = 1 e y = -2.

f) Despejamos la incógnita “y” de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = \dfrac{5 + 3x}{2} \\ y = x - 4 \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{5 + 3x}{2} = x - 4$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$5 + 3x = 2x - 8 \Leftrightarrow x = -13$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$$y = -13 - 4 \Leftrightarrow y = -17$$

La solución es x = -13 e y = -17.

g) Despejamos la incógnita “x” de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - 3y}{2} \\ x = 28 - y \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{1 - 3y}{2} = 28 - y$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$1 - 3y = 56 - 2y \Leftrightarrow -55 = y$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = 28 - (-55) \Leftrightarrow x = 83$$

La solución es x = 83 e y = -55.

h) Despejamos la incógnita “x” de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \dfrac{9 + 6y}{7} \\ x = \dfrac{4 + 7y}{6} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{9 + 6y}{7} = \frac{4 + 7y}{6}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$54 + 36y = 28 + 49y \Leftrightarrow 26 = 13y \Leftrightarrow y = 2$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = \frac{4 + 7 \cdot 2}{6} \Leftrightarrow x = 3$$

La solución es x = 3 e y = 2.

Página 137

34. Siguiendo los pasos del método de reducción, se resuelven:

a) Escogemos la incógnita “y” para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 6 y la segunda por 5:

$$\begin{cases} 54x - 30y = 102 \\ -20x + 30y = 0 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$$34x = 102$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$x = 102 / 34 \Leftrightarrow x = 3$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$$-4 \cdot 3 + 6y = 0 \Leftrightarrow 6y = 12 \Leftrightarrow y = 2$$

La solución es x = 3 e y = 2.

b) Escogemos la incógnita “y” para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la segunda ecuación por 3 y la primera ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 25 \\ 9x + 3y = 27 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$$13x = 52$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$x = 52 / 13 \Leftrightarrow x = 4$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita y:

$3 \cdot 4 + y = 9 \Leftrightarrow y = 9 - 12 \Leftrightarrow y = -3$

La solución es x = 4 e y = -3.

c) Escogemos la incógnita "x" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la segunda ecuación por -2 y la segunda ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -2x - 2y = -56 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-5y = -55$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = -55 / -5 \Leftrightarrow y = 11$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$x + 11 = 28 \Leftrightarrow x = 28 - 11 \Leftrightarrow x = 17$

La solución es x = 17 e y = 11.

d) Escogemos la incógnita "y" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 11 y la segunda ecuación por 3:

$$\begin{cases} 121x - 33y = 253 \\ 6x + 33y = 255 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$127x = 508$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = 508 / 127 \Leftrightarrow x = 4$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita y:

$2 \cdot 4 + 11y = 85 \Leftrightarrow 11y = 77 \Leftrightarrow y = 7$

La solución es x = 4 e y = 7.

e) Escogemos la incógnita "x" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 7:

$$\begin{cases} 21x - 12y = 3 \\ -21x - 35y = -210 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-47y = -207$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = 207 / 47$

Para calcular el valor de la otra incógnita, x, usando el método de reducción doble y volviendo al sistema inicial, se igualan los coeficientes de y, multiplicando la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 4:

$$\begin{cases} 35x - 20y = 5 \\ 12x + 20y = 120 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$47x = 125$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = 125 / 47$

La solución es x = 125/47 e y = 207/47.

f) Escogemos la incógnita "x" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la segunda ecuación por 7 y la primera se mantiene igual:

$$\begin{cases} 7x - 8y = 1 \\ -7x - 14y = -7 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-22y = -6$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = 3 / 11$

Para calcular el valor de la otra incógnita, x, usando el método de reducción doble y volviendo al sistema inicial, se igualan los coeficientes de y, multiplicando la segunda ecuación por 4 y la primera ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 7x - 8y = 1 \\ 4x + 8y = 4 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$11x = 5$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = 5 / 11$

La solución es x = 5/11 e y = 3/11.

g) Escogemos la incógnita "y" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la segunda ecuación por 5 y la primera ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 13x - 5y = 5 \\ 15x - 5y = 25 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-2x = -20$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = 20 / 2 \Leftrightarrow x = 10$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita y:

$3 \cdot 10 - y = 5 \Leftrightarrow y = 30 - 5 \Leftrightarrow y = 25$

La solución es x = 10 e y = 25.

h) Escogemos la incógnita "x" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por -2 y la segunda ecuación por 15:

$$\begin{cases} -30x + 16y = -92 \\ 30x - 165y = 390 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-149y = 298$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = -298/149 \Leftrightarrow y = -2$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$2x - 11 \cdot (-2) = 26 \Leftrightarrow 2x = 26 - 22 \Leftrightarrow x = 2$

La solución es x = 2 e y = -2.

35. A continuación se resuelven los sistemas indicando, en cada caso, el método empleado:

a) MÉTODO DE REDUCCIÓN: Escogemos la incógnita “x” para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la segunda ecuación por 2 y la primera ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -17 \\ -2x + 18y = 92 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$15y = 75$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = 75/15 \Leftrightarrow y = 5$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$-x + 9 \cdot 5 = 46 \Leftrightarrow x = 45 - 46 \Leftrightarrow x = -1$

La solución es x = -1 e y = 5.

b) MÉTODO DE IGUALACIÓN: Despejamos la incógnita “x” de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-3y}{-4} \\ x = \dfrac{8-y}{4} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$-\frac{4-3y}{4} = \frac{8-y}{4}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$-4 + 3y = 8 - y \Leftrightarrow 4y = 12 \Leftrightarrow y = 3$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = \frac{8-3}{4} \Leftrightarrow x = 5/4$$

La solución es x = 5/4 e y = 3.

c) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN: Despejamos la incógnita “x” de la segunda ecuación:

$x = 3y - 2$

A continuación, se sustituye “x” en la primera ecuación:

$19 \cdot (3y - 2) + 7y = 26$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$57y - 38 + 7y = 26 \Leftrightarrow 64y = 64 = \Leftrightarrow y = 1$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$x = 3 \cdot 1 - 2 \Leftrightarrow x = 1$

La solución es x = 1 e y = 1.

d) MÉTODO DE REDUCCIÓN DOBLE: En primer lugar, se simplifica la segunda ecuación del sistema:

$$\begin{cases} 12x - 7y = 28 \\ 2x + y = 22 \end{cases}$$

Escogemos la incógnita “y” para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la segunda ecuación por 7 y la segunda ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 12x - 7y = 28 \\ 14x + 7y = 154 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$26x = 182$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = 182/26 \Leftrightarrow x = 7$

Para calcular el valor de la otra incógnita, y, usando el método de reducción doble y volviendo al sistema inicial, se igualan los coeficientes de x, multiplicando la segunda ecuación por 6 y la primera ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 12x - 7y = 28 \\ 12x + 6y = 132 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-13y = -104$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = -104/-13 \Leftrightarrow y = 8$

La solución es x = 7 e y = 8.

36. A continuación se resuelven los sistemas indicando, en cada caso, el método empleado y expresando, previamente, en la forma general:

a) Simplificando las ecuaciones, el sistema queda como:

$$\begin{cases} 5x - 6y = -40 \\ 15x - 86y = -26 \end{cases}$$

Utilizando el método de SUSTITUCIÓN: Despejamos la incógnita “x” de la primera ecuación:

$$x = \frac{6y - 40}{5}$$

A continuación, se sustituye “x” en la segunda ecuación:

$$15 \cdot \left(\frac{6y-40}{5}\right) - 86y = -26$$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$18y - 120 - 86y = -26 \Leftrightarrow -94 = 68y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = -47/34$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = \frac{6 \cdot (-47/34) - 40}{5} \Leftrightarrow x = -821/85$$

La solución es x = -821/85 e y = -47/34.

b) Simplificando las ecuaciones, el sistema queda como:

$$\begin{cases} 50x + 100y = 11 \\ 1900x + 3700y = 417 \end{cases}$$

Utilizando el método de REDUCCIÓN: Escogemos la incógnita "y" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 37 y la segunda ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 1850x + 3700y = 407 \\ 1900x + 3700y = 417 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-50x = -10$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = -10/-50 \Leftrightarrow x = 1/5$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita y:

$50 \cdot (1/5) + 100y = 11 \Leftrightarrow 100y = 1 \Leftrightarrow y = 1/100$ La solución es x = 1/5 e y = 1/100.

37. A continuación se resuelven los sistemas indicando, en cada caso, el método empleado y expresando, previamente, en la forma general:

a) Simplificando las ecuaciones, el sistema queda como:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - y = -1 \end{cases}$$

Utilizando el método de IGUALACIÓN:
Despejamos la incógnita "y" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$x - 1 = 3x + 1$

Resolvemos ahora la ecuación:

$-2 = 2x \Leftrightarrow x = -1$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y = -1 - 1 \Leftrightarrow y = -2$

La solución es x = -1 e y = -2.

b) Simplificando las ecuaciones, el sistema queda como:

$$\begin{cases} 3x - 8y = -14 \\ 7x - 5y = -19 \end{cases}$$

Utilizando el método de REDUCCIÓN:

Escogemos la incógnita "x" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 7 y la segunda ecuación por 3:

$$\begin{cases} 21x - 56y = -98 \\ 21x - 15y = -57 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-41y = -41$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = -41/-41 \Leftrightarrow y = 1$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$3x - 8 \cdot 1 = -14 \Leftrightarrow 3x = -14 + 8 \Leftrightarrow x = -2$

La solución es x = -2 e y = 1.

38. A continuación se resuelven los sistemas indicando, en cada caso, el método empleado y expresando, previamente, en la forma general:

a) Simplificando las ecuaciones, el sistema queda como:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ 3x + y = 45 \end{cases}$$

Utilizando el método de SUSTITUCIÓN:

Despejamos la incógnita "x" de la segunda ecuación:

$$x = \frac{45 - y}{3}$$

A continuación, se sustituye "x" en la primera ecuación:

$$3 \cdot \left(\frac{45 - y}{3} \right) + 2y = 36$$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$45 - y + 2y = 36 \Leftrightarrow y = -9$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = \frac{45 - (-9)}{3} \Leftrightarrow x = 18$$

La solución es x = 18 e y = -9.

b) Simplificando las ecuaciones, el sistema queda como:

$$\begin{cases} 10x - 21y = -24 \\ 27x - 28y = -34 \end{cases}$$

Utilizando el método de IGUALACIÓN: Despejamos la incógnita "y" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = \dfrac{10x+24}{21} \\ y = \dfrac{27x+34}{28} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{10x+24}{21} = \frac{27x+34}{28}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$40x+96 = 81x+102 \Leftrightarrow -6 = 41x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -6/41$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$$y = \frac{10\cdot(-6/41)+24}{21} \Leftrightarrow y = {}^{44}\!/_{41}$$

La solución es x = -6/41 e y = 44/41.

39. La solución de cada uno de los sistemas siguientes es el punto en el que se cortan las rectas que representan las ecuaciones dadas:

a) $x = 1;\quad y = 2$

b) $x = 2;\quad y = 2$

40. A continuación se resuelven gráficamente los sistemas dados:

a) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

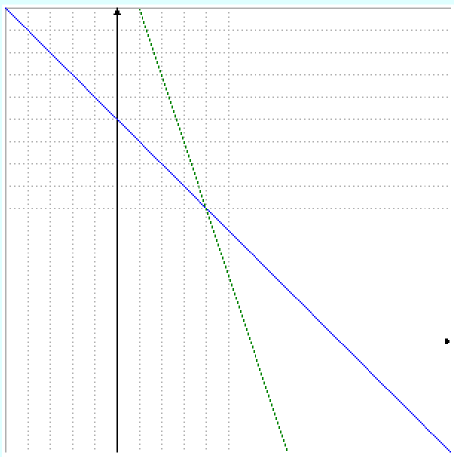
$y = 10 - x \qquad y = 18 - 3x$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y = 10 - x$
0	10
1	9
2	8

x	$y = 18 - 3x$
2	12
3	9
4	6

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (4, 6). Por lo tanto, la solución del sistema es x = 4 e y = 6.

b) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

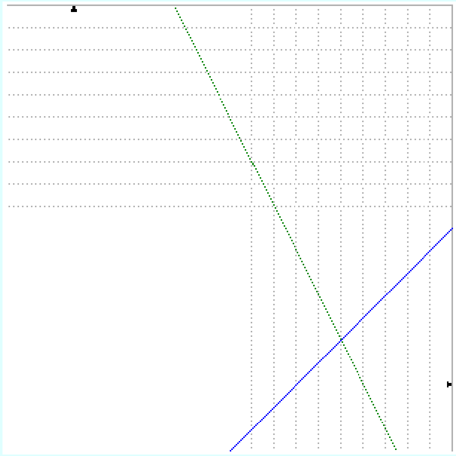
$y = x - 10 \qquad y = 26 - 2x$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y = x - 10$
10	0
11	1
12	2

x	$y = 26 - 2x$
10	6
11	4
12	2

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (12, 2). Por lo tanto, la solución del sistema es x = = 12 e y = 2.

41. A continuación se resuelven los sistemas dados:

a) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

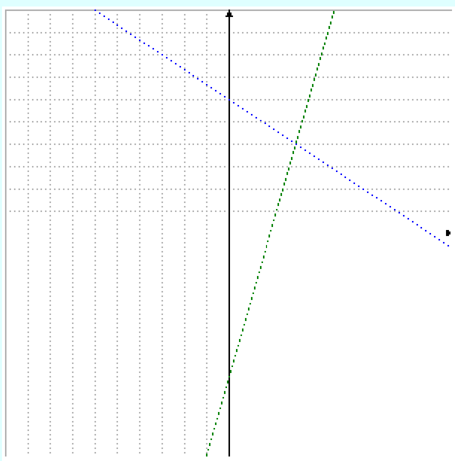
$y = \dfrac{18-2x}{3} \qquad y = \dfrac{7x-13}{2}$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y = \dfrac{18-2x}{3}$
0	6
3	4
6	2

x	$y = \dfrac{7x-13}{2}$
-1	-10
1	-3
3	4

A continuación representamos las rectas:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (3, 4). Por lo tanto, la solución del sistema es x = 3 e y = 4.

Para comprobar que es correcto, aprovechamos que está despejada la incógnita "y" de las dos ecuaciones, aplicamos el método de IGUALACIÓN:

$$\begin{cases} y = \dfrac{18-2x}{3} \\ y = \dfrac{7x-13}{2} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{18-2x}{3} = \frac{7x-13}{2}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$36 - 4x = 21x - 39 \Leftrightarrow 75 = 25x \Leftrightarrow x = 3$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$$y = \frac{18 - 2\cdot 3}{3} \Leftrightarrow y = 4$$

b) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

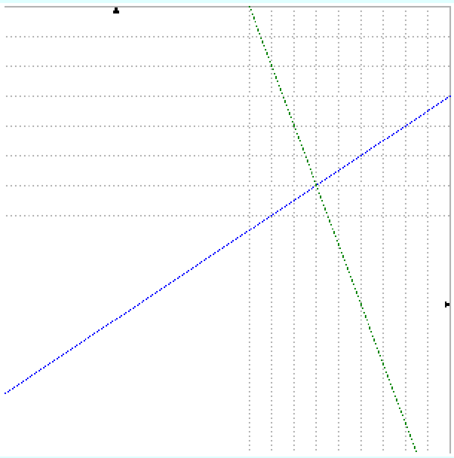
$$y = \frac{x-1}{2} \qquad y = 22 - 2x$$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y = \frac{x-1}{2}$
5	2
7	3
9	4

x	$y = 22 - 2x$
8	6
9	4
10	2

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (9, 4). Por lo tanto, la solución del sistema es x = 9 e y = 4.

Para comprobar que es correcto, aprovechamos que está despejada la incógnita "y" de las dos ecuaciones, aplicamos el método de IGUALACIÓN:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{2} \\ y = 22 - 2x \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{x-1}{2} = 22 - 2x$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$x - 1 = 44 - 4x \Leftrightarrow 5x = 45 \Leftrightarrow x = 9$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$$y = 22 - 2\cdot 9 \Leftrightarrow y = 4$$

c) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

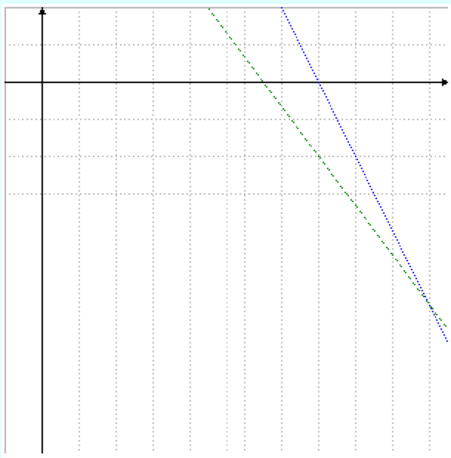
$$y = 15 - x \qquad y = \frac{24-2x}{3}$$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y = 15 - x$
6	9
7	8
8	7

x	$y = \frac{24-2x}{3}$
0	8
3	6
6	4

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (21, -6). Por lo tanto, la solución del sistema es x = = 21 e y = -6.

Para comprobar que es correcto, aprovechamos que está despejada la incógnita "y" de las dos ecuaciones, aplicamos el método de IGUALACIÓN:

$$\begin{cases} y = 15 - x \\ y = \dfrac{24-2x}{3} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$15 - x = \frac{24-2x}{3}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$45-3x=24-2x \Leftrightarrow 21=x$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y=15-21 \Leftrightarrow y=-6$

d) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

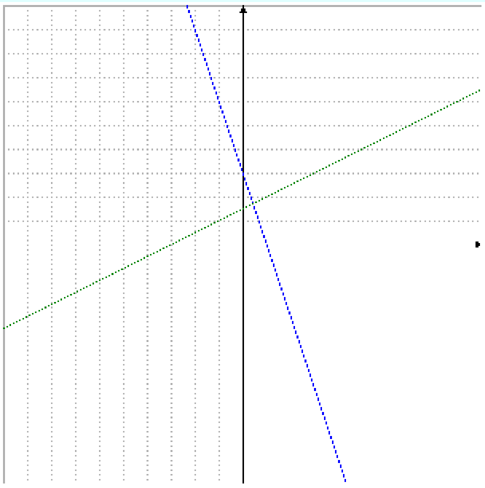
$y=3-3x \qquad y=\frac{x+3}{2}$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y=3-3x$
0	3
1	0
2	-3

x	$y=\frac{x+3}{2}$
1	2
3	3
5	4

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (3/7, -2/7). Por lo tanto, la solución del sistema es x = 3/7 e y = -2/7.

Para comprobar que es correcto, aprovechamos que está despejada la incógnita "y" de las dos ecuaciones, aplicamos el método de IGUALACIÓN:

$$\begin{cases} y=3-3x \\ y=\frac{x+3}{2} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$3-3x=\frac{x+3}{2}$

Resolvemos ahora la ecuación:

$6-6x=x+3 \Leftrightarrow 3=7x \Leftrightarrow x=3/7$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y=3-3x \Leftrightarrow y=-2/7$

e) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

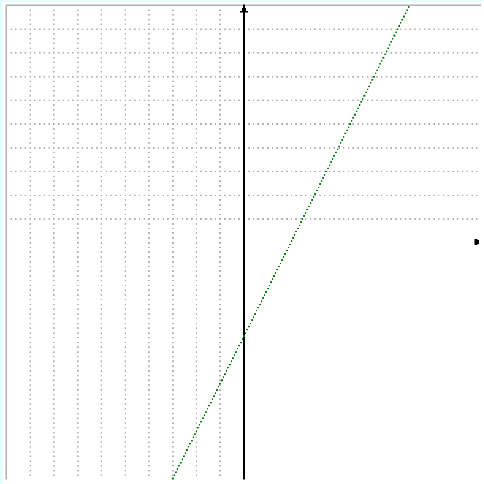
$y=x+2 \qquad y=2x-4$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y=x+2$
0	2
1	3
2	4

x	$y=2x-4$
0	-4
1	-2
2	0

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (6, 8). Por lo tanto, la solución del sistema es x = 6 e y = 8.

Para comprobar que es correcto, aprovechamos que está despejada la incógnita "y" de las dos ecuaciones, aplicamos el método de IGUALACIÓN:

$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=2x-4 \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$x+2=2x-4$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x=6$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y=6+2 \Leftrightarrow y=8$

f) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

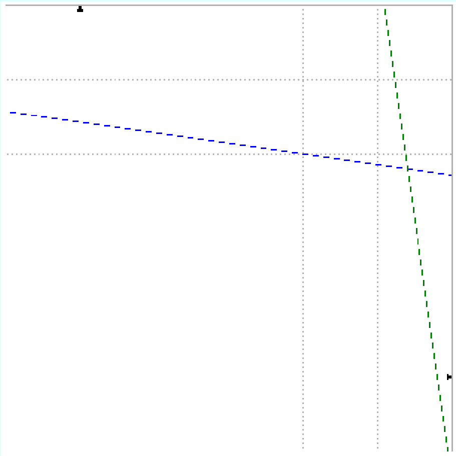
$y=\frac{120-x}{7} \qquad y=168-7x$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y=\frac{120-x}{7}$
8	16
15	15
22	14

x	$y=168-7x$
10	98
11	91
12	84

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas (las divisiones van cada 5 unidades) los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (22, 14). Por lo tanto, la solución del sistema es x = = 22 e y = 14.

Para comprobar que es correcto, aprovechamos que está despejada la incógnita "y" de las dos ecuaciones, aplicamos el método de IGUALACIÓN:

$$\begin{cases} y = \dfrac{120 - x}{7} \\ y = 168 - 7x \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{120 - x}{7} = 168 - 7x$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$120 - x = 1176 - 49x \Leftrightarrow 48x = 1056 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 22$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$$y = 168 - 7 \cdot 22 \Leftrightarrow y = 14$$

42. Ejercicio resuelto en el libro.

Página 138

43. A continuación, se formulan los sistemas dados:

a) Si la ecuación de r es $y = ax + b$, dado que r pasa por los puntos A(3, 3) y B(-4, -1), se verifica que:

$$\begin{cases} 3 = 3a + b \\ -1 = -4a + b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos a = 7/4 y b = = 6. Por lo tanto, la ecuación de r es $y = 7/4x + 6$.

Si la ecuación de s es $y = a'x + b'$, dado que s pasa por los puntos A(3, 3) y C(2, 0), se verifica que:

$$\begin{cases} 3 = 3a + b \\ 0 = 2a + b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos a = 3 y b = -6.

Por lo tanto, la ecuación de r es $y = 3x - 6$.

El sistema correspondiente a la gráfica es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{7}{4}x + 6 \\ y = 3x - 6 \end{cases}$$

b) Si la ecuación de r es $y = ax + b$, dado que r pasa por los puntos A(2, 2) y B(1, 0), se verifica que:

$$\begin{cases} 2 = 2a + b \\ 0 = a + b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos a = 2 y b = -2. Por lo tanto, la ecuación de r es $y = 2x - 2$.

Si la ecuación de s es $y = a'x + b'$, dado que s pasa por los puntos A(2, 2) y C(5, 1), se verifica que:

$$\begin{cases} 2 = 2a + b \\ 1 = 5a + b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos:

a = -1/3 y b = 8/3

Por lo tanto, la ecuación de r es $y = -1/3x + 8/3$.

El sistema correspondiente a la gráfica es:

$$\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

44. A continuación, se indica de qué tipo son los sistemas de ecuaciones dados:

a) Sistema Compatible Indeterminado.

b) Sistema Incompatible.

c) Sistema Compatible Determinado.

d) Sistema Incompatible.

45. Ejercicio resuelto en el libro.

46. A continuación, se indica el número de soluciones que tiene cada uno de los sistemas de ecuaciones dados:

a) Se trata de un Sistema Incompatible, por lo tanto, no tiene soluciones.

b) Se trata de un Sistema Compatible Determinado, por lo que tiene una única solución.

47. Actividad personal. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{7}{20} \\ -x + 2y = \dfrac{19}{10} \end{cases}$$

48. Actividad personal. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$$

49. Actividad personal. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

50. Tomamos como incógnitas x: el número mayor, y: el número menor. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ x - y = 13 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 103/2 e y = 77/2. Por tanto, los números buscados son 51,5 y 38,5.

51. Tomamos como incógnitas x: el primer número, y: el segundo número. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x - y = 15 \\ 2x + y = 51 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 22 e y = 7. Por tanto, los números buscados son 22 y 7.

52. Tomamos como incógnitas x: el primer número, y: el segundo número. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 3x = 2y + 4 \\ 4x - y = 22 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 4x - y = 22 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 8 e y = 10. Por tanto, los números buscados son 8 y 10.

53. Tomamos como incógnitas x: el sumando mayor, y: el sumando menor. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ x = 3y + 6 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 42 e y = 12. Por tanto, los sumandos buscados son 42 y 12.

54. Tomamos como incógnitas x: precio de cada DVD, y: el precio de cada CD. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 57 \\ 2x + y = 34 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 11 e y = 12. Por tanto, un DVD costaría 11 euros, mientras que los CD los han pagado a 12 euros.

55. Tomamos como incógnitas x: el precio de cada batido, y: el precio de cada refresco. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 2 e y = 3/2. Por tanto, cada batido vale 2 euros, mientras que cada refresco ha costado 1,50 euros.

56. Tomamos como incógnitas *x*: el número de jugadoras diestras, *y*: el número de jugadoras zurdas. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x = y + 7 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 16 e y = 9. Por tanto, el club cuenta con 16 jugadoras diestras y 9 jugadoras zurdas.

57. Tomamos como incógnitas x: el precio de cada kg de naranjas, y: el precio de cada kg de plátanos. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 3x + 3y = 8{,}10 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 1,2 e y = 1,5. Por tanto, las naranjas cuestan 1,20 €/kg y, los plátanos, 1,50€/kg.

58. Tomamos como incógnitas x: el número de paquetes de 1/2 kg, y: número de paquetes de 3/4 kg. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 4800 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 2500 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 4800 \\ 2x + 3y = 10000 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 4400 e y = 400. Por tanto, la industria envasa 4400 paquetes de 1/2 kg y 400 de 3/4 kg al día.

Página 139

59. Tomamos como incógnitas x: el número mayor, y: el número menor. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x = 4y \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 48 e y = 12. Por tanto, los números son 48 y 12.

60. Tomamos como incógnitas x: el número de lavadoras que instala correctamente, y: el número lavadoras que instala defectuosas. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 2000 \\ 54x - 60y = 94320 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 1880 e y = 120. Por tanto, el número de lavadoras que instala correctamente es 1880, contra las 120 que instala defectuosas.

61. Tomamos como incógnitas x: el número de camarotes de 1 plaza, y: el número de camarotes de 2 plazas. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 215 \\ x + 2y = 359 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 71 e y = 144. Por tanto, el crucero contiene 71 camarotes de una plaza y 144 de dos plazas.

62. Tomamos como incógnitas x: la edad del padre, y: la edad del hijo. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + 4 = 3 \cdot (y + 4) \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 32 e y = 8. Por tanto, el padre tiene 32 años y, el hijo, 8 años.

63. Tomamos como incógnitas x: el número de hombres, y: el número de mujeres. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x = 2y - 4 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 12 e y = 8. Por tanto, en el congreso cuentan con 12 hombres y 8 mujeres.

Para que se cumpla la segunda condición de que "haya el mismo número de personas de cada sexo", habría que reemplazar 2 hombres por dos mujeres, por lo que, habría 10 de cada sexo.

64. Tomamos como incógnitas x: dinero con que salió Mónica, y: dinero con que salió Ramón. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x - \frac{6}{7}x = y - \frac{7}{8}y \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 8x - 7y = 0 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 28 e y = 32. Por tanto, Mónica salió con 28 euros y Ramón con 32 euros.

65. Ejercicio resuelto en el libro.

66. Tomamos como incógnitas x: la cifra de las unidades, y: la cifra de las decenas. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 2 \cdot (10x + y) - (10y + x) = 20 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 19x - 8y = 20 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 4 e y = 7. Por tanto, la cifra de las unidades es 4 y, la de las decenas, 7, por lo que, el número buscado es 74.

67. Tomamos como incógnitas x: precio del boleto de adulto, y: precio del boleto de niño. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 9x + 3y = 72 \\ 7x + 4y = 61 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} 3x + y = 24 \\ 7x + 4y = 61 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 7 e y = 3. Por tanto, el precio del boleto de cada adulto es a 7 euros y, el de cada niño, a 3 euros.

68. Tomamos como incógnitas x: número de objetos fabricados de tipo A, y: número de objetos fabricados de tipo B. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 2,5x + 3,5y = 138 \\ 3x + 5y = 188 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} 5x + 7y = 276 \\ 3x + 5y = 188 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 16 e y = 28. Por tanto, el número de piezas fabricadas de tipo A es 16 y, de tipo B, 28.

69. Los vértices son los puntos de intersección entre las rectas, tomadas de dos en dos. Para calcular esos tres puntos, se plantean tres sistemas de ecuaciones entre las rectas dadas, sin que éstas se repitan.

El primer vértice (*A*), se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} 2y = x + 3 \\ y = 6 - 4x \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 1 e y = 2. Por tanto, el primer vértice es *A(1, 2)*.

El segundo vértice (*B*), se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} 2y = x + 3 \\ y = -x \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = -1 e y = 1. Por tanto, el primer vértice es *B(-1, 1)*.

El último vértice (*C*), se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = 6 - 4x \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 2 e y = -2. Por tanto, el último vértice es *C(2, -2)*.

Luego, los vértices del triángulo son: *A(1, 2)*, *B(-1, 1)* y *C(2, -2)*.

70. Una recta está determinada por dos puntos distintos. Utilizaremos como puntos los vértices dados, calculando la recta que pasa por cada dos de los puntos dados.

La primera recta (*r: y = ax+b*), pongamos que pasa por los vértices *A* y *C* y se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es a = -1/3 e b = 8/3. Por tanto, la primera recta es $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$.

La segunda recta (*s: y = ax+b*), pongamos que pasa por los vértices *A* y *B* y se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ 5 = 2a + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es a = 2 e b = 1. Por tanto, la segunda recta es $y = 2x + 1$.

La última recta (*t: y = ax+b*), pongamos que pasa por los vértices *B* y *C* y se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} 5 = 2a + b \\ 2 = 4a + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es a = -3/2 e b = 8. Por tanto, la primera recta es $y = -\frac{3}{2}x + 8$.

Luego, las ecuaciones del triángulo son:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3},\ y = 2x + 1,\ y = -\frac{3}{2}x + 8\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

71. Procedemos de manera similar al ejercicio anterior, teniendo en cuenta que, en este caso, se trata de un trapezoide, por lo que se piden 4 rectas. Utilizaremos como puntos los vértices dados, calculando la recta que pasa por cada dos de los puntos dados.

La primera recta (*r: y = ax+b*), pongamos que pasa por los vértices *A* y *B* y se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} -1 = 2a + b \\ 2 = a + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es a = -3 e b = 5. Por tanto, la primera recta es $y = -3x + 5$.

La segunda recta (*s: y = ax+b*), pongamos que pasa por los vértices *B* y *C* y se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} 2 = a + b \\ 1 = -2a + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es a = 1/3 e b = 5/3. Por tanto, la segunda recta es $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

La última recta (*t: y = ax+b*), pongamos que pasa por los vértices *C* y *D* y se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} 1 = -2a + b \\ -3 = -a + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es:

a = -4 e b = -7.

Por tanto, la primera recta es $y = -4x - 7$.

La última recta (t: y = ax+b), pongamos que pasa por los vértices A y D y se obtiene como solución al sistema:

$$\begin{cases} -1 = 2a + b \\ -3 = -a + b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es a = 2/3 e b = -7/3. Por tanto, la primera recta es $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

Luego, las ecuaciones del trapezoide son: $y = -3x + 5$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$, $y = -4x - 7$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

72. El hecho de que tenga como solución única los valores de x e y dados, significa que, al sustituirlos en el sistema dado, éste ha de cumplirse. Por lo tanto, el sistema quedaría como:

$$\begin{cases} 2a - b = 2 \\ 4a + 3b = 24 \end{cases}$$

A continuación, resolviéndolo por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que las soluciones son a = 3 y b = 4. Por lo tanto, el sistema quedará como:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 6x - 12y = 24 \end{cases}$$

73. Ejercicio resuelto en el libro.

Página 140

74. En primer lugar, para que el sistema resulte incompatible, hemos de llegar, en la resolución algebraica, a una expresión del tipo $0 = a$, con $a \neq 0$. Trabajando por reducción:

$$\begin{cases} x - ay = 3 \\ 3x + y = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3ay = 9 \\ 3x + y = -9 \end{cases} \Rightarrow (1 + 3a)\,y = -18$$

Para tener la expresión buscada, se tiene que cumplir que a = -1/3. Luego, para este valor de a, el sistema es incompatible.

En segundo lugar, para que el sistema sea compatible determinado y con la solución dada, se sustituyen dichos valores por x e y en el sistema y se calcula lo que tiene que valer a para que se cumpla la ecuación:

$$\begin{cases} -1 + 6a = 3 \\ -3 - 6 = -9 \end{cases}$$

Despejando a de la primera ecuación, se obtiene que a = 2/3.

75. En primer lugar, para que el sistema resulte compatible indeterminado, hemos de llegar, en la resolución algebraica, a una expresión del tipo $0 = 0$. Trabajando por reducción:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ -2ax - 2y = -2b \end{cases} \Rightarrow (2 - 2a)\,x = 5 - 2b$$

Para que en ambos miembros sea 0 el resultado, se tiene que cumplir que a = 1 y b = 5/2. Luego, para estos valores de a y b, el sistema es compatible indeterminado.

En segundo lugar, buscamos los posibles valores de b para que el sistema sea compatible determinado. Teniendo en cuenta el valor de a obtenido, el sistema quedaría como:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ -2x - 2y = -2b \end{cases}$$

Se observa que el miembro de cada ecuación que contiene las incógnitas son proporcionales (los mismos coeficientes pero con distinto signo), por lo que, en ningún caso podría ser compatible determinado, ya que, procediendo por reducción, se llegaría a la expresión: $0 = 5 - 2b$. Por lo tanto, no existe ningún valor de b para que este sistema sea compatible determinado.

76. Tomamos como incógnitas x: dinero que gana por hora el primer trabajador; y: dinero que gana por hora el segundo trabajador. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ 12x = 22y - 9 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 12x - 22y = -9 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 7,5 e y = 4,5. Por tanto, el primer trabajador gana 7,5 euros cada hora mientras que, el segundo trabajador, gana 4,5 euros la hora.

77. Tomamos como incógnitas x: la distancia recorrida desde el punto inicial, y: tiempo (en horas). El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x = 110y \\ x = 120 \cdot (y - 0,25) \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x - 110y = \\ x - 120y = 30 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 330 e y = 3. Por tanto, la moto tardará en alcanzar al coche 3 horas y lo hará a una distancia de 330 km con respecto al punto inicial.

78. Tomamos como incógnitas x: número de amigos que se apuntaron a la excursión inicialmente, y: precio inicial. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x \cdot y = 144 \\ (x-4)\cdot(y+3) = 144 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} xy = 144 \\ 3x - 4y + xy = 156 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 16 e y = 9. Por tanto, el número de amigos que, finalmente, fueron de excursión es 12 y tuvieron que pagar 12 euros cada uno.

79. Tomamos como incógnitas x: tiempo del viaje (en horas), y: distancia recorrida. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} y = 90x \\ y = 100\cdot(x-1) \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} 90x - y = 0 \\ 100x - y = 1 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 10 e y = 900. Por tanto, la distancia que piensan recorrer es de 900 km y saldrían a las 2 horas.

Para contestar a la segunda pregunta, nos ponemos en las dos situaciones:

En el caso de que circulen a 90 km/h, el viaje duraría 10 horas, por lo que, el primer conductor estaría al volante durante 6 horas y, el segundo conductor, durante 4 horas.

En el caso de que circulasen a 100 km/h, el viaje duraría 9 horas, luego, el primer conductor conduciría durante 5 horas y, el segundo, durante 4 horas.

80. Completando con las expresiones adecuadas, la pirámide quedaría como:

			35				
		19		35-19=16			
	x+3		x+y		y+5		
3		x		y		5	

Se puede plantear un sistema como:

$$\begin{cases} 19 = (x+3) + (x+y) \\ 16 = (x+y) + (y+5) \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x + 2y = 11 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 7 e y = 2. Por tanto, la pirámide quearía como:

			35			
		19		16		
	10		9		7	
3		7		2		5

81. Tomamos como incógnitas x: número de libros que lleva Paloma, y: número de libros que lleva Daniel. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + 1 = 2y \\ x - 1 = y + 1 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 5 e y = 3. Por tanto, el número de libros que lleva Paloma es 5, mientras que Daniel lleva 3 libros.

82. Tomamos como incógnitas x: número de días de viaje, y: número de kilómetros recorridos. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 50x + 0{,}25y = 735 \\ y = 220x \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} 50x + 0{,}25y = 735 \\ 220x - y = 0 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 7 e y = 1540. Por tanto, el número de días que dura el viaje es 7 y han recorrido 1540 km.

83. Tomamos como incógnitas x: tiempo empleado en el ascenso (en segundos), y: tiempo empleado en el descenso (en segundos). El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 361 \\ 14x = 21y + 154 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 361 \\ 14x - 21y = 154 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 221 e y = 140. Por tanto, el ascenso lo realiza en 221 segundos, mientras que, el descenso, en 140 segundos.

84. Tomamos como incógnitas x: número rectángulos, y: número de triángulos. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 4x+3y=68 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 8 e y = 12. Por tanto, hay 8 rectángulos y 12 triángulos en la portada.

85. Tomamos como incógnitas x: número avestruces, y: número de cocodrilos. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x+y+2\cdot(x+y)=84 \\ 2x+4y=108 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x+y=28 \\ x+2y=54 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 2 e y = 26. Por tanto, el número de avestruces es 2, el de cocodrilos es 26 y, el de serpientes, es 56.

86. Los valores son los siguientes:

a) 1

b) 54

87. Las soluciones a los sistemas propuestos sería:

a) $x=3;\quad y=0$

b) $x=5/2;\quad y=-1;\quad z=3$

Página 141

Desarrolla tus competencias

1. Tomamos como incógnitas A: el número de estudiantes del grupo A, B: el número de alumnos del grupo B, C: el número de estudiantes del grupo C, D: el número de estudiantes del grupo D, E: el número de estudiantes del grupo E. Tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} A=B=C \\ D=(A+B)+\dfrac{A+B}{2} \\ E=A+2 \\ A+B+C=15 \end{cases}$$

Utilizando la primera y la última, se obtiene que A = 5, B = 5 y C = 5. Y, por lo tanto, E = 7 y D = 15.

2. Tomamos como incógnitas x: precio de cada rollo de serpentina, y: precio de cada gorro. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 8x+7y=41 \\ 2x+4y=17 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 2,5 e y = 3. Por tanto, el precio de cada rollo de serpentina es 2,5 euros y, el de cada gorro, 3 euros.

3. Tomamos como incógnitas x: número de globos, y: número de cadenetas. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x+y=72 \\ x=\dfrac{5}{3}y \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x+y=72 \\ 3x-5y=0 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 45 e y = 27. Por tanto, el número de globos comprados es 45 y, el de cadenetas, 27.

4. Tomamos como incógnitas x: precio de cada bote de refresco, y: precio de cada bolsa de patatas. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 62x+31y=124 \\ y=3x \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x-y=0 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 0,8 e y = 2,4. Por tanto, el precio de cada refresco es 80 céntimos, mientras que, el de cada bolsa de patatas es 2,40 euros.

5. Tomamos como incógnitas x: kg que compran de chorizo, y: kg que compran de queso. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x+y=1,75 \\ 24x+15y=32,10 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 0,65 e y = 1,1. Por tanto, han comprado 650 g de chorizo y 1 kg 100 g de queso

6. Tomando como incógnita "x" el número total de canciones que han escuchado para hacer la selección, se tiene:

$$\frac{2}{9}x=38$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene que, x = 171. Por lo tanto, el número de canciones escuchadas para hacer la selección es 171.

7. A continuación se resuelve cada uno de los problemas planteados:

PROBLEMA A: Buscamos un número cuyo cuadrado esté comprendido entre 1800 y 1900, ya que, se indica que el matemático es del siglo XIX. Por lo tanto, se reducen las posibilidades a:

$43^2 = 1849$

Luego, el matemático De Morgan tenía 43 años en el 1849, por lo que, se puede afirmar que nació en el año 1806.

PROBLEMA B: El precio de cada una de las frutas sería:

– Pera: 0,50 €.

– Plátano: 0,40 €.

– Piña: 5,30 €.

Luego, la combinación de frutas de la última línea valdrá: 6,20 €.

8. Tomamos como incógnitas x: precio de la tableta, y: precio del teléfono. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 375 \\ y = \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 375 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 225 e y = 150. Por tanto, el precio de la tableta sería de 225 euros, mientras que, el del teléfono, 150 euros.

9. Actividad personal.

Página 142

Evaluación de estándares

1. Estos sistemas NO son equivalentes, ya que, no se puede transformar uno en el otro. Además, no tienen las mismas soluciones.

2. Despejamos la incógnita "x" de la primera ecuación:

$x = 4 - 3y$

A continuación, se sustituye "x" en la segunda ecuación:

$2 \cdot (4 - 3y) - y = 1$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$8 - 6y - y = 1 \Leftrightarrow 7 = 7y \Leftrightarrow y = 1$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$x = 4 - 3 \cdot 1 \Leftrightarrow x = 1$

La solución es x = 1 e y = 1.

3. Despejamos la incógnita "y" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3 - 2x}{7} \\ y = 4 - x \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{3 - 2x}{7} = 4 - x$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$3 - 2x = 28 - 7x \Leftrightarrow 5x = 25 \Leftrightarrow x = 5$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y = 4 - 5 \Leftrightarrow y = -1$

La solución es x = 5 e y = -1.

4. Escogemos la incógnita "y" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 4 y la segunda ecuación por 7:

$$\begin{cases} 12x + 28y = 52 \\ 35x - 28y = 42 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$47x = 94$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = 94/47 \Leftrightarrow x = 2$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita y:

$10 - 4y = 6 \Leftrightarrow 4y = 4 \Leftrightarrow y = 1$

La solución es x = 2 e y = 1.

5. Si la ecuación de *r* es *y* = *ax* + *b*, dado que *r* pasa por los puntos A(1, -1) y B(5, 0), se verifica que:

$$\begin{cases} -1 = a + b \\ 0 = 5a + b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos:

a = 1/4 y b = -5/4

Por lo tanto, la ecuación de *r* es *y = 1/4x -5/4*.

Si la ecuación de *s* es *y = a'x + b'*, dado que *s* pasa por los puntos C(-3, 2) y D(-1, -1,5), se verifica que:

$$\begin{cases} 2 = -3a + b \\ -1{,}5 = -1a + b \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos:

a = -7/4 y b = -13/4

Por lo tanto, la ecuación de s es *y = -7/4x – 13/4*.

El sistema correspondiente a la gráfica es:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{7}{4}x - \dfrac{13}{4} \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x-4y=5 \\ 7x+4y=-13 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = -1 e y = -3/2.

6. Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

$y=2x-1$

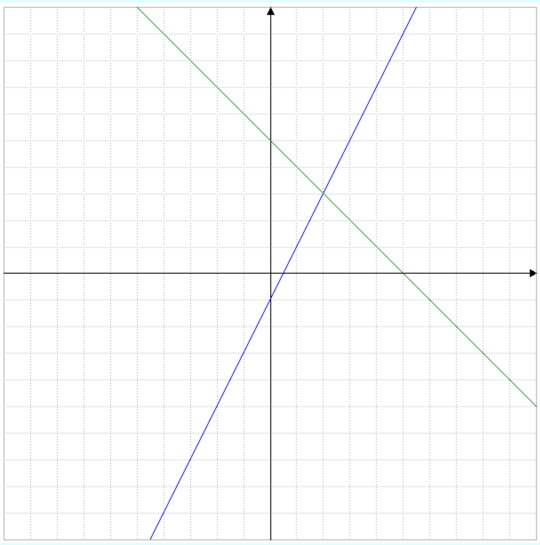
$y=5-x$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y=2x-1$
0	-1
1	1
2	3

x	$y=5-x$
0	5
1	4
2	3

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (2, 3). Por lo tanto, la solución del sistema es x = 2 e y = 3.

Para comprobar que es correcto, aprovechamos que está despejada la incógnita "y" de las dos ecuaciones, aplicamos el método de IGUALACIÓN:

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=5-x \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$2x-1=5-x$

Resolvemos ahora la ecuación:

$3x=6 \Leftrightarrow x=2$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y=2\cdot 2-1 \Leftrightarrow y=3$

7. Se trata de un sistema incompatible, ya que, los coeficientes de ambas expresiones son iguales, pero el término independiente no coincide. Por lo tanto, no tiene solución.

Sin embargo, para que el sistema fuera compatible determinado, bastaría con cambiar uno de los cuatro coeficientes, cualquiera de ellos. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} 6x+5y=31 \\ 3x+5y=4 \end{cases}$$

8. Se trata de un sistema compatible indeterminado, ya que, tanto los coeficientes de la segunda expresión como el término independiente son el doble de los de la primera expresión. Por lo tanto, tiene infinitas soluciones.

Sin embargo, para que el sistema fuera compatible determinado, tendían que modificarse, al menos, dos números. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} 3x-5y=40 \\ x-y=80 \end{cases}$$

9. Tomamos como incógnitas x: base, y: altura. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} (x-5)\cdot(y+2)=xy \\ 2x+2y=38 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} 2x-5y=10 \\ x+y=19 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 15 e y = 4. Por tanto, las dimensiones del rectángulo son 15 metros de base y 4 metros de altura.

10. Tomamos como incógnitas x: primer número, y: segundo número. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} 3x=2y+4 \\ 4x-y=22 \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 4x-y=22 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 8 e y = 10. Por tanto, los números buscados son 8 y 10.

Estrategia e ingenio

En equilibrio

Tomamos como incógnitas x: peso de cada pera (en gramos), y: peso de cada piña (en gramos).

El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} y + 200 = 3x \\ 1400 = x + y \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} 3x - y = 200 \\ x + y = 1400 \end{cases}$$

A continuación, resolviendo el sistema por cualquiera de los métodos estudiados, se obtiene que la solución del sistema es x = 400 e y = 1000. Por tanto, cada pera pesa 400 g y, cada piña, 1000 g.

Cifras y letras

El valor de cada letra sería: T = 8; R = 5; E = 6; S = 2; I = 5. Se comprueba:

$$\begin{array}{cccccc} & & T & R & E & S \\ & & 8 & 5 & 6 & 2 \\ & + & 8 & 5 & 6 & 2 \\ & & 8 & 5 & 6 & 2 \\ \hline & 2 & 5 & 6 & 8 & 6 \\ & S & I & E & T & E \end{array}$$

El collar del amor

Llamando x al total de perlas que tenía el collar, se plantea la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{10}x + 6 = x$$

A continuación, resolviendo la ecuación, se obtiene que x = 30. Por lo tanto, el collar tenía 30 perlas.

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

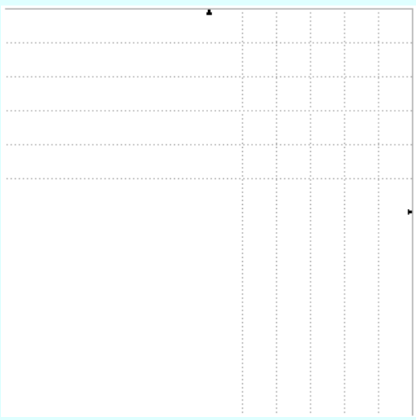
(Viene de la página 6-5 de la guía)

b) Despejamos la incógnita y: $y = 5 - x$.

A continuación formamos la tabla de valores:

x	0	1	2	3
y	5	4	3	2

Representando los puntos obtenidos y trazando la recta que los une, quedaría representada como:

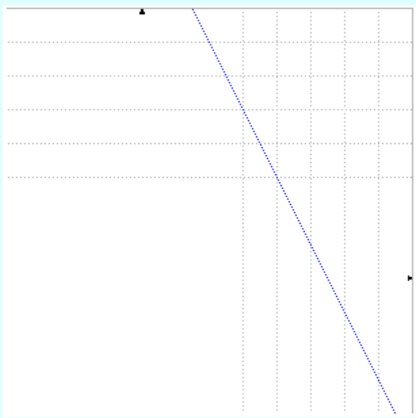


c) Despejamos la incógnita y: $y = 11 - 2x$.

A continuación formamos la tabla de valores, dando valores a x y calculando los correspondientes de y:

x	0	1	2	3
y	11	9	7	5

Cada par de valores de la tabla representa un punto en el plano, por lo que, representando los puntos obtenidos y trazando la recta que los une, quedaría representada como:



5. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Para x = -2, resulta y = 0.

Para x = 0, resulta y = 1.

Para x = 2, resulta y = 2.

La ecuación es: $x-2y=-2$

(Viene de la página 6-9 de la guía)

d) Despejamos la incógnita "x" de la segunda ecuación:

$x=1+3y$

A continuación, se sustituye "x" en la primera ecuación:

$2\cdot(1+3y)+5y=2$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$2+6y+5y=2 \Leftrightarrow 11y=0 \Leftrightarrow y=0$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$x=1+3\cdot 0 \Leftrightarrow x=1$

La solución es x = 1 e y = 0.

9. Siguiendo los pasos del método de igualación, se resuelven:

a) Despejamos la incógnita "x" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x=18-2y \\ x=y+9 \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$18-2y=y+9$

Resolvemos ahora la ecuación:

$18-9=3y \Leftrightarrow 9=3y \Leftrightarrow y=3$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$x=3+9 \Leftrightarrow x=12$

La solución es x = 12 e y = 3.

b) Despejamos la incógnita "x" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x=1+3y \\ x=17-y \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$1+3y=17-y$

Resolvemos ahora la ecuación:

$4y=16 \Leftrightarrow y=4$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$x=17-4 \Leftrightarrow x=13$

La solución es x = 13 e y = 4.

c) Despejamos la incógnita "y" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y=18-x \\ y=4+x \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$18-x=4+x$

Resolvemos ahora la ecuación:

$14=2x \Leftrightarrow x=7$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y=4+7 \Leftrightarrow y=11$

La solución es x = 7 e y = 11.

d) Despejamos la incógnita "y" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y=15+2x \\ y=9+x \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$15+2x=9+x$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x=-6$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y=9-6 \Leftrightarrow y=3$

La solución es x = -6 e y = 3.

10. Siguiendo los pasos del método de reducción, se resuelven:

a) Escogemos la incógnita "y" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 4 y la segunda ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 28x+4y=4 \\ -2x+4y=1 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$30x=3$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x=3/30 \Leftrightarrow x=1/10$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita y:

$$7\cdot\left(\frac{1}{10}\right)+y=1 \Leftrightarrow y=1-\frac{7}{10} \Leftrightarrow y=\frac{3}{10}$$

La solución es x = 1/10 e y = 3/10.

b) Escogemos la incógnita "x" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 5x-30y=-15 \\ 5x-y=57 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo:

$-29y = -72$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = 72/29$

Para calcular el valor de la otra incógnita, x, aplicaremos el método de reducción doble. Por lo tanto, volviendo al sistema inicial, se igualan los coeficientes de y, multiplicando la segunda ecuación por 6 y manteniendo igual la primera:

$$\begin{cases} x - 6y = -3 \\ 30x - 6y = 342 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-29x = -345$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = 345/29$

La solución es x = 345/29 e y = 72/29.

c) Escogemos la incógnita "x" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 2:

$$\begin{cases} 10x + 15y = 65 \\ 10x - 16y = -28 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$31y = 93$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = 93/31 \Leftrightarrow y = 3$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$2x + 3 \cdot 3 = 13 \Leftrightarrow 2x = 13 - 9 \Leftrightarrow x = 2$

La solución es x = 2 e y = 3.

d) Escogemos la incógnita "y" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la segunda ecuación por 3 y la primera ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} 7x + 9y = 5 \\ 15x - 9y = 39 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$22x = 44$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = 44/22 \Leftrightarrow x = 2$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita y:

$5 \cdot 2 - 3y = 13 \Leftrightarrow 10 - 13 = 3y \Leftrightarrow y = -1$

La solución es x = 2 e y = -1.

11. A continuación se resuelven los sistemas propuestos, indicando, en cada caso, el método empleado:

a) MÉTODO DE REDUCCIÓN DOBLE: Escogemos la incógnita "x" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por 3:

$$\begin{cases} 15x - 40y = 10 \\ 15x - 9y = 72 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-31y = -62$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = -62/-31 \Leftrightarrow y = 2$

Para calcular el valor de la otra incógnita, x, usando el método de reducción doble y volviendo al sistema inicial, se igualan los coeficientes de y, multiplicando la primera ecuación por 6 y la segunda ecuación por 8:

$$\begin{cases} 9x - 24y = 6 \\ 40x - 24y = 192 \end{cases}$$

Restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$-31x = -186$

Resolvemos ahora la ecuación:

$x = -186/-31 \Leftrightarrow x = 6$

La solución es x = 6 e y = 2.

b) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN: Despejamos la incógnita "x" de la segunda ecuación:

$x = 2 - 3y$

A continuación, se sustituye "x" en la primera ecuación:

$4 \cdot (2 - 3y) - 6y = 26$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$8 - 12y - 6y = 26 \Leftrightarrow -18 = 18y \Leftrightarrow y = -1$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$x = 2 - 3 \cdot (-1) \Leftrightarrow x = 5$

La solución es x = 5 e y = -1.

c) MÉTODO DE REDUCCIÓN: Escogemos la incógnita "x" para suprimir de las dos ecuaciones. Para igualar los coeficientes, se multiplica la segunda ecuación por 2 y la primera ecuación se mantiene igual:

$$\begin{cases} -2x + 5y = 16 \\ 2x + 8y = 10 \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$13y = 26$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = 26/13 \Leftrightarrow y = 2$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la segunda ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$x + 4 \cdot 2 = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 8 \Leftrightarrow x = -3$

La solución es x = -3 e y = 2.

d) MÉTODO DE IGUALACION: Despejamos la incógnita “y” de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 73 - 6x \\ y = \dfrac{56 - 5x}{-4} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$73 - 6x = \frac{56 - 5x}{-4}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$-292 + 24x = 56 - 5x \Leftrightarrow 29x = 348 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 12$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

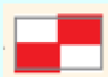
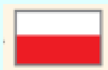
$$y = 73 - 6 \cdot 12 \Leftrightarrow y = 1$$

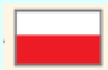
La solución es x = 12 e y = 1.

Página 129

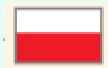
Piensa y contesta

Despejando en primera y tercera ecuación se obtiene:

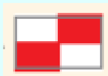
 = 350 – 2· 

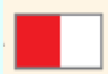
 = 250 –  /2

A continuación, sustituyendo y resolviendo en la tercera ecuación se obtiene que:

 =100

Y, por lo tanto, sustituyendo en las otras dos:

 =150

 =200

(Viene de la página 6-11 de la guía)

Utilizando el método de IGUALACIÓN, despejamos la incógnita “x” de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4 + 3y}{8} \\ x = \dfrac{138 - 10y}{3} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{4 + 3y}{8} = \frac{138 - 10y}{3}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$$3 \cdot (4 + 3y) = 8 \cdot (138 - 10y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12 + 9y = 1104 - 72y \Rightarrow 63y = 1092 \Rightarrow$$
$$y = 1092/63$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = \frac{4 + 3 \cdot (1092/63)}{8} \Rightarrow x = 454/89$$

La solución es x = 454/89 e y = 1092/63.

13. A continuación se resuelven los sistemas indicando, en cada caso, el método empleado:

a) Simplificamos previamente las ecuaciones:

$$12 \cdot \left(\frac{2x - 3}{4} - \frac{5}{6} \right) = 12 \cdot \left(\frac{3 - 2y}{3} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot (2x - 3) - 2 \cdot 5 = 4 \cdot (3 - 2y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x - 9 - 10 = 12 - 8y \Rightarrow 6x + 8y = 31$$
$$6 \cdot \left(\frac{2x + 1}{3} \right) = 6 \cdot \left(\frac{2y + 3}{2} - \frac{7}{6} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot (2x + 1) = 3 \cdot (2y + 3) - 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x + 2 = 6y + 9 - 7 \Rightarrow 4x - 6y = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - 3y = 0$$

Resolvemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 6x + 8y = 31 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

Utilizando el método de SUSTITUCIÓN: Despejamos la incógnita “x” de la segunda ecuación:

$$x = 3y/2$$

A continuación, se sustituye “x” en la primera ecuación:

$$6 \cdot (3y/2) + 8y = 31$$

Resolvemos ahora la ecuación obtenida:

$$9y + 8y = 31 \Leftrightarrow 17y = 31 = \Leftrightarrow y = 31/17$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = \frac{3 \cdot (31/17)}{2} \Leftrightarrow x = {}^{93}\!/_{34}$$

La solución es x = 93/34 e y = 31/17.

b) Simplificamos previamente las ecuaciones:

$$5 \cdot \left[\frac{4(x - 3)}{5} - 3y \right] = 5 \cdot \left(\frac{-22}{5} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(x - 3) - 5 \cdot 3y = -22 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x - 12 - 15y = -22 \Rightarrow 4x - 15y = -10$$
$$3 \cdot \left[2x + \frac{2(y - 4)}{3} \right] = 3 \cdot \left(\frac{26}{3} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot 2x + 2(y - 4) = 26 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x + 2y - 8 = 26 \Rightarrow 6x + 2y = 34 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3x + y = 17$

Resolvemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 4x - 15y = -10 \\ 3x + y = 17 \end{cases}$$

Utilizando el método de IGUALACIÓN: Despejamos la incógnita "y" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = \dfrac{10 + 4x}{15} \\ y = 17 - 3x \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{10 + 4x}{15} = 17 - 3x$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$10 + 4x = 255 - 45x \Leftrightarrow 49x = 245 \Leftrightarrow x = 7$ Por último, sustituyendo el valor obtenido de x en la segunda ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita y:

$y = 17 - 3 \cdot 5 \Leftrightarrow y = 2$

La solución es x = 7 e y = 2.

14. Simplificamos previamente las ecuaciones:

$$\frac{2}{\frac{5x + 6y + 32}{30}} = -\frac{3/5}{\frac{3x - 8y}{12}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{60}{5x + 6y + 32} = -\frac{36}{15x - 40y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(15x - 40y) = -3(5x + 6y + 32) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 75x - 200y = -15x - 18y - 96 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60x - 182y = -96 \Leftrightarrow 30x - 91y = -48$$

$$\frac{1/5}{\frac{x + y}{2}} = \frac{4/6}{\frac{15y - 24x + 875}{60}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5x + 5y} = \frac{40}{15y - 24x + 875} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15y - 24x + 875 = 20(5x + 5y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15y - 24x + 875 = 100x + 100y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 124x + 85y = 875$$

Resolvemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 45x - 91y = -48 \\ 124x + 85y = 875 \end{cases}$$

Utilizando el método de IGUALACIÓN: Despejamos la incógnita "x" de las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-48 + 91y}{45} \\ x = \dfrac{875 - 85y}{124} \end{cases}$$

A continuación, igualamos las dos expresiones obtenidas:

$$\frac{-48 + 91y}{45} = \frac{875 - 85y}{124}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$-5952 + 11284y = 39375 - 3825y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15109y = 45327 \Leftrightarrow y = 3$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación obtenida en el primer paso, se halla el valor de la incógnita x:

$$x = \frac{-48 + 91 \cdot 3}{45} \Leftrightarrow x = 5$$

La solución es x = 5 e y = 3.

Página 131

Piensa y contesta

Actividad personal. A modo de ejemplo:

– El sistema cuya solución es x = 4 e y = 0:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

– El sistema cuya solución es x = 0 e y = -2:

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

15. A continuación se resuelven gráficamente los sistemas dados:

a) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

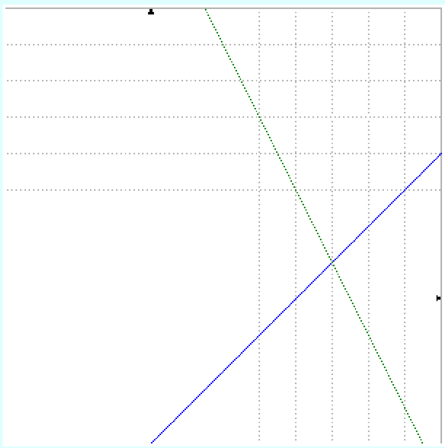
$y = x - 4 \quad y = 11 - 2x$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y = x - 4$
0	-4
1	-3
2	-2

x	$y = 11 - 2x$
0	11
1	9
2	7

A continuación, se representan en unos ejes de corrdenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (5, 1). Por lo tanto, la solución del sistema es x = 5 e y = 1.

b) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

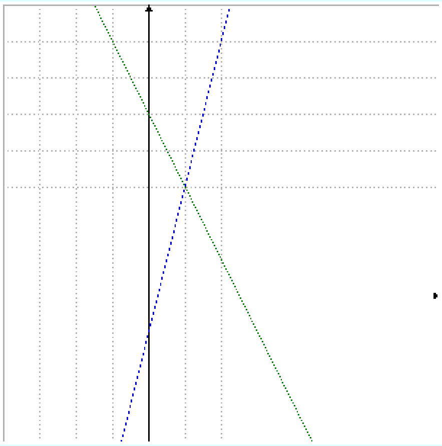
$y = 4x - 1 \qquad y = 5 - 2x$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y = 4x - 1$
0	-1
1	3
2	7

x	$y = 5 - 2x$
0	5
1	3
2	1

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (1, 3). Por lo tanto, la solución del sistema es x = 1 e y = 3.

16. Resolvemos gráficamente:

a) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

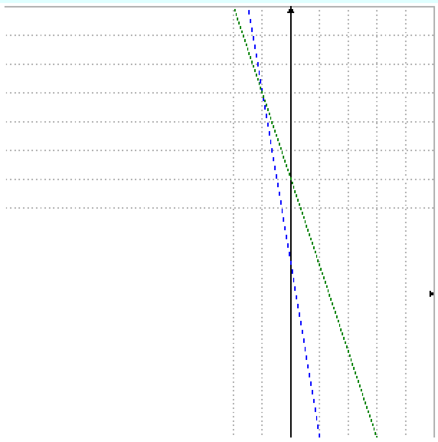
$y = 1 - 6x \qquad y = 4 - 3x$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y = 1 - 6x$
-1	7
0	1
1	-5

x	$y = 4 - 3x$
0	4
1	1
2	-2

Representamos las rectas a continuación:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (-1, 7). Por lo tanto, la solución del sistema es x = -1 e y = 7.

b) Despejando la incógnita y de las dos ecuaciones:

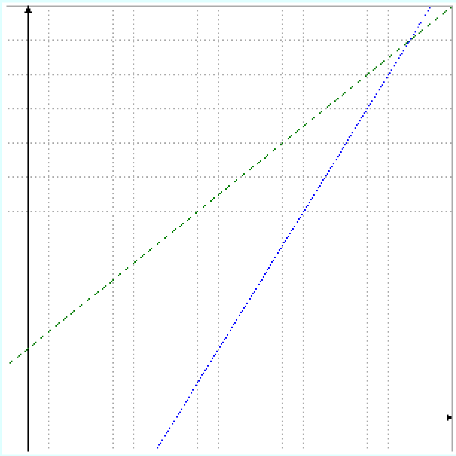
$y = x - 7 \qquad y = \frac{x+4}{2}$

Construimos una tabla de valores para cada una de las ecuaciones:

x	$y = x - 7$
0	-7
1	-6
2	-5

x	$y = \frac{x+4}{2}$
-2	2
0	1
2	3

A continuación, se representan en unos ejes de coordenadas los puntos obtenidos y trazamos las rectas que los unen:



Las dos rectas se cortan en el punto de coordenadas (18, 11). Por lo tanto, la solución del sistema es x = = 18 e y = 11.

(Viene de la página 6-13 de la guía)

18. Actividad personal. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

19. Actividad personal. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

20. Actividad personal. A modo de ejemplo:

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$$

(Viene de la página 6-15 de la guía)

Resolvemos ahora la ecuación:

$$9,6 - 0,20y + 0,50y = 11,70 \Rightarrow 0,30y = 2,1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 7$$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$x = 48 - 7 \Leftrightarrow x = 41$

La solución del sistema es x = 41 e y = 7. Por tanto, Juan tiene 41 monedas de 20 céntimos y 7 monedas de 50.

23. Tomamos como incógnitas x: el número de estudiantes, y: el número de profesores. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ 4x + 11y = 214 \end{cases}$$

A continuación resolvemos el sistema utilizando el método de IGUALACIÓN: Despejamos la incógnita "x" de las dos ecuaciones, obteniendo:

$$\begin{cases} x = 36 - y \\ x = \dfrac{214 - 11y}{4} \end{cases}$$

Igualando las dos ecuaciones obtenidas:

$$36 - y = \frac{214 - 11y}{4}$$

Resolvemos ahora la ecuación:

$144 - 4y = 214 - 11y \Rightarrow 7y = 70 \Rightarrow y = 10$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$x = 36 - 10 \Leftrightarrow x = 26$

La solución del sistema es x = 26 e y = 10. Por tanto, se compraron 26 entradas de estudiante y 10 entradas de profesor.

24. Tomamos como incógnitas x: el número mayor, y: el número menor. El problema se plantearía como:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x - y = 4y \end{cases}$$

Simplificamos las ecuaciones para que el sistema quede en la forma general:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$

A continuación resolvemos el sistema utilizando el método de REDUCCIÓN: Como la incógnita x ya tiene el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, restamos ambas ecuaciones, obteniendo la expresión:

$6y = 180$

Resolvemos ahora la ecuación:

$y = 30$

Por último, sustituyendo el valor obtenido de y en la primera ecuación del sistema, se halla el valor de la incógnita x:

$x + 30 = 180 \Leftrightarrow x = 150$

La solución del sistema es x = 150 e y = 30. Por tanto, los números buscados son 150 y 30.

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/747012	http://enebro.pntic.mec.es/~jhep0004/Paginas/CarmenIn/historia.htm
http://www.tiching.com/747013	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/sistemas_lineales_dos_incognitas_dchg/index.html
http://www.tiching.com/747014	http://e-ducativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/500/555/html/Unidad03/pagina_3.html
http://www.tiching.com/747015	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Sistemas_ecuaciones_lineales_interpretacion/Sistemas_lineales.htm
http://www.tiching.com/747016	http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&id=3348%3Agermain-sophie-1776-1831
http://www.tiching.com/747017	http://www.vitutor.com/ecuaciones/sistemas/tipos_e.html
http://www.tiching.com/747018	http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0045-01/secciones/presentacion.html

INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ La finalidad de esta unidad consiste en la aplicación de los conceptos de proporcionalidad directa e inversa a la resolución de problemas.

En primer lugar leeremos el texto introductorio y lo comentaremos con el alumnado siguiendo este cuestionario:

– *¿Qué idea estamos aplicando cuando en la frutería calculamos el precio de 2 kilos de manzanas a partir del precio de la unidad?*

– *¿En qué otras situaciones de la vida cotidiana empleamos el concepto de proporcionalidad directa?*

– *¿Son útiles los porcentajes en la vida diaria?*

■ A continuación prestaremos atención a la imagen de presentación, al índice de contenidos de esta unidad y al esquema que los relaciona:

– *¿Se te ocurren dos magnitudes que sean directamente proporcionales? Razona tu respuesta. ¿E inversamente proporcionales?*

– *¿Cómo expresamos un porcentaje en forma de fracción?*

Empezamos la unidad

■ Como introducción y repaso de ciertos conceptos que se desarrollarán a lo largo de la unidad, se proponen una serie de actividades, cuyos objetivos particulares son:

– La actividad 1 introduce el concepto de razón, fundamental para entender cuándo dos magnitudes son directamente proporcionales.

– En la actividad 2 se repasa la idea de fracción equivalente, relacionada con el concepto de proporción que estudiaremos posteriormente en este mismo tema.

– La actividad 3 revisa la operativa de las proporciones, que aplicaremos a la resolución de la regla de tres.

– En la actividad 4 repasaremos el cálculo con porcentajes.

– La actividad 5 relaciona los conceptos de proporcionalidad directa e inversa.

■ Con el fin de comprobar el nivel de conocimientos del que parten los alumnos y alumnas, les pediremos que resuelvan por parejas las actividades planteadas en el apartado *Para empezar*.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 4 y 5.* Leer comprender e interpretar el enunciado y saber desarrollar los propios argumentos por escrito, para resolver la actividad.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 1, 2, 3, 4 y 5.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.
- *Acts. 1, 2, y 3.* Saber transformar la información recopilada en unidades anteriores en conocimiento propio.
- *Esquema pág. 144.* Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Texto pág. 144.* Valorar la proporcionalidad en los cálculos comerciales y su aplicación a otro tipo de estudios planteados en diferentes disciplinas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Actividades.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para introducir el tema sobre proporcionalidad y ver la realidad de su utilización, propondremos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747100

Se trata de un recurso que nos permitirá comprobar hasta qué punto tienen conciencia de su aplicación en cuestiones de la vida corriente. También sabremos sus conocimientos previos sobre el tema.

A partir de una página de publicidad, les pediremos que realicen descuentos. No es necesario utilizar la calculadora, pueden practicar el cálculo mental y adquirir estrategias. Les preguntaremos:

- *¿Sabrías decir el precio de un televisor, si esta semana se aplica una rebaja del 25% sobre ellos?*
- *Encuentra un gran electrodoméstico y aplica una rebaja del 10% en su precio inicial.*
- *Finalmente en informática se realiza una rebaja del 50%. ¿Qué artículo vas a comprar?*

Educamos en valores

Valoración de la iniciativa personal y de las estrategias propias de resolución de situaciones problemáticas

- El desarrollo de estrategias personales eficaces de resolución de problemas contribuye a valorar las propias capacidades y a sacar partido de su iniciativa per-sonal.

El área de matemáticas contribuye a la aplicación de métodos personales de resolución de problemas que pueden ser útiles en otras circunstancias de la vida.

Las actividades que contribuyen a lograr este objetivo son:

– En las actividades *Estrategia e ingenio* de la página 139 el alumnado debe diseñar una estrategia de resolución personal que le permita abordar dos problemas que no se resuelven con los métodos estándar estudiados.

– La *Resolución de problemas* de la pág. 157.

Libro Digital

- *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 145

Para empezar…

1. Las razones son las siguientes:

a) $\frac{5}{7}=0,71$ b) $\frac{5}{100}=0,05$ c) $\frac{8,4}{2,1}=4$

2. Las fracciones equivalentes son:

a) $\frac{5}{8}$ y $\frac{15}{24}$ c) $\frac{4}{7}$ y $\frac{20}{35}$

3. Los valores de *x* son los siguientes:

a) $\frac{x}{5}=\frac{3}{4};\ x=\frac{3\cdot 5}{4}=\frac{15}{4}$

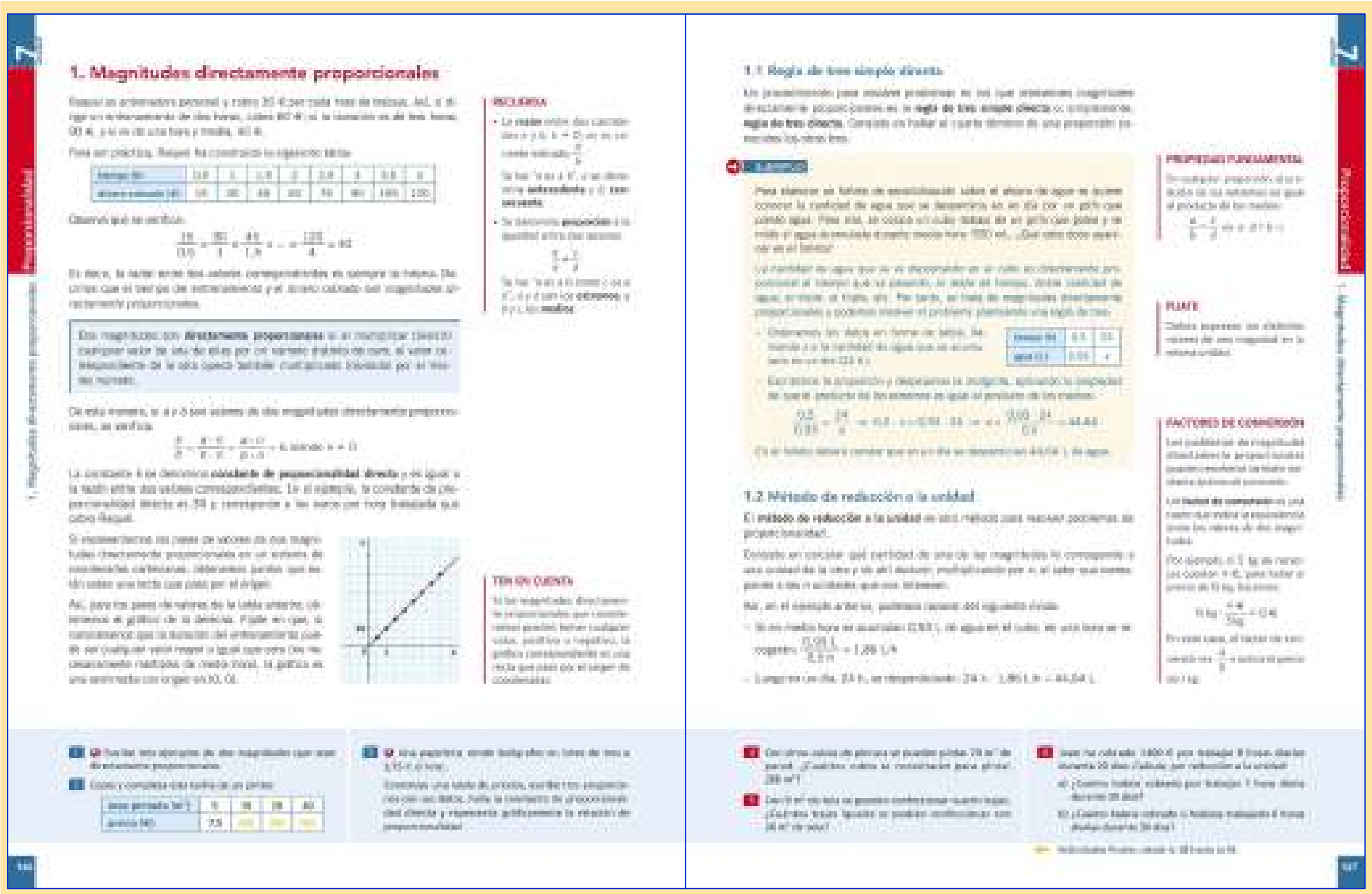
b) $\frac{15}{7}=\frac{x}{14};\ x=\frac{15\cdot 14}{7}=30$

c) $\frac{7}{21}=\frac{21}{x+11};\ 7(x+11)=21^2;\ 7x=21^2-77;$

$x=\frac{441-77}{7}=\frac{364}{7}=52$

d) $\frac{x-1}{3}=\frac{x+1}{4};\ 4x-4=3x+3;\ x=7$

(Continúa en la página 7-27 de la guía)


1. Magnitudes directamente proporcionales

1.1 Regla de tres simple directa

1.2 Método de reducción a la unidad

1. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

■ El objetivo de esta sección consiste en introducir el concepto de proporcionalidad directa y sus aplicaciones a la hora de resolver problemas.

En primer lugar leeremos el ejemplo inicial que nos sirve para explicar prácticamente las ideas de *razón* y *magnitudes directamente proporcionales.* Prestaremos atención a la nota *Recuerda,* donde se recoge cierta terminología relacionada:

– *¿Cómo se halla la razón entre dos valores dados?*
– *¿Qué nos indica la razón entre los valores de dos magnitudes?*
– *¿A qué llamamos proporción?*

■ A continuación leeremos la definición del recuadro y los párrafos que siguen, junto con la nota *Ten en cuenta.* Después plantearemos al alumnado un cuestionario que resuma las ideas más importantes:

– *¿Cuándo se dice que dos magnitudes son directamente proporcionales?*
– *¿Cómo es la representación gráfica de sus pares de valores?*
– *¿Qué es la constante de proporcionalidad directa?*

■ Para afianzar todos estos conceptos introducidos, los alumnos y alumnas resolverán los ejercicios de la página 146.

1.1 Regla de tres simple directa

■ Leeremos la introducción del apartado y la nota del margen *Propiedad fundamental.* A continuación analizaremos el ejemplo de aplicación de la teoría:

– *¿Qué información extraemos del enunciado?*
– *¿Qué propiedad hemos aplicado para resolver la proporción?*
– *¿Es correcto que obtengamos una cantidad de agua mayor en el caso de las 24h que para media hora?*

El docente destacará la observación del margen *Fíjate*, muy importante a la hora de realizar los cálculos.

1.2 Método de reducción a la unidad

■ Proseguiremos con la lectura del siguiente apartado, prestando atención al ejemplo:

– *¿En qué consiste este método?*
– *¿Podrías poner otro ejemplo de aplicación?*

Ahora leeremos el tercer método expuesto, en el apunte del margen *Factores de conversión* y preguntaremos:

– *¿Cómo se calcula el factor de conversión?*
– *¿Por qué multiplicamos los 15 kg por dicho factor?*

■ Por último los alumnos y alumnas resolverán las actividades propuestas en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 3.* Comprender e interpretar el enunciado del problema que se plantea y ser capaz de responder con la solución adecuada.
- *Acts. 4, 5 y 6.* Leer y comprender los enunciados y procesar correctamente los datos.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 1.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades en situaciones parecidas y contextos diversos.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 1, 4 y 5.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos en este apartado.
- *Acts. 3 y 6.* Analizar el enunciado, seleccionar una estrategia, valorar las posibles respuestas y tomar decisiones con criterio propio, todo ello con la finalidad de resolver el ejercicio.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para asentar la relación entre magnitudes directamente proporcionales.

✓ La actividad de ampliación 1 resultará útil para poner en práctica lo aprendido en un caso físico particular.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de practicar con la proporcionalidad, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/747101

Se trata de un recurso del tipo Descartes en el que los alumnos podrán repasar la teoría de forma muy sencilla y con ejemplos entendedores.

A continuación, les pediremos que realicen los ejercicios en los cuales aplicarán los conceptos trabajados. Son actividades autocorrectivas para que sean conscientes de su aprendizaje.

Seguidamente, les podríamos preguntar:

- *¿Puedes poner un ejemplo sobre factores de conversión?*
- *¿Sabrías proponer un ejemplo dónde aplicar el método de reducción a la unidad?*

Se requiere instalar el programa Java para visualizar correctamente las ventanas interactivas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 146

1. Actividad personal. A modo de ejemplo:

- La longitud del lado de un polígono regular y su perímetro.
- La masa y el peso de un cuerpo.
- Nº de bombillas iguales y consumo eléctrico.
- Cantidad de botellas de agua de 2 litros y peso que tienen.
- Número de artículos iguales y precio que cuestan.

2. Son magnitudes directamente proporcionales y basta multiplicar por 2:

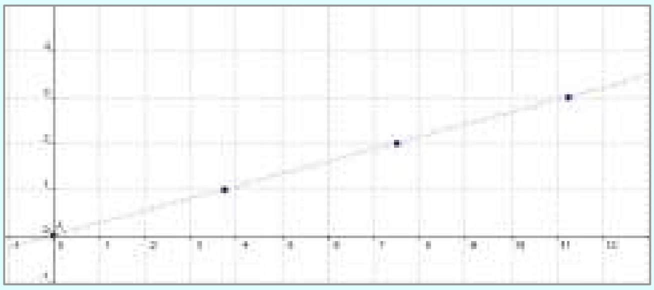
área pintada (m^2)	5	10	20	40
precio (€)	7,5	15	30	60

3. Construimos la tabla de precios:

número de lotes	1	2	3	4
coste (€)	3,75	7,5	11,25	15

Escribimos tres proporciones: $\frac{3,75}{1} = \frac{7,5}{2} = \frac{11,25}{3} = 3,75$

La constante de proporcionalidad es k = 3,75.



Página 147

4. Ordenamos los datos en forma de tabla:

número de cubos	5	x
superficie (m^2)	70	266

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita x:

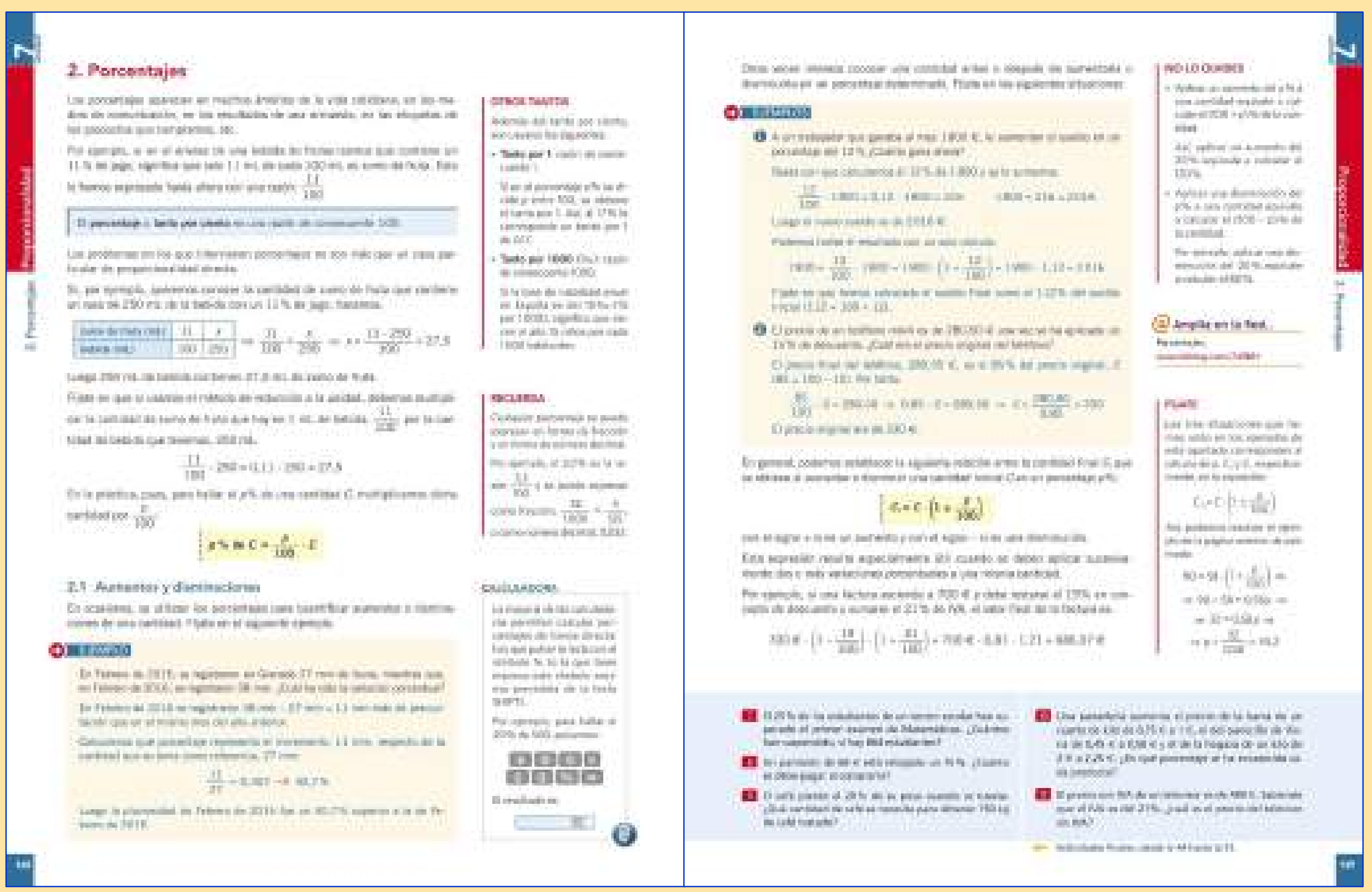
$$\frac{5}{70} = \frac{x}{266} \Rightarrow 70x = 1300 \Rightarrow x = \frac{1300}{70} = 19$$

Se necesitarán 19 cubos.

5. Ordenamos los datos en forma de tabla:

número de trajes	4	x
tela (m^2)	9	26

(Continúa en la página 7-27 de la guía)



2. Porcentajes

2.1 Aumentos y disminuciones

2. PORCENTAJES

■ El objetivo de esta sección es recordar la utilidad de los porcentajes en el día a día y las reglas básicas que rigen su operativa.

Para empezar leeremos la primera parte de la sección, observando detenidamente los ejemplos, donde aprenderemos a calcular porcentajes:

– *¿Qué es en realidad un porcentaje? Pon un ejemplo.*
– *¿Cómo podemos calcular un porcentaje de un número?*

■ A continuación prestaremos atención a las tres notas que aparecen en el margen de esta misma página, donde se repasan algunas carácterísticas de los porcentajes:

– *Expresa el porcentaje del 5% de los diferentes modos estudiados.*
– *¿Cuál es el tanto por uno correspondiente al 25%?*
– *¿Qué es un tanto por 1000?*

2.1 Aumentos y disminuciones

■ En este apartado trabajaremos la aplicación práctica más habitual de los porcentajes, a través de tres ejemplos.

Leeremos la introducción y observaremos detenidamente los cálculos realizados en el primer ejemplo:

– *¿Qué valores hemos dividido para obtener el incremento de lluvia en 2016?*
– *¿Cómo lo traducimos después a un porcentaje?*

■ Luego analizaremos los dos ejemplos siguientes y nos aseguraremos de su adecuada compresión realizando este cuestionario al alumnado:

– *¿Qué representa la cantidad 216 en el ejemplo 1?*
– *¿Con qué operación única podemos resolver el ejemplo 1?*
– *¿Por qué dividimos entre 0,85 en el ejemplo 2?*

Ahora leeremos la nota *No lo olvides* y preguntaremos:

– *¿Cómo aplicarías un aumento del 10% a 500?*
– *Aplica una disminución del 5% a 90.*

■ Continuaremos leyendo el texto de este apartado, junto con la nota *Fíjate*, donde se resume la metodología seguida para resolver este tipo de planteamientos:

– *¿Cómo podemos aplicar sucesivamente un aumento y un descuento en porcentaje a una cantidad inicial?*
– *Calcula la cantidad inicial antes de aplicarle un incremento del 5% y un descuento del 15% a 156.*

■ Los alumnos y alumnas resolverán ahora las actividades propuestas en el libro.

Podrán seguir practicando la operativa con porcentajes accediendo al recurso *@Amplía en la Red.*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Actividades.* Leer, comprender e interpretar los enunciados de los problemas que se plantean para poderlos resolver.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 7, 8 y 9.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia de resolución.
- *Acts. 10 y 11.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos sobre porcentajes.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 7, 8 y 9.* Desarrollar la capacidad de poner en práctica los conocimientos adquiridos sobre porcentajes, siendo perseverante en la resolución.
- *Acts. 10 y 11.* Identificar en la realización de los problemas las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ En las actividades de refuerzo 2 y 4 así como en la actividad de ampliación 2 podremos seguir trabajando los conceptos de aumento y disminución porcentual y sus aplicaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos entrar en el siguiente enlace para reforzar los automatismos en los porcentajes.

http://www.tiching.com/747102

La siguiente página web es un recurso del tipo Descartes. En ella se combina una explicación teórica con ejemplos sencillos y una propuesta de actividades relacionadas.

Es un recurso que permite un trabajo autónomo con lo que el profesor lo podrá proponer según el ritmo de cada alumno.

Pediremos a los alumnos que los resuelvan en su cuaderno y, a continuación, organizaremos una puesta en común sobre las dificultades o ventajas que han encontrado y favorecer así la interrelación en temas matemáticos de uso cotidiano.

Les podemos hacer notar cómo aumenta o disminuye el precio de un producto en el que aplicamos un descuento y el IVA.

Se requiere instalar el programa Java para visualizar correctamente las ventanas interactivas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 150

7. Bastará con calcular el 75 % de 864:

$\left(1-\frac{25}{100}\right)\cdot 864=\frac{75}{100}\cdot 864=\frac{3}{4}\cdot 864=648$ estudiantes han suspendido.

8. El precio final del pantalón es el 100% – 15% = 85% de su valor inicial.

Calculamos el 85% de 68: $\frac{85}{100}\cdot 68 = 0{,}85\cdot 68 = 57{,}8$

Se deben pagar 57,80 euros al comprarlo.

9. Los 150 kg de café tostado corresponde al 100% – 20% = 80% del café inicial.

Calculamos la cantidad C de café inicial: $\frac{80}{100}\cdot C = 150$

$\Rightarrow C = \frac{150\cdot 100}{80} = 187{,}5$

Se necesitan 187,5 kg de café.

10. Calculamos los porcentajes:

Barra de un cuarto de kilo: $1 = 0{,}75\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 0{,}75 + 0{,}0075p \Rightarrow 0{,}25 = 0{,}0075p \Rightarrow$

$p = \frac{0{,}25}{0{,}0075} = 33{,}333\ldots \Rightarrow$ Se ha encarecido un 33,33%

Panecillo de Viena: $0{,}50 = 0{,}45\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}50 = 0{,}45 + 0{,}0045p \Rightarrow 0{,}05 = 0{,}0045p \Rightarrow$

$\Rightarrow p = \frac{0{,}05}{0{,}0045} = 11{,}11 \Rightarrow$ Se ha encarecido un 11,11%

Hogaza de un kilo: $2{,}25 = 2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}25 = 2 + 0{,}02p \Rightarrow 0{,}25 = 0{,}02p \Rightarrow$

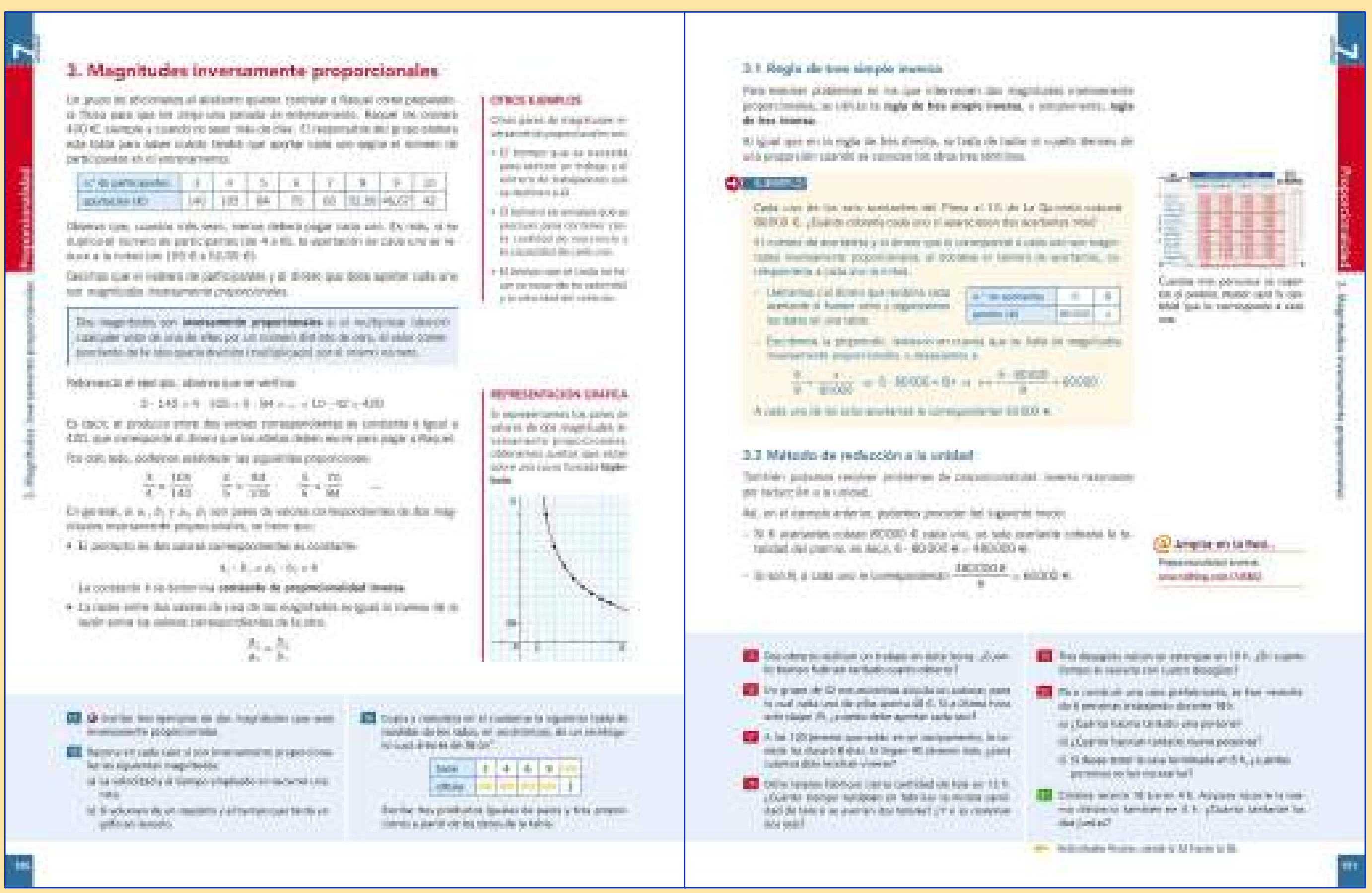
$\Rightarrow p = \frac{0{,}25}{0{,}02} = 12{,}5 \Rightarrow$ Se ha encarecido un 12,5%

11. Si el precio del televisor sin IVA es C $\Rightarrow$

$\Rightarrow 480 = C\cdot\left(1+\frac{21}{100}\right) \Rightarrow 480 = C\cdot 1{,}21 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = \frac{480}{1{,}21} \simeq 396{,}7$

El precio del televisor sin IVA es de 396,7 euros.



3. MAGNITUDES INV. PROPORCIONALES

■ El objetivo básico de esta sección es comprender la relación entre magnitudes inversamente proporcionales y su características y aplicaciones.

Comenzaremos leyendo los tres primeros párrafos, donde se introduce mediante un ejemplo cuándo dos magnitudes son inversamente proporcionales:

– *¿Por qué decimos que las magnitudes del ejemplo son inversamente proporcionales?*
– *¿Qué otro ejemplo se te ocurre de dos magnitudes inversamente proporcionales?*
– *¿En qué se diferencian de las magnitudes directamente proporcionales?*

■ Ahora leeremos la definición del recuadro y las características de estas magnitudes, expresadas en los párrafos que siguen:

– *Verifica que se cumple la definición en el caso de las magnitudes del ejemplo anterior.*
– *¿Qué es la constante de proporcionalidad inversa? ¿Qué valor tiene en el ejemplo?*
– *¿La razón entre dos valores correspondientes de las dos magnitudes es siempre la misma? Compruébalo en el caso de las magnitudes del ejemplo.*

■ Nos fijaremos a continuación en las notas del margen: *Otros ejemplos* y *Representación gráfica*, que comentaremos con los alumnos y alumnas:

– *Razona por qué las magnitudes de los ejemplos son inversamente proporcionales.*
– *¿Cómo es la representación gráfica de dos magnitudes inversamente proporcionales? ¿Es una curva creciente o decreciente? ¿Por qué?*

3.1 Regla de tres simple inversa

■ El alumnado leerá la introducción del siguiente apartado y después observaremos el ejemplo y la nota del margen:

– *¿Por qué las magnitudes del ejemplo son inversamente proporcionales?*
– *¿Qué pasaría si hubiera sólo 4 acertantes?*
– *¿En qué consiste la regla de tres inversa?*

Para afianzar este método, el alumnado accederá al recurso web que encontrará en *@Amplía en la Red.*

3.2 Método de reducción a la unidad

■ Leeremos a continuación este apartado, en el que resolveremos el ejemplo anterior aplicando otro método:

– *¿De qué dos pasos consta el método de reducción a la unidad?*

Por último los alumnos y alumnas realizarán las actividades propuestas en las páginas 150 y 151.

Competencias clave

Comunicación lingüística

■ *Act. 13.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar procesos y estrategias propias de resolución y de generar ideas e hipótesis.

■ *Acts. 15 a 21.* Leer, comprender e interpretar los enunciados de los problemas y procesar los atos adecuadamente.

Aprender a aprender

■ *Acts. 15, 16, 17 y 18.* Aplicar los conocimientos adquiridos sobre la regla de tres simple inversa de manera repetitiva, para mejorar la eficacia de la resolución de problemas.

■ *Acts. 19, 20 y 21.* Saber transformar la información para construir sus propias estrategias y aplicarlas en la resolución de las actividades.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

■ *Acts. 12 y 21.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre magnitudes, siendo creativo, flexible y perseverante.

Recursos didácticos de la guía

✓ En la actividad de refuerzo 3 trataremos de identificar dos magnitudes inversamente proporcionales.

Recursos didácticos

Navegamos por Tiching

– Para seguir trabajando en clase con magnitudes y proporciones, proponemos el siguiente recurso del tipo Descartes:

http://www.tiching.com/747103

Antes de introducirse en el tema, les preguntaremos:

- *¿Cómo explicarías la relación entre el tiempo empleado en levantar un muro y los obreros que realizan el trabajo?*
- *Si aumentamos los litros de leche a envasar pero utilizamos el mismo número de envases ¿cómo podemos explicar esto?*

En esta página web encontrarán una parte teórica y unas actividades interactivas a resolver. Dentro del mismo recurso, les podemos sugerir que accedan al apartado sobre proporcionalidad inversa y que completen las actividades que se proponen sobre regla de tres inversa.

Se requiere instalar el programa Java para visualizar correctamente las ventanas interactivas.

Soluciones de las actividades

Página 150

12. Actividad personal. A modo de ejemplo:

– Velocidad y tiempo empleado en recorrer una distancia fija.

– Número de operarios y tiempo empleado en realizar un trabajo determinado.

– Número de animales y días que le dura una cantidad fija de alimento.

13. Razonamos si son inversamente proporcionales las magnitudes dadas:

a) Sí son inversamente proporcionales, porque a más velocidad menos tiempo empleado y además al doble de velocidad la mitad de tiempo.

b) No son inversamente proporcionales (son directamente proporcionales), porque a más volumen más tiempo en llenarlo y el doble de volumen el doble de tiempo.

14. Completamos la tabla, teniendo en cuenta que el producto de ambas dimensiones es siempre 36:

base	2	4	6	9	12
altura	18	9	6	4	3

Tres productos de pares iguales son: $2 \cdot 18$, $4 \cdot 9$, $6 \cdot 6$

Tres proporciones son: $\frac{4}{2} = \frac{18}{9}$, $\frac{6}{4} = \frac{9}{6}$, $\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$

Página 151

15. Por definición de magnitudes inversamente proporcionales, el doble de obreros tarda la mitad de tiempo, por tanto habrían tardado 3 horas y media.

16. Tratándose de magnitudes inversamente proporcionales:

$$32 \cdot 40 = 25 \cdot x \Rightarrow x = \frac{32 \cdot 40}{25} = 51,2\ €$$

17. Lo resolvemos por el método de la regla de tres inversa:

Ordenamos los datos en forma de tabla:

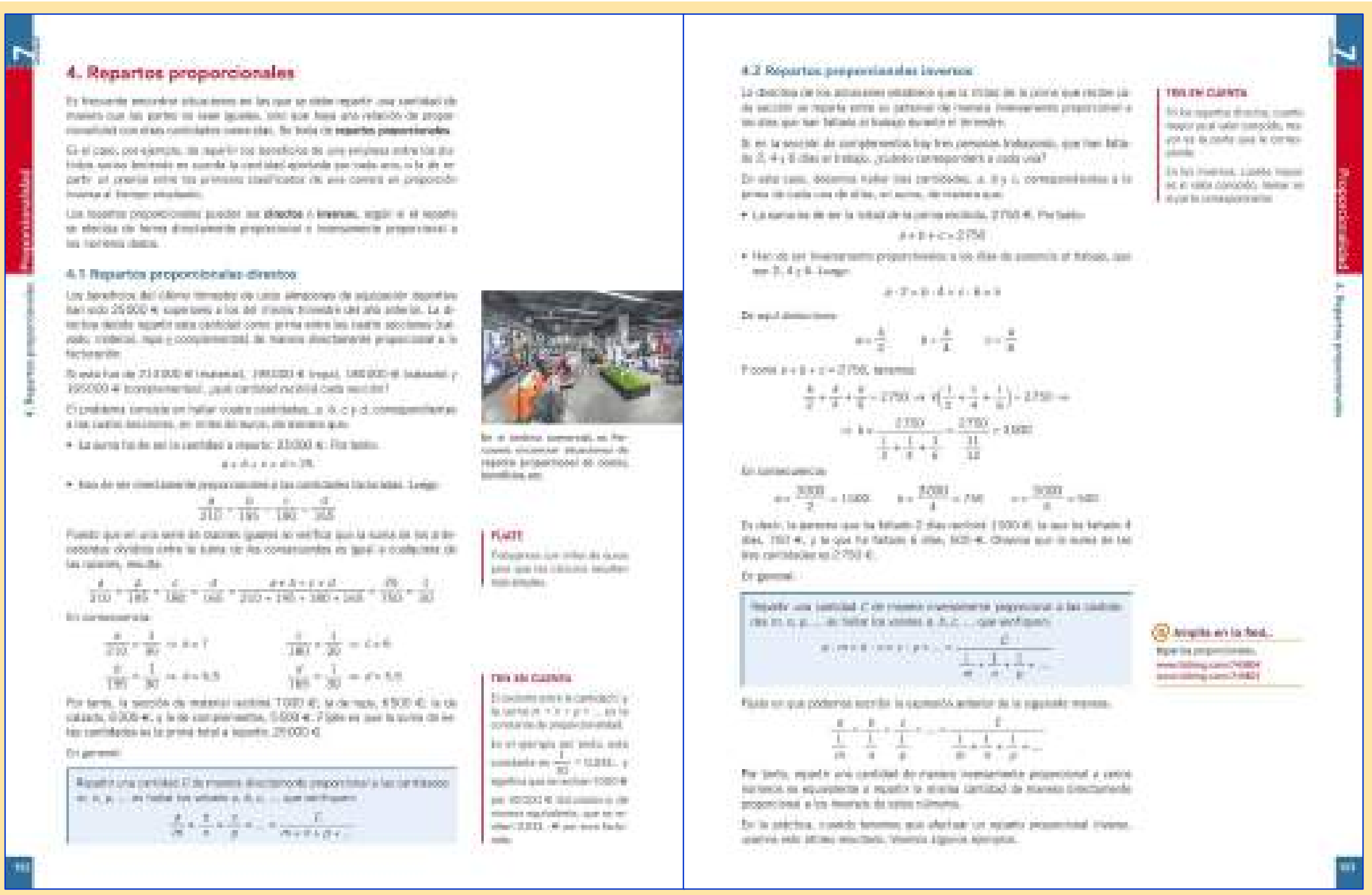
Nº de jóvenes	120	160
días	8	x

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita x:

$$\frac{120}{160} = \frac{x}{8} \Rightarrow 160x = 960 \Rightarrow x = \frac{960}{160} = 6$$

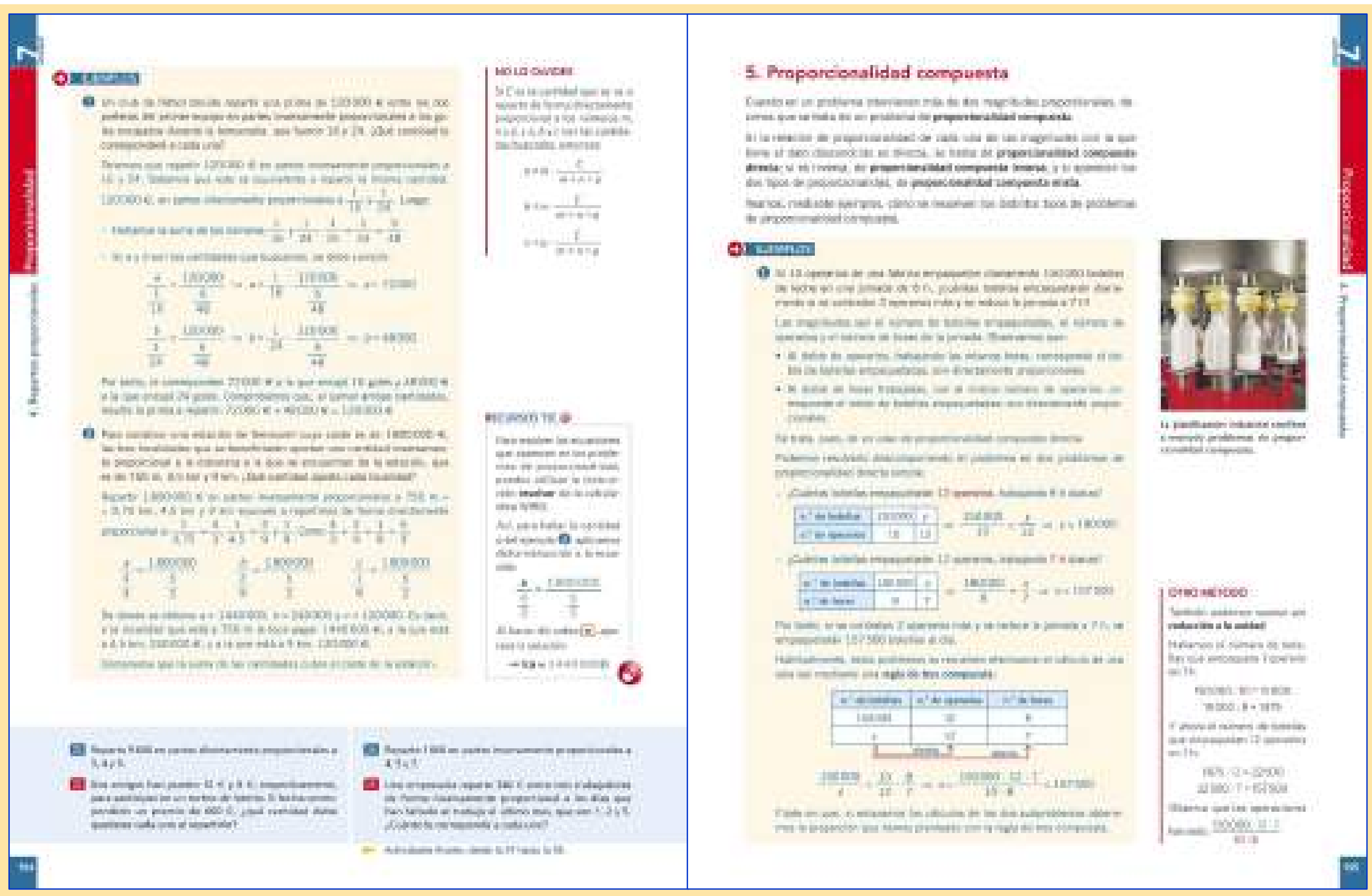
Tendrán víveres para 6 días.

(Continúa en la página 7-27 de la guía)


4. Repartos proporcionales

4.1 Repartos proporcionales directos

4.2 Repartos proporcionales inversos


5. Proporcionalidad compuesta

4.1 Rep. prop. directos / 4.2 Rep. prop. inversos

■ Para empezar esta sección leeremos la introducción, observando la imagen de la derecha, y proseguiremos con el ejemplo resuelto en el primer apartado, prestando atención a la nota *Fíjate:*

– *¿Cuándo se dice que un reparto proporcional es directo?*
– *¿Por qué se cumple que a/210 = b/195* en el ejemplo*?*
– *¿Qué regla, aplicada en el ejemplo, se cumple entre varias razones iguales?*
– *¿Cómo obtenemos que 25/750 = 1/30?*
– *¿A quién le corresponde más prima, al que facturó más o al que facturó menos?*

Después destacaremos al alumnado la fórmula del recuadro y el apunte del margen *Ten en cuenta*.

■ Procederemos del mismo modo con el siguiente apartado, planteando las siguientes preguntas a los alumnos y alumnas:

– *¿Qué representa el valor k?*
– *¿Por qué sabemos que 2a = 4b = 6c?*
– *¿Quién ha recibido mayor cantidad, el empleado que ha faltado más días o el que ha faltado menos?*

Después leeremos la nota *Ten en cuenta* y practicaremos los métodos explicados realizando los ejercicios propuestos en los recursos *@Amplía en la Red.*

■ A continuación leeremos los tres párrafos siguientes, donde aprenderemos una forma alternativa de repartir de manera inversamente proporcional a unas cantidades.

Antes de observar los ejemplos, leeremos la nota *No lo olvides.* Después analizaremos detenidamente los dos ejemplos y preguntaremos a los alumnos y alumnas:

– *¿Quién debe recibir mayor prima, el portero que encajó 16 goles o el que encajó 24?*
– *¿Qué fórmula hemos aplicado para calcular cada cantidad? Razona tu respuesta.*

Ahora el alumnado resolverá los ejercicios del libro y el docente explicará, siguiendo la nota del margen, cómo *Wiris* puede ayudarles a resolver este tipo de problemas.

■ Comenzaremos la siguiente sección con la lectura de la introducción, que comprenderemos mejor mediante los ejemplos resueltos en el libro a continuación.

Observaremos el primer ejemplo, resuelto de tres formas diferentes, incluyendo la indicada en la nota *Otro método.* Nos fijaremos en la imagen del margen y después el alumnado contestará a este cuestionario:

– *¿Por qué sabemos que el supuesto del ejemplo es un caso de proporcionalidad compuesta directa?*
– *¿En qué se parecen los tres métodos?*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 23 y 25.* Leer e interpretar el enunciado procesando los datos de manera ordenada.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Amplía en la Red, pág. 153.* Aprender a reforzar los contenidos vistos en la unidad mediante el uso de los recursos que nos ofrece la red, en este caso, dos páginas web sobre repartos proporcionales.

■ *Recursos TIC, pág. 154.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la calculadora WIRIS, con la que se pueden resolver las ecuaciones que aparecen en los problemas de proporcionalidad.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 22 y 24.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridas a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 23 y 25.* Identificar en la realización de las actividades, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 154

22. Se verifica que:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{9600}{3+4+5}=\frac{9600}{12}=800\text{. Por tanto:}$$

$$\frac{a}{3}=800 \Rightarrow a=3\cdot 800=2400$$

$$\frac{b}{4}=800 \Rightarrow b=4\cdot 800=3200$$

$$\frac{c}{5}=800 \Rightarrow c=5\cdot 800=4000$$

Las partes del reparto son 2400, 3200 y 4000.

23. Se trata de un reparto directamente proporcional:

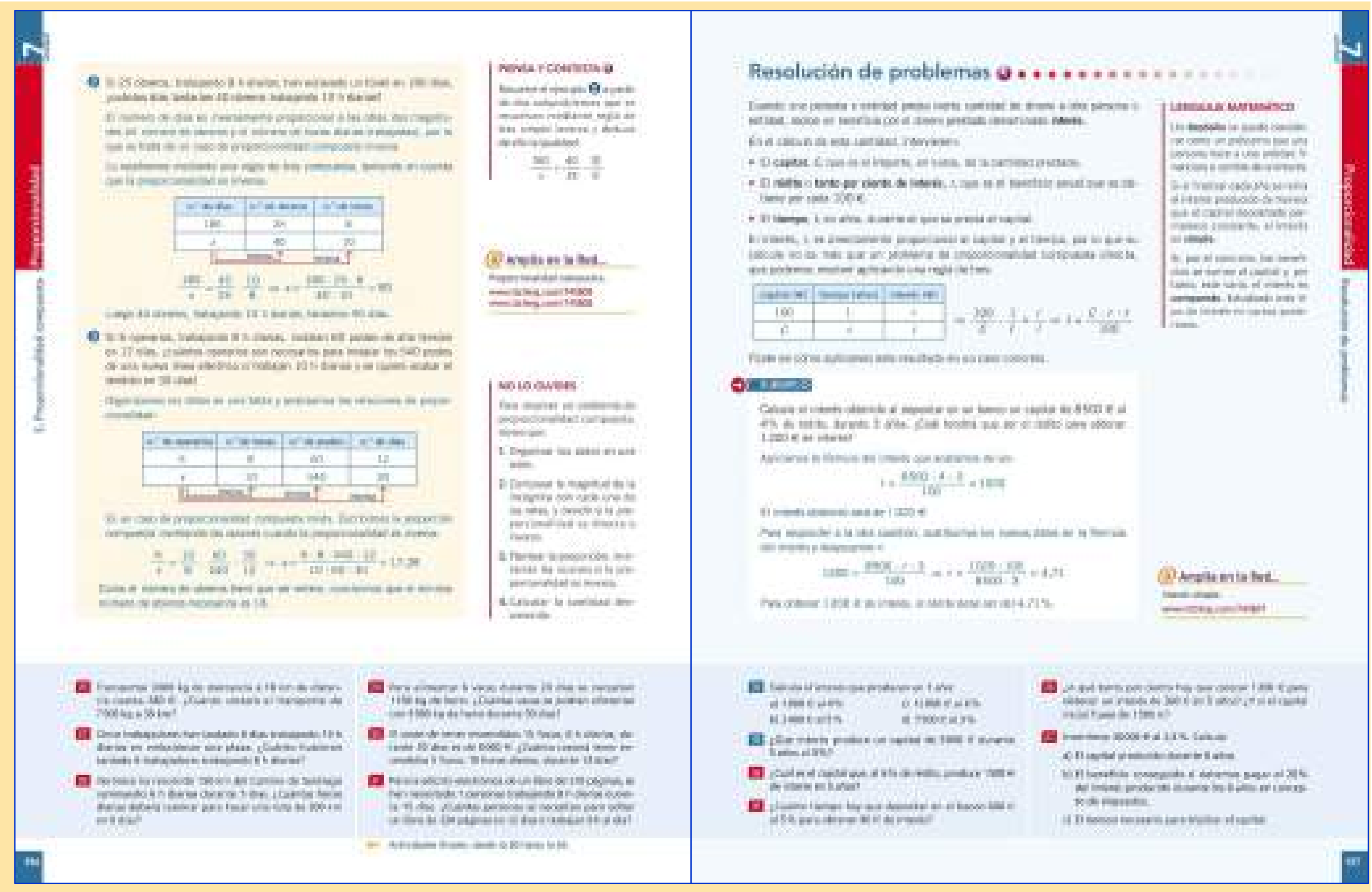
$$\text{Se verifica: } \frac{a}{12}=\frac{b}{8}=\frac{660}{12+8}=\frac{660}{20}=33\text{. Por tanto:}$$

$$\frac{a}{12}=33 \Rightarrow a=12{\cdot}33=396$$

$$\frac{b}{8}=33 \Rightarrow b=8{\cdot}33=264$$

El primero (que puso 12 €) debe quedarse 396 € y el segundo 264 €.

(Continúa en la página 7-28 de la guía)


Resolución de problemas

5. PROPORCIONALIDAD... (CONT) / RESOLUCIÓN...

■ Analizaremos a continuación el ejemplo 2, de proporcionalidad compuesta inversa, y lanzaremos los siguientes retos al alumnado:

– *¿Por qué el número de días es inversamente proporcional a las otras dos magnitudes?*
– *¿Cómo hemos obtenido la expresión para resolver el problema?*
– *¿Tiene sentido que los obreros tarden la mitad de días?*

Ahora plantearemos a los alumnos y alumnas el ejercicio indicado en el epígrafe *Piensa y contesta.*

■ Después examinaremos el segundo ejemplo, en este caso de proporcionalidad compuesta mixta:

– *¿Por qué el número de horas y operarios son inversamente proporcionales?*
– *¿Por qué hemos invertido las razones de las magnitudes número de horas y número de días?*
– *¿Por qué el número de obreros es 18 y no 17?*

■ Como repaso de la metodología trabajada en los ejemplos, podemos leer la nota *No lo olvides*, que recoge los pasos a seguir para resolver este tipo de problemas.

Los alumnos y alumnas afianzarán este método mediante los ejercicios planteados en *Amplía en la Red* en la página 156. Posteriormente les indicaremos que resuelvan los propuestos en el libro en la misma página.

■ El objetivo de la siguiente sección consiste en presentar una de las principales aplicaciones de los métodos estudiados en esta unidad.

En primer lugar leeremos la explicación teórica, que comentaremos con el alumnado a través de las siguientes cuestiones:

– *¿Qué es el interés? ¿Y el rédito?*
– *¿Por qué el interés es directamente proporcional al capital y al tiempo?*
– *¿En qué unidad se expresa el tiempo?*

■ A continuación veremos cómo aplicar los conceptos anteriores en el ejemplo resuelto:

– *¿Por qué el rédito obtenido es superior al inicial?*

Completaremos estos conceptos con las ideas expresadas en el apunte *Lenguaje matemático.*

■ Los alumnos y alumnas pueden acceder ahora al recurso web *@Amplía en la Red* de la página 157, donde pondrán autoevaluar su destreza a la hora de resolver este tipo de problemas.

Por último pediremos al alumnado que conteste a las actividades propuestas en el libro en la página 157.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Actividades.* Leer, comprender e interpretar los enunciados, procesando los datos de manera adecuada y ordenada.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 26 a 31.* Aplicar el proceso aprendido sobre proporcionalidad compuesta, de forma repetitiva, para mejorar la eficacia en su resolución.
- *Actividades.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Piensa y contesta, pág. 156.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.
- *Resolución de problemas, pág. 157.* Observar el planteamiento y la resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas, así como el orden de las operaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 persigue seguir trabajando el cálculo de un interés simple.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de adquirir práctica en la resolución de problemas de proporcionalidad, proponemos entrar en este enlace:

http://www.tiching.com/747105

En la página web se proponen variedad de problemas de diferente nivel. Como docentes les presentaremos el enunciado sin la solución. A continuación, pediremos a nuestro alumnado que resuelvan los problemas en el cuaderno.

Posteriormente podrán acceder a la página y verificar el planteamiento y la solución, repasando paso a paso todo el desarrollo del problema.

Como son ejercicios autocorrectivos, el alumno tiene un conocimiento más personalizado de su proceso de aprendizaje, lo que favorece su compromiso y así mismo facilita la autonomía.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 156

26. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Peso (kg)	Distancia (km)	Coste (€)
3000	18	280
7500	36	*x*

Directa *Directa*

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{280}{x}=\frac{3000}{7500}\cdot\frac{18}{36}\Rightarrow x=\frac{280\cdot 7500\cdot 36}{3000\cdot 18}=\frac{75600}{54}=1400$$

El transporte costará 1400 euros.

27. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº trabajadores	días	Horas / día
5	8	10
6	*x*	8

Inversa *Inversa*

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{8}{x}=\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{8\cdot 5\cdot 10}{6\cdot 8}=8{,}333\ldots$$

Hubieran tardado 8 días y 8 horas.

28. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Distancia (km)	Horas / día	Días
150	6	5
200	*x*	8

Directa *Inversa*

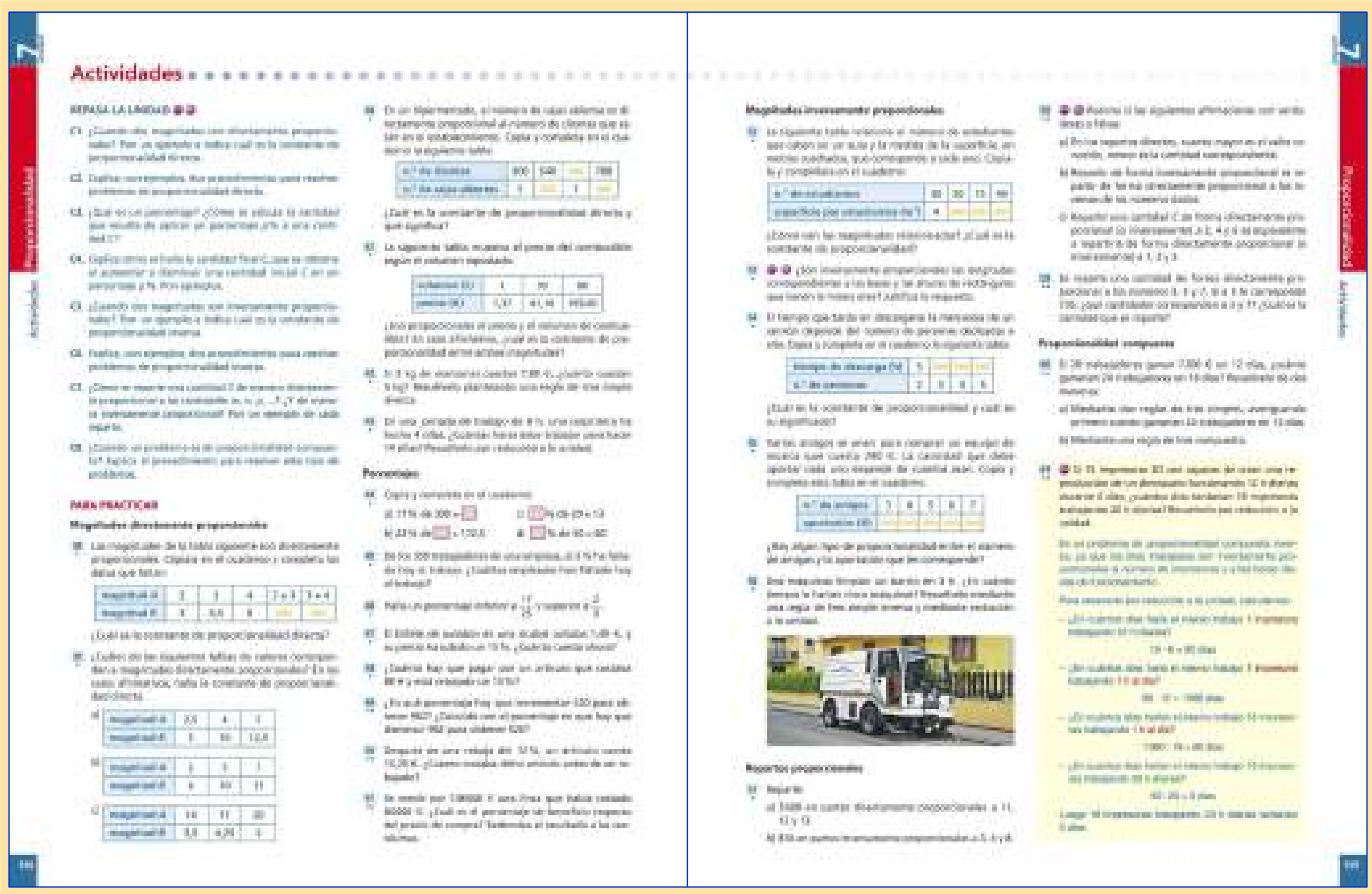
Escribimos la proporción compuesta:

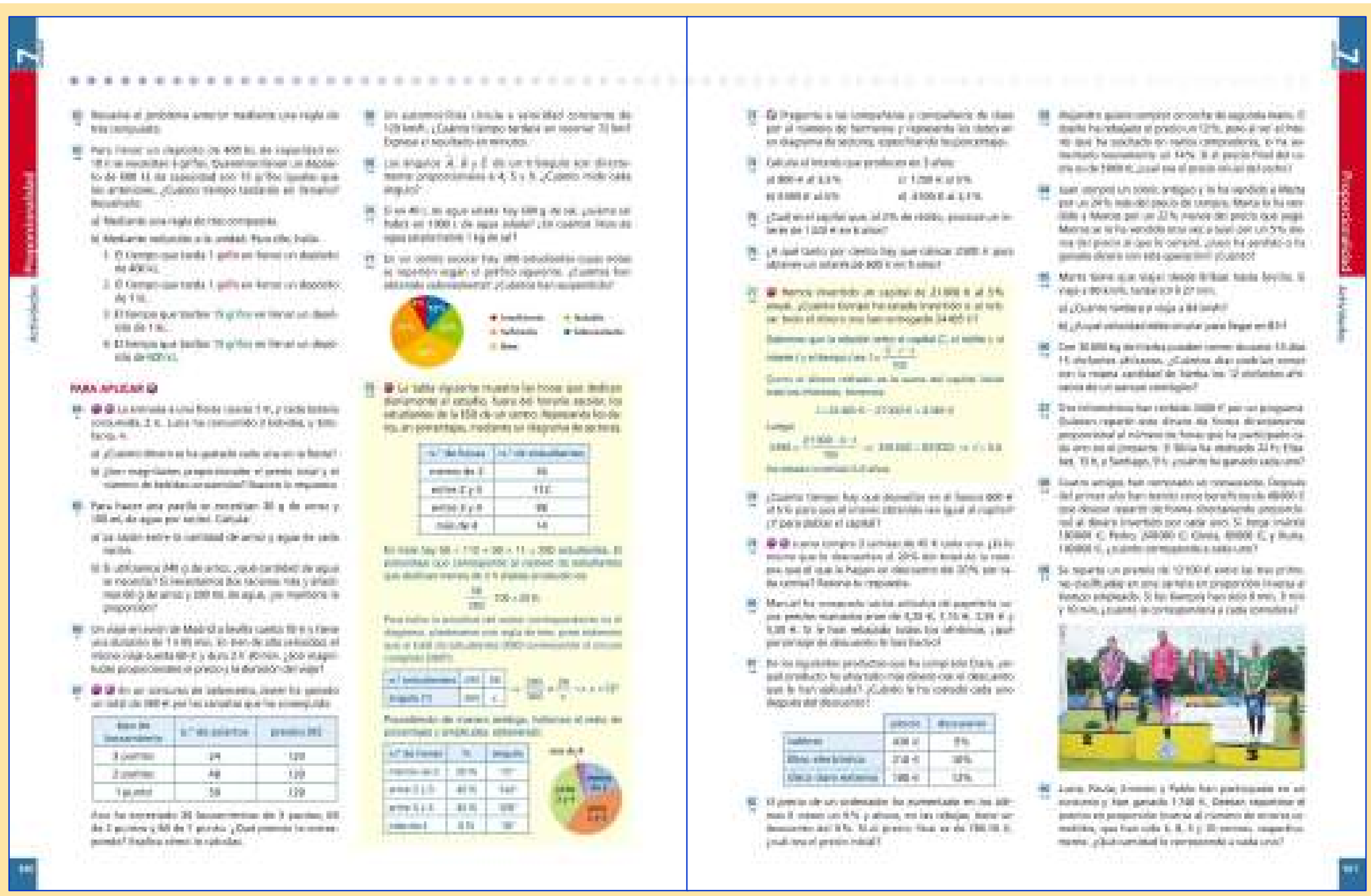
$$\frac{6}{x}=\frac{150}{200}\cdot\frac{8}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{6\cdot 200\cdot 5}{150\cdot 8}=\frac{600}{120}=5$$

Verónica deberá caminar durante 5 horas diarias.

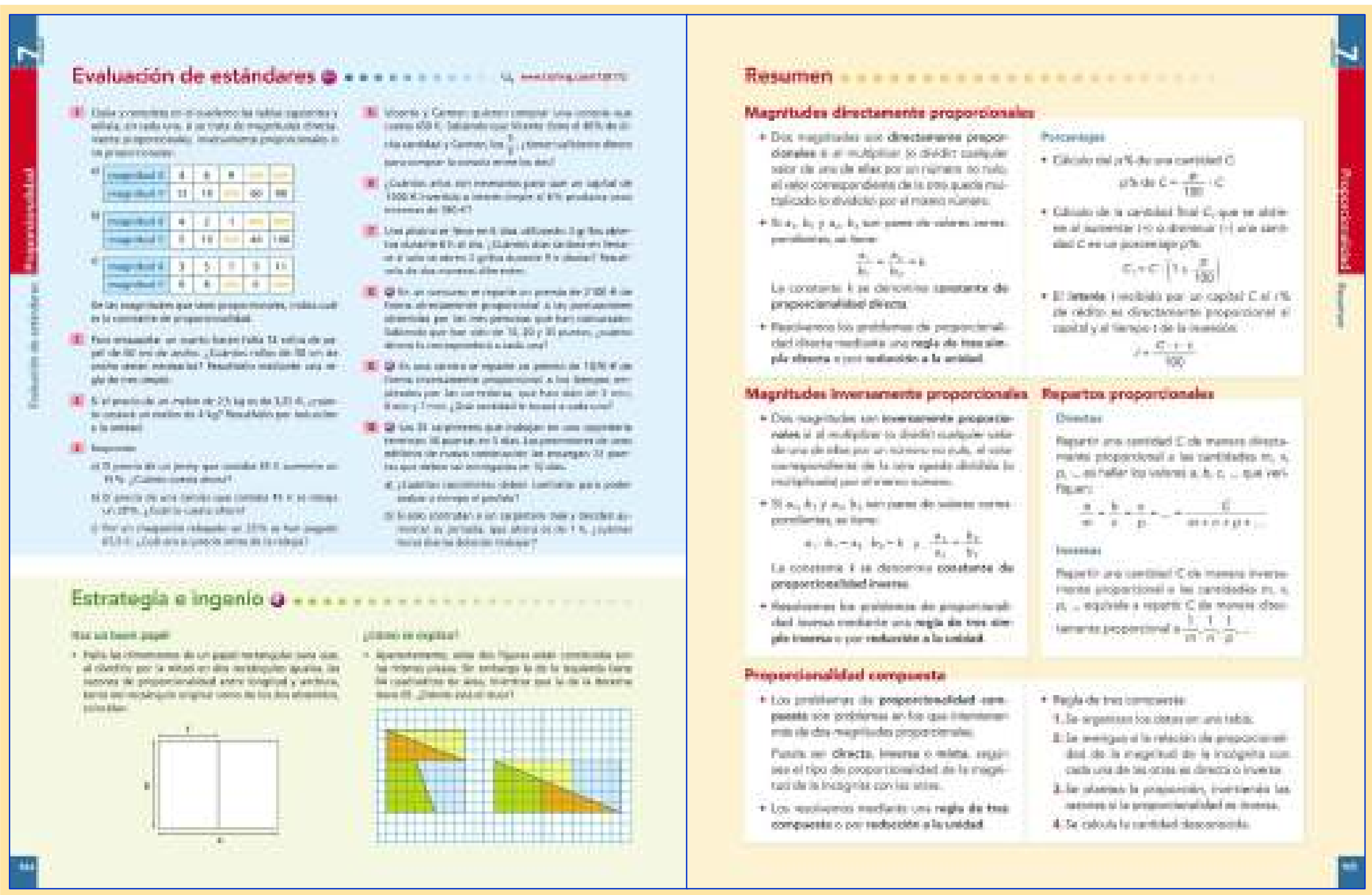
(Continúa en la página 7-28 de la guía)





Desarrolla tus competencias

OFERTAS Y DESCUENTOS



Evaluación de estándares

Estrategia e ingenio

Resumen

Magnitudes directamente proporcionales

Magnitudes inversamente proporcionales

Repartos proporcionales

Proporcionalidad compuesta

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

Repasa la unidad, pág. 158. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad.

Usar el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.

- *Acts. 53, 58, 64, 67 y 79 y Desarrolla tus competencias, pág. 163.* Leer y comprender el estímulo y los enunciados y expresar por escrito argumentos propios de manera adecuada.

APRENDER A APRENDER

- *Repasa la unidad, pág. 158.* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, y ser consciente de las propias capacidades y carencias.
- *Acts. 53, 58, 64, 67, 79, 98 y 99.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.
- *Acts. 61, 72 y 77.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas, buscando una coherencia global al ejecutar el plan de resolución de una actividad o un problema.
- *Cálculo mental, pág. 162.* Aprender estrategias y técnicas de cálculo mental, adquiriendo confianza en uno mismo y en las propias estrategias.
- *Desarrolla tus competencias, pág. 163. Evaluación de estándares, pág. 164.* Ser consciente de las propias capacidades en el tema estudiado.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Para aplicar, pág. 160.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, aplicando los conocimientos sobre proporcionalidad trabajados en el tema.
- *Acts. 96 a 104.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo del tema, mostrando criterio propio al llevar las ideas a la práctica.
- *Cálculo mental, pág. 162.* Elegir entre diferentes alternativas y ser capaz de planificar mentalmente la resolución.
- *Desarrolla tus competencias, pág. 163. Evaluación de estándares, pág. 164, acts. 8, 9 y 10.* Buscar las soluciones de forma creativa, imaginativa y flexible en el planteamiento, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.

COMPETENCIA SOCIAL

- *Desarrolla tus competencias, pág. 163. Act. 73.* Estimular la competencia para organizar actividades grupales y desarrollar las habilidades sociales para ello.

ACTIVIDADES FINALES

- En la sección de *Actividades* el alumnado se enfrentará a una colección de ejercicios en orden creciente de dificultad, con el fin de afianzar todos los contenidos del tema, desde un punto de vista práctico y teórico.
- La sección *Desarrolla…* persigue fomentar la autonomía del alumnado y la utilización de distintos recursos para resolver un planteamiento dado. A través de un caso práctico, el alumno ejercitará su capacidad de análisis y su actitud proactiva en la búsqueda de soluciones, además de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica.
- Con la sección de *Evaluación…* se pretende que los alumnos y alumnas valoren el nivel de conocimientos alcanzados. Propone una serie de actividades que repasan la unidad de un modo completo y práctico.
- La sección *Estrategia…* propone una serie de acertijos relacionados con los conceptos trabajados durante el tema, con el fin de que el alumnado desarrolle su imaginación y adquiera destreza relacionando ideas.
- La finalidad de la sección *Resumen* es recopilar los contenidos fundamentales de la unidad en un mapa conceptual que destaque las relaciones entre los conceptos y los procedimientos estudiados.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 158

C1. Dos magnitudes son **directamente proporcionales** si al multiplicar o dividir cualquier valor de una de ellas por un número distinto de cero, el valor correspondiente de la otra queda también multiplicado o dividido por el mismo número.

Como ejemplo, tenemos dos magnitudes proporcionales, *a* y *b*:

magnitud a	3	6	9
magnitud b	1	2	3

Su constante de proporcionalidad directa es:

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = 3$$

C2. Actividad personal. Dos posibles procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad directa son la *regla de tres simple directa* y el *método de reducción a la unidad.*

C3. Un porcentaje es una razón de consecuente 100.

Para calcular el $p\%$ de una cantidad C, multiplicamos dicha cantidad por $\frac{p}{100}$:

$$p\% \text{ de } C = \frac{p}{100} \cdot C$$

C4. La cantidad final C_f que se obtiene al aumentar o disminuir una cantidad inicial *C* en un porcentaje *p%:*

$$C_f = C \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$$

Ejemplos:

Si se aumenta un 6% el precio de un producto que cuesta 45€:

$$C_f = 45 \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 47,7$$

Si se rebaja un 12% el precio de un producto que cuesta 51€:

$$C_f = 51 \cdot \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 44,88$$

C5. Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** si al multiplicar cualquier valor de una de ellas por un número distinto de cero, el valor correspondiente de la otra queda también dividido por el mismo número.

Como ejemplo, tenemos dos magnitudes, *a* y *b*:

magnitud a	3	6	12
magnitud b	4	2	1

Su constante de proporcionalidad inversa es:

$$3 \cdot 4 = 6 \cdot 2 = 12 \cdot 1 = 12$$

C6. Actividad personal. Dos posibles procedimientos para resolver problemas de proporcionalidad inversa son la *regla de tres simple inversa* y el *método de reducción a la unidad*.

C7. Para repartir una cantidad *C* de manera directamente proporcional a unas cantidades *m, n, p, ...*:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \ldots = \frac{C}{m+n+p+\ldots}$$

Siendo *a, b, c, ...* las cantidades a repartir.

Para repartir un cantidad *C* de manera inversamente proporcional a unas cantidades *m, n, p, ...*:

$$a \cdot m = b \cdot n = c \cdot p = \ldots = \frac{C}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \ldots}$$

Siendo *a, b, c, ...* las cantidades a repartir.

C8. Un problema es de **proporcionalidad compuesta** cuando intervienen en él más de dos magnitudes proporcionales.

Los pasos a seguir para resolver un problema de este tipo son:

1. Organizar los datos en una tabla.
2. Comparar la magnitud de la incógnita con cada una de las otras, y decidir si la proporcionalidad es directa o inversa.
3. Plantear la proporción, invirtiendo las razones si la proporcionalidad es inversa.
4. Calcular la cantidad desconocida.

38. La tabla completa sería:

magnitud *A*	2	3	4	2+3	3+4
magnitud *B*	3	4,5	6	7,5	10,5

La constante de proporcionalidad es $k = \frac{3}{2} = 1,5$.

39. Comparamos las proporciones y decidimos:

a) $\frac{5}{2,5} \neq \frac{10}{4} = \frac{12,5}{5} \Rightarrow$ NO son magnitudes directamente proporcionales.

b) $\frac{4}{2} = \frac{10}{5} \neq \frac{11}{7} \Rightarrow$ NO son magnitudes directamente proporcionales.

c) $\frac{3,5}{14} = \frac{4,25}{17} = \frac{5}{20} = 0,25 \Rightarrow$ SI son magnitudes directamente proporcionales, y la constante de proporcionalidad es k = 0,25.

40. La tabla completa sería:

Nº de clientes	300	540	420	780
Nº de cajas abiertas	5	9	7	13

La constante de proporcionalidad directa es:

$k = \frac{5}{300} = \frac{1}{60}$, y significa que hay una caja abierta por cada 60 clientes.

41. Comparamos las proporciones y decidimos:

$\frac{1,37}{1} = \frac{41,10}{30} = \frac{109,60}{80} = 1,37 \Rightarrow$ SI son directamente proporcionales, y la constante de proporcionalidad es:

k = 1,37 (el precio del litro)

42. Lo resolvemos por el método de la regla de tres directa:

Ordenamos los datos en forma de tabla:

peso (kg)	3	5
coste (€)	7,80	*x*

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita *x*:

$$\frac{3}{7,80} = \frac{5}{x} \Rightarrow 3x = 39 \Rightarrow x = \frac{39}{3} = 13$$

5 kg de manzanas cuestan 13 euros.

43. Lo resolvemos por el método de reducción a la unidad:

Si para hacer 4 sillas el carpintero tarda 8 horas, para 1 silla tardará 8 : 4 = 2 horas.

Luego para hacer 14 sillas tardará 14 · 2 = 28 horas.

44. Completamos:

a) 17% de 300 = $\boxed{51}$

b) 23% de $\boxed{750}$ = 172,5

c) $\boxed{65}$ % de 20 = 13

d) $\boxed{120}$ % de 50 = 60

45. Calculamos el 2% de 350 = 0,02·350 = 7

Han faltado hoy 7 empleados

46. Resolvemos:

Por un lado $\frac{17}{25} = \frac{68}{100}$

Por lo tanto cualquier porcentaje menor que 68%.

Por otro lado $\frac{2}{3} = \frac{66,\widehat{6}}{100}$

Es decir, es válido cualquier porcentaje mayor que $66,\widehat{6}\%$.

47. Calculamos el precio final C_f después de la subida:

$$C_f = 1,40\left(1+\frac{15}{100}\right) = 1,40·1,15 = 1,61$$

El billete cuesta ahora 1,61 euros.

48. Calculamos el precio final C_f después de la rebaja:

$$C_f = 88\left(1-\frac{15}{100}\right) = 88·0,85 = 74,8$$

Hay que pagar 74,8 euros.

49. Calculamos el porcentaje p a incrementar:

$$962 = 520\left(1+\frac{p}{100}\right) \Rightarrow 962 = 520 + 5,20p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 442 = 5,20p \Rightarrow p = \frac{4,42}{5,20} = 85$$

Hay que incrementarlo un 85%.

Calculamos el porcentaje p a disminuir:

$$520 = 962\left(1-\frac{p}{100}\right) \Rightarrow 520 = 962 - 9,62p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -442 = -9,62p \Rightarrow p = \frac{-442}{-9,62} = 45,9$$

Hay que disminuirlo un 45,9%, por tanto no coincide con el porcentaje a incrementar anterior.

50. Calculamos el precio inicial C:

$$13,20 = C\left(1-\frac{12}{100}\right) \Rightarrow 13,20 = 0,88·C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{13,20}{0,88} = 15$$

El artículo costaba 15 euros antes de ser rebajado.

51. Calculamos el porcentaje p de beneficio:

$$108000 = 84000\left(1+\frac{p}{100}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 108000 = 84000 + 840p \Rightarrow 24000 = 840p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{24000}{840} \simeq 28,57$$

El porcentaje de beneficio es 28,57%.

Página 159

52. Completamos la tabla teniendo en cuenta que el producto de los valores correspondientes de ambas magnitudes es el mismo número:

Nº de alumnos	30	20	15	40
Superficie por alumno (m^2)	4	6	8	3

Son magnitudes inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es k = 30 · 4 = 120.

53. Sí son inversamente proporcionales, porque el producto de la base por la altura siempre da el mismo resultado, el área, que es la constante de proporcionalidad inversa.

54. Completamos la tabla teniendo en cuenta que el producto de los valores correspondientes de ambas magnitudes es el mismo número:

Tiempo de descarga (h)	5	3,33	2,5	2
Nº de personas	2	3	4	5

La constante de proporcionalidad inversa es k = 5 · 2 = = 10, y significa el tiempo que tarda una sola persona en descargar la mercancía.

55. Completamos la tabla teniendo en cuenta que el producto de los valores correspondientes de ambas magnitudes es el mismo número:

Nº de amigos	3	4	5	6	7
Contribución (€)	80	60	48	40	34,29

Son magnitudes inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es k = 3 · 80= 240.

56. Primero lo resolvemos por el método de la regla de tres inversa:

Ordenamos los datos en forma de tabla:

Nº de máquinas	2	5
Tiempo (h)	3	*x*

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita x:

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5} = 1,2$$

Lo resolvemos por el método de reducción a la unidad:

– Si 2 máquinas tardan 3 horas, 1 máquina tardará 2 · 3 = 6 horas.

– Si son 5 máquinas tradarán 6 : 5 = 1,2 horas.

Por tanto, 5 máquinas lo harán en 1,2 horas = 1 hora 12 minutos.

57. Repartimos:

a) Se verifica que:

$$\frac{a}{11}=\frac{b}{12}=\frac{c}{13}=\frac{3600}{11+12+13}=\frac{3600}{36}=100$$

Por tanto:

$$\frac{a}{11}=100 \Rightarrow a = 1100$$

$$\frac{b}{12}=100 \Rightarrow b = 1200$$

$$\frac{c}{13}=100 \Rightarrow c = 1300$$

Las partes del reparto son 1100, 1200 y 1300.

b) Se verifica que:

$$3a = 4b = 8c = \frac{816}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{816}{\frac{8+6+3}{24}}=1152$$

Por tanto:

$$3a = 1152 \Rightarrow a = \frac{1152}{3}=384$$

$$4b = 1152 \Rightarrow b = \frac{1152}{4}=288$$

$$8c = 1152 \Rightarrow c = \frac{1152}{8}=144$$

Las partes del reparto son 384, 288 y 144.

58. Las respuestas son las siguientes:

a) Falso, a mayor valor le corresponde mayor cantidad, pues al dividirlos siempre tiene que dar la misma cantidad.

b) Verdadero, pues que se verifique:

$$a \cdot m = b \cdot n = \ldots = \frac{c}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\ldots}$$

equivale a que se verifique:

$$\frac{a}{\frac{1}{m}}=\frac{b}{\frac{1}{n}}=\ldots=\frac{c}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\ldots}$$

c) Verdadero, porque los valores conocidos son proporcionales.

59. Se verifica que:

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=\frac{C}{15}$$

Si b = 735, será $\frac{b}{5}=\frac{735}{5}=147$. Por tanto:

$$\frac{a}{3}=147 \Rightarrow a = 441$$

$$\frac{c}{7}=147 \Rightarrow c = 1029$$

$$\frac{C}{15}=147 \Rightarrow C = 2205$$

A 3 le corresponde 441, a 7 le corresponde 1029 y la cantidad que se reparte es 2205.

60. Las soluciones son las siguientes:

a) ¿Cuánto ganarán 24 trabajadores en 12 días?

Nº trabajadores	20	24
Ganancia (€)	7200	*y*

$$\frac{20}{700}=\frac{24}{y}\Rightarrow 20y = 16800 \Rightarrow y = 8640$$

¿Cuánto ganarán 24 trabajadores en 16 días?

Días	12	16
Ganancia (€)	8640	*x*

$$\frac{12}{8640}=\frac{16}{x}\Rightarrow 12x = 138\,240 \Rightarrow x = 11\,520$$

Ganarían 11 520 euros.

b) Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº trabajadores	Ganancia (€)	Días
150	7200	12
200	*x*	16

Directa *Directa*

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{7200}{x}=\frac{20}{24}\cdot\frac{12}{16}\Rightarrow x = \frac{7200\cdot 24\cdot 16}{20\cdot 12}=11520$$

Ganarían 11 520 euros.

61. Ejercicio resuelto en el libro.

Página 160

62. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº impresoras	Horas/día	Días
15	12	6
18	20	*x*

Inversa

Inversa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{6}{x}=\frac{18}{15}\cdot\frac{20}{12}\Rightarrow x = \frac{6\cdot 15\cdot 12}{18\cdot 20}=3$$

Tardarían 3 días.

63. Resolvemos:

a) Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Capacidad (kL)	Horas	Nº grifos
400	10	6
600	*x*	15

Directa *Inversa*

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{10}{x}=\frac{400}{600}\cdot\frac{15}{6}\Rightarrow x=\frac{10\cdot 600\cdot 6}{400\cdot 15}=6$$

Tardarían en llenarlo 6 horas

b) Mediante reducción a la unidad:

¿En cuántas horas llena 1 grifo un depósito de 400 kL? 10 · 6 = 60 horas

¿En cuántas horas llena 1 grifo un depósito de 1 kL? 60 : 400 = 0,15 horas

¿En cuántas horas llenan 15 grifos un depósito de 1 kL? 0,15:15 = 0,01 horas

¿En cuántas horas llenan 15 grifos un depósito de 600 kL? 600·0,01 = 6 horas

64. Las soluciones son las siguientes:

a) Lucía se ha gastado: 3 + 3 · 2 = 3 + 6 = 9 euros.

Eva se ha gastado: 3 + 4 · 2 = 3 + 8 = 11 euros.

b) Hacemos una tabla con algunos ejemplos:

Nº de bebidas	1	2	3	4
Precio total (€)	5	7	9	11

$\frac{1}{5}\neq\frac{2}{7}\neq\frac{3}{9}$ $\rightarrow$ No son proporcionales.

65. Calculamos:

a) La razón es $k=\frac{30}{100}=0{,}3$.

b) Planteamos la proporcionalidad:

Para 240 g de arroz: $\frac{30}{100}=\frac{240}{x}\Rightarrow 30x = 24000$ $\Rightarrow x = 800$

Se necesitan 800 mL de agua.

Si necesitamos 2 raciones más, serán 300 g de arroz y 1000 mL = 1 L de agua: $\frac{300}{1000}=0{,}3$

Es decir, se mantiene la proporción.

66. Ordenamos los datos en forma de tabla:

Precio (€)	55	60
Duración (h)	1,083	2,50

En el caso de ser proporcionales lo serían inversamente. Lo comprobamos: 55 · 1,083 $\neq$ 60 · 2,50.

No son proporcionales.

67. Calculamos, por reducción a la unidad, cuánto dinero le corresponde por 1 acierto de cada tipo de lanzamiento:

– 1 acierto de 3 puntos $\Rightarrow$ 120 : 24 = 5 euros

– 1 acierto de 2 puntos $\Rightarrow$ 120 : 48 = 2,5 euros

– 1 acierto de 1 puntos $\Rightarrow$ 120 : 50 = 2,4 euros

Obtenemos el premio de Ana: 36·5 + 64·2,5 + 80·2,4 = = 180 + 160 + 192 = 532

A Ana le corresponde un premio de 532 euros.

68. Ordenamos los datos en una tabla de magnitudes directamente proporcionales:

Distancia (km)	120	72
Tiempo (min)	60	*x*

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita *x*:

$$\frac{120}{60}=\frac{72}{x}\Rightarrow 120x = 4320\Rightarrow x=\frac{4320}{120}=36$$

Tardará 36 minutos.

69. Se verifica que:

$\frac{A}{4}=\frac{B}{5}=\frac{C}{9}=\frac{180}{4+5+9}=\frac{180}{18}=10$. Por tanto:

$\frac{A}{4}=10\Rightarrow A = 40$

$\frac{B}{5}=10\Rightarrow A = 50$

$\frac{C}{9}=10\Rightarrow C = 90$

Los ángulos miden 40, 50, 90 grados.

70. Ordenamos los datos en forma de tabla:

Agua (L)	40	1000	*y*
Sal (g)	600	*x*	1000

Calculamos la sal en 1000 litros de agua:

$$\frac{40}{600}=\frac{1000}{x}\Rightarrow 40x = 600000\Rightarrow x = 15000$$

Habrá 15000 g = 15 kg de sal.

Calculamos el agua para 1 kg de sal:

$$\frac{40}{600}=\frac{y}{1000}\Rightarrow 600y = 40000\Rightarrow y = 66{,}666\ldots$$

Se deben tomar 66,67 litros de agua.

71. Han obtenido sobresaliente:

$300\cdot\frac{12}{100}=36$ estudiantes.

Han suspendido:

$300\cdot\frac{8}{100}=24$ estudiantes.

72. Ejercicio resuelto en el libro.

Página 161

73. Actividad personal.

74. Aplicamos la fórmula del interés para t = 3:

a) $I=\frac{800\cdot 3{,}5\cdot 3}{100}=84$ euros

b) $I=\frac{6000\cdot 4\cdot 3}{100}=720$ euros

c) $I=\frac{1250\cdot 5\cdot 3}{100}=187{,}5$ euros

d) $I = \dfrac{4500 \cdot 2{,}5 \cdot 3}{100} = 337{,}5$ euros

75. Aplicamos la fórmula del interés y despejamos el capital *C:*

$1320 = \dfrac{C \cdot 3 \cdot 6}{100} \Rightarrow C = \dfrac{132\,000}{18} = 7333{,}333\ldots$

El capital es de 7333,33 euros.

76. Aplicamos la fórmula del interés y despejamos el rédito *r:*

$600 = \dfrac{2500 \cdot r \cdot 5}{100} \Rightarrow r = \dfrac{60\,000}{12\,500} = 4{,}8$

Hay que colocar el dinero al 4,8%.

77. Ejercicio resuelto en el libro.

78. Aplicamos la fórmula del interés y despejamos el tiempo t:

$600 = \dfrac{600 \cdot 5 \cdot t}{100} \Rightarrow t = \dfrac{60\,000}{3000} = 20$

$1200 = \dfrac{600 \cdot 5 \cdot t}{100} \Rightarrow t = \dfrac{120\,000}{3000} = 40$

Hay que depositarlo durante 20 años para obtener un interés igual al capital, y 40 años para doblarlo.

79. Calculamos el precio total de la compra:

3 · 45 = 135 euros en total

Calculamos la cantidad a pagar al descontarle el 20% del total:

$C_f = 135\left(1 - \dfrac{20}{100}\right) = 135 \cdot 0{,}80 = 108$ euros

Calculamos lo que cuesta cada camiseta al descontarle el 20%:

$C_f = 45\left(1 - \dfrac{20}{100}\right) = 45 \cdot 0{,}80 = 36$ euros

Calculamos lo que pagan por las 3 camisetas con el precio descontado: 3 · 36 = 108 euros.

Luego, sí es lo mismo.

80. Calculamos el precio total de la compra:

3,20 + 1,15 + 2,35 + 4,30 = 11 euros

Calculamos el precio total sin los céntimos:

3 + 1 + 2 + 4 = 10 euros

Calculamos el porcentaje de descuento:

$10 = 11\left(1 - \dfrac{p}{100}\right) \Rightarrow 10 = 11 - 0{,}11p \Rightarrow$

$1 = 0{,}11p \Rightarrow p = 9{,}09$

Le han aplicado un 9,09% de descuento.

81. Primero, calculamos el dinero ahorrado en cada producto:

Tableta: 5% de 430 = 0,05 · 430 = 21,5 euros.

Libro electrónico: 10% de 210 = 0,10 · 210 = 21 euros.

Disco duro externo: 12% de 180 = 0,12·180 = 21,6 euros.

Se ha ahorrado más dinero con el disco duro.

Calculamos el precio después del descuento de cada producto:

Tableta: 430 – 21,5 = 409,5 euros.

Libro electrónico: 210 – 21 = 189 euros.

Disco duro externo: 180 – 21,6 = 158,4 euros.

82. Calculamos el precio inicial *C* mediante porcentajes sucesivos:

$780{,}16 = C \cdot \left(1 + \dfrac{6}{100}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{8}{100}\right) \Rightarrow$

$780{,}16 = C \cdot 1{,}06 \cdot 0{,}92 \Rightarrow$

$C = \dfrac{780{,}16}{0{,}9652} = 800$

El precio inicial era de 800 euros.

83. Calculamos el precio inicial C mediante porcentajes sucesivos.

$5060 = C \cdot \left(1 - \dfrac{12}{100}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{14}{100}\right) \Rightarrow$

$5060 = C \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}14 \Rightarrow$

$C = \dfrac{5060}{1{,}0032} = 5043{,}86$

El precio inicial era de 5043,86 euros.

84. Llamamos C al dinero que pagó Juan por el cómic.

Marta paga: $C \cdot \left(1 + \dfrac{20}{100}\right) = 1{,}2C$

Marcos paga: $1{,}2C \cdot \left(1 - \dfrac{22}{100}\right) = 0{,}936 \cdot C \cdot 0{,}95 =$

$0{,}8892C$

Juan ganó al principio 1,2C – C = 0,2C, pero se ha gastado después 0,8892C, que es mayor. Por tanto, ha perdido dinero, concretamente 0,8892C – 0,2C = = 0,6892C euros

85. Las soluciones son las siguientes:

a) Lo resolvemos por el método de la regla de tres inversa:

Ordenamos los datos en forma de tabla:

Velocidad (km/h)	80	84
Tiempo (min)	567	*x*

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita *x*:

$\dfrac{80}{84} = \dfrac{x}{567} \Rightarrow 84x = 45\,360 \Rightarrow x = \dfrac{45\,360}{84} = 540$

Tardará 540 minutos = 9 horas.

b) Lo resolvemos por el método de la regla de tres inversa:

Ordenamos los datos en forma de tabla:

Velocidad (km/h)	80	*x*
Tiempo (min)	567	480

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita *x*:

$$\frac{80}{x}=\frac{480}{567}\Rightarrow 480x=45\,360\Rightarrow x=94{,}5$$

Debe circular a 94,5 km/h.

86. Lo resolvemos por el método de la regla de tres inversa.

Ordenamos los datos en forma de tabla:

Días	10	*x*
Nº de elefantes	15	12

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita *x*:

$$\frac{10}{x}=\frac{12}{15}\Rightarrow 12x=150\Rightarrow x=12{,}5$$

Podrían comer durante 12 días y medio.

87. Las soluciones son las siguientes:

Se verifica que:

$$\frac{a}{24}=\frac{b}{15}=\frac{c}{9}=\frac{3600}{24+15+9}=\frac{3600}{48}=75$$

Por tanto:

$$\frac{a}{24}=75\Rightarrow a=1800$$

$$\frac{b}{15}=75\Rightarrow b=1125$$

$$\frac{c}{9}=75\Rightarrow c=675$$

Silvia ha ganado 1800 euros, Elisabet 1125 euros y Santiago 675 euros.

88. Se verifica que (utilizamos los datos en miles de euros):

$$\frac{a}{180}=\frac{b}{240}=\frac{c}{80}=\frac{d}{140}=\frac{48}{640}=0{,}075\text{ . Por tanto:}$$

$$\frac{a}{180}=0{,}075\Rightarrow a=13{,}5$$

$$\frac{b}{240}=0{,}075\Rightarrow b=18$$

$$\frac{c}{80}=0{,}075\Rightarrow c=6$$

$$\frac{d}{140}=0{,}075\Rightarrow d=10{,}5$$

A Jorge le corresponden 13 500 euros, a Pedro 18 000 euros, a Gloria 6 000 euro y a Nuria 10 500 euros.

89. Se verifica que:

$$8a=9b=10c=\frac{12100}{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}}=\frac{12100}{\frac{45+40+36}{360}}=$$

$=36\,000$. Por tanto:

$$8a=36000\Rightarrow a=\frac{36\,000}{8}=4500$$

$$9b=36000\Rightarrow b=\frac{36\,000}{9}=4000$$

$$10c=36000\Rightarrow c=\frac{36\,000}{10}=3600$$

A la primera corredora le corresponde 4500 euros, a la segunda 4000 euros y a la tercera 3600 euros.

90. Se verifica que:

$6a=8b=3c=10d=$

$$=\frac{1740}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}}=\frac{1740}{\frac{20+15+40+12}{120}}=2400$$

Por tanto:

$$6a=2400\Rightarrow a=\frac{2400}{6}=400$$

$$8b=2400\Rightarrow b=\frac{2400}{8}=300$$

$$3c=2400\Rightarrow c=\frac{2400}{3}=800$$

$$10d=2400\Rightarrow d=\frac{2400}{10}=240$$

A Lucía le corresponde 400 euros, a Paula 300 euros, a Ernesto 800 euros y a Pablo 240 euros.

Página 162

91. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº de personas	Días	Coste (€)
6	4	1080
x	5	900

Inversa

Directa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{6}{x}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1080}{900}\Rightarrow x=\frac{6\cdot 4\cdot 900}{5\cdot 1080}=4$$

La familia consta de 4 personas.

92. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Volumen (m^3)	Horas/día	Gas (m^3)
15 000	8	75
12 000	10	*x*

Directa

Directa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{75}{x} = \frac{15000}{12000} \cdot \frac{8}{10} \Rightarrow x = \frac{75 \cdot 12000 \cdot 10}{15000 \cdot 8} = 75$$

Se consumirían también 75 m^3 de gas.

93. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº obreros	Horas/día	Días
8	6	12
x	8	3

Inversa

Inversa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{75}{x} = \frac{15000}{12000} \cdot \frac{8}{10} \Rightarrow x = \frac{75 \cdot 12000 \cdot 10}{15000 \cdot 8} = 75$$

Se consumirían también 75 m^3 de gas.

94. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Peso (kg)	Distancia (km)	Coste (€)
5	60	9
50	200	*x*

Directa

Directa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{9}{x} = \frac{5}{50} \cdot \frac{60}{200} \Rightarrow x = \frac{9 \cdot 50 \cdot 200}{5 \cdot 60} = 300$$

Costará 300 euros.

95. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº albañiles	Horas/día	Días	Longitud (m)
12	8	20	576
15	10	25	*x*

Directa

Directa

Directa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{576}{x} = \frac{12}{15} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{20}{25} \Rightarrow x = \frac{576 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 25}{12 \cdot 8 \cdot 20} = 1125$$

La longitud del muro sería de 1125 metros de longitud.

96. Las soluciones son las siguientes:

a) El chándal rebajado le cuesta 280 – 226 = 54 euros.

Si estaba rebajado un 25%, calculamos el precio inicial C:

$$54 = C\left(1 - \frac{25}{100}\right) \Rightarrow 54 = C - 0,25C = 0,75C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{54}{0,75} = 72$$

El chándal costaba 72 euros antes de la rebaja.

b) Ha comprado las zapatillas por la mitad de lo que costaban, por tanto le han hecho un 50% de rebaja.

c) $C_f = 60 \cdot \left(1 + \frac{21}{100}\right) \Rightarrow C_f = 60 \cdot 1,21 = 72,6$

La bolsa de deporte le ha costado 72,6 euros.

d) En total ha gastado: 54 + 32 + 72,6 = 158,6 euros.

Calculamos el porcentaje gastado:

$$x\% \text{ de } 280 = 158,6 \Rightarrow \frac{x}{100} \cdot 280 = 158,6 \Rightarrow$$

$$x = \frac{158,6}{280} \cdot 100 = 56,64$$

Ha gastado un 56,64% del dinero inicial.

97. Calculamos cuántos son mayores de edad:

176527 – 41227 = 135300 habitantes

Participaron en las elecciones:

45140 + 53355 = 98495

Calculamos los habitantes con derecho a voto que no participaron:

135300 – 98495 = 36805

Obtenemos el porcentaje que no participó:

$$x\% \text{ de } 135300 = 36805 \Rightarrow \frac{x}{100} \cdot 135300 = 36805 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{36815}{135300} \cdot 100 = 27,2$$

No participaron el 27,2% de los habitantes con derecho a voto.

98. Por un lado $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

Por otro $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a + b)(c - d) = (a - b)(c + d) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ac - ad + bc - bd = ac + ad - bc - bd \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2bc = 2ad \Leftrightarrow bc = ad \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Por tanto, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

99. Llamamos C al capital invertido, de manera que si se duplica (2C) el interés será C.

Se verifica que $C = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \Rightarrow 100C = C \cdot r \cdot t \Rightarrow$

$$\Rightarrow t = \frac{100C}{r \cdot C} \Rightarrow t = \frac{100}{r}$$

Luego el tiempo *t* sólo depende del rédito *r*.

100. Resolvemos:

Se verifica que: $\dfrac{150}{10}=\dfrac{b}{14}=\dfrac{c}{x}=\dfrac{600}{10+14+x}$.

Por tanto:

$\dfrac{150}{10}=\dfrac{b}{14} \Rightarrow 10b = 150\cdot 14 \Rightarrow b = 210$

$\dfrac{150}{10}=\dfrac{600}{24+x} \Rightarrow 15(25 + x) = 600 \Rightarrow$

$\Rightarrow 360 + 15x = 600 \Rightarrow 15x = 240 \Rightarrow x = 16$

$\dfrac{150}{10}=\dfrac{c}{16} \Rightarrow 10c = 150\cdot 16 \Rightarrow c = 240$

La edad de la hija mayor es 16 años.

El hijo menor cobra 150 euros, el mediano 210 euros y la mayor 240 euros.

101. Se verifica que:

$$\frac{\frac{C}{2}}{m}=\frac{\frac{C}{3}}{n}=\frac{\frac{C}{6}}{p}=\frac{C}{m+n+p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{C}{2m}=\frac{C}{3n}=\frac{C}{6p}=\frac{C}{m+n+p}$$

Por tanto:

$2m = 3n$

$3n = 6p \Rightarrow n = 2p$

$2m = 6p \Rightarrow m = 3p$

Es decir, hay dos ecuaciones con tres incógnitas, por tanto no hay una única solución. Así, para cualquier número p será m = 3p y n = 2p. Un ejemplo de solución sería m = 3, n = 2, p = 1.

102. Obtenemos la superficie de los muros:

$50\cdot 1{,}75 = 87{,}5\ m^2$

$100\cdot 3{,}5 = 350\ m^2$

Lo resolvemos por el método de la regla de tres compuesta:

Nº de obreros	Días	Superficie (m^2)
7	4	87,5
14	*x*	350

Inversa *Directa*

$\dfrac{4}{x}=\dfrac{14}{7}\cdot\dfrac{87{,}5}{350} \Rightarrow x = \dfrac{4\cdot 7\cdot 350}{14\cdot 87{,}5}=\dfrac{9800}{1225}=8$

Necesitarán 8 días.

103. Las soluciones son las siguientes:

a) Si la prima son 1800 euros por terminar 8 horas antes, por cada hora que terminan antes reciben 1800 : 8 = 225 euros.

Si terminan 9 horas antes: 9 · 225 = 2025 euros.

b) Calculamos primero la prima: 6·225 = 1350 euros.

Los 18 programadores recibirán 8640 + 1350 = = 9990 euros.

Por tanta cada programador ganaría 9990:18 = 555 euros.

c) Aplicamos una regla de tres inversa:

Nº de programadores	18	*x*
Horas	24	18

$\dfrac{18}{x}=\dfrac{18}{24} \Rightarrow 18x = 18\cdot 24 \Rightarrow x = 24$

Deben formar el equipo 24 programadores.

104. Llamaremos *x* a las vacas que tiene e *y* a los días que puede alimentarlas:

Aplicamos una regla de tres inversa:

Nº de vacas	x – 15	x + 10	x
días	y + 2	y – 1	y

Por un lado $\dfrac{x-15}{x}=\dfrac{y}{y+2} \Rightarrow (x - 15)(y + 2) = xy \Rightarrow$

$\Rightarrow xy + 2x - 15y - 30 = xy \Rightarrow 2x - 15y = 30$

Por otro $\dfrac{x+10}{x}=\dfrac{y}{y-1} \Rightarrow (x + 10)(y - 1) = xy \Rightarrow$

$\Rightarrow xy - x + 10y - 10 = xy \Rightarrow - x + 10y = 10$

Resolvemos el sistema de ecuaciones resultante, por el método de reducción, multiplicando por 2 la segunda ecuación y sumando:

$$\begin{cases} 2x-15y=30 \\ -2x+20y=20 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 5y=50 \qquad}$$

Resolvemos la ecuación: $5y = 50 \Rightarrow y = 10$

Sustituimos en la segunda ecuación: $- x + 10\cdot 10 = 10 \Rightarrow x = 90$

Tiene 90 vacas y puede alimentarlas durante 10 días.

105. Las soluciones son las siguientes:

a) 10% de 374 = 37,4

b) 30% de 220 = 66

c) 40% de 120 = 48

d) 60% de 75 = 45

e) 70% de 90 = 63

f) 80% de 550 = 440

106. Los resultados de los porcentajes son los siguientes:

a) 25% de 72 = 18

25% de 1220 = 305

25% de 3000 = 750

25% de 840 = 210

25% de 64 = 16

25% de 412 = 103

b) 50% de 85 = 42,5
50% de 1750 = 875
50% de 7500 = 3750
50% de 192 = 96
50% de 268 = 134
50% de 1420 = 710

c) 75% de 64 = 48
75% de 360 = 270
75% de 6500 = 4875
75% de 900 = 675
75% de 2840 = 2130
75% de 8880 = 6660

Desarrolla tus competencias

1. Resolvemos:

a) Electro-K

Si compras 3 unidades pagas sólo 2 unidades.

Sin oferta: costaría 20 euros cada unidad.

Con la oferta: el lote costaría 2 · 20 = 40 euros, por tanto cada unidad 40 : 3 = 13,33 euros.

Calculamos el porcentaje *p* de descuento por unidad:

$$13{,}33 = 20\left(1 - \frac{p}{100}\right) \Rightarrow 13{,}33 = 20 - 0{,}20p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6{,}66 = -0{,}20p \Rightarrow p = 33{,}3\%$$

Teknix

Si compras 2 unidades pagas la mitad en la segunda unidad.

Sin oferta: costaría 20 euros cada unidad.

Con oferta: el lote costaría 20 + 10 = 30 euros, por tanto cada unidad 30 : 2 = 15 euros.

Calculamos el porcentaje *p* de descuento por unidad:

$$15 = 20\left(1 - \frac{p}{100}\right) \Rightarrow 15 = 20 - 0{,}20p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5 = -0{,}20p \Rightarrow p = 25\%$$

La tabla queda:

Proveedor	Oferta	% descuento
Electro-K	3 x 2	33,3%
Teknix	2ª unidad al 50%	25%

b) Coste total de Electro-K:

Se tienen que comprar 10 lotes y cada lote cuesta 20 · 2 = 40 euros, por tanto 40 · 10 = 400 euros es el coste.

Coste total de Teknix:

Se tienen que comprar 15 lotes y cada lote cuesta 20 + 10 = 30 euros, por tanto 15 · 30 = 450 euros es el coste.

Es más económico Electro-K.

2. Las soluciones son:

a) La tabla queda así:

Proveedor	Oferta	% descuento
S&H Solutions	3 x 2	33,3%
GlobalComp	4 x 3	25%

b) Coste total de S&H Solutions:

Se tienen que comprar 10 lotes y cada lote cuesta 100 · 2 = 200 euros, por tanto 200 · 10 = 2000 euros es el coste.

Coste total de GlobalComp:

Se tienen que comprar 7 lotes y 2 discos más, y cada lote cuesta 3 · 100 = 300 euros, por tanto:

300 · 7 + 2 · 100 = 2100 + 200 = 2300 euros es el coste.

Es más económico S&H Solutions.

3. Buscamos la distribuidora con la oferta más ventajosa:

OptoPlus: sin descuento: 3·260 = 780 euros.

Con el 40% de descuento:

60% de 780 = 0,60 · 780 = 468 euros.

DigitalMarket: hay que comprar un lote (2 unidades) y otra unidad, es decir, 2 unidades completas y una unidad rebajada un 40%:

Calculamos la unidad rebajada:

60% de 180 = 0,60 · 180 = 108 euros.

Obtenemos el total: 108 + 2·180 = 468 euros.

La opción C es la correcta (es indiferente).

4. Resolvemos:

a) Las 3 tarjetas sin la oferta cuestan:

16 + 12 + 8 = 36 euros

Las 3 tarjetas con la oferta cuestan:

16 + 12 = 28 euros

Calculamos el porcentaje global de descuento:

$$28 = 36\left(1 - \frac{p}{100}\right) \Rightarrow 28 = 36 - 0{,}36p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8 = -0{,}36p \Rightarrow p = 22{,}22\%$$

El porcentaje de descuento es 22,22%.

b) La estrategia sería comprar 3 tarjetas iguales (de cualquier tipo), porque el descuento sería de un 33,33% (como una oferta 3 x 2).

5. Las respuestas son las siguientes:

a) 15% de 124 = 0,15·124 = 18,6

El vale asciende a 18,60 euros.

b) El objetivo es que volvamos al centro comercial de nuevo a comprar más productos.

Evaluación de estándares

1. Las tablas completas quedan así:

a) $\frac{12}{4}=\frac{18}{6}=...=\frac{90}{30}=3$

Son magnitudes directamente proporcionales, y la constante de proporcionalidad es k = 3.

Magnitud X	4	6	9	20	30
Magnitud Y	12	18	27	60	90

b) $4 \cdot 5 = 2 \cdot 10 = \ldots = 0{,}2 \cdot 100 = 20$

Son magnitudes inversamente proporcionales, y la constante de proporcionalidad es k = 20.

Magnitud X	4	2	1	0,5	0,2
Magnitud Y	5	10	20	40	100

c) No son magnitudes proporcionales

Magnitud X	3	5	7	9	11
Magnitud Y	9	8	7	6	5

2. Son magnitudes inversamente proporcionales:

Ordenamos los datos en forma de tabla:

Número de rollos	18	*x*
Superficie (m^2)	60	50

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita *x*:

$$\frac{18}{x}=\frac{50}{60} \Rightarrow 50x = 1080 \Rightarrow x = 21{,}6$$

Serían necesarios 22 rollos de papel.

3. Si 2,5 kg cuestan 3,25 euros, 1 sólo kilo cuesta:

3,25 : 2,5 = 1,3

Si son 4 kg costarán 4·1,3 = 5,2

El melón costará 5,20 euros.

4. Las soluciones son las siguientes:

a) Calculamos el precio final C_f después del aumento:

$$C_f = 35\left(1+\frac{15}{100}\right) = 35 \cdot 1{,}15 = 40{,}25$$

El jersey cuesta ahora 40,25 euros.

b) Calculamos el precio final C_f después de la rebaja:

$$C_f = 45\left(1-\frac{20}{100}\right) = 45 \cdot 0{,}80 = 36$$

La camisa cuesta ahora 36 euros.

c) Calculamos el precio inicial C antes de la rebaja:

$$67{,}5 = C\left(1-\frac{25}{100}\right) \Rightarrow 6{,}75 = C \cdot 0{,}75 \Rightarrow C = 90$$

La chaqueta costaba antes de la rebaja 90 euros.

5. Vicente tiene el 40% de 450 = 0,40·450 = 180 euros.

Carmen tiene $\frac{5}{9}$ de 450 = $\frac{5}{9}\cdot 450 = 250$ euros.

Entre los dos tienen 180 + 250 = 430 euros. No tienen suficiente dinero.

6. Aplicamos la fórmula del interés y despejamos el tiempo *t:*

$$180 = \frac{1500 \cdot 6 \cdot t}{100} \Rightarrow t = \frac{180 \cdot 100}{1500 \cdot 6} = 2$$

Serán necesarios 2 años.

7. Resolvemos por la <u>regla de tres compuesta</u>:

Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Días	**Nº de grifos**	**Horas/día**
6	3	8
x	2	9

Inversa

Inversa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{6}{x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 3 \cdot 8}{2 \cdot 9} = 8$$

Tardará en llenarse 8 días.

Resolvemos ahora por <u>reducción a la unidad</u>:

Calculamos los días que tarda1 grifo 1 hora al día:

– Si 3 grifos tardan 6 días (abiertos 8 h/día), 1 sólo grifo tarda 3 · 6 = 18 días.

– Si 1 grifo tarda 18 días, abierto 8 h/días, abierto 1 hora al día tarda 18 · 8 = 144 horas.

Calculamos los días que tardan 2 grifos abiertos 9 horas al día:

– Si 1 grifo tarda 144 horas (abierto 1 h/día), 2 grifos tardan 144 : 2 = 72 horas.

– Si 2 grifos, abiertos 1 h/día, tardan 72 horas, abiertos 9 horas al día tardan 72 : 9 = 8 días.

Tardará en llenarse 8 días.

8. Se verifica que:

$$\frac{a}{15}=\frac{b}{20}=\frac{c}{35}=\frac{2100}{15+20+35}=\frac{2100}{70}=30$$

Por tanto:

$$\frac{a}{15}=30 \Rightarrow a = 15 \cdot 30 = 450$$

$$\frac{b}{20}=30 \Rightarrow b = 20 \cdot 30 = 600$$

$$\frac{c}{35}=30 \Rightarrow c = 35 \cdot 30 = 1050$$

Al primer concursante (15 puntos) le corresponden 450 euros, al segundo 600 euros y al tercero 1050 euros.

9. Se verifica que:

$$5a = 6b = 7c = \frac{1070}{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}} = \frac{1070}{\frac{107}{210}} = 2100$$

Por tanto:

$5a = 2100 \Rightarrow a = 420$

$6b = 2100 \Rightarrow b = 350$

$7c = 2100 \Rightarrow c = 300$

Al primer corredor (5 minutos) le tocan 420 euros, al segundo 350 euros y al tercero 300 euros.

10. Las soluciones son:

a) Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº de carpinteros	Nº de puertas	Días
25	30	5
x	72	10

Directa

Inversa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{25}{x} = \frac{30}{72} \cdot \frac{10}{5} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 72 \cdot 5}{30 \cdot 10} = 30$$

Son necesarios 30 carpinteros, por tanto deben contratar a 5 carpinteros más.

b) Organizamos los datos en una tabla y escribimos la proporción compuesta:

Días	Nº de carpinteros	Nº de puetas	Horas/día
5	25	30	7
10	26	72	*x*

$$\frac{7}{x} = \frac{30}{72} \cdot \frac{26}{25} \cdot \frac{10}{5} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 72 \cdot 25 \cdot 5}{30 \cdot 26 \cdot 10} \simeq 8$$

Deberían trabajar unas 8 horas diarias.

Estrategia e ingenio

Haz un buen papel

Por un lado $a = 2c \Rightarrow c = \frac{a}{2}$

Por otro lado $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Luego $\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{a}{2}} = \frac{2b}{a} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}\,b$

Las dimensiones a y b del rectángulo deben cumplir la relación $a = \sqrt{2}\,b$.

¿Cómo se explica?

La explicación se encuentra en que las dimensiones de las piezas de la figura de la izquierda no permiten encajar exactamente en el rectángulo de la figura de la derecha; En realidad se forma un hueco casi imperceptible con forma de cuadrilátero muy alargado (de área 1 cuadra-dito).

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 7-3 de la guía)

4. Significa que 20 de cada 100 aspirantes, o lo que es lo mismo 1 de cada 5 aspirantes, no han superado dicha prueba.

Han logrado acceder a la segunda fase:

$90 \cdot \left(\frac{100-20}{100}\right) = 90 \cdot \frac{4}{5} = 72$ aspirantes.

5. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Magnitudes directamente proporcionales:

– Espacio recorrido y tiempo empleado.

– Presión y temperatura.

– Volumen y temperatura.

– Cantidad de dinero y productos que puedo comprar.

Magnitudes inversamente proporcionales:

– Velocidad y tiempo empleado en un recorrido.

– Presión y volumen.

– Caudal y tiempo necesario para llenar un contenedor.

(Viene de la página 7-5 de la guía)

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita *x*:

$$\frac{4}{9} = \frac{x}{26} \Rightarrow 9x = 104 \Rightarrow x = \frac{104}{9} = 11{,}555\ldots$$

6. Juan ha cobrado 1400 euros por 8 · 20 = 160 horas:

a) Si por 160 horas cobra 1400 euros, por una hora cobrará: $\frac{1400}{160} = 8{,}75$ euros por hora.

Luego en 30 horas cobraría: 30 · 8,75 = 262,5 euros.

b) En 6 · 30 = 180 horas cobraría: 180 · 8,75 = 1575 euros

(Viene de la página 7-9 de la guía)

18. Son magnitudes inversamente proporcionales y lo resolvemos por el método de reducción a la unidad:

Si 8 telares tardan 12 horas, un telar tardará 8 · 12 = 96 horas.

Si son 6 telares tardarán 96 : 6 = 16 horas.

Si son 10 telares tradarán 96 : 10 = 9,6 horas.

Por tanto, si se averían 2 telares tardarán 16 horas, y si se compran 2 más tardarán 9 horas y 36 min.

19. Lo resolvemos por el método de la regla de tres inversa:

Ordenamos los datos en forma de tabla:

Nº de desagües	3	4
tiempo (h)	10	*x*

Escribimos la proporción y despejamos la incógnita *x*:

$$\frac{3}{4} = \frac{x}{10} \Rightarrow 4x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{4} = 7{,}5$$

Se vaciaría en 7 horas y media.

20. Son magnitudes inversamente proporcionales y lo resolvemos por el método de reducción a la unidad:

a) Si 6 personas tardan 18 horas, 1 persona tardará $6 \cdot 18 = 108$ horas.

b) Si son 9 personas tardarán 108 : 9 = 12 horas.

c) Si quiere terminar en 6 horas se necesitarán 108 : 6 = 18 personas.

21. No son dos magnitudes proporcionales. Las dos emplearán el mismo tiempo en recorrer los 18 km tanto juntas como separadas.

(Viene de la página 7-11 de la guía)

24. Se verifica que:

$4a = 5b = 7c =$

$$= \frac{1660}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}} = \frac{1660}{\frac{35+28+20}{140}} = \frac{1660}{\frac{83}{140}} = 2800$$

Por tanto:

$$4a = 2800 \Rightarrow a = \frac{2800}{4} = 700$$

$$5b = 2800 \Rightarrow b = \frac{2800}{5} = 560$$

$$7c = 2800 \Rightarrow c = \frac{2800}{7} = 400$$

Las partes del reparto son 700, 560 y 400

25. Se verifica que:

$$1a = 2b = 5c = \frac{340}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}} = \frac{340}{\frac{17}{10}} = 200$$

Por tanto:

$a = 200$

$2b = 200 \Rightarrow b = 100$

$5c = 200 \Rightarrow c = 40$

Al primer trabajador (que faltó 1 día) le corresponden 200 euros, al segundo 100 euros y al tercero 40 euros.

(Viene de la página 7-13 de la guía)

29. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº de vacas	Días	Peso (kg)
6	20	1100
x	30	9900

Inversa

Directa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{6}{x} = \frac{30}{20} \cdot \frac{1100}{9900} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 20 \cdot 9900}{30 \cdot 1100} = \frac{1188}{33} = 36$$

Se podrán alimentar 36 vacas.

30. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº focos	Horas / día	Días	Coste (€)
15	6	20	6000
5	10	12	*x*

Directa

Directa

Directa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{6000}{x} = \frac{15}{5} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{20}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6000 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 12}{15 \cdot 6 \cdot 20} = \frac{360000}{180} = 2000$$

Costará tenerlos encendidos 2000 euros.

31. Organizamos los datos en una tabla y analizamos las relaciones de proporcionalidad:

Nº páginas	Nº personas	Horas / día	Días
210	7	8	15
324	*x*	9	12

Directa *Inversa*

Inversa

Escribimos la proporción compuesta:

$$\frac{7}{x} = \frac{210}{324} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{12}{15} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 324 \cdot 8 \cdot 15}{210 \cdot 9 \cdot 12} = \frac{272160}{22680} = 12$$

Se necesitan 12 personas.

PIENSA Y CONTESTA

Descomponemos el problema en dos problemas de proporcionalidad inversa simple:

¿Cuántos días tardarán 40 obreros en excavar un tunel, trabajando 8 horas?

Nº días	Nº de obreros
180	25
y	40

$\Rightarrow \frac{180}{y} = \frac{40}{25}$

¿Cuántos días tardarán 40 obreros en excavar un tunel, trabajando 10 horas?

Nº días	Nº de horas
y	8
x	10

$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{10}{8}$

Despejando el valor de *y* en la primera expresión y sustituyendo en la segunda ecuación:

$$y = \frac{180 \cdot 25}{40} \Rightarrow \frac{\frac{180 \cdot 25}{40}}{x} = \frac{10}{8}; \frac{180 \cdot 25}{x \cdot 40} = \frac{10}{8}; \frac{180}{x} = \frac{40}{25} \cdot \frac{10}{8}$$

Página 157

32. Aplicamos la fórmula del interés para t = 1:

a) $I = \frac{1800 \cdot 4}{100} = 72$ euros

b) $I = \frac{2400 \cdot 5}{100} = 120$ euros

c) $I = \frac{12\,000 \cdot 6}{100} = 720$ euros

d) $I = \frac{7\,500 \cdot 3}{100} = 225$ euros

33. Aplicamos la fórmula del interés:

$$I = \frac{9000 \cdot 4 \cdot 5}{100} = 1800$$

El interés que produce es de 1800 euros.

34. Aplicamos la fórmula del interés y despejamos el capital C:

$$1500 = \frac{C \cdot 6 \cdot 5}{100} \Rightarrow C = \frac{1500 \cdot 100}{6 \cdot 5} = 5000$$

El capital es de 5000 euros.

35. Aplicamos la fórmula del interés y despejamos el tiempo t:

$$90 = \frac{600 \cdot 5 \cdot t}{100} \Rightarrow t = \frac{90 \cdot 100}{600 \cdot 5} = 3$$

Hay que depositarlo durante 3 años.

36. Aplicamos la fórmula del interés y despejamos el rédito r:

1) $360 = \frac{1200 \cdot r \cdot 5}{100} \Rightarrow r = \frac{360 \cdot 100}{1200 \cdot 5} = 6$

2) $360 = \frac{1500 \cdot r \cdot 5}{100} \Rightarrow r = \frac{360 \cdot 100}{1500 \cdot 5} = 4{,}8$

Hay que colocarlo al 6% de interés si son 1200 euros de capital, y al 4,8% si son 1500 euros.

37. Calculamos:

a) Aplicamos la fórmula del interés:

$$I = \frac{36000 \cdot 2{,}4 \cdot 6}{100} = 5184$$

El capital producido es de 5184 euros.

b) El beneficio será el 100% – 20% = 80% del interés producido: 0,80 · 5184 = 4147,2

El beneficio conseguido será de 4147,2 euros.

c) Aplicamos la fórmula del interés y despejamos el tiempo t:

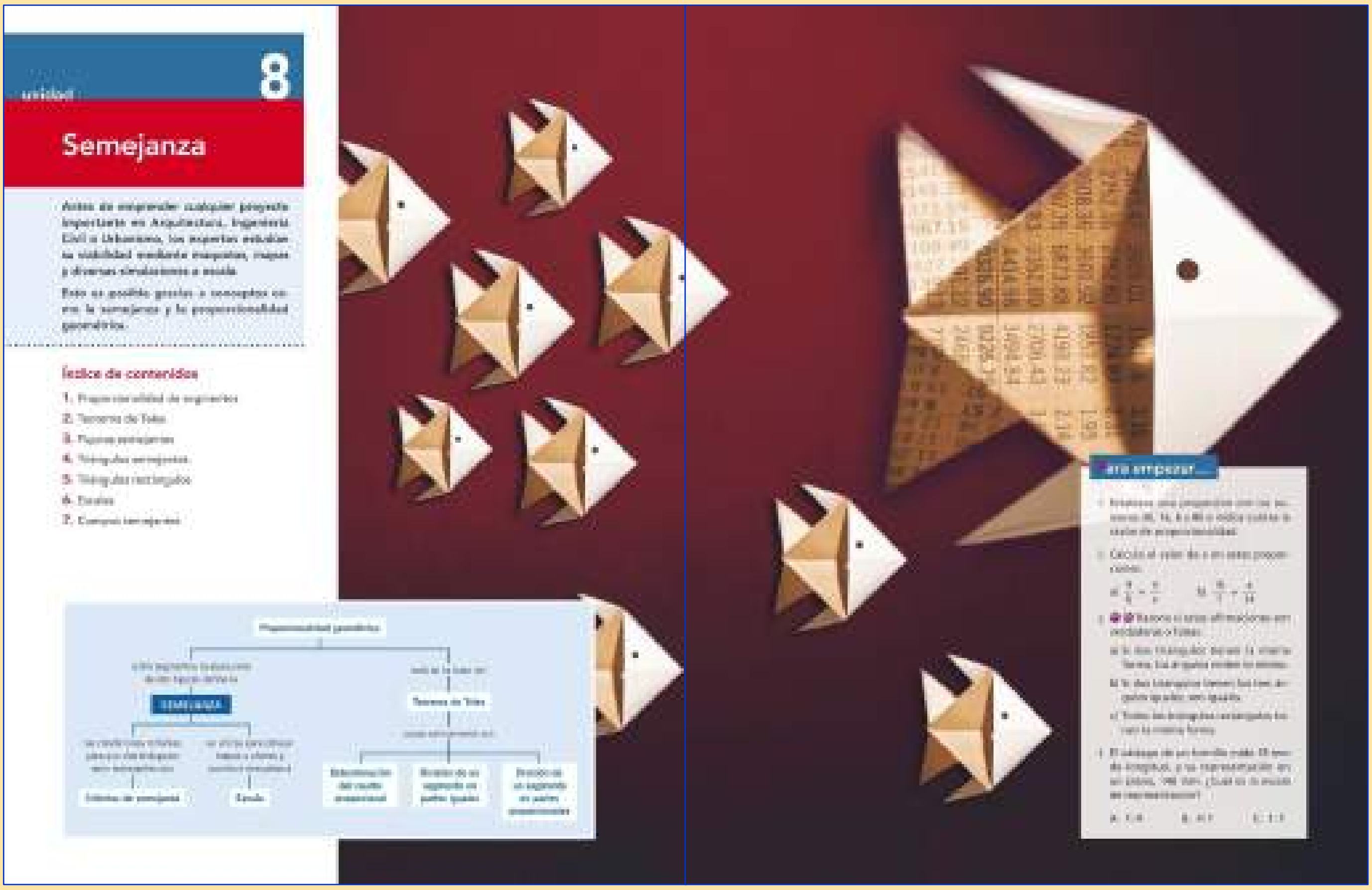
$$3 \cdot 36000 = \frac{36000 \cdot 2{,}4 \cdot t}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{3 \cdot 36000 \cdot 100}{36000 \cdot 2{,}4} = 125$$

Serán necesarios 125 años.

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/747100	http://www.mediamarkt.es/
http://www.tiching.com/747101	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funciones_funcion_de_proporcionalidad/index.htm
http://www.tiching.com/747102	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Porcentajes_e_indices/porcentaje.htm
http://www.tiching.com/747103	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Proporcionalidad/index.htm
http://www.tiching.com/747105	https://lacasadegauss.files.wordpress.com/2011/04/2c2ba_eso_ejercicios_proporcionalidad-con-soluciones.pdf



INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ La finalidad de esta unidad consiste en el estudio de la semejanza entre objetos y sus aplicaciones, a partir del concepto de proporcionalidad.

En primer lugar leeremos el texto introductorio y observaremos la imagen de presentación. Después los comentaremos con los alumnos y alumnas siguiendo este cuestionario:

– *¿En qué consiste la simulación a escala? ¿Dónde estamos acostumbrados a ver escalas?*

– *¿Qué concepto visto en temas anteriores se aplicará para la construcción de objetos a escala?*

– *¿Qué significa que dos objetos son semejantes?*

– *¿Son semejantes los objetos de la imagen? ¿Por qué?*

– *¿Se te ocurre alguna aplicación de la semejanza entre objetos? ¿Para qué nos puede ser útil?*

■ A continuación prestaremos atención al índice de contenidos y al esquema de esta unidad didáctica, y plantearemos estas preguntas al alumnado:

– *¿Podrías dibujar dos triángulos semejantes?*

– *¿Cuándo dos segmentos son proporcionales?*

Empezamos la unidad

■ Con el fin de introducir y repasar ciertos conceptos que se desarrollarán a lo largo de la unidad, se proponen una serie de actividades, cuyos objetivos particulares son:

– En la actividad 1 se repasan los conceptos de proporción y razón de proporcionalidad estudiados en el tema anterior y que en esta unidad aplicaremos a la geometría.

– La actividad 2 revisa las propiedades de las proporciones.

– En la actividad 3 se repasa, de manera directa e indirecta, el concepto de semejanza de triángulos. El alumnado deberá recordar, entre otras cosas, las razones de proporcionalidad.

– La actividad 4 introduce el concepto de escalas como relación de proporcionalidad.

■ Para concluir esta introducción a la unidad, pediremos al alumnado que resuelva por parejas las actividades planteadas en el apartado *Para empezar*, de manera que identifiquen sus fortalezas y caren-cias en relación al tema que comienza, tomando conciencia de sus conocimientos previos.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 4.* Expresar de forma escrita los conocimientos adquiridos en cursos anteriores al resolver la actividad.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1, 2, 3 y 4.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.

■ *Acts. 1 y 2.* Saber transformar la información sobre proporcionalidad, recopilada en cursos anteriores en conocimiento propio.

■ *Esquema pág. 166.* Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Texto pág. 166.* Valorar conceptos como la semejanza y la proporcionalidad geométrica como una parte importante de las Matemáticas que nos permitirá aplicaciones muy amplias.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 2 y 4.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para iniciar la unidad sobre la semejanza y la proporcionalidad geométrica les propondremos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747424

Se trata de una perspectiva cónica central de un paisaje, que nos permitirá descubrir uno de los recursos que utilizan los profesionales para elaborar qualquier proyecto.

Pediremos a los alumnos que observen la perspectiva y, a continuación, les preguntaremos:

- *¿Qué elementos semejantes descubres en ella?*
- *¿Podrías decir que relación mantienen entre ellos? ¿Cómo están situados en el dibujo?*
- *¿En la realidad tienen esa mesura? ¿Qué otra técnica ilustrativa también se nos presentan los elementos de la realidad de la misma forma?*

Seria interesante proponer hacer una pequeña perspectiva para observar el uso de la proporción de la realidad al dibujo y al mismo tiempo, el uso de la semejanza para representar el espacio de la profundidad.

Educamos en valores

Autoestima personal y espíritu de superación

■ La enseñanza de las matemáticas y, en particular, de la geometría, destaca la importancia de la claridad y de la precisión de la información que se quiera comunicar.

A lo largo de la unidad didáctica se proponen métodos de trabajo y se presentan construcciones geométricas que refuerzan el valor de la precisión y la claridad.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de esta unidad didáctica que contribuyen a conseguir este objetivo:

– En las actividades 92 y 93 de la página 185 se proponen ejercicios donde se debe construir una figura geométrica para plantear el problema.
– En la actividad 9 y en las actividades de la página 187 se pone de relieve la importancia de la precisión en las representaciones planas y se practica la medida.

Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 167

Para empezar…

1. La proporción entre estos números y la razón de proporcionalidad son:

$$\frac{80}{30} = \frac{16}{6} = 2{,}67$$

2. a) $x = \dfrac{3 \cdot 6}{9} \Rightarrow x = 2$

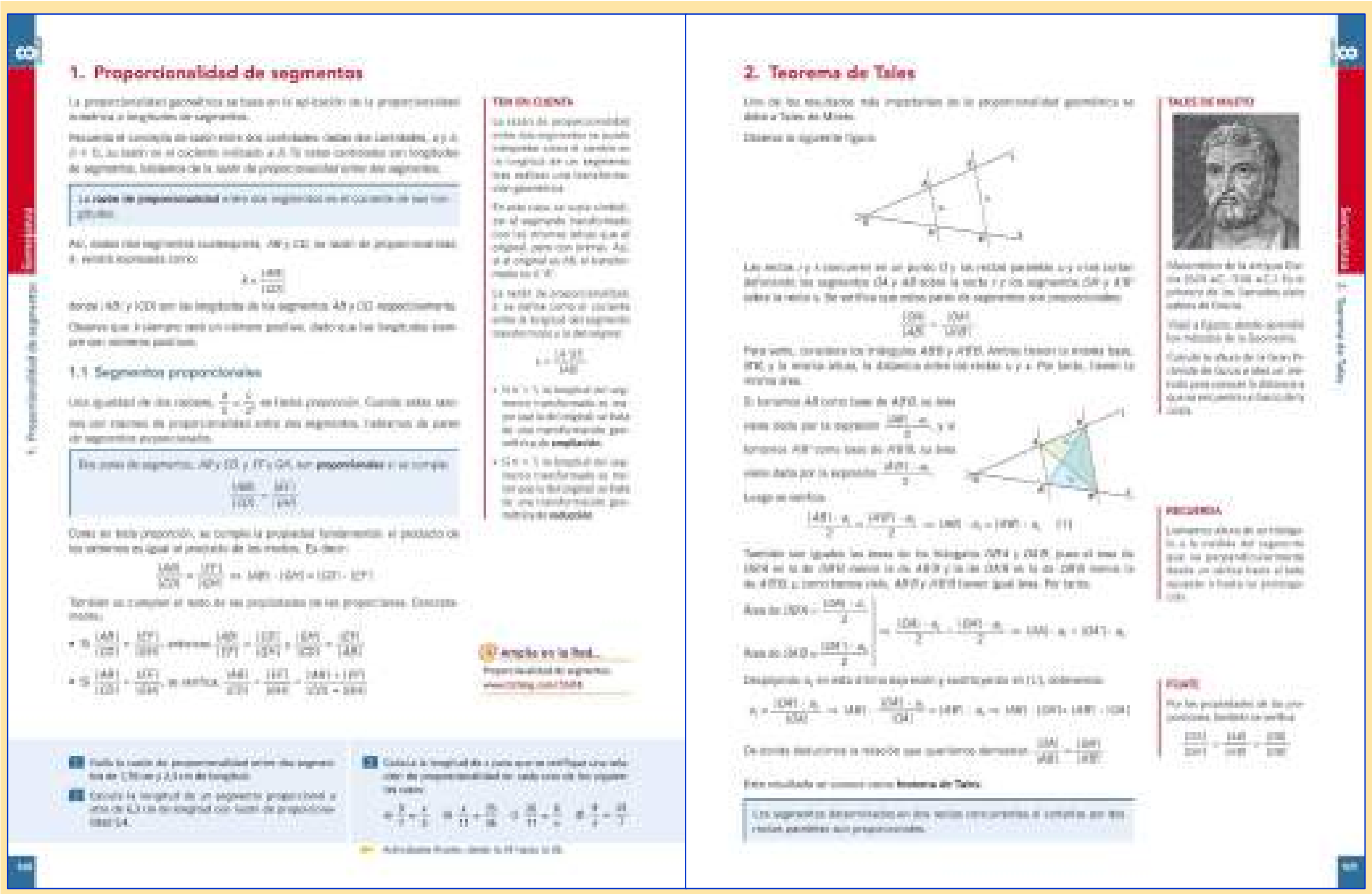
b) $x = \dfrac{15 \cdot 14}{7} \Rightarrow x = 30$

3. a) Verdadero. Dos triángulos tienen la misma forma si son proporcionales. Los ángulos de dos triángulos proporcionales son iguales.

b) Verdadero. Dos triángulos cuyos ángulos sean iguales son semejantes y, por tanto, tendrán la misma forma.

c) Falso. Dos triángulos tienen la misma forma si son proporcionales. Solamente serán proporcionales si tienen un ángulo agudo igual.

4. La escala de representación es la opción B (4:1) porque a 4 unidades en la representación le corresponde 1 unidad en el objeto real.


1. Proporcionalidad de segmentos

1.1 Segmentos proporcionales

2. Teorema de Tales

1. PROPORCIONALIDAD DE... / 2. TEOREMA DE...

■ El objetivo de esta sección es el estudio de la proporcionalidad entre segmentos y sus propiedades.

Para empezar los alumnos y alumnas leerán la primera parte de la sección, junto con la nota *Ten en cuenta* del margen, y a continuación les preguntaremos:

– *¿Cómo se expresa la razón de proporcionalidad entre dos segmentos?*

– *¿Puede ser dicha constante menor que 1? ¿Y negativa?*

– *¿Cómo podemos interpretar la razón de proporcionalidad entre segmentos?*

– *¿Cuándo decimos que se trata de una transformación geométrica de reducción?*

1.1 Segmentos proporcionales

■ Proseguiremos leyendo el primer apartado, que comentaremos a través de estas cuestiones:

– *¿Cuándo se dice que dos pares de segmentos son proporcionales?*

– *¿Si intercambiamos los medios o los extremos obtendríamos la misma razón de proporcionalidad?*

– *¿Qué otras propiedades se cumplen en la proporcionalidad de segmentos?*

■ Como repaso de estos conceptos introducidos, el alumnado puede acceder al recurso *@Amplía en la Red.*

Después afianzará los conocimientos teóricos adquiridos por medio de los ejercicios planteados en el libro.

■ El objetivo de la siguiente sección es presentar el teorema de Tales y sus aplicaciones.

Comenzaremos leyendo los dos primeros párrafos, donde se introduce el teorema de Tales, y a continuación observaremos atentamente su demostración, fijándonos en la pista de la nota *Recuerda*:

– *¿Qué condiciones deben cumplir las rectas para que se dé la proporcionalidad de los pares de segmentos?*

– *¿Por qué los áreas de OB'A y OA'B son iguales?*

■ Después leeremos el apunte del margen *Fíjate y* el enunciado del Teorema de Tales en el recuadro coloreado:

– *¿Qué propiedades hemos aplicado para obtener las igualdades indicadas en la nota Fíjate?*

– *¿Qué enuncia el teorema de Tales?*

– *¿Se te ocurre alguna aplicación de dicho teorema?*

Por último aprenderemos, en la nota del margen, quién era *Tales de Mileto* y su aportación a las matemáticas y en general a la ciencia y la cultura.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 2 y 3.* Leer, comprender e interpretar los enunciados procesando los datos de manera ordenada.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 1 y 2.* Aplicar los conceptos sobre razón de proporcionalidad, de forma repetitiva para mejorar la eficacia de resolución.
- *Act. 3.* Establecer paralelismos y similitudes entre varios elementos dados, para resolver las actividades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 2.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre segmentos proporcionales.
- *Act. 3.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para seguir trabajando la proporcionalidad entre segmentos y para practicar con el concepto de razón de proporcionalidad.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de practicar con la proporcionalidad geométrica, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747425

Es un recurso con diferentes actividades interactivas que el profesor podrá proponer a sus alumnos para reforzar los contenidos.

Nuestros alumnos encontrarán las pautas a seguir activando y moviendo los puntos en las rectas y comprobarán qué sucede si creamos figuras semejantes.

Podemos pedirles que en grupo inventen un ejercicio semejante y que lo practiquen con sus compañeros. Como son actividades autocorrectivas, facilitan un aprendizaje autónomo y crean motivación entre ellos.

Más adelante podrán volver a este recurso para practicar con la creación de polígonos semejantes.

Se requiere instalar el programa Java para visualizar correctamente las ventanas interactivas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 168

1. La razón es el cociente de sus longitudes:

$$k = \frac{1,76}{2,3} = 0,7652 < 1$$

2. La razón es el cociente de sus longitudes:

$$5,4 = \frac{x}{6,3} \Rightarrow k = 5,4 \cdot 6,3 = 34,02$$

La longitud del segmento es 34,02 cm

3. El producto de los extremos es igual al producto de los medios:

a) $\frac{9}{7} = \frac{x}{5}$

$7x = 45$

$x = \frac{45}{7} \simeq 6,43$

b) $\frac{x}{11} = \frac{35}{36}$

$36x = 385$

$x = \frac{385}{36} \simeq 10,69$

c) $\frac{26}{11} = \frac{6}{x}$

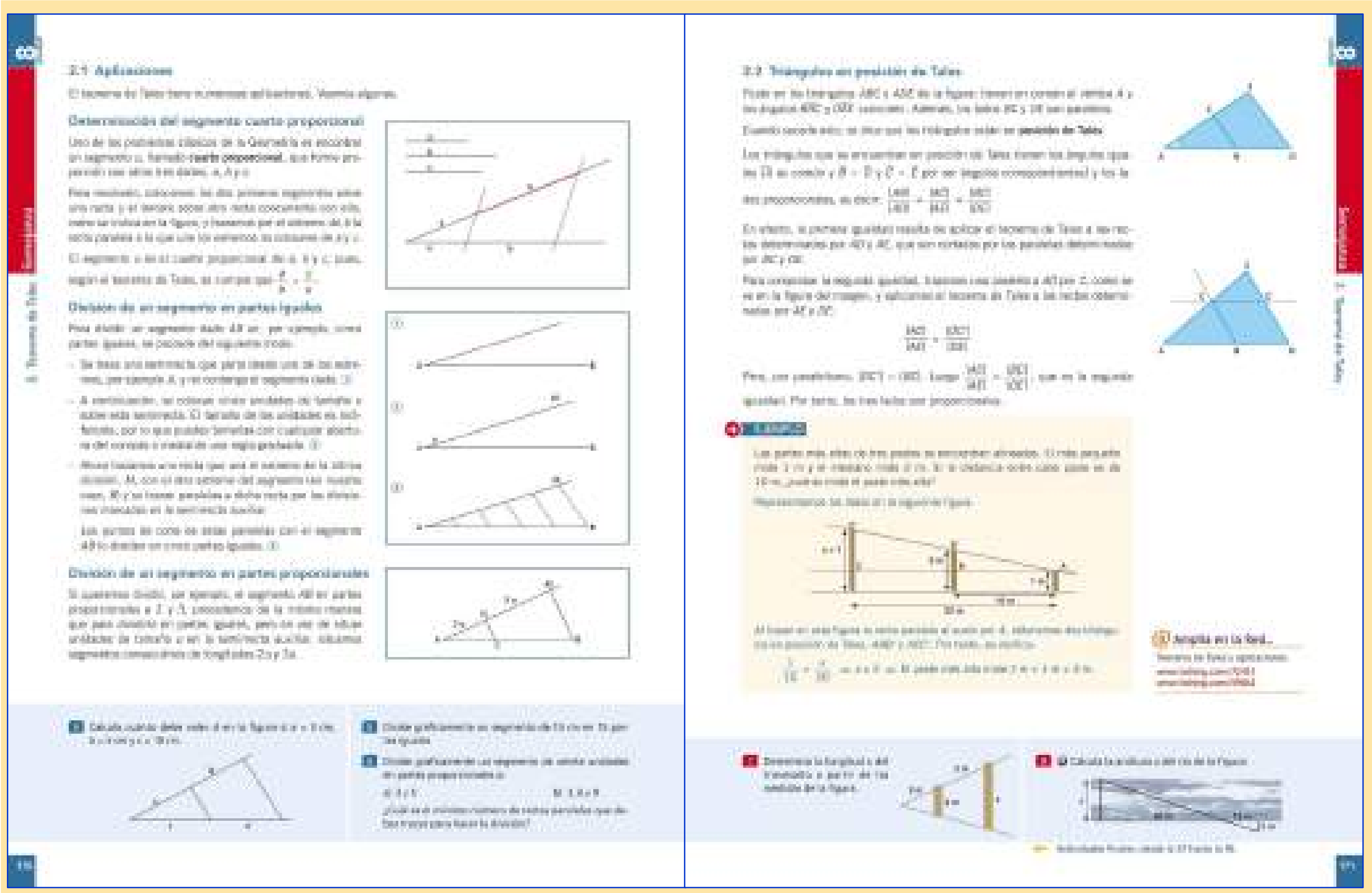
$26x = 66$

$x = \frac{66}{26} \simeq 2,54$

d) $\frac{9}{x} = \frac{25}{7}$

$25x = 63$

$x = \frac{63}{25} = 2,52$



2. TEOREMA DE TALES (CONT.)

2.1 Aplicaciones

■ A continuación trabajaremos tres aplicaciones del Teorema de Tales.

Leeremos la primera de ellas, *determinación del cuarto proporcional*, apoyándonos en el esquema de la derecha para su comprensión:

– *¿A qué se denomina cuarto proporcional de tres segmentos dados?*

– *Describe el proceso para calcularlo gráficamente.*

■ Leeremos después la segunda aplicación, *división de un segmento en partes iguales*, observando el esquema y analizándolo con los alumnos y alumnas:

– *¿Cuánto deben medir las divisiones de la semirrecta concurrente con el segmento?*

– *¿Cuál es el siguiente paso para dividir el segmento?*

– *¿Cómo sabemos que las divisiones del segmento obtenidas son iguales?*

■ A continuación observaremos el procedimiento seguido y el esquema de la tercera aplicación de Tales, *división de un segmento en partes proporcionales:*

– *¿Qué diferencia hay entre este método y el anterior?*

Ahora los alumnos y alumnas contestarán a las actividades propuestas en la página 170 del libro.

2.2 Triángulos en posición de Tales

■ Seguidamente leeremos el segundo apartado, y recogeremos las ideas principales en el siguiente cuestionario:

– *¿Cuándo se dice que dos triángulos están en posición de Tales?*

– *¿Qué caracteriza a los lados y ángulos de dos triángulos en posición de Tales?*

– *¿Cómo son los tres lados de dos triángulos en posición de Tales?*

■ Después analizaremos el ejemplo resuelto, como aplicación práctica de los triángulos de Tales:

– *¿Por qué son dos triángulos de Tales?*

– *¿Cómo hemos obtenido la igualdad 1/10 = x/20?*

– *¿Por qué le hemos sumado 1 metro al resultado?*

■ Para poner en práctica las aplicaciones del teorema de Tales, los alumnos y alumnas accederán a los recursos web indicados en el epígrafe *@Amplía en la Red.* Pueden resolver los casos planteados por parejas y comprobar las soluciones en el recurso web.

Después pediremos al alumnado que resuelva en su cuaderno de manera individual los ejercicios propuestos en el libro, en el página 171.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 6.* Interpretar los enunciados procesando los datos de manera ordenada.

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 4.* Adquirir confianza en uno mismo y gusto por aprender al resolver las actividades.

■ *Acts. 5 y 6.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

■ *Acts. 7 y 8.* Trabajar la aplicación de los triángulos en posición de Tales y utilizar algunas estrategias de manera sistemática.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 4 y 6.* Reflexionar antes de resolver las actividades y tomar decisiones de forma razonada.

■ *Act. 8.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre triángulos en posición de Tales.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 4 nos plantea un ejercicio donde afinar la identificación de triángulos semejantes en posición de Tales.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para trabajar en clase las aplicaciones del teorema de Tales, proponemos entrar en este enlace del Proyecto Gauss:

http://www.tiching.com/747426

Es un recurso interactivo en el cual el alumnado, siguiendo las instrucciones que se les dan, podran comprobar un aspecto en la vida corriente del teorema de Tales.

El profesor tendrá en cuenta que es un ejercicio experiencial, para el alumno es importante que las Matemáticas sean reales, y esta clase de actividades son un buen ejemplo de ello.

Nuestros alumnos comprobarán lo aprendido al resolver el último ejercicio y al mismo tiempo irán desarrollando estrategias particulares.

Se requiere instalar el programa Java para visualizar correctamente las ventanas interactivas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 170

4. Aplicamos el teorema de Tales:

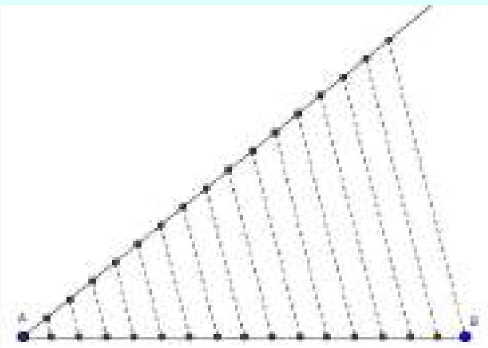
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{3}{5}=\frac{10}{d}\Rightarrow 3d=50\Rightarrow d=\frac{50}{3}\simeq 16{,}67$$

5. Llamamos AB al segmento de 15 cm.

Trazamos una semirrecta y la dividimos en 15 partes iguales.

Unimos el extremo de la última división con el punto B y trazamos paralelas a ella por los puntos de las divisiones de la semirrecta.

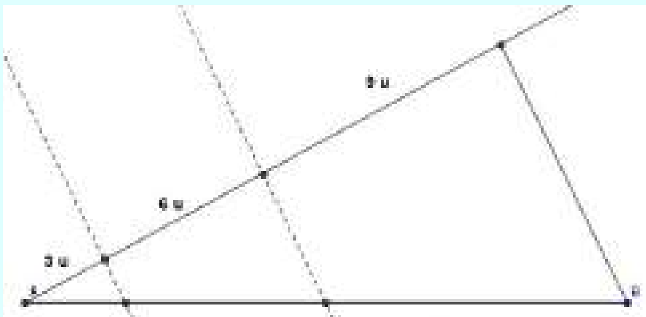
Los puntos de corte de esas paralelas con AB son las divisiones de las 15 partes iguales.



6. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) Se deben trazar 2 rectas:

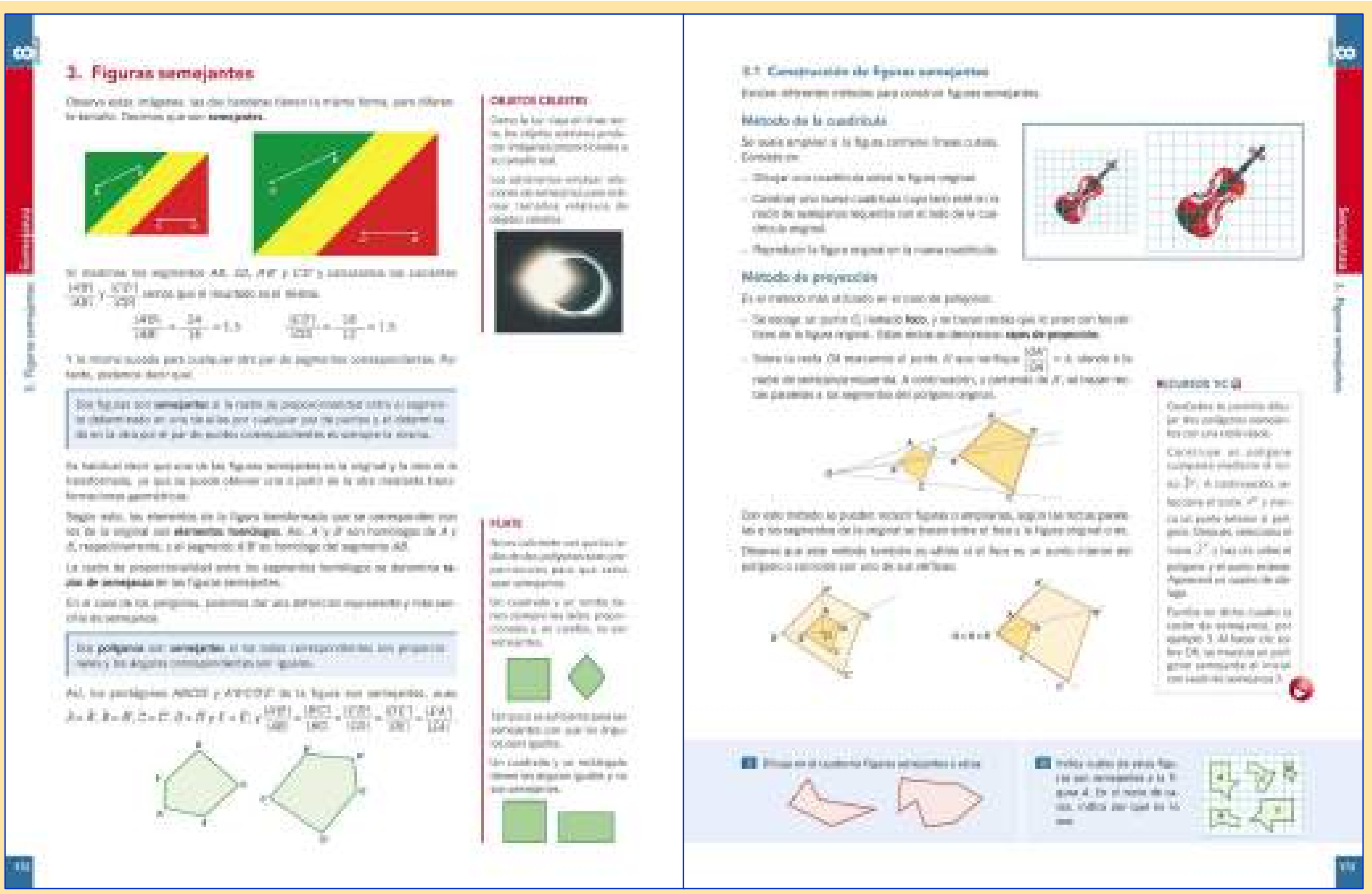
b) Se deben trazar 3 rectas:



Página 171

7. La figura forma triángulos en posición de Tales, luego sus lados son proporcionales.

(Continúa en la página 8-34 de la guía)



3. FIGURAS SEMEJANTES

■ El objetivo básico de esta sección es dar a conocer las características propias de las figuras semejantes para aprender a construir una figura semejante a otra.

Para empezar leeremos la primera parte de la sección hasta el primer recuadro coloreado, y plantearemos las siguientes cuestiones a los alumnos y alumnas:

– *¿Qué utilidad ves tú en la semejanza entre figuras?*
– *¿Podríamos conocer las características de objetos muy grandes e inaccesibles para nosotros a partir de una figura semejante?*
– *¿Cuándo dos figuras son semejantes?*

Después leeremos la nota *Objetos celestes,* que nos da una idea de la utilidad de las relaciones de semejanza.

■ Continuaremos leyendo este apartado. Comentando con el alumnado los siguientes puntos destacados:

– *¿A qué se denomina elementos homólogos?*
– *¿Existe una razón de proporcionalidad entre los elementos de dos figuras semejantes? ¿Cómo se denomina?*
– *¿Qué dos condiciones tienen que cumplirse a la vez en polígonos semejantes?*

Leeremos ahora la nota *Fíjate* del margen, que subraya la necesidad de que se cumplan las dos condiciones a la vez para que dos polígonos se consideren semejantes.

3.1 Construcción de figuras semenjantes

■ A continuación aplicaremos los conceptos anteriores a la construcción de figuras semejantes.

Empezaremos observando el primero de los métodos de construcción, denominado *Método de la cuadrícula,* comprobando su aplicación en la ilustración de la derecha:

– *¿Cuándo puede aplicarse este método?*
– *¿Lo aplicarías para hallar polígonos semejantes?*
– *¿Cómo debe ser la cuadrícula donde representaremos la figura transformada?*

■ Después nos fijaremos en la descripción del segundo método y destacaremos los siguientes aspectos:

– *¿En qué casos empleamos este método fundamentalmente?*
– *¿Podemos escoger cualquier punto como foco?*
– *¿Cómo procederemos si queremos trazar una figura más pequeña que la original?*

El docente destacará la utilidad de Geogebra para construir polígonos semejantes, según se indica en el apunte *Recursos TIC.*

El alumnado practicará los métodos introducidos en esta sección resolviendo las actividades propuestas en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 10.* Usar el vocabulario adecuado para expresar con corrección la respuesta a la actividad.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Recursos TIC, pág. 173* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como el aplicativo GeoGebra que permite dibujar polígonos semejantes con una razón dada.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 9.* Aplicar el proceso aprendido según los métodos propuestos para dibujar figuras semejantes.
- *Act. 10.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos a situaciones parecidas propuestas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 10.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre figuras semejantes.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 permitirá consolidar la construcción de figuras semejantes y la autonomía a la hora de decidir el método más conveniente para su realización.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de practicar métodos para medir o construir figuras semejantes, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747427

El proyecto Gauss ofrece recursos didácticos para trabajar la semejanza. Una de las aplicaciones del tema es la medición de figuras o áreas irregulares.

En este caso presenta una actividad interactiva para que los alumnos sigan las consignas paso a paso y completen los cálculos.

Nos interesará que asimilen bien el proceso ya que el recurso ofrece algunas herramientas útiles para medir áreas irregulares y extensas. El ejercicio se repite con varios ejemplos para que puedan automatizar los procesos.

Este tipo de propuestas fomentan la autonomía de los alumnos al ser actividades interactivas y autocorrectivas.

Se requiere instalar el programa Java para visualizar correctamente las ventanas interactivas.

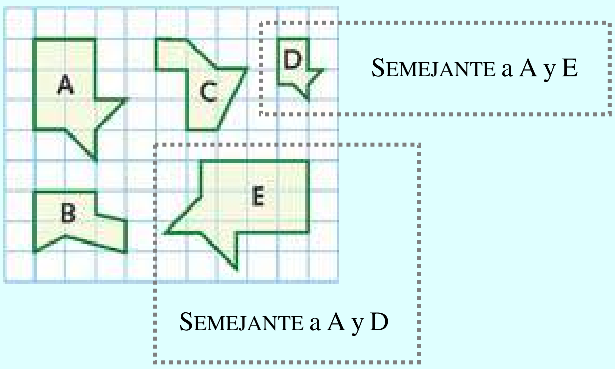
SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

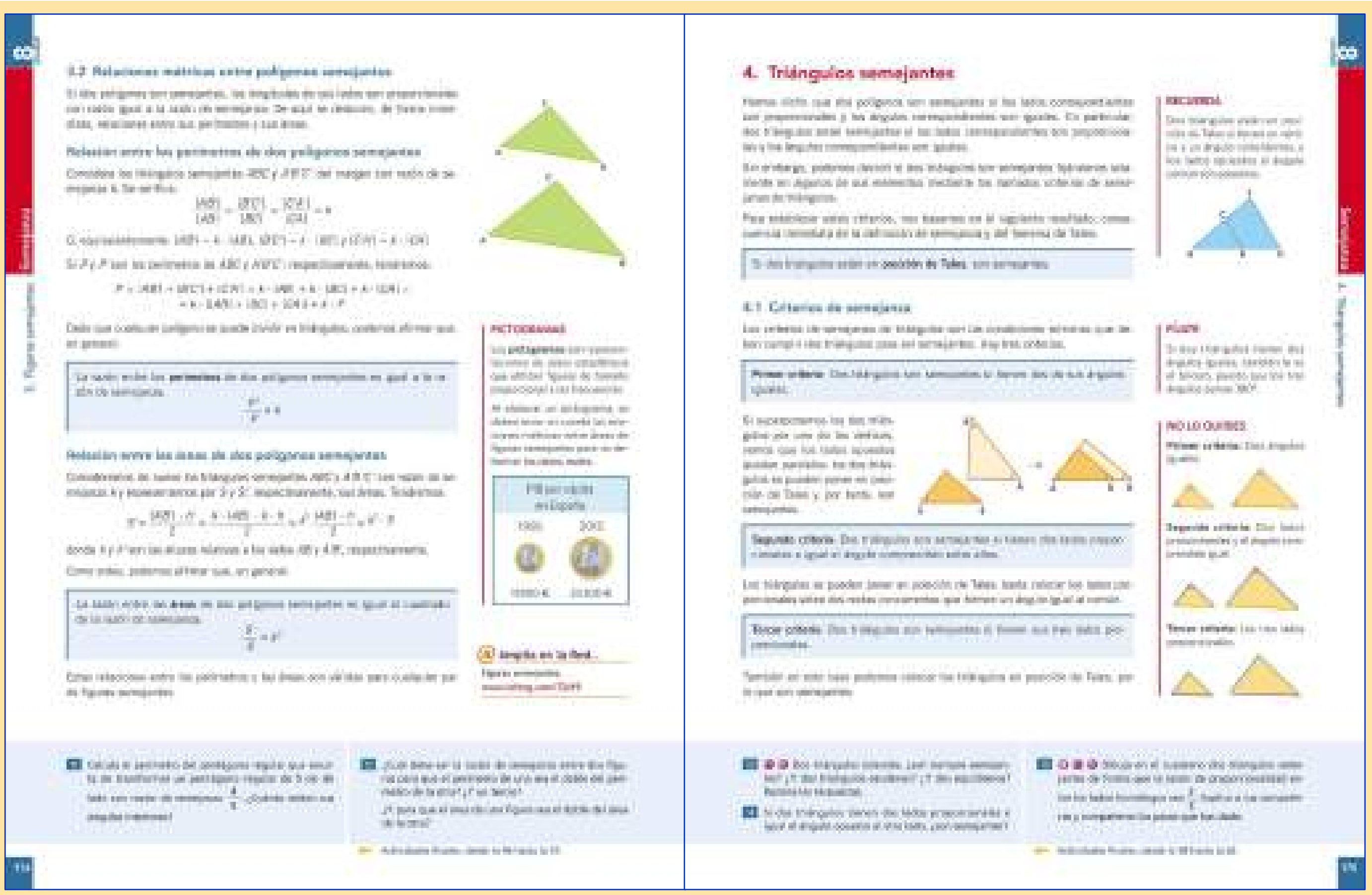
Página 173

9. Actividad personal.

Se deberán dibujar polígonos que respeten la forma, los ángulos y las proporciones de los lados de las figuras dadas.

10. Las figuras semejantes a la figura A son la **figura D** y la **figura E**, ya que a diferencia de las figuras B y C, sí mantienen la misma forma de la figura A, siendo proporcionales sus lados e iguales sus ángulos correspondientes.





3. FIGURAS… (CONT.) / 4. TRIÁNGULOS…

3.2 Relaciones métricas entre polígonos…

■ En este apartado ampliaremos el estudio de las características de los polígonos semejantes.

Para empezar leeremos la introducción y el primer subapartado, atendiendo a la demostración:

- *¿Cómo son los perímetros de dos triángulos semejantes?*
- *¿Se cumple lo anterior para cualquier polígono? ¿Por qué?*

■ A continuación leeremos el siguiente subapartado, prestando atención a la deducción de la fórmula, y comentaremos con el alumnado:

- *¿Cómo se relacionan los áreas de dos polígonos semejantes?*
- *¿Y de dos figuras semejantes cualesquiera?*

■ Terminaremos esta sección con la lectura del apunte *Pictogramas*.

El alumnado accederá al recurso web indicado en *@Amplía en la Red*. Por último realizarán las actividades del libro.

■ El objetivo básico de la sección 4 consiste en enunciar las propiedades que facilitan la caracterización de los triángulos semejantes.

Comenzaremos leyendo la introducción y la nota del margen *Recuerda*, y formularemos las siguientes preguntas al alumnado:

- *¿Cuándo dos triángulos están en posición de Tales?*
- *¿Dos triángulos en posición de Tales son siempre semejantes? ¿Por qué?*

4.1 Criterios de semejanza

■ Leeremos a continuación la introducción de este apartado y el primer criterio, junto con la nota *Fíjate*:

- *¿Sabiendo que los ángulos de dos triángulos dados son iguales, será necesario verificar la igualdad de sus lados para determinar si son semejantes?*

Posteriormente nos fijaremos en el segundo criterio:

- *¿Qué enuncia este criterio? ¿Sabrías demostrarlo?*

Por último leeremos el tercero de los criterios y preguntaremos a los alumnos y alumnas:

- *¿Qué expresan los criterios de semejanza?*
- *¿Qué será más fácil identificar, la semejanza entre dos triángulos o entre dos hexágonos? ¿Por qué?*

Para repasar los dichos criterios leeremos la nota *No lo olvides*, y accederemos al recurso *@Amplía…* de la Pág. 176.

Finalmente resolverán las actividades 13 a 15 propuestas en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 12, 13, 15.* Desarrollar la capacidad de expresar por escrito argumentos propios, utilizando correctamente el léxico sobre el tema.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 11, 15.* Aplicar los nuevos conocimientos y capaci-dades y saber transformar la información en conocimiento propio.
- *Acts. 12, 13.* Reconocer y asimilar los conceptos y las relaciones métricas entre polígonos semejantes y ser capaz de reproducirlos.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 12.* Identificar, en la realización de la actividad, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

SOCIALES Y CÍVICAS

- *Act. 15.* Manejar las habilidades sociales al realizar una actividad de grupo.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 servirá para revisar la semejanza de triángulos y el significado de la razón de semejanza.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Naveguemos por Tiching

– Para seguir trabajando en clase la semejanza de triángulos, podemos acceder al siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747428

Es un recurso de tipo Descartes, donde se proponen cuatro actividades interactivas. En primer lugar comprobarán el proceso a través de un ejemplo resuelto y los pasos que se deben seguir.

Seguidamente, el profesor pedirá a los alumnos y alumnas que los realicen en su cuaderno. Posteriormente podrán comprobar los resultados obtenidos mediante una sencilla aplicación.

A continuación, podemos sugerirles que construyan triángulos utilizando tiras de distintas medidas de goma espuma y demuestren entre ellos los criterios de semejanza.

Ambas actividades pueden ser interesantes para los alumnos, ya que promueven la autonomía y la creatividad en los aprendizajes.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 174

11. El pentágono a transformar tiene de perímetro: p = 5·5 = = 25 cm

Llamamos p' al perímetro del pentágono transformado, de manera que se verifica:

$\frac{4}{5} = \frac{p'}{p} \Rightarrow 5p' = 4{\cdot}25 \Rightarrow p' = 20$ cm. El perímetro mide 20 cm.

Los ángulos interiores miden lo mismo que los del pentágono original:

$$\frac{3\cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

Cada ángulo interior mide 108º

12. Llamamos p al perímetro y A al área de una de las figuras, siendo k la razón de semejanza.

Para que un perímetro sea el doble que el otro:

Se verifica: $\frac{2p}{p} = k \Rightarrow k = 2$

Para que un perímetro sea un tercio del otro:

Se verifica: $\frac{3p}{p} = k \Rightarrow k = 3$

Para que el área de una figura sea el doble del área de la otra, se cumple:

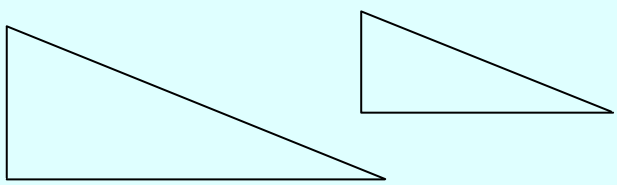
$$\frac{2A}{A} = k^2 \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \sqrt{2}$$

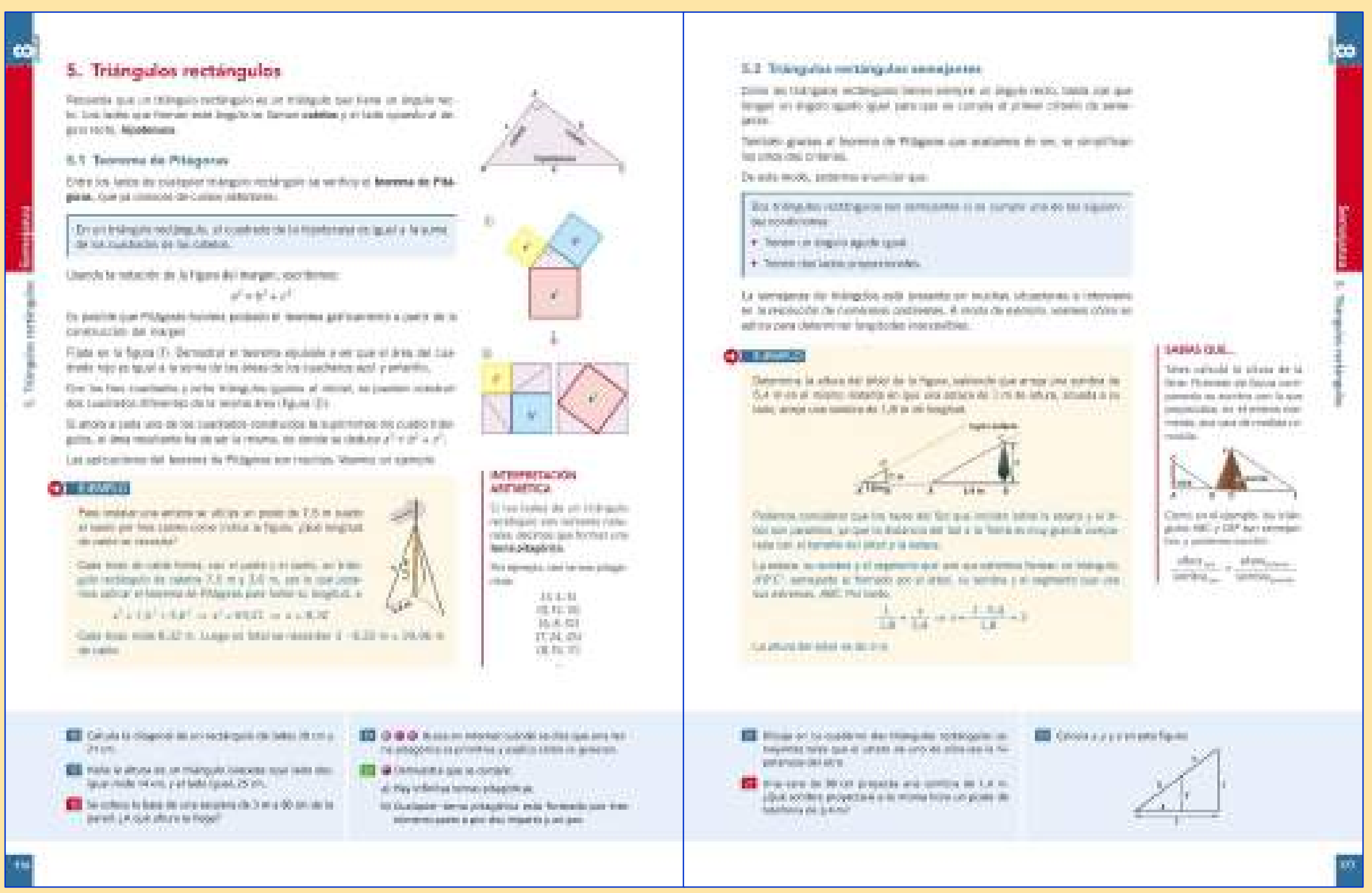
Página 175

13. Dos triángulos isósceles no siempre serán semejantes. Solo lo serán en aquellos casos que se cumpla alguno de los tres criterios de semejanza. Lo mismo sucede con los escalenos. En cambio, dos triángulos equiláteros siempre serán semejantes, ya que sus tres ángulos, en cualquier caso, medirán lo mismo: 60º.

14. No. Dos triángulos serán semejantes si tiene dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

15. Actividad personal. A modo de ejemplo, dibujamos un triángulos cuyos lados midan a = 6 cm, b = 5 cm y c = 2 cm. Aplicamos a estas medidas la razón de proporcionalidad, de manera que los lados del nuevo triángulo medirán a' = 2a/3 = 4 cm, b' = 2b/3 = 3,33 cm y c' = 2c/3 = = 1,33 cm. Los triángulos serán:





5. Triángulos rectángulos

5.1 Teorema de Pitágoras

■ En este apartado nos centraremos en los triángulos rectángulos.

Iniciaremos la sección recordando qué es un triángulo rectángulo y pediremos al alumnado que dibujo uno como el que aparece en la figura de la derecha.

■ Introduciremos a continuación el teorema de Pitágoras con la notación adecuada. Pediremos al alumnado que observen las figuras 1 y 2 y les preguntaremos:

– *¿Por qué dibujamos cuadrados y no otras figuras geométricas?*
– *¿Cómo relacionamos las figuras geométricas de la imagen 2 con la demostración del teorema de Pitágoras?*

Seguiremos con un análisis conjunto del ejemplo 2, del que destacaremos:

– La importancia de dibujar esquemáticamente lo que propone el problema para comprenderlo a la perfección.
– Identificar correctamente los catetos y la hipotenusa para evitar posibles errores.

Acto seguido leeremos la nota *Interpretación aritmética*, introduciendo así el concepto de terna pitagórica.

Para acabar pediremos a las alumnas y alumnos que resuelvan las actividades 13 a 15 en sus cuadernos.

5.2 Triángulos rectángulos semejantes

■ En este apartado simplificaremos los criterios de semejanza para el caso de los triángulos rectángulos.

Leeremos el texto del apartado y el recuadro coloreado. A continuación preguntaremos:

– *¿Es suficiente con que dos triángulos rectángulos tengan un ángulo agudo igual para afirmar que son semejantes?*
– *¿Cuáles son los criterios de semejanza en triángulos rectángulos?*
– *¿Qué enuncia el teorema de Pitágoras?*

■ Analizaremos a continuación el ejemplo resuelto en el siguiente apartado donde se muestra una de las aplicaciones de la semejanza de triángulos:

– *¿Cómo hemos obtenido la igualdad que resuelve el ejercicio?*
– *¿De qué otra forma podríamos haber expresado la relación de semejanza?*

En relación con el ejemplo, leeremos la nota *Sabías que…* para descubrir cómo calculó Tales de Mileto la altura de una pirámide utilizando este mismo método.

Después los alumnos y alumnas pueden resolver en grupos las actividades propuestas en la página 177 del libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 22.* Leer, comprender e interpretar los enunciados procesando los datos de manera ordenada.

■ *Act. 19.* Explicar conceptos matemáticos de manera clara y entendedora.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 21, 22.* Identificar y manejar las posibles respuestas, tomando decisiones de manera racional.

■ *Act.* 20. Aplicar procedimientos adquiridos para conseguir demostraciones matemáticas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 21, 22.* Desarrollar la capacidad de poner en práctica los conocimientos adquiridos, extrayendo conclusiones y siendo perseverante en la resolución.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Acts. 19.* Desarrollar la capacidad de buscar información concreta y de calidad en Internet.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ En la actividad de refuerzo 5 encontraremos otro ejercicio donde continuar trabajando el teorema del cateto.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de practicar con los teoremas del cateto y de la altura, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747429

Se trata de un vídeo de casi seis minutos, en el que se explica el procedimiento por el cual se obtienen ambos teoremas. Previamente les podríamos sugerir lo siguiente:

- *Construye con goma espuma un triángulo rectángulo. Nombra y marca la altura y sus lados.*
- Construye los *dos* triángulos que se forman en su interior.

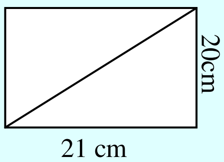
Pediremos que visualicen el vídeo y que practiquen y repitan el proceso ante sus compañeros utilizando el léxico adecuado. Podrán parar y volver atrás tantas veces como sea necesario para asegurarse de haber comprendido el procedimiento.

La geometría se presta a que los alumnos manipulen las matemáticas y así facilitarles el pensamiento matemático por demostración, no sólo para resolver problemas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 176

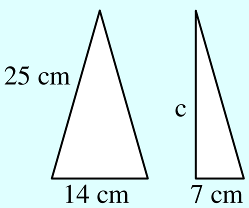
16. Aplicamos el teorema de pitágoras:



$hip^2 = 20^2 + 21^2 = 441$
$hip = 20{,}52$ cm

La diagonal mide 20,52 cm.

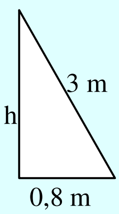
17. Aplicamos el teorema de pitágoras:



$c^2 = 25^2 - 7^2 = 576$
$c = 24$ cm

La altura del triángulo mide 24 cm.

18. Aplicamos el teorema de Pitágoras:



$h^2 = 3^2 - 0{,}8^2 = 8{,}36$
$h = 2{,}89$ m

La altura será 2,89 m.

19. Actividad personal. El alumnado deberá comentar que una terna pitagórica se considera primitiva cuando los tres números que las constituyen son corrimos, es decir, que el m.c.d. de estos tres números es 1, o lo que es lo mismo, no tienen ningún factor primo en común.

Para generar ternas pitagóricas primitivas debemos tener en cuenta que si (a, b, c) es una terna pitagórica primitiva, luego la terna de múltiplos (an, bn, cn) también lo es, donde n es un entero positivo. Calculando el m.c.d de los tres números y dividiendo an, bn, cn por el m.c.d habremos obtenido una terna primitiva.

20. a) Sea (a, b, c) una terna pitagórica, la terna de múltiplos (an, bn, cn), donde n es un entero positivo, también lo será:

$(an)^2 = (bn)^2 + (cn)^2 \rightarrow a^2n^2 = b^2n^2 + c^2n^2 \rightarrow$
$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

Por tanto, existirán infinitas ternas.

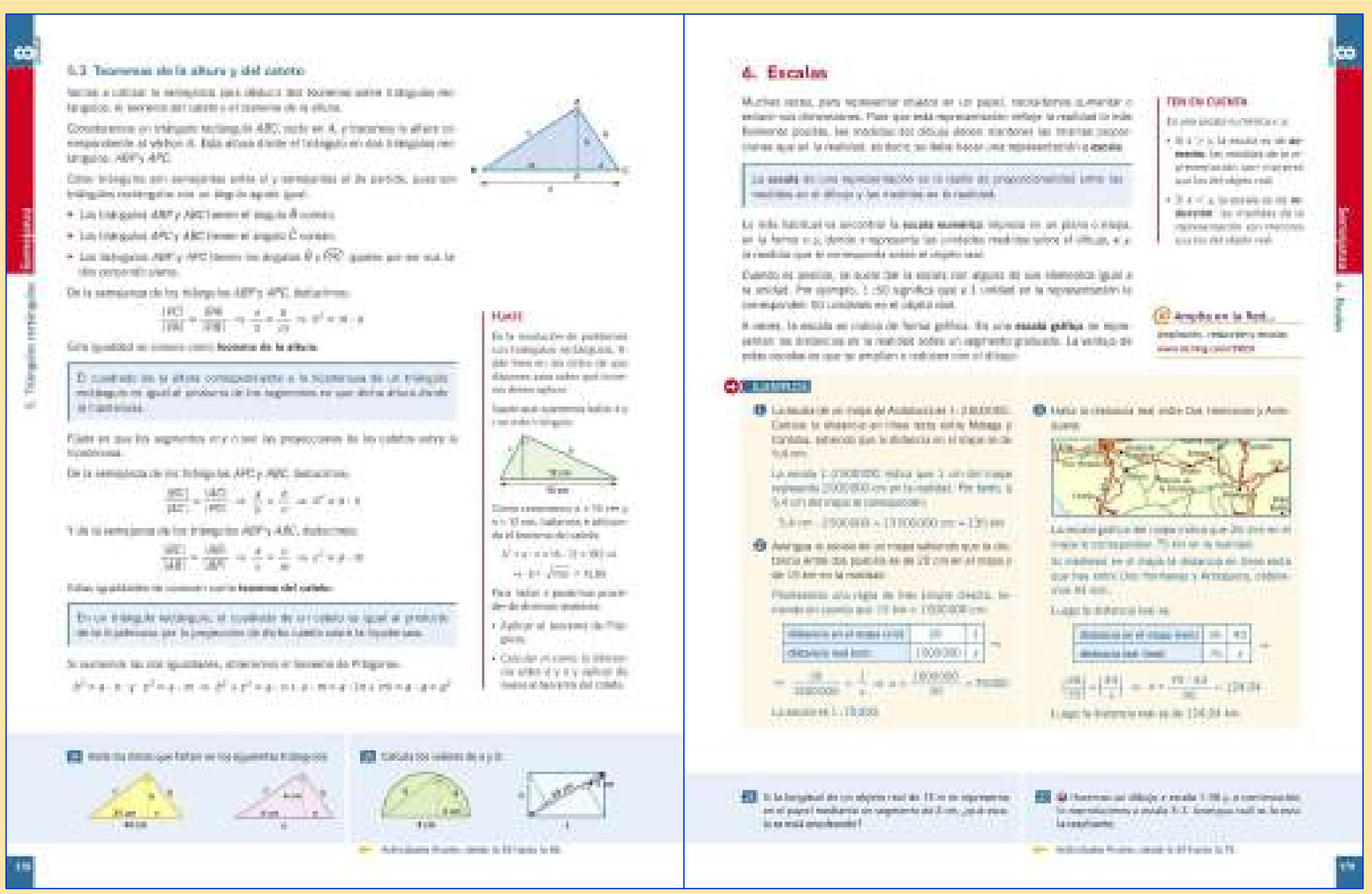
b) Por un lado sabemos que una terna pitagórica cumplirá que $a^2 = b^2 + c^2$. Por otro lado, sabemos que:

– El cuadrado de un número impar es impar, y el cuadrado de un número par es par.

– La suma de dos pares es un par, mientras que la suma de un impar y un par es un impar.

Por tanto, si uno de entre *b* y *c* es impar y el otro par, *a* será impar. En cambio, si *b* y *c* son pares, *a* será par.

(Continúa en la página 8-34 de la guía)



5. TRIÁNGULOS... (CONT.) / 6. ESCALAS

5.3 Teorema de la altura y del cateto

■ El objetivo básico de la siguiente sección consiste en deducir, a partir de las relaciones de semejanza, dos propiedades de los triángulos rectángulos muy importantes a la hora de resolver problemas.

Para ello leeremos la primera parte de la sección, donde se enuncia y deduce el teorema de la altura:

– *¿Cómo hemos obtenido la proporción entre los catetos?*
– *¿Qué enuncia el teorema de la altura?*
– *¿Se puede aplicar a cualquier triángulo?*

■ A continuación observaremos los pasos seguidos para deducir el teorema del cateto:

– *¿Cómo podemos calcular la longitud de un cateto utilizando el teorema del cateto?*
– *¿Es factible que se aplique a los dos catetos de un triángulo?*

Por último observaremos el ejemplo resuelto en la nota *Fíjate* y resolveremos las posibles dudes que el alumnado plantee.

En este punto pediremos a los alumnos y alumnas que resuelvan las actividades propuestas en la página 178 del libro.

6. Escalas

■ El objetivo de esta sección es aprender a aplicar las escalas en diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Para empezar leeremos la introducción y formularemos estas preguntas a los alumnos y alumnas:

– *¿Para qué son útiles las representaciones a escala?*
– *¿Qué expresa una escala de medida?*
– *¿Has utilizado alguna vez un documento a escala? ¿Qué representaba? Explícalo a tus compañeros.*

■ A continuación leeremos el texto y la nota *Ten en cuenta*. Después lo comentaremos entre todos mediante este cuestionario:

– *¿Qué es una escala numérica? ¿Qué dos tipos de escalas numéricas existen?*
– *¿Qué tipo de escala utilizarías para representar el plano de tu habitación?*
– *¿Qué significa la escala 1:100?*

Seguiremos con los tres ejemplos resueltos propuestos. Los comentaremos entre todos, prestando especial atención a los diferentes tipos de escalas que existen.

Para terminar, accederemos al recurso Tiching de la sección @Amplía en la Red y pediremos al alumnado que resuelva las actividades 26 y 27 en sus cuadernos.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 27.* Desarrollar la capacidad de comprender e interpretar los enunciados de las actividades en los que se incluyen términos específicos.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 26 y 27.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

■ *Acts. 24 y 25.* Trabajar la aplicación de la seme-janza de triángulos, utilizándola de manera sistemática.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 27.* Analizar el enunciado, seleccionar una estrategia, valorar las posibles respuestas y tomar decisiones con criterio propio, con la finalidad de poder resolver el ejercicio.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de ampliación 3 servirá para utilizar el concepto de escala en un ejercicio de medida.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos el siguiente enlace, para practicar la razón de proporcionalidad con escalas:

http://www.tiching.com/747430

Es un recurso del Proyecto Gauss, que el profesor podrá utilizar para que los alumnos de forma autónoma trabajen con escalas y sus aplicaciones.

Al ser interactivo, ellos mismos podrán comprobar si las soluciones son correctas y volver a practicarlo si han cometido errores.

Es una forma entretenida de aplicar la proporcionalidad y mecanizar estrategias útiles en la vida cotidiana.

También les preguntaremos:

- *¿Qué quiere decir que una escala es de aumento? Explícalo con tus palabras.*
- *¿Cómo se suele expresar una escala numérica? Pon un par de ejemplos.*

Se requiere instalar el programa Java para visualizar correctamente las ventanas interactivas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 178

24. En el primer triángulo:

Calculamos n: $n = 40 - 25 = 15$

Aplicamos el teorema de la altura:

$h^2 = 25 \cdot 15 = 375 \Rightarrow h = 19{,}36$

Aplicamos el teorema del cateto:

$a^2 = 40 \cdot 25 = 1000 \Rightarrow a = \sqrt{1000} = 31{,}62$

25. En la primera figura:

Calculamos m: $m = 8 - 3 = 5$

Aplicamos el teorema del cateto:

$a^2 = 3 \cdot 8 = 24 \Rightarrow a = \sqrt{24} = 4{,}9$

$b^2 = 5 \cdot 8 = 40 \Rightarrow b = \sqrt{40} = 6{,}32$

Por tanto a = 4,9 cm; b = 6,32 cm

En la segunda figura:

Calculamos la proyección del cateto a: $m = 20 - 5 = 15$

Aplicamos el teorema del cateto:

$a^2 = 15 \cdot 20 = 300 \Rightarrow a = \sqrt{300} = 17{,}32$

$b^2 = 5 \cdot 20 = 100 \Rightarrow b = \sqrt{100} = 10$

Por tanto a = 17,32 cm; b = 10 cm

Página 179

26. Expresamos los 15 m en cm: 15 m = 1500 cm.

Disponemos los datos en forma de regla de tres directa:

Distancia en el papel	2 cm	1
Distancia real	1500 cm	x

Calculamos x:

$$\frac{2}{1500} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1500}{2} = 750$$

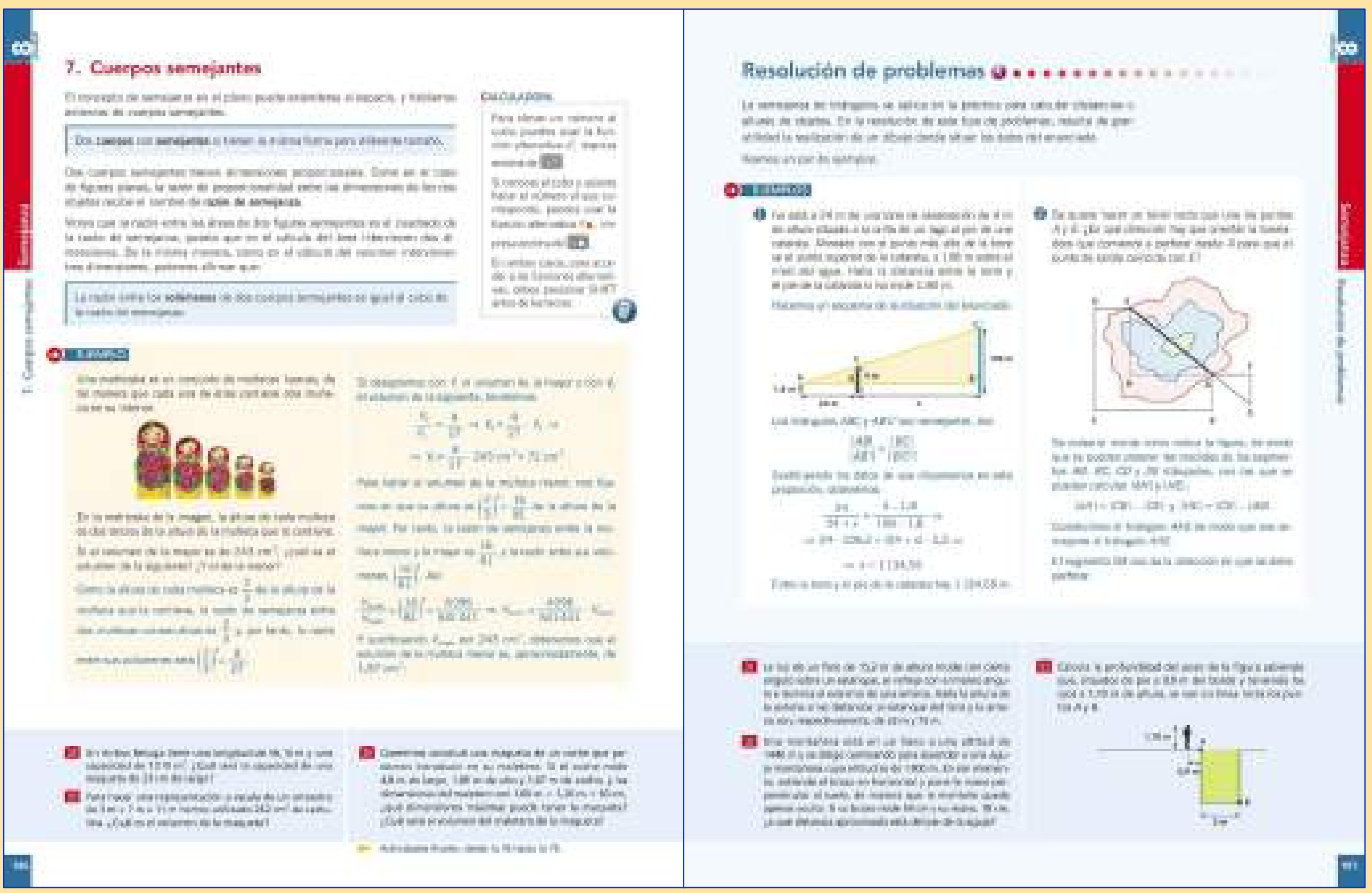
La escala es 1:750.

27. Basta multiplicar las dos fracciones correspondientes a las escalas:

$$\frac{1}{50} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{100}$$

La escala resultante es 3:100.

Calculamos x:


7. Cuerpos semejantes

Resolución de problemas

7. CUERPOS SEMEJANTES / RESOLUCIÓN DE...

■ El objetivo de esta sección es traducir las relaciones de semejanza estudiadas para los polígonos y otras figuras de dos dimensiones, a cuerpos de tres dimensiones.

Para empezar leeremos el texto y las definiciones de los recuadros, resumiendo los aspectos más importantes a través de estas cuestiones:

– *¿Qué diferencia a dos cuerpos semejantes?*
– *¿Qué tienen en común?*
– *¿Cómo se define la razón de semejanza en el caso de objetos de tres dimensiones?*
– *¿Cómo la podemos calcular?*

Antes de realizar los ejemplos y ejercicios, nos puede ser de utilidad aprender cómo realizar ciertas operaciones con la calculadora. Para ello podemos leer el apunte *Calculadora* del margen.

■ A continuación analizaremos en detalle el ejemplo resuelto, en el que se aplican las ideas introducidas sobre la relación de semejanza en el espacio:

– *¿Por qué la razón de semejanza es 2/3?*
– *¿Cómo hemos calculado la relación entre las alturas de la muñeca más pequeña y la más grande?*

Los alumnos y alumnas resolverán ahora los problemas planteados en la página 180 del libro de texto.

■ En la siguiente sección veremos cómo se aplica la teoría de la semejanza entre triángulos a la resolución de problemas.

Para ello leeremos primero la introducción y después observaremos los pasos seguidos para resolver el primer ejemplo:

– *¿Cuál es el primer paso para resolver este tipo de problemas?*
– *¿Cómo hemos construído la relación de semejanza? ¿Qué lados de los triángulos escogemos?*
– *¿Por qué restamos 1,8?*

■ A continuación observaremos el segundo ejemplo que analizaremos formulando las siguientes preguntas al alumnado:

– *¿Por qué nos interesa trazar los segmentos AB, BC, CD y DE?*
– *¿Cómo hemos trazado el triángulo semejante al AHE?*

Por último los alumnos y alumnas pueden resolver los problemas propuestos en la página 181, en los que pondrán a prueba su destreza a la hora de aplicar los conceptos y procedimientos estudiados en esta unidad.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 30.* Interpretar el enunciado del problema y generar supuestos, hipótesis e interrogantes.
- *Acts. 31 y 32.* Leer, comprender e interpretar los enunciados de los problemas planteados y resolverlos mediante la aplicación de los conocimientos adquiridos.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 28, 29 y 30.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades para resolver los ejercicios propuestos.
- *Acts. 31, 32 y 33.* Saber transformar la información recopilada y construir sus propias estrategias para aplicarlas en la resolución de los problemas y saber razonarlo.

SENTIDO DE INICIATIVA I ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Resolución de problemas, pág. 181.* Observar el planteamiento y resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas y el orden de las operaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de ampliación 4 plantea un problema de proporciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para adquirir práctica en la resolución de problemas que implican la semejanza de triángulos, proponemos el enlace siguiente:

http://www.tiching.com/747431

El recurso ofrece más de setenta problemas resueltos que implican los contenidos trabajados en esta unidad. También un apartado de autoevaluación.

El docente escogerá los más adecuados de forma individualizada a cada alumno y puede sugerir que se entreguen sin el resultado.

Les pediremos que los resuelvan en su cuaderno siguiendo el siguiente esquema:

- Planteamiento de la cuestión.
- Organización de los datos.
- Operaciones y resolución.

A continuación, podrán verificar el proceso y el resultado. Pensamos que este recurso puede ser muy útil para preparar el examen de la unidad de forma autónoma.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 180

28. La escala de la maqueta es:

$\frac{23}{5615}$, que es la razón de semejanza.

Aplicamos la razón entre los volúmenes:

$$\frac{V}{1210}=\left(\frac{23}{5615}\right)^3 \Rightarrow V=\frac{529\cdot 1210}{31528225}=0{,}020302126\ m^3=$$

$= 20{,}3\ cm^3$

La capacidad de la maqueta es $20{,}3\ cm^3$.

29. Calculamos el área A y el volumen V del ortoedro:

$A = 2\cdot3\cdot7 + 2\cdot3\cdot11 + 2\cdot7\cdot11 = 42 + 66 + 154 = 262\ m^2$

$V = 3\cdot7\cdot11 = 231\ m^3$

Calculamos la razón entre las áreas:

$$262\ m^2 = 2620000\ cm^2 \Rightarrow k^2=\frac{262}{2620000}=\frac{1}{10000}$$

La razón de semejanza es $k=\sqrt{\frac{1}{10000}}=\frac{1}{100}$

Aplicamos la razón entre los volúmenes:

$$\frac{V}{231}=\left(\frac{1}{100}\right)^3 \Rightarrow V=\frac{231}{1000000}=0{,}000231\ m^3=$$

$= 231\ cm^3$

El volumen de la maqueta es de $231\ cm^3$

30. Dividimos las dimensiones, respectivamente:

$$\frac{4{,}8}{1{,}60}=3;\quad \frac{1{,}80}{1{,}20}=1{,}5;\quad \frac{0{,}60}{1{,}47}=2{,}45$$

La escala debe ser 1:3

Calculamos las dimensiones máximas de la maqueta:

$$4{,}8\cdot\frac{1}{3}=1{,}6,\quad 1{,}8\cdot\frac{1}{3}=0{,}6,\quad 1{,}47\cdot\frac{1}{3}=0{,}49$$

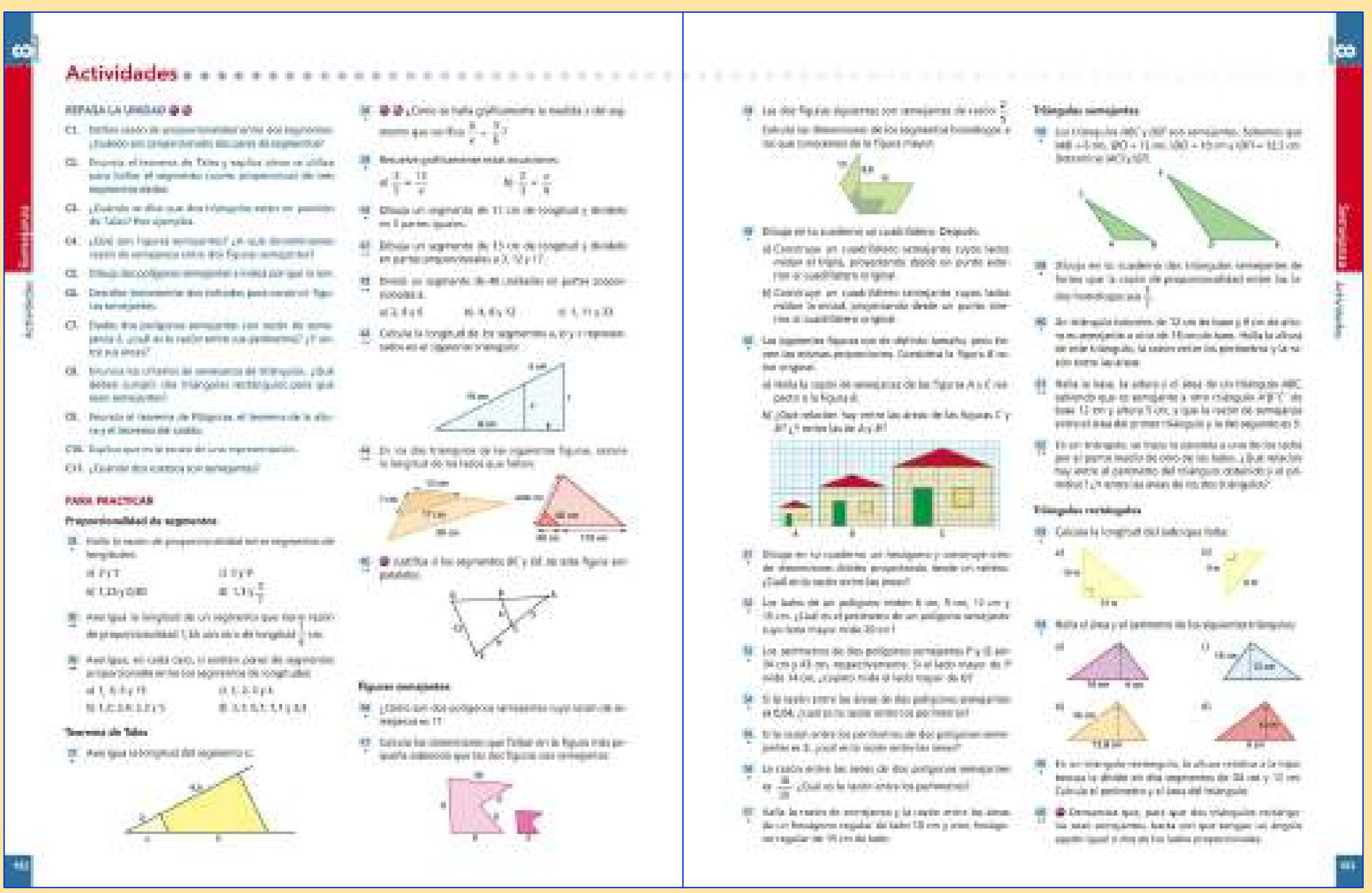
Las dimensiones son 1,6 m. 0,6 m. y 0,49 m. Aplicamos la razón entre los volúmenes:

El volumen real del maletero es $1{,}60\cdot1{,}20\cdot0{,}60 = 1{,}152\ m^3 = 1152000\ cm^3$. Por tanto:

$$\frac{V}{1152000}=\left(\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow V=\frac{1152000}{27}=42{,}67\ cm^3$$

El volumen del maletero de la maqueta es de $42{,}67\ cm^3$

(Continúa en la página 8-34 de la guía)


Actividades

REPASA LA UNIDAD

PARA PRACTICAR

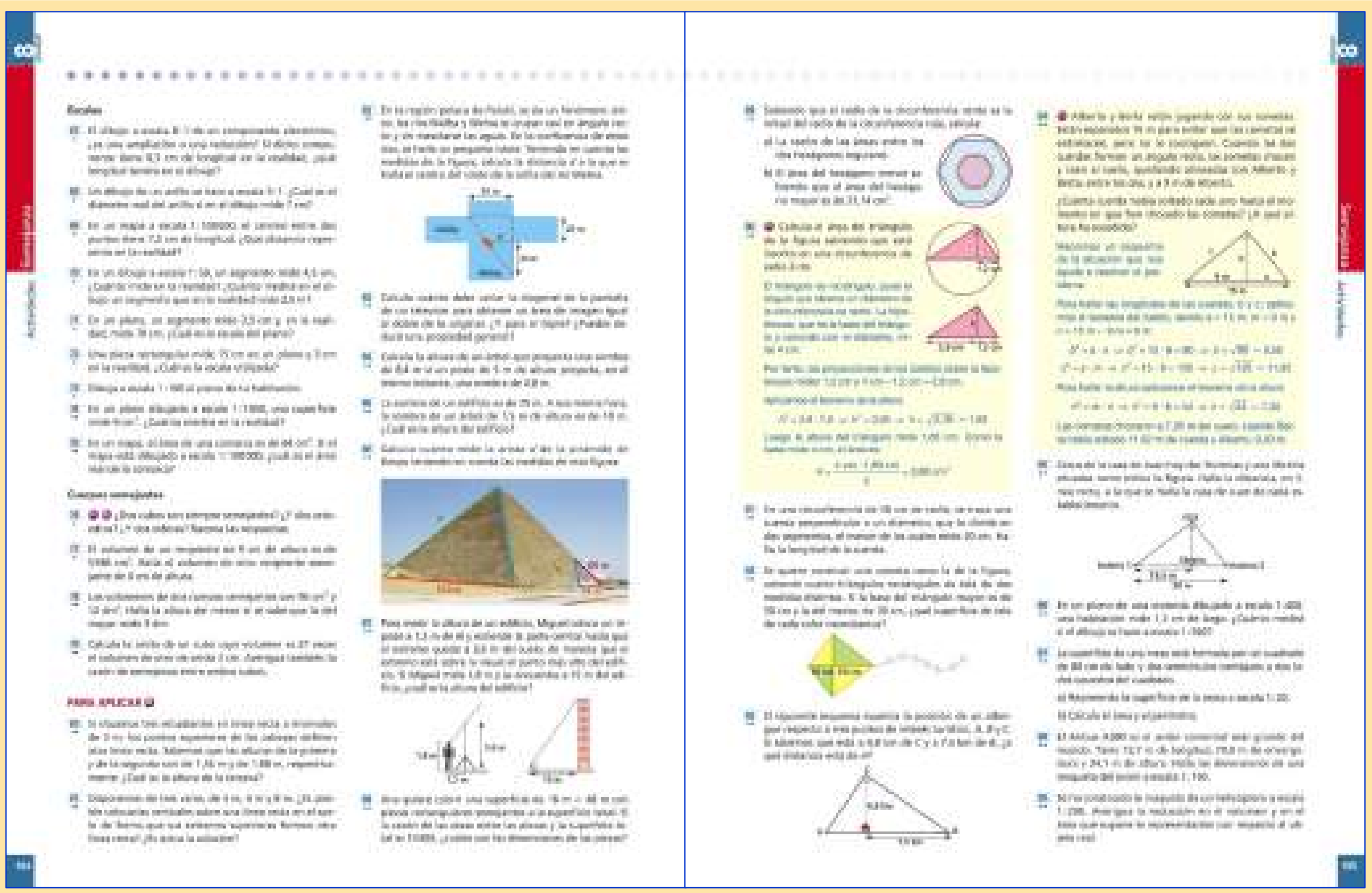
Proporcionalidad de segmentos

Teorema de Tales

Figuras semejantes

Triángulos semejantes

Triángulos rectángulos

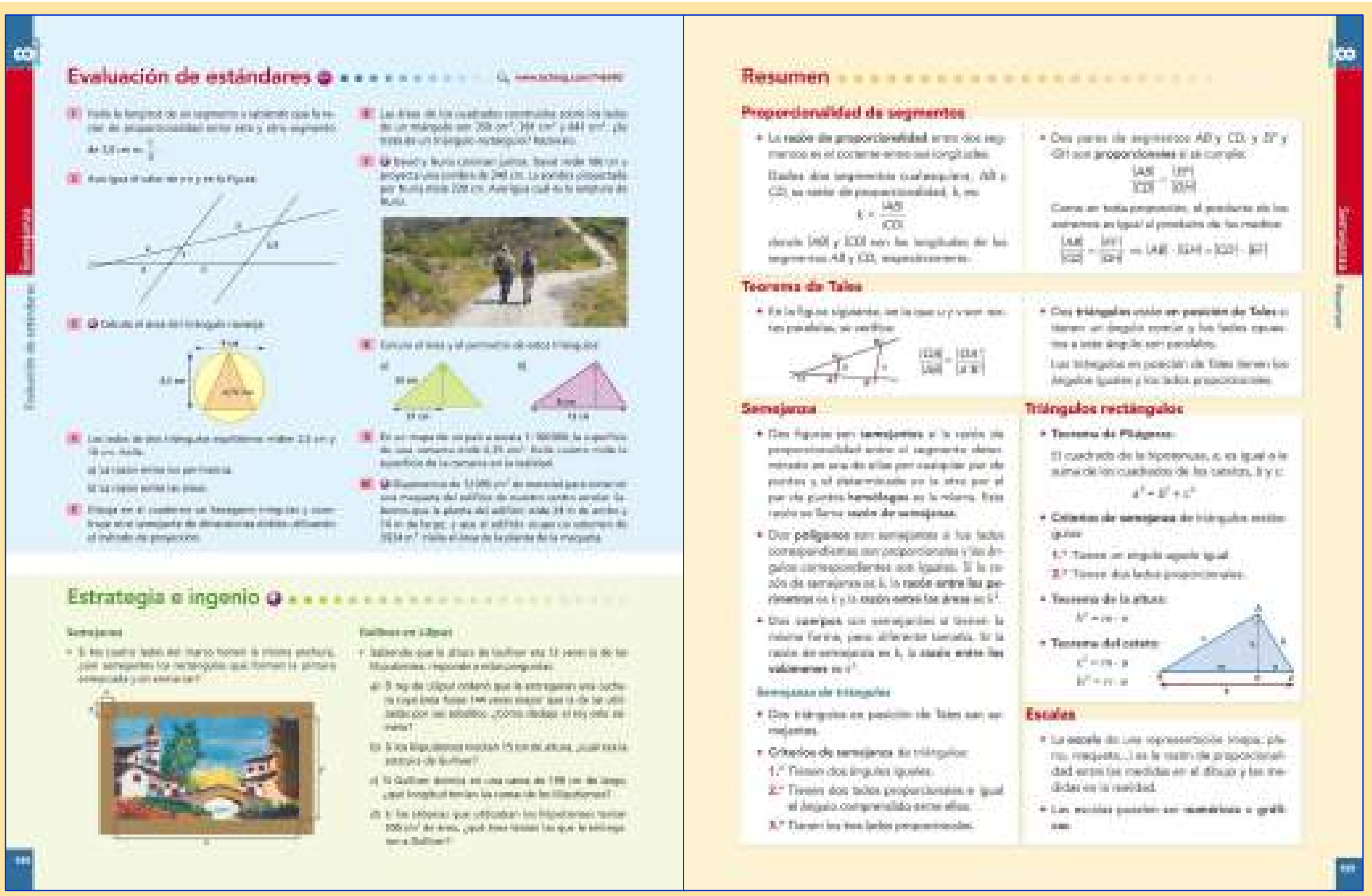

Escalas

Cuerpos semejantes

PARA APLICAR


Desarrolla tus competencias

EN BUSCA DE CASA


Evaluación de estándares

Estrategia e ingenio

Resumen

Proporcionalidad de segmentos

Teorema de Tales

Semejanza

Triángulos rectángulos

Escalas

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Repasa la unidad, pág. 182.* Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.

- *Acts. 38 y 76. Desarrolla tus competèncias, pág. 187.* Leer y comprender el estímulo y los enunciados y expresar por escrito argumentos propios de manera adecuada a la actividad.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Desarrolla tus competencias, pág. 187.* Buscar, analizar, seleccionar y manejar información en internet.

APRENDER A APRENDER

- *Repasa la unidad, pág. 182.* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, y ser consciente de las propias capacidades y carencias.

- *Acts. 38, 45, 66 y 76.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

- *Acts. 90, 94, 103 y 105.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas, buscando una coherencia global al ejecutar el plan de resolución de la actividad.

- *Desarrolla tus competencias, pág. 187.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.

- *Evaluación de estándares, pág. 188.* Ser consciente de las propias capacidades y recursos en este tema.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Para aplicar, pág. 184.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, aplicando los conocimientos sobre proporcionalidad geométrica.

- *Acts. 101, 102, 103, 105 a 109.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo del tema, mostrando criterio propio.

- *Desarrolla tus competencias, pág. 187.* Buscar las soluciones de forma creativa e imaginativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.

- *Evaluación de estándares, pág. 188, acts. 3, 6 y 10. Estrategia e ingenio, pág. 188.* Aplicar los conocimientos sobre proporcionalidad, buscar soluciones a los problemas que se plantean y evaluar las acciones realizadas.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Desarrolla tus competencias, pág. 187.* Manejar las habilidades sociales al realizar una actividad de grupo.

ACTIVIDADES FINALES

- En la sección de *Actividades* el alumnado se enfrentará a una colección de ejercicios en orden creciente de dificultad, con el fin de afianzar todos los contenidos del tema, desde un punto de vista práctico y teórico.

- La sección *Desarrolla…* persigue fomentar la autonomía del alumnado y la utilización de distintos recursos para resolver un planteamiento dado. A través de un caso práctico, el alumno ejercitará su capacidad de análisis y su actitud proactiva en la búsqueda de soluciones, además de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica.

- Con la sección de *Evaluación…* se pretende que los alumnos y alumnas valoren el nivel de conocimientos alcanzados. Propone una serie de actividades que repasan la unidad de un modo completo y práctico.

- La sección *Estrategia…* propone una serie de acertijos o juegos relacionados con los conceptos trabajados durante el tema, con el fin de que el alumnado desarrolle su imaginación y adquiera destreza relacionando ideas.

- La finalidad de la sección *Resumen* es recopilar los contenidos fundamentales de la unidad en un mapa conceptual que destaque las relaciones entre los conceptos y los procedimientos estudiados.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 182

C1. La razón de proporcionalidad entre dos segmentos es el cociente de sus longitudes.

Por otra parte, dos pares de segmentos, AB y CD, y EF i GH, son proporcionales cuando se cumple la relación:

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|EF|}{|GH|}$$

C2. El teorema de Tales anuncia que los segmentos determinados en dos rectas concurrentes al cortarlas por dos rectas paralelas son proporcionales.

Para hallar el cuarto segmento conocidos tres segmentos dados, debemos colocar los dos primeros segmentos (a y b) sobre una recta yel tercero (c) sobre otra recta concurrente con ella. Entonces trazamos por el extremo del segundo segmento la recta paralela (u) a la que une los extremos no comunes del primer y el tercer segmento.

Entonces, según el teorema de Tales se cumple que:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{u}$$

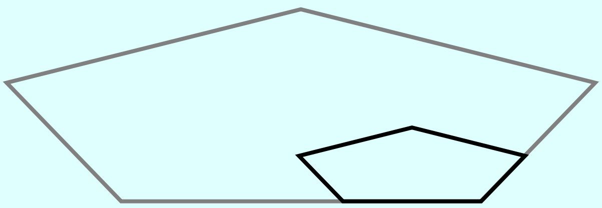
C3. Se dice que dos triángulos ABC y ADE se encuentran en posición de Tales cuando tienen en común el vértice A y los ángulos $\widehat{BAC}$ y $\widehat{DAE}$.

Algunos ejemplos pueden ser la sombra que hacen una persona y un edificio separados una cierta distancia y con el sol detrás de los dos; la distancia que hay entre una persona y un barco si colocamos un troco de longitude conocida a la riba de un río que tiene una cierta altura; etc.

C4. Las figuras semejantes son aquellas que la razón de proporcionalidad entre el segmento determinado en una de ellas por cualquier par de puntos y el determinado en la otra por el par de puntos correspondientes es siempre la misma.

La razón de semejanza entre dos figuras semejantes es la razón de proporcionalidad entre los segmentos homólogos.

C5. Los dos pentágonos siguientes son semejantes porque los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes son iguales.



C6. El primer método para construir figuras semejantes es el método de la cuadrícula, que consiste en dibujar una cuadrícula en la figura original, construir la nueva cuadrícula teniendo en cuenta la razón de semejanza y finalmente dibujar la figura original en la nueva cuadrícula.

El segundo método es el de la proyección, que consiste en escoger un punto llamado foco y realizar los rayos de proyección. Después teniendo en cuenta la razón de semejanza se marca el nuevo punto A' en la recta OA y se trazan líneas paralelas al polígono que queremos reproducir desde el punto A'.

C7. La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es la misma que la razón de semejanza, es decir, k.

Por otra parte, la razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza, es decir, k^2.

C8. Los criterios de semejanza de los triángulos son:

a) Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos iguales.

b) Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido entre ellos.

c) Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados proporcionales.

En cambio, para que dos triángulos rectangulares sean semejantes se debe cumplir que tengan almenos un ángulo agudo igual o que tengan dos lados proporcionales.

C9. El teorema de la altura dice que el cuadrado de la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de los segmentos en que dicha altura divide la hipotenusa.

Por otra parte, el teorema del cateto dice que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.

C10. La escala de una representación es la razón de proporcionalidad entre las medidas en el dibujo y las medidas en la realidad.

Un ejemplo de escala numérica puede ser la de las piezas de un juego de construcción, en que las piezas son más pequeñas realmente que en el dibujo. Por otra parte, un ejemplo de escala gráfica puede ser un mapa de carreteras.

C11. Dos cuerpos son semejantes cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño.

34. La razón de proporcionalidad es el cociente de sus longitudes:

a) $k = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

b) $k = \dfrac{1{,}25}{0{,}80} = 1{,}5625$

c) $k = \dfrac{3}{9} = 0{,}333\ldots$

d) $k = \dfrac{1{,}3}{\frac{3}{7}} = 3{,}0333\ldots$

35. La razón de proporcionalidad es el cociente de sus longitudes:

$$1{,}34 = \frac{x}{\frac{7}{6}} \Rightarrow x = 1{,}34 \cdot \frac{7}{6} = 1{,}56333\ldots$$

El segmento mide 1,56 cm.

36. Comprobamos si hay una igualdad de dos razones:

a) $\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{15} \Rightarrow$ SI existen dos pares de segmentos proporcionales.

b) NO existen dos pares de segmentos proporcionales.

c) NO existen dos pares de segmentos proporcionales.

d) $\dfrac{2{,}1}{0{,}7} = \dfrac{3{,}3}{1{,}1} \Rightarrow$ SI existen dos pares de segmentos proporcionales

37. Son dos triángulos semejantes (en posición de Tales), por tanto se verifica:

$$\frac{x}{5} = \frac{2}{4{,}5} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 5}{4{,}5} = 2{,}222\ldots$$

La longitud del segmento *x* es de 2,22 unidades.

38. Hallamos gráficamente la medida de *x*:

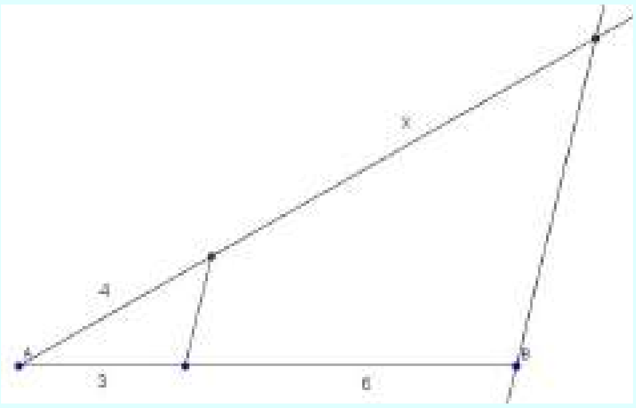
– Se dibujan dos segmentos, de longitud 3 y 6 unidades, sobre una misma recta AB.

– Se traza una semirrecta con origen A.

– Sobre la semirrecta se toma un segmento de longitud 4 unidades desde su origen A.

– Se traza la recta que une los dos extremos de los segmentos de 4 unidades y 3 unidades.

– Desde el extremo del segmento de 6 unidades se traza una paralela a la recta anterior y donde corte a la semirrecta se encuentra la medida de *x*.



39. Resolvemos gráficamente:

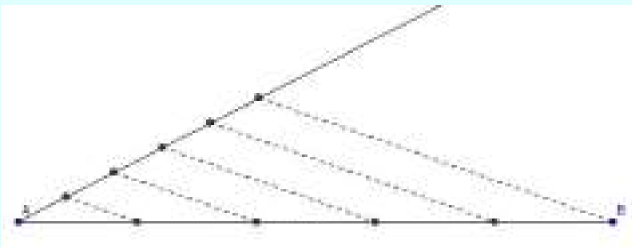
a) $\frac{2}{5} = \frac{12}{x} \quad \Rightarrow \quad x = 30$

(Ver figura 1 en la página 8-35 de la guía)

b) $\frac{2}{3} = \frac{x}{9} \quad \Rightarrow \quad x = 6$

(Ver figura 2 en la página 8-35 de la guía)

40. Dividimos el segmento en 5 partes iguales por Tales:



41. *(Ver figura 3 en la página 8-35 de la guía)*

42. Las soluciones gráficas son:

a) *(Ver figura 4 en la página 8-36 de la guía)*

b) *(Ver figura 5 en la página 8-36 de la guía)*

c) *(Ver figura 6 en la página 8-36 de la guía)*

43. Son triángulos semejantes (en posición de Tales), y se verifica:

$$\frac{8}{b} = \frac{10}{5} \Rightarrow b = \frac{8 \cdot 5}{10} = 4$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$8^2 + a^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow a = 6$

Calculamos c:

$$\frac{8}{6} = \frac{8+4}{c} \Rightarrow c = \frac{12 \cdot 6}{8} = 9$$

Por tanto, los segmentos miden a = 6, b = 4, c = 9.

44. Son triángulos semejantes (en posición de Tales).

<u>En el primer par de triángulos</u>:

$$\frac{7}{17} = \frac{7+x}{30} \Rightarrow 119 + 17x = 210 \Rightarrow 17x = 91 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{91}{17} = 5{,}35$$

$$\frac{13}{17} = \frac{13+y}{30} \Rightarrow 221 + 17y = 390 \Rightarrow 17y = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{169}{17} = 9{,}94$$

Los dos lados que faltan miden 7 + 5,35 = 12,35 cm y 13 + 9,94 = 22, 94 cm.

<u>En el segundo par de triángulos</u>:

$$\frac{40}{60} = \frac{x}{40+110} \Rightarrow x = \frac{6000}{60} = 100$$

$$\frac{40}{y} = \frac{40+110}{240} \Rightarrow y = \frac{9600}{150} = 64$$

Los dos lados que faltan miden 100 cm y 64 cm, respectivamente.

45. Comprobamos que los triángulos están en posición de Tales:

Se cumple $\frac{9}{6} = \frac{9+9}{12} \Rightarrow$ Tienen dos lados proporcionales.

Tienen igual el ángulo comprendido entre ellos, y por lo tanto sus lados son paralelos.

46. Si la razón de semejanza es 1 los polígonos son exactamente iguales.

47. Calculamos la razón de semejanza: $k = \frac{3}{8}$

Calculamos los lados que faltan:

$9 \cdot \frac{3}{8} = 3{,}375 \qquad 10 \cdot \frac{3}{8} = 3{,}75$

$5 \cdot \frac{3}{8} = 1{,}875 \qquad 6 \cdot \frac{3}{8} = 2{,}25$

Las dimensiones que faltan son 3,375 u; 3,75 u; 1,875 u y 2,25 u.

Página 183

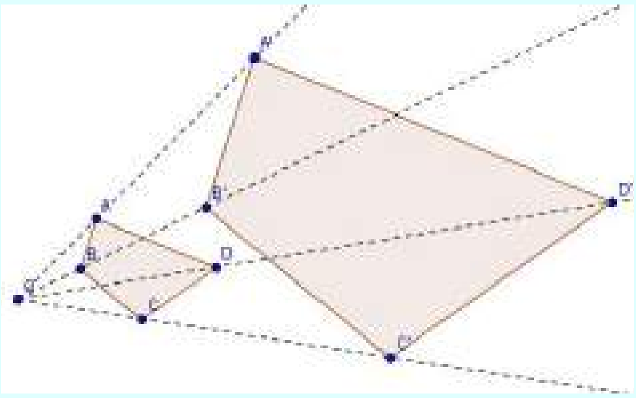
48. Multiplicamos las dimensiones por la razón de semejanza:

$10 \cdot \frac{2}{5} = 4$ $\qquad 8{,}8 \cdot \frac{2}{5} = 3{,}52$ $\qquad 15 \cdot \frac{2}{5} = 6$

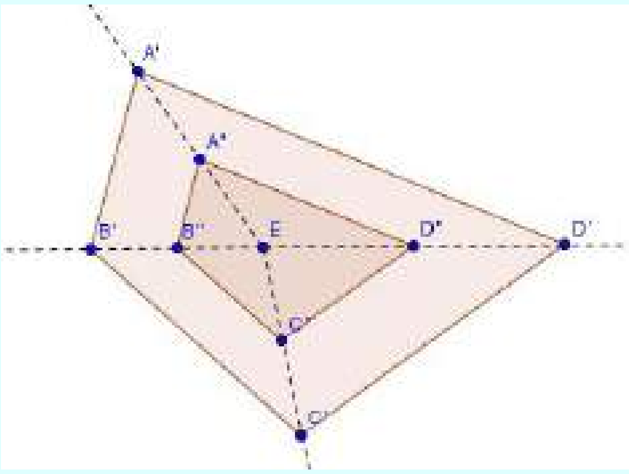
Las dimensiones de los segmentos son 4 u; 3,52 u y 6 u.

49. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) Cuadrilátero semejante de razón k = 3.



b) Cuadrilátero semejante de razón k = 3.



50. Las soluciones son las siguientes:

a) Figura A:

$k = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Figura C:

$k = \frac{3}{2} = 1{,}5$

b) Entre las áreas de C y B:

$\frac{A_C}{A_B} = (1{,}5)^2 = 2{,}25$

$A_C = 2{,}25 \cdot A_B$

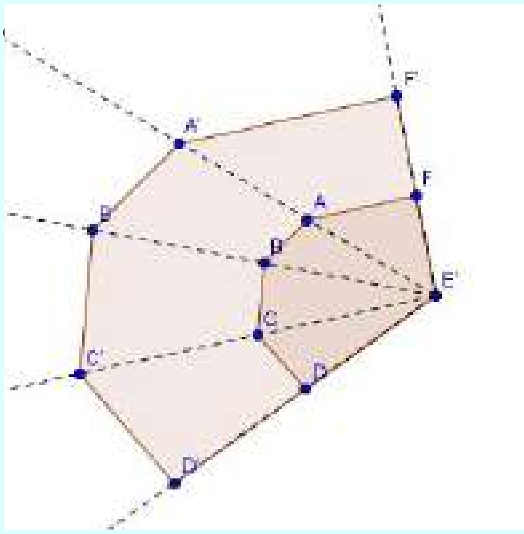
Entre las áreas de A y B:

$\frac{A_A}{A_B} = (0{,}5)^2 = 0{,}25$

$A_A = 0{,}25 \cdot A_B$

51. La razón de sus áreas es el cuadrado de la razón de semejanza, es decir, 4:

$k^2 = 2^2 = 4$



52. Calculamos el perímetro del polígono dado:

P = 6 + 9 + 12 + 15 = 42 cm

Calculamos la razón de semejanza utilizando el lado mayor de cada polígono:

$k = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$

Aplicamos la razón entre los perímetros (igual a k):

$\frac{P'}{42} = \frac{4}{3} \Rightarrow P' = \frac{42 \cdot 4}{3} = 56$

El perímetro es 56 cm.

53. Calculamos la razón de semejanza, que coincide con la razón de los perímetros:

$k = \frac{34}{43}$

Obtenemos el lado mayor:

$\frac{14}{x} = \frac{34}{43} \Rightarrow x = \frac{43 \cdot 14}{34} = 17{,}70$

El lado mayor de Q mide 17,70 cm.

54. La razón de semejanza k coincide con la razón de sus perímetros, siendo k^2 la razón entre las áreas, por tanto:

$k^2 = 0{,}04 \Rightarrow k = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$

La razón de sus perímetros es 0,2.

55. La razón de semejanza k coincide con la razón de sus perímetros, siendo k^2 la razón entre las áreas, por tanto:

$k = 3 \Rightarrow k^2 = 9$

La razón de las áreas es 9.

56. La razón de semejanza k coincide con la razón de sus perímetros, siendo k^2 la razón entre las áreas, por tanto:

$k^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$

La razón de sus perímetros es $\frac{4}{5}$

57. La razón de semejanza k coincide con la razón de sus perímetros, siendo k^2 la razón entre las áreas:

La razón de semejanza es $k = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

La razón de sus áreas es $k^2 = \frac{4}{9}$

58. Calculamos la razón de semejanza:

$k = \frac{AB}{DE} = \frac{6}{10} = 0,6$

Determinamos los lados AC y EF que son proporcionales a DF y BC respectivamente:

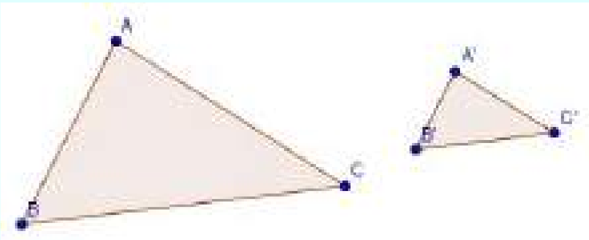
$\frac{AC}{DF} = 0,6 \Rightarrow \frac{AC}{7,5} = 0,6 \Rightarrow AC = 7,5 \cdot 0,6 = 4,5$

$\frac{BC}{EF} = 0,6 \Rightarrow \frac{12}{EF} = 0,6 \Rightarrow EF = \frac{12}{0,6} = 20$

El lado AC mide 4,5 cm y el lado EF 20 cm.

59. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Basta multiplicar por $\frac{3}{7}$ la longitud de cada lado del primer triángulo y obtenemos el correspondiente lado homólogo del segundo triángulo:



60. Calculamos la razón de semejanza: $k = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Calculamos la altura: $\frac{8}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{24}{2} = 12$

La razón de sus perímetros es también $k = \frac{2}{3}$

La razón de sus áreas es $k^2 = \frac{4}{9}$

61. Si la razón de sus áreas es $k^2 = 9$, la razón de semejanza es $k = 3$.

Calculamos la base: $\frac{b}{12} = 3 \Rightarrow b = 12 \cdot 3 = 36$

Calculamos la altura: $\frac{a}{5} = 3 \Rightarrow a = 5 \cdot 3 = 15$

Obtenemos el área del triángulo A'B'C':

$A' = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$

Calculamos el área: $\frac{A}{30} = 9 \Rightarrow A = 30 \cdot 9 = 270$

La base del triángulo ABC es 36 cm, la altura 15 cm y el área 270 cm^2.

62. Se obtienen dos triángulos en posición de Tales (semejantes), siendo la razón de semejanza $k = \frac{1}{2}$

La razón de sus perímetros es $\frac{P'}{P} = \frac{1}{2}$

La razón de sus áreas es $\frac{A'}{A} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

La relación entre sus perímetros es $P' = \frac{P}{2}$, y entre sus áreas es $A' = \frac{A}{4}$

63. Aplicaremos, a ambos casos, el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

a) $a^2 = 10^2 + 12^2 = 244 \rightarrow a = 15,62$ m.

b) $b^2 = 8^2 - 6^2 = 28 \rightarrow a = 5,29$ m.

64. Hallamos las áreas y los perímetros:

a) Aplicamos el teorema de la altura para calcular la altura:

$h^2 = 16 \cdot 9 = 144 \Rightarrow h = \sqrt{144} = 12$ cm

Obtenemos la base (hipotenusa): $16 + 9 = 25$ cm

Calculamos el área: $A = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150\ cm^2$

Aplicamos el teorema del cateto para calcular los catetos:

$b^2 = 16 \cdot 25 = 400 \Rightarrow b = \sqrt{400} = 20$ cm

$c^2 = 9 \cdot 25 = 225 \Rightarrow c = \sqrt{225} = 15$ cm

Obtenemos el perímetro: $P = 25 + 20 + 15 = 60$ cm

El área mide 150 cm^2 y el perímetro 60 cm.

b) Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura (un cateto):

$16^2 = h^2 + (12,8)^2 \Rightarrow h^2 = 256 - 163,84 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{92,16} = 9,6$ cm

Aplicamos el teorema de la altura para calcular la otra proyección:

$(9,6)^2 = 12,8 \cdot n \Rightarrow n = \frac{92,16}{12,8} = 7,2$

Obtenemos la base (hipotenusa): $12,8 + 7,2 = 20$ cm

Calculamos el área: $A = \frac{20 \cdot 9,6}{2} = 96\ cm^2$

Aplicamos el teorema del cateto para calcular el otro cateto:

$b^2 = 7,2 \cdot 20 = 144 \Rightarrow b = \sqrt{144} = 12$ cm

Calculamos el perímetro: $P = 16 + 20 + 12 = 48$ cm

El área mide 96 cm^2 y el perímetro 48 cm.

c) Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular una proyección (un cateto):

$15^2 = 12^2 + m^2 \Rightarrow m^2 = 225 - 144 \Rightarrow m = \sqrt{81} =$
$= 9$ cm

Aplicamos el teorema de la altura para calcular la otra proyección:

$12^2 = 9 \cdot n \Rightarrow n = \frac{144}{9} = 16$

Obtenemos la base (hipotenusa): 9 + 16 = 25 cm

Calculamos el área: $A = \frac{25 \cdot 12}{2} = 150 \text{ cm}^2$

Aplicamos el teorema del cateto para calcular el otro cateto:

$b^2 = 16 \cdot 25 = 400 \Rightarrow b = \sqrt{400} = 20$ cm

Calculamos el perímetro:

P = 15 + 25 + 20 = 60 cm

El área mide 150 cm^2 y el perímetro 60 cm.

d) Aplicamos el teorema de la altura para calcular la otra proyección:

$6^2 = 8 \cdot n \Rightarrow n = \frac{36}{8} = 4{,}5$ cm

Obtenemos la base (hipotenusa): 8 + 4,5 = 12,5 cm

Calculamos el área: $A = \frac{12{,}5 \cdot 6}{2} = 37{,}5 \text{ cm}^2$

Aplicamos el teorema del cateto para calcular los catetos:

$b^2 = 12{,}5 \cdot 4{,}5 = 56{,}25 \Rightarrow b = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ cm

$c^2 = 12{,}5 \cdot 8 = 100 \Rightarrow c = \sqrt{100} = 10$ cm

Calculamos el perímetro:

P = 12,5 + 7,5 + 10 = 30 cm

El área mide 37,5 cm^2 y el perímetro 30 cm.

65. Aplicamos el teorema de la altura para calcular la altura:

$h^2 = 34 \cdot 12 = 408 \Rightarrow h = \sqrt{408} = 20{,}2$ cm

Obtenemos la base (hipotenusa): 34 + 12 = 48 cm

Calculamos el área: $A = \frac{48 \cdot 20{,}2}{2} = 464{,}6 \text{ cm}^2$

Aplicamos el teorema del cateto para calcular los catetos:

$b^2 = 12 \cdot 46 = 552 \Rightarrow b = \sqrt{552} = 23{,}5$ cm

$c^2 = 34 \cdot 46 = 1564 \Rightarrow c = \sqrt{1564} = 39{,}55$ cm

Calculamos el perímetro:

P = 46 + 23,5 + 39,5 = 109,05 cm

El área mide 464,6 cm^2 y el perímetro 109,05 cm.

66. Dos triángulos rectángulos tienen un ángulo recto (90º), de manera que si otro de los ángulos lo tienen igual, por el primer criterio de semejanza, los dos triángulos rectángulos serán semejantes.

Si tienen dos lados proporcionales podemos escribir que b/b' = a/a' k, de donde obtenemos que a = ka' y b= = kb'. Aplicando el teorema de Pitágoras veremos que necesariamente el otro lado también es proporcional:

$c'= a^2 - b^2 = (ka')^2 - (kb')^2 = k^2(a'^2 - b'^2) = k^2c'^2$

Así, $c^2 = k^2c'^2 \rightarrow c = kc' \rightarrow b/b' = a/a' = c/c' = k^2c'^2$

Por tanto, por el criterio dos de semejanza de triángulos, los dos triángulos rectángulos tratados serán semejantes.

Página 184

67. La escala 8:1 es una ampliación.

Calculamos la longitud x en el dibujo:

$\frac{8}{1} = \frac{x}{0{,}3} \Rightarrow x = 8 \cdot 0{,}3 = 2{,}4$ cm

En el dibujo tendrá 2,4 cm de longitud.

68. La escala 5:1 es una ampliación.

Calculamos el diámetro real del anillo:

$\frac{5}{1} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = \frac{7}{5} = 1{,}4$ cm

El diámetro real del anillo es de 1,4 cm.

69. La escala 1:100000 es una reducción.

Calculamos la distancia real x:

$\frac{1}{100000} = \frac{7{,}2}{x} \Rightarrow x = 7{,}2 \cdot 100000 = 720000$ cm

Representa 7,2 km en la realidad.

70. Calculamos la longitud del primer segmento en la realidad:

$\frac{1}{50} = \frac{4{,}5}{x} \Rightarrow x = 50 \cdot 4{,}5 = 225 \text{ cm} = 2{,}25$ m.

El primer segmento mide 2,25 metros en la realidad.

Calculamos la longitud del segundo segmento en el dibujo:

$\frac{1}{50} = \frac{y}{2{,}5} \Rightarrow y = \frac{2{,}5}{50} = 0{,}05 \text{ m} = 5$ cm

El segundo segmento mide 5 cm en el dibujo.

71. La escala se obtiene como cociente entre la longitud en el plano y la longitud en la realidad:

$\frac{3{,}5}{70} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{70}{3{,}5} = 20$

La escala es 1:20.

72. La escala se obtiene como cociente entre la longitud en el plano y la longitud en la realidad:

$\frac{15}{3} = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \frac{15}{3} = 5 \Rightarrow$ La escala es 5:1

73. Actividad personal.

74. La razón de semejanza entre lo representado en el plano y la realidad es la escala:

$k = \frac{1}{1000}$

La razón de las superficies es $k^2 = \frac{1}{1000000}$

Calculamos la superficie S en la realidad:

$$\frac{9}{S} = \frac{1}{1000000} \Rightarrow S = 9000000 \text{ cm}^2 = 900 \text{ m}^2$$

La superficie medirá 900 m^2 en la realidad.

75. La razón de semejanza entre lo representado en el plano y la realidad es la escala:

$$k = \frac{1}{100000}$$

La razón de las áreas es $k^2 = \dfrac{1}{10000000000}$

Calculamos el área real A:

$$\frac{64}{A} = \frac{1}{10000000000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 640000000000 \text{ cm}^2 = 64 \text{ km}^2$$

El área real de la comarca es de 64 km^2

76. Tenemos en cuenta que dos cuerpos son semejantes si tienen la misma forma pero distinto tamaño.

– Dos cubos sí son semejantes siempre, porque vienen determinados por una sola medida, la arista.

– Dos ortoedros no son semejantes siempre, porque vienen determinados por tres medidas y no siempre tienen que ser proporcionales.

– Dos esferas sí son semejantes siempre, porque vienen determinados por una sola medida, el radio.

77. Calculamos la razón de semejanza:

$$k = \frac{9}{4}$$

Obtenemos la razón de sus volúmenes:

$$k^3 = \left(\frac{9}{4}\right)^3 = \frac{729}{64}$$

Calculamos el volumen V:

$$\frac{5586}{V} = \frac{729}{64} \Rightarrow V = \frac{5586 \cdot 64}{729} = 490{,}4 \text{ cm}^3$$

El volumen es de 490,4 cm^3

78. Comenzamos expresando los volúmenes en la misma unidad:

$96 \text{ cm}^3 = 0{,}096 \text{ dm}^3$

Calculamos la razón de los volúmenes:

$$k^3 = \frac{0{,}096}{12} = 0{,}008$$

Obtenemos la razón de semejanza (la escala):

$$k = \sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$$

Calculamos la altura x del cuerpo pequeño:

$$\frac{x}{3} = 0{,}2 \Rightarrow x = 3 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 \text{ dm} = 6 \text{ cm}$$

La altura del cuerpo pequeño es de 6 cm.

79. La razón de sus volúmenes es $k^3 = 27$.

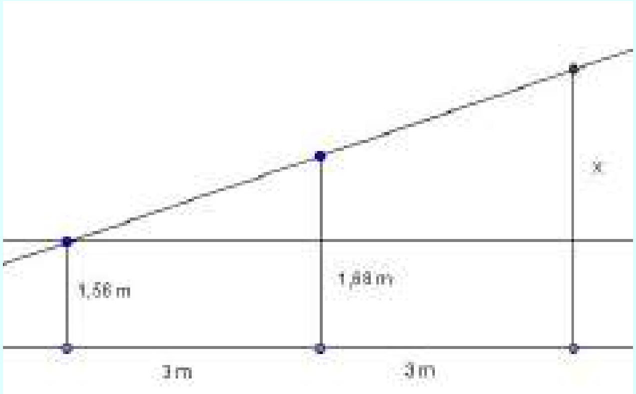
La razón de semejanza es $k = \sqrt[3]{27} = 3$

Calculamos la arista x:

$$\frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$$

La arista mide 6 cm.

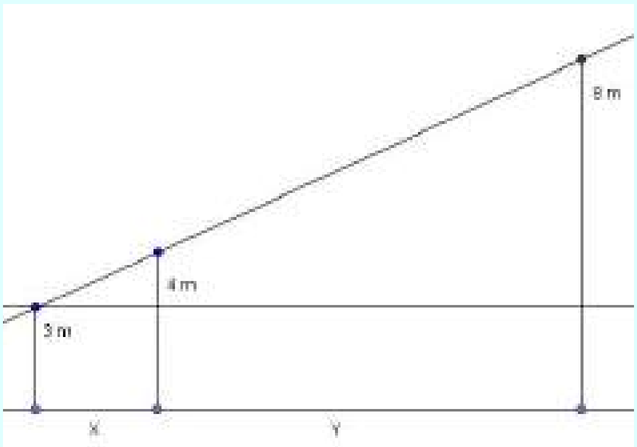
80. Representamos los datos en una figura, y trazamos una recta paralela al suelo por la cabeza de la primera estudiante, de manera que obtenemos dos triángulos en posición de tales:



Se verifica que $\dfrac{0{,}12}{3} = \dfrac{x}{6} \Rightarrow x = \dfrac{6 \cdot 0{,}12}{3} = 0{,}24$

La altura de la tercera estudiante es de 1,56 + 0,24 = = 1,80 metros.

81. Hacemos una figura de la situación (si fuera posible) y trazamos una recta paralela al suelo por el extremo superior de la vara de 3 metros, de manera que se obtendrían dos triángulos en posición de Tales:



Se verificaría que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{x+y} \Leftrightarrow 5x = x + y \Leftrightarrow y = 4x$

Se trata de una ecuación con dos incógnitas, que tiene infinitas soluciones: por ejemplo:

$x = 1, y = 4; x = 2, y = 8; \ldots$

Es decir, basta situar las varas de manera que la distancia entre la de 8 metros y la de 4 metros sea el cuádruple de la distancia entre la de 4 metros y la de 3 metros.

82. Según la figura tenemos dos triángulos en posición de Tales.

Se verifica que $\frac{24}{d} = \frac{24+20}{33} \Rightarrow d = \frac{792}{44} = 18$

La distancia es de 18 metros.

83. Calculamos las diagonales para cada caso:

Para un área doble:

La razón de las áreas es $k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{2A}{A} = 2 \Rightarrow$ la razón de las diagonales (razón de semejanza) es:

$k = \sqrt{2} \Rightarrow d' = \sqrt{2} \cdot d$

La diagonal debe ser $\sqrt{2}$ veces la diagonal del televisor original.

Para un área triple:

La razón de las áreas es $k^2 = \frac{A'}{A} = \frac{2A}{A} = 3 \Rightarrow$ la razón de las diagonales (razón de semejanza) es:

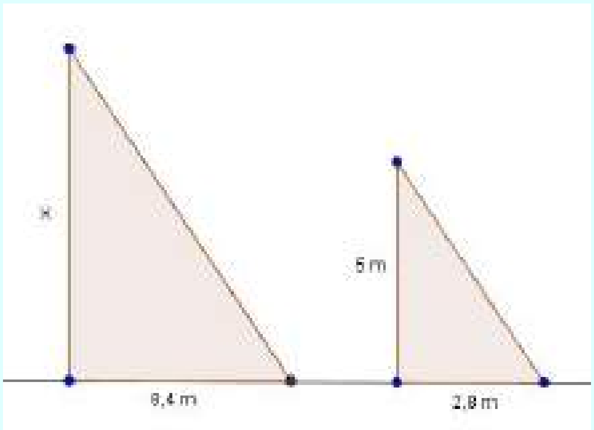
$k = \sqrt{3} \Rightarrow d' = \sqrt{3} \cdot d$

La diagonal debe ser $\sqrt{3}$ veces la diagonal del televisor original.

En general:

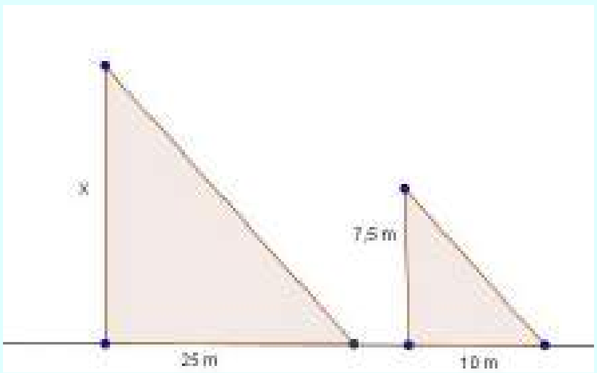
Podemos deducir, por un razonamiento similar, que para que el área de un televisor sea n veces el del original, la diagonal debe ser $\sqrt{n}$ veces la diagonal del televisor original

84. Llamamos x a la altura del árbol:



$\frac{x}{8,4} = \frac{5}{2,8} \Rightarrow \quad x = \frac{8,45}{2,8} = 15$. El árbol mide 15 m.

85. Podemos considerar que los rayos de Sol que inciden sobre el árbol y el poste son paralelos, de manera que se forman dos triángulos semejantes, y por tanto:



$\frac{x}{25} = \frac{7,5}{10} \Rightarrow \quad x = \frac{25 \cdot 7,5}{10} = 18,75$

El edificio mide 18,75 metros.

86. Según la figura, y teniendo en cuenta que es una pirámide de base cuadrada, los dos triángulos son semejantes (se pueden poner en posición de Tales).

Se verifica que $\frac{d}{60} = \frac{230}{74} \Rightarrow d = \frac{230 \cdot 60}{74} = 186,49$

La arista d mide 186,49 metros.

87. Trazamos una recta paralela al suelo por la cabeza de Miguel, de manera que obtenemos dos triángulos en posición de Tales.

Se verifica que $\frac{x}{15} = \frac{3,6-1,8}{1,2} \Rightarrow x = \frac{27}{1,2} = 22,5$

La altura del edificio se de 22,5 + 1,8 = 24,3 metros.

88. La razón de las áreas es:

$k^2 = 14400 \Rightarrow k = \sqrt{14000} = 120$ es la razón de las dimensiones de la superficie (razón de semejanza).

Se verifica:

$\frac{18}{x} = 120 \Rightarrow x = \frac{18}{120} = 0,15$ m = 15 cm

$\frac{48}{y} = 120 \Rightarrow y = \frac{48}{120} = 0,4$ m = 40 cm

Las piezas son de dimensiones 15 cm y 40 cm.

Página 185

89. Calculamos:

a) Los radios de las circunferencias son los radios de los hexágonos, y por tanto la razón de semejanza es:

$k = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, siendo r el radio menor.

La razón de las áreas es $k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

La razón de las áreas es $\frac{1}{4}$

b) Aplicamos la razón de las áreas:

$\frac{A}{31,14} = \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{31,14}{4} = 7,79$

El área del hexágono menor es de 7,79 cm^2.

90. Ejercicio resuelto en el libro.

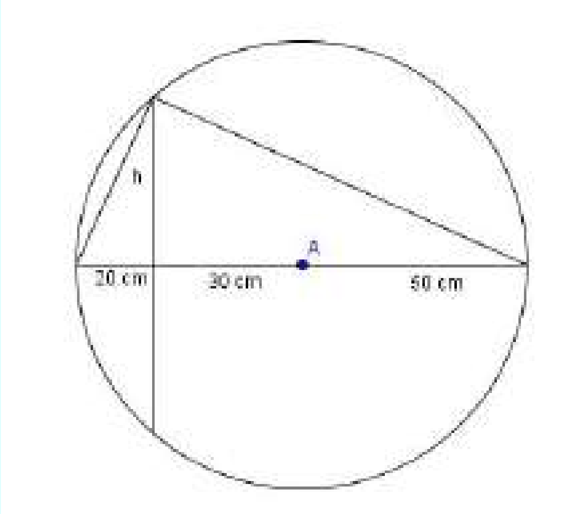
91. Se obtiene un triángulo rectángulo, pues el ángulo que abarca un diámetro de circunferencia es recto.

La hipotenusa, que es el diámetro de la circunferencia, mide 100 cm, las proyecciones de los catetos sobre ella son de 20 cm y 80 cm respectivamente, y la altura h sobre dicha hipotenusa es la mitad de la cuerda.

Aplicamos el teorema de la altura:

$h^2 = 20 \cdot 80 = 1600 \Rightarrow h = 40$

La cuerda mide 2·40 = 80 cm.



92. Aplicamos el teorema de la altura y obtenemos la altura de los triángulos:

$h^2 = 30 \cdot 50 = 150 \Rightarrow h = \sqrt{150} = 12{,}25$

Calculamos el área de cada tipo de triángulo:

$$A_1 = \frac{50 \cdot 12{,}25}{2} = 306{,}25 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{30 \cdot 12{,}25}{2} = 183{,}75 \text{ cm}^2$$

De cada color necesitamos 306,25 + 183,75 = 490 cm^2 de tela.

93. Aplicamos el teorema de la altura para calcular la distancia pedida m:

$$(4{,}8)^2 = m \cdot 7{,}5 \Rightarrow m = \frac{23{,}04}{7{,}5} = 3{,}072$$

El albergue está a 3,072 km.

94. Ejercicio resuelto en el libro.

95. Aplicamos el teorema del cateto para hallar la distancia a las fruterías:

$c^2 = 30 \cdot 18{,}5 = 555 \Rightarrow c = \sqrt{555} = 23{,}56$

$b^2 = 30 \cdot (30 - 18{,}5) = 30 \cdot 11{,}5 = 345 \Rightarrow b = \sqrt{345} = 18{,}57$

Aplicamos el teorema de la altura para hallar la distancia a la librería:

$h^2 = 18{,}5 \cdot 11{,}5 = 212{,}75 \Rightarrow h = \sqrt{212{,}75} = 14{,}59$

La casa se halla a 23,56 metros de la frutería 1, a 18,57 metros de la frutería 2 y a 14,59 metros de la librería.

96. Calculamos cuánto mide la habitación en realidad:

$$\frac{1}{400} = \frac{1{,}5}{x} \Rightarrow x = 400 \cdot 1{,}5 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m}$$

Calculamos la habitación en el plano a escala 1:500:

$$\frac{1}{500} = \frac{x}{600} \Rightarrow x = \frac{600}{500} = 1{,}2$$

La habitación medirá 1,2 cm a escala 1:500.

97. Las soluciones son las siguientes:

a) Calculamos el lado del cuadrado a escala:

$$\frac{1}{20} = \frac{x}{80} \Rightarrow x = \frac{80}{20} = 4 \text{ cm}$$

Basta dibujar un cuadrado de 4 cm de lado y dos semicírculos contiguos a sus lados, de radio 2 cm, puesto que el lado coincide con el diámetro.

b) Calculamos el área de un cuadrado y el área de un círculo (2 semicírculos):

$A_1 = 80^2 = 6400 \text{ cm}^2$

$A_2 = 3{,}14 \cdot 40^2 = 3{,}14 \cdot 1600 = 5024 \text{ cm}^2$

El área de la mesa es de:

$6400 + 5024 = 11424 \text{ cm}^2 = 1{,}1424 \text{ m}^2$

Calculamos el perímetro de una circunferencia (2 semicircunferencias) y le añadimos dos lados del cuadrado:

$P = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 40 = 251{,}2 \text{ cm}$

El perímetro de la mesa es de:

251,2 + 80 + 80 = 411,2 cm = 4,112 m.

98. Las dimensiones a escala serían:

Calculamos la longitud:

$$\frac{1}{150} = \frac{x}{72{,}7} \Rightarrow x = \frac{72{,}7}{150} = 0{,}4847 \text{m} = 48{,}47 \text{ cm}$$

Calculamos la envergadura:

$$\frac{1}{150} = \frac{y}{79{,}8} \Rightarrow y = \frac{79{,}8}{150} = 0{,}532 \text{m} = 53{,}2 \text{ cm}$$

Calculamos la altura:

$$\frac{1}{150} = \frac{z}{24{,}1} \Rightarrow z = \frac{24{,}1}{150} = 0{,}1607 \text{m} = 16{,}07 \text{ cm}$$

99. Obtenemos la razón de semejanza, que es la escala:

$$k = \frac{1}{200}$$

La razón de los volúmenes es:

$$k^3 = \left(\frac{1}{200}\right)^3 = \frac{1}{8\,000\,000}$$

La razón de las áreas es:

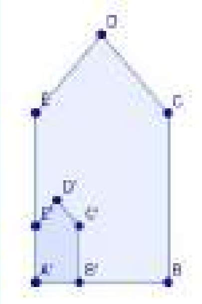
$$k^2 = \left(\frac{1}{200}\right)^2 = \frac{1}{40\,000}$$

El volumen es 8 000 000 de veces más reducido y el área 40 000 veces.

Página 186

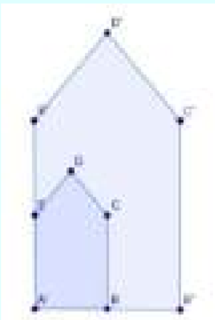
100. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) Dibujamos una proyección con foco en un vértice y razón de semejanza cualquiera:

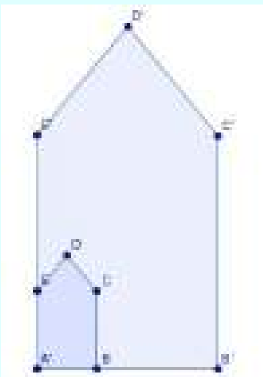


b) Dibujamos una proyección con foco en el interior del polígono y razón de semejanza menor que 1:

c) Dibujamos una proyección con razón de semejanza 2:



d) $k^2 = 9 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow$ Dibujamos una proyección con razón de semejanza 3:



101. Convertimos el dato del triángulo pequeño a la misma unidad 1,7 cm = 0,017 m y aplicamos la semejanza de los triángulos:

$$\frac{1{,}8}{0{,}017} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{0{,}017}{1{,}8} = 0{,}009\widehat{4} \text{ UA} =$$

= 1 412 868,778 km

El diámetro del Sol mide 1 412 868,778 km.

102. Consideramos las alturas de cada tipo de triángulo (que son semejantes):

Triángulo azul grande: $h_1 = 3{,}5$ cm

Triángulo amarillo: $h_2 = 2$ cm

Triángulo azul pequeño: $h_3 = 3{,}5 – 2 = 1{,}5$ cm

La razón de semejanza de los triángulos azul grande y amarillo es $k_2 = \dfrac{3{,}5}{2} = 1{,}75$.

La razón de semejanza de los triángulos azul grande y azul pequeño es $k_3 = \dfrac{3{,}5}{1{,}5} = 2{,}33$.

El área del triángulo azul grande es:

$$A_1 = \frac{(1{,}32 + 1{,}32)\cdot 3{,}5}{2} = 4{,}62 \text{ cm}^2$$

La razón de las áreas de los triángulos azul grande y amarillo es $k_2^2 = 1{,}75^2 = 3{,}0625$, y por tanto:

$$\frac{4{,}62}{A_2} = 3{,}0625 \Rightarrow A_2 = \frac{4{,}62}{3{,}0625} = 1{,}51$$

La razón de las áreas de los triángulos azul grande y azul pequeño es $k_3^2 = 5{,}44$, y por tanto:

$$\frac{4{,}62}{A_3} = 5{,}44 \Rightarrow A_3 = \frac{4{,}62}{5{,}44} = 0{,}85$$

El área de la zona azul es aproximadamente:

$1{,}51 + 2\cdot 0{,}85 = 3{,}21$ cm^2

103. Ejercicio resuelto en el libro.

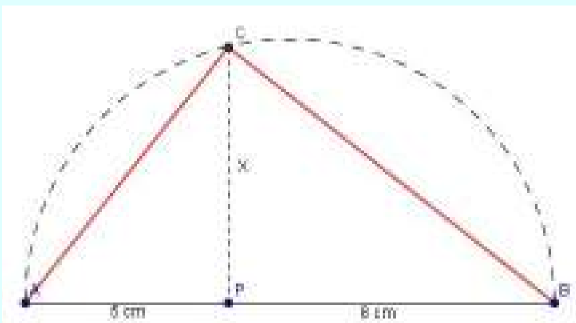
104. Observamos que $\dfrac{5}{x} = \dfrac{x}{8}$ si y sólo si $x^2 = 5\cdot 8$.

Por el teorema de la altura, x es la longitud de la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectán-gulo cuyas proyecciones de los catetos sobre esta hipotenusa son 5 cm y 8 cm. Por tanto, el problema se reduce a construir un triángulo rectángulo dadas las proyecciones de los catetos.

Trazamos una semirrecta y, sobre ella, marcamos los segmentos dados: AP de longitud 5 cm, y PB de 8 cm.

Dibujamos una semicircunferencia con centro el punto medio de AB y diámetro 13 cm (radio 6,5 cm), que es la suma de los segmentos.

Trazamos por P la recta perpendicular al segmento AB, y llamamos C al punto de corte con la semicircunferencia.



El triángulo ABC es el triángulo rectángulo que buscamos, y PC, el segmento x.

105. Ejercicio resuelto en el libro.

106. El tamaño máximo que disponemos es de:

29,7 – 4 = 25,7 cm de largo y 21 – 4 = 17 cm de ancho.

Calculamos la escala para poder representar el largo del cuadro (todas las medidas en cm):

$\frac{25,7}{500} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 20 \Rightarrow$ la escala debe ser 1:20

Calculamos la escala para poder representar el ancho del cuadro (todas las medidas en cm):

$\frac{17}{300} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 18 \Rightarrow$ la escala debe ser 1:18

La escala que permite representar las dos dimensiones del cuadro en la hoja que disponemos es la de mayor reducción, es decir, 1:20.

107. Disponemos de una hoja A4 de dimensiones 29,7 cm y 21 cm.

Calculamos la escala para poder representar la distancia más larga (todas las medidas en cm):

$\frac{29,7}{520000000} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 17508418 \Rightarrow$ la escala debe ser 1: 17508418.

Calculamos la escala para poder representar la distancia más corta (todas las medidas en cm):

$\frac{21}{300000000} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 14285715 \Rightarrow$ la escala debe ser 1: 14285715.

La escala que permite representar las dos dimensiones de la superficie en la hoja A4 es la de mayor reducción, es decir, 1: 17508418.

108. Calculamos el volumen de la esfera grande:

$V_g = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 16^3 = 17148,59 \text{ cm}^3$

Calculamos el radio r de la esfera pequeña utilizando la razón de semejanza:

$\frac{3}{5} = \frac{r}{16} \Rightarrow r = \frac{16 \cdot 3}{5} = 9,6 \text{ cm}$

Calculamos el volumen de la esfera pequeña:

$V_p = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (9,6)^3 = 3704,09 \text{ cm}^3$

Obtenemos el volumen pedido como diferencia entre ambos volúmenes de las esferas:

$V = V_g - V_p = 13444,5 \text{ cm}^3$

El volumen del espacio es 13444,5 cm^3.

109. Calculamos la razón de semejanza $k = \frac{9}{10}$

Obtenemos la razón de sus volúmenes:

$k^3 = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000} = 0,729$

Llamamos V_p al volumen del ortoedro pequeño (de 9 cm de alto) y V_g al volumen del grande (de 10 cm de alto), de manera que se verifica $V_g = \frac{V_p}{0,729}$, y como el precio es proporcional al volumen, el precio del ortoedro grande será $\frac{2,4}{0,729} = 3,29$.

El ortoedro semejante cuesta 3,29 euros.

Desarrolla tus competencias

1. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) Medimos con regla y utilizamos la escala multiplicando por 100; aunque al dividir entre 100 para cambiar de unidad, quedan todas las medidas igual:

Salón: 2,6 x 3 metros

Dormitorio: 2,4 x 2,5 metros

Despacho: 2,6 x 1,3 metros

Cocina: 1,5 x 1,1 metros

Baño: 1,5 x 1,2 metros

b) Obtenemos la superficie de cada estancia (rectángulos):

Salón: $2,6 \cdot 3 = 7,8 \text{ m}^2$

Dormitorio: $2,4 \cdot 2,5 = 6 \text{ m}^2$

Despacho: $2,6 \cdot 1,3 = 3,9 \text{ m}^2$

Cocina: $1,5 \cdot 1,1 = 1,65 \text{ m}^2$

Baño: $1,5 \cdot 1,2 = 1,8 \text{ m}^2$

Calculamos la superficie total:

Por un lado $5,2 \cdot 5,2 = 27,04 \text{ m}^2$

Por otro lado $2,7 \cdot 0,7 = 1,89 \text{ m}^2$ no son del apartamento

Luego la superficie del apartamento es de:

$27,04 - 1,89 = 25,15 \text{ m}^2$

2. Actividad personal.

3. El contrato dura 10 meses, por lo que se gastará en alquiler $855 \cdot 10 = 8550$ euros.

Calculamos el porcentaje:

$\frac{19000}{100\%} = \frac{8550}{x} \Rightarrow x = \frac{855000}{19000} = 45\%$

Le tendría que dedicar el 45% de la beca, por tanto, es correcta la opción C.

4. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) Obtenemos que están a unos 8 km (en línea recta).

b) Para desplazarnos en bici el recorrido más corto es de 8,4 km.

c) El trayecto ocupa unos 25 minutos.

Evaluación de estándares

1. Hallamos la longitud del segmento x:

Se verifica que $\frac{x}{3,6}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{3,6}{3}=1,2$

El segmento mide 1,2 cm.

2. Aplicamos el teorema de Tales y calculamos x:

$\frac{x}{5}=\frac{3}{4}\Rightarrow x=\frac{3\cdot 5}{4}=3,75$ cm

Aplicamos la semejanza de los triángulos (están en posición de Tales) y calculamos y:

$\frac{3}{3+4}=\frac{y}{2,5}\Rightarrow y=\frac{3\cdot 2,5}{7}=1,07$ cm

El valor de x es 3,75 cm y el valor de y es 1,07 cm.

3. Consideramos dos triángulos (semejantes), el naranja de altura 3,5 cm y otro más pequeño que se obtiene de éste y tiene altura 3,5:2 = 1,75 cm y base 0,74·2 = 1,48 cm:

Calculamos la razón de semejanza $k=\frac{1,75}{3,5}=0,5$.

Calculamos el área del triángulo pequeño:

$A_p=\frac{1,48\cdot 1,75}{2}=1,295\ cm^2$

Obtenemos la razón entre sus áreas $k^2=(0,5)^2=0,25$

Calculamos el área pedida A:

$\frac{1,295}{A}=0,25\Rightarrow A=\frac{1,295}{0,25}=5,18\ cm^2$

El área del triángulo naranja es 5,18 cm^2.

4. Las soluciones son:

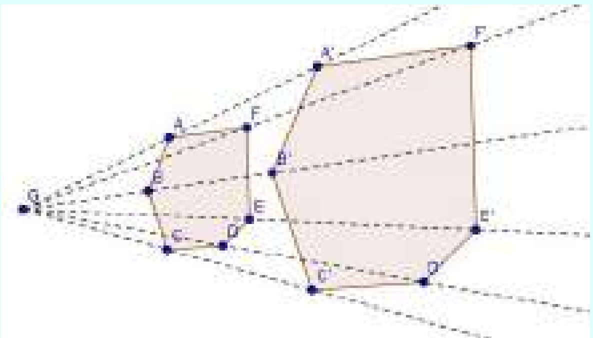
a) Calculamos la razón entre sus perímetros, que coincide con la razón de semejanza:

$k=\frac{2,5}{10}=0,25$

b) La razón entre las áreas es $k^2=(0,25)^2=0,0625$.

5. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Dibujamos un hexágono semejante con razón k = 2 utilizando el método de proyección.



6. Para que sean rectángulos se tiene que verificar que la suma de las áreas de los dos cuadrados pequeños sea igual a la mayor. Así, 350 + 391 = 741 cm^2, mientras que el área del cuadrado mayor es 841 cm^2. Por tanto, no son rectángulos.

7. Llamamos x a la altura de Nuria.

Podemos considerar que los rayos de Sol que inciden sobre David y Nuria son paralelos, de manera que se forman dos triángulos semejantes, y por tanto:

$\frac{180}{x}=\frac{240}{220}\Rightarrow\ x=\frac{180\cdot 220}{240}=165$ cm

Nuria mide165cm.

8. Las soluciones son las siguientes:

a) Aplicamos el teorema del cateto:

$28^2=a\cdot 21\ \Rightarrow a=\frac{784}{21}=37,33$ cm

Calculamos la otra proyección: n = 37,33 – 21 = 16,33 cm.

Aplicamos, de nuevo, el teorema del cateto:

$b^2=37,33\cdot 16,33=609,6\ \Rightarrow b=\sqrt{609,6}=24,7$ cm

Aplicamos el teorema de la altura:

$h^2=21\cdot 16,33=342,93\ \Rightarrow h=18,52$ cm

Calculamos el área y el perímetro:

$A=\frac{37,33\cdot 18,52}{2}=345,68\ cm^2$

P = 28 + 37,33 + 24,7 = 90,03 cm

Por tanto el área mide 345,68 cm^2 y el perímetro 90,03 cm.

b) Calculamos la otra proyección: n = 12 – 8 = 4 cm.

Aplicamos el teorema de la altura:

$h^2=8\cdot 4=32\ \Rightarrow h=5,66$ cm

Aplicamos el teorema del cateto:

$b^2=12\cdot 4=48\ \Rightarrow b=\sqrt{48}=6,93$ cm

$c^2=12\cdot 8=96\ \Rightarrow c=\sqrt{96}=9,80$ cm

Calculamos el área y el perímetro:

$A=\frac{12\cdot 5,66}{2}=33,96\ cm^2$

P = 12 + 6,93 + 9,80 = 28,73 cm

Por tanto el área mide 33,96 cm^2 y el perímetro 28,73 cm.

9. La razón de semejanza es la escala:

$k=\frac{1}{100\,000}$

La razón de sus áreas es:

$k^2=\left(\frac{1}{100\,000}\right)^2=\frac{1}{10\,000\,000\,000}$

Calculamos la superficie S de la comarca:

$\frac{6,25}{S}=\frac{1}{10000000000}\Rightarrow$

$\Rightarrow\ S=62500000000\ cm^2=6,25\ km^2$

La superficie de la comarca es de 6,25 km^2.

10. Calculamos la razón de los volúmenes de la maqueta y del edificio (en la misma unidad):

$$k^3 = \frac{12\,096}{3\,024\,000\,000} = 0{,}000004$$

Calculamos la razón de las áreas:

$k = \sqrt[3]{0{,}000004} = 0{,}01587401 \Rightarrow k^2 = 0{,}00025$

Calculamos el área de la planta del edificio:

$14 \cdot 14 = 336\ m^2$

Calculamos el área A de la planta de la maqueta:

$$\frac{A}{336} = 0{,}00025 \Rightarrow A = 0{,}084\ m^2 = 840\ cm^2$$

El área de la planta de la maqueta es 840 cm^2.

Estrategia e ingenio

Semejanza

Serían semejantes si:

$$\frac{y+2z}{x+2z} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow xy + 2xz = xy + 2zy \Leftrightarrow xz = yz \Leftrightarrow x = y$$

Luego en general no son semejantes (sólo serían semejantes si fuera un marco cuadrado, x = y).

Gulliver en Liliput

a) La razón de semejanza es k = 12, y la razón de las áreas de las sábanas $k^2 = 144$.

b) La altura de Gulliver es 12·15 = 180 cm = 1,80 m.

c) Calculamos la longitud x de las sábanas de los liliputienses:

$$190 = 12 \cdot x \Rightarrow x = \frac{190}{12} = 15{,}83\ cm$$

d) Calculamos el área A de las sábanas de Gulliver:

$A = 144 \cdot 300 = 43200\ cm^2 = 4{,}32\ m^2$

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/747425	https://tube.geogebra.org/student/b471281
http://www.tiching.com/747426	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/tales_y_pitagoras/espejo/actividad.html
http://www.tiching.com/747427	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/escalas_y_planos/papel_milimetrado/actividad.html
http://www.tiching.com/747428	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/semejanza_triangulos_macb/index.htm
http://www.tiching.com/747429	http://aprender-ensenyar-matematicas.blogspot.com.es/2013/01/demostracion-de-los-teoremas-metricos.html
http://www.tiching.com/747430	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/escalas_y_planos/camino_al_trabajo/actividad.html
http://www.tiching.com/747431	http://matematicas.torrealmirante.net/SEGUNDO%20ESO/soluciones%20libro%20Sm%20Esfera/tema%2012%20teorema%20de%20tales.pdf


SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS CON GEOGEBRA

Teorema de Pitágoras con GeoGebra

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 1.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.
- *Act.* 2. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos para resolver el problema.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 1 y 2.* Reconocer y asimilar los conceptos y las propiedades sobre cálculos de areas y transformaciones geométricas sobre poliedros y ser capaz de reproducirlos.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Semejanza con GeoGebra*. Desarrollar la capacidad de construir figuras y cuerpos semejantes con el programa GeoGebra, potenciando la habilidad para analizar y comprobar el resultado.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

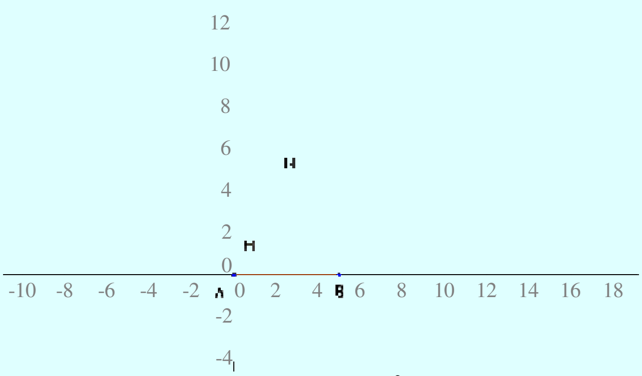
- *Act. 4.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos sobre los poliedros y sus propiedades, siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la solución.
- *Piensa y contesta.* Identificar en la realización del problema las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 212

1. Para construir un heptágono de 5cm de lado, consideramos puntos A=(0,0) y B=(5,0), y el heptágono H que se obtiene con la herramienta *Polígono Regular* con A,B y 7 lados como entrada.

Usando la herramienta *homotecia*, podemos generar un heptágono semejante de razón 0,25, H'. En la figura siguiente vemos H y su semejante H', que hemos obtenido considerando la homotecia centrada en A:



El área de H es A_H=64,95 cm^2, y el área de H' es $A_{H'}$=4,06 cm^2, y su cociente es

$$\frac{A_{H'}}{A_H} = 0,0625 = (0,25)^2,$$

el cuadrado de la razón de la homotecia.

2. El perímetro del polígono H es 30 cm, y el del H' es 7,5 cm. Calculando la razón, 7,5/30 = 0,25 y, por tanto, es justamente la razón de semejanza.

3. Utilizando la construcción que hemos realizado, y con ayuda del programa, fácilmente podemos determinar las ternas que cumplen la condición. Tomaremos incrementos de 0,5 y partimos del triángulo inicial, que mide b = c = 1 cm.

   Recordemos que el valor de *b* debe ser menor que *c*.

   Así, para cada *c* modificaremos b para que sea así. Por ejemplo, para c = 1,5, la b solo puede ser 1; para c = 2 podrá ser 1 y 1,5, etc. A continuación indicamos algunas de las ternas obtenidas:

   (1, 1.5, 1.8); (1, 2, 2.24); (1.5, 2, 2.5); (1, 2.5, 2.69); (1.5, 2.5, 2.92); (2, 2.5, 3.2); (1, 3, 3.16); (1.5, 3, 3.35); (2, 3, 3.61); (2.5, 3, 3.91); (1, 3.5, 3.62); (1.5; 3.5; 3.81); (2, 3.5, 4.03); (2.5; 3.5; 4.3); (3, 3.5, 4.62); (1, 4, 4.12); (1.5, 4, 4.27);… (45, 50, 67.27); (45.5, 50, 67.6).

Soluciones (continuación)

(Viene de la página 8-7 de la guía)

7. La figura forma triángulos en posición de Tales, luego sus lados son proporcionales:

$$\frac{3}{6}=\frac{4}{x} \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$$

El travesaño mide 8 metros.

8. Llamamos x a la anchura del río, y como los triángulos son semejantes (se pueden poner en posición de Tales) se verifica:

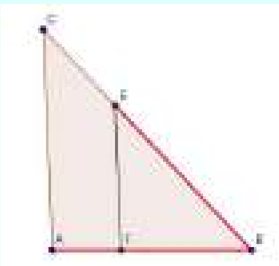
$$\frac{15}{60}=\frac{5}{x} \Rightarrow 15x = 300 \Rightarrow x = 20$$

La anchura del río es de 20 metros.

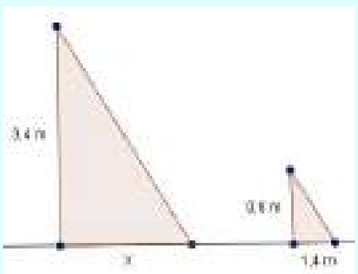
(Viene de la página 8-13 de la guía)

Página 177

21. Actividad personal. A modo de ejemplo:



22. Llamamos *x* a la sombra del poste. Podemos considerar que los rayos de Sol que inciden sobre la vara y el poste son paralelos, de manera que se forman dos triángulos semejantes, y por tanto:



$$\frac{0,8}{1,4}=\frac{3,4}{x} \Rightarrow x = \frac{3,4 \cdot 1,4}{0,8} = 5,95$$

La sombra que proyecta el poste mide 5,95 metros.

23. Son triángulos en posición de Tales, por tanto sus lados son proporcionales:

Se verifica: $\frac{5}{4}=\frac{x}{3} \Rightarrow 4x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{4} = 3,75$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo pequeño:

$5^2 = 4^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow y = 3$

Se cumple: $\frac{4}{3}=\frac{7}{z} \Rightarrow 4z = 21 \Rightarrow z = \frac{21}{4} = 5,25$

Por tanto x = 3,75; y = 3; z = 5,25.

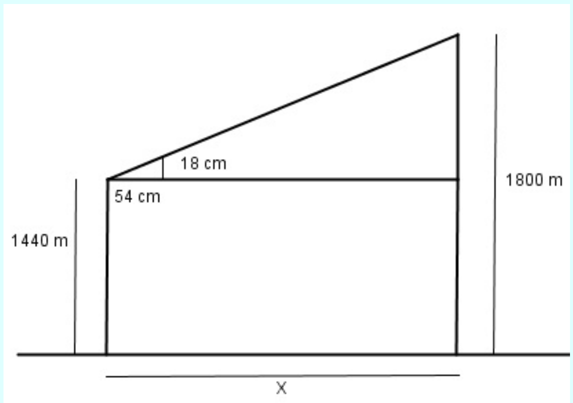
(Viene de la página 8-17 de la guía)

Página 177

31. Para hallar la altura de la antena tenemos que ver que podemos hacer dos triángulos semejantes, ya que los ángulos de incidencia y de reflexión son los mismos. Por lo tanto, para hallar la altura x:

$$\frac{32}{75}=\frac{15,2}{x} \rightarrow x = 35,6\text{m}$$

32. Hacemos un dibujo de la situación, llamando x a la distancia al pie de montaña:



Aplicamos la semejanza de los triángulos construidos (despreciando la altura del montañero):

$$\frac{0,54}{x}=\frac{0,18}{360} \Rightarrow x = \frac{360 \cdot 0,54}{0,18} = 1080$$

El montañero está a unos 1080 m del pie de mon-taña.

33. Llamamos x a la profundidad del pozo y trazamos la recta que une los ojos y los puntos A y B. Aplicamos la semejanza de los triángulos construidos:

$$\frac{3}{0,9}=\frac{x}{1,7} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 1,7}{0,9} = 5,67$$

El pozo tiene 5,67 metros de profundidad.

FIGURA 1

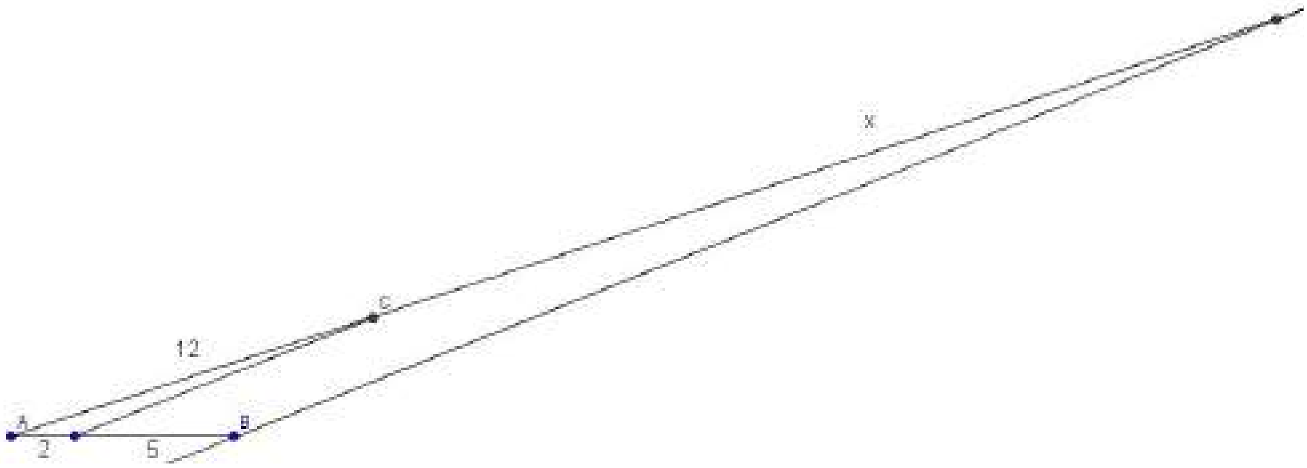


FIGURA 2

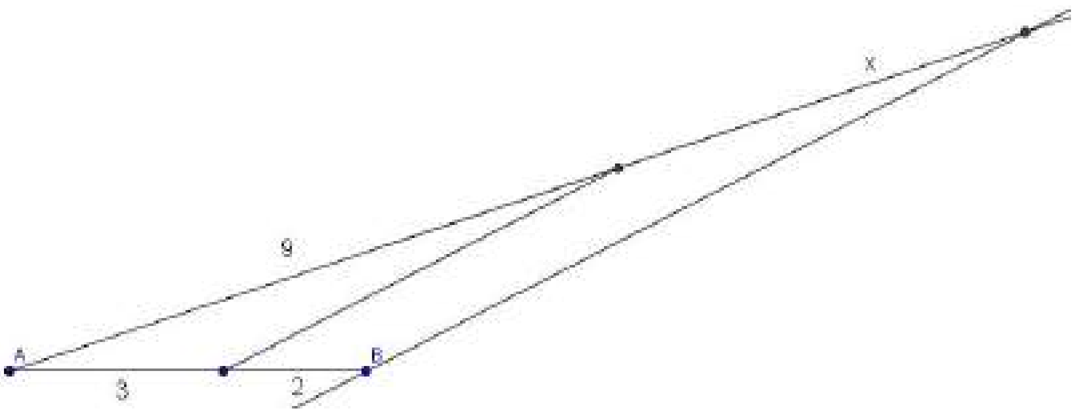


FIGURA 3

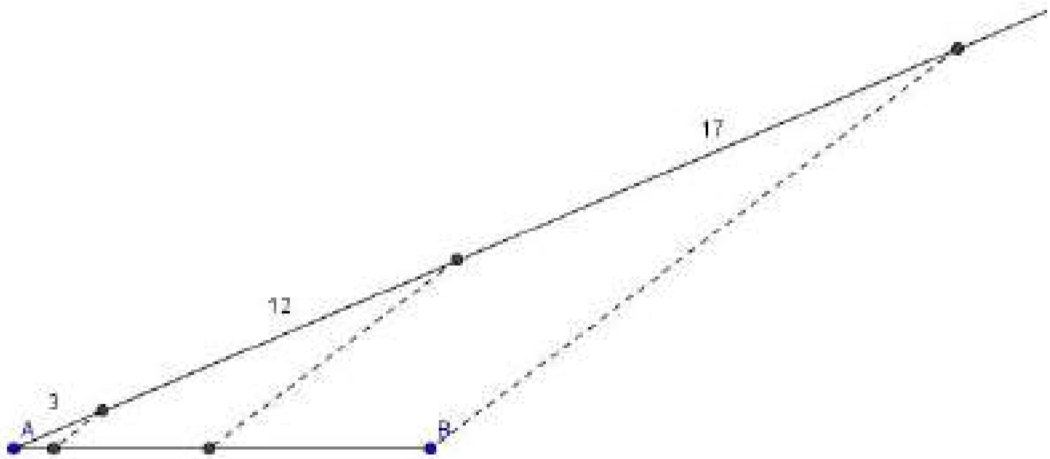


FIGURA 4

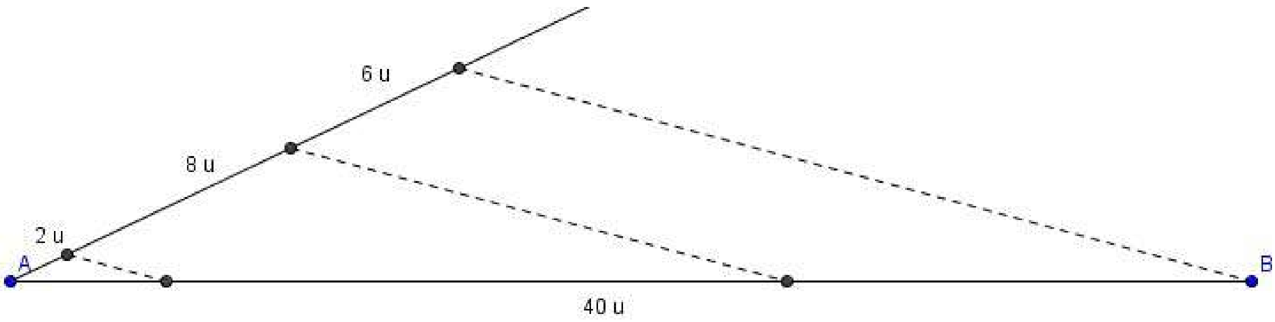


FIGURA 5

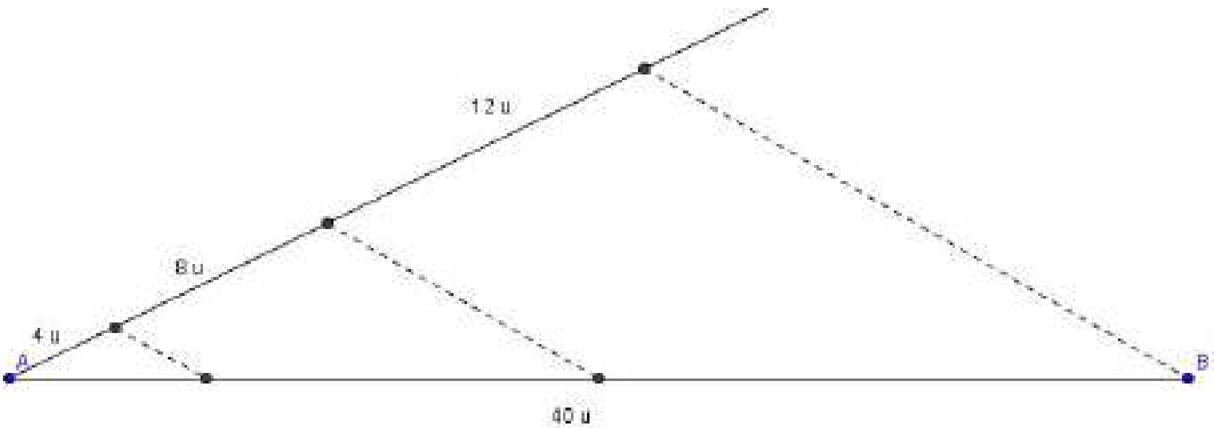
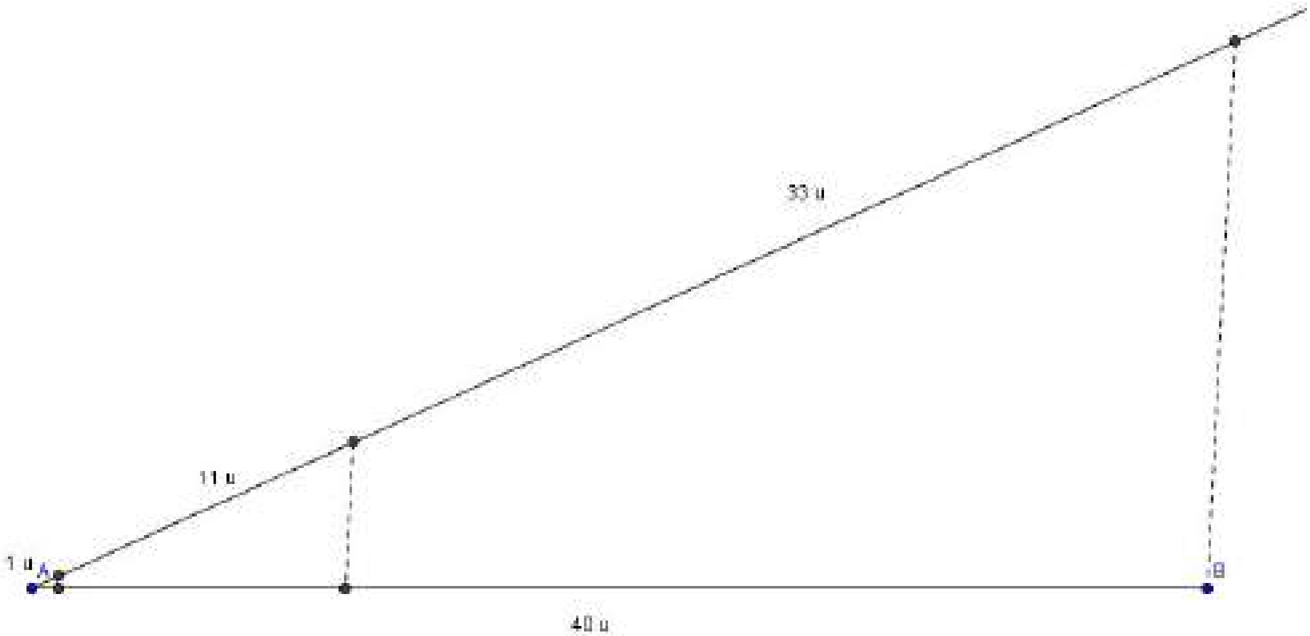


FIGURA 6



INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ La finalidad de esta unidad consiste en aprender a diferenciar los poliedros, prismas y pirámides, así como a calcular su área y volumen.

En primer lugar leeremos la introducción y observaremos la imagen de presentación. Después los comentaremos con los alumnos y alumnas siguiendo este cuestionario:

– *¿Identificas en la imagen algún poliedro, prisma o pirámide?*

– *¿Qué otros objetos a tu alrededor tienen forma de dichos cuerpos geométricos?*

– *¿Una porción de tarta tiene forma de poliedro? ¿Y un dado? ¿Cuántas caras tiene?*

– *¿Por qué crees que es importante el estudio de los cuerpos geométricos?*

■ A continuación observaremos el índice de contenidos de esta unidad didáctica y el esquema que los relaciona, y formularemos estas preguntas:

– *¿Es lo mismo un polígono y un poliedro?*

– *¿En qué se diferencian los poliedros, los prismas y las pirámides?*

Empezamos la unidad

■ Con el fin de introducir y repasar ciertos conceptos que se desarrollarán a lo largo de la unidad, se propone una serie de actividades, cuyos objetivos particulares son:

– La actividad 1 repasa los polígonos según el número de lados.

– En la actividad 2 se revisa el concepto de polígono regular.

– La actividad 3 repasa la operativa con triángulos rectángulos.

– La actividad 4 trabaja el cálculo del área de un polígono regular, que luego aplicaremos al cálculo del área de poliedros.

– En la actividad 5 se refresca el teorema de Pitágoras, estudiado en temas anteriores.

– La actividad 6 introduce el cálculo de volúmenes.

■ Para concluir esta presentación de la unidad, pediremos al alumnado que resuelva por parejas las actividades planteadas en el apartado *Para empezar*. A continuación pondremos en común los resultados obtenidos.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 2, 4 y 6.* Leer e interpretar los enunciados para poder resolver las actividades propuestas.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1, 2, 3, 4, 5 y 6.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.

■ *Acts. 1, 2 y 5.* Saber transformar la información, recopilada en cursos anteriores, en conocimiento propio.

■ *Esquema pág. 192*. Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Texto pág. 190.* Valorar que en la realidad exiten las diferentes cuerpos y su abstracción son los cuerpos geométricos presentes en arquitectura o en diseños actuales.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Actividades.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen sobre el tema.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para iniciar la unidad sobre poliedros y ver cuál es el punto de partida de los alumnos, les propondremos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747432

Se trata de un vídeo de poco más de cuatro minutos, donde se repasa la historia de la arquitectura a través de imágenes de edificios notables, algunos de gran espectacularidad.

El profesor les pedirá que lo visualicen la primera vez, sin interrupciones solo para observar. A continuación, para introducir los poliedros, les preguntaremos:

- *¿Cuántos poliedros has visto en el vídeo?*
- ¿Podrías *nombrar* los que están en esta clase?

Seguidamente les pediremos que dibujen los cinco edificios que más les hayan gustado del vídeo, pero traducidos a poliedros.

De esta forma les hacemos notar que los cuerpos geométricos son abstracciones que realizamos de objetos, edificios, montañas, etc. presentes en la realidad.

Educamos en valores

Autoestima personal y espíritu de superación

■ Nuestro entorno físico, natural y artístico ofrece muchos ejemplos de objetos con patrones simétricos que les confieren un determinado valor estético constituyendo otro aspecto educativo en el que se puede incidir a través de las matemáticas.

A lo largo de la unidad se proponen ejemplos y actividades relacionadas con la naturaleza y con el arte que permiten cultivar la sensibilidad y la creatividad.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de la unidad que contribuyen a conseguir este objetivo:

– En las págs. 195 y 202 se muestran ilustraciones de elementos naturales con formas geométricas tridimensionales.
– La página 211 trabaja a partir de diversos edificios famosos con una marcada forma poliédrica.

Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 193

Para empezar…

1. El nombre de cada uno de los polígonos es:

Nº Lados	Nombre
3	Triángulo
4	Cuadrado
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono

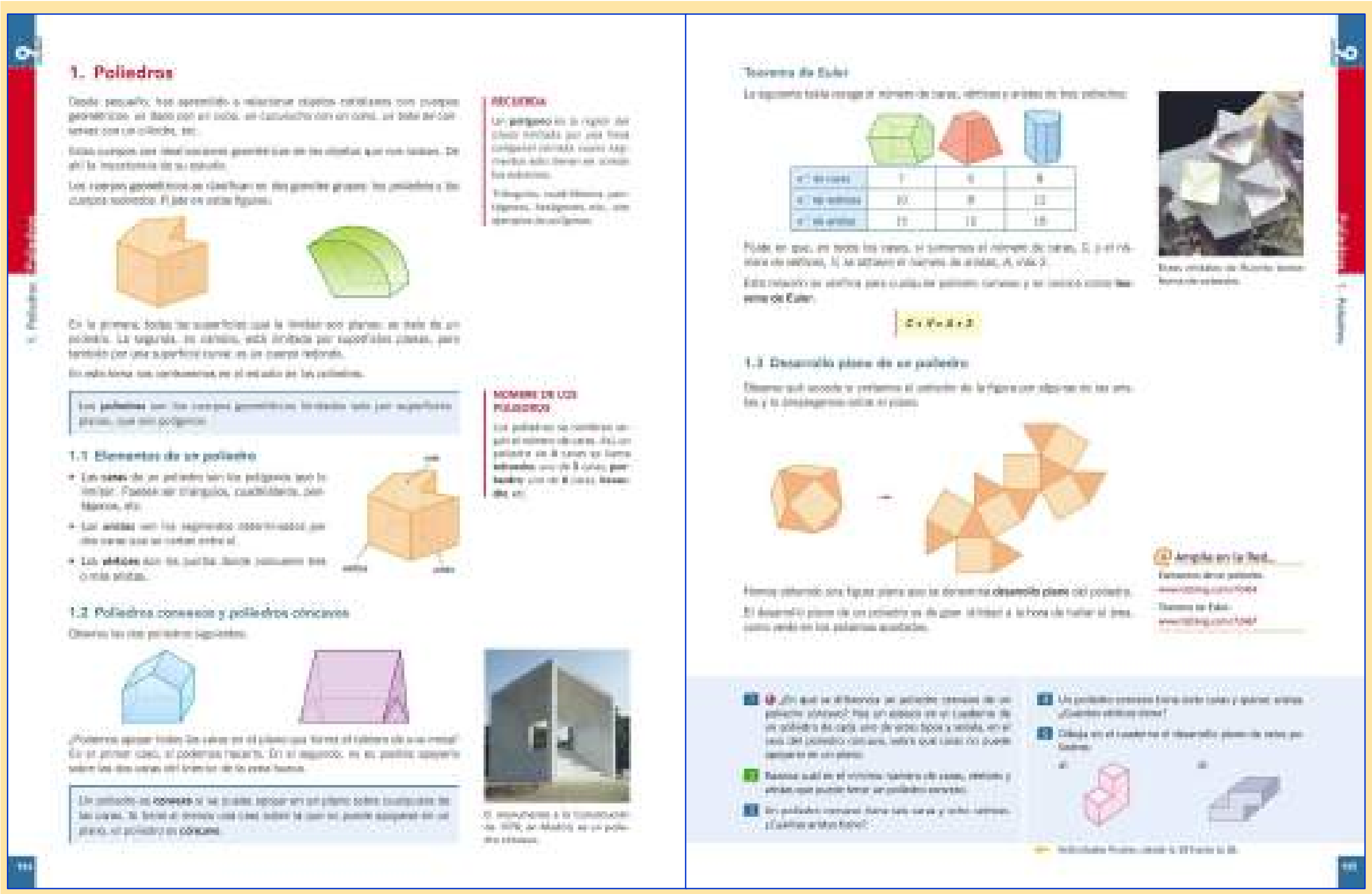
2. Un polígono es regular cuando todos sus lados y todos sus ángulos son iguales.

3. Puesto que se trata de un triángulo rectángulo, si apoyamos sobre uno de los catetos, la base y la altura coincidirán con los catetos dados. Por lo tanto:

$$A = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\text{cm}^2$$

4. El área del pentágono es: $A = \dfrac{(5 \cdot 5) \cdot 3,4}{2} = 42,5 \text{ cm}^2$

(Continúa en la página 9-30 de la guía)



1. POLIEDROS

■ El objetivo de esta sección consiste en introducir el concepto de poliedro y sus principales características.

En primer lugar leeremos la introducción junto con la definición del recuadro y preguntaremos al alumnado:

– *¿Tiene forma de poliedro un bote de conservas? ¿Por qué?*

– *¿Qué es un poliedro? Pon un ejemplo de objeto cotidiano con forma de poliedro.*

A continuación leeremos la nota del margen *Recuerda*, para repasar el concepto de polígono, importante a la hora de estudiar los poliedros:

– *¿Qué relación encuentras entre un polígono y un poliedro?*

1.1 Elementos de un poliedro

■ Los alumnos y alumnas leerán ahora este apartado, junto a la nota del margen *Nombre de los poliedros*, y después resumiremos las ideas más importantes a través de este cuestionario:

– *¿Cómo se llamará un poliedro de 7 caras? ¿Y de 12?*

– *¿Cómo se definen las caras de un poliedro? ¿Y las aristas?*

– *¿Qué crees que habrá en mayor número en un poliedro, aristas o vértices? Razona tu respuesta.*

En este punto los alumnos y alumnas pueden acceder a la aplicación interactiva *72454* de *@Amplía…*, donde repasarán teoría y practicarán mediante varios ejercicios.

1.2 Poliedros convexos y poliedros cóncavos

■ Proseguiremos con la lectura del siguiente apartado, que clasifica los poliedros, y después preguntaremos al alumnado:

– *¿Cuándo un poliedro es convexo?*

– *¿Por qué el poliedro de la imagen del libro es cóncavo?*

A continuación leeremos el subapatado *Teorema de Euler* y accederemos al recurso *72467 de @Amplía en la Red*, con el fin de afianzar este teorema mediante un ejercicio autocorrectivo.

1.3 Desarrollo plano de un poliedro

■ Los alumnos y alumnas leerán ahora el último apartado, como paso previo al estudio del área de los poliedros:

– *¿Cómo obtenemos el desarrollo plano de un poliedro? ¿Para qué es útil?*

Por último los alumnos y alumnas resolverán las actividades propuestas en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 2, 3 y 4.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios y de generar ideas e hipótesis.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 1 y 2.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos sobre poliedros para resolver las actividades propuestas.
- *Act. 5.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 1.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos en este apartado.
- *Act. 5.* Trabajar la autonomía, reflexionando con prudencia a la hora de realizar el proceso, y tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 requiere del uso del recién estudiado teorema de Euler.

✓ La actividad de ampliación 2 resultará útil para verificar el entendimiento del concepto de poliedro cóncavo.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de adentrarnos ya en las características de los poliedros, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747433

Es un recurso con diferentes ventanas interactivas. Nuestros alumnos accederán a la introducción y a la clasificación de poliedros. Se despliega un mapa conceptual muy completo. Pediremos que se lo impriman y adjunten en su cuaderno.

Este recurso facilita el aprendizaje al contar con dos soportes, visual y auditivo, además de un planteamiento ameno.

Podrán realizar los ejercicios interactivos que se presenta y que ofrecen la solución y/o repetición en caso de error.

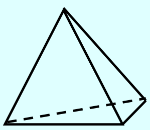
Más adelante podrán volver a este recurso para practicar con la creación de polígonos semejantes.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 195

1. Un poliedro convexo se puede apoyar en un plano sobre cualquiera de sus caras, mientras que uno convexo no cumple esta propiedad siempre.
2. Las caras tendrán que ser triángulos, ya que, es el polígono más pequeño.

   Por lo tanto, el poliedro sería de la forma:

   Luego el número mínimo de caras es 4, el de vértices es 4 y, el de aristas es 6.
3. Utilizando la fórmula Euler, se tiene:

   $6+8=A+2;$

   $A=12$

   Por lo tanto, el número de aristas es 12.
4. Utilizando la fórmula Euler, se tiene:

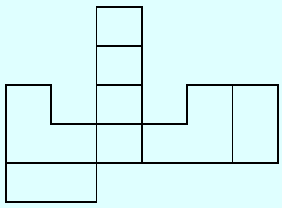
   $7+V=15+2;$

   $V=10$

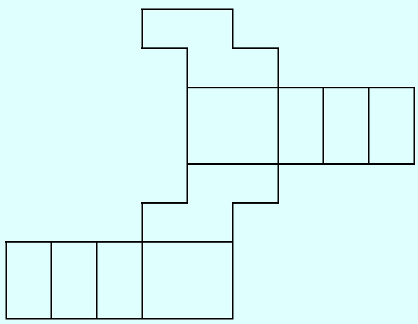
   Por lo tanto, el número de vértices es 10.
5. Actividad personal. A modo de ejemplo:

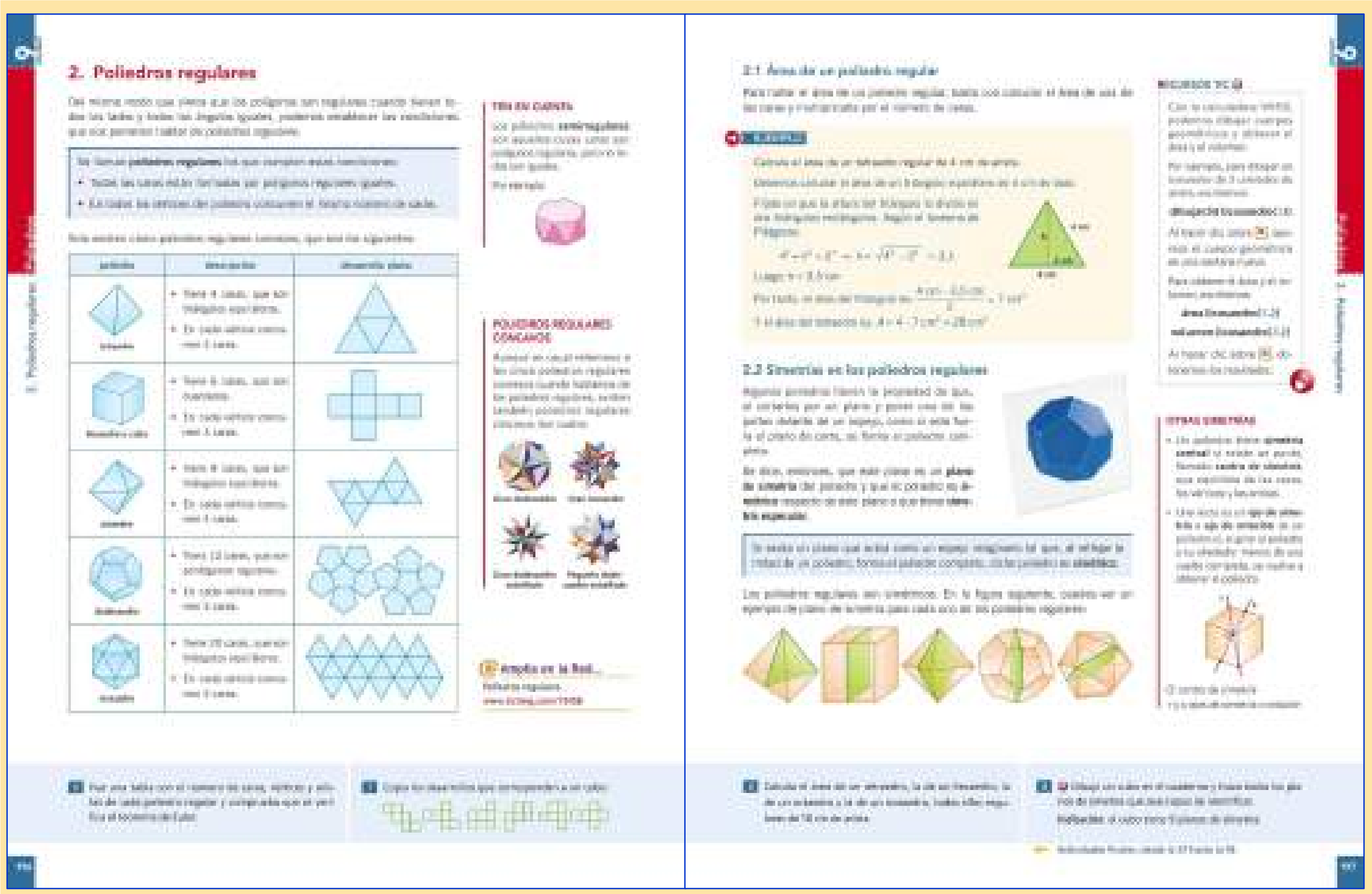
   El desarrollo plano de cada una de las figuras sería:

   a)

   b)


2. Poliedros regulares

2.1 Área de un poliedro regular

2.2 Simetrías en los poliedros regulares

2. POLIEDROS REGULARES

■ El objetivo de esta sección es el estudio de los poliedros, el cálculo de su área y su simetría.

Comenzaremos leyendo la primera parte de la sección, prestando atención a la tabla, donde se describen detalladamente los cinco poliedros regulares.

Después verificaremos su comprensión por parte del alumnado mediante este cuestionario:

– *¿Qué dos condiciones tiene que cumplir un poliedro para ser regular?*
– *¿Con qué otro nombre conocemos al hexaedro?*
– *¿Cómo se llama el poliedro regular convexo de 20 caras? ¿Qué forma tienen sus caras?*
– *¿Existe algún poliedro regular en el que sus caras sean triángulos rectángulos? Razona tu respuesta.*
– *¿Se cumple el teorema de Euler en estos poliedros?*

■ A continuación observaremos las dos notas del margen, *Ten en cuenta* y *Poliedros regulares cóncavos*:

– *¿Qué es un poliedro semirregular?*
– *¿Existen poliedros regulares cóncavos?*

■ Los alumnos y alumnas resolverán ahora las actividades propuestas en el libro en la página 196.

Después podrán comprobar los resultados de la actividad 6 accediendo al recurso *@Amplía en la Red*.

2.1 Área de un poliedro regular

■ En este apartado aprenderemos a calcular el área de los poliedros regulares a partir del área de un polígono.

Leeremos el texto y analizaremos el ejemplo, después formularemos las siguientes preguntas al alumnado:

– *¿Por qué para calcular el área de un tetraedro hemos calculado primero el área de un triángulo equilátero?*
– *¿Cuál sería el área si se tratara de un octaedro con esa misma arista?*

2.2 Simetrías en los poliedros regulares

■ A continuación leeremos el siguiente apartado, y la nota *Otras simetrías,* que comentaremos con los alumnos y alumnas:

– *¿Cuándo se dice que un poliedro es simétrico?*
– *¿Qué tipos de simetrías reconoces en un poliedro?*
– *Si un poliedro es simétrico respecto de un plano, ¿presentará también simetría central y simetría respecto de un eje?*

El docente expondrá cómo dibujar cuerpos geométricos con ayuda de la calculadora *Wiris.*

Después los alumnos y alumnas resolverán los ejercicios planteados en la página 197 del libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 8 y 9.* Leer e interpretar el enunciado que contiene léxico específico sobre poliedros.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Recursos TIC, pág. 197.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la calculadora WIRIS, con la que se puede dibujar cuerpos geométricos y hacer cálculos de áreas y volúmenes.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 6.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.
- *Acts. 7 y 8.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 9.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre poliedros.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ En la actividad de refuerzo 4 se trabaja el concepto de poliedro regular así como su descripción, empleando el vocabulario del tema.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para trabajar en clase con poliedros regulares y sus condiciones, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747434

El aplicativo GeoGebra permite ver, de forma virtual, como los poliedros regulares perfectos pueden inscribirse uno dentro de otro.

Pediremos a nuestros alumnos que practiquen con la ventana interactiva, las dos formas de hacerlo.

El profesor tendrá en cuenta que es un ejercicio dinámico muy constructivo a nivel de pensamiento abstracto, que además les permitirá regular la velocidad, el orden en que los pueden inscribir y la dimensión.

A continuación les preguntaremos lo siguiente:

- *¿Qué relación existe con las aristas?*
- *¿Quién descubrió esta propiedad de los poliedros regulares? ¿Qué nombre reciben también? ¿Por qué?*

El profesor despertará así el espíritu investigador con autonomía en los aprendizajes.

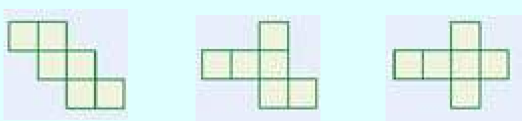
SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 196

6. La tabla quedaría como:

Poliedro	C	V	A	EULER
Tetraedro	4	4	6	4 + 4 = 6 + 2
Hexaedro	6	8	12	6 + 8 = 12 + 2
Octaedro	8	6	12	8 + 6 = 12 + 2
Dodecaedro	12	20	30	12 + 20 = 30 + 2
Icosaedro	20	12	30	20 + 12 = 30 + 2

7. Corresponden a un cubo los desarrollos planos:



Página 197

8. Todas las figuras tienen como caras triángulos equiláteros o cuadrados de 10 cm de lado.

– En el caso de cada cuadrado, su área sería de 100 cm^2.

– En el de los triángulos, utilizando el Teorema de Pitágoras para calcular la altura:

$10^2 = x^2 + 5^2 \Rightarrow x = 8{,}66\,cm$

Por tanto, el área de cada triángulo será:

$$A = \frac{10 \cdot 8{,}66}{2} = 43{,}3\,cm^2$$

A continuación se calcula el área de cada una de las figuras propuestas, teniendo en cuenta el número y el tipo de caras que lo forman:

TETRAEDRO (4 triángulo equiláteros):

$A = 4 \cdot 43{,}3 = 17{,}32\,cm^2$

HEXAEDRO (6 cuadrados):

$A = 6 \cdot 100 = 600\,cm^2$

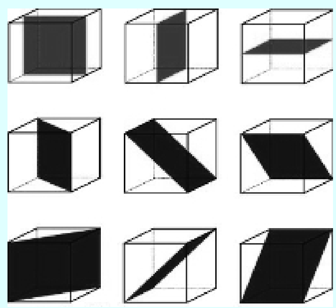
OCTAEDRO (12 triángulos equiláteros):

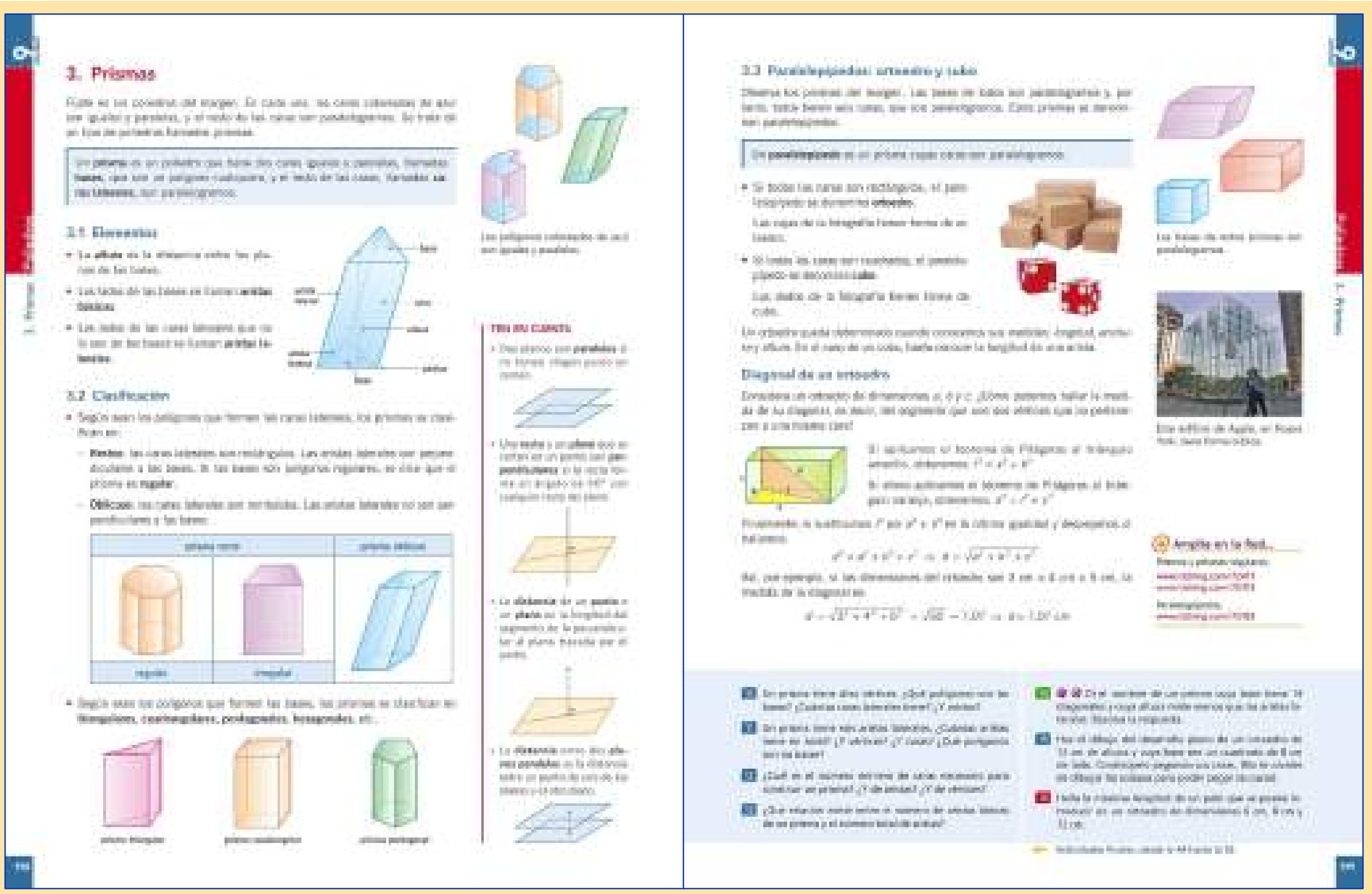
$A = 12 \cdot 43{,}3 = 519{,}6\,cm^2$

ICOSAEDRO (20 triángulos equiláteros):

$A = 20 \cdot 43{,}3 = 866\,cm^2$

9. Los planos son:




3. Prismas

3.1 Elementos

3.2 Clasificación

3.3 Paralelepípedos: ortoedro y cubo

Diagonal de un ortoedro

3. PRISMAS

■ El objetivo de esta sección es el estudio de los prismas, sus características y los casos particulares más importantes.

En primer lugar leeremos la introducción y la definición del prisma, observando las ilustraciones de la derecha:

– *¿Un poliedro es siempre un prisma? ¿Y viceversa?*
– *¿Cómo son las caras de un prisma y qué nombre reciben?*
– *¿Qué es un paralelogramo?*
– *¿Las bases de un prisma pueden ser polígonos irregulares?*

3.1 Elementos

■ A continuación el alumnado leerá el siguiente apartado, atendiendo al esquema en el que se representan los distintos elementos del prisma, y después lo comentaremos entre todos:

– *¿Cómo se define la altura de un prisma?*
– *¿Qué tipos de aristas encontramos en un prisma?*
– *¿Los prismas tienen vértices?*

Antes de pasar al siguiente apartado prestaremos atención al apunte *Ten en cuenta*, que nos recuerda la posición relativa y la distancia entre planos, rectas y puntos.

3.2 Clasificación

■ Leeremos ahora el texto de este apartado, observando cada tipo de prisma en las figuras:

– *¿Cómo es un prisma pentagonal?*
– *¿Cómo son las caras de un prisma oblicuo?*
– *¿Qué condiciones tiene que cumplir un prisma para ser regular?*

Después los alumnos y alumnas accederán a los recursos *72471* y *72473* de *@Amplía en la Red* para consolidar los conceptos estudiados sobre los prismas.

3.3 Paralelepípedos: ortoedro y cubo

■ Continuaremos con la lectura de este apartado, formulando al alumnado las siguientes preguntas:

– *¿Cuántas caras tiene un paralelepípedo?*
– *¿Un paralelepípedo es un poliedro?*
– *Pon un ejemplo de un objeto a tu alrededor con forma de ortoedro y otro con forma de cubo.*
– *¿Cómo se define y cómo calculamos la diagonal de un ortoedro?*

Por último los alumnos y alumnas pondrán en práctica los conocimientos adquiridos accediendo al recurso web *72483* de *@Amplía en la Red* y resolviendo las actividades del libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 11, 13 y 14.* Formular y expresar los propios argumentos de una manera convincente y adecuada al contexto en la resolución de las actividades.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 10, 11 y 12.* Aplicar el proceso aprendido para clasificar prismas y mejorar la eficacia en la resolución.

■ *Acts. 12 y 13.* Adquirir confianza en uno mismo y gusto por aprender realizando las actividades.

■ *Acts. 14, 15 y 16.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos a situaciones parecidas propuestas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 10 a 13.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre los prismas.

■ *Acts. 15 y 16.* Trabajar la confianza en uno mismo, el espíritu de superación, la motivación y la capacidad de aprender de los propios errores.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 permitirá consolidar el concepto de prisma y sus particularidades como poliedro.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para ampliar y practicar con un tipo concreto de poliedros, les proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747435

El recurso es un vídeo de poco más de nueve minutos y se centra en los primas. Los alumnos podrán repasar definiciones y características. También la fórmula para hallar su área y volumen.

Previamente les podemos pedir que aporten objetos de uso cotidiano, diseñados con formas de prismas. Les pediremos que en grupo realicen un trabajo explorativo según el siguiente esquema:

- Calcular: aristas, área y volumen de cada objeto.
- Clasificar según las propiedades observadas.
- Dibujo del desarrollo plano.

Finalmente el profesor pedirá a toda la clase realizar una clasificación general y se expondrá el resultado.

Este tipo de propuestas fomentan la participación entre los alumnos y favorece el aprendizaje abstracto al promover unas Matemáticas manipulativas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 199

10. En un prisma, el número de vértices es el correspondiente a los que hay entre las dos bases, por lo que, tendría 5 vértices cada una, y se tratarían de **pentágonos**.

Luego, el número de caras laterales sería 5, y el número de aristas 15.

11. Al tener 6 aristas laterales, se deduce que las bases tienen que ser **hexágonos**.

Luego, tendrá, en total, 18 aristas, 12 vértices y 6 caras.

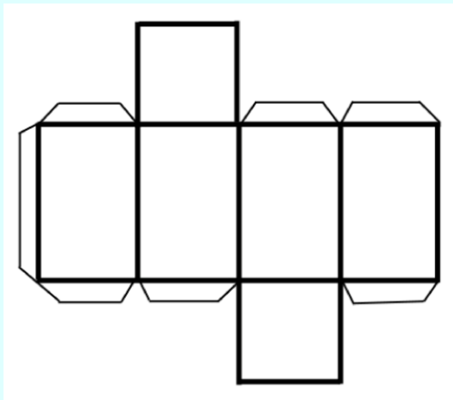
12. El mínimo número de caras sería 3 y, contando con las dos bases, que serían triangulares, el número de aristas sería 9 y, el número de vértices, 6.

13. El número de aristas básicas es siempre 2/3 del total de aristas.

14. El polígono que tiene 14 diagonales es el heptágono, por lo tanto tendrá esa figura como bases. Para que la altura sea menor que la arista, el prisma tiene que ser oblicuo. Por tanto, el nombre sería: **prisma oblicuo heptagonal**.

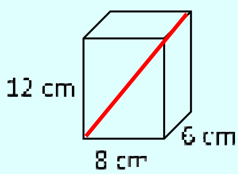
15. Actividad personal. A modo de ejemplo:

El esquema del desarrollo plano sería:



16. La máxima longitud siempre la toma la diagonal del ortoedro.

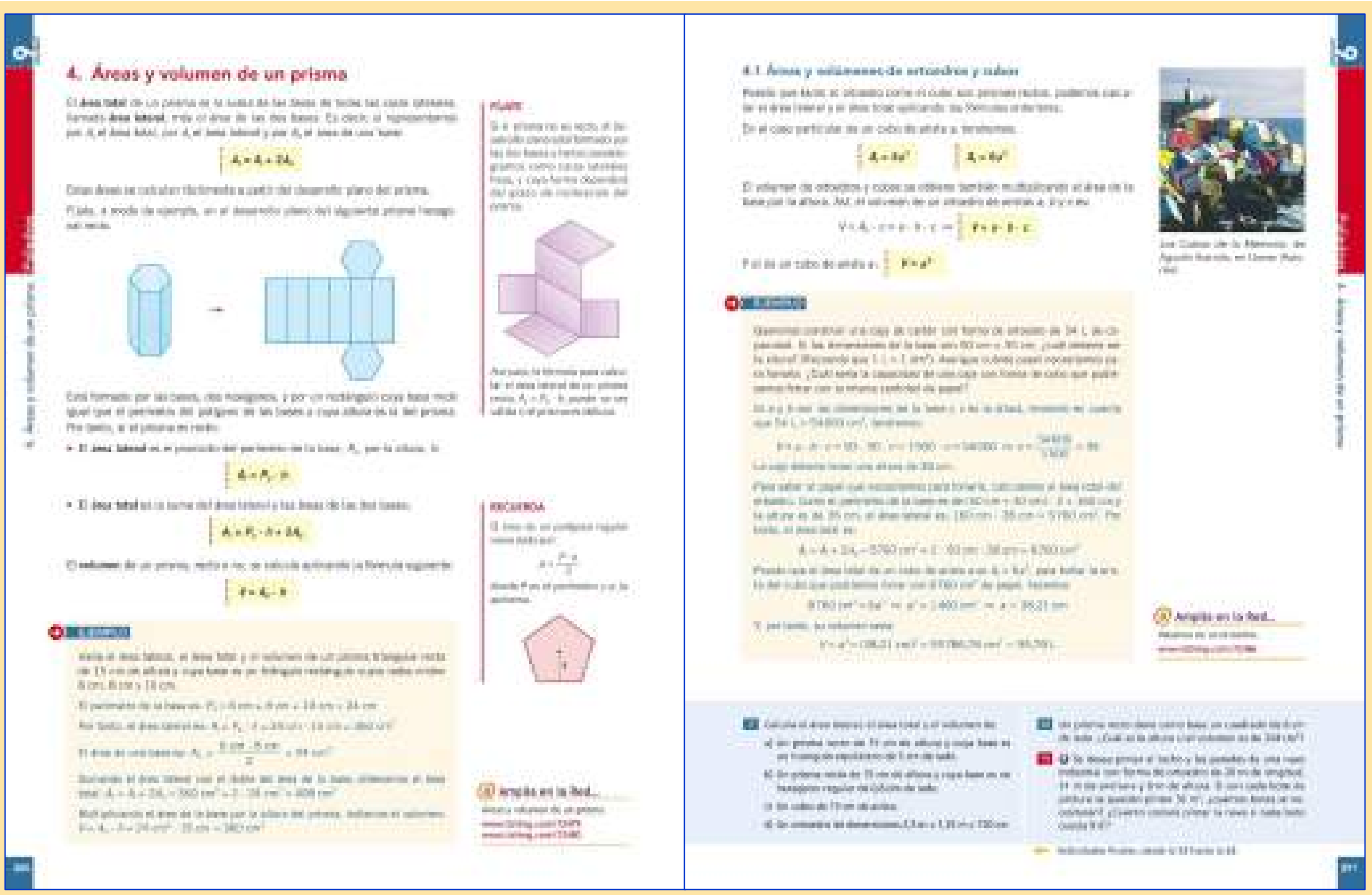
Gráficamente se describiría como:



La longitud de la diagonal sería:

$d = \sqrt{12^2 + 8^2 + 6^2} = 15{,}6$

Por tanto, la longitud máxima del palo sería de 15,6 cm.



4. Áreas y volumen de un prisma

4. ÁREAS Y VOLUMEN DE UN PRISMA

■ El objetivo básico de esta sección es el cáculo del área y el volumen de un prisma, y su particularización para el ortoedro y el cubo.

Para empezar leeremos atentamente el desarrollo del cálculo del área y el volumen de un prisma, incluyendo el apunte *Recuerda*. Después lo revisaremos con los alumnos y alumnas contestando a estas preguntas:

– *¿A qué denominamos área lateral de un prisma? ¿Cómo lo calculamos para un prisma recto?*
– *¿Cómo hallamos el área total de un prisma recto?*
– *¿Y el área de las bases?*
– *¿Se podría aplicar a un prisma oblicuo?*
– *¿Cuál es la fórmula para obtener el volumen de un prisma recto? ¿Y de uno oblicuo?*

■ A continuación el alumnado prestará atención a la nota *Fíjate*, sobre el cálculo del área en el caso de un prisma oblicuo.

Después observaremos el ejemplo resuelto en el libro, donde se aplican las fórmulas anteriores a un caso concreto:

– *¿Si el prisma fuera oblicuo, el área sería el mismo?*
– *¿Cómo hemos calculado el área de la base?*
– *¿Por qué duplicamos el área de la base para calcular el área total?*

Por último los alumnos y alumnas practicarán estos cálculos resolviendo los ejemplos que encontrarán en los recursos *@Amplía en la Red.*

4.1 Áreas y volúmenes de ortoedros y cubos

■ Posteriormente leeremos el siguiente apartado, donde estudiaremos la particularización de los cálculos anteriores al cubo y al ortoedro, y observaremos el ejemplo mostrado en la ilustración de la derecha:

– *¿Podemos aplicar los cálculos anteriores al cubo y al ortoedro? Razona tu respuesta.*
– *¿Cómo obtenemos que el área del cubo es $6a^2$?*
– *¿Qué datos necesitamos para hallar ambos volúmenes, del cubo y el ortoedro?*

■ A continuación analizaremos el ejemplo, atendiendo a las operaciones y transformaciones realizadas:

– *¿Cómo calculamos el perímetro de la base del ortoedro? ¿Por qué es necesario calcularlo?*
– *¿Por qué igualamos el área del ortoedro a la expresión $6a^2$?*

Ahora los alumnos y alumnas pueden seguir practicando la resolución del ortoedro en el recurso *@Amplía en la Red* de la página 201, y de los prismas en general en las actividades del libro de la misma página.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 17.* Interpretar el enunciado y procesar los datos que se proponen, de manera ordenada y adecuada al contexto.
- *Act. 19.* Leer, comprender e interpretar el enunciado del problema para poderlo resolver.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 17.* Reconocer y asimilar los conceptos y las propiedades sobre cálculos sobre prismas y ser capaz de reproducirlos.
- *Act. 18.* Aplicar los conocimientos recien adquiridos, transformando la información en conocimientos propios.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 19.* Identificar, en la realización de las actividades, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 servirá para revisar la realización de desarrollos planos de los poliedros, identificando a partir del desarrollo plano la correspondencia con cada cuerpo geométrico.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Naveguemos por Tiching

– Para seguir trabajando en clase áreas y volumen del prisma, y de ortoedros y cubos, podemos acceder al siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747436

Es un recurso con seis actividades interactivas que el alumno realizará en su cuaderno y a continuación verificará el resultado. Si éste es erróneo, facilita el desarrollo del ejercicio, para que el alumno compruebe por sí mismo dónde ha fallado.

A continuación, les indicaremos una actividad grupal*:*

- En grupos de seis, preparad seis tarjetas con seis preguntas sobre prismas, en seis minutos.
- Pueden ser definiciones con errores o tipo verdadero/falso o áreas, etc. Repartid las tarjetas entre toda la clase.
- En seis minutos cada grupo deberá responder las que les han tocado. Pueden organizarse comisiones de expertos.

Esta actividad puede ser interesante para los alumnos, ya que promueven unas Matemáticas lúdicas, creativas y participativas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 201

17. Las soluciones son las siguientes:

a) El perímetro de la base es: $P_b = 3 \cdot 5 = 15$ cm

Por tanto, el área lateral es: $A_l = 15 \cdot 15 = 225\ \text{cm}^2$

El área de una base es:

$$A_b = \frac{5 \cdot 4,3}{2} = 10,8\ \text{cm}^2$$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 225 + 2 \cdot 10,8 = 246,6\ \text{cm}^2$$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$$V = A_b \cdot h = 10,8 \cdot 15 = 162\ \text{cm}^3$$

b) El perímetro de la base es: $P_b = 8 \cdot 6 = 48$ cm

Por tanto, el área lateral es: $A_l = 48 \cdot 15 = 720\ \text{cm}^2$

El área de una base es:

$$A_b = \frac{48 \cdot 6,9}{2} = 165,6\ \text{cm}^2$$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 720 + 2 \cdot 165,6 = 1051,2\ \text{cm}^2$$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$$V = A_b \cdot h = 165,6 \cdot 15 = 2484\ \text{cm}^3$$

c) El área lateral es: $A_l = 4 \cdot 15^2 = 900\ \text{cm}^2$

El área total es: $A_t = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 15^2 = 1350\ \text{cm}^2$

Por otro lado, hallamos el volumen:

$$V = a^3 = 15^3 = 3375\ \text{cm}^3$$

d) El perímetro de la base es:

$$P_b = 2 \cdot 2,5 + 2 \cdot 1,25 = 7,5\ \text{m}$$

Por tanto, el área lateral es:

$$A_l = 7,5 \cdot 1,5 = 11,25\ \text{m}^2$$

El área de una base es: $A_b = 3,125\ \text{m}^2$

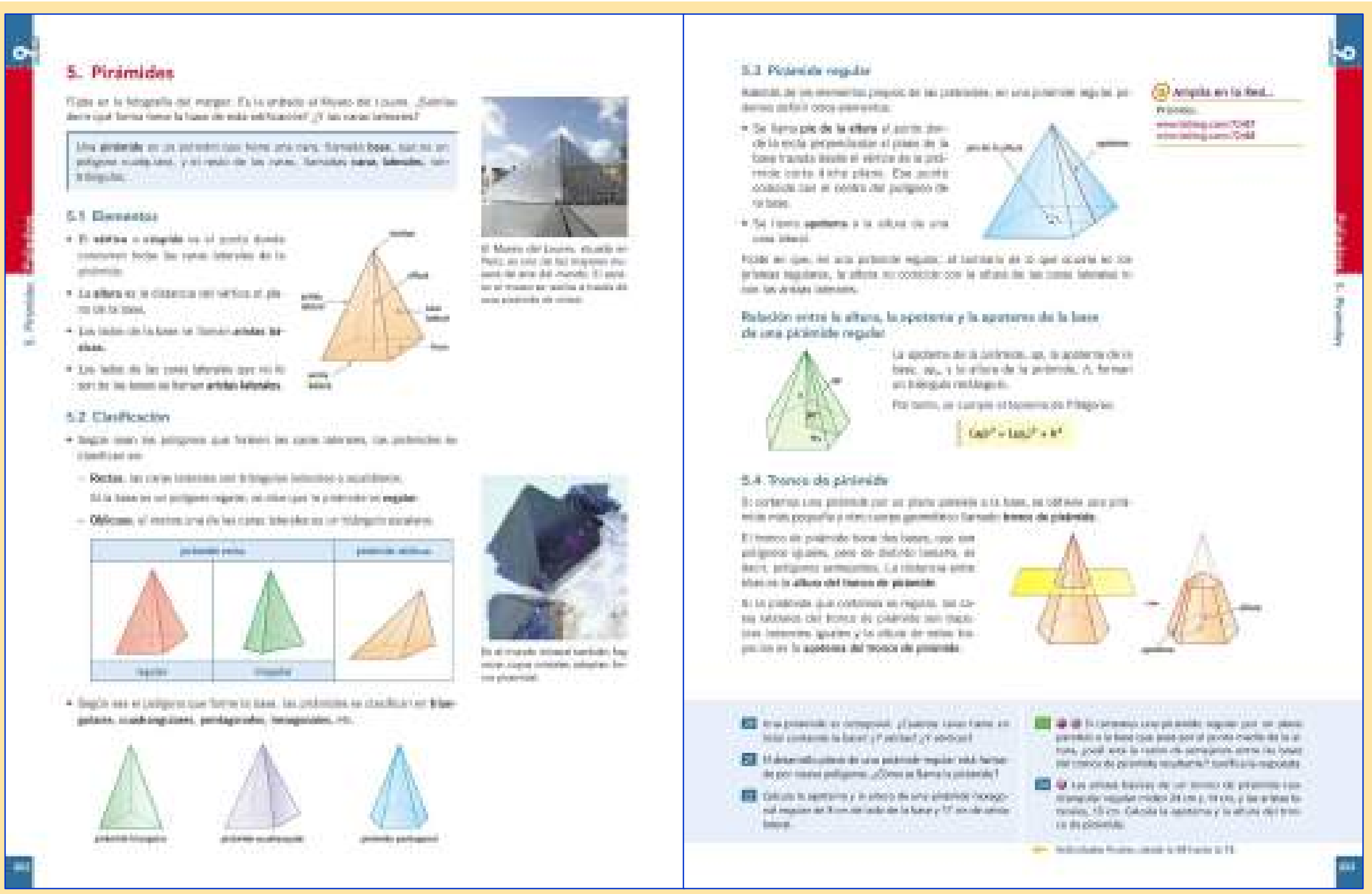
Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 11,25 + 2 \cdot 3,125 = 17,5\ \text{m}^2$$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$$V = A_b \cdot h = 3,125 \cdot 1,5 = 4,6875\ \text{m}^3$$

(Continúa en la página 9-30 de la guía)



5. PIRÁMIDES

■ El objetivo básico de esta sección es el análisis de las pirámides, sus características y particularizaciones más importantes.

5.1 Elementos

■ En primer lugar los alumnos y alumnas leerán la introducción y el primer apartado, junto con los ejemplos del margen. Después les plantearemos las siguientes cuestiones:

- *¿Cuántas caras tiene una pirámide? ¿Qué forma tienen dichas caras?*
- *¿Una pirámide es un poliedro? ¿Es cóncavo o convexo?*
- *¿Cuáles son las aristas básicas y cuáles las laterales?*
- *¿Conoces otros ejemplos de pirámides que se encuentren a nuestro alrededor?*

5.2 Clasificación

■ A continuación leeremos el segundo apartado, atendiendo a las figuras que aclaran la clasificación de las pirámides:

- *¿Cuándo se dice que una pirámide es regular?*
- *¿Cómo se clasifican las pirámides según su base?*
- *¿Podrías dibujar una pirámide octogonal?*

■ Antes de proseguir con el texto de esta sección, los alumnos y alumnas jugarán con los dos recursos interactivos de *@Amplía en la Red* de la página 203, con el fin de familiarizarse con este cuerpo geométrico.

5.3 Pirámide regular

■ Después leerán el siguiente apartado, donde se introducen nuevos conceptos aplicados a las pirámides regulares:

- *¿Una pirámide regular puede ser oblicua?*
- *¿Qué es la apotema de una pirámide regular? ¿Y la de sus base?*
- *¿Qué expresión relaciona ambas?*

5.4 Tronco de pirámide

■ Por último leeremos este apartado en el que analizaremos un nuevo cuerpo geométrico formado a partir de una pirámide:

- *¿Cómo son las bases de un tronco de pirámide entre sí? Razona tu respuesta.*
- *¿Cuál es la altura del tronco de pirámide y cuál la apotema?*

Para terminar pediremos a los alumnos y alumnas que resuelvan las actividades propuestas en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 23.* Comprender e interpretar el enunciado del problema que se plantea y responder con la solución correspondiente.

APRENDER A APRENDER

- *Acts.20, 21 y 22.* Identificar y manejar las posibles respuestas, tomando decisiones de manera racional.
- *Acts. 23 y 24.* Aplicar los procesos aprendidos para calcular la apotema y la altrura del tronco de pirámide, de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 23.* Reflexionar antes de resolver la actividad y tomar decisiones de forma razonada, aplicando las estrategias aprendidas de manera sistemática.
- *Act. 24.* Desarrollar la capacidad de poner en práctica los conocimientos adquiridos, extrayendo conclusiones y siendo perseverante en la resolución.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 consolidará el aprendizaje de las características, elementos y clasificación de las pirámides.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de practicar con un poliedro particular como la pirámide, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/747437

Se trata del aplicativo GeoGebra con el cual podrán construir diferentes prismas y pirámides. El recurso permitirá a nuestros alumnos interactuar e implicarse en la construcción. Por ello les pediremos:

- *¿Sabrías construir varias posibilidades como te propone la página?*
- *¿Podrías calcular el área y el volumen de cada uno?*

A continuación, y para promover la utilización de los recursos tecnológicos presentes en la red, les podemos sugerir:

- *Acciona los diferentes puntos y contempla las figuras desde distintos ángulos. Podrás tener una visión más gobal y completa de los poliedros.*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 203

20. Contando con la base, el número de caras total es 9. El número de aristas es 16. Y, el número de vértices, es 9.

21. Al tener nueve polígonos su desarrollo plano, la pirámide tendrá 8 caras y la base, por lo tanto, se trata de una pirámide octogonal.

22. Calculamos la apotema de la pirámide, utilizando el Teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo formado entre la arista (17 cm), la mitad del lado de la base (4 cm) y la apotema de la pirámide (*ap*):

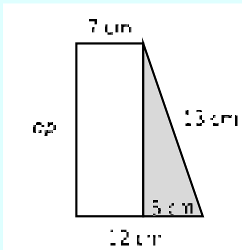
$$17^2 = ap^2 + 4^2 \Rightarrow ap = 16{,}5 \text{ cm}$$

Para calcular la altura, se necesita calcular primero la apotema de la base (ap_b). Teniendo en cuenta que el radio de un hexágono mide lo mismo que el lado, la ap_b mide 6,9 cm. Por tanto, la altura (*h*), sería:

$$ap^2 = h^2 + ap_b{}^2 \Rightarrow 16{,}5^2 = h^2 + 6{,}9^2 \Rightarrow h = 15 \text{ cm}$$

23. Por el Teorema de Thales, la razón entre los lados de ambas dimensiones tiene que ser la misma. Por lo tanto, puesto que la razón entre las alturas es de 1/2, se mantendrá constante para las bases.

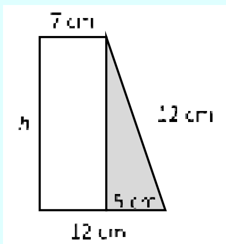
24. La apotema se calcula teniendo en cuenta la siguiente figura, que corresponde a media cara lateral del tronco de pirámide:



Utilizando el Teorema de Pitágoras sobre el triángulo sombreado:

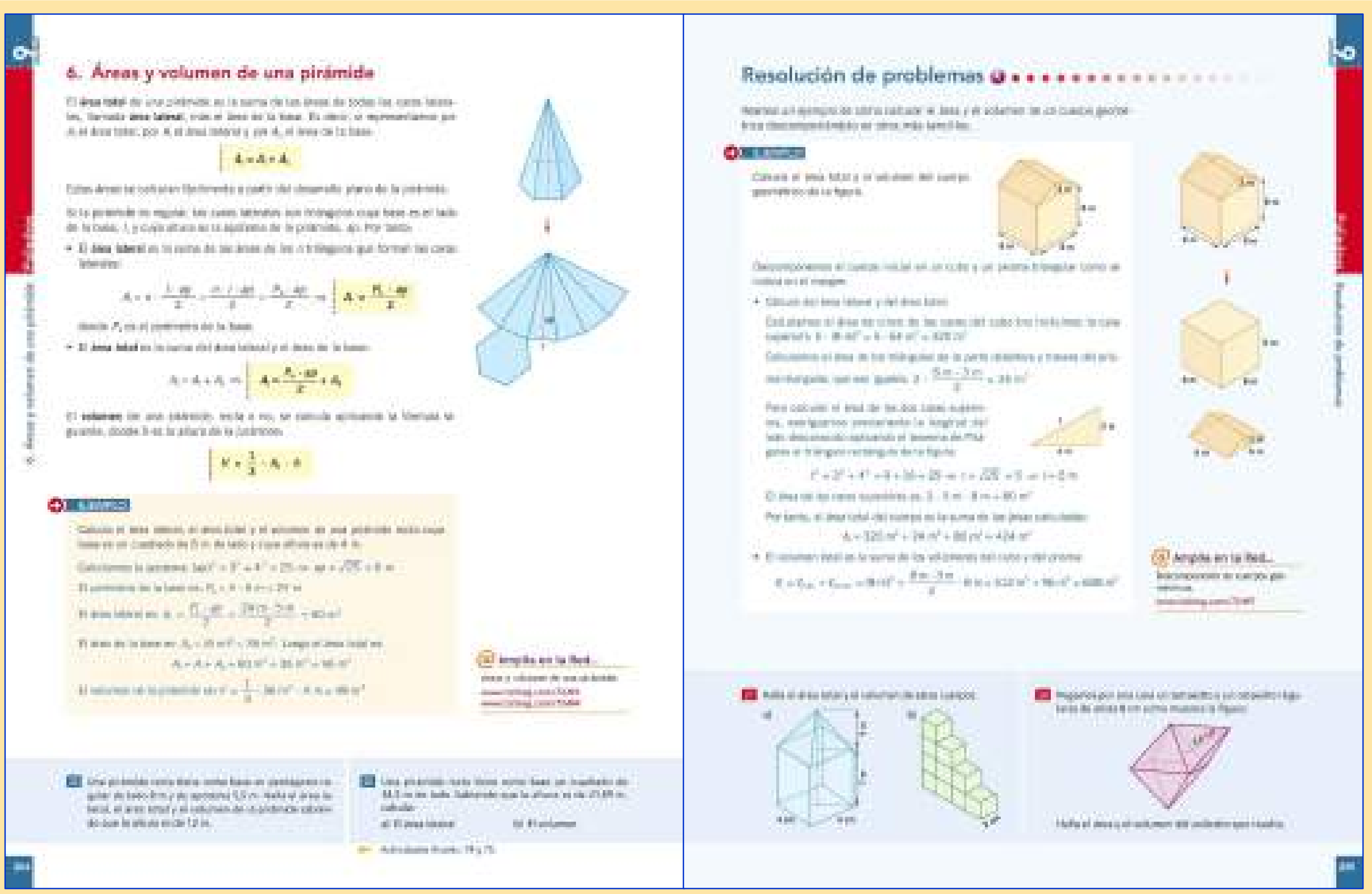
$$ap^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow ap = 12 \text{ cm}$$

Por otra parte, la altura se calculará utilizando una figura similar pero, en este caso, correspondiente a una sección del tronco de pirámide:



Utilizando el Teorema de Pitágoras sobre el triángulo sombreado:

$$12^2 = h^2 + 5^2 \Rightarrow h = 10{,}9 \text{ cm}$$


6. Áreas y volumen de una pirámide

Resolución de problemas

6. ÁREAS Y VOLUMEN DE... / RESOLUCIÓN...

■ El objetivo de esta sección consiste en aprender a calcular el área y volumen de una pirámide.

Leeremos primero la introducción y el desarrollo del área para una pirámide regular. A continuación observaremos el cálculo del volumen de cualquier pirámide y formularemos las siguientes preguntas al alumnado:

- *¿A qué llamamos área lateral? ¿Cómo lo calculamos?*
- *¿Podemos aplicar ese cálculo a cualquier pirámide?*
- *¿Por qué el perímetro de la base es n*l?*
- *¿Cómo calculamos el volumen de una pirámide? ¿Podemos aplicar esa fórmula a cualquier pirámide?*

■ Después analizaremos el ejemplo resuelto en el que se aplican las fórmulas anteriores y comentaremos entre todos los siguientes puntos:

- *¿Se trata de una pirámide regular? ¿Por qué?*
- *¿Cómo hemos calculado la apotema?*
- *¿Por qué el perímetro de la base es 24m?*
- *¿Cuál sería el área y el volumen si la base de la pirámide fuese hexagonal?*

Ahora el alumnado accederá a los recursos de *@Amplía en la Red* de la página 204, que contienen ejemplos interactivos muy prácticos del cálculo del área y el volumen de pirámides.

Para terminar, los alumnos y alumnas pondrán en práctica los conocimientos adquiridos realizando los ejercicios.

■ En la siguiente sección trabajaremos el cálculo del área y el volumen de cuerpos más complejos a partir de los estudiados a lo largo de esta unidad didáctica.

Empezaremos leyendo la introducción y después examinaremos el ejemplo paso a paso. Para comprobar su comprensión por el alumnado plantearemos el siguiente cuestionario:

- *¿Por qué calculamos el área de cinco de las caras del cubo en lugar de séis?*
- *¿Por qué la parte superior es un prisma y no una pirámide? ¿En qué se diferencian?*
- *¿Se trata de un prisma regular?*
- *¿Cómo calculamos el lado menor de las caras rectangulares del prisma?*
- *¿Cómo hemos calculado el volumen del prisma?*

Los alumnos y alumnas accederán ahora al recurso *@Amplía en la Red* de la página 205, en el que se recogen problemas resueltos sobre cuerpos compuestos.

Por último pueden resolver los ejercicios propuestos, en los que pondrán a prueba su destreza aplicando el procedimiento descrito en los ejemplos.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 25 y 26.* Leer, comprender e interpretar los enunciados de los problemas planteados y resolverlos mediante la aplicación de los conocimientos sobre pirámides.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 27 y 28.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 25 y 26.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, evaluando las acciones realizadas.
- *Resolución de problemas, pág. 205.* Observar el planteamiento y la resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas, así como el orden de las operaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ Las actividades de ampliación 1 y 3 servirán como práctica para mejorar la representación bidimensional y tridimensional de los poliedros, indispensable para afrontar problemas donde se requiere una croquización inicial o una descomposición.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para finalizar el tema de los poliedros, proponemos el enlace siguiente:

http://www.tiching.com/747438

El recurso es un vídeo de casi diez minutos de duración presentado por unos personajes de animación. Repasan de forma divertida y amena todos los poliedros y sus características.

El profesor lo puede proponer como resumen de la unidad y también para preparar preguntas básicas. Al finalizar les preguntaremos:

- *¿Qué demostración aparece al final del vídeo? ¿Cómo lo hace?*
- *¿Serías capaz de proponer, exponer y hacer lo mismo con otro poliedro?*

La Geometría sugiere dinámicas más participativas y lúdicas, promueve la autonomía y sugiere estrategias diversas para el aprendizaje.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 204

25. Calculamos la apotema de la pirámide:

$$ap^2 = 12^2 + 5,5^2 \Rightarrow ap = 13,2 \text{ m}$$

El perímetro de la base sería:

$$P_b = 8 \cdot 5 \Rightarrow P_b = 40\text{m}$$

El área lateral es:

$$A_l = \frac{40 \cdot 13,2}{2} \Rightarrow A_l = 264 \text{ m}^2$$

El área de la base es:

$$A_b = \frac{40 \cdot 5,5}{2} \Rightarrow A_b = 110 \text{ m}^2$$

Luego, el área total es:

$$A_t = 264 + 110 = 374 \Rightarrow A_t = 374 \text{ m}^2$$

Y, el volumen de la pirámide, es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 110 \cdot 12 \Rightarrow V = 440 \text{ m}^3$$

26. Las soluciones son las siguientes:

a) Calculamos la apotema de la pirámide:

$$ap^2 = 21,65^2 + 17,25^2 \Rightarrow ap = 27,68\text{m}$$

El perímetro de la base es:

$$P_b = 34,5 \cdot 4 = 138\text{m}$$

Por tanto, el área lateral es:

$$A_l = \frac{138 \cdot 27,68}{2} = 1909,92\text{m}^2$$

b) Teniendo en cuenta que la base es un cuadrado, el volumen sería:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 34,5^2 \cdot 21,65 = 8589,6\text{m}^3$$

Página 205

27. A continuación se resuelve cada apartado:

a) Descomponemos el cuerpo inicial en un ortoedro y una pirámide cuadrangular.

En primer lugar, calculamos el **área total**. Comenzando por el área de la base: $A_b = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$

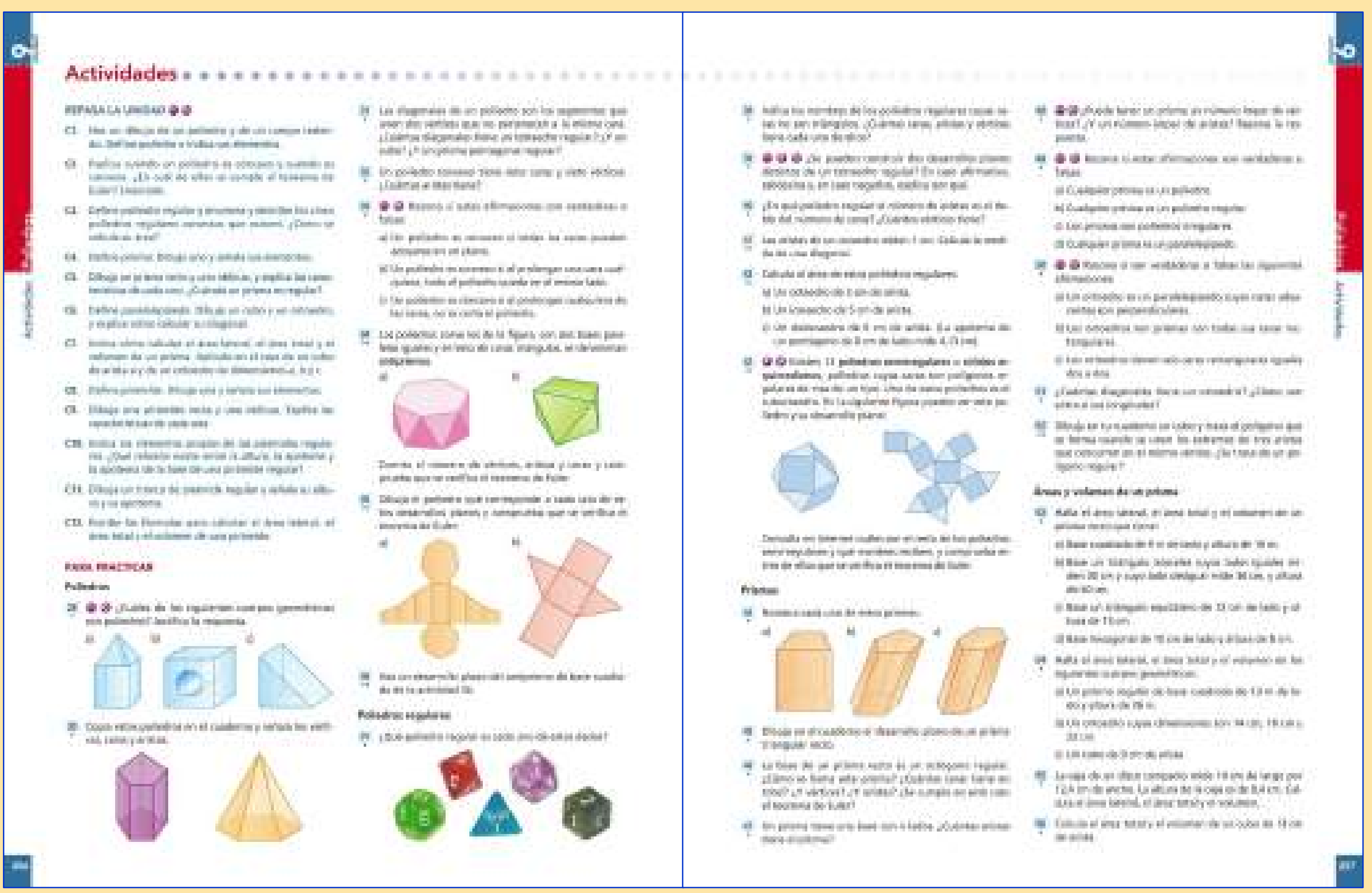
Las cuatro caras del ortoedro, tienen un área de:

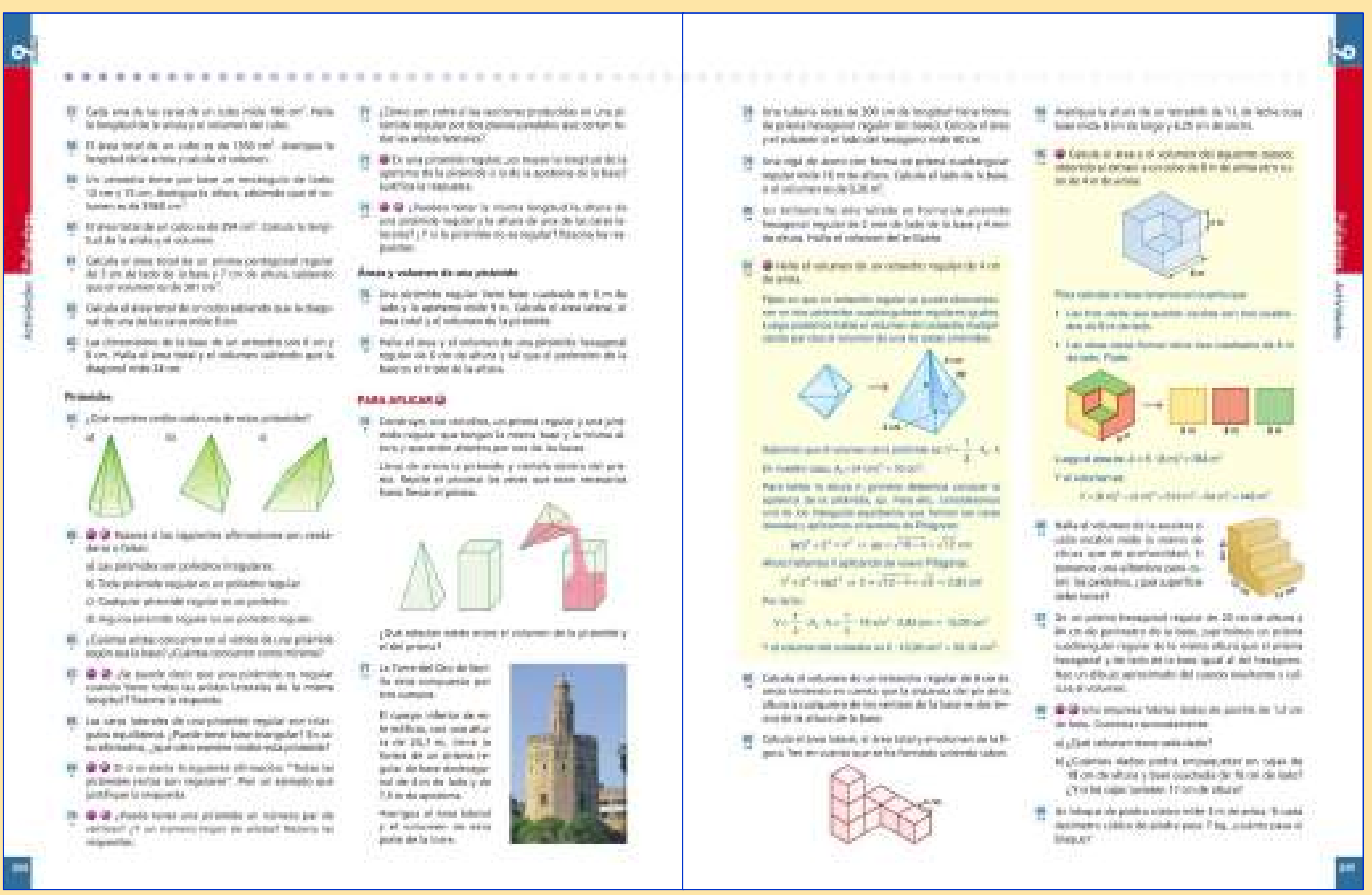
$$4 \cdot (4 \cdot 7) = 112 \text{ cm}^2$$

Para calcular el área lateral de la pirámide, comenzamos por el perímetro de la base:

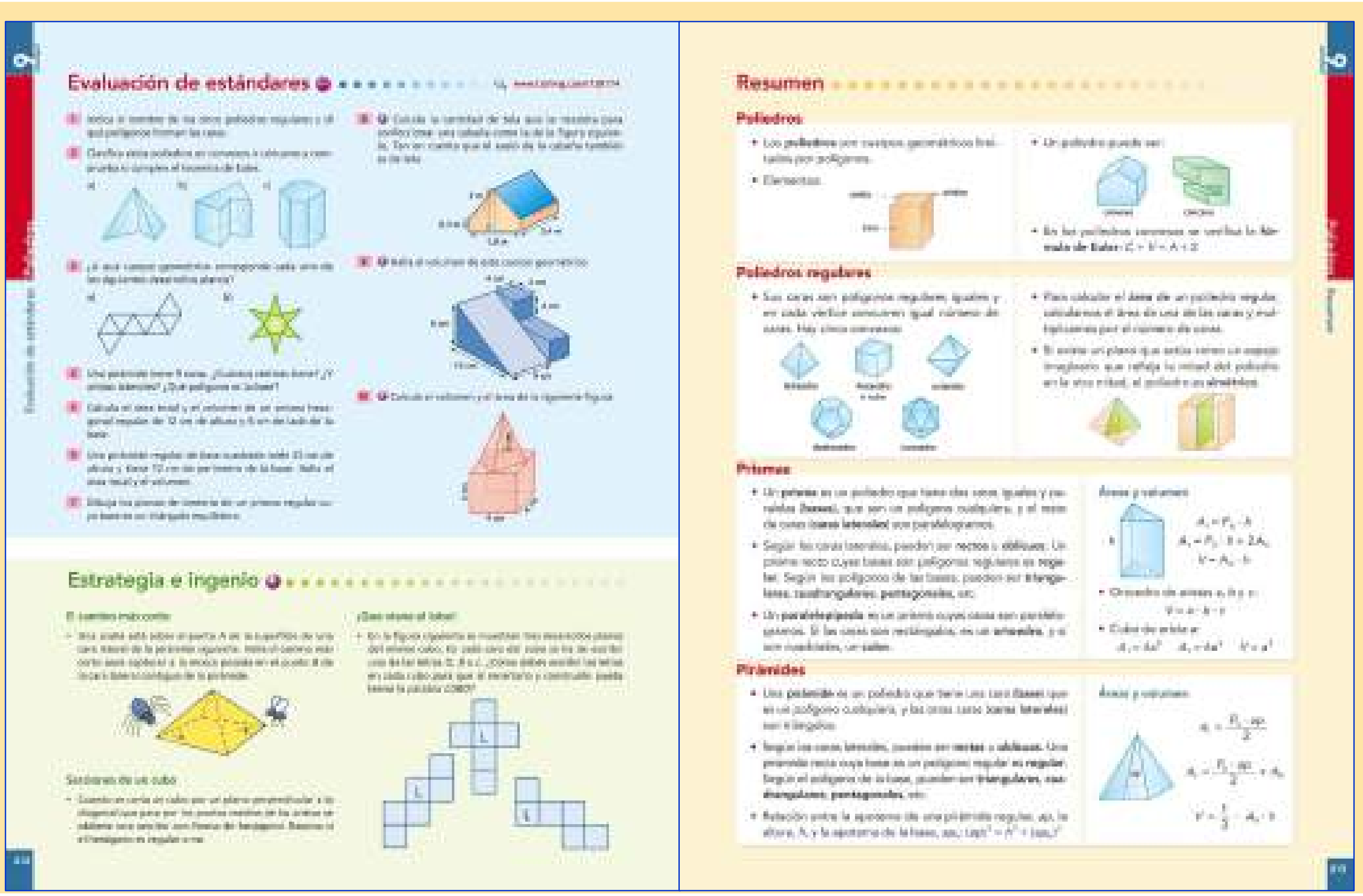
$$P_b = 4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}$$

(Continúa en la página 9-30 de la guía)





Desarrolla tus competencias
MAQUETAS



Evaluación de estándares
Estrategia e ingenio
Resumen
Poliedros
Poliedros regulares
Prismas
Pirámides

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Repasa la unidad, pág. 206*. Expresar e interpretar correctamente los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario adecuado a los contenidos dados.
- *Acts. 29, 33, 39, 48, 49,50, 65, 67, 69, 70, 73, 88, 90, 92, 93 y 94.* Expresar por escrito, de manera clara y concisa, argumentos propios de manera adecuada a la resolución de las actividades.
- *Desarrolla…, pág. 211.* Leer y comprender el estímulo y los enunciados de la actividad, generando ideas, supuestos e interrogantes.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Act. 43. Desarrolla…, pág. 2011.* Buscar, analizar seleccionar y manejar información en Internet.

APRENDER A APRENDER

- *Repasa la unidad, pág. 204.* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, y ser consciente de las propias capacidades y carencias.
- *Acts. 29, 33, 39, 48, 49, 50, 65,. 67, 69, 70, 72, 73, 88, 90, 92, 93 y 94.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.
- *Acts. 81, 85 y 95.* Observar la resolución de un problema, identificar las estrategias utilizadas y buscar una coherencia global a la hora de ejecutar el plan de resolución.
- *Desarrolla…, pág. 211.* Aplicar los conocimientos y las estrategias adquiridos para resolver los problemas.
- *Evaluación…, pág. 212*. Ser consciente de las propias capacidades en el tema estudiado.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Para aplicar, pág.208.* Establecer relaciones entre los datos proporcionados en los problemas y planificar su resolución.
- *Acts. 39, 43, 98, 99, 100 y 101.* Afrontar una situación problemática, aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo del tema, con criterio propio.
- *Desarrolla…, pág. 211.* Buscar las soluciones de forma creativa e imaginativa, con motivación y autonomía.
- *Evaluación…, pág. 212, acts. 8, 9 y 10.* Estrategia e ingenio, pág. 212. Aplicar los conocimientos sobre ecuaciones, buscar soluciones a los problemas que se plantean y evaluar las acciones realizadas.

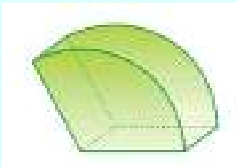
ACTIVIDADES FINALES

- En la sección de *Actividades* el alumnado se enfrentará a una colección de ejercicios en orden creciente de dificultad, con el fin de afianzar todos los contenidos del tema, desde un punto de vista práctico y teórico.
- La sección *Desarrolla…* persigue fomentar la autonomía del alumnado y la utilización de distintos recursos para resolver un planteamiento dado. A través de un caso práctico, el alumno ejercitará su capacidad de análisis y su actitud proactiva en la búsqueda de soluciones, además de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica.
- Con la sección de *Evaluación…* se pretende que los alumnos y alumnas valoren el nivel de conocimientos alcanzados. Propone una serie de actividades que repasan la unidad de un modo completo y práctico.
- La sección *Estrategia…* propone una serie de acertijos o juegos relacionados con los conceptos trabajados durante el tema, con el fin de que el alumnado desarrolle su imaginación y adquiera destreza relacionando ideas.
- La finalidad de la sección *Resumen* es recopilar los contenidos fundamentales de la unidad en un mapa conceptual que destaque las relaciones entre los conceptos y los procedimientos estudiados.

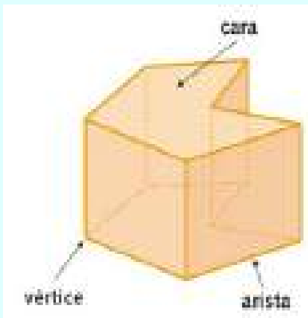
SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 206

C1. Un cuerpo redondo sería, por ejemplo, de la forma:



Los poliedros son los cuerpos geométricos limitados solo por superficies planas, que son polígonos. Los elementos de un poliedro son las caras, las aristas y los vértices.



C2. Un poliedro es convexo si se puede apoyar en un plano sobre cualquiera de las caras. Si tiene al menos una cara sobre la que no se puede apoyar en un plano, entonces el poliedro es cóncavo.

El teorema de Euler se verifica para cualquier polinomio convexo y expresa la relación entre el número de caras (C), aristas (A) y vértices (V) de un poliedro como:

$$C + V = A + 2$$

C3. Se llaman poliedros regulares los que cumplen las siguientes condiciones:

- Todas las caras están formadas por polígonos regulares iguales.
- En todos los vértices del poliedro concurren el mismo número de caras.

Los cinco poliedros regulares que existen son los siguientes:

Tetraedro:

Tiene 4 caras, que son triángulos equiláteros. En cada vértice concurren 3 caras.

Hexaedro o cubo:

Tiene 6 caras, que son cuadrados. En cada vértice concurren 3 caras.

Octaedro:

Tiene 8 caras, que son triángulos equiláteros. En cada vértice concurren 4 caras.

Dodecaedro:

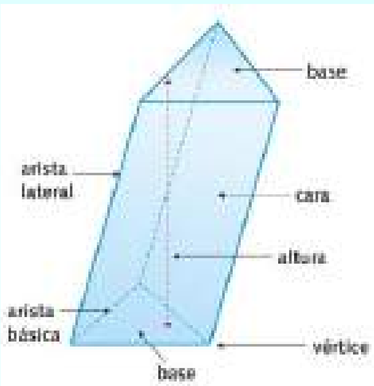
Tiene 12 caras, que son pentágonos regulares. En cada vértice concurren 3 caras.

Icosaedro:

Tiene 20 caras, que son triángulos equiláteros. En cada vértice concurren 5 caras.

Para hallar el área de un poliedro regular, basta con calcular el área de una de las caras y multiplicarla por el número de caras.

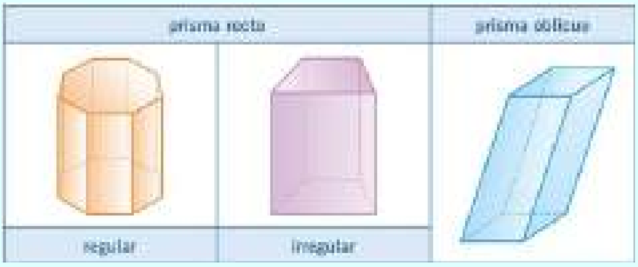
C4. Un prisma es un poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas, llamadas bases, que son un polígono cualquiera, y el resto de las caras, llamadas caras laterales, son paralelogramos. Sus elementos son altura, aristas básicas y aristas laterales.



C5. Según sean los polígonos que forman las caras laterales, los prismas se clasifican en:

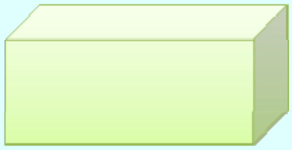
- **Rectos**: las caras laterales son rectángulos. Las aristas laterales son perpendiculares a las bases.

  Si las bases son polígonos regulares, se dice que el prisma es regular.
- **Oblicuos**: las caras laterales son romboides. Las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.

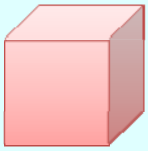


C6. Un paralelepípedo es un prisma cuyas caras son paralelogramos.

- Si todas las caras son rectángulos, el paralelepípedo se denomina ortoedro.



- Si todas las caras son cuadrados, el paralelepípedo se denomina cubo.



Si las dimensiones del paralelepípedo son a, b y c, la diagonal se calcula como:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

C7. El área total de un prisma es la suma de las áreas de todas las caras laterales, llamada área lateral (A_l), más el área de las dos bases (A_b):

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b$$

Cuando se trata de un prisma recto, entonces:

- El área lateral es el producto del perímetro de la base (P_b), por la altura (h): $A_l = P_b \cdot h$
- El área total es la suma del área lateral y las áreas de las dos bases: $A_t = P_b \cdot h + 2 \cdot A_b$

El volumen de un prisma, recto o no, se calcula aplicando la fórmula siguiente: $V = A_b \cdot h$

Puesto que el ortoedro y el cubo son prismas rectos, podemos calcular el área lateral, el área total y el volumen aplicando las fórmulas anteriores:

CUBO	ORTOEDRO
$A_l = 4 \cdot a^2$	$A_l = 2c(a+b)$
$A_t = 6 \cdot a^2$	$A_t = 2ac + 2bc + 2ab$
$V = a^3$	$V = a \cdot b \cdot c$

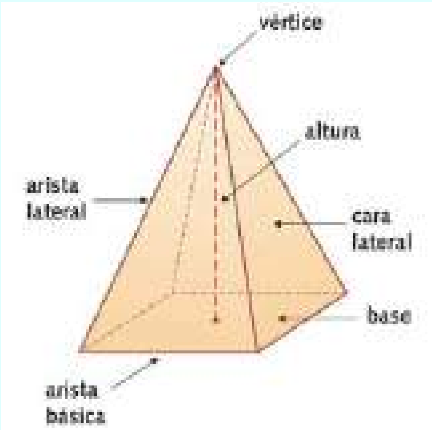
C8. Una pirámide es un poliedro que tiene una cara, llamada base, que es un polígono cualquiera, y el resto de las caras, llamadas caras laterales, son triángulos. Sus elementos son:

– El **vértice o cúspide** es el punto donde concurren todas las caras laterales de la pirámide.

– La **altura** es la distancia del vértice al plano de la base.

– Los lados de la base se llaman **aristas básicas**.

– Los lados de las caras laterales que no lo son de las bases se llaman **aristas laterales**.

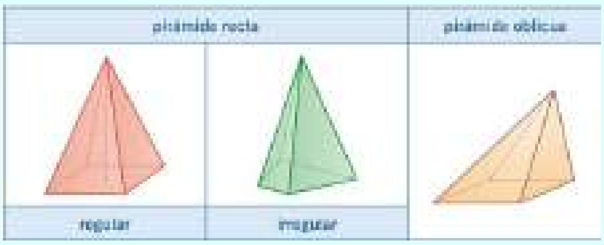


C9. Según sean los polígonos que forman las caras laterales, las pirámides se clasifican en:

– **Rectas**: las caras laterales son triángulos isósceles o equiláteros.

Si la base es un polígono regular, se dice que la pirámide es <u>regular</u>.

– **Oblicuas**: al menos una de las caras laterales es un triángulo escaleno.



C10. Además de los elementos propios de las pirámides, en una pirámide regular podemos definir otros elementos:

– Se llama pie de la altura el punto donde la recta perpendicular al plano de la base trazada desde el vértice de la pirámide corta dicho plano. Ese punto coincide con el centro del polígono de la base.

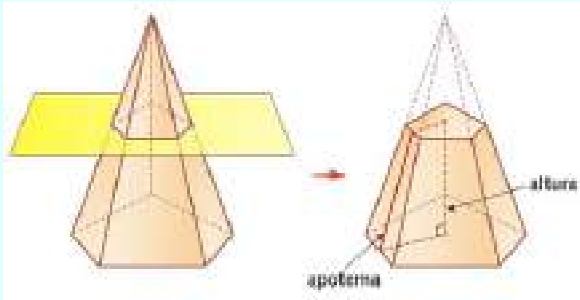
– Se llama apotema a la altura de una cara lateral.

La apotema de la pirámide, *ap*, la apotema de la base, ap_b, y la altura de la pirámide, *h*, forman un triángulo rectángulo. Por tanto, se cumple el Teorema de Pitágoras:

$$ap^2 = ap_b^{\ 2} + h^2$$

C11. El tronco de pirámide tiene dos bases, que son polígonos iguales, pero de distinto tamaño, es decir, polígonos semejantes. La distancia entre ellas es la **altura del tronco de pirámide**.

Si la pirámide que cortamos es regular, las caras laterales del tronco de pirámide son trapecios isósceles iguales y la altura de estos trapecios es la **apotema del tronco de pirámide**.



C12. El <u>área total</u> de una pirámide es la suma de las áreas de todas las caras laterales, llamada área lateral (A_l), más el área de la base (A_b):

$$A_t = A_l + A_b$$

Si la pirámide es regular, las caras laterales son triángulos cuya base es el lado de la base, *l*, y cuya altura es la apotema de la pirámide, *ap*. Por lo tanto:

– El área lateral es la suma de las áreas de los *n* triángulos que forman las caras laterales:

$$A_l = \frac{P_b \cdot ap}{2};$$

donde P_b es el perímetro de la base.

– El área total es la suma del área lateral y el área de la base:

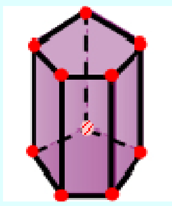
$$A_t = \frac{P_b \cdot ap}{2} + A_b$$

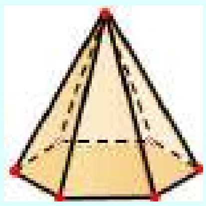
El <u>volumen</u> de una pirámide, recta o no, se calcula aplicando la fórmula siguiente, donde *h* es la altura de la pirámide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

29. Son poliedros las figuras a) y c), ya que sus caras son polígonos.

30. A continuación se señalan los vértices (●), caras (o) y aristas (/), para cada uno de los casos:

a) 

b) 

31. Un tetraedro no tiene diagonales; un cubo tiene 4 diagonales; y un prisma pentagonal regular tiene 10 diagonales.

32. Sustituyendo el número de caras y de vértices en el Teorema de Euler:

$$7 + 7 = A + 2 \Leftrightarrow A = 12$$

33. A continuación se justifica cada una de las respuestas:

a) *Verdadero*. Es la definición de poliedro convexo.

b) *Verdadero*. Es como si se apoyase la figura sobre una mesa, que sería el plano sobre el que se prolonga la cara del poliedro.

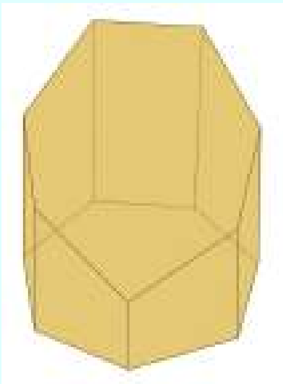
c) *Falso*. Contendrá al menos una cara que no pueda apoyarse sobre una mesa.

34. A continuación se calculan los datos para cada figura:

	V	A	C	C + V = A + 2
a)	12	24	14	14 + 12 = 24 + 2
b)	8	16	10	10 + 8 = 16 + 2

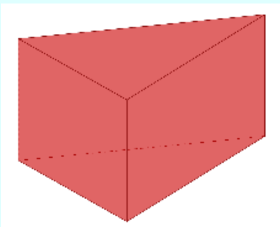
35. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Los poliedros y las comprobaciones serían:

a) 

C + V = A + 2

9 + 14 = 21 + 2

b) 

C + V = A + 2

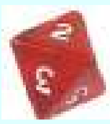
5 + 6 = 9 + 2

36. Actividad personal. A modo de ejemplo:

El desarrollo plano del antiprisma es el siguiente:

37. Además de a su forma, si atendemos al número de caras que tiene y el polígono que lo genera, sería:

Dodecaedro



Octaedro

Tetraedro

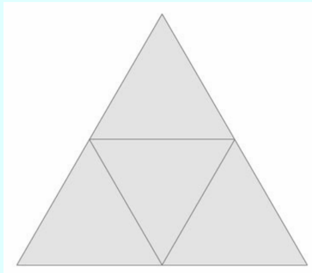
Icosaedro

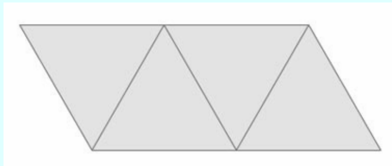
Cubo

38. Los poliedros regulares cuyas caras no son triángulos son tetraedro, octaedro e icosaedro. A continuación se describe el número de caras, aristas y vértices que tiene cada uno:

Poliedro	C	V	A
Hexaedro o Cubo	6	8	12
Dodecaedro	12	20	30

39. Sí, se pueden construir dos desarrollos planos distintos de un tetraedro regular:





40. En el hexaedro o cubo, ya que, tiene 6 caras y 12 aristas. El número de vértices es 8.

41. Para calcular la dimensión de una diagonal del octaedro basta con calcular la diagonal del cuadrado de lado el mismo que los triángulos equiláteros que lo conforman: $d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$ cm = 0,4142... cm

42. A continuación se calculan las áreas solicitadas, multiplicando el área de cada una de las caras por el número de éstas que tenga cada poliedro:

a) La altura de cada triángulo es:

$$3^2 = 1,5^2 + h^2 \Rightarrow h = 2,6 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el área de cada cara sería:

$$A_{cara} = \frac{3 \cdot 2,6}{2} = 3,9 \text{ cm}^2$$

Luego, el área del octaedro, será:

$$A_{octaedro} = 8 \cdot 3,9 = 31,2 \text{cm}^2$$

b) La altura de cada triángulo es:

$$5^2 = 2,5^2 + h^2 \Rightarrow h = 4,3 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el área de cada cara sería:

$$A_{cara} = \frac{5 \cdot 4,3}{2} = 10,75 \text{ cm}^2$$

Luego, el área del icosaedro, será:

$$A_{icosaedro} = 20 \cdot 10,75 = 215 \text{ cm}^2$$

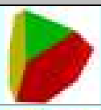
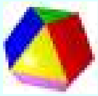
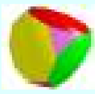
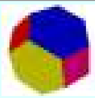
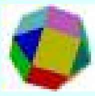
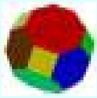
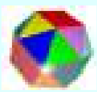
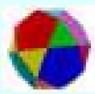
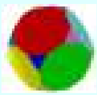
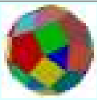
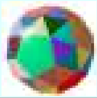
c) La apotema de cada pentágono es 4,13 cm, por lo tanto, el área de cada cara sería:

$$A_{cara} = \frac{30 \cdot 4,13}{2} = 61,95 \text{ cm}^2$$

Luego, el área del dodecaedro, será:

$$A_{dodecaedro} = 12 \cdot 61,95 = 743,4 \text{ cm}^2$$

43. Los sólidos arquimedianos son los siguientes:

Nombre	Imagen	C	A	V	Tª Euler
Tetraedro truncado		8	18	12	✓
Cuboctaedro		14	24	12	✓
Cubo truncado		14	36	24	✓
Octaedro truncado		14	36	24	✓
Rombi-cuboctaedro		26	48	24	✓
Cuboctaedro truncado		26	72	48	✓
Cubo romo		38	60	24	✓
Icosidode-caedro		32	60	30	✓
Dodecaedro truncado		32	90	60	✓
Icosaedro truncado		32	90	60	✓
Rombicosido-decaedro		62	120	60	✓
Icosidodecae-dro truncado		62	180	120	✓
Dodecaedro romo		92	150	60	✓

44. A continuación se nombra cada uno de los prismas:

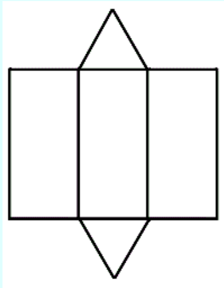
a) Prisma recto cuadrangular irregular.

b) Prisma oblicuo pentagonal.

c) Prisma oblicuo hexagonal.

45. Actividad personal. A modo de ejemplo:

El desarrollo plano de un prisma triangular recto puede ser el siguiente:



46. Se trata de un prisma octogonal; tendrá 8 caras y 2 bases; 16 vértices; y 24 aristas. Cumple con el Teorema de Euler, ya que: 10 + 16 = 24 + 2.

47. El prisma tendrá 3*n* aristas.

48. No puede tener un número impar de vértices, ya que, es el doble del número de vértices que tiene el polígono de la base.

Sin embargo, sí puede tener un número impar de aristas, dado que es el triple del número de lados del polígono de la base.

49. A continuación estudiamos cada afirmación:

a) Verdadero.

b) Falso. El único poliedro regular que es también un prisma es el cubo.

c) Falso. El cubo es un prisma y también un poliedro regular.

d) Falso. La única condición de paralelismo segura en un prisma es la de sus bases.

50. A continuación estudiamos cada afirmación:

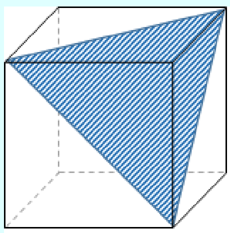
a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Verdadero.

51. Un ortoedro tiene cuatro diagonales, que tienen la misma longitud.

52. El polígono que se forma es un triángulo equilátero, por tanto, un polígono regular, tal y como se muestra en la figura:



53. Las soluciones son las siguientes:

a) El perímetro de la base es:

$$P_b = 9 \cdot 4 = 36 \text{ m}$$

Por tanto, el área lateral es:

$$A_l = 36 \cdot 16 = 576 \text{ m}^2$$

El área de una base es:

$A_b = 9^2 = 81\ m^2$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 576 + 2 \cdot 81 = 738\ m^2$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$V = A_b \cdot h = 81 \cdot 16 = 1296\ m^3$

b) El perímetro de la base es:

$P_b = 2 \cdot 30 + 36 = 96\ cm$

Por tanto, el área lateral es:

$A_l = 96 \cdot 50 = 4800\ cm^2$

El área de una base es, teniendo en cuenta que la altura, calculada con el Teorema de Pitágoras es 24 cm:

$$A_b = \frac{36 \cdot 24}{2} = 432\ cm^2$$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 4800 + 2 \cdot 432 = 5664\ cm^2$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$V = A_b \cdot h = 432 \cdot 50 = 21600\ cm^3$

c) El perímetro de la base es:

$P_b = 12 \cdot 3 = 36\ cm$

Por tanto, el área lateral es:

$A_l = 36 \cdot 15 = 540\ cm^2$

El área de una base es, teniendo en cuenta que la altura, calculada con el Teorema de Pitágoras es 10,4 cm:

$$A_b = \frac{12 \cdot 10,4}{2} = 62,35\ cm^2$$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 540 + 2 \cdot 62,35 = 664,7\ cm^2$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$V = A_b \cdot h = 62,35 \cdot 15 = 935,25\ cm^3$

d) El perímetro de la base es:

$P_b = 6 \cdot 10 = 60\ cm$

Por tanto, el área lateral es:

$A_l = 60 \cdot 8 = 480\ cm^2$

El área de una base es, teniendo en cuenta que la apotema, calculada con el Teorema de Pitágoras es 8,66 cm:

$$A_b = \frac{60 \cdot 8,66}{2} = 259,8\ cm^2$$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 480 + 2 \cdot 259,8 = 999,6\ cm^2$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$V = A_b \cdot h = 259,8 \cdot 8 = 2078,4\ cm^3$

54. Las soluciones son las siguientes:

a) El perímetro de la base es:

$P_b = 13 \cdot 4 = 52\ m$

Por tanto, el área lateral es:

$A_l = 52 \cdot 26 = 1352\ m^2$

El área de una base es:

$A_b = 13^2 = 169\ m^2$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 1352 + 2 \cdot 169 = 1690\ m^2$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$V = A_b \cdot h = 169 \cdot 26 = 4394\ m^3$

b) El perímetro de la base es:

$P_b = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 14 = 60\ cm$

Por tanto, el área lateral es:

$A_l = 60 \cdot 22 = 1320\ cm^2$

El área de una base es:

$A_b = 14 \cdot 16 = 224\ cm^2$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 1320 + 2 \cdot 224 = 1768\ cm^2$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$V = 14 \cdot 16 \cdot 22 = 4928\ cm^3$

c) El área lateral es:

$A_l = 4 \cdot a^2 = 4 \cdot 9^2 = 324\ cm^2$

El área total:

$A_t = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 9^2 = 486\ cm^2$

Por otro lado, el volumen será:

$V = a^3 = 9^3 = 729\ cm^3$

55. Puesto que se trata de un prisma, comenzamos calculando el perímetro de la base:

$P_b = 2 \cdot 14 + 2 \cdot 12,4 = 52,8\ cm$

Por tanto, el área lateral es:

$A_l = 52,8 \cdot 0,4 = 21,12\ cm^2$

El área de una base es:

$A_b = 12,4 \cdot 14 = 173,6\ cm^2$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 21{,}12 + 2 \cdot 173{,}6 = 368{,}32 \text{ cm}^2$$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$$V = 12{,}4 \cdot 14 \cdot 0{,}4 = 69{,}44 \text{ cm}^3$$

56. El área total:

$$A_t = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot 13^2 = 1014 \text{ cm}^2$$

Por otro lado, el volumen será:

$$V = a^3 = 13^3 = 2197 \text{ cm}^3$$

57. Sustituyendo en la fórmula del área del cuadrado, se despeja el valor de la arista:

$$A_{cara} = a^2 = 196 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \sqrt{196} = 14 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el volumen será:

$$V = a^3 = 14^3 = 2744 \text{ cm}^3$$

58. Sustituyendo en la fórmula del área total, se despeja el valor de la arista:

$$A_t = 6a^2 = 1350 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \sqrt{225} = 15 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el volumen será:

$$V = a^3 = 15^3 = 3375 \text{ cm}^3$$

59. Sustituyendo en la fórmula del volumen, se despeja el valor de la altura:

$$V = a \cdot b \cdot h = 15 \cdot 12 \cdot h = 3960 \text{ cm}^3 \Rightarrow h = 22 \text{ cm}$$

60. Sustituyendo en la fórmula del área total, se despeja el valor de la arista:

$$A_t = 6a^2 = 294 \text{ cm}^2 \Rightarrow a = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el volumen será:

$$V = a^3 = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$$

61. Sustituyendo en la fórmula del volumen, se calcula el valor del área de la base:

$$V = A_b \cdot h = A_b \cdot 7 = 301 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_b = 43 \text{ cm}^2$$

Ahora, el área lateral será:

$$A_l = P_b \cdot h = 25 \cdot 7 = 175 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, el área total es:

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 175 + 2 \cdot 43 = 261 \text{ cm}^2$$

62. Suponiendo que la arista sea *a*, sustituyendo en el teorema de Pitágoras, se calcula su valor:

$$8^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 64 = 2a^2 \Rightarrow a = 5{,}65 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el área total es:

$$A_t = 6a^2 = 6 \cdot 5{,}65^2 = 192 \text{ cm}^2$$

63. Suponiendo que la altura del ortoedro sea *h*, sustituyendo en la fórmula de la diagonal, se calcula:

$$24 = \sqrt{8^2 + 6^2 + h^2} \Rightarrow 476 = h^2 \Rightarrow h = 21{,}87 \text{ cm}$$

El perímetro de la base sería:

$$P_b = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 28 \text{ cm}$$

Por tanto, el área lateral es:

$$A_l = 28 \cdot 21{,}87 = 612{,}36 \text{ cm}^2$$

El área de una base es:

$$A_b = 8 \cdot 6 = 48 \text{ cm}^2$$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 612{,}36 + 2 \cdot 48 = 708{,}36 \text{ cm}^2$$

Por otro lado, el volumen del ortoedro sería:

$$V = 8 \cdot 6 \cdot 21{,}87 = 1049{,}76 \text{ cm}^3$$

64. A continuación se nombra cada una de las pirámides:

a) Pirámide recta heptagonal.

b) Pirámide recta triangular.

c) Pirámide oblicua cuadrangular.

65. A continuación estudiamos cada afirmación:

a) Falso. El tetraedro es una pirámide y, además, es un poliedro regular.

b) Falso. Los lados tienen que ser todos iguales para que sea un poliedro regular y, sin embargo, una pirámide puede ser regular siendo su base un polígono distinto de los triángulos de sus caras.

c) Verdadero.

d) Verdadero. El tetraedro.

66. El número de aristas coincide con el número de lados de la base. Como mínimo, concurren tres aristas, ya que, el polígono más pequeño es el triángulo.

67. No, porque incluso teniendo todas las aristas laterales iguales, la base puede ser irregular, y por lo tanto la pirámide no sería regular tampoco.

68. Sí, se trataría de un tetraedro.

69. Falso, ya que, si la base es por ejemplo un trapecio, sería una pirámide recta, pero no regular, puesto que la base no es un polígono regular.

70. Sí puede tener un número par de vértices cuando la base tiene un número impar de lados. Sin embargo, no puede tener un número impar de aristas, ya que, el total de aristas de una pirámide es el doble de lados que tiene el polígono de la base.

71. Son paralelas y son, además, polígonos semejantes, ya que, tendrían la misma forma y sus lados serían proporcionales.

72. Siempre es mayor la apotema de la pirámide, ya que, es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por la altura de la pirámide y la apotema de la base.

73. No, ya que, la altura de una de las caras es la apotema de la pirámide y, sabemos que es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por la altura de la pirámide y la apotema de la base. Tampoco ocurriría en el caso en que la pirámide no fuese regular, ya que, se sigue tratando de una pirámide recta.

74. El perímetro de la base sería:

$$P_b = 4 \cdot 6 \Rightarrow P_b = 24 \text{ m}$$

El área lateral es:

$$A_l = \frac{24 \cdot 9}{2} \Rightarrow A_l = 108 \text{ m}^2$$

El área de la base es:

$$A_b = 6^2 = 36 \text{ m}^2$$

Luego, el área total es:

$$A_t = 36 + 108 = 144 \Rightarrow A_t = 144 \text{ m}^2$$

Calculamos la altura de la pirámide:

$$9^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = 8,48 \text{ m}$$

Y, el volumen de la pirámide, es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 8,48 \Rightarrow V = 101,8 \text{ m}^3$$

75. El perímetro de la base sería:

$$P_b = 3 \cdot h \Rightarrow P_b = 18 \text{ cm}$$

Calculando la apotema de la pirámide con el Teorema de Pitágoras (6,5 cm), el área lateral es:

$$A_l = \frac{18 \cdot 6,5}{2} \Rightarrow A_l = 58,5 \text{ m}^2$$

Teniendo en cuenta que la base es un hexágono regular y el valor del perímetro obtenido, el lado medirá 3 cm. Por tanto, calculando la apotema de la base con el Teorema de Pitágoras (2,6 cm), el área de la base es:

$$A_b = \frac{18 \cdot 2,6}{2} = 23,4 \text{ cm}^2$$

Luego, el área total es:

$$A_t = 58,5 + 23,4 = 81,9 \text{ cm}^2$$

Y, el volumen de la pirámide, es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 23,4 \cdot 6 \Rightarrow V = 46,8 \text{ cm}^3$$

76. La relación que existe entre el volumen de una pirámide y el de un prisma es:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{V_{\text{prisma}}}{3}$$

77. El perímetro de la base sería:

$$P_b = 12 \cdot 4 \Rightarrow P_b = 48 \text{ m}$$

El área lateral es:

$$A_l = 48 \cdot 20,7 = 993,6 \text{ m}^2$$

El área de la base es:

$$A_b = \frac{48 \cdot 7,5}{2} = 180 \text{ m}^2$$

Y, el volumen de la torre, es:

$$V = 180 \cdot 20,7 \Rightarrow V = 3726 \text{ m}^3$$

78. Ya que se trata de un prisma, comenzamos calculando el perímetro de la base:

$$P_b = 6 \cdot 60 = 360 \text{ cm}$$

Por tanto, el área lateral es:

$$A_l = 360 \cdot 300 = 108\,000 \text{ cm}^2 = 10,8 \text{ m}^2$$

Calculando la apotema de la base con el Teorema de Pitágoras (51,9 cm), el área de la base sería:

$$A_b = \frac{360 \cdot 51,9}{2} = 9342 \text{ cm}^2$$

Por tanto, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$$V = 9342 \cdot 300 = 2\,802\,600 \text{ cm}^3 = 2,8 \text{ m}^3$$

79. Sustituyendo los datos conocidos en la fórmula del volumen y siendo *l* el lado de la base, se tiene:

$$V = A_b \cdot h = l^2 \cdot 16 = 0,36 \text{ m}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l^2 = 0,0225 \Rightarrow l = 0,15 \text{ m}$$

80. Calculando la apotema de la base con el Teorema de Pitágoras (1,73 mm), el volumen del brillante sería:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{12 \cdot 1,73}{2}}_{A_b} \cdot \underbrace{4}_{h} \Rightarrow V = 13,84 \text{ mm}^3$$

81. Ejercicio resuelto en el libro.

82. En primer lugar, calculamos la altura de la base (h_b), utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$6^2 = 3^2 + {h_b}^2 \Rightarrow h_b = 5,19 \text{ cm}$$

Luego, el área de la base, será:

$$A_b = \frac{6 \cdot 5,19}{2} \Rightarrow A_b = 15,57 \text{ cm}^2$$

Puesto que conocemos la altura de la base, se puede calcular la altura de la pirámide:

$$6^2 = \underbrace{3,46^2}_{\frac{2}{3}h_b} + {h_p}^2 \Rightarrow h_p = 4,9 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el volumen será:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 15,57 \cdot 4,9 \Rightarrow V = 25,43 \text{ cm}^3$$

83. Teniendo en cuenta que el área de cada cara es:

$$A_{cara} = 4^2 = 16 \text{ cm}^2$$

El área lateral será:

$$A_l = 20 \cdot 16 = 320 \text{ cm}^2$$

El área total:

$$A_t = 30 \cdot 16 = 480 \text{ cm}^2$$

Y, el volumen:

$$V = 7 \cdot 4^3 = 448 \text{ cm}^3$$

84. El volumen del tetrabrik equivalente sería 1000 cm^3. Luego, como se trata de un ortoedro, sustituyendo los datos conocidos en la fórmula del volumen, se tendría que, la altura (h) es:

$V = 1000 = 8 \cdot 6,25 \cdot h \Rightarrow h = 20 \text{ cm}$

85. Ejercicio resuelto en el libro.

86. En primer lugar, para calcular el volumen total, se observa que serían 6 ortoedros apilados, de dimensiones 12 cm, 4 cm y 4 cm. Por lo tanto, se calculará el volumen de uno de ellos ($V_{escalón}$) para, posteriormente, calcular el volumen total (V_t):

$V_{\text{escalón}} = 12 \cdot 4 \cdot 4 = 192 \text{ cm}^3$

Luego, el volumen total será:

$V_{\text{escalón}} = 192 \cdot 6 = 1152 \text{ cm}^3$

Procediendo de manera análoga, observamos que la alfombra deberá cubrir 6 rectángulos iguales, de dimensiones 12cm y 4 cm. Por lo tanto, la superficie que ha de tener será:

$A = 6 \cdot (12 \cdot 4) = 288 \text{ cm}^2$

87. Calculamos primero el volumen del prisma hexagonal (V_{hex}), teniendo en cuenta que la apotema de la base es 12,12 cm (Tª Pitágoras):

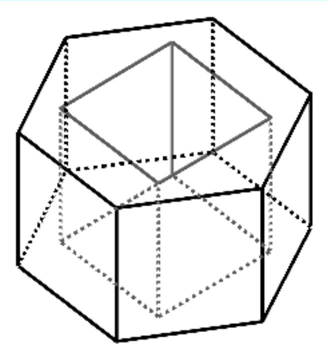
$V_{\text{hex}} = \dfrac{84 \cdot 12,12}{2} \cdot 20 = 10184,46 \text{ cm}^3$

A continuación, se calcula el volumen del prisma cuadrangular (V_{cuad}):

$V_{\text{cuad}} = 14^2 \cdot 20 = 3920 \text{ cm}^3$

Luego, el volumen total se obtendrá de restar el volumen del prisma cuadrangular al del hexagonal:

$V = V_{\text{hex}} - V_{\text{cuad}} = 6264,46 \text{ cm}^3$



88. Las soluciones son las siguientes:

a) El volumen de cada dado sería:

$V = 1,2^3 = 1,728 \text{ cm}^3$

b) Las cajas con 18 cm de altura, tienen un volumen de:

$V_{18} = 18 \cdot 10^2 = 1800 \text{ cm}^3$

Por lo tanto, se podrán empaquetar 1041 dados en cada una. Sin embargo, si las cajas son de 17 cm de altura, el volumen es:

$V_{17} = 17 \cdot 10^2 = 1700 \text{ cm}^3$

Por lo tanto, se podrán empaquetar 983 dados en cada una.

89. El volumen del bloque sería:

$V = 3^3 = 27 \text{ m}^3 = 27\,000 \text{ dm}^3$

Teniendo en cuenta el peso de cada dm^3, el peso total del bloque será:

$P = 27\,000 \cdot 7 = 189\,000 \text{ kg} = 189 \text{ T}$

90. El volumen de la caja de galletas sería:

$V_{\text{caja}} = 20^3 = 8000 \text{ cm}^3 = 8 \text{ dm}^3$

El volumen del contenedor es:

$V_{\text{contenedor}} = 3 \cdot 3 \cdot 8 = 72 \text{ m}^3 = 72000 \text{ dm}^3$

Luego, el número de cajas que puede transportar cada contenedor es de 9000 unidades.

91. El perímetro de la base sería:

$P_b = 6 \cdot 8 \Rightarrow P_b = 48 \text{ cm}$

El área lateral es:

$A_l = \dfrac{48 \cdot 12}{2} \Rightarrow A_l = 288 \text{ cm}^2$

Calculando la apotema de la base con el Teorema de Pitágoras (6,92 cm), el área de la base es:

$A_b = \dfrac{48 \cdot 6,92}{2} \Rightarrow A_b = 166,08 \text{ cm}^2$

Luego, el área total es:

$A_t = 288 + 166,08 = 454,08 \text{ cm}^2$

Ésa será la cantidad de cartón necesario para fabricar cada caja.

92. Porque, al unir cuatro cuadrados por un vértice, se forma un plano.

93. Para formar un ángulo sólido, son necesarios al menos 3 polígonos concurrentes, pero la suma de los ángulos debe ser menor que 360º, para que no lleguen a formar un plano. Por lo tanto, sólo pueden ser esos polígonos el triángulo, el cuadrado y el pentágono, puesto que, para el hexágono ya es imposible, porque los ángulos interiores miden 120º y tres hexágonos sumarían 360º.

94. No, ya que, no concurrirían en el vértice de la pirámide.

95. Ejercicio resuelto en el libro.

96. Calcularemos el volumen de cada una de las piezas por separado para, después, sumarlas y obtener el volumen total (V_t).

En primer lugar, calculamos el volumen de los cubos de arista 6 cm que sería:

$V_{\text{cubo}} = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$

A continuación, calculamos el volumen de la cuesta. Si nos fijamos bien, se observa que corresponde a medio cubo de arista 6 cm. Por lo tanto, calcularemos el volumen (V_{cuesta}) como la mitad del volumen del cubo:

$V_{\text{cuesta}} = \dfrac{1}{2} \cdot 216 = 108 \text{ cm}^3$

Ahora, calculamos el volumen de la pirámide:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 9 = 108\ \text{cm}^3$$

Por último, calculamos el volumen de la pirámide truncada ($V_{truncada}$), teniendo en cuenta que sería la resta entre la pirámide calculada anteriormente y una pirámide de base cuadrada de lado 3 cm y de altura 5 cm:

$$V_{\text{truncada}} = 108 - \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 5 = 93\ \text{cm}^3$$

Así, el volumen total sería:

$$V_t = V_{\text{cuesta}} + V_{\text{truncada}} + V_{\text{pirámide}} + 2 \cdot V_{\text{cubo}} = 741\ \text{cm}^3$$

97. El volumen de la pirámide mayor (V_M) sería:

$$V_M = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 12 = 256\ \text{cm}^3$$

Teniendo en cuenta que son semejantes y la constante de proporcionalidad dada en el enunciado, se tiene que la altura de la pirámide menor es 9 cm y, la arista de la base mide 6 cm. Por tanto, el volumen (V_m) sería:

$$V_m = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 9 = 108\ \text{cm}^3$$

La diferencia entre los volúmenes es de 148 cm^3.

98. En primer lugar, calculamos el volumen de la piscina:

$$V = 50 \cdot 18 \cdot 3 = 2700\ \text{m}^3 = 2\,700\,000\,(\text{dm}^3)$$

El caudal de cada grifo, expresado en *l/h*, es de 216 000 *l/h*. Como hay dos grifos, la cantidad de litros que llenan por hora sería 432 000. Por tanto, en llenar la piscina (2 700 000 *l*), se tardaría 6,25 horas.

99. Calculamos, en primer lugar, el área lateral de toda la cocina:

$$A_l = 2 \cdot (2{,}5 \cdot 2{,}25) + 2 \cdot (2{,}5 \cdot 3{,}75) = 30\ \text{m}^2$$

A continuación, calculamos el área de la puerta (A_{puerta}) y el área de la ventana ($A_{ventana}$):

$$A_{\text{puerta}} = 2{,}1 \cdot 0{,}85 = 1{,}785\ \text{m}^2$$

$$A_{\text{ventana}} = 1{,}35^2 = 1{,}8225\ \text{m}^2$$

Luego, el área disponible para situar azulejos sería de:

$$A_t = A_l - A_{\text{puerta}} - A_{\text{ventana}} = 26{,}4\text{m}^2 = 2640\ \text{dm}^2$$

Como el área de cada azulejo es de:

$$A_{\text{azulejo}} = 1{,}5^2 = 2{,}25\ \text{dm}^2$$

El número de azulejos necesarios, como mínimo, sería de 1174.

100. Calculamos previamente el volumen de cada uno de los prismas, de fuera hacia dentro, V_1 es el cubo rojo de arista 4 cm, V_2 es el prisma azul cuya base tiene una arista de 2,83 cm y V_3 es el prisma rojo cuya base tiene una arista de 2 cm:

$$V_1 = 4^3 = 64\ \text{cm}^3$$

$$V_2 = 2{,}83^2 \cdot 4 = 32\ \text{cm}^3$$

$$V_3 = 2^2 \cdot 4 = 16\ \text{cm}^3$$

Por lo tanto, ahora calculamos el volumen de cada color que es necesario para construir un cubo:

$$V_{\text{rojo}} = V_1 - V_2 + V_3 = 48\ \text{cm}^3$$

$$V_{\text{azul}} = V_2 - V_3 = 16\ \text{cm}^3$$

A continuación se responden a cada una de las preguntas:

a) Para construir 24 cubos, se necesitarán 1152 cm^3 de polietileno rojo y 384 cm^3 de polietileno azul.

b) El precio por cada cm^3, después de aplicar el descuento, sería de 17 €/cm^3 para el polietileno azul y 19,20 €/cm^3 para el rojo. Por lo tanto, los 24 cubos costarían 28 646,4 €.

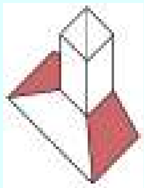
101. Comenzaremos calculando la superficie de cada una de las partes de la campana extractora:

Primero calculamos el área del plano posterior que estaría adosado a la pared, y que está formado por un rectángulo y un trapecio:

$$A_{\text{trapecio posterior}} = \frac{60+25}{2} \cdot 25 = 1062{,}5\ \text{cm}^2$$

$$A_{\text{rectángulo posterior}} = 25 \cdot 50 = 1250\ \text{cm}^2$$

Continuamos calculando el área de los trapecios laterales:

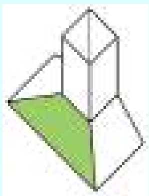


Para ello hallamos primero su altura:

$$h = \sqrt{25^2 + 17{,}5^2} = \sqrt{625 + 306{,}25} = 30{,}52\ \text{cm}$$

$$A_{\text{trapecio lateral}} = \frac{50+15}{2} \cdot 31{,}52 = 1024{,}4\ \text{cm}^2$$

Calculamos ahora el área del trapecio frontal:

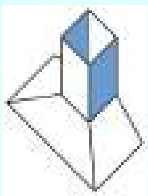


Para ello hallamos primero su altura:

$$h = \sqrt{25^2 + 35^2} = \sqrt{625 + 1225} = 43{,}01\ \text{cm}$$

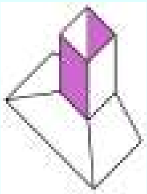
$$A_{\text{trapecio frontal}} = \frac{60+25}{2} \cdot 43{,}01 = 1827{,}93\ \text{cm}^2$$

El área de cada rectángulo lateral es:



$A_{\text{rectángulo lateral}} = 15 \cdot 50 = 750 \text{ cm}^2$

Por último, el área del rectángulo frontal es igual al área del rectángulo posterior que calculamos al principio:



$A_{\text{rectángulo frontal}} = A_{\text{rectángulo posterior}} = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ cm}^2$

a) Para calcular la medida de la superficie de la plancha, sumamos todos los valores de las áreas calculados hasta ahora:

$$A_{\text{total}} = 1062,5 + 2 \cdot 1250 + 2 \cdot 1024,4 + 1827,93 +$$
$$+2 \cdot 750 = 8939,23 \text{ cm}^2$$

b) Calculamos el volumen de la plancha:

$$V_{\text{total}} = 8939,23 \cdot 0,3 = 2681,77 \text{ cm}^3 =$$
$$= 0,00268177 \text{ m}^3$$

Calculamos el peso de esta cantidad de acero:

$$0,00268177 \cdot 7850 = 21,05 \text{ kg}$$

c) El acero utilizado para la campana costaría:

$$21,05 \cdot 2,3 = 48,42 \text{ €}$$

Desarrolla tus competencias

1. Actividad de investigación personal:

La Pirámide Solar se ideó como medio para resguardar a los vehículos que componen la flota de vehículos eléctricos del ayuntamiento de Madrid, y a su vez para proporcionar la energía necesaria para su funcionamiento.

De 38 metros de arista en la base y de 18 metros de altura en su cúspide, la pirámide está forrrada en sus caras por un muro cortina de paneles fotovoltáicos. La energía solar captada durante el día se transforma en energía eléctrica por medio de unas inversores en corriente continua.

Al final de la jornada de trabajo los vehículos recargan sus baterías utilizando la energía almacenada.

2. En primer lugar, calculamos el área total de la pirámide real como:

$$A_l = A_b + A_l = 1444 + \frac{152 \cdot 26,17}{2} = 3432,92 \text{ m}^2$$

Disponemos de 4 láminas, que suponen una superficie de 3600 cm^2. Si convertimos ambas medidas a la misma unidad (dm^2), quedaría una escala, entre sus áreas, de 9:85823 que, haciendo su raíz cuadrada y aproximando por defecto, quedaría una escala de 1 : 97.

3. Cada uno de los apartados se resuelve como:

a) Para calcular la medida de la arista, se forma el triángulo entre la altura, la base de la torre (menos 5 m, que son lo que se solapan) y la arista que se pide calcular:

$$a^2 = 30^2 + 115^2 \Rightarrow a = 118,8 \text{ m}$$

b) La superficie total de cada torre se obtiene como:

$$A_t = 2 \cdot A_b + A_l = 2 \cdot 35^2 + (4 \cdot 35) \cdot 115 = 1735 \text{ m}^2$$

4. Resolvemos:

a) La razón entre las dos áreas sería de 1:490000 m^2. Por lo tanto, la maqueta tendrá una superficie de 0,035357 m^2.

b) El área total entre las dos maquetas será de 0,070714 m^2. Luego, para pintarlas, se necesitará 0,01179 *l* de pintura.

c) La cantidad de pintura necesaria sería de 11,79 *ml*, por lo que, deberían de comprar 1 bote de pintura y, costaría 4 €.

5. Cada uno de los apartados se resuelve como:

a) Las aristas básicas medirán 0,05 m; la altura será de 0,164 m; y, las aristas laterales medirán 0,1697 m.

b) La superficie total, utilizando las medidas obtenidas, será de:

$$A_t = 2 \cdot A_b + A_l = 2 \cdot 0,05^2 + (4 \cdot 0,05) \cdot 0,164 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_t = 0,0378 \text{m}^2$$

6. Ambas situaciones representan dos triángulos rectángulos semejantes: uno formado por la Giralda y su sombra y, el otro, por la persona y su sombra. Llamando *h* a la altura de la Giralda y teniendo en cuenta que las razones de semejanza entre altura y longitud de la sombra han de ser iguales, se plantea (todo expresado en m):

$$\frac{1,80}{0,8} = \frac{h}{45} \Rightarrow h = 101,25 \text{ m}$$

7. Calculando la altura de la maqueta según la escala dada, se obtiene $h_{maqueta}$ = 10125/260 = 38,9 cm.

Ninguna de las dos opciones nos serviría, puesto que la altura de la maqueta es mayor que cualquier de los lados de las cajas propuestas. La respuesta correcta es, por tanto, la D.

Evaluación de estándares

1. En la siguiente tabla se muestran los nombres y los polígonos que forman las caras:

Poliedro	Caras
Tetraedro	Triángulos
Cubo	Cuadrados
Octaedro	Triángulos
Dodecaedro	Pentágonos
Icosaedro	Triángulos

2. A continuación se resuelve cada apartado:

a) Cóncavo. El teorema de Euler sería: 6 + 6 = 10 + 2.

b) Cóncavo. El teorema de Euler sería:
7 + 10 = 15 + 2.

c) Convexo. El teorema de Euler sería:
   8 + 12 = 18 + 2.

3. Los desarrollos corresponden, en cada caso, a las figuras:

a) Octaedro.

b) Pirámide recta regular hexagonal.

4. El número de vértices es 9; el número de aristas laterales, 8; y la base es un octógono.

5. El perímetro de la base es:

$P_b = 6 \cdot 6 = 36 \text{ cm}$

Por tanto, el área lateral es:

$A_l = 36 \cdot 12 = 432 \text{ cm}^2$

El área de una base es:

$$A_b = \frac{36 \cdot \sqrt{27}}{2} = 18\sqrt{27} \text{ cm}^2 = 93,53 \text{ cm}^2$$

Sumando el área lateral con el doble del área de la base, obtenemos el área total:

$A_t = A_l + 2 \cdot A_b = 432 + 2 \cdot 93,53 = 619,06 \text{ cm}^2$

Por otro lado, multiplicando el área de la base por la altura del prisma, hallamos el volumen:

$V = A_b \cdot h = 93,53 \cdot 12 = 1122,36 \text{ cm}^3$

6. Calculamos la apotema de la pirámide:

$ap^2 = 25^2 + 9^2 \Rightarrow ap = 26,57 \text{ cm}$

El área lateral es:

$$A_l = \frac{72 \cdot 26,57}{2} \Rightarrow A_l = 956,52 \text{ cm}^2$$

El área de la base es:

$A_b = 18^2 \Rightarrow A_b = 324 \text{ cm}^2$

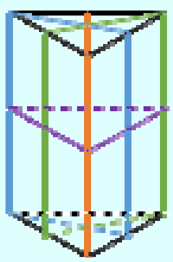
Luego, el área total es:

$A_t = 956,52 + 324 = 1280,52 \text{ cm}^2$

Y el volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 324 \cdot 25 \Rightarrow V = 2700 \text{ cm}^3$$

7. Los planos de simetría serían 4:



8. Dividimos la cabaña en un prisma triangular (tejado) y un ortoedro, de forma que podemos calcular cada área por separado.

En primer lugar, calculamos la del ortoedro (A_o). Comenzando por el área lateral:

$A_l = (2 \cdot 1,8 + 2 \cdot 3,4) \cdot 0,3 = 3,12 \text{ m}^2$

El área de la base (suelo), sería:

$A_b = 1,8 \cdot 3,4 = 6,12 \text{ m}^2$

Por lo tanto, el área del ortoedro será:

$A_o = 3,12 + 6,12 = 9,24 \text{ m}^2$

Continuando con la superficie del prisma (A_p), el área de las bases sería:

$$A_b = 2 \cdot \frac{1,8 \cdot 1,7}{2} = 3,06 \text{ m}^2$$

El área lateral, contando sólo con que sería de dos de las caras y que sus dimensiones son 3,4 y 1,92 (Teorema de Pitágoras):

$A_l = 2 \cdot 1,92 \cdot 3,4 = 13,06 \text{ m}^2$

Por lo tanto, el área del prisma será:

$A_p = 3,06 + 13,06 = 16,12 \text{ m}^2$

Y, la cantidad de tela necesaria, será:

$A_t = 9,24 + 16,12 = 25,36 \text{ m}^2$

9. Dividimos la figura en 3 cuerpos distintos: (V_1) un cubo de arista 4 cm; (V_2) un ortoedro de dimensiones 4 cm, 15 cm y 4 cm; y (V_3) medio ortoedro de dimensiones 9 cm, 15 cm y 8 cm. A continuación calculamos, por separado, cada uno de los volúmenes:

$V_1 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$

$V_2 = 4^2 \cdot 15 = 240 \text{ cm}^3$

$$V_3 = \frac{9 \cdot 15 \cdot 8}{2} = 540 \text{ cm}^3$$

Luego, el volumen total (V_t) de la figura será:

$V_t = 64 + 240 + 540 = 844 \text{ cm}^3$

10. Dividimos la figura en una pirámide y un cubo. Calcularemos su área y volumen por separado para, después, obtener los totales. Comenzamos con la pirámide. En primer lugar, calculamos lo que mide la arista básica:

$x^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow x = 2,83 \text{ cm}$

El perímetro de la base sería:

$P_b = 4 \cdot 2,83 \Rightarrow P_b = 11,32 \text{ cm}$

Calculamos su apotema:

$ap^2 = 5^2 + 1,415^2 \Rightarrow ap = 5,20 \text{ cm}$

El área lateral es:

$$A_l = \frac{11,32 \cdot 5,2}{2} \Rightarrow A_l = 29,43 \text{ cm}^2$$

El área de la base la necesitaremos más adelante para restarla al área del cubo y es:

$A_b = 2,83^2 = 8 \text{ cm}^2$

Luego, el área total de la pirámide (A_p) es:

$A_p = A_l = 29,43 \text{ cm}^2$

Y, el volumen de la pirámide (V_p), es:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 5 \Rightarrow V_p = 13,33 \text{ cm}^3$$

Con respecto al cubo, su área total (A_c) será:

$$A_c = 6 \cdot 4^2 - 8 = 88 \text{ cm}^2$$

Y, su volumen (V_c):

$$V_c = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, el volumen y área total, serán:

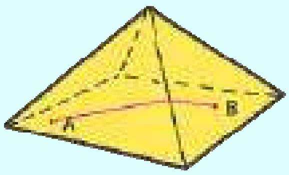
$$A_t = 29,43 + 88 = 117,43 \text{ cm}^2$$

$$V_t = 13,33 + 64 = 77,33 \text{ cm}^3$$

Estrategia e ingenio

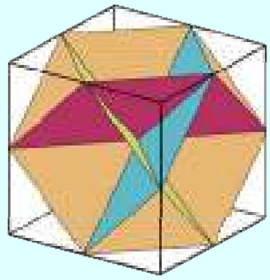
El camino más corto

Actividad personal. A modo de ejemplo, dibujaremos un recorrido que estaría contenido en un plano perpendicular a la arista lateral que se encuentra entre los dos puntos y que contenga también a los propios puntos.



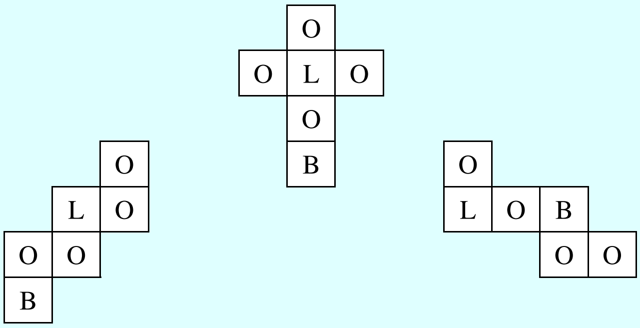
Secciones de un cubo

El hexágono será regular, ya que todos sus lados son iguales al coincidir con la distancia entre los puntos medios de dos lados contiguos de los cuadrados (también iguales) de un cubo.



¡Que viene el lobo!

Los desarrollos serían los siguientes:



SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 9-3 de la guía)

5. Utilizando el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa sería:

$$h^2 = 14^2 + 23^2 \Rightarrow h^2 = 725 \Rightarrow h = 26,9 \text{ cm}$$

6. En el caso del primer cuerpo, el número de cubos pequeños que tiene es 60, ya que, tiene 3 de alto, 5 de ancho y 4 de profundidad. Por lo tanto, el volumen sería 60 cm^3. El segundo cuerpo, tiene 6 cubos pequeños en cada una de sus dimensiones, por lo que, lo componen un total de 216 cubos y, su volumen sería 216 cm^3.

(Viene de la página 9-11 de la guía)

18. Sustituyendo los datos en la fórmula del volumen de un prisma, se tiene:

$$324 = 6^2 \cdot h$$

Por lo tanto, despejando, se obtiene que la altura vale:

$$h = 9 \text{ cm}$$

19. En primer lugar, se calcula el área total (A_t) a pintar, que sería la suma entre el área de las paredes (A_1) y el área del techo (A_2)

$$A_1 = 2 \cdot (14 \cdot 8) + 2 \cdot (20 \cdot 8) = 544 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 14 \cdot 20 = 280 \text{ m}^2$$

$$A_t = A_1 + A_2 = 544 + 280 = 824 \text{ m}^2$$

Por lo tanto, la superficie a pintar es, en total, 824 m^2. Teniendo en cuenta que, con un bote de pintura, se cubren 32 m^2, se necesitarán, **26 botes de pintura** que, a 9€ cada uno, supone que **costará pintar la nave 234€**.

(Viene de la página 9-15 de la guía)

La apotema de la pirámide es:

$$ap^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow ap = 5,38 \text{ cm}$$

Por tanto, el área lateral de la pirámide es:

$$A_l = \frac{16 \cdot 5,38}{2} = 43,04 \text{ cm}^2$$

Y, el área total, se obtendrá como:

$$A_t = 16 + 112 + 43,04 = 171,04 \text{ cm}^2$$

A continuación, se calcula el **volumen** como suma de los volúmenes del ortoedro y la pirámide:

$$V_t = V_{ortoedro} + V_{pirámide} = (4 \cdot 4 \cdot 7) + \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 5 =$$

$$= 112 + 26,6 = 138,6 \text{ cm}^3$$

b) Comenzamos calculando el **área total**, que se obtendrá multiplicando el área de cada cuadrado por el número total de ellos, que es 36:

$$A_t = 36 \cdot 2^2 = 144 \text{ cm}^2$$

A continuación, calculamos el **volumen**, que se obtendrá multiplicando el volumen de cada cubito por el número total de ellos, que es 10:

$$V = 10 \cdot 2^3 = 80 \text{ cm}^3$$

28. Comenzamos calculando el **área total** de la figura. Puesto que todas las caras son triángulos equiláteros iguales, de 8 cm de lado, calcularemos el área total multiplicando el área de una cara por el número total de ellas, que es 10. Para ello, en primer lugar se calcula la apotema de la pirámide, que coincide con la altura del triángulo que forma cada cara:

$$8^2 = ap^2 + 4^2 \Rightarrow ap = 6,9 \text{ cm}$$

Por lo tanto, el área de cada cara es:

$$A_{cara} = \frac{8 \cdot 6,9}{2} = 27,6 \text{ cm}^2$$

Luego, el área total de la figura será:

$$A_t = 10 \cdot 27,6 = 276 \text{ cm}^2$$

A continuación, calculamos el **volumen total**. Para ello, primero calcularemos el volumen del tetraedro. El área de la base la conocemos (27,6 cm^2), luego el volumen será:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} \cdot 27,6 \cdot 6,5 = 59,8 \text{ cm}^3$$

Para calcular el volumen del octaedro, lo dividiremos en dos pirámides de base cuadrangular, cuya altura sería de 5,62 cm (Teorema de Pitágoras) y su volumen sería:

$$V_{octaedro} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot 5,62 \right) = 239,79 \text{ cm}^3$$

Luego, el volumen total de la figura, será:

$$V_t = 59,8 + 239,79 = 299,59 \text{ cm}^3$$

Direcciones de Internet

Tiching	Webs
http://www.tiching.com/747432	https://www.youtube.com/watch?v=VkFTCrMfDa8
http://www.tiching.com/747433	http://conteni2.educarex.es/mats/11814/contenido/
http://www.tiching.com/747434	https://www.geogebra.org/m/ws3mSZGG
http://www.tiching.com/747435	https://www.youtube.com/watch?v=3gWNfO1Igvs
http://www.tiching.com/747436	http://www.vitutor.com/geo/esp/f_3e.html
http://www.tiching.com/747437	https://www.geogebra.org/m/URkxftjt
http://www.tiching.com/747438	https://www.youtube.com/watch?v=Z9HUSDwyuVQ

INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

- La finalidad de esta unidad es continuar el estudio de las figuras geométricas espaciales, en particular de los cuerpos redondos y especialmente de aquellos conocidos como cuerpos de revolución.

En primer lugar leeremos el texto introductorio y lo comentaremos con el alumnado siguiendo este cuestionario:

– *¿Qué son entonces los cuerpos redondos?*

– *¿Tendrá elementos parecidos a aquellos de los poliedros?*

– *¿Qué otros objetos de la vida cotidiana pueden ser cuerpos redondos??*

– *¿Son útiles los cuerpos redondos?*

- A continuación prestaremos atención a la imagen de presentación, al índice de contenidos de esta unidad y al esquema que los relaciona:

– *¿Se te ocurren ejemplos de objetos cuya forma se base un cilindro, un cono o una esfera?*

– *¿Qué estamos viendo en la fotografía de esta presentación del tema?¿Cuántos cuerpos redondos podemos encontrar en ella?*

Empezamos la unidad

- Como introducción y repaso de ciertos conceptos que se desarrollarán a lo largo de la unidad, se proponen una serie de actividades, cuyos objetivos particulares son:

– La actividad 1 revisa el nombre de las figuras planas más sencillas, el rectángulo, el triángulo y el círculo.

– En la actividad 2 se repasa el algoritmo para calcular el área de un rectángulo conocidos sus dos lados.

– La actividad 3 revisa el cálculo del área de un triángulo conocidas su base y su altura.

– En la actividad 4 repasaremos la fórmula necesaria para calcular el área del círculo a partir de su radio, imprescindible para trabajar los ejercicios de esta unidad.

– La actividad 5 trabaja el teorema de Pitágoras, calculando la hipotenusa a partir de los catetos de un triángulo rectángulo.

- Con el fin de comprobar el nivel de conocimientos del que parten los alumnos y alumnas, les pediremos que resuelvan por parejas estas actividades.

Competencias Clave

Comunicación lingüística

■ *Act. 1.* Expresar de forma escrita los conocimientos adquiridos en cursos anteriores al resolver la actividad.

Aprender a aprender

■ *Acts. 1, 2, 3, 4 y 5.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.

■ *Acts. 2 y 3.* Saber transformar la información recopilada en cursos anteriores en conocimiento propio.

■ *Esquema pág. 214.* Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

Competencias sociales y cívicas

■ *Texto pág. 214.* Descubrir que algunos cuerpos redondos comparten características comunes, como el propio planeta Tierra.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

■ *Acts. 4 y 5.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen sobre figuras y áreas para resolver la actividad.

Recursos didácticos

Navegamos por Tiching

– Para empezar el tema podemos visualizar el recurso del siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749501

Se trata de un vídeo de quince minutos en el que se explican las características de los cuerpos de revolución acompañado de una forma animada de su construcción y cómo se obtienen.

A continuación, para seguir introduciendo la unidad preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Te has fijado cómo son las torres de los castillos centroeuropeos? ¿Has visto cómo son los faros de nuestras costas? ¿Qué tipo de figuras son?*
- *¿Sabes a qué se refieren cuando se les llaman cuerpos "de revolución"?*

Finalmente, propondremos que busquen otros ejemplos concretos observando ciudades del mundo y edificios arquitectónicos de renombre.

Educamos en valores

Respeto por el material de trabajo

■ La representación gráfica de cuerpos redondos es un procedimiento matemático que se presta especialmente para compartir instrumentos de dibujo y de medida, ya sean colectivos o individuales.

A lo largo de la unidad didáctica se proponen actividades de medida y de dibujo que deben realizar en grupo o individualmente intercambiando diferentes herramientas.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de la unidad que contribuyen a conseguir este objetivo:

– En las actividades 4 y 11 del tema el alumnado debe dibujar un cuerpo de revolución a partir de la figura plana que lo engendra en su giro.

– Utilización de los instrumentos de medida y dibujo necesarios para dibujar el desarrollo plano de una figura en las actividades 17 y 46.

Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

Soluciones de las actividades

Página 215

Para empezar…

1. Las figuras planas son las siguientes:

a) Cuadrilátero paralelogramo rectángulo.

b) Triángulo equilátero.

c) Círculo.

2. Calculamos el área del rectángulo:

$$\text{Área}_{\text{rectángulo}} = 3 \cdot 5 = 15 \ \text{cm}^2$$

3. Calculamos el área del triángulo:

$$\text{Área}_{\text{triángulo}} = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27 \ \text{cm}^2$$

4. Calculamos el área del círculo:

$$\text{Área}_{\text{círculo}} = \pi \cdot 4^2 = 16\pi = 50,27 \ \text{cm}^2$$

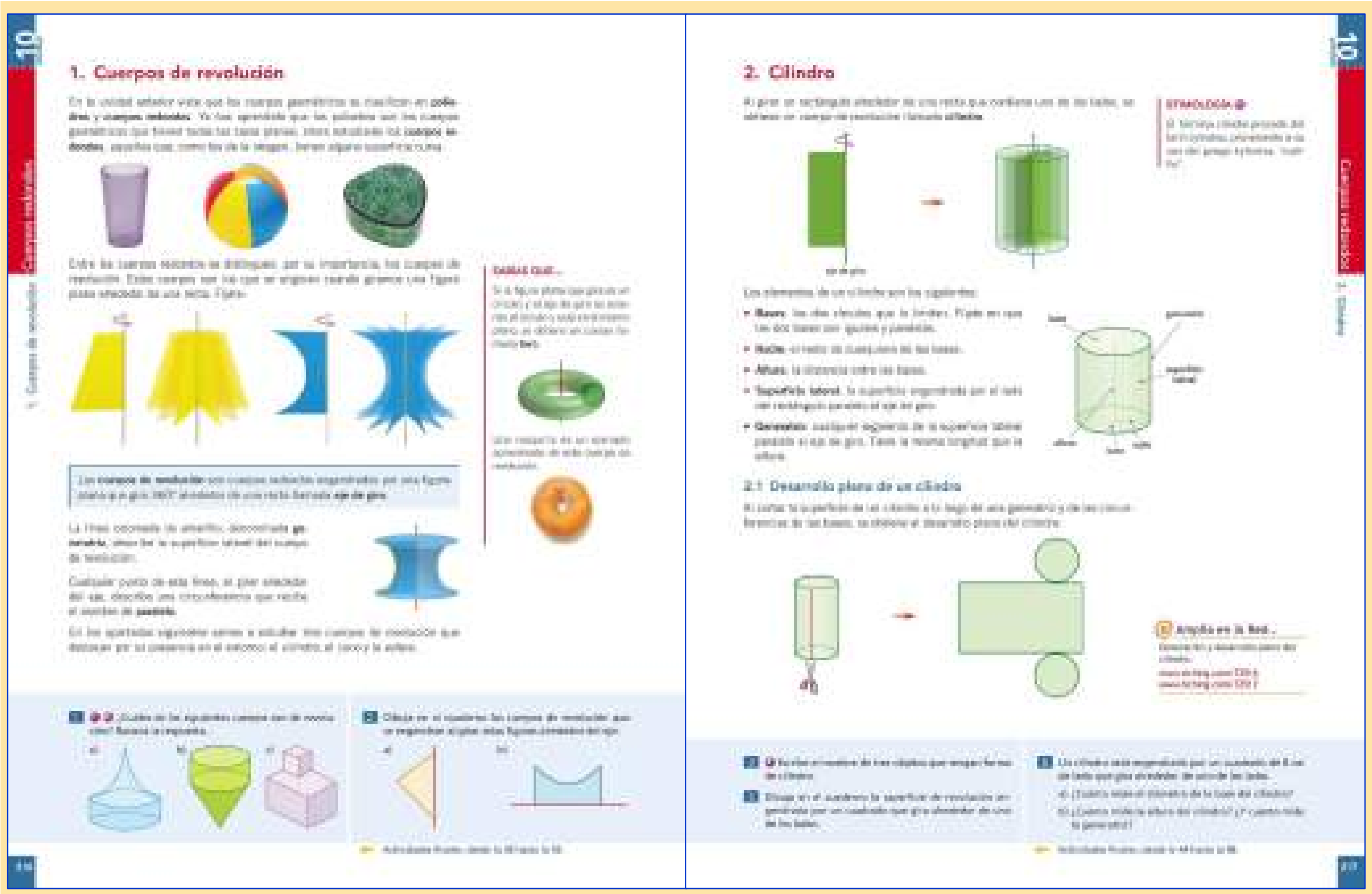
5. Hallamos la hipotenusa:

Hacemos uso para ello del teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 + 4^2$$

$$h^2 = 25$$

$$h = \sqrt{25} = 5$$



1. CUERPOS DE REVOLUCIÓN / 2. CILINDRO

■ El objetivo de esta sección consiste en introducir el concepto de cuerpo de revolución como tipo particular de cuerpo redondo.

En primer lugar leeremos la introducción del epígrafe 1 donde conoceremos la relación entre cuerpos redondos y cuerpos de revolución. Nos fijaremos en las imágenes que acompañan al texto y responderemos a las siguientes preguntas:

– *¿Qué caracteriza a los cuerpos redondos?¿Todas sus superficies son curvas?*

– *¿Todos los cuerpos de revolución son cuerpos redondos?¿Y al contrario?*

– *¿Cuáles de los tres ejemplos de cuerpos redondos son también cuerpos de revolución?*

■ A continuación leeremos la definición del recuadro sobre los cuerpos de revolución y los párrafos que siguen, donde encontraremos vocabulario característico de estas figuras:

– *¿Porqué la figura plana tiene que girar 360º para generar un cuerpo de revolución?*

– *¿Cómo se llama la línea que describe con su giro la superficie lateral del cuerpo de revolución?*

– *¿Puedes localizar la generatriz de los cuerpos de revolución de los ejemplos sobre la definición?*

A continuación prestaremos atención a la nota *SABÍAS QUE...*, y podremos comentar la generación del toro así como ejemplos de objetos cotidianos que tienen esta forma o similar.

■ Para afianzar todos estos conceptos introducidos, los alumnos y alumnas resolverán los ejercicios 1 y 2 de la página 216.

■ Leeremos la introducción del apartado sobre el cilindro y prestaremos especial atención a sus elementos. También a la nota del margen *ETIMOLOGÍA*. A continuación analizaremos las partes del cilindro y el texto leído:

– *¿Cuántas bases tiene el cilindro?¿Son siempre iguales?*

– *¿Qué elementos del cilindro son superficies y cuáles son rectas?*

– *¿Conoces otras palabras de uso cotidiano que procedan del griego? (p. ej.: teléfono, democracia, atmósfera, bacteria, polígono, etc.)*

Continuaremos conociendo el cilindro por medio del trabajo de las actividades 3, 4 y 5 de la página 217.

2.1 Desarrollo plano de un cilindro

■ Proseguiremos con la lectura de este subapartado, ampliando lo aprendido con *@Amplía en la red...*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 1*. Desarrollar la capacidad de expresar por escrito argumentos propios, así como trabajar la búsqueda, recopilación y procesamiento de información.
- *Etimología, pág. 217*. Usar el vocabulario adecuado y aprender sobre el origen etimológico de algunas palabras clave del tema.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 1*. Identificar y manejar las posibles respuestas, tomando decisiones de manera racional.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 3*. Afrontar los problemas siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la solución, aplicando eficientemente los conocimientos adquiridos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 servirá para continuar trabajando el concepto de desarrollo plano, en particular el de diferentes cilindros.

✓ En la actividad de ampliación 2 se plantea un problema para el cual, en primer lugar, es necesario dibujar un cuerpo de revolución a partir de una figura plana que gira sobre un eje.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos entrar en el siguiente enlace para trabajar el concepto de los cuerpos de revolución:

http://www.tiching.com/749502

En esta página web encontrarán un recurso didáctico creado con el aplicativo GeoGebra que les permitirá, de forma interactiva, comprobar por ellos mismos los conceptos que hemos explicado.

Pediremos a los alumnos que primero visualicen la animación del cilindro. A continuación podrán activar ellos mismos y ver qué ocurre al mover los vértices. Seguirán con otras figuras geométricas.

El material es muy útil ya que los alumnos podrán manipular la geometría y con ello experimentar de forma autónoma, superando la dificultad que supone los movimientos en el espacio.

Pueden intentarlo con otras figuras propuestas por ellos mismos y ver qué ocurre.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 216

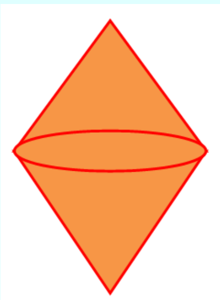
1. Son cuerpos de revolución:

a) y b)

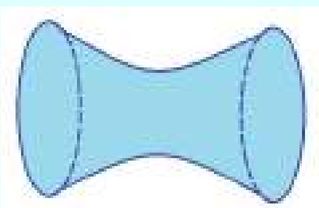
Porque están engendrados por una figura al girar 360º alrededor de un eje.

2. Los cuerpos de revolución generados son:

a)



b)

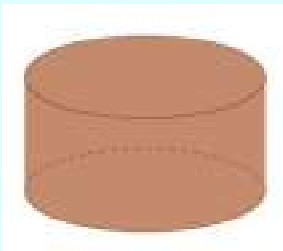


Página 217

3. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Tienen forma de cilindro un bote de conservas, un trozo de tubería y un depósito de agua.

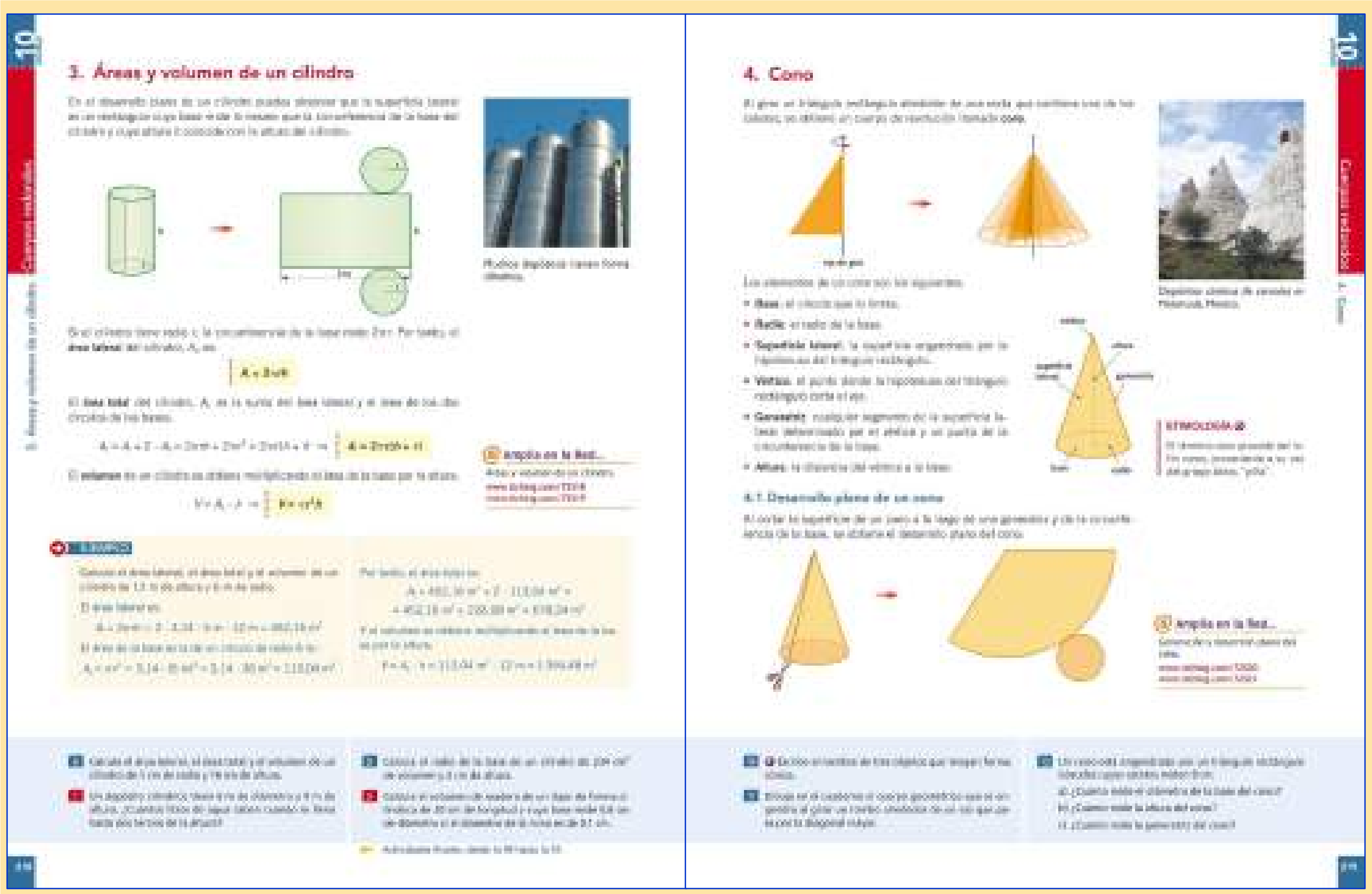
4. El cilindro dibujado deberá tener la misma altura que radio de sus bases:



5. Las soluciones son las siguientes:

a) El diámetro de la base mide $8 \cdot 2 = 16$ cm.

b) La altura del cilindro y la generatriz miden ambas 8cm, al igual que el lado del cuadrado.


3. Áreas y volumen de un cilindro

4. Cono

4.1 Desarrollo plano de un cono

3. ÁREAS Y VOLUMEN DE UN... / 4. CONO

■ El objetivo de la primera sección es continuar estudiando el cilindro, en particular el cálculo tanto de su área total como de su volumen.

Para empezar leeremos la primera parte de la sección, observando las imágenes que la acompañan:

– *¿Cuántas figuras planas conforman el desarrollo plano de un cilindro?¿Cómo se llaman?*

– *¿Puede tanar una de las bases un radio diferente a la otra?*

■ A continuación prestaremos atención a las fórmulas que nos permiten calcular el área y el volumen del cilindro, relacionando cada uno de sus elementos con su lugar en las representaciones superiores.

Seguidamente observaremos, pudiendo realizarlo de nuevo, el ejemplo resuelto bajo la teoría:

– *¿Qué datos necesitamos para calcular el área total de un cilindro?¿Y para calcular su volumen?*

– *¿En qué unidades se puede expresar el área de un cilindro?¿Y en cuáles su volumen?*

■ El alumnado realizará ahora las actividades de la página 218, donde tendrán que poner en práctica las expresiones de este apartado.

Para cerrar este apartado podemos trabajar en pequeños grupos con los recursos propuestos en *@Amplía en la red...*

■ Leeremos la introducción del apartado sobre el cono y posteriormente prestaremos atención a la terminología relacionada con sus elementos.

También podemos leer la nota del margen ETIMOLOGÍA, sobre el curioso origen de la palabra cono. A continuación responderemos a las siguientes preguntas:

– *¿Cuáles son los elementos del cono?¿Tiene los mismos elementos que el cilindro?¿En cuál difieren?*

– *¿Qué elementos del cilindro son superficies y cuáles son rectas?¿Y puntos?*

– *¿Conoces otras palabras de uso cotidiano que procedan del latín? (p. ej.: rosa, paz, padre, madre, obra, cuerpo, sano, etc.).*

Continuaremos trabajando el cono y sus elementos realizando las actividades de la página 219.

4.1 Desarrollo plano de un cono

■ Proseguiremos con la lectura de este subapartado observando el desarrollo del cono. Lo compararemos con el desarrollo del cilindro de la hoja anterior y verbalizaremos sus diferencia. Por último podremos ampliar lo aprendido con *@Amplía en la red...*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 7 y 9*. Leer e interpretar los enunciados de las actividades procesando los datos de manera ordenada.
- *Act. 10*. Desarrollar la capacidad de formular y expresar por escrito argumentos propios para responder la actividad.
- *Etimología, pág. 217*. Usar el vocabulario adecuado y aprender sobre el origen etimológico de algunas palabras clave del tema.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 7 y 9*. Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos para resolver la actividad.
- *Acts. 11 y 12*. Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 10*. Ser capaz de proponer ejemplos siendo creativo y perseverante, mostrando criterio propio al buscar las respuestas.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para asentar los elementos característicos de un cono.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Podemos trabajar el desarrollo del área y el volumen de un cilindro accediendo a este enlace:

http://www.tiching.com/749504

El proyecto Descartes 2D ofrece diferentes recursos didácticos. En esta página los alumnos, siguiendo las instrucciones propuestas, completarán el proceso para obtener las fórmulas del área y el volumen del cilindro.

Les pediremos que realicen los cálculos en su cuaderno y a continuación podemos comentar en clase las características.

Tendremos en cuenta que al interactuar en la representación les puede ayudar a comprender las soluciones que obtengan.

Finalmente accederán al apartado de curiosidades para experimentar su demostración y responder la pregunta que se propone.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 218

6. El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2\cdot 3{,}14\cdot 5cm\cdot 16cm = 502{,}4\ cm^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14\cdot(5cm)^2 = 3{,}14\cdot 25cm^2 = 78{,}75\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b = 502{,}4\ cm^2 + 2\cdot 78{,}75\ cm^2 =$

$= 502{,}4\ cm^2 + 157{,}5\ cm^2 = 659{,}9\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b\cdot h = 78{,}75\ cm^2\cdot 16\ cm = 1260\ cm^3$

7. El diámetro mide 6 m, su radio mide 3 m, dos tercios de la altura es $\frac{2}{3}\cdot 9 = 6$ m, y 1 litro es 1 dm^3.

Calculamos el volumen de un cilindro de radio 3 m y altura 6 m:

$V = A_b\cdot h = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14\cdot(3m)^2\cdot 6m = 3{,}14\cdot 9m^2\cdot 6m =$

$= 169{,}56\ m^3 = 169560\ dm^3$

Caben 169560 litros de agua.

8. Utilizamos la fórmula del volumen y despejamos el radio:

$V = A_b\cdot h = \pi r^2\cdot h \Rightarrow 234 = 3{,}14\cdot r^2\cdot 2 \Rightarrow 234 = 6{,}28\cdot r^2$

$\Rightarrow r^2 = 234{:}6{,}28 \simeq 37{,}26 \Rightarrow r = \sqrt{37{,}26} \simeq 6{,}1cm$

El radio mide 6,1 cm.

9. Calculamos el volumen del lápiz, después el volumen de la mina y finalmente restamos ambos volúmenes:

Calculamos el volumen del lápiz:

$V = A_b\cdot h = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14\cdot(0{,}3cm)^2\cdot 20cm =$

$= 3{,}14\cdot 1{,}8cm^3 = 5{,}652cm^3$

Calculamos el volumen de la mina:

$V = A_b\cdot h = \pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14\cdot(0{,}05cm)^2\cdot 20cm =$

$= 3{,}14\cdot 0{,}05cm^3 = 0{,}157cm^3$

El volumen de madera es:

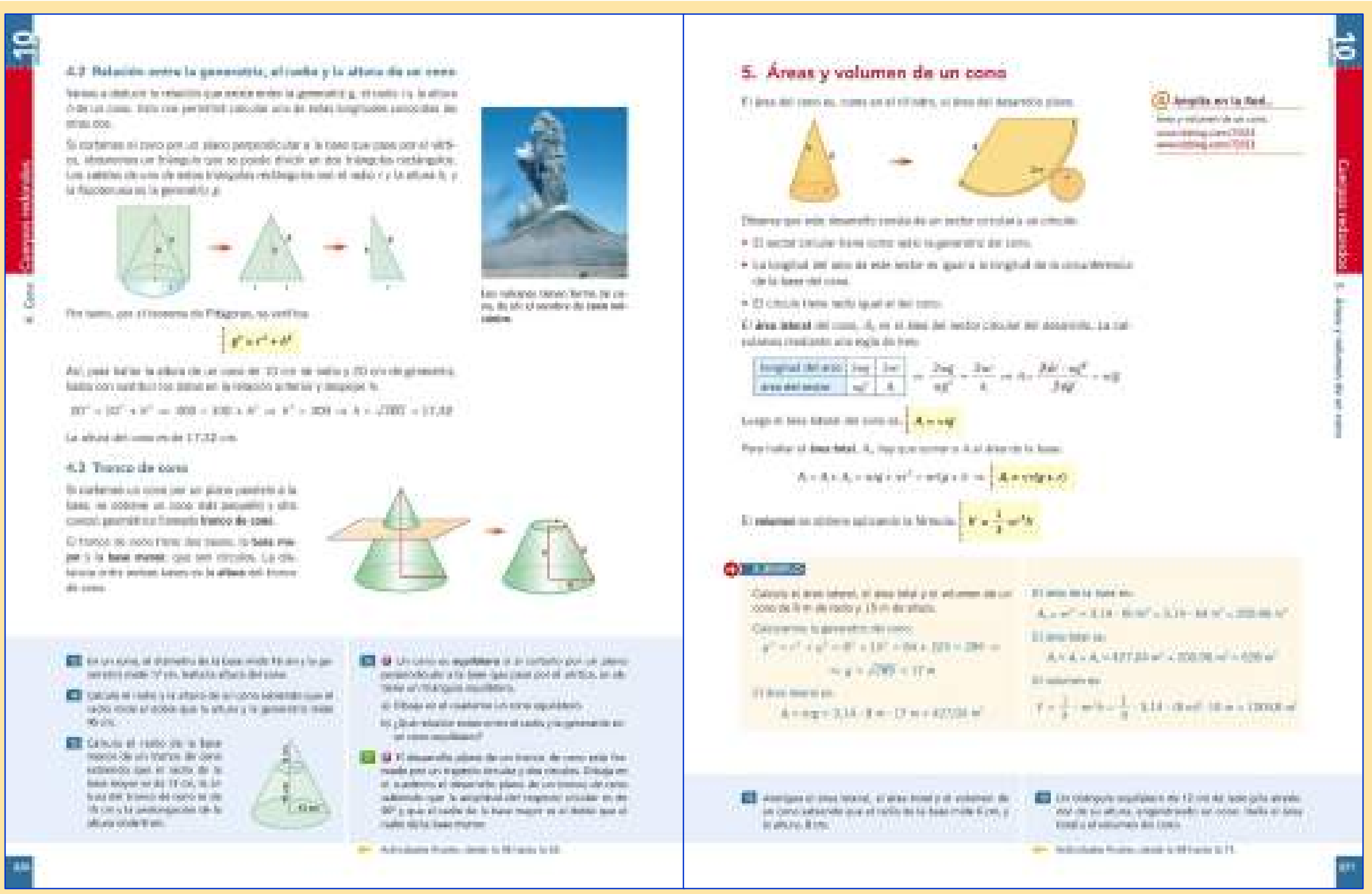
$5{,}652cm^3 - 0{,}157cm^3 = 5{,}495\ cm^3$

Página 219

10. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Tienen forma cónica un cucurucho de helado, un embudo y algunos volcanes.

(Continúa en la página 10-29 de la guía)



4. CONO (CONT) / 5. ÁREAS Y VOLUMEN DE...

4.2 Relación entre la generatriz, el radio y la altura de un cono

■ Leeremos el texto de este apartado en el que se deduce la relación entre estos tres elementos del cono.

Después de haber observado la expresión que relaciona estas tres dimensiones, radio, altura y cono, podemos responder a las siguientes preguntas:

– *¿Cuántos datos necesitamos para calcular la generatriz de un cono?*
– *¿De los elementos del cono, cuáles son los catetos y cuál la hipotenusa, en esta relación?*
– *¿Cómo he de calcular el radio de un cono conocidas las longitudes de la generatriz y la altura?¿Y el diámetro?*

■ Nos fijaremos a continuación en la imagen del margen que comentaremos con los alumnos y alumnas:

– *¿Podéis pensar en otros elementos de la naturaleza que tengan forma de cono?*
– *¿Conocéis el nombre de algún volcán?¿Dónde se encuentra? (p. ej.: el Teide situado en la Isla de Tenerife; el Etna en Sicilia, Italia; el Vesubio en Nápoles, Italia; el Hekla en Islandia).*

■ Para afianzar los contenidos dados propondremos la realización de las actividades 13, 14 y 16 de la página 220.

4.3 Tronco de cono

■ El alumnado leerá el texto del siguiente apartado y después observaremos la imagen que lo acompaña:

– *¿Cuántas bases tiene un tronco de cono?¿Pueden ser iguales?*
– *¿Imaginas como podría ser el desarrollo plano de un tronco de cono?*

Posteriormente realizaremos las actividades 15 y 17 de la página 220.

■ Empezamos a trabajar el apartado 5 observando las imágenes y planteando las siguientes preguntas:

– *¿Cuántas figuras planas conforman el desarrollo plano de un cilindro?¿Cómo se llaman?*

A continuación prestaremos atención las fórmulas que nos permiten calcular el área y el volumen del cono, relacionando cada uno de sus elementos con su lugar en las representaciones superiores.

Seguidamente observaremos, el ejemplo y realizaremos las actividades de la página 221. Cerraremos este apartado con los recursos de *@Amplía en la red...*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 15, 16 y 17.* Leer, comprender e interpretar los enunciados de los problemas propuestos para poder resolverlos.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 15 y 17.* Aplicar el proceso aprendido para hallar ciertas medidas en un cuerpo geométrico, de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.

■ *Acts. 18 y 19.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos a situaciones parecidas propuestas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 16.* Identificar, en la realización de la actividad, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

■ *Act. 17.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre el desarrollo plano de los cuerpos geométricos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 nos permitirá continuar trabajando el cálculo del volumen de un cono.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para seguir practicando los cuerpos de revolución, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749505

El proyecto Gauss contiene actividades interactivas para que los alumnos practiquen y se familiaricen con la construcción del cono y obtengan algunos datos.

A continuación, ejecutarán las instrucciones y tendrán que resolver las preguntas que se les indican.

Podemos realizarlo en el aula, generando un debate, para que puedan descubrir las relaciones entre radio, altura y generatriz y fijarse en lo más destacable.

Al terminar, preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Puedes explicar con tus palabras qué es la generatriz en un cuerpo de revolución??*
- *¿Por qué recibe este nombre? ¿Qué relación hay respecto a la figura plana de referencia?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 220

13. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 17^2 = h^2 + 8^2 \Rightarrow 289 = h^2 + 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 225 \Rightarrow h = \sqrt{225} = 15$ cm

La altura del cono es de 15 cm.

14. Aplicamos el teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta que si h es la altura del cono, su radio es 2h:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 45^2 = h^2 + (2h)^2 \Rightarrow 2025 = h^2 + 4h^2 = 5h^2$

$\Rightarrow h^2 = 2025 : 5 = 405 \Rightarrow h = \sqrt{405} \simeq 20{,}12$cm

La altura es 20,12 cm y el radio 2 · 20,12 = 40,24 cm

15. Tenemos dos triángulos en posición de Tales (semejantes), y por tanto de lados proporcionales:

$$\frac{15+9}{13} = \frac{9}{r} \Rightarrow 24r = 117 \Rightarrow r = 117 : 24 = 4{,}875 \text{ cm}$$

El radio de la base menor mide 4,875 cm.

16. Las soluciones son las siguientes:

a) 

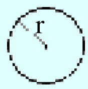
b) El diámetro de la base es igual a la generatriz, por tanto, el radio es la mitad de la generatriz.

17. Actividad personal. A modo de ejemplo:

1) Comenzamos escogiendo un radio para la base menor, por ejemplo r = 3 cm, y la dibujamos:

Su perímetro será:

$2\pi r = 2\pi \cdot 3 = 6\pi$ cm

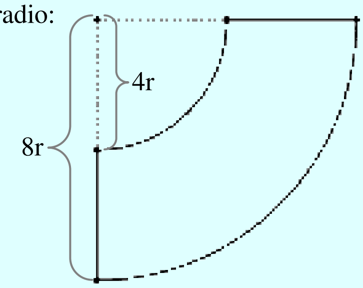


2) Esta medida del perímetro coincidirá con la longitud del arco menor del trapecio circular. Para poder dibujarlo calculamos el radio:

Al ser la amplitud del trapecio circular de 90º:

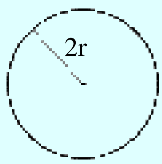
$6\pi \cdot 4 = 24\pi$ cm

$\frac{24\pi}{2\pi} = 12$ cm

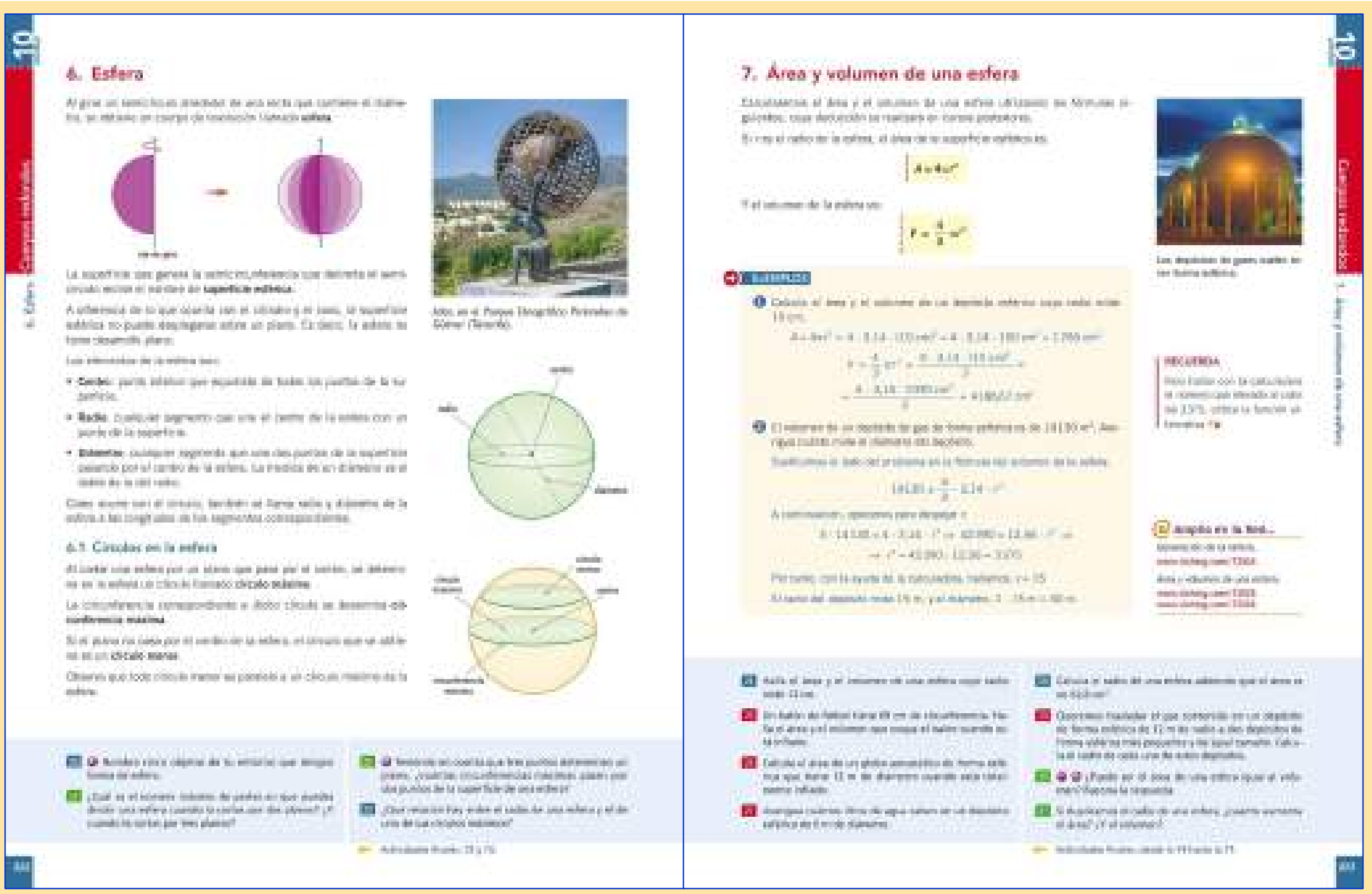


3) Para dibujar el arco mayor del trapecio circular, alargamos el radio, haciéndolo justo del doble de longitud del anterior, para que la medida del arco sea también el doble.

4) Por último podemos dibujar la circunferencia de la base mayor (de 2 · 3 cm = 6 cm).



(Continúa en la página 10-29 de la guía)


6. Esfera

7. Área y volumen de una esfera

6. ESFERA / 7. ÁREA Y VOLUMEN DE UNA...

■ Para empezar esta sección leeremos la introducción, observando las imágenes atentamente, y proseguiremos con la lectura de los elementos de la esfera, identificándolos en la imagen de la derecha:

– *¿Cuáles son las diferencias entre la esfera y el cilindro, y entre la esfera y el cono?*
– *¿Cómo es el desarrollo plano de la esfera?*
– *¿El radio de una esfera es un segmento o es una longitud?*

Para cerrar esta primera parte de la sección podemos proponer al alumnado la realización por grupos de la actividad 20 de la página 222.

6.1 Círculos en la esfera

■ Procederemos a la lectura de este subapartado, observando la imagen que lo acompaña. A continuación podemos proponer las siguientes cuestiones:

– *¿Qué diferencia hay entre el círculo máximo y la circunferencia máxima?*
– *¿Y entre el círculo máximo y el círculo menor?*

Lanzaremos al alumnado el reto de encontrar circunferencias máximas en el globo terráqueo de la fotografía que representa a Atlas.

■ El alumnado realizará ahora las actividades 21, 22 y 23 de la página 222, donde tendrán que reflexionar sobre los elementos de la esfera estudiados.

■ El objetivo de la sección 7 es continuar estudiando la esfera, en particular el cálculo tanto de su área como de su volumen.

Para empezar leeremos la primera parte de la sección, prestando especial atención a las fórmulas que nos permiten calcular el área y el volumen de la esfera, relacionando cada uno de sus elementos con su lugar en las representaciones de la página anterior.

– *¿Cuántos datos y cuáles se necesitan para calcular el área o el volumen de una esfera?*
– *¿Qué relación que hay entre la expresión del área del círculo y la del área de la esfera?*

■ Seguidamente observaremos y comentaremos juntos los ejemplos resueltos bajo la teoría.

Aprovecharemos para comentar cómo calcular la raiz cúbica de un número dado apoyándonos en la explicación de la anotación de la derecha: RECUERDA.

■ Para cerrar este apartado propondremos la realización de las actividades de la página 223.

Por último podremos ampliar lo aprendido con los tres recursos en línea que nos propone el apartado *@Amplía en la red...*

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 30.* Expresar e interpretar de forma escrita los conocimientos adquiridos sobre la esfera, argumentando la respuesta.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 24 a 29.* Reconocer y asimilar los procedimientos y ser capaz de reproducirlos y aplicarlos.
- *Act. 30.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 20.* Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación, siendo creativo e imaginativo para encontrar las repuestas a los interrogantes que se plantean.
- *Act. 22.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 4 servirá para revisar los elementos de la esfera estudiados y recordarlos de manera más eficaz por medio del dibujo.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Naveguemos por Tiching

– Para asimilar y practicar los conceptos sobre la esfera, podemos acceder a este enlace:

http://www.tiching.com/749506

El proyecto Gauss ofrece actividades interactivas para que los alumnos practiquen y se familiaricen con la esfera. Concretamente, la actividad "La Tierra en siete días" contiene diferentes propuestas que giran en torno a ella.

Podemos sugerir que realicen la última en la que podrán comprobar cómo se halló el radio de la Tierra y hacer cálculos sobre distintas ciudades en ella.

Al terminar, preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Con qué crees que puedes tener más exactitud, con un mapa o con un globo terráqueo? ¿Por qué?*
- *¿Qué ocurre con las representaciones planas de la esfera terrestre?*
- *Investigad en grupo qué utilizan los cartógrafos para construir mapas y un recurso muy actual. También las más utilizadas.*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 222

20. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Tienen forma esférica una pelota, la luna, el sol, una burbuja de jabón y una naranja.

21. Las respuestas son las siguientes:

Cuando la cortas por dos planos el número máximo son 4 partes.

Cuando la cortas por tres planos el número máximo son 8 partes.

22. Sólo pasa una circunferencia máxima, pues el tercer punto que la determina es el centro de la esfera.

23. El radio es el mismo.

Página 223

24. Hallamos el área:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4{\cdot}3{,}14{\cdot}(12\text{cm})^2 = 4{\cdot}3{,}14{\cdot}144\text{cm}^2 =$

$= 1808{,}64\text{ cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(12\text{cm})^3}{3} = 7234{,}56\ \text{cm}^3$$

25. Utilizamos la formula de la longitud de la circunferencia para calcular el radio r:

$l = 2\pi r \Rightarrow 69 = 2{\cdot}3{,}14{\cdot}r \Rightarrow r = 69{:}6{,}24 \simeq 11{,}06\text{ cm}$

El área del balón inflado (esfera) es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4{\cdot}3{,}14{\cdot}(11{,}06\text{cm})^2 = 4{\cdot}3{,}14{\cdot}122{,}32\text{cm}^2 =$

$= 1536{,}34\text{ cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(11{,}06\text{cm})^3}{3} = 5664{,}14\ \text{cm}^3$$

26. El radio mide 6 m, y por tanto el área es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4{\cdot}3{,}14{\cdot}(6\text{cm})^2 = 4{\cdot}3{,}14{\cdot}36\text{cm}^2 = 452{,}16\text{ m}^2$

27. El radio mide 3 m, y por tanto el volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(3\text{m})^3}{3} = 113{,}04\ \text{m}^3 = 113\,040\text{ dm}^3$$

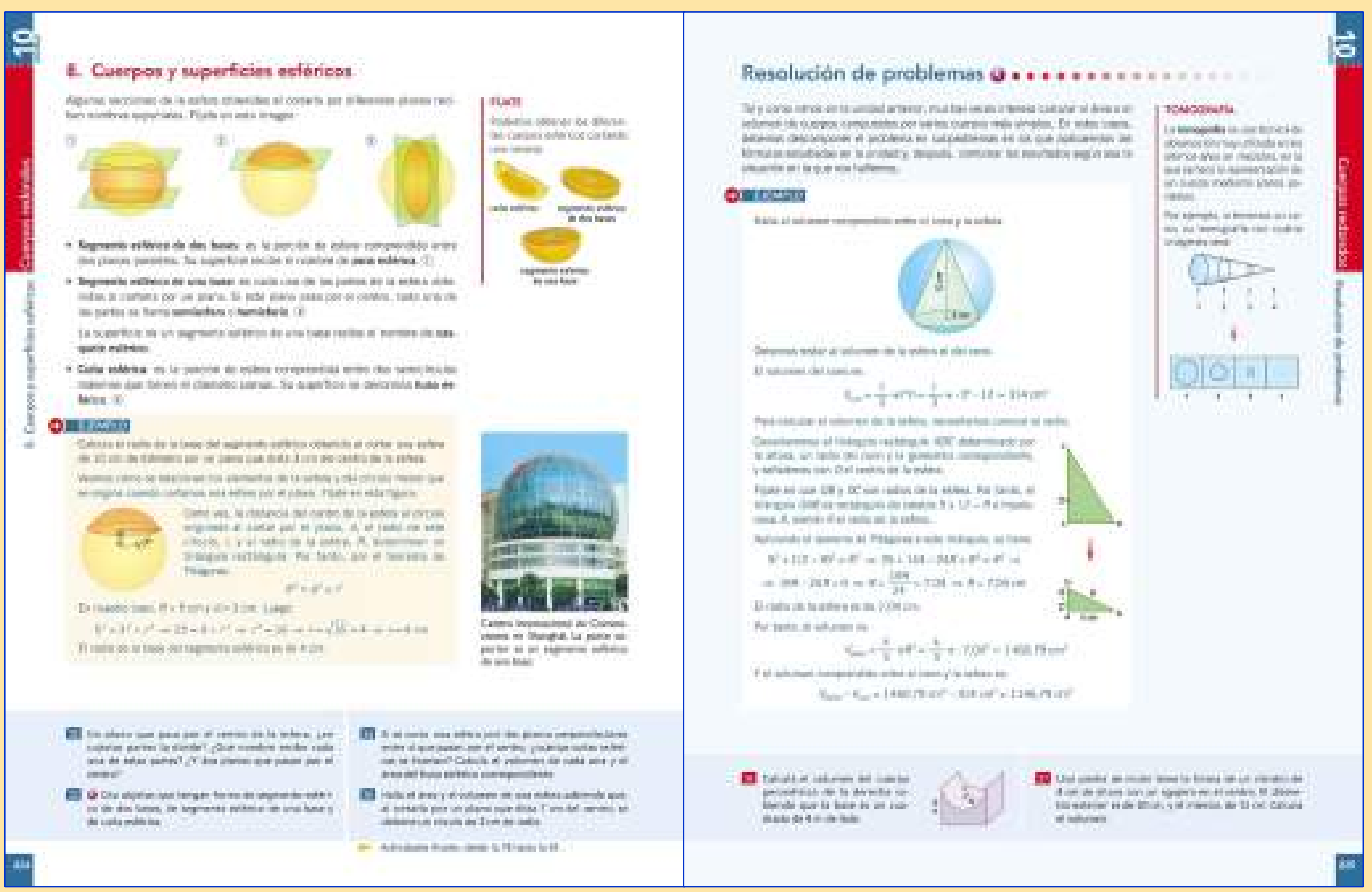
Caben 113 040 litros de agua.

28. Utilizamos la fórmula del área de la esfera y despejamos el radio:

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow 62{,}8 = 4{\cdot}3{,}14{\cdot}r^2 \Rightarrow r^2 = 5 \Rightarrow r = 2{,}24\text{ cm}$

El radio mide 2,24 cm.

(Continúa en la página 10-30 de la guía)


8. Cuerpos y superficies esféricos

Resolución de problemas

8. CUERPOS Y SUP. ESFÉRICOS / RESOLUCIÓN...

■ Leeremos el texto de este apartado, fijándonos en las imágenes.

A continuación podemos realizar en común la actividad 33 y posteriormente dibujar algunos de los objetos que se hayan citado.

■ Después examinaremos la anotación del margen derecho *FÍJATE* y realizaremos las siguientes preguntas:

– *¿Podemos extraer todos esos cuerpos de la misma naranja?*

– *¿De qué otras frutas podríamos extraer los diferentes cuerpos esféricos?*

■ Nos fijaremos en el ejercicio resuelto que podemos encontrar después de la teoría y que podremos utilizar como ejemplo para realizar alguna de las actividades que se proponen en la página.

Para afianzar todos estos conceptos introducidos, los alumnos y alumnas resolverán los ejercicios 32, 34 y 35 de la página 224.

■ Como actividad opcional, y tras fijarnos en la fotografía del Centro Internacional de Convenciones de Shanghái, podemos proponer al alumnado la búsqueda de otros ejemplos de edificios cuya forma se base en la esfera.

■ El objetivo de la siguiente sección consiste en continuar el trabajo comenzado en la unidad anterior sobre el uso de la estratregia de la descomposición de un problema en varios más sencillos, siempre interesante en el caso de problemas geométricos complejos.

En primer lugar leeremos la introducción y revisaremos la resolución del ejercicio de ejemplo, fijándonos particularmente en los croquis realizados y en las fórmulas empleadas:

– *¿Qué fórmulas se han empleado para su resolución?*

– *¿Qué teorema se pone en práctica para calcular datos necesarios para resolver el problema?¿Se ha empleado más veces a lo largo del tema?*

■ Para poner en práctica esta estrategia de resolución de problemas podemos realizar individualmente o en pequeños grupos las actividades que se proponen en la página 225.

■ Para cerrar esta sección nos fijaremos en la anotación de la derecha de la página: *TOMOGRAFÍA*.

En el ejemplo podemos observar la tomografía de un cono por medio de cuatro de sus secciones. Podemos proponer al alumnado representar otras figuras siguiendo la línea del ejemplo. Por ejemplo la tomografía de un cilindro en diferentes posiciones o de una esfera.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 32 y 34.* Leer e interpretar los enunciados procesando los datos de manera ordenada.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 34 y 35.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia en el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos esféricos.
- *Acts. 36 y 37.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos a situaciones parecidas propuestas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 33.* Ser capaz de proponer ejemplos siendo creativo, flexible y perseverante al buscar las respuestas.
- *Resolución de problemas, pág. 225.* Observar el planteamiento y resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas y el orden de las operaciones.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 consolidará el aprendizaje de los cuerpos esféricos trabajados en la unidad.

✓ La actividad de ampliación 3 exige poner en práctica los conocimientos adquiridos sobre la esfera y los cuerpos esféricos.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para ampliar y comprobar la aplicación de este cuerpo de revolución, proponemos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749507

Nuestros alumnos podrán observar y visualizar esta construcción singular en la isla griega de Cleopatra. Se trata de aplicar la geometría a la arquitectura sostenible.

Después de observar detenidamente les preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿En qué cuerpo redondo se ha proyectado ésta vivenda? ¿Hay otros cuerpos esféricos?*
- *¿Qué ventajas se obtienen al usar esta figura geométrica para construir una casa sostenible?*
- *¿Cómo se distribuye el espacio interior? ¿Cómo se organiza la fachada? ¿Podrías calcular la superficie?*

También les podemos sugerir que entren en la página oficial del arquitecto Luis Garrido para ampliar imágenes o ver el proceso constructivo.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 224

32. Un plano que pasa por el centro de la esfera la divide en dos partes, que reciben el nombre de semiesfera o hemisferio.

Dos planos que pasan por el centro de la esfera la dividen en cuatro partes.

33. Actividad personal. A modo de ejemplo:

– Tienen forma de segmento esférico de dos bases: un jarrón, un vaso, un cuenco...

– Tienen forma de segmento esférico de una base: un trozo de fruta, un gorro de natación, la cabeza de una chincheta, una cúpula...

– Tienen forma de cuña esférica: un gajo de naranja, una tajada de melón, un ajo, la pupila de los cocodrilos y en el corte realizado a la maqueta de una célula animal para mostrar su interior.

34. Se forman cuatro cuñas esféricas:

El volumen de cada cuña esférica es la cuarta parte del volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 : 4 = \frac{1}{3}\pi r^3$$

El área de cada cuña esférica es la cuarta parte del área de la esfera:

$A = 4\pi r^2 : 4 = \pi r^2$

35. Calculamos el radio r de la esfera teniendo en cuenta que, la distancia del centro de la esfera al círculo, el radio de este círculo y el radio de la esfera determinan un triángulo rectángulo. Por tanto, por el teorema de Pitágoras:

$r^2 = 7^2 + 3^2 = 49 + 9 = 58 \Rightarrow r = \sqrt{58} \simeq 7{,}62$ cm

El área de la esfera es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4{\cdot}3{,}14{\cdot}(7{,}62\text{cm})^2 = 4{\cdot}3{,}14{\cdot}58{,}06\text{cm}^2 =$

$= 729{,}23\ \text{cm}^2$

El volumen es:

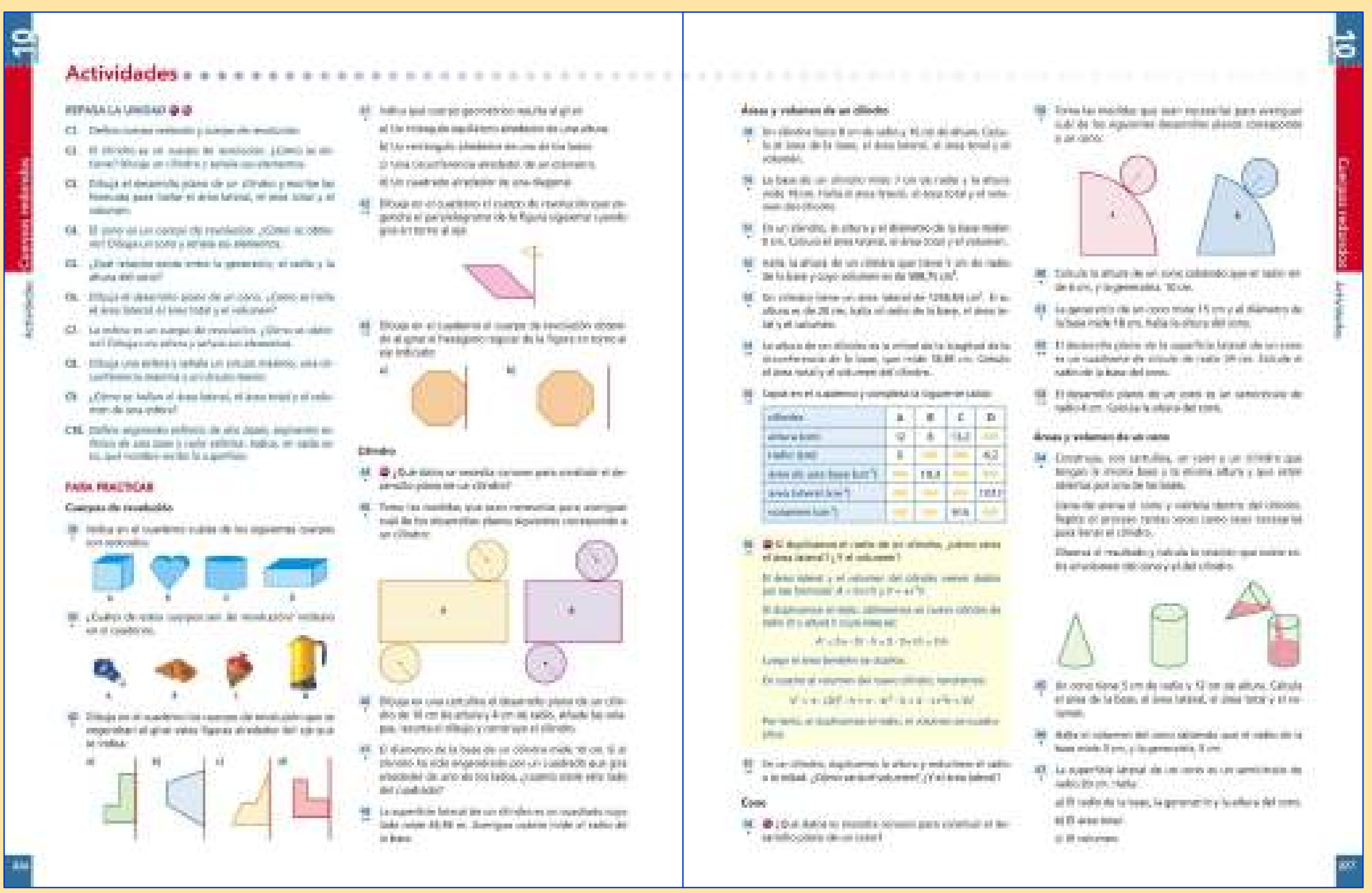
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(7{,}62\text{cm})^3}{3} = 1852{,}39\ \text{cm}^3$$

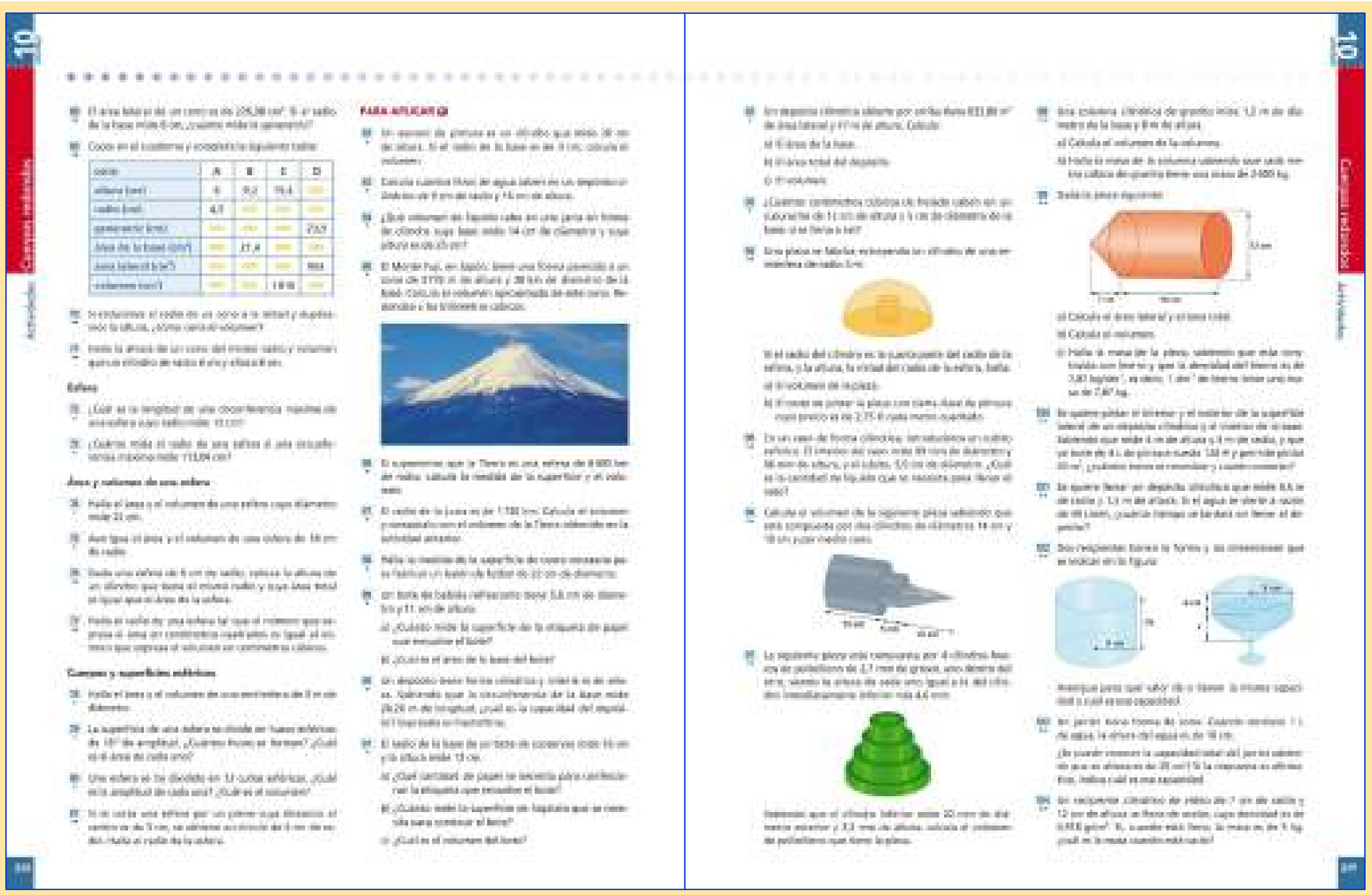
Página 225

36. Debemos restar al volumen de un cubo de arista 4 m, el volumen de la mitad de un cilindro de altura 4 m y radio de la base 2m:

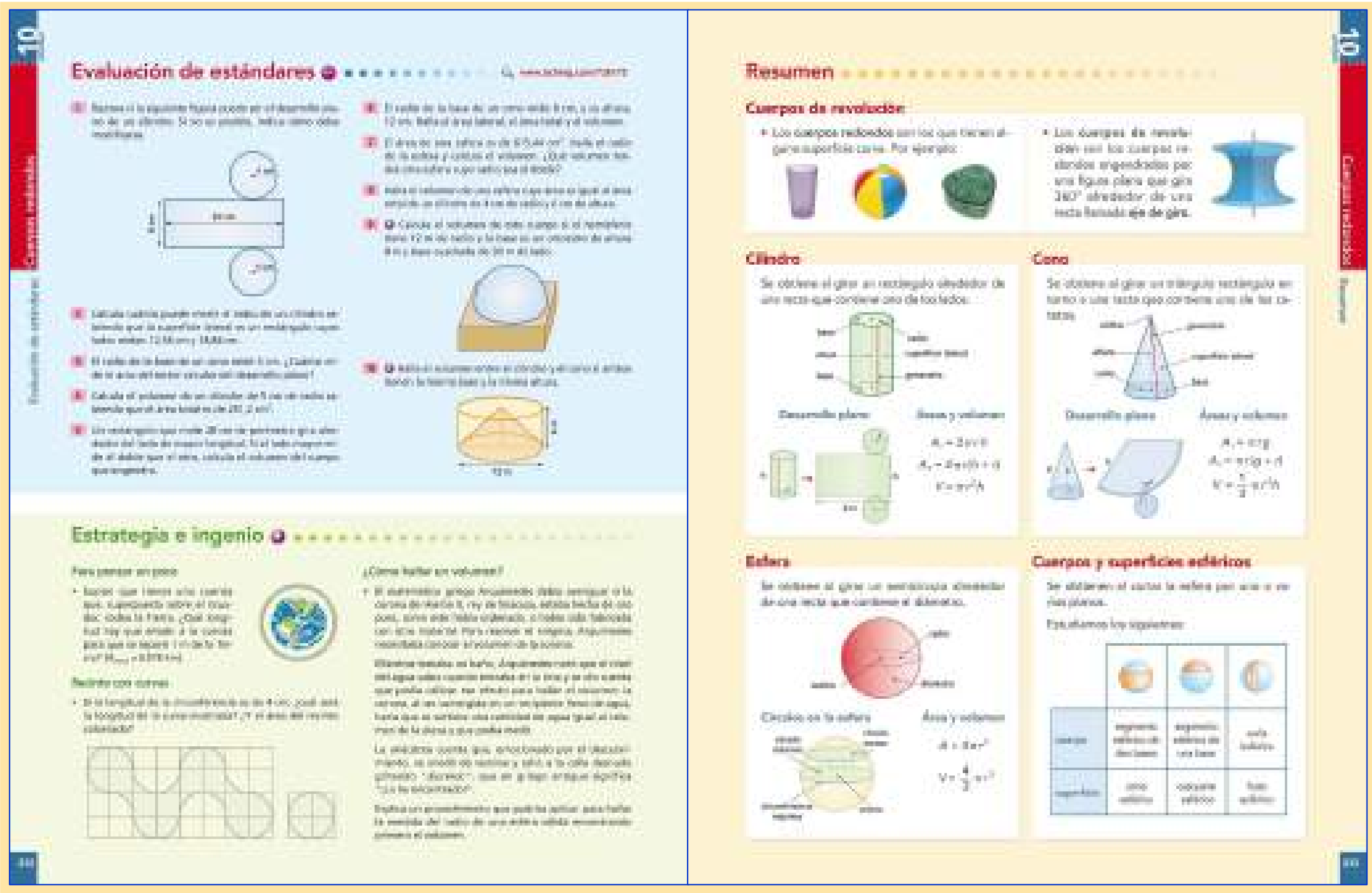
$$V = V_{cubo} - \frac{1}{2}V_{cilindro} = 64\ \text{m}^3 - 25{,}12\ \text{m}^3 = 38{,}88\ \text{m}^3$$

(Continúa en la página 10-30 de la guía)


Actividades




Para ampliar
Desarrolla tus competencias
El balón de fútbol


Evaluación de estándares
Estrategia e ingenio
Resumen
Cuerpos de revolución
Cilindro
Cono
Esfera
Cuerpos y superficies esféricos

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Repasa la unidad, pág. 226*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.
- *Act. 105.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.
- *Desarrolla tus competencias, pág. 231.* Leer y comprender el estímulo y los enunciados de la actividad, generando ideas y supuestos.

APRENDER A APRENDER

- *Repasa la unidad, pág. 226* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, así como ser consciente de las propias capacidades y carencias.
- *Acts. 44, 58 y 105.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.
- *Acts. 56, 106 y 111.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas.
- *Desarrolla tus competencias, pág. 231.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.
- *Evaluación de estándares, pág. 232*. Ser consciente de las propias capacidades en el tema estudiado.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Para aplicar, pág. 228.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar solucio-nes, evaluando las acciones realizadas.
- *Acts. 108, 109, 110, 113, 114 y 115.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos ad-quiridos a lo largo de la unidad, mostrando criterio propio.
- *Desarrolla tus competencias, pág. 231. Estrategia e ingenio, pág. 232.* Buscar las soluciones de forma creativa e imaginativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.
- *Evaluación de estándares, pág. 232. Acts. 9 y 10.* Ser consciente de las propias capacidades en el tema estudiado.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Desarrolla tus competencias, pág. 231. Act. 115.* Buscar, seleccionar y manejar información en Internet.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Act. 105.* Manejar las habilidades sociales al exponer un trabajo delante de los compañeros.

ACTIVIDADES FINALES

- En la sección de *Actividades* el alumnado se enfrentará a una colección de ejercicios en orden creciente de dificultad, con el fin de afianzar todos los contenidos del tema, desde un punto de vista práctico y teórico.
- La sección *Desarrolla…* persigue fomentar la autonomía del alumnado y la utilización de distintos recursos para resolver un planteamiento dado. A través de un caso práctico, el alumno ejercitará su capacidad de análisis y su actitud proactiva en la búsqueda de solu-ciones, además de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica.
- Con la sección de *Evaluación…* se pretende que los alumnos y alumnas valoren el nivel de conocimientos alcanzados. Propone una serie de actividades que repasan la unidad de un modo completo y práctico.
- La sección *Estrategia…* propone una serie de acertijos relacionados con los conceptos trabajados durante el tema, con el fin de que el alumnado desarrolle su imaginación y adquiera destreza relacionando ideas.
- La finalidad de la sección *Resumen* es recopilar los contenidos fundamentales de la unidad en un mapa conceptual que resuma y destaque las relaciones entre los concep-tos y los procedimientos estudiados.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

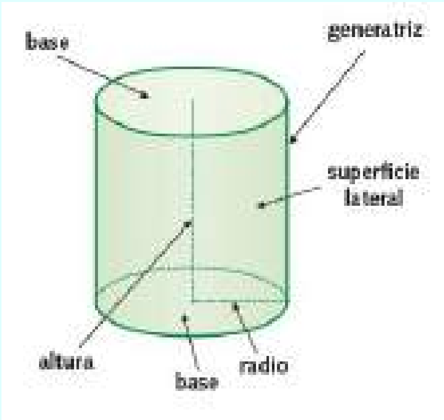
Página 226

C1. Un cuerpo redondo es el cuerpo geométrico que tiene alguna superficie curva.

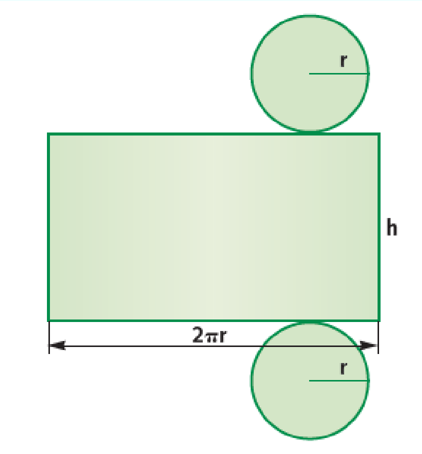
Un cuerpo de revolución es un cuerpo redondo engen-drado por una figura plana que gira 360º alrededor de una recta llamada eje de giro.

C2. Un cilindro se obtiene al girar un rectángulo alrededor de una recta que contiene uno de los lados.

Dibujamos un cilindro y señalamos sus elementos:



C3. El desarrollo plano de un cilindro es:



La fórmula del área lateral es: $A_l = 2\pi rh$

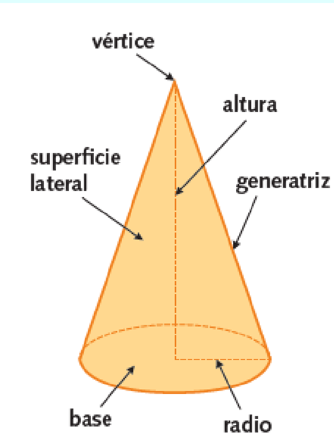
La fórmula del área total es:

$A_t = A_l + 2A_b$, donde $A_b = \pi r^2$ es el área de la base.

La fórmula del volumen es: $V = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h$

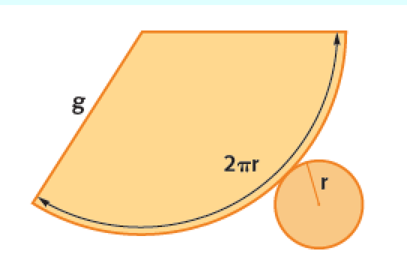
C4. Un cono se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de una recta que contiene uno de los catetos.

Dibujamos un cono y señalamos sus elementos:



C5. Cumplen el teorema de Pitágoras: $g^2 = h^2 + r^2$, donde g es la generatriz, h la altura y r el radio.

C6. El desarrollo plano de un cono es:



La fórmula del área lateral es: $A_l = \pi rg$

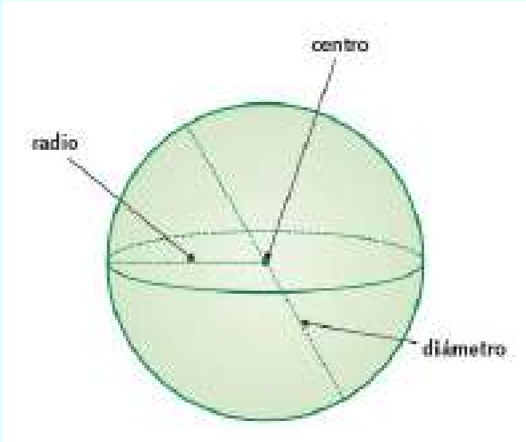
La fórmula del área total es:

$A_t = A_l + A_b$, donde $A_b = \pi r^2$ es el área de la base.

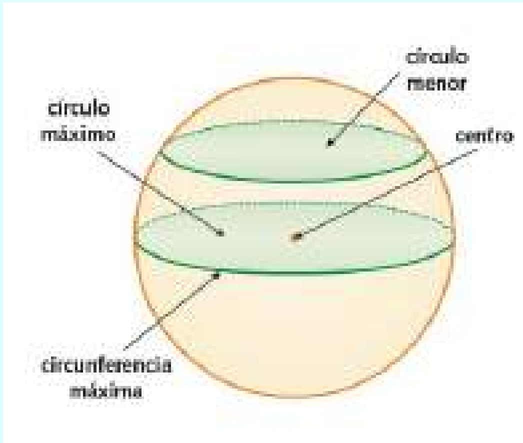
La fórmula del volumen es: $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

C7. Una esfera se obtiene al girar un semicírculo alrededor de una recta que contiene el diámetro.

Dibujamos una esfera y señalamos sus elementos:



C8. Dibujamos una esfera con los posibles círculos en ella:



C9. A diferencia de el caso del cilindro o el del cono, la esfera sólo tiene una superficie, cuya área se calcula de la siguiente forma:

La fórmula del área es: $A = 4\pi r^2$

La fórmula del volumen es: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

C10. *Segmento esférico de dos bases*: es la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos. Su superficie recibe el nombre de zona esférica.

Segmento esférico de una base: es cada una de las partes de la esfera obtenidas al cortarla por un plano. Si este plano pasa por el centro, cada una de las partes se llama semiesfera o hemisferio. La superficie de un segmento esférico de una base recibe el nombre de casquete esférico.

Cuña esférica: es la porción de esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que tienen el diámetro común. Su superficie se denomina huso esférico.

38. Los cuerpos redondos son el B y el C.

39. Los cuerpos de revolución son el A y el C.

40. Los cuerpos de revolución que se engendran son:

a)

b)

c)

b)

41. Los cuerpos geométricos resultantes son los siguientes:

a) Un cono.

b) Un cilindro.

c) Una esfera.

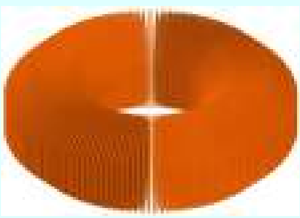
d) Dos conos pegados por las bases.

42. El cuerpo de revolución sería el siguiente:

43. Girando los hexágonos obtendríamos:

a)

b)



44. La altura del cilindro y el radio de la base.

45. Medimos el radio r de las bases y comprobamos si las bases de los rectángulos miden $2\pi r$.

El único desarrollo que lo cumple es A: r = 0,9 cm y $2\pi r$ = 5,65 cm.

46. Actividad personal.

47. El lado mide lo mismo que el radio de la base, por tanto el lado del cuadrado mide 5 cm.

48. El lado del cuadrado es $2\pi r$, por tanto:

$43{,}96 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow r = 43{,}96 : 6{,}28 = 7$ m

El radio mide 7 m.

Página 227

49. El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8cm \cdot 16cm = 803{,}84\ cm^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (8cm)^2 = 3{,}14 \cdot 64cm^2 = 200{,}96\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 803{,}84\ cm^2 + 2 \cdot 200{,}96\ cm^2 = 1205{,}76\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 200{,}96\ cm^2 \cdot 16\ cm = 3215{,}36\ cm^3$

50. El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 7cm \cdot 18cm = 791{,}28\ cm^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (7cm)^2 = 3{,}14 \cdot 49cm^2 = 153{,}86\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 791{,}28\ cm^2 + 2 \cdot 153{,}86\ cm^2 = 1099\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 153{,}86\ cm^2 \cdot 18\ cm = 2769{,}48\ cm^3$

51. Si el diámetro mide 8 cm, el radio r mide 4 cm. Por tanto:

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4cm \cdot 8cm = 200{,}96\ cm^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4cm)^2 = 3{,}14 \cdot 16cm^2 = 50{,}24\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 200{,}96\ cm^2 + 2 \cdot 50{,}24\ cm^2 = 301{,}44\ cm^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 50{,}24cm^2 \cdot 8\ cm = 401{,}92\ cm^3$

52. Utilizamos la fórmula del volumen y despejamos la altura:

$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow 588{,}75 = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 588{,}75 : 78{,}5 = 7{,}5$ cm

La altura mide 7,5 cm.

53. Utilizamos la fórmula del área lateral y despejamos el radio:

$A_l = 2\pi rh \Rightarrow 1256{,}64 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \cdot 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 1256{,}64 : 125{,}6 = 10$ cm

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (10\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 100\text{ cm}^2 = 314\text{ cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 1256{,}64\text{ cm}^2 + 2 \cdot 314\text{ cm}^2 = 1884{,}64\text{ cm}^2$

El volumen es:

$V = A_b{\cdot}h = 314\text{ cm}^2 \cdot 20\text{ cm} = 6280\text{ cm}^3$

54. Resolvemos:

La altura mide $18{,}84 : 2 = 9{,}42$ cm

La longitud de la circunferencia de la base es $2\pi r$, por tanto:

$18{,}84 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow r = 18{,}84 : 6{,}28 = 3$ cm

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 18{,}84\text{ cm} \cdot 9{,}42\text{ cm} = 177{,}47\text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (3\text{ cm})^2 = 3{,}14 \cdot 9\text{ cm}^2 = 28{,}26\text{ cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b =$

$= 177{,}47\text{ cm}^2 + 2{\cdot}28{,}26\text{ cm}^2 = 233{,}99\text{ cm}^2$

El volumen es:

$V = A_b{\cdot}h = 28{,}26\text{ cm}^2{\cdot}9{,}42\text{ cm} = 266{,}2\text{ cm}^3$

55. Resolvemos cada cilindro:

Cilindro A

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (6\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 36\text{cm}^2 = 113{,}04\text{ cm}^2$

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14{\cdot}6\text{cm} \cdot 12\text{cm} = 452{,}16\text{ cm}^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 113{,}04\text{ cm}^2 \cdot 12\text{ cm} = 1356{,}48\text{ cm}^3$

Cilindro B

Utilizamos la fórmula del área de la base y despejamos el radio:

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow 19{,}3 = 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = 19{,}3 : 3{,}14 = 6{,}15$

$\Rightarrow r = \sqrt{6{,}15} \simeq 2{,}48$ cm

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}48\text{cm}{\cdot}8\text{cm} = 124{,}6\text{ cm}^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 19{,}3\text{ cm}^2 \cdot 8\text{ cm} = 154{,}4\text{ cm}^3$

Cilindro C

Utilizamos la fórmula del volumen y despejamos el radio:

$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow 916 = 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 13{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 916 : 41{,}45 \simeq 22{,}1 \Rightarrow r = \sqrt{22{,}1} \simeq 4{,}7$cm

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}7\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 22{,}09\text{cm}^2 =$

$= 69{,}36\text{ cm}^2$

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}7\text{cm} \cdot 13{,}2\text{cm} = 389{,}61\text{ cm}^2$

Cilindro D

Utilizamos la fórmula del área lateral y despejamos la altura:

$A_l = 2\pi rh \Rightarrow 1012 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 1012 : 26{,}38 = 38{,}36$ cm

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}2\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 17{,}64\text{cm}^2 =$

$= 55{,}39\text{ cm}^2$

El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 55{,}39\text{cm}^2 \cdot 38{,}36\text{ cm} = 2124{,}76\text{ cm}^3$

Completamos la tabla:

Cilindro	A	B	C	D
Altura (cm)	12	8	13,2	38,36
Radio (cm)	6	2,48	4,7	4,2
Área de una base (cm^2)	113,04	19,3	69,36	55,39
Área lateral (cm^2)	452,16	124,6	39,61	1012
Volumen (cm^3)	1356,48	154,4	916	2124,76

56. Ejercicio resuelto en el libro.

57. En un cilindro de radio r y altura h, el volumen es $V = \pi r^2 h$ y el área lateral es $A_l = 2\pi rh$.

Si duplicamos la altura es 2h y si reducimos el radio a la mitad es $\frac{r}{2}$

El volumen del nuevo cilindro es:

$$V' = \pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 2h = \pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot 2h = \frac{\pi r^2 h}{2} = \frac{V}{2}$$

El área lateral del nuevo cilindro es:

$$A_l' = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot 2h = 2\pi rh$$

Por tanto, el volumen se reduce a la mitad y el área lateral no varía.

58. Se necesita conocer dos de los siguientes tres elementos: radio, altura y generatriz.

59. Medimos el radio r de las bases y comprobamos si el arco de circunferencia miden $2\pi r$.

El único desarrollo que lo cumple es B: r = 0,5 cm y $2\pi r = 3{,}14$ cm

60. Conocidas la generatriz y el radio de la base, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 10^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow 100 = h^2 + 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$ cm

La altura del cono mide 8 cm

61. Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 15^2 = h^2 + 9^2 \Rightarrow 225 = h^2 + 81 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = \sqrt{144} = 12$ cm

La altura del cono mide 12 cm.

62. El radio del cuadrante es la generatriz del cono y el área lateral la cuarta parte del círculo de ese mismo radio, por tanto:

$$A_l = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 24^2 = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot 576 =$$

$= 425{,}16$ cm^2

Utilizamos la fórmula del área lateral del cono y despejamos el radio:

$A_l = \pi r g \Rightarrow 425{,}16 = 3{,}14 \cdot r \cdot 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 425{,}16 : 75{,}36 \simeq 5{,}64$ cm

El radio de la base del cono mide 5,64 cm.

63. El radio del semicírculo es la generatriz del cono y el área lateral la mitad del área de un círculo de ese mismo radio, por tanto:

$$A_l = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 16 =$$

$= 25{,}12$ cm^2

Utilizamos la fórmula del área lateral del cono para hallar el radio de la base:

$A_l = \pi r g \Rightarrow 25{,}12 = 3{,}14 \cdot r \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 25{,}12 : 12{,}56 \simeq 2$ cm

El radio de la base del cono mide 2 cm.

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 4^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow 16 = h^2 + 4 \Rightarrow h^2 = 12$

$\Rightarrow h = \sqrt{12} = 3{,}46$ cm

La altura del cono mide 3,46 cm.

64. Actividad personal.

El volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.

65. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{169} = 13$ cm

El área lateral es:

$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 5\text{cm} \cdot 13\text{cm} = 204{,}1$ cm^2

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (5\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 25\text{cm}^2 = 78{,}5$ cm^2

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + A_b = 204{,}1$ cm$^2 + 78{,}5$ cm$^2 = 282{,}6$ cm^2

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 78{,}5 \text{ cm}^2 \cdot 12 \text{ cm} = 314 \text{ cm}^3$$

66. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura del cono:

$g^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow 25 = 9 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 16 \Rightarrow h = 4$ cm

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 4 \text{ cm} =$$

$= 37{,}68$ cm^3

67. Resolvemos:

a) La generatriz del cono coincide con el radio del semicírculo, de manera que la longitud de la semicircunferencia (y de la base) es:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi g = 3{,}14 \cdot 20 = 62{,}8 \text{ cm}$$

Calculamos el radio r de la base:

$2\pi r = 62{,}8$ cm $\Rightarrow r = 62{,}8 : 6{,}28 = 10$ cm

Aplicamos el teorema de Pitágoras y calculamos la altura del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 20^2 = h^2 + 10^2 \Rightarrow 400 = h^2 + 100$

$\Rightarrow h^2 = 300 \Rightarrow h = \sqrt{300} \simeq 17{,}32$ cm

Por tanto, el radio de la base mide 10 cm, la generatriz 20 cm y la altura 17,32 cm

b) El área lateral es:

$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 10\text{cm} \cdot 20\text{cm} = 628$ cm^2

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (10\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 100\text{cm}^2 =$

$= 314$ cm^2

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + A_b = 628$ cm$^2 + 314$ cm$^2 = 942$ cm^2

c) El volumen es:

$$V = \frac{1}{3} A_b h = \frac{1}{3} \cdot 314 \text{ cm}^2 \cdot 17{,}32 \text{ cm} = 1812{,}83 \text{ cm}^3$$

Página 228

68. Utilizamos la fórmula del área lateral y despejamos la generatriz:

$A_l = \pi r g \Rightarrow 226{,}08 = 3{,}14 \cdot 6 \cdot g \Rightarrow$

$\Rightarrow g = 226{,}08 : 18{,}04 \simeq 12{,}53$ cm

La generatriz mide 12,53 cm.

69. Resolvemos cada caso:

Cono A

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = 6^2 + (4{,}5)^2 = 36 + 20{,}25 = 56{,}25 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5$ cm

El área lateral es:

$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 4{,}5\text{cm} \cdot 7{,}5\text{cm} = 105{,}98$ cm^2

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}5\text{cm})^2 = 3{,}14 \cdot 20{,}25\text{cm}^2 =$
$= 63{,}59\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 63{,}59\ \text{cm}^2 \cdot 6\ \text{cm} = 127{,}18\ \text{cm}^3$$

Cono B

Utilizamos la fórmula del área de la base y despejamos el radio:

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow 21{,}4 = 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = 21{,}4 : 3{,}14 = 6{,}82$
$\Rightarrow r = \sqrt{6{,}82} \simeq 2{,}61$ cm

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = (2{,}61)^2 + (9{,}2)^2 = 6{,}81 + 84{,}64 = 91{,}45$
$\Rightarrow g = \sqrt{91{,}45} = 9{,}56$ cm

El área lateral es:

$A_l = \pi rg \simeq 3{,}14 \cdot 2{,}61\text{cm} \cdot 9{,}56\text{cm} = 78{,}35\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 21{,}4\ \text{cm}^2 \cdot 9{,}2\text{cm} = 65{,}63\ \text{cm}^3$$

Cono C

Utilizamos la fórmula del volumen y despejamos el radio:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow 1816 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 15{,}4 \Rightarrow$$

$r^2 = 1816 : 16{,}12 \simeq 112{,}66 \Rightarrow r = \sqrt{112{,}66} \simeq 10{,}61$cm

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = (15{,}4)^2 + (10{,}61)^2 = 237{,}17 + 112{,}66 =$
$= 349{,}82 \Rightarrow g = \sqrt{349{,}82} = 18{,}70$ cm

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot 112{,}66 = 353{,}75\ \text{cm}^2$

El área lateral es:

$A_l = \pi rg \simeq 3{,}14 \cdot 10{,}61\text{cm} \cdot 18{,}70\text{cm} = 623\ \text{cm}^2$

Cono D

Utilizamos la fórmula del área lateral del cono y despejamos el radio:

$A_l = \pi rg \Rightarrow 954 = 3{,}14 \cdot r \cdot 23{,}9 \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 954 : 75{,}05 \simeq 12{,}71$ cm

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (23{,}9)^2 = h^2 + (12{,}71)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 = 571{,}21 - 161{,}54 = 409{,}67 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \sqrt{409{,}67} \simeq 20{,}24$ cm

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (12{,}71)^2 = 507{,}25\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 507{,}25\ \text{cm}^2 \cdot 20{,}24\text{cm} = 3422{,}25\ \text{cm}^3$$

Cono	A	B	C	D
Altura (cm)	6	9,2	15,4	20,2
Radio (cm)	4,5	2,6	10,6	12,7
Generatriz (cm)	7,5	9,6	18,7	23,9
Área de una base (cm^2)	63,6	21,4	353,8	507,3
Área lateral (cm^2)	106	78,4	623	954
Volumen (cm^3)	127,2	65,6	1816	3422,3

70. En un cono de radio r y altura h, el volumen viene dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Si reducimos el radio a la mitad es $\frac{r}{2}$, y si duplicamos la altura es 2h.

El volumen del nuevo cono es:

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot 2h = \frac{1}{3}\pi\frac{r^2}{4} \cdot 2h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2}V$$

Por tanto, el volumen se reduce a la mitad.

71. El volumen del cilindro es:

$V = \pi r^2 h = 3{,}14 \cdot (6\text{cm})^2 \cdot 8\ \text{cm} = 904{,}32\ \text{cm}^3$

Utilizamos la fórmula del volumen del cono y despejamos su altura:

$$V' = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h' \Rightarrow 904{,}32 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot h' \Rightarrow$$

$\Rightarrow h' = 904{,}32 : 37{,}68 = 24$ cm

La altura del cono mide 24 cm.

72. El radio de la esfera es el radio de la circunferencia máxima, por tanto:

$l = 2\pi r \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15\ \text{cm} = 94{,}2$ cm

La longitud es de 94,2 cm.

73. El radio de la circunferencia máxima es el radio de la esfera, por tanto:

$l = 2\pi r \Rightarrow 113{,}04 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 113{,}04 : 6{,}28 = 18$ cm

El radio mide 18 cm.

74. El radio de la esfera mide 11 cm, por tanto:

El área es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot (11\text{cm})^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 121\text{cm}^2 =$
$= 1519{,}76\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (11\text{cm})^3}{3} = 5572{,}45\ \text{cm}^3$$

75. El área es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4{\cdot}3{,}14{\cdot}(18\text{cm})^2 =$

$= 4{\cdot}3{,}14{\cdot}324\text{cm}^2 = 4069{,}44\ \text{cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(18\text{cm})^3}{3} = 24\,416{,}64\ \ \text{cm}^3$$

76. El área de la esfera es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4{\cdot}3{,}14{\cdot}(6\text{cm})^2 =$

$= 4{\cdot}3{,}14{\cdot}36\text{cm}^2 = 452{,}16\ \text{cm}^2$

Utilizamos la fórmula del área del cilindro y despejamos su altura:

$A_t = A_l + 2A_b = 2\pi rh + 2{\cdot}\pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 452{,}16 = 2{\cdot}3{,}14{\cdot}6{\cdot}h + 2{\cdot}3{,}14{\cdot}6^{\ 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 452{,}16 = 37{,}68{\cdot}h + 226{,}08 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ h = 226{,}08 : 37{,}68 = 6$ cm

La altura del cilindro mide 6 cm.

77. Igualamos las expresiones del área y del volumen de la esfera, y despejamos el radio:

$$4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 4\pi = \frac{4}{3}\pi r \Rightarrow r = \left(4-\frac{4}{3}\right)\pi = \frac{8}{3}\pi$$

El radio de la esfera mide $\frac{8}{3}\pi$ cm.

78. El área de la semiesfera es:

$$A = \frac{1}{2}{\cdot}4\pi r^2 = 2{\cdot}3{,}14{\cdot}1{,}5^2 = 14{,}13\ \text{m}^2$$

El volumen de la semiesfera es:

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \simeq \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 1{,}5^3}{6} = 7{,}07\ \text{m}^3$$

79. Calculamos el número de husos esféricos:

360º : 18º = 20 husos

Calculamos el área de cada huso esférico dividiendo el área de la esfera entre 20:

$$A = \frac{1}{20}{\cdot}4\pi r^2 = \frac{1}{5}{\cdot}\pi r^2$$

80. Calculamos la amplitud de cada cuña esférica:

360º : 12 = 30º

Calculamos el volumen de cada cuña dividiendo el volumen de la esfera entre 12:

$$V = \frac{1}{12}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{9}\pi r^3$$

81. Calculamos el radio r de la esfera teniendo en cuenta que, la distancia del centro de la esfera al círculo, el radio de este círculo y el radio de la esfera determinan un triángulo rectángulo. Por tanto, por el teorema de Pitágoras:

$r^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow r = \sqrt{45} \simeq 6{,}7$ cm

El radio de la esfera mide 6,7 cm.

82. El volumen es:

$V = \pi r^2{\cdot}h \simeq 3{,}14\cdot(3\text{cm})^2\cdot 20\text{cm} = 3{,}14\cdot 9\text{cm}^2\cdot 20\text{m} =$

$= 565{,}2\ \text{cm}^3$

83. Calculamos el volumen de un cilindro de radio 9 cm y altura 16 cm:

$V = \pi r^2{\cdot}h \simeq 3{,}14\cdot(9\text{cm})^2\cdot 16\text{cm} =$

$= 3{,}14\cdot 81\text{cm}^2\cdot 16\text{cm} = 4069{,}44\ \text{cm}^3 = 4{,}069\,44\ \text{dm}^3$

Caben unos 4 litros de agua.

84. Calculamos el volumen de un cilindro de radio 7 cm y altura 25 cm:

$V = \pi r^2{\cdot}h \simeq 3{,}14\cdot(7\text{cm})^2\cdot 25\text{cm} =$

$= 3{,}14\cdot 49\text{cm}^2\cdot 24\text{cm} = 3846{,}5\ \text{cm}^3 = 3{,}8465\ \text{dm}^3$

Caben 3,85 litros de agua aproximadamente.

85. Calculamos el volumen de un cono de radio de la base 19 km y altura 3,776 km:

$$V = \frac{1}{3}{\cdot}\pi r^2{\cdot}h = \frac{1}{3}\cdot 3{,}14\cdot(19\ \text{km})^2\cdot 3{,}776\ \text{km} =$$

$= 1426{,}75\ \text{km}^3 = 1427\ \text{km}^3$

El volumen aproximado es de 1427 km^3.

86. El área de la Tierra es:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4\cdot 3{,}14\cdot(6400\ \text{km})^2 =$

$= 4\cdot 3{,}14\cdot 40\,960\,000\ \text{km}^2 = 514\,457\,600\ \text{km}^2$

El volumen de la Tierra es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(6400\text{km})^3}{3} =$$

$= 1\,097\,509\,547\,000\ \text{km}^3$

87. El volumen de la luna es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(1730\text{km})^3}{3} =$$

$= 21\,677\,375\,170\ \text{km}^3$

Dividimos los volúmenes de la tierra y la luna y observamos que la luna es 50,6 veces más pequeña.

88. Calculamos el área de la esfera de radio 11 cm:

$A = 4\pi r^2 \simeq 4\cdot 3{,}14\cdot(11\ \text{cm})^2 = 1519{,}76\ \text{cm}^2$

Se necesitan 1519,76 cm^2 de cuero.

89. Resolvemos:

a) Calculamos el área lateral del cilindro de altura 11 cm y radio 2,8 cm:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2\cdot 3{,}14\cdot 2{,}8\ \text{cm}\cdot 11\ \text{cm} = 193{,}42\ \text{cm}^2$

La etiqueta de papel mide 193,42 cm^2.

b) Calculamos el área del círculo de radio 2,8 cm:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14\cdot(2{,}8\ \text{cm})^2 = 3{,}14\cdot 7{,}84\ \text{cm}^2 =$

$= 24{,}62\ \text{cm}^2$

90. Calculamos el radio de la base:

$l = 2\pi r \Rightarrow\ 28{,}26 = 2{\cdot}3{,}14{\cdot}r \Rightarrow$

$\Rightarrow\ r = 28{,}26 : 6{,}28 = 4{,}5$ m

Calculamos el volumen del cilindro:

$V = A_b \cdot h = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}5\ m)^2 \cdot 6\ m = 381{,}51\ m^3 =$

$= 381\ 510\ dm^3 = 381\ 510\ l = 3815{,}1\ hl$

91. Calculamos:

a) Calculamos el área lateral del cilindro:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 16cm \cdot 12cm = 1205{,}76\ cm^2$

Se necesita $1205{,}76\ cm^2$ de papel.

b) Calculamos el área de la base del cilindro:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (16\ cm)^2 = 3{,}14 \cdot 256 cm^2 =$

$= 803{,}84\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + 2A_b = 1205{,}76 cm^2 + 2 \cdot 803{,}84 cm^2 =$

$= 2813{,}44\ cm^2$

La superficie de hojalata mide $2813{,}44\ cm^2$.

c) Calculamos el volumen del cilindro:

$V = A_b \cdot h = 803{,}84\ cm^2 \cdot 12\ cm = 9646{,}08\ cm^3$

El volumen del bote es de unos 9,65 litros.

Página 229

92. Calculamos:

a) Utilizamos la fórmula del área lateral y despejamos el radio:

$A_l = 2\pi rh \Rightarrow 633{,}80 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r \cdot 17 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 633{,}80 : 106{,}76 \simeq 5{,}94\ m$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (5{,}94 m)^2 = 110{,}8\ m^2$

b) El área total es:

$A_t = A_l + A_b = 633{,}80\ m^2 + 110{,}8\ m^2 = 744{,}6\ m^2$

c) El volumen es:

$V = A_b \cdot h = 110{,}8\ m^2 \cdot 17\ m = 1883{,}6\ m^3$

93. Calculamos el volumen de un cono de radio 2,5 cm y altura 12 cm:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}5\ cm)^2 \cdot 12\ cm =$$

$= 78{,}5\ cm^3$

Caben $78{,}5\ cm^3$ de helado.

94. Resolvemos:

a) Tenemos que restar al volumen de la semiesfera el volumen del cilindro

El volumen de la semiesfera es:

$$V_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \simeq \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^3}{6} = 133{,}97\ m^3$$

Calculamos el volumen de un cilindro de radio 1 m y altura 2 m:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot 1^2 \cdot 2 = 6{,}28\ m^3$

Obtenemos el volumen de la pieza:

$V = V_{semiesfera} - V_{cilindro} = 133{,}97\ m^3 - 6{,}28\ m^3 =$

$= 127{,}69\ m^3$

b) Tenemos que sumar la superficie de la esfera, la del círculo de la base de la semiesfera y la superficie lateral del cilindro:

El área de la semiesfera es:

$$A_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 100{,}48\ m^2$$

El área del círculo de la base es:

$A_{círculo} = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24\ m^2$

El área lateral del cilindro es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \cdot 2 = 12{,}56\ m^2$

La superficie a pintar es:

$A = A_{semiesfera} + A_{círculo} + A_l =$

$= 100{,}48\ m^2 + 50{,}24\ m^2 + 12{,}56\ m^2 = 163{,}28\ m^2$

Por tanto, el coste de pintarla será:

$2{,}75\ €/m^2 \cdot 163{,}28\ m^2 = 449{,}02\ €$

95. Tenemos que restar al volumen de un cilindro el volumen de una esfera:

El volumen del cilindro (vaso) es:

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (44{,}5 mm)^2 \cdot 96\ mm =$

$= 3{,}14 \cdot 1908{,}25\ mm^2 \cdot 96\ mm = 596\ 926{,}56\ mm^3$

El volumen de la esfera (cubito) es:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (27{,}5\ mm)^3}{3} =$$

$$= \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 20796{,}88\ mm^3}{3} = 87\ 069{,}6\ mm^3$$

El volumen a calcular es:

$V = V_{cilindro} - V_{esfera} =$

$= 596\ 926{,}56\ mm^3 - 87\ 069{,}6\ mm^3 =$

$= 509\ 856{,}96\ mm^3 = 0{,}50985696\ dm^3$

Por tanto, se necesita medio litro de líquido aproximadamente.

96. El volumen de el cilindro mayor es:

$V_1 = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (14 cm)^2 \cdot 15 cm = 9231{,}6\ cm^3$

El volumen de el cilindro menor es:

$V_2 = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (10 cm)^2 \cdot 5 cm = 1570\ cm^3$

El volumen del medio cono es:

$$V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot (10\ cm)^2 \cdot 13 cm =$$

$= 680{,}33\ cm^3$

El volumen de la pieza es $V = V_1 + V_2 + V_3 =$

$= 9231{,}6\ cm^3 + 1570\ cm^3 + 680{,}33\ cm^3 =$

$= 11\ 481{,}93\ cm^3$

97. Para cada cilindro tenemos que restar al volumen del cilindro exterior el volumen del cilindro interior:

Calculamos el primer volumen, con radios de 11 mm y 11 – 2,7 = 8,3 mm, y altura 3,3 mm:

$V_{1ext} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (11 mm)^2 \cdot 3{,}3 mm = 1253{,}8\ mm^3$

$V_{1int} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (8{,}3 mm)^2 \cdot 3{,}3 mm = 713{,}84\ mm^3$

$V_1 = V_{1ext} - V_{1int} = 1253,8 \text{ mm}^3 - 713,84 \text{ mm}^3 =$
$= 539,96 \text{ mm}^3$

Calculamos el segundo volumen, con radios de 8,3 mm y 8,3 – 2,7 = 5,6 mm, y altura 3,3 + 4,6 = 7,9 mm:

$V_{2ext} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (8,3\text{mm})^2 \cdot 7,9\text{mm} = 1708,89 \text{ mm}^3$

$V_{2int} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (5,6\text{mm})^2 \cdot 7,9\text{mm} = 777,92 \text{ mm}^3$

$V_2 = V_{2ext} - V_{2int} = 1708,89 \text{ mm}^3 - 777,92 \text{ mm}^3 =$
$= 930,97 \text{ mm}^3$

Calculamos el tercer volumen, con radios de 5,6 mm y 5,6 – 2,7 = 2,9 mm, y altura 7,9 + 4,6 = 12,5 mm:

$V_{3ext} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (5,6\text{mm})^2 \cdot 12,5\text{mm} = 1230,88 \text{ mm}^3$

$V_{3int} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (2,9\text{mm})^2 \cdot 12,5\text{mm} = 330,09 \text{ mm}^3$

$V_3 = V_{3ext} - V_{3int} = 1230,88 \text{ mm}^3 - 330,09\text{mm}^3 =$
$= 900,79 \text{ mm}^3$

Calculamos el cuarto volumen, con radios de 2,9 mm y 2,9 – 2,7 = 0,2 mm, y altura 12,5 + 4,6 = 17,1 mm:

$V_{4ext} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (2,9\text{mm})^2 \cdot 17,1\text{mm} = 451,57 \text{ mm}^3$

$V_{4int} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (0,2\text{mm})^2 \cdot 17,1\text{mm} = 2,15 \text{ mm}^3$

$V_4 = V_{4ext} - V_{4int} = 1230,88 \text{ mm}^3 - 2,15 \text{ mm}^3 =$
$= 449,42 \text{ mm}^3$

El volumen de polietileno es:

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 =$
$= 539,96 \text{ mm}^3 + 930,97 \text{ mm}^3 + 900,79 \text{ mm}^3 +$
$+ 449,42 \text{ mm}^3 = 2821,14 \text{ mm}^3$

98. Las soluciones son:

a) El volumen es:
$V = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (0,6 \text{ m})^2 \cdot 8\text{m} = 9,04 \text{ m}^3$

b) La masa de la columna es:
$2600 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,04 \text{ m}^3 = 23\,504 \text{ kg}$

99. Calculamos:

a) El área lateral es la suma del área lateral del cono y la del cilindro:

La generatriz del cono la calculamos utilizando el teorema de Pítagoras:

$g^2 = h^2 + r^2 = 7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{85} \simeq 9,22 \text{ cm}$

El área lateral del cono es:

$A_l = \pi r g \simeq 3,14 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 9,22 \text{ cm} = 173,7 \text{ cm}^2$

El área lateral del cilindro es:

$A_l = 2\pi r h \simeq 2 \cdot 3,14 \cdot 6\text{cm} \cdot 18\text{cm} = 678,24 \text{ cm}^2$

Por tanto, el área lateral de la pieza es de:

$173,7 \text{ cm}^2 + 678,24 \text{ cm}^2 = 851,94 \text{ cm}^2$

El área total se obtiene añadiendo el área de la base del cilindro:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3,14 \cdot (6\text{cm})^2 = 3,14 \cdot 36\text{cm}^2 =$
$= 113,04 \text{ cm}^2$

Luego, el área total es de:

$851,94 \text{ cm}^2 + 113,04 \text{ cm}^2 = 964,98 \text{ cm}^2$

b) El volumen es la suma del volumen del cono y el del cilindro:

El volumen del cono es:

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot (6 \text{ cm})^2 \cdot 7\text{cm} =$
$= 263,76 \text{ cm}^3$

El volumen del cilindro es:

$V = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (6\text{cm})^2 \cdot 18\text{cm} =$
$= 3,14 \cdot 36\text{cm}^2 \cdot 18\text{cm} = 2034,72 \text{ cm}^3$

Por tanto, el volumen de la pieza es de:

$263,76 \text{ cm}^3 + 2034,72 \text{ cm}^3 = 2298,48 \text{ cm}^3$

c) El volumen de la pieza es de 2,29848 dm^3, por tanto su masa es de:

$7,87 \text{ kg/dm}^3 \cdot 2,29848 \text{ dm}^3 = 18,09 \text{ kg}$

100. Calculamos el área lateral del cilindro y el área de la base:

El área lateral es:

$A_l = 2\pi r h \simeq 2 \cdot 3,14 \cdot 3\text{m} \cdot 6\text{m} = 113,04 \text{ m}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3,14 \cdot (3\text{cm})^2 = 3,14 \cdot 9\text{cm}^2 = 28,26 \text{ m}^2$

Por tanto, la superficie a pintar es:

$A_t = 2 \cdot A_l + A_b = 2 \cdot 113,04 \text{ m}^2 + 28,26 \text{ m}^2 =$
$= 226,08 \text{ m}^2 + 28,26 \text{ m}^2 = 254,34 \text{ m}^2$

Obtenemos los botes de pintura:

$254,34 \text{ m}^2 : 43 \text{ m}^2\text{/bote} = 5,91$ botes

Calculamos el precio:

6 botes · 120 euros/bote = 720 euros

Por tanto, se necesitan 6 botes de pintura y costarán 720 euros.

101. Calculamos el volumen del cilindro:

$V = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (0,5 \text{ m})^2 \cdot 1,5 \text{ m} = 1,1775 \text{ m}^3 =$
$= 1177,5$ litros

Calculamos el tiempo:

1177,5 litros : 40 litros/minuto = 29,44 minutos

Por tanto, tardará aproximadamente 29 minutos y 26 segundos.

102. Calculamos primero la capacidad de cada recipiente por separado:

El volumen del vaso es:

$\pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 9^2 \cdot 2x = 162\pi \cdot x \text{ cm}^3$

El volumen de la copa es:

$\pi r^2 \cdot h + \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot x = \pi \cdot 9^2 \cdot 6 + \frac{1}{3}\pi \cdot 9^2 \cdot x =$

$= (486\pi + 27\pi \cdot x)\text{cm}^3$

Igualamos ambas expresiones:

$162\pi \cdot x = 486\pi + 27\pi \cdot x$;

$162 \cdot x = 486 + 27 \cdot x$;

$135 \cdot x = 486$;

$x = 3,6$

Por lo tanto, el valor de x ha de ser 3,6 cm para que ambos recipientes tengan la misma capacidad.

Esta capacidad es la siguiente:

$162\pi \cdot 3,6 = 162 \cdot 3,14 \cdot 3,6 = 1831,25 \text{ cm}^3$

103. Calculamos el radio r del círculo que forma la superficie del agua, utilizando la fórmula del volumen del cono de 18 cm = 1,8 dm de altura:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \Rightarrow 1 = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot r^2 \cdot 1,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 = 1 : 1,884 \simeq 0,53 \Rightarrow r = \sqrt{0,53} \simeq 0,73 \text{ dm}$$

Calculamos el radio R del cono, utilizando la semejanza de triángulos:

$$\frac{1,8}{0,73} = \frac{2,5}{R} \Rightarrow 1,8R = 1,825 \Rightarrow R = 1,01 \text{ dm}$$

Calculamos el volumen del cono (jarrón):

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot (1,01\text{dm})^2 \cdot 2,5 \text{ dm} =$$

$$= 2,67 \text{ dm}^3$$

El jarrón tiene una capacidad aproximada de 2,67 litros.

104. Calculamos el volumen del cilindro:

$V = \pi r^2 \cdot h \simeq 3,14 \cdot (7\text{cm})^2 \cdot 12\text{cm} = 1846,32 \text{ cm}^3$

Calculamos la masa del aceite, cuando el recipiente está lleno:

$1846,32 \text{ cm}^3 \cdot 0,918 \text{ g/cm}^3 = 1694,92 \text{ g} \simeq 1,69 \text{ kg}$

Calculamos la masa del recipiente vacío:

$3 - 1,69 = 1,31$ kg

Por tanto, la masa cuando está vacío es de 1,31 kg.

Página 230

105. Igualamos las expresiones del volumen del cilindro de altura h_{ci} y de la esfera:

$$\pi r^2 \cdot h_{ci} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow h_{ci} = \frac{4}{3} r$$

La altura del cilindro es cuatro tercios del radio.

Igualamos las expresiones del volumen del cono de altura h_{co} y de la esfera:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_{co} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow h_{co} = 4r$$

La altura del cono es el cuádruple del radio.

106. Ejercicio resuelto en el libro.

107. Prolongamos la altura y la generatriz del tronco, y obtenemos dos triángulos en posición de Tales, de manera que:

$$\frac{x}{6} = \frac{x+8}{18} \Rightarrow 18x = 6x + 48 \Rightarrow 12x = 48 \Rightarrow x = 4$$

Calculamos la generatriz g del cono mayor:

$g^2 = 12^2 + 18^2 = 144 + 324 = 468 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{468} \simeq 21,63$ cm

Calculamos la generatriz g' del cono menor:

$g'^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow g' = \sqrt{52} \simeq 7,21$ cm

El área lateral del tronco es la diferencia entre las áreas laterales de los dos conos:

$A_l = \pi Rg - \pi rg' =$

$= 3,14 \cdot 18 \text{ cm} \cdot 21,63 \text{ cm} - 3,14 \cdot 6 \text{ cm} \cdot 7,21 \text{ cm} =$

$= 1222,53 \text{ cm}^2 - 135,84 \text{ cm}^2 = 1086,69 \text{ cm}^2$

El área de las bases es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3,14 \cdot (6\text{cm})^2 = 3,14 \cdot 36\text{cm}^2 = 113,04 \text{ cm}^2$

$A_B = \pi R^2 \simeq 3,14 \cdot (18\text{cm})^2 = 3,14 \cdot 324\text{cm}^2 =$

$= 1017,36 \text{ cm}^2$

El área del tronco de cono es:

$A = A_l + A_b + A_B = 1086,69 \text{ cm}^2 + 113,04 \text{ cm}^2 +$

$+ 1017,36 \text{ cm}^2 = 2217,09 \text{ cm}^2$

108. Llamamos x a la distancia entre la base superior del cilindro y el vértice del cono, de manera que obtenemos dos triángulos en posición de Tales. Luego:

$$\frac{x}{4} = \frac{12}{6} \Rightarrow 6x = 48 \Rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

Obtenemos la altura del cilindro: 12 cm – 8 cm =

= 4 cm

Calculamos el volumen del cilindro:

$V = \pi r^2 h \simeq 3,14 \cdot (4\text{cm})^2 \cdot 4\text{cm} = 3,14 \cdot 16\text{cm}^2 \cdot 4\text{m} =$

$= 200,96 \text{ cm}^3$

109. El primer cuerpo está formado por un cono, un cilindro mayor y un cilindro menor:

Calculamos su área:

Calculamos la generatriz del cono:

$g^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow g = \sqrt{32} \simeq 5,66$ cm

El área lateral del cono es:

$A_{co} = \pi rg = 3,14 \cdot 4\text{cm} \cdot 5,66\text{cm} = 71,09 \text{ cm}^2$

El área lateral de los cilindros es:

$A_{ci1} = 2\pi Rh \simeq 2 \cdot 3,14 \cdot 4\text{cm} \cdot 2\text{cm} = 50,24 \text{ cm}^2$

$A_{ci2} = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3,14 \cdot 2\text{cm} \cdot 2\text{cm} = 25,12 \text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi R^2 \simeq 3,14 \cdot (4\text{cm})^2 = 3,14 \cdot 16\text{cm}^2 = 50,24 \text{ cm}^2$

Por tanto, el área del cuerpo es: $A = 71,09 \text{ cm}^2 +$

$+ 50,24 \text{ cm}^2 + 25,12 \text{ cm}^2 + 50,24 \text{ cm}^2 = 196,69 \text{ cm}^3$

Calculamos su volumen:

El volumen del cono es:

$$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot (4\text{cm})^2 \cdot 4 \text{ cm} = 66,99 \text{ cm}^3$$

El volumen de los cilindros es:

$V_{ci1} = \pi R^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (4cm)^2 \cdot 2cm =$

$= 3{,}14 \cdot 16cm^2 \cdot 2cm = 100{,}48\ cm^3$

$V_{ci2} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (2cm)^2 \cdot 2cm =$

$= 3{,}14 \cdot 4cm^2 \cdot 2cm = 25{,}12\ cm^3$

Por tanto, el volumen del cuerpo es: $V = 66{,}99\ cm^3 +$

$+ 100{,}48\ cm^3 + 25{,}12\ cm^3 = 192{,}59\ cm^3$

El segundo cuerpo está formado por una semiesfera y un cilindro agujereado por un cono:

Calculamos su área:

Calculamos la generatriz del cono:

$g^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow g = \sqrt{32} \simeq 5{,}66\ cm$

El área de la semiesfera es:

$A_{semi} = 2\pi r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot (4cm)^2 = 100{,}48\ cm^2$

El área lateral del cilindro es:

$A_{ci1} = 2\pi Rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8cm \cdot 4cm = 200{,}96\ cm^2$

El área lateral del cono es:

$A_{cono} = \pi rg \simeq 3{,}14 \cdot 4cm \cdot 5{,}66cm = 71{,}09\ cm^2$

El área de la corona circular es:

$A_{cc} = \pi R^2 - \pi r^2 = 3{,}14 \cdot (8^2 - 4^2) = 3{,}14 \cdot 48 =$

$= 150{,}\ 72\ cm^2$

Por tanto, el área del cuerpo es:

$A = A_{semi} + A_{ci1} + A_{cono} + 2 \cdot A_{cc} =$

$= 100{,}48\ cm^2 + 200{,}96\ cm^2 + 71{,}09\ cm^2 +$

$+ 2 \cdot 150{,}\ 72\ cm^2 = 673{,}97\ cm^3$

Calculamos su volumen:

El volumen de la semiesfera es:

$$V_{semi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \simeq \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^3}{6} = 133{,}97\ cm^3$$

El volumen del cilindro es:

$V_{ci} = \pi R^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (8cm)^2 \cdot 4cm = 803{,}84\ cm^3$

El volumen del cono es:

$$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (4cm)^2 \cdot 4\ cm =$$

$= 66{,}99\ cm^3$

Por tanto, el volumen del cuerpo es:

$V = V_{semi} + V_{ci} - V_{co} =$

$= 133{,}97\ cm^3 + 803{,}84\ cm^3 - 66{,}99\ cm^3 = 870{,}82\ cm^3$

110. El volumen de la pieza es la diferencia entre el volumen de medio cono y el volumen de medio cilindro:

El volumen de medio cono es:

$$V_{co} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 3{,}14 \cdot (5\ cm)^2 \cdot 8\ cm = 104{,}67\ cm^3$$

El volumen de medio cilindro es:

$$V_{ci} = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot h \simeq \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot (1{,}5\ cm)^2 \cdot 4\ cm =$$

$= 14{,}13\ cm^3$

El volumen de la pieza es:

$V = V_{co} - V_{ci} = 104{,}67\ cm^3 - 14{,}13\ cm^3 = 90{,}54\ cm^3$

Calculamos la masa:

$7{,}85\ g/cm^3 \cdot 90{,}54\ cm^3 = 710{,}74\ g = 0{,}71074\ kg$

Calculamos el precio:

$0{,}185$ euros/kg $\cdot\ 0{,}71074$ kg $= 0{,}13$ euros

El material cuesta 13 céntimos.

111. Ejercicio resuelto en el libro.

112. El área es la diferencia entre el área de la esfera y el área curva del huso esférico, más el área de los dos semicírculos (un círculo):

El área de la esfera es:

$A_{es} = 4\pi r^2 \simeq 4 \cdot 3{,}14 \cdot (4cm)^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 16cm^2 =$

$= 200{,}96\ cm^2$

El área del huso es:

$$A_{hu} = \frac{200{,}96\ cm^2}{360º} \cdot 110º = 61{,}40\ cm^2$$

El área del círculo es:

$A_{ci} = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4cm)^2 = 3{,}14 \cdot 16cm^2 = 50{,}24\ cm^2$

El área es:

$A = A_{es} - A_{hu} + A_{ci} =$

$= 200{,}96\ cm^2 - 61{,}40\ cm^2 + 50{,}24\ cm^2 = 212{,}12\ cm^2$

El volumen es la diferencia entre el volumen de la esfera y el volumen del huso esférico:

El volumen de la esfera es:

$$V_{es} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (4\ cm)^3}{3} = 267{,}95\ cm^3$$

El volumen del huso es:

$$V_{hu} = \frac{267{,}95\ cm^3}{360º} \cdot 110º = 81{,}87\ cm^3$$

El volumen es $V = V_{es} - V_{hu} =$

$= 267{,}95\ cm^3 - 81{,}87\ cm^3 = 186{,}08\ cm^3$

113. Llamamos x a la distancia de la base a la que debemos situar el plano de corte.

El volumen del cono (sin cortar) es:

$$V_{co} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (12cm)^2 \cdot 18cm =$$

$= 2712{,}96\ cm^3$

El volumen del cono cortado es:

$2712{,}96 : 2 = 1356{,}48\ cm^3$, por tanto:

$$1356{,}48 = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \cdot (18 - x)$$

Por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{18-x}{r}=\frac{18}{12}\Rightarrow 12(18-x)=18r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{12}{18}(18-x) \Rightarrow r=\frac{2}{3}(18-x)$$

Sustituimos en la expresión del volumen anterior y despejamos x:

$$1356{,}48=\frac{1}{3}\cdot 3{,}14\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 {}^2\cdot(18-x)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (18-x)^3 = 1356{,}48 : 0{,}47 = 28886{,}13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18-x=\sqrt[3]{2886{,}13}\simeq 14{,}24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 18-14{,}24 = 3{,}76 \text{ cm}$$

La distancia de la base a la que debemos situar el plano de corte es de 3,76 cm.

114. El radio del círculo es el radio del hexágono y coincide con su lado (12 cm):

Utilizamos el teorema de Pitágoras para calcular la apotema “a” del hexágono, que coincide con el radio de la base del cono:

$$12^2 = a^2 + 6^2 \Rightarrow a^2 = 144 - 36 = 108 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{108}=10{,}39 \text{ cm}$$

El volumen del cilindro es:

$$V_{ci}=\pi r^2\cdot h \simeq 3{,}14\cdot(12\text{cm})^2\cdot 2\text{cm} = 904{,}32 \text{ cm}^3$$

El volumen del prisma es:

$$V_{pri}=\frac{p\cdot a}{2}\cdot h=\frac{6\cdot 12\text{cm}\cdot 10{,}39\text{cm}}{2}\cdot 1 = 374{,}04 \text{ cm}^3$$

El volumen del cono es:

$$V_{co}=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 3{,}14\cdot(10{,}39\text{cm})^2\cdot 8\text{cm}=$$

$$= 903{,}92 \text{ cm}^3$$

El volumen del cuerpo es:

$$V = V_{ci}+V_{pri}+V_{co} = 904{,}32 \text{ cm}^3 + 374{,}04 \text{ cm}^3 +$$

$$+ 903{,}92 \text{ cm}^3 = 2182{,}28 \text{ cm}^3$$

115. Actividad de investigación sobre las secciones cónicas:

Cónicas no degeneradas:

Circunferencia

Elipse

Hipérbola

Parábola

Cónicas degeneradas:

Punto

Recta

Rectas secantes

Desarrolla tus competencias

1. Porque no es posible coser (o pegar) ningún material para formar una esfera perfecta.

2. El icosaedro truncado tiene 90 aristas y 60 vértices.

3. La diagonal del cubo es el diámetro de la esfera circunscrita, que mide $d = 2\sqrt{3}$ cm

El volumen del cubo es:

$$V_{cu} = (2\text{cm})^3 = 8 \text{ cm}^3$$

El volumen de la esfera circunscrita es.

$$V_{es}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4\cdot 3{,}14\cdot\left(\sqrt{3}\text{ cm}\right)^3}{3}=21{,}75 \text{ cm}^3$$

La esfericidad es $\frac{V_{cubo}}{V_{esfera}}=\frac{8 \text{ cm}^3}{21{,}75 \text{ cm}^3}\cdot 100 = 36{,}78$ %

4. El rombicosidodecaedro tiene 120 aristas y 60 vértices.

5. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Tiene 62 caras (casi el doble que el icosaedro truncado) de tres tipos diferentes de polígonos, por lo que resulta bas-tante más complejo y costoso de fabricar.

6. Sumamos 10% a la esfericidad del 86,74% y resulta 96,74%, es decir 97% aproximadamente. Por tanto, la opción correcta es B.

7. Si aumenta un 40% su peso, éste será el 140% de su peso:

140% de 369 g = 516,6 g

140% de 526 g = 596,4 g

Por tanto, al mojarse podría alcanzar un peso entre 516,6 g y 596,4 g.

8. Actividad de investigación personal. A modo de ejemplo:

a) Richard Buckminster Fuller (1895 - 1983) fue un diseñador, arquitecto, visionario e inventor estadounidense.

Entre muchas otras obras, libros e inventos, diseñó la cúpula geodésica.

Debido a su parecido con ella, este tipo de moléculas recibieron su nombre.

b) Por su estructura casi esférica y muy parecida a la de un balón de fútbol, alternando pentágonos y hexágonos.

Evaluación de estándares

1. Calculamos la longitud de la circunferencia de la base, y vemos si coincide con la medida de la base del rectángulo de la superficie lateral:

$l = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\text{ cm} = 25{,}12\text{ cm}$

No puede ser el desarrollo del cilindro; y debe modificarse cambiando el dato de 20 cm por 25,12 cm.

2. Utilizamos la fórmula de la longitud de la circunferencia y despejamos el radio:

$l = 2\pi r \Rightarrow 18{,}84\text{cm} = 2{\cdot}3{,}14{\cdot}r \Rightarrow r = 18{,}84\text{ cm} : 6{,}28 = 3\text{ cm}$

La otra opción es (con el rectángulo en el otro sentido):

$l = 2\pi r \Rightarrow 12{,}56\text{ cm} = 2{\cdot}3{,}14{\cdot}r \Rightarrow r = 12{,}56\text{ cm} : 6{,}28 = 2\text{ cm}$

Por tanto, el radio puede medir 2 cm o 3 cm.

3. El arco del sector circular coincide con la longitud de la circunferencia de la base, por tanto:

$l = 2\pi r = 2{\cdot}3{,}14{\cdot}5\text{ cm} = 31{,}4\text{ cm}$

4. Utilizamos la fórmula del área total del cilindro y despejamos su altura:

$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow$

$\Rightarrow 251{,}2\text{ cm}^2 = 2{\cdot}3{,}14{\cdot}(5\text{cm})^2 + 2{\cdot}3{,}14{\cdot}5\text{cm}{\cdot}h \Rightarrow$

$\Rightarrow 251{,}2\text{ cm}^2 = 157\text{ cm}^2 + 31{,}4\text{cm}{\cdot}h \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 94{,}2\text{ cm}^2 : 31{,}4\text{ cm} = 3\text{ cm}$

El volumen del cilindro es:

$V = \pi r^2{\cdot}h \simeq 3{,}14 \cdot (5\text{cm})^2 \cdot 3\text{cm} = 3{,}14 \cdot 25\text{cm}^2{\cdot}3\text{cm} = 225{,}5\text{ cm}^3$

5. Llamamos x al lado menor del rectángulo, siendo 2x el lado mayor, y calculamos sus valores resolviendo la ecuación que se obtiene utilizando su perímetro:

$2x + 4x = 28 \Rightarrow 6x = 28 \Rightarrow x = 28 : 6 = 4{,}67\text{ cm}$

Calculamos el volumen del cilindro que engendra, de radio x = 4,67 cm y altura 2x = 9,34 cm:

$V = \pi r^2{\cdot}h \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}67\text{cm})^2 \cdot 9{,}34\text{cm} = 639{,}6\text{ cm}^3$

6. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$g^2 = h^2 + r^2 = 8^2 + 12^2 = 64 + 144 = 208 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{208} \simeq 14{,}42\text{ cm}$

El área lateral es:

$A_l = \pi rg \simeq 3{,}14 \cdot 8\text{cm} \cdot 14{,}42\text{cm} = 362{,}23\text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (8\text{cm})^2 = 200{,}96\text{ cm}^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + A_b = 362{,}23\text{ cm}^2 + 200{,}96\text{ cm}^2 = 563{,}19\text{ cm}^2$

El volumen es:

$$V = \frac{1}{3}{\cdot}A_b{\cdot}h = \frac{1}{3} \cdot 200{,}96\text{ cm}^2 \cdot 12\text{ cm} = 803{,}84\text{ cm}^3$$

7. Utilizamos la fórmula del área de la esfera y despejamos el radio:

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow 615{,}44 = 4{\cdot}3{,}14{\cdot}r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 615{,}44 : 12{,}56 = 49 \Rightarrow r = \sqrt{49} = 7\text{ cm}$

El volumen es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(7\text{cm})^3}{3} = 1436{,}03\text{ cm}^3$$

Si el radio de otra esfera es 2r, el volumen es $V' = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8{\cdot}\frac{4}{3}\pi r^3 = 8{\cdot}V$, el óctuplo del volumen de la otra esfera, es decir, su volumen es de 11488,24 cm^3.

8. Calculamos el área total del cilindro:

El área lateral es:

$A_l = 2\pi rh \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4\text{cm} \cdot 6\text{cm} = 150{,}72\text{ cm}^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (4\text{cm})^2 = 50{,}24\text{cm}^2$

El área total es:

$A_t = A_l + 2A_b = 150{,}72\text{ cm}^2 + 2 \cdot 50{,}24\text{ cm}^2 = 251{,}2\text{ cm}^2$

Utilizamos la fórmula del área de la esfera y despejamos el radio:

$A = 4\pi r^2 \Rightarrow 251{,}2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 = 251{,}2 : 12{,}56 = 20 \Rightarrow r = \sqrt{20} \simeq 4{,}47\text{ cm}$

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 89{,}44\text{ cm}^3}{3} = 374{,}46\text{ cm}^3$$

9. El volumen es la suma del volumen de una semiesfera y el volumen de un ortoedro.

El volumen de la semiesfera es:

$$V_{semi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \simeq \frac{4\cdot 3{,}14\cdot(12\text{m})^3}{6} = 3617{,}28\text{ m}^3$$

El volumen del prisma (ortoedro) es:

$V_{ortoedro} = (30\text{m})^2 \cdot 8\text{ m} = 900\text{ m}^2 \cdot 8\text{ m} = 7200\text{ m}^3$

El volumen del cuerpo es:

$V = V_{semi} + V_{orto} = 3617{,}28\text{ m}^3 + 7200\text{ m}^3 = 10\,817{,}28\text{ cm}^3$

10. El volumen es la diferencia entre el volumen de un cilindro y el de un cono (su tercera parte).

El volumen del cilindro es:

$V_{ci} = \pi r^2{\cdot}h \simeq 3{,}14{\cdot}(6\text{m})^2{\cdot}8\text{m} = 3{,}14{\cdot}36\text{m}^2{\cdot}8\text{m} = 904{,}32\text{ m}^3$

El volumen del cono es:

$V_{co} = 904{,}32\text{ m}^3 : 3 = 301{,}44\text{ m}^3$

El volumen pedido es:

$V = V_{ci} - V_{co} = 904{,}32\text{ m}^3 - 301{,}44\text{ m}^3 = 602{,}88\text{ m}^3$

Estrategia e ingenio

Para pensar un poco

En al caso de la cuerda superpuesta sobre el ecuador, su longitud sería:

$$L = 2\pi R_{\text{Tierra}}$$

$$L = 2\pi \cdot 6378000 = 12756000\pi = 40074155{,}8892 \text{ m}$$

Si la cuerda se separa 1 m de la superficie de la Tierra:

$$L = 2\pi(R_{\text{Tierra}} + 1) = 2\pi R_{\text{Tierra}} + 2\pi =$$

$$= 12756000\pi + 2\pi = 12756002\pi = 40074162{,}1724 \text{ m}$$

Por lo tanto la longitud que hay que añadir a la cuerda es de 6,2832 m o lo que es lo mismo, 2π m.

Recinto con curvas

La longitud de la curva mostrada es de 4 · 4 cm = 16 cm.

Para hallar el área del recinto coloreado primero calcularemos el área de un círculo completo e independiente:

$$r = \frac{4}{2\pi} = 0{,}6366 \text{ cm}$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 0{,}6366^2 = 1{,}2732 \text{ cm}^2$$

Si reorganizamos las zonas coloreadas podemos observar que el área total del recinto coloreado es igual a la suma del área de 12 cuadrados completos y 1 círculo.

$$A_{\text{Total}} = 12 \cdot 0{,}6366^2 + 1{,}2732 = 6{,}1363 \text{ cm}^2$$

¿Cómo hallar un volumen?

Actividad personal. A modo de ejemplo:

Empleando lo aprendido sobre el principio de Arquímedes, podríamos introducir la esfera en una probeta (recipiente graduado para medir volúmenes) y medir el volumen de agua desplazada, que será igual al volumen de la figura.

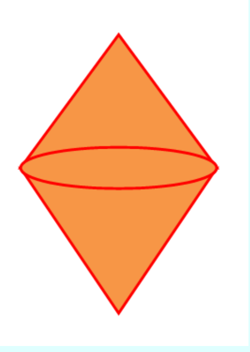
Posteriormente, despejando el radio en la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 10-7 de la guía)

11. El cuerpo geométrico que se engendra al girar un rombo alrededor de un eje que pasa por su diagonal mayor es como el siguiente:



12. Las soluciones son las siguientes:

a) El diámetro mide 8cm · 2 = 16 cm.

b) La altura mide 8 cm.

c) Aplicamos el teorema de Pitágoras y calculamos la hipotenusa, que es la generatriz:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 8^2 + 8^2 = 128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{128} \simeq 11{,}31 \text{ cm}$$

La generatriz mide 11,31 cm.

(Viene de la página 10-9 de la guía)

Página 221

18. Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la generatriz del cono:

$$g^2 = h^2 + r^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

El área lateral es:

$$A_l = \pi r g \simeq 3{,}14 \cdot 6\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 188{,}4 \text{ cm}^2$$

El área de la base es:

$$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (6 \text{ cm})^2 = 3{,}14 \cdot 36 \text{ cm}^2 = 113{,}04 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total es:

$$A_t = A_l + A_b = 188{,}4 \text{ cm}^2 + 113{,}04 \text{ cm}^2 = 301{,}44 \text{ cm}^2$$

El volumen es:

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 113{,}04\ cm^2 \cdot 8\ cm = 301{,}44\ cm^3$

19. El cono tiene generatriz g = 12 cm y radio r = 6 cm, de manera que aplicamos el teorema de Pitágoras y obtenemos la altura h:

$g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow 12^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow 144 = h^2 + 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 108 \Rightarrow h = \sqrt{108} \simeq 10{,}39\ cm$

El área lateral es:

$A_l = \pi rg \simeq 3{,}14 \cdot 6\ cm \cdot 12\ cm = 226{,}08\ cm^2$

El área de la base es:

$A_b = \pi r^2 \simeq 3{,}14 \cdot (6\ cm)^2 = 3{,}14 \cdot 36\ cm^2 = 113{,}04\ cm^2$

Por tanto, el área total es:

$A_t = A_l + A_b = 226{,}08\ cm^2 + 113{,}04\ cm^2 = 339{,}12\ cm^2$

El volumen es:

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 113{,}04\ cm^2 \cdot 10{,}39\ cm = 391{,}5\ cm^3$

(Viene de la página 10-11 de la guía)

29. Calculamos el volumen de gas:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot (12\ m)^3}{3} = 7234{,}56\ m^3$

Obtenemos el volumen de los dos depósitos más pequeños (iguales), que será la mitad:

$7234{,}56 : 2 = 3617{,}28\ m^3$

Sustituimos el dato del volumen en la fórmula y despejamos el radio:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow 3617{,}28 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot r^3 \Rightarrow$

$10851{,}84 = 12{,}56 \cdot r^3 \Rightarrow$

$r^3 = 10851{,}84 : 12{,}56 = 864 \Rightarrow$

$r = \sqrt[3]{864} \simeq 9{,}52\ m$

El radio de cada uno de los depósitos mide 9,52 m.

30. Sí, si el radio mide 3:

$A = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 4\pi \cdot 3^2 = 36\pi$

31. Llamamos A al área de la esfera de radio r y calculamos el área de la esfera de radio 2r:

$A' = 4\pi(2r)^2 = 4 \cdot \pi \cdot 4r^2 = 4A$

El área aumenta 4 veces (el cuádruple).

Llamamos V al volumen de la esfera de radio r y calculamos el volumen de la esfera de radio 2r:

$V' = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8r^3 = 8V$

El volumen aumenta 8 veces (el óctuple).

(Viene de la página 10-13 de la guía)

37. Debemos restar el volumen de los dos cilindros, el exterior y el interior:

El volumen del cilindro exterior es:

$V_{exterior} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (15\ cm)^2 \cdot 4cm =$

$= 3{,}14 \cdot 225\ cm^2 \cdot 4\ cm = 2826\ cm^3$

El volumen del cilindro interior es:

$V_{interior} = \pi r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (6cm)^2 \cdot 4cm =$

$= 3{,}14 \cdot 36cm^2 \cdot 4cm = 452{,}16\ cm^3$

El volumen de la piedra es:

$V = V_{exterior} - V_{interior} = 2826\ cm^3 - 452{,}16\ cm^3 =$

$= 2373{,}84\ cm^3$

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/749501	http://www.youtube.com/watch?v=_68Cf_8bbwQ
http://www.tiching.com/749502	http://www.geogebra.org/m/PARYTHhR
http://www.tiching.com/749504	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/redondos/index.htm
http://www.tiching.com/749505	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/cuerpos/desarrollo_cono/actividad.html
http://www.tiching.com/749506	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/cuerpos/tierra/actividad.html
http://www.tiching.com/749507	http://is-arquitectura.es/2011/09/21/casa-ecologica-de-naomi-campbell/

INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ El objetivo de esta unidad didáctica es introducir el concepto de función analizando las propiedades de sus gráficas y reconociendo alguno de los tipos de funciones más importantes.

Para empezar leeremos el texto introductorio que destaca la existencia de relaciones entre diferentes variables y utilizaremos la imagen de presentación para ponerlas de manifiesto:

– *¿De qué depende el precio de alquiler de una canoa?*

– *¿De qué depende el precio de pintar una habitación de la casa?*

– *¿Qué dos variables se relacionan en el ejemplo del alquiler de una canoa?*

– *¿Qué dos variables se relacionan en el ejemplo de pintar una habitación?*

– *¿Qué dos variables se relacionan en el ejemplo del beneficio de la venta de un producto?*

■ A continuación revisaremos con atención el índice de contenidos y el esquema de esta unidad didáctica, incidiendo en algunos conceptos básicos:

– *¿Cómo se puede describir una función?*

– *¿Qué características tiene la gráfica de una función?*

– *¿Conoces algún tipo de función?*

Empezamos la unidad

■ El documento *Para empezar...* incluye una colección de ejercicios en la que se utilizan contenidos introducidos anteriormente que son fundamentales para trabajar con funciones:

– En las actividades 1 y 2 se repasan los conceptos de coordenadas cartesianas que se aplican en la representación de funciones.

– La actividad 3 revisa uno de los tipos posibles de relación entre dos variables: la proporcionalidad directa.

– En la actividad 4 se manipulan expresiones algebraicas de sistemas de ecuaciones lineales.

– La actividad 5 trabaja expresiones que encontraremos en funciones cuadráticas.

■ Para concluir esta introducción a la unidad, el alumnado resolverá por parejas las actividades planteadas en el apartado *Para empezar*.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 3.* Leer e interpretar el enunciado que contiene léxico técnico específico.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1, 2, 3, 4 y 5.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.

■ *Acts. 1, 2 y 5.* Saber transformar la información sobre funciones y álgebra, adquirida en cursos anteriores en conocimiento propio.

■ *Esquema pág. 234.* Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Texto pág. 234.* Valorar el uso y la necesidad de las funciones para relacionar dos variables y para facilitar la comprensión visual de su nexo.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Actividades.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen sobre las potencias.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para empezar el tema de las funciones, proponemos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749827

Pediremos a nuestros alumnos que accedan al enlace y sigan las instrucciones, con la intención de detectar los conocimientos previos que tienen sobre funciones y gráficas.

Se compone de una pantalla interactiva, con diferentes apartados. En primer lugar prestaremos atención al esquema conceptual muy completo y detallado de la unidad con una explicación teórico-práctica con soporte acústico y visual que facilita la atención.

También pediremos que realicen los ejercicios autocorrectivos para que ellos mismos comprueben el nivel y los conocimientos de que parten.

A continuación, para seguir introduciendo la unidad preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Qué utilidad crees que tiene la representación gráfica de datos? ¿Por qué se utiliza tanto?*
- *¿Qué es el origen de coordenadas?*

Educamos en valores

Valoración de la tecnología como soporte al desarrollo científico y social

■ La evolución de la sociedad está estrechamente relacionada con el desarrollo de nuevas tecnologías que permiten los avances científicos y sociales.

Este valor se puede trabajar mediante algunas actividades de la unidad didáctica.

– En las págs. 247 y 248 del tema el alumnado aprenderá a utilizar una herramienta de representación de funciones.

– Las actividades de las páginas 246 y 248 darán una idea al alumnado de la rapidez con la que puede resolverse un ejercicio si utilizamos las tecnologías.

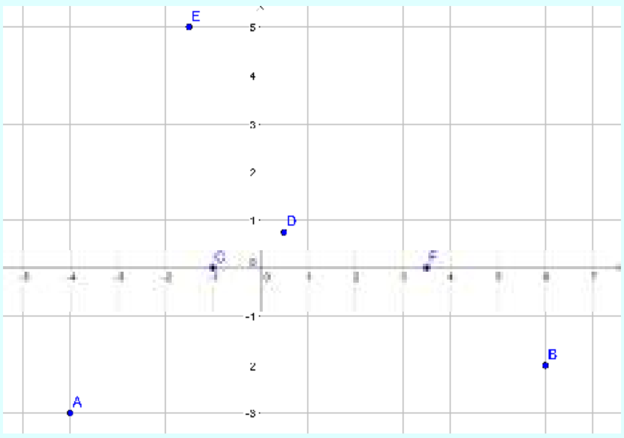
Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 235

1. La representación es la siguiente:

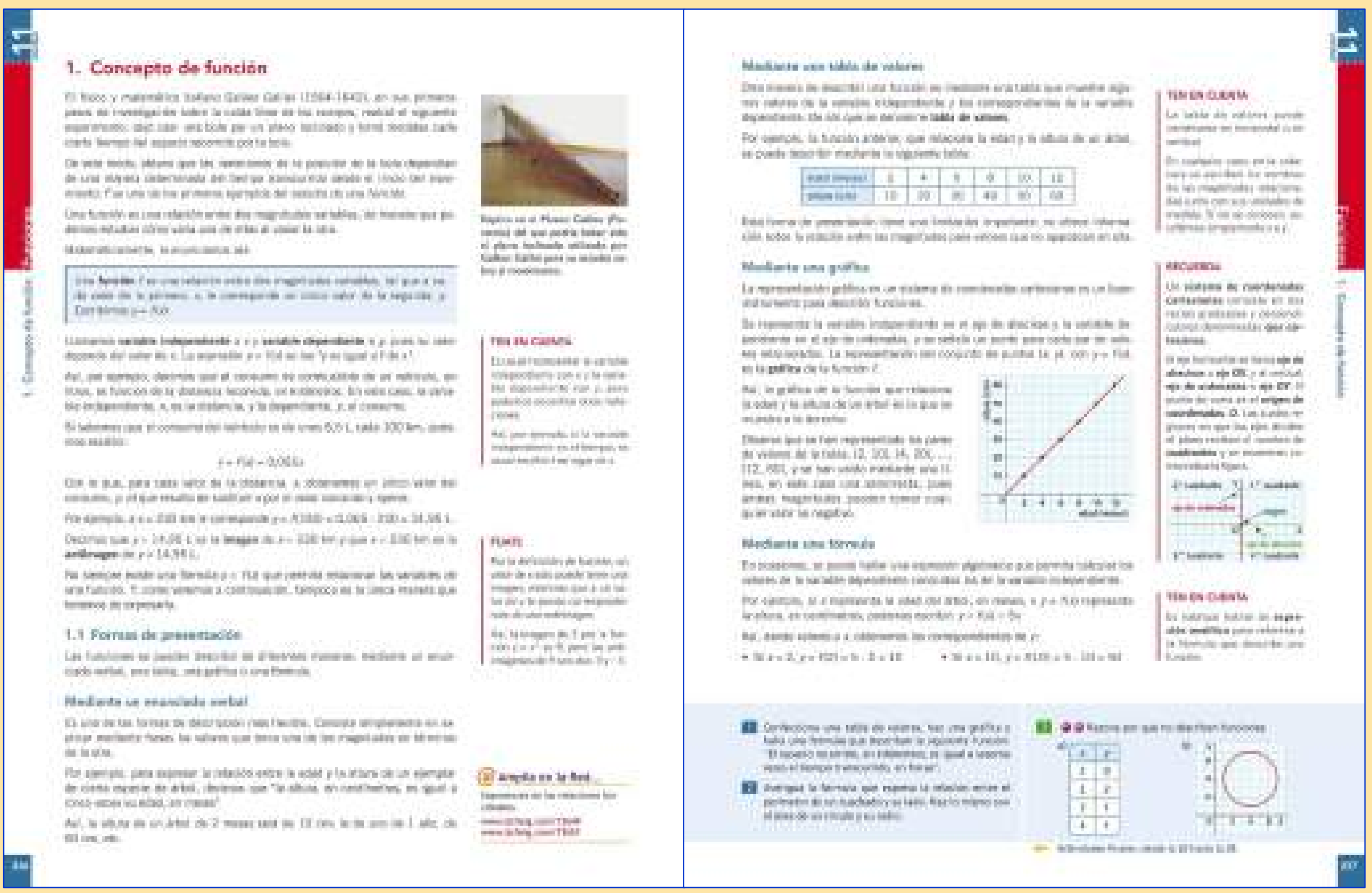


2. Actividad personal. A modo de ejemplo:

(–7, 0), (4, 0), (7, 3)

3. Que dos magnitudes sean proporcionales significa que el aumento o disminución de una, causa una aumento o disminución en la otra en la misma medida.

(Continúa en la página 11-32 de la guía)



1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

■ El objetivo básico de esta sección es introducir el concepto de función y la terminología que se emplea al describir una relación funcional.

Para empezar los alumnos y alumnas leerán los tres primeros párrafos analizando la relación funcional que se describe:

– *¿Cuáles son dos las variables que se citan en este experimento?*
– *¿Hay una variable que dependa de la otra?*

■ A continuación leerán la definición de función y el texto que introduce los conceptos de variable independiente, dependiente, imagen i antiimagen:

– *¿Qué es una función?*
– *¿Qué es la variable independiente? ¿Con qué letra se representa?*
– *¿Qué es la variable dependiente? ¿Con qué letra se representa?*
– *¿Cuál es la imagen de 1 en la función representada?*
– *¿Cuál es la antiimagen de 0,065 en esta función?*

■ Es importante destacar el contenido del documento *Fíjate* para que el alumnado sepa distinguir aquellas relaciones que no son funciones debido a que el valor de x tiene más de una imagen.

1.1 Formas de presentación

■ Proseguiremos leyendo el primer subapartado, en el que comentaremos la función descrita verbalmente:

– *¿Cuáles son las dos variables que se relacionan?*
– *¿Cuál es la variable independiente?*
– *¿Cuál es la variable dependiente?*
– *¿Cuál es la altura de un árbol de 24 meses?*

■ Seguidamente seguiremos una metodología similar para presentar las otras formas de descripción de una función:

– *¿Cuál es la variable independiente en la tabla de valores?*
– *¿Cuál la variable dependiente en la gráfica?*
– *¿Cuál es la imagen de 20 en la fórmula propuesta?*

Como repaso de estos conceptos introducidos, el alumnado puede acceder a los recursos indicados en el documento *@Amplía en la Red.*

La nota *Recuerda* nos permite describir la gráfica de una función aplicando la terminología propia de los sistemas de coordenadas.

Después afianzará los conocimientos teóricos adquiridos por medio de los ejercicios planteados en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 1 y 2.* Leer, comprender e interpretar los enunciados de los problemas para poder resolverlos.

■ *Act. 3.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios a partir de la información dada en la gráfica y la tabla.

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 3.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridos para resolver los ejercicios propuestos.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 2.* Afrontar los problemas siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la solución, aplicando eficientemente los conocimientos adquiridos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ El concepto de función se aplica en las actividades de refuerzo 1 y 2, en cuento se utiliza la forma gráfica de las funciones.

✓ Las actividades de ampliación 1 y 2 permitirán evaluar si el alumnado sabe interpretar la forma gráfica de una función analizando los parámetros que se utilizan para su descripción.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos entrar en el siguiente enlace para practicar la conversión a otros códigos de una relación funcional:

http://www.tiching.com/749828

En esta página web encontrarán un recurso didáctico que con ayuda del aplicativo GeoGebra les permitirá, de forma interactiva, comprobar por ellos mismos los conceptos que hemos explicado.

Les pediremos que resuelvan los seis ejercicios propuestos. Se trata de enunciados verbales de problemas que tendrán que convertir a tablas de valores, gráficas o expresiones algebraicas.

Automáticamente, gracias al aplicativo, verán su representación gráfica y comprobar la relación entre las magnitudes del enunciado.

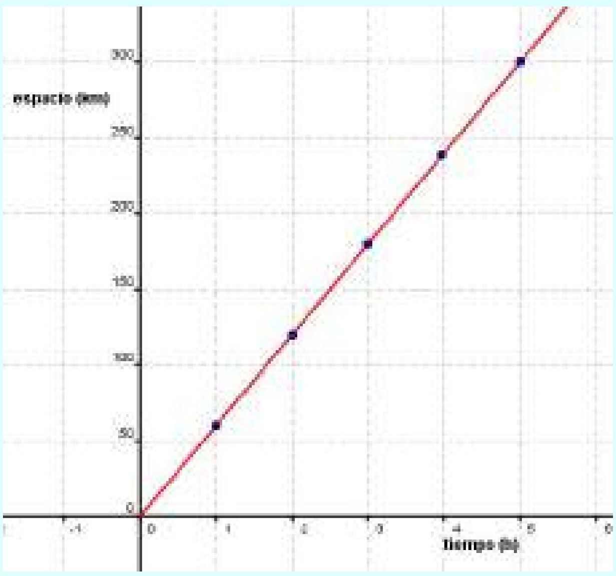
A continuación podemos pedir a los alumnos que formen parejas y que piensen dos enunciados verbales y, sin ayuda del aplicativo, el compañero lo expresará gráficamente.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 237

1. La tabla de valores, la gráfica y la formula son:

Tiempo (h)	1	2	3	4	5
Espacio (km)	60	120	180	240	300



$y = 60 \cdot x$, donde x es el tiempo e y el espacio.

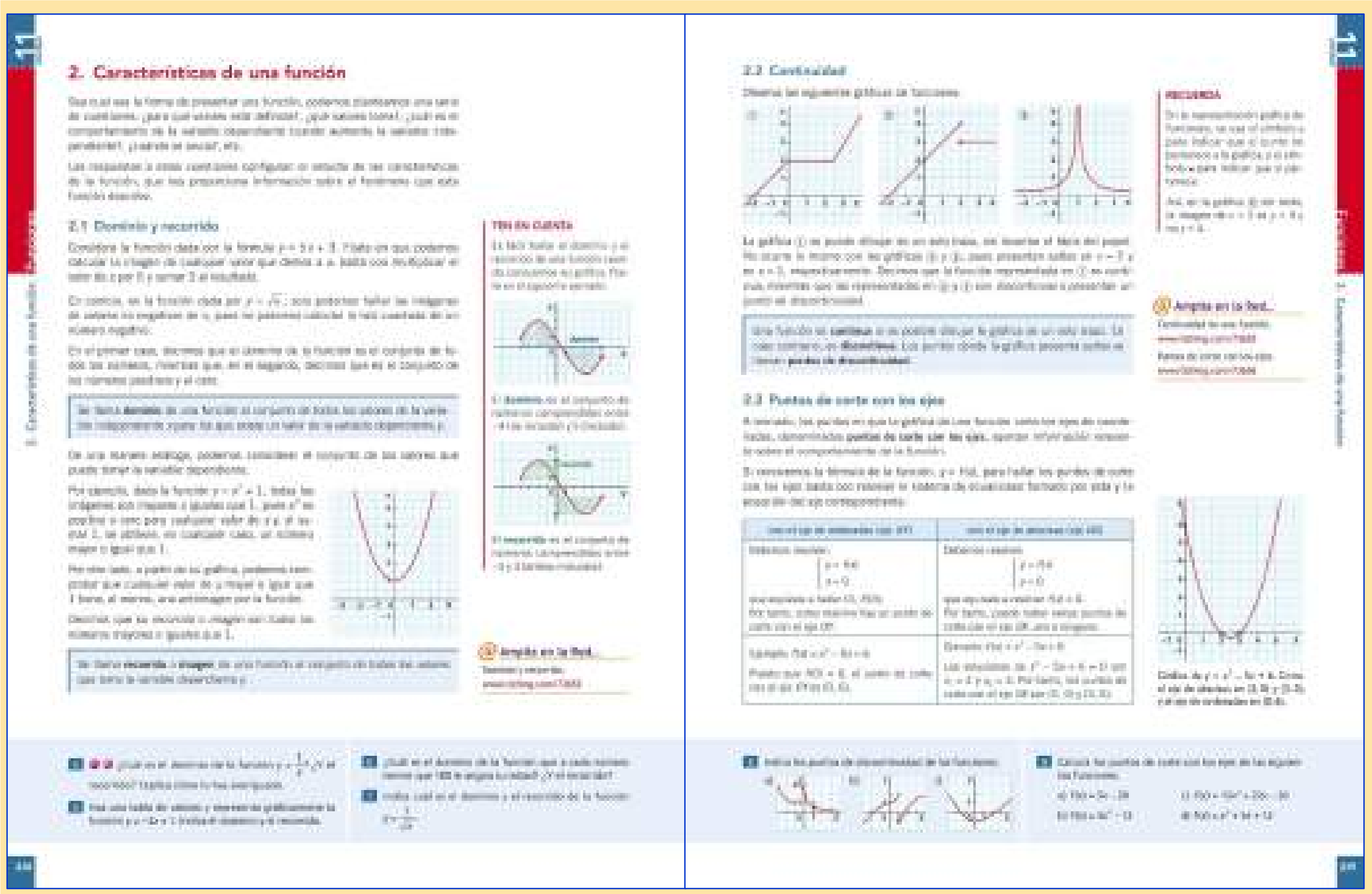
2. Si x representa al lado del cuadrado e $y = f(x)$ representa su perímetro: $y = 4x$.

Si x representa al radio del círculo e $y = f(x)$ representa su área: $y = \pi x^2$.

3. Los razonamientos son los siguientes:

a) No describe a una función porque para el mismo valor $x = 2$, le corresponden dos valores distintos de y: $y = 0$, $y = 2$.

b) No describe a una función porque para un mismo valor de x, por ejemplo $x = 4$, le corresponden dos valores distintos de y: $y = 1$, $y = 7$.



2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

■ En esta sección vamos a analizar las características que nos permiten describir una función y el proceso o fenómeno que representa.

Para empezar, los alumnos y las alumnas leerán los dos primeros párrafos que introducen el objetivo general que nos proponemos alcanzar.

2.1 Dominio y recorrido

■ A continuación pueden leer los cuatro primeros párrafos de este apartado en el que se introduce el concepto de dominio:

– *¿Cuál es el dominio de la función y = 5x +3? ¿por qué?*

– *¿Por qué el dominio de la segunda función no incluye todos los números?*

Seguidamente pueden aplicar la misma metodología para trabajar el concepto de recorrido:

– *¿Qué valores forman el recorrido o imagen de una función?*

– *¿Cuál es el recorrido de la función representada en la gráfica?*

Después pueden leer el documento del margen *Ten en cuenta*, que refuerza la diferencia entre dominio y recorrido de una función a partir de su gráfica.

Para aplicar estos conceptos, el alumnado resolverá las actividades de la página 238 del libro y compararán los resultados obtenidos entre sí*:*

2.2 Continuidad

■ Seguidamente leerán el texto de este apartado y reconocerán la continuidad y las discontinuidades representadas en las tres gráficas:

– *¿Por qué es continua la función 1?*

– *¿Por qué es discontinua la función 2? ¿Qué representan los círculos blanco y rojo?*

– *¿Por qué es discontinua la función 3?*

2.3 Puntos de corte con los ejes

■ Después de leer este apartado, analizaremos el ejemplo propuesto y comprobaremos los puntos de corte en la gráfica adjunta:

– *¿Cómo se hallan los puntos de corte con el eje OY?*

– *¿Cómo se hallan los puntos de corte con el eje OX?*

– *¿Siempre hay puntos de corte con los ejes?*

A continuación accederán a los recursos web indicados en el epígrafe *@Amplía en la Red* y finalmente pueden resolver por parejas los ejercicios de la página 239 y comprobar las soluciones obtenidas.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 4.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios y de generar ideas e hipótesis.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 5, 6 y 7.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de las actividades.
- *Acts. 9.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos para comprobar o razonar la respuesta.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 4.* Ser capaz de proponer ejemplos siendo creativo y mostrar criterio propio al buscar las respuestas.
- *Act. 8.* Identificar en la realización de las actividades y problemas, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

- ✓ La continuidad de una función y los puntos de corte de la función con los ejes se estudian en la actividad de refuerzo 1.
- ✓ La actividad de ampliación 3 permite aplicar el concepto de continuidad de una función.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Podemos ampliar la información sobre las características de las funciones accediendo a este enlace:

http://www.tiching.com/749829

El proyecto Descartes Ed@d ofrece recursos didácticos para trabajar las funciones. En esta página web los alumnos podrán encontrar las definiciones más relevantes.

Nos interesará que asimilen bien los conceptos de variables, continuidad, dominio y recorrido así como el punto de corte. Para ello, les pediremos que accedan a las actividades interactivas en las que podrán practicar con diferentes ejemplos.

Antes de introducirnos en el recurso, les pediremos que respondan a las siguientes preguntas:

- *¿Sabes qué relaciona una función?*
- *¿Puede una circunferencia ser la gráfica de una función? ¿Por qué?*

Como son actividades autocorrectivas, permiten un aprendizaje autónomo y crean motivación entre ellos.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

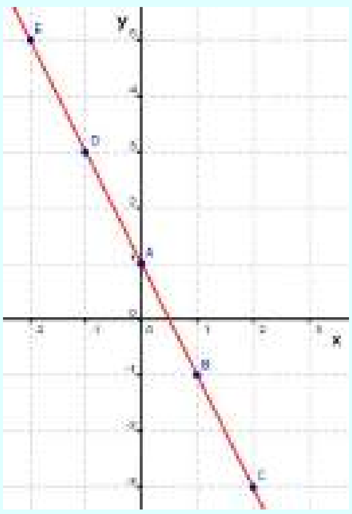
Página 238

4. El dominio es el conjunto de todos los números, excepto el cero. El recorrido es el conjunto de todos los números, excepto el cero.

Para obtener el dominio hemos tenido en cuenta los posibles valores de x, y que no se puede dividir entre cero; y para el recorrido los posibles valores de y, y que al dividir 1 entre cualquier número nunca puede ser cero.

5. La tabla de valores y la gráfica son las siguientes:

x	y
0	1
1	–1
2	–3
–1	3
–2	5



El dominio es el conjunto de todos los números.

El recorrido es el conjunto de todos los números.

6. El dominio es el conjunto de todos los números menores que 100.

El recorrido es el conjunto de todos los números menores que 50.

7. El dominio es el conjunto de todos los números positivos.

El recorrido es el conjunto de todos los números positivos, sino tenemos en cuenta los resultados negativos de la raíz.

Pág. 239

8. Las discontinuidades son:

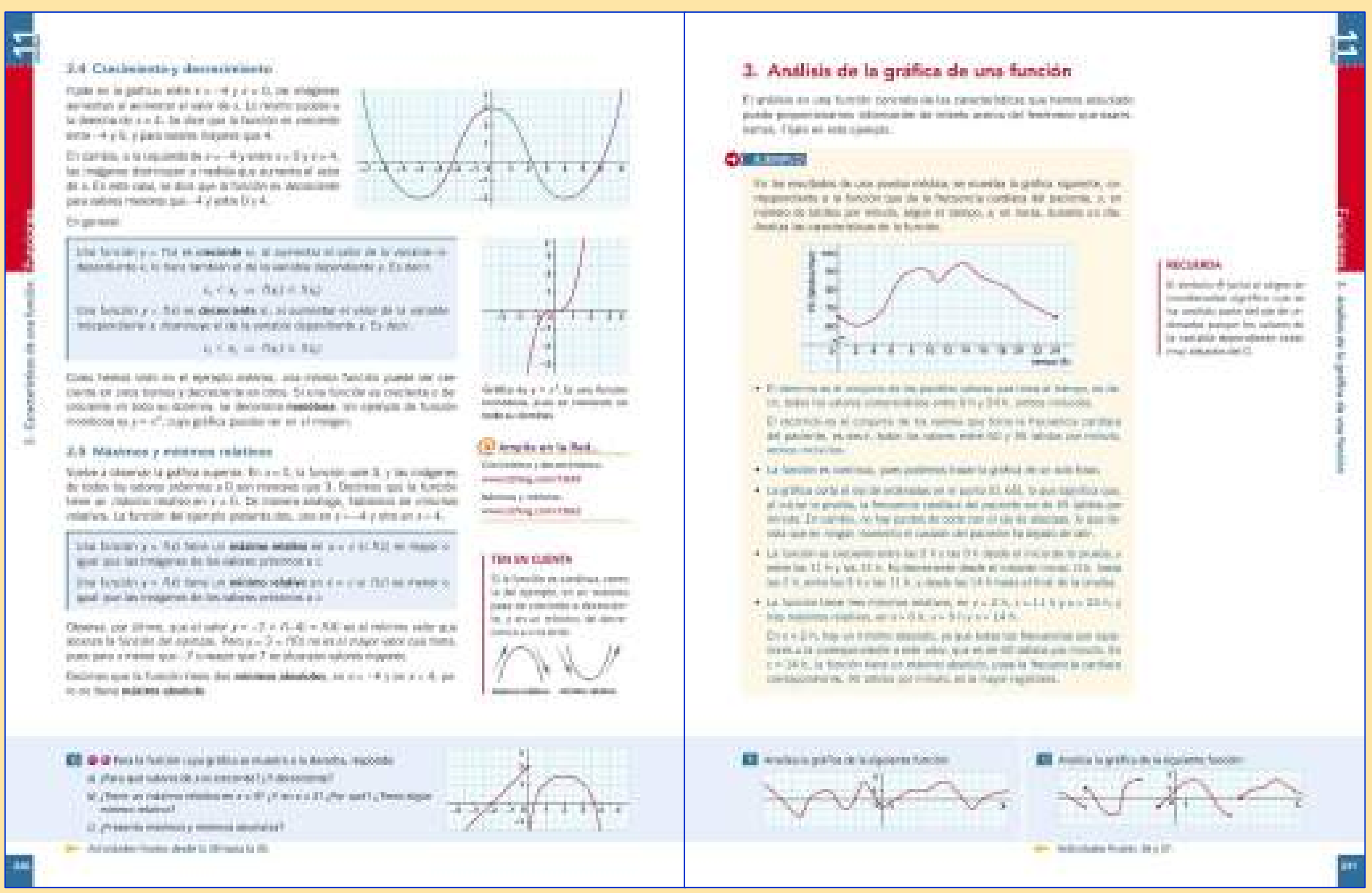
a) x = -1, x = 1 b) x = 1 c) x = 0

9. Los puntos de corte son:

a) Con el eje OY: puesto que f(0) = –20, el punto de corte con el eje OY es (0, –20).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación 5x – 20 = 0; 5x = 20; x = 4. Por tanto, el punto de corte con el eje OX es (4, 0).

(Continúa en la página 11-32 de la guía)



2. CARACTERÍSTICAS (CONT.) / 3. ANÁLISIS…

2.4 Crecimiento y decrecimiento

■ El objetivo básico de este apartado es identificar el carácter creciente o decreciente de una función o de sus diferentes tramos.

Para empezar leeremos el texto del apartado y comprobaremos la monotonía de las dos funciones que se proponen y se representan:

– *¿En qué intervalos es creciente la primera función? ¿Dónde es decreciente?*
– *¿En qué intervalo es creciente la segunda función?*
– *¿Sabrías dibujar la gráfica de una función que no fuera creciente ni decreciente?*

Después pueden practicar estos contenidos en las actividades finales 32 y 33 de la página 250.

2.5 Máximos y mínimos relativos

■ Continuaremos leyendo este apartado, comentando con el alumnado los siguientes puntos destacados:

– *¿Cómo se reconoce un máximo o un mínimo relativo en la gráfica de una función?*
– *¿Qué máximos y mínimos relativos tienen las dos funciones representadas anteriormente?*
– *¿En estas gráficas cuáles son los máximos y mínimos absolutos?*

Leeremos ahora la nota *Ten en cuenta* del margen, que presenta un criterio para identificar los máximos y los mínimos relativos.

A continuación pueden utilizar los recursos de Internet que se indican en el documento *@Amplía en la Red…*

Seguidamente pueden resolver la actividad 10 de la página 240 y las actividades finales 34 y 35 aplicando la identificación de máximos y mínimos.

3. Análisis de la gráfica de una función

■ En esta sección aplicaremos los conceptos anteriores al estudio de la función que describe un determinado proceso o fenómeno.

Las alumnas y los alumnos leerán el ejemplo que se propone e interpretarán la gráfica en el contexto indicado:

– *¿Con qué variable se relaciona el dominio de la función?*
– *¿Con qué variable se relaciona el recorrido de la función?*
– *¿En qué intervalos es creciente?*

Después leerán la nota del margen *Recuerda* que facilita la interpretación de la gráfica.

Finalmente resolverán las actividades 11 y 12 de la página 241 y las actividades finales 36 y 37.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 10.* Leer, comprender e interpretar el enunciado procesando los datos de manera adecuada para responder la actividad.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Act. 10.* Potenciar las habilidades para analizar la información que aparece en una gráfica.

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 10.* Trabajar el análisis de la gráfica de una función y saber extraer toda la información aprendida.

■ *Acts. 11 y 12.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos sobre las funciones.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 10, 11 y 12.* Reflexionar antes de resolver las actividades y tomar decisiones de forma razonada, aplicando los conocimientos y las estrategias aprendidas de manera sistemática.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ En las actividades de refuerzo 1 y de ampliación 3 se aplica el concepto de crecimiento de una función.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para practicar la interpretación correcta de gráficas de funciones proponemos el recurso del siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749830

El proyecto Gauss contiene actividades interactivas para que los alumnos practiquen y se familiaricen con la lectura y el análisis de una gráfica muy actual como es la telefonía móvil y la aplicación de diferentes tipos de cuotas.

A continuación, ejecutarán las instrucciones y tendrán que resolver las preguntas que se les indican.

Podemos realizarlo en el aula, generando un debate, para que puedan observar como cambian las gráficas en función del criterio que se aplique y que aprendan a fijarse en lo más destacable.

Al terminar, preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Crees que puede ser útil un control mensual del consumo de telefonía móvil, según tipo de contrato y gasto en minutos?*
- *Busca una factura y comprueba si hay algún gráfico descriptivo y comentadlo en clase.*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 240

10. Las respuestas son las siguientes:

a) Es creciente para valores menores que 2. Y es decreciente para valores mayores que 2.

b) En x = 0 tenemos un máximo relativo, porque ese punto está contenido en la recta creciente.

En x = 2 sí tiene máximo relativo, porque en ese punto la función vale 1,5 y las imágenes de todos los valores próximos a 2 son menores que 1,5.

No tiene ningún mínimo relativo, aunque sí que tiene un máximo absoluto en x = 0.

Página 241

11. El dominio es el conjunto de todos los números reales.

El recorrido: conjunto de todos los números entre 2 y –2 ambos incluidos.

Es continua, pues podemos trazar la gráfica de un solo trazo.

Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –1) y al eje de abscisas en los puntos (1,5; 0), (9, 0), (11, 0), (–1,5; 0), (–3, 0), (–5, 0), (–8, 0) y (–11, 0).

Es creciente desde –9 a –6, desde –4 a –2, desde 0 a 3, desde 5 a 7 y a partir de 10. Es decreciente hasta –9, desde –6 a –4, desde –2 a 0 y desde 7 a 10. Es constante entre 3 y 5.

Tiene tres mínimos relativos, en x = –9, x = –4, x = 0 y x = 10. Tiene tres máximos relativos, en x = –6, x = –2 y x = 7. Hay un mínimo absoluto en x = –9, ya que todos los demás valores de la gráfica están por encima de la imagen de ese valor, que es –2.

12. El dominio es el conjunto de todos los números menores que –4, los números entre –2 (incluido) y 6 (sin incluir) y los números mayores o iguales a 7.

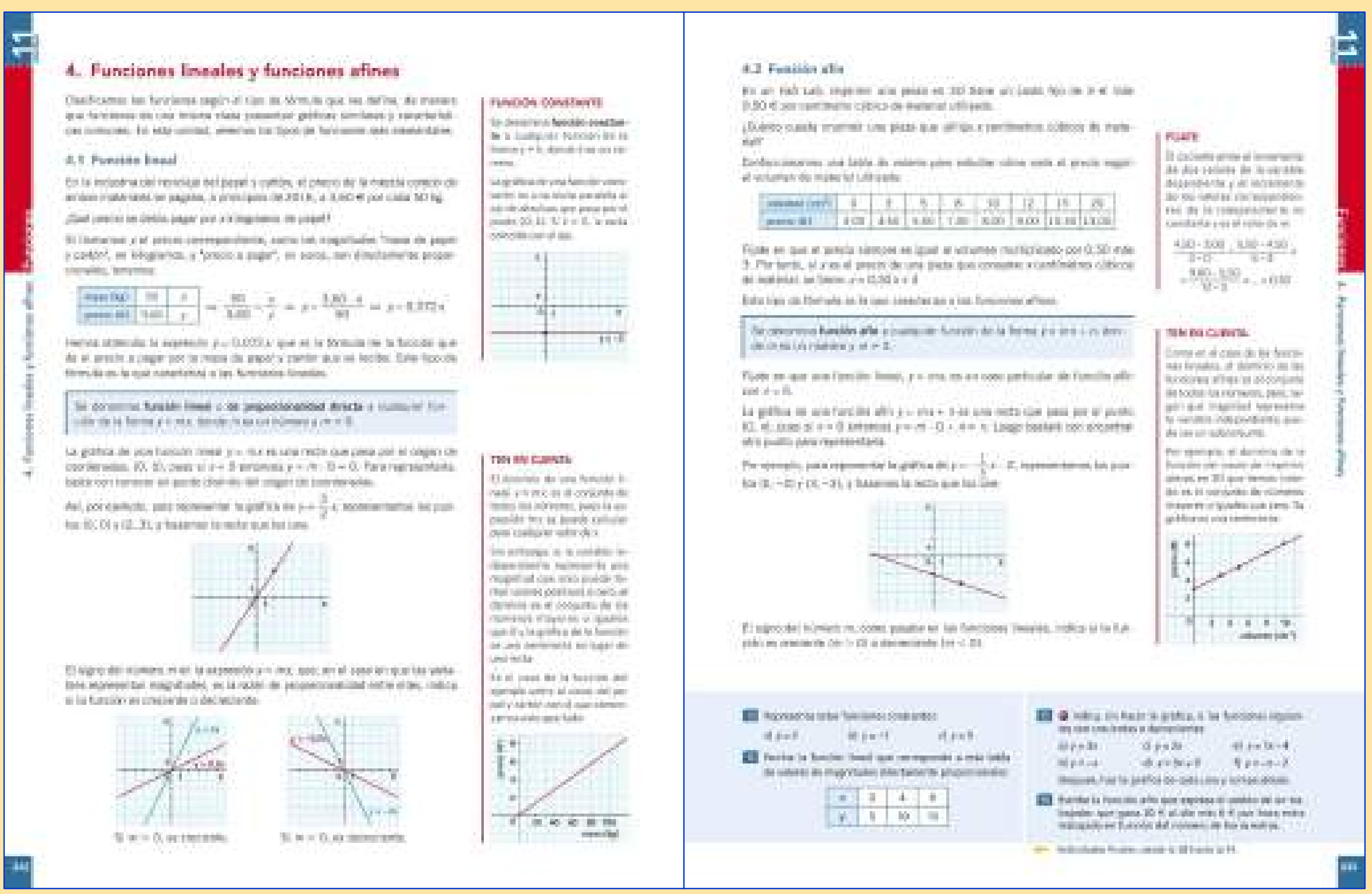
El recorrido: conjunto de todos los números entre –2 y 2.

Es discontinua, pues no podemos trazar la gráfica de un solo trazo.

Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 1) y al eje de abscisas en los puntos (-12, 0), (-9, 0), (-6, 0) , (1, 0), (4, 0), (7, 0).

Es creciente desde -7 a -4, desde -2 a 2, y desde 7 a 11. Es decreciente hasta -7, desde 2 a 6, y desde 11 en adelante.

Tiene un mínimo relativo, en x = –7. Tiene dos máximos relativos, en x = 2 y x = 11. Hay un mínimo absoluto en x = –7, ya que todos los demás valores de la gráfica están por encima de la imagen de ese valor, que es -2. Hay un máximo absoluto en x = 2 y x = 11, ya que todos los demás valores de la gráfica están por debajo de la imagen de ese valor, que es 2.


4. Funciones lineales y funciones afines

4.1 Función lineal

4.2 Función afín

4. FUNCIONES LINEALES Y FUNCIONES AFINES

■ En esta sección se introducen los principales tipos de funciones cuyo estudio se profundizará en cursos posteriores.

Para empezar leeremos la introducción y la nota del margen *Función constante* que nos permite relacionar la expresión analítica de este tipo de función con su representación gráfica.

Este contenido se puede trabajar con la actividad 14 de la página 243.

4.1 Función lineal

■ A continuación leeremos el ejemplo propuesto en este apartado que sirve para introducir las características de este tipo de funciones:

– *¿Qué relación hay entre las dos magnitudes de una función lineal?*
– *¿Cómo se reconoce la expresión analítica de una función lineal?*
– *¿Cómo se reconoce la gráfica de una función lineal?*
– *¿Cualquier función que pase por el origen de coordenadas es una función lineal?*

Después leerán el último párrafo del apartado comprobarán la relación que existe entre el signo del número *m* de la fórmula de la función y el crecimiento o decrecimiento de dicha función.

Seguidamente pueden leer el documento del margen *Ten en cuenta* que relaciona la representación gráfica de una función lineal con su dominio:

Luego resolverán la actividad 14 de la página 243 y las actividades finales 38 y 39 de la página 251.

4.2 Función afín

■ El objetivo básico de este apartado consiste en introducir las características de las funciones afines siguiendo una metodología similar a la utilizada en el caso de las funciones lineales.

En primer lugar leerán el ejemplo propuesto que conduce a la definición de función afín:

– *¿En qué se diferencia la expresión analítica de una función lineal y de una función afín?*
– *¿Cómo se reconoce la gráfica de una función afín?*

A continuación leeremos las notas del margen *Fíjate* y *Ten en cuenta* que permiten interpretar la gráfica de una función afín.

■ La segunda parte del apartado nos permitirá representar la gráfica de una función afín siguiendo el protocolo descrito.

Finalmente resolverán las actividades 15 y 16 de la página 243 y las actividades finales 40 y 41.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 16.* Expresar e interpretar de forma escrita los conocimientos adquiridos sobre la función afín.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Acts. 13 y 14.* Desarrollar la capacidad de representar datos numéricos de una tabla, en la gráfica que exprese su dominio.

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 14.* Representar los valores de las variables de una función y desarrollar la habilidad de aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridos.

■ *Act. 15.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 16.* Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación, siendo creativo e imaginativo para relacionar situaciones reales con las matemáticas.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ Las actividades de refuerzo 2 y 4 servirá para revisar las propiedades de las funciones afines y lineales.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Naveguemos por Tiching

– Para practicar las funciones lineales y afines les presentaremos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749831

En este caso, es un portal con varios ejercicios sobre la función lineal y la función afín. Nuestros alumnos podrán resolverlos y a continuación verificar el resultado.

Son actividades interactivas con las que podrán comprobar su aprendizaje y si es necesario, consultar la teoría. Es interesante el material autoevaluable porque se lo podemos presentar a los alumnos con el fin de que desarrollen un trabajo autónomo como método para asimilar conceptos matemáticos.

A continuación, les podemos hacer estas preguntas:

- *¿Podrías explicar en qué se parece una función lineal a una afín?*
- *¿Cómo reconocerás rápidamente una gráfica de una función lineal?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 243

13. Las representaciones son:

Ver figura 1 en la página 11-34 de la guía

14. La función es, y = 5x/2 porque 5/2 es l.a razón de proporcionalidad directa.

15. Los pendientes son:

a) Es creciente, pues la pendiente m = 3 es positiva.

b) Es decreciente, pues la pendiente m = –1 es negativa.

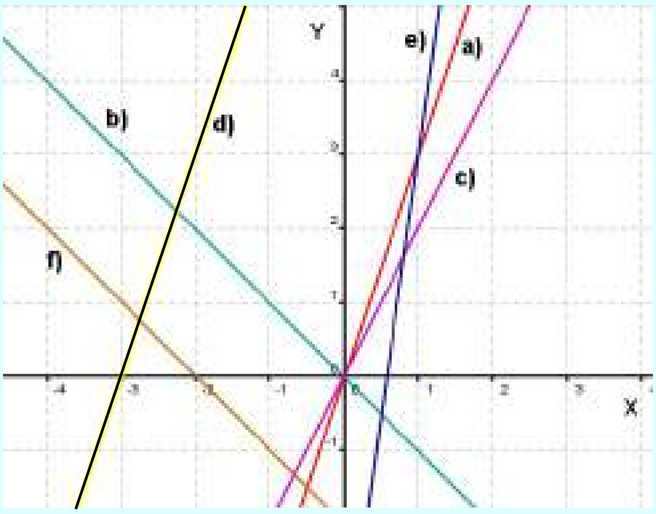
c) Es creciente, pues la pendiente m = 2 es positiva

d) Es creciente, pues la pendiente m = 3 es positiva.

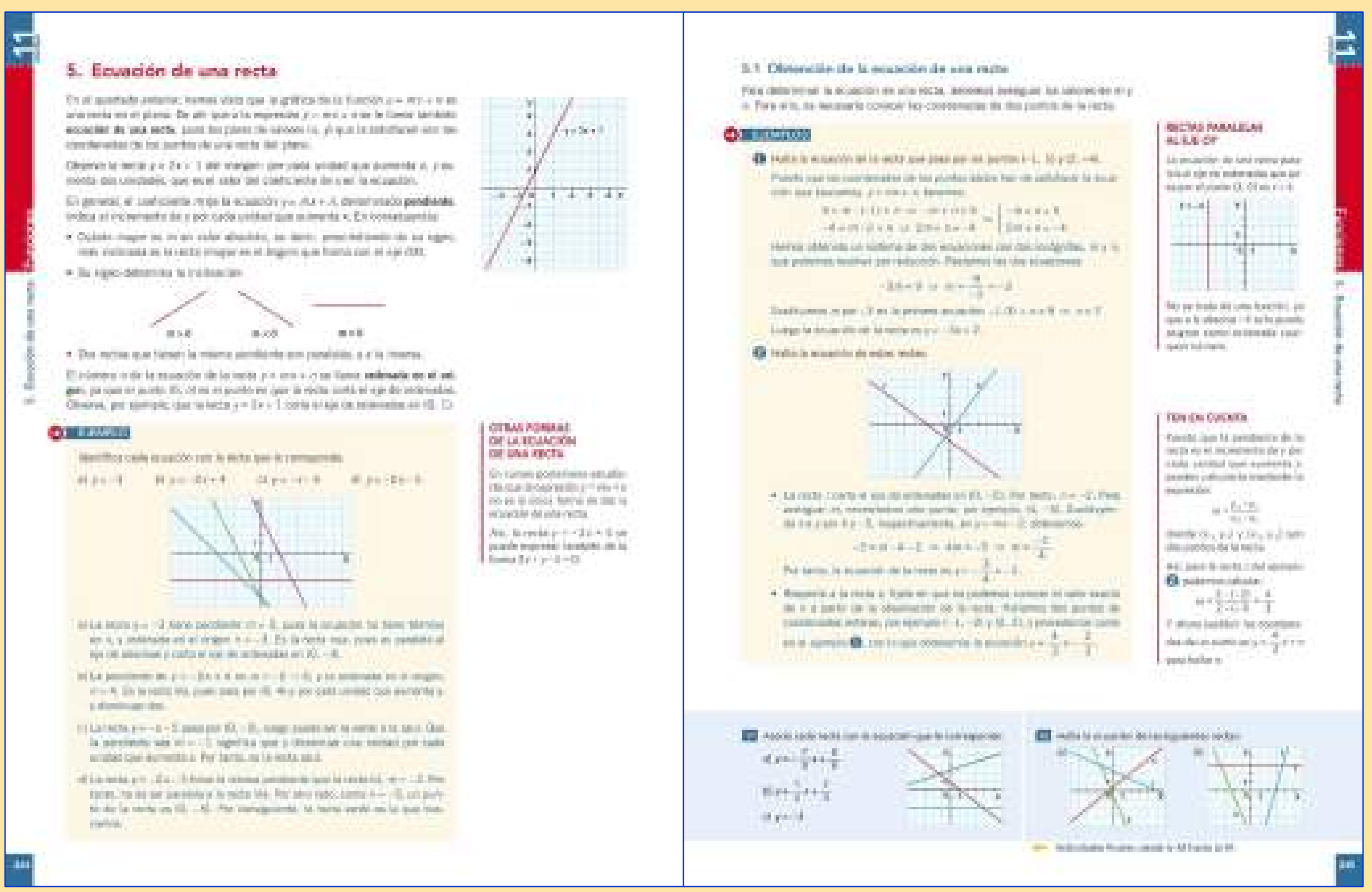
e) Es creciente, pues la pendiente m = 7 es positiva.

f) Es decreciente, pues la pendiente m = –1 es negativa.

Las rectas representadas son las siguientes:



16. Si y es el sueldo diario por trabajar x horas extras, se tiene que la función es: y = 6x + 2



5. ECUACIÓN DE UNA RECTA

■ En esta sección el objetivo básico es introducir las diferentes formas de ecuación de una recta a partir de la expresión analítica de la función afín.

Para empezar leeremos los dos primeros párrafos y comprobaremos que los puntos de la recta representada en el margen se corresponden con los pares de valores que satisfacen la expresión analítica de la función:

– *¿Cuáles son las coordenadas del punto de la recta cuya abscisa es 2?*
– *¿Se obtiene el mismo valor utilizando la gráfica y la expresión analítica de la función?*

■ A continuación leerán los cuatro siguientes párrafos que hacen referencia al concepto de pendiente y a sus propiedades:

– *¿Qué indica la pendiente de una recta?*
– *¿Qué relación hay entre el valor absoluto de la pendiente y la inclinación de la recta?*
– *¿Qué relación hay entre el signo de la pendiente y su inclinación?*
– *¿Cómo son las pendientes de dos rectas paralelas?*
– *¿Cómo es la pendiente de una recta horizontal?*

Seguidamente leerán el párrafo sobre la ordenada en el origen e identificarán este concepto en la gráfica de la recta anterior.

Después analizarán el ejemplo que se propone relacionando cada recta representada con su ecuación correspondiente.

En la nota *Otras formas de la ecuación de una recta* se puede comentar la existencia de otras expresiones que se introducirán en cursos posteriores.

Estos contenidos se pueden aplicar para resolver la actividad 17 de la página 245 y la actividad final 42 de la página 251.

5.1 Obtención de la ecuación de una recta

■ Analizaremos a continuación el ejemplo resuelto en el este apartado que nos servirá de modelo para obtener la ecuación de una recta:

– *¿Se puede hallar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de uno de sus puntos?*
– *¿Cómo se halla la ecuación de la recta conociendo su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos?*

A continuación leerán la nota *Rectas paralelas al eje OY* reconociendo que no son funciones.

El documento *Ten en cuenta* muestra como calcular la pendiente de una recta a partir de dos de sus puntos.

Después resolverán la actividad 18 de la página 245 y la actividad final 43 de la página 252.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

- *Act. 17.* Desarrollar la capacidad de identificar e interpretar las rectas de una gráfica y sus ecuaciones.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 17.* Identificar y manejar en la realización de las actividades las posibles respuestas, tomando decisiones de manera racional.

- *Act. 18.* Desarrollar la capacidad de aplicar los conocimientos sobre la obtención de ecuaciones de una recta, reflexionando a partir de las coordenadas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 18.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 trabaja con algunos de los elementos característicos de la ecuación de una recta expresada en su forma explícita.

✓ La actividad de refuerzo 4 permite analizar, de forma reiterada, el significado del valor y del signo de la pendiente de una recta.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de ampliar el tema de la ecuación de una recta, propondremos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749832

Antes de entrar en el enlace propuesto, les preguntaremos:

- *¿Qué es necesario para que dos rectas sean paralelas?*
- *¿En qué influye el signo negativo de la ecuación de una recta?*

En esta página web encontrarán un resumen teórico sobre la ecuación de una recta con ejemplos resueltos y algunos ejercicios para resolver.

Como docentes les podemos proponer que los realicen en su cuaderno, sin mirar el desarrollo y, al terminar, ellos mismos verificarán el proceso seguido.

Además, si nos interesa, podemos sugerirles que visualicen en sus casas un tutorial que se propone al final sobre el tema y que accedan a otras fuentes que se especifican, con más ejercicios para practicar de cara al examen

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 245

17. Las soluciones son:

a) La recta tiene pendiente negativa m = –7/9, por tanto le corresponde la recta de color rojo.

b) La recta tiene pendiente positiva m = 1/3, por tanto le corresponde la recta de color verde.

c) La recta tiene pendiente nula m = 0, es paralela al eje de abscisas, por tanto es la recta de color azul.

18. En todos los casos seguiremos el mismo procedimiento, encontraremos dos puntos de cada recta que deberán satisfacer la ecuación de la recta y = mx + n:

a) Recta *r*: tenemos los puntos (5, 0) y (–4, 4)

$$\begin{cases} 0 = m\cdot 5 + n \\ 4 = m\cdot(-4) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m + n = 0 \\ -4m + n = 4 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

$9m = -4 \Rightarrow m = -4/9$

Sustituimos $m = -4/9$ en la primera ecuación:

$5\cdot(-4/9) + n = 0 \Rightarrow n = 20/9$

La ecuación de la recta *r* es $y = \dfrac{-4x + 20}{9}$

Recta *s*: tenemos los puntos (2, 2) y (–3, –2).

$$\begin{cases} 2 = m\cdot 2 + n \\ -2 = m\cdot(-3) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 2 \\ -3m + n = -2 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

Sustituimos m = 4/5 en la primera ecuación:

$2\cdot(4/5) + n = 2 \Rightarrow (8/5)\cdot n = 2 \Rightarrow n = 2/5$

La ecuación de la recta es: $y = \dfrac{4x + 2}{5}$

Recta *t*: tenemos los puntos (1, –3) y (–2, 4).

$$\begin{cases} -3 = m\cdot 1 + n \\ 4 = m\cdot(-2) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = -3 \\ -2m + n = 4 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

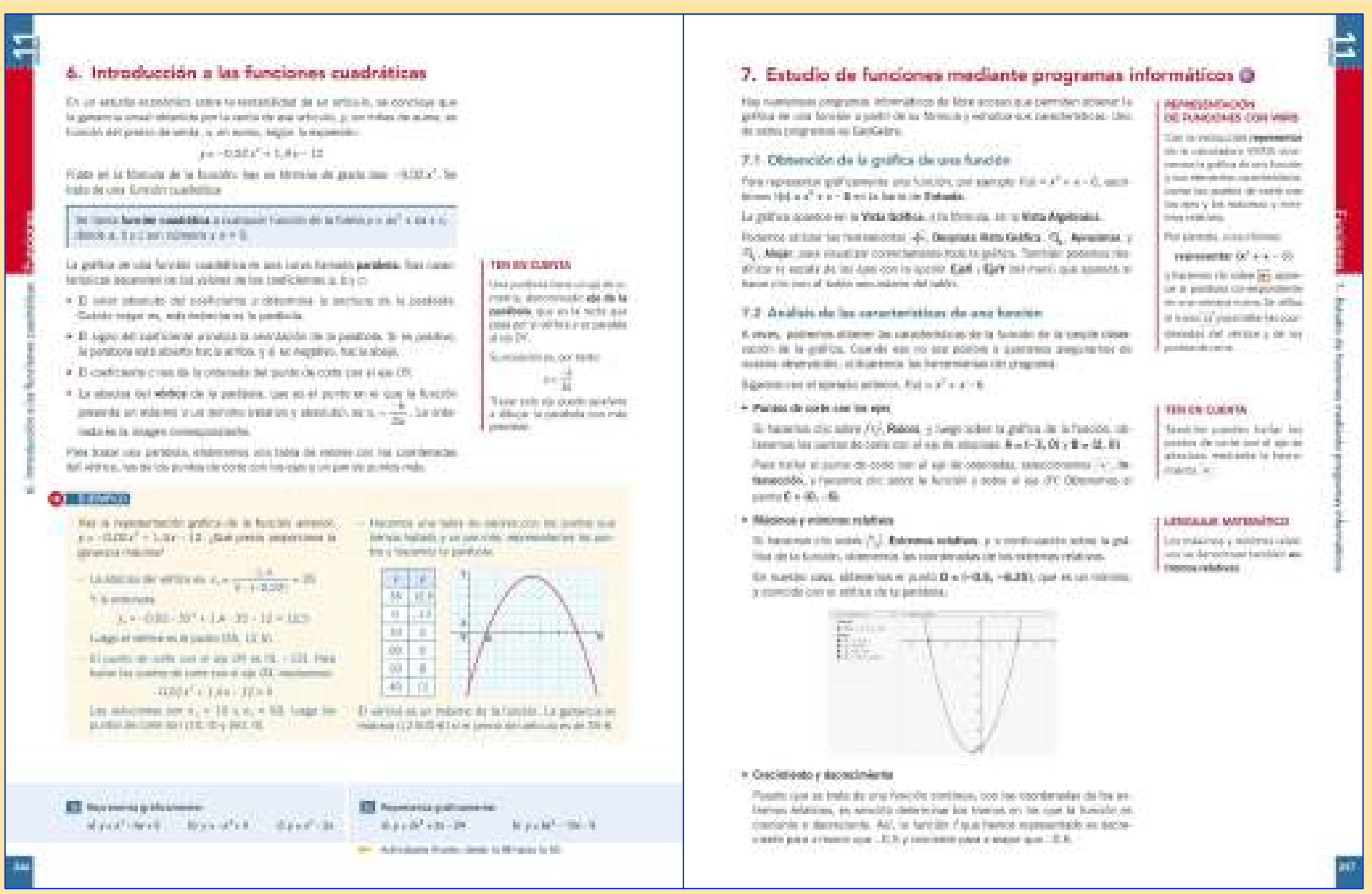
$3m = -7 \Rightarrow m = -7/3$

Sustituimos $m = -7/3$ en la primera ecuación:

$(-7/3) + n = -3 \Rightarrow n = -3 + (-7/3) \Rightarrow n = -2/3$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{-7x - 2}{3}$

(Continúa en la página 11-33 de la guía)



6. INTRODUCCIÓN A LAS.. / 7. ESTUDIO DE...

6. Introducción a las funciones cuadráticas

■ En esta sección el objetivo básico consiste en presentar la expresión analítica y las propiedades de las funciones cuadráticas.

Para empezar leeremos los dos primeros párrafos y la definición de función cuadrática y formularemos estas preguntas a los alumnos y alumnas:

- *¿Cómo se reconoce la expresión analítica de una función cuadrática?*
- *¿Qué coeficiente tiene que ser forzosamente distinto de cero?*

■ A continuación leerán el resto de la sección centrándose en las propiedades de la parábola:

- *¿De qué depende la anchura de la parábola?*
- *¿Cómo se sabe cuál es la orientación de la parábola?*
- *¿Cuál es el punto de corte con el eje OY?*
- *¿Cómo se obtiene el vértice la parábola?*
- *¿Qué es el eje d ela parábola?*

Después interpretarán el ejemplo propuesto que aplica un procedimiento de representación d ela gráfica de una función cuadrática.

Para practicar los contenidos introducidos, pueden resolver las actividades 28 y 29 de la página 246 y las actividades finales 48, 49 y 50 de la página 252.

7 Estudio de las funciones mediante...

■ El objetivo de esta sección es introducir la utilización de algunos programas informáticos que representan funciones a partir de su expresión analítica.

7.1 Obtención de la gráfica de una función

■ Para empezar abrirán el programa GeoGebra y seguirán las indicaciones del texto hasta obtener la representación de la función propuesta.

A continuación pueden seguir las indicaciones del documento *Representación de funciones con WIRIS* y obtener la gráfica de la función anterior utilizando este programa informático.

7.2 Análisis de las características de una función

■ Este apartado presenta algunas herramientas de los programas informáticos que permiten analizar las características de la función propuesta.

Para empezar leerán este texto y comprobarán el resultado obtenido al aplicar las herramientas indicadas.

A continuación, los alumnos y alumnas leerán las notas del margen Ten en cuenta y Lenguaje matemático..

Por último pueden resolver la actividad 21 de la página 248 y la actividad final 51 de la página 252.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Acts. 19 y 20.* Desarrollar la capacidad de representar en una gráfica las funciones cuadráticas propuestas.

■ *Pág. 247, Apdo. 7.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la el aplicativo WIRIS y GeoGebra que permiten obtener la gráfica de una función a partir de su fórmula y estudiar sus características.

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 19.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridas para resolver las actividades propuestas.

■ *Act. 20.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, gracias al carácter repetitivo de las actividades.

■ *Pág. 247, Apdo. 7.* Observar el procedimiento seguido para obtener gráficas con el programa GeoGebra, identificando las estrategias utilizadas, así como el orden de las operaciones, pudiendo utilizarlas para resolverlas y comprobar posteriormente la solución.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 servirá para reconocer las propiedades básicas de una función cuadrática.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para que practiquen con recursos informáticos para representar gráficamente las funciones, presentaremos este enlace:

http://www.tiching.com/749833

Esta página web presenta un artículo didáctico sobre cómo utilizar el buscador de Google para dibujar gráficas de funciones.

Paso a paso con ejemplos, indica como entrar el texto de la función y ver su representación, así como introducir varias gráficas al mismo tiempo o la posibilidad de manipular la gráfica interactivamente.

Como docentes, podemos plantearles que transformen y que hagan variaciones, jugando con esta herramienta nueva. Para finalizar, les presentaremos estas cuestiones:

- *¿Sabes cómo es el polinomio de una función cuadrática?*
- *Inventa tres y represéntalas. Una de ellas debe ser incorrecta. Proponlas a tus compañeros y deja que descubran el error al representarlas.*
- *¿Se sabe a primera vista hacia dónde se abrirá la parábola de una función cuadrática?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 246

19. Las representaciones son:

a) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\cdot 1} = 3$$

$y_v = 3^2 - 6\cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = 4$

El vértice es el punto (3, 4).

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 5)

Con el eje OX: resolvemos $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 1$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (2, 0) y (2, 0).

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	3	0	5	1	2	4
y	–4	5	0	0	–3	–3

Ver figura 2 en la página 11-34 de la guía

b) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$$

$y_v = -0^2 + 5 = 5$

El vértice es el punto (0, 5)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 5)

Con el eje OX: resolvemos $-x^2 + 5 = 0$

$x^2 = 5 \Rightarrow x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$.

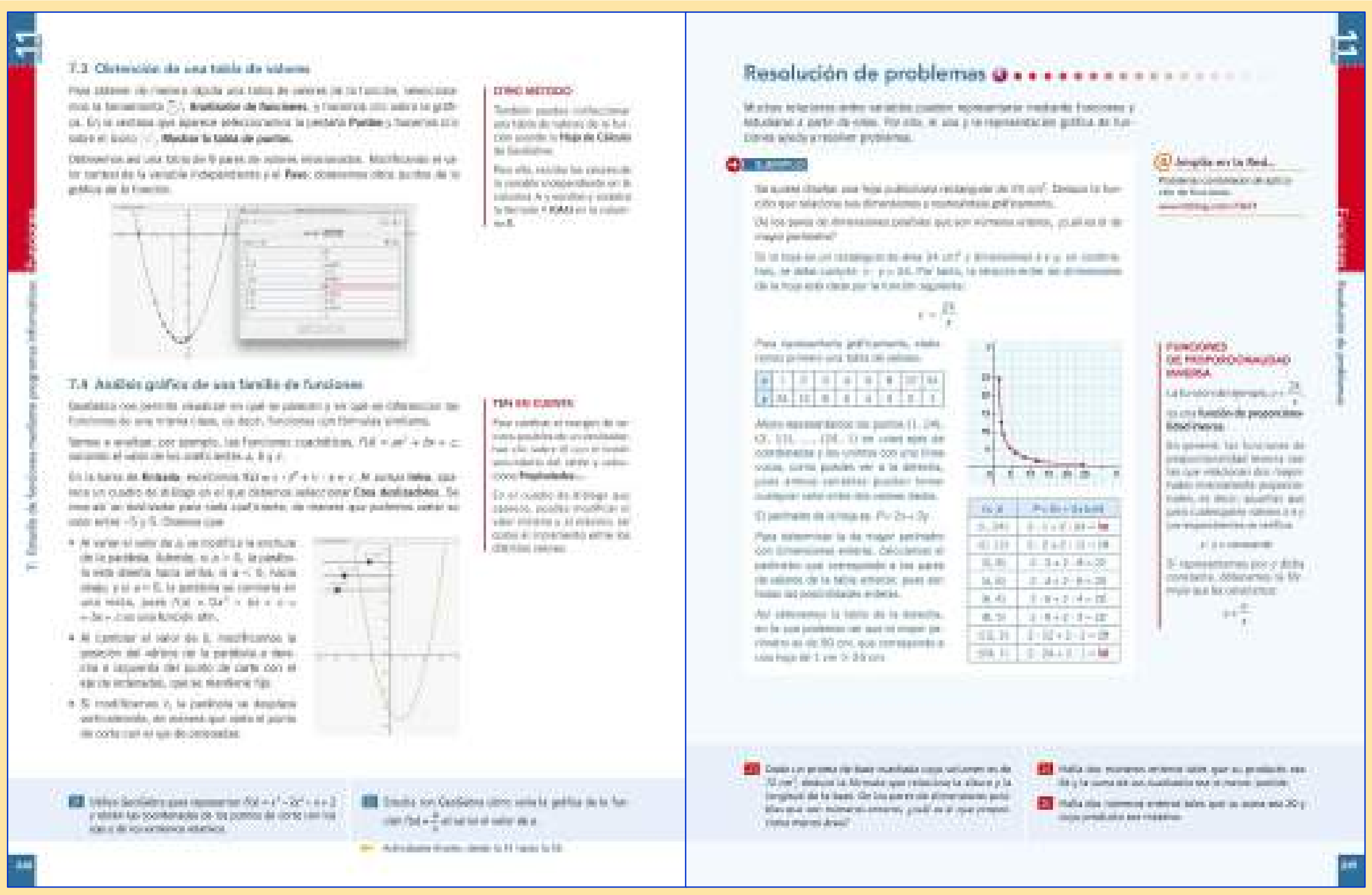
Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	1	2
y	5	0	0	4	1

Ver figura 2 en la página 11-34 de la guía

(Continúa en la página 11-33 de la guía)



7. ESTUDIO DE FUNCIONES MEDIANTE.. (CONT)

7.3. Obtención de una tabla de valores

■ El objetivo de este apartado es confeccionar una tabla de valores de una función utilizando un programa informático.

Para empezar las alumnas y los alumnos abrirán el programa GeoGebra, leerán el texto y seguirán las indicaciones que se proponen:

- *¿Qué opción del programa nos permite analizar las características de una función?*
- *¿Qué pasa si cambiamos el valor general de la variable independiente?*
- *¿Qué ocurre si modificamos el valor del* Paso*?*

■ A continuación pueden leer el documento del margen *Otro método* y confeccionar una tabla de valores de la función utilizando la hoja de cálculo de GeoGebra:

- *¿Qué quiere decir arrastrar una fórmula en una columna?*

Este método también se puede practicar con otras hojas de cálculo convencionales, como *Excel* o *Calc*, que no están especializadas en la representación de gráficas de funciones.

La utilización de Excel o Calc para representar la gráfica de una función es mucho más laboriosa, pero estimula la iniciativa del alumnado.

El procedimiento introducido en este apartado se puede poner en práctica resolviendo la actividad final 52 de la página 252 del libro de texto.

7.4 Análisis gráfico de una familia de funciones

■ En este aparato se propone el estudio de alguna característica en una familia de funciones relacionadas por su expresión analítica.

Para ello leeremos los dos primeros párrafos, abriremos GeoGebra y después observaremos los pasos seguidos para modificar las características de la función.

Por último los alumnos y alumnas pueden resolver la actividad 22 de la página 248 y la actividad final 53 en la página 252 del libro de texto.

Resolución de problemas

■ A continuación el alumnado puede leer el ejemplo propuesto en este apartado que muestra como el análisis de una función puede ayudar a resolver un problema.

Después accederán a los recursos digitales sobre problemas con funciones que se indican en el documento *@Amplía en la Red…*

Finalmente los alumnos y alumnas pueden resolver las actividades 23, 24 y 25 de la página 249 y las actividades finales de las páginas 253 y 254.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Acts. 21 y 22.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como GeoGebra, tal como se propone, para realizar los ejercicios.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 21 y 22.* Aplicar los nuevos conocimientos y procesos adquiridos sobre el manejo de GeoGebra para resolver las actividades propuestas.

■ *Acts. 23 y 24.* Buscar una coherencia global de sus conocimientos al ejecutar el plan de resolución de los problemas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMP.

■ *Acts. 23, 24 y 25.* Identificar, en la realización de las actividades las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

■ *Resolución de problemas, pág. 249.* Observar atentamente la resolución de un problema, identificando los pasos y las estrategias utilizadas.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La gráfica de la función representada en la actividad de ampliación 3 se puede comprobar utilizando un programa informático.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de poder repasar los contenidos de esta unidad, proponemos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/738812

En la página se muestran muchos recursos didácticos y actividades para ampliar o reforzar los contenidos estudiados. Concretamente, pediremos que se descarguen todo aquello que haga referencia a las funciones.

Como docentes, podemos plantearles que primero repasen a partir de los ejemplos resueltos y a continuación seleccionar los ejercicios según el ritmo individual de aprendizaje. Contienen soluciones.

También les podemos sugerir que utilicen alguno de los aplicativos estudiados como WIRIS, GeoGebra o Google para representar las funciones.

Este recurso puede resultar muy útil para preparar el examen de la unidad y repasar de forma autónoma los procedimientos aprendidos.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 248

21. La gráfica que obtenemos es la siguiente:

(Ver figura 4 en la página 11-34 de la guía)

Los puntos de corte son: (–1,0), (1, 0), (2, 0) y (0, 2)

El máximo relativo es (–0,22; 2,13) y el mínimo relativo es (1,55; –0,63)

22. Al variar el valor de a, cambia la distancia de las dos ramas de función respecto al origen de coordenadas. Además si $a > 0$, las dos ramas de la función están en el primer y tercer cuadrante; y si $a < 0$, las dos ramas de la función están en el segundo y cuarto cuadrante.

Página 249

23. Llamamos x a la longitud de una de las aristas de la base, e y a la altura del prisma, de manera que utilizando la fórmula del volumen del prisma deben cumplir:

$$72 = y \cdot x^2 \Rightarrow y = \frac{72}{x^2}$$

El área de este prisma será pues: $A = 4xy + 2x^2$

Elaboramos una tabla con los pares de dimensiones posibles que son números enteros, y el valor correspondiente del área:

(x,y)	$A = 4xy + 2x^2$
(1, 72)	$4·1·72 + 2·1^2 = 290$
(2, 18)	$4·2·18 + 2·2^2 = 152$
(3, 8)	$4·3·8 + 2·3^2 = 114$
(6, 2)	$4·6·2 + 2·6^2 = 120$

El área menor es 114 cm², que corresponde a un prisma de longitud de la base 3 cm y altura 8 cm.

24. Llamamos x e y a los números, que deberán cumplir:

$$xy = 64 \Rightarrow y = \frac{64}{x}$$

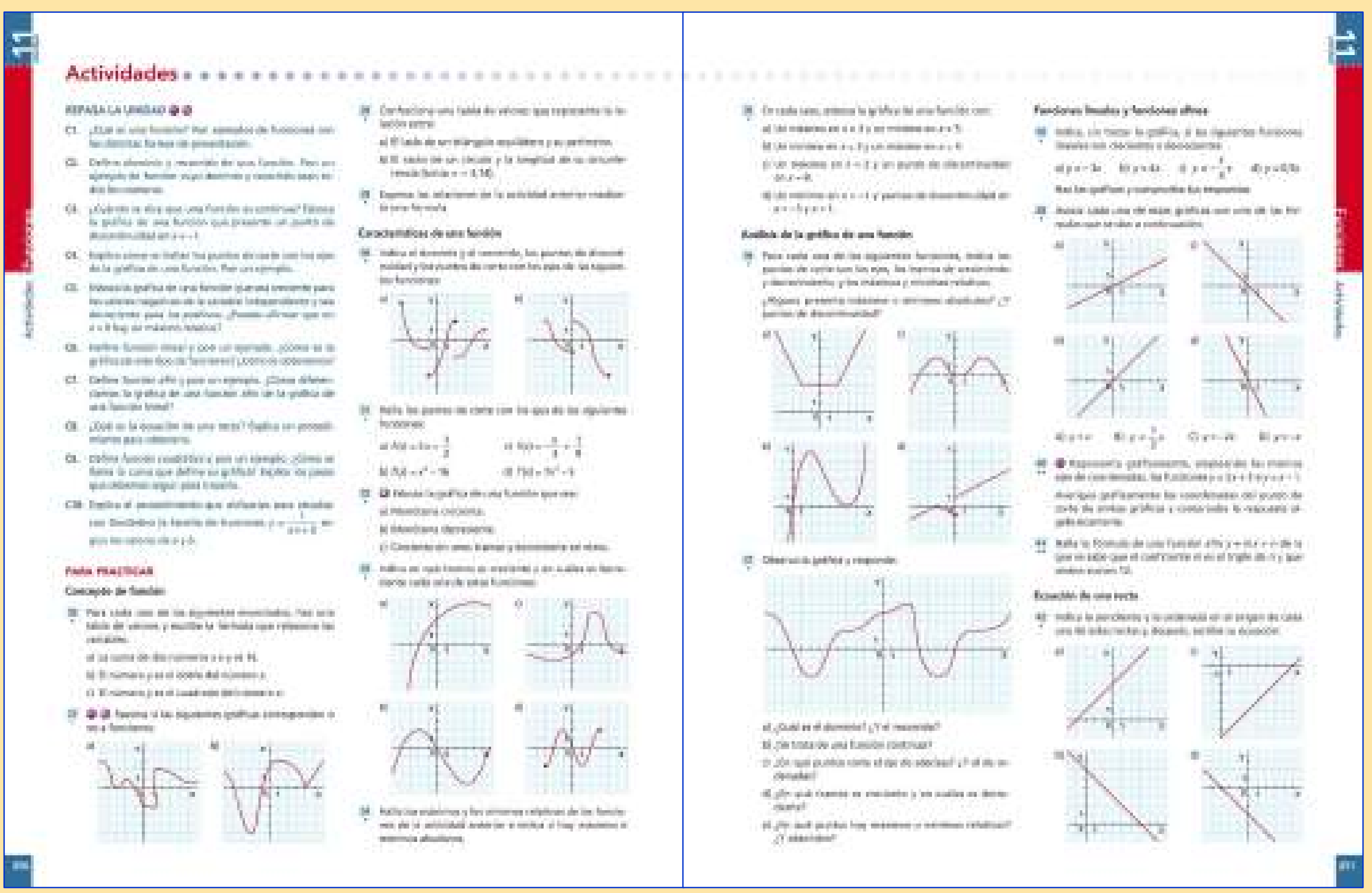
La suma de sus cuadrados es: $S = x^2 + y^2$

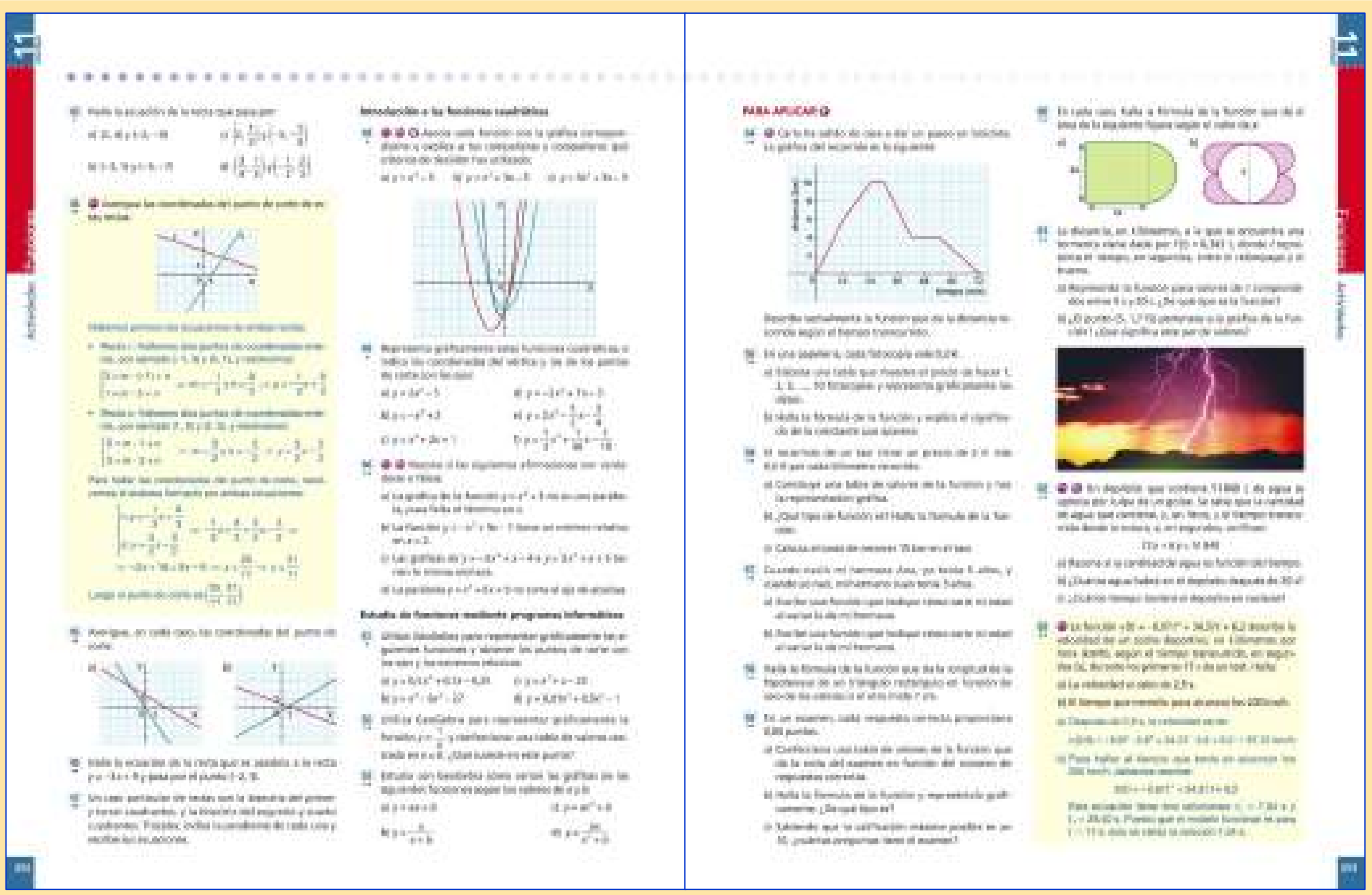
Elaboramos una tabla con los pares de posibles números enteros, y el valor de la suma de sus cuadrados, teniendo en cuenta que los valores de x e y son intercambiables:

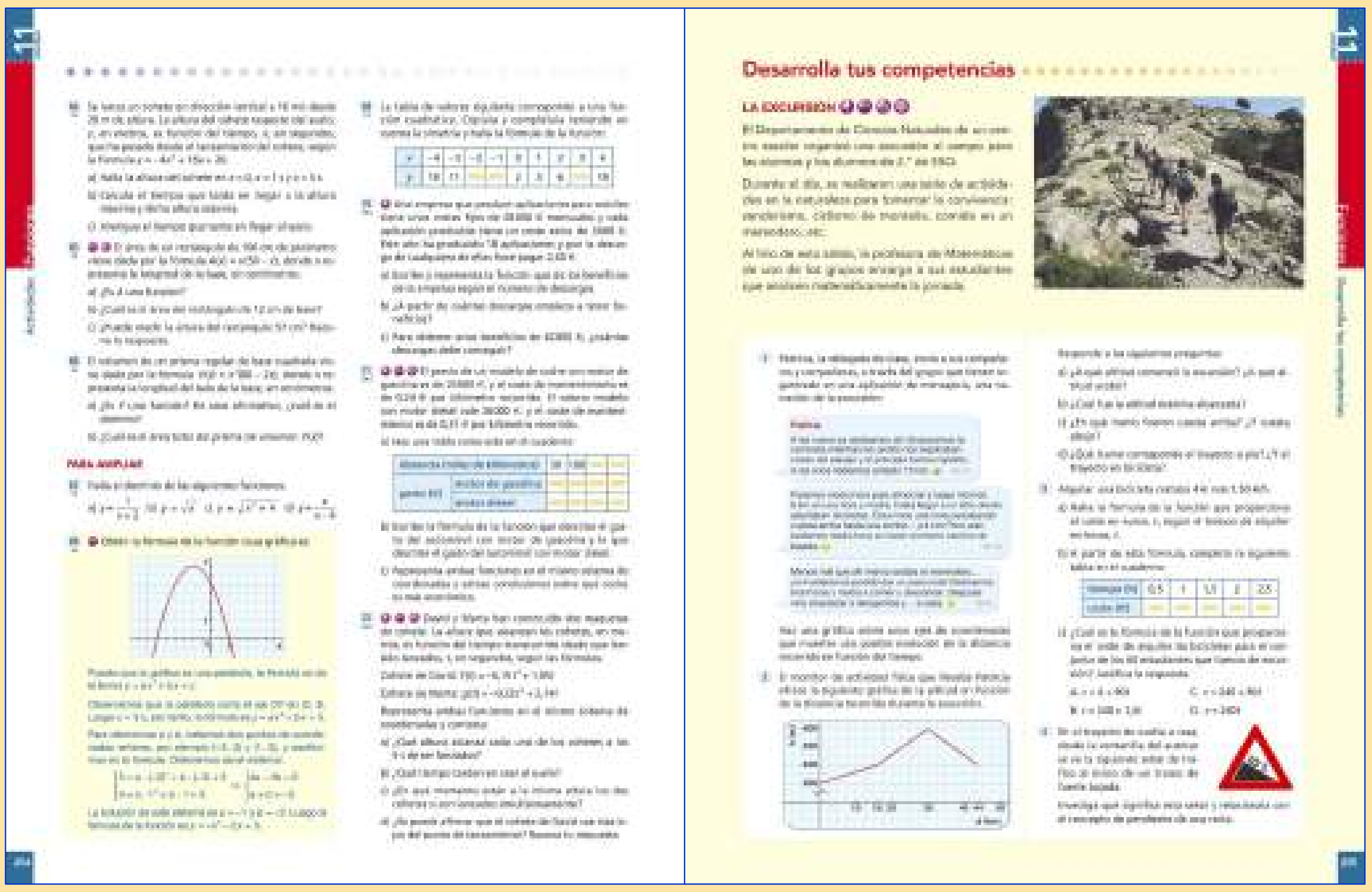
(x,y)	$S = x^2 + y^2$
(1, 64)	$1 + 64^2 = 4097$
(2, 32)	$2^2 + 32^2 = 1028$
(4, 16)	$4^2 + 16^2 = 272$
(8, 8)	$8^2 + 8^2 = 128$

La menor suma de cuadrados es 128, que corresponde a los números 8 y 8.

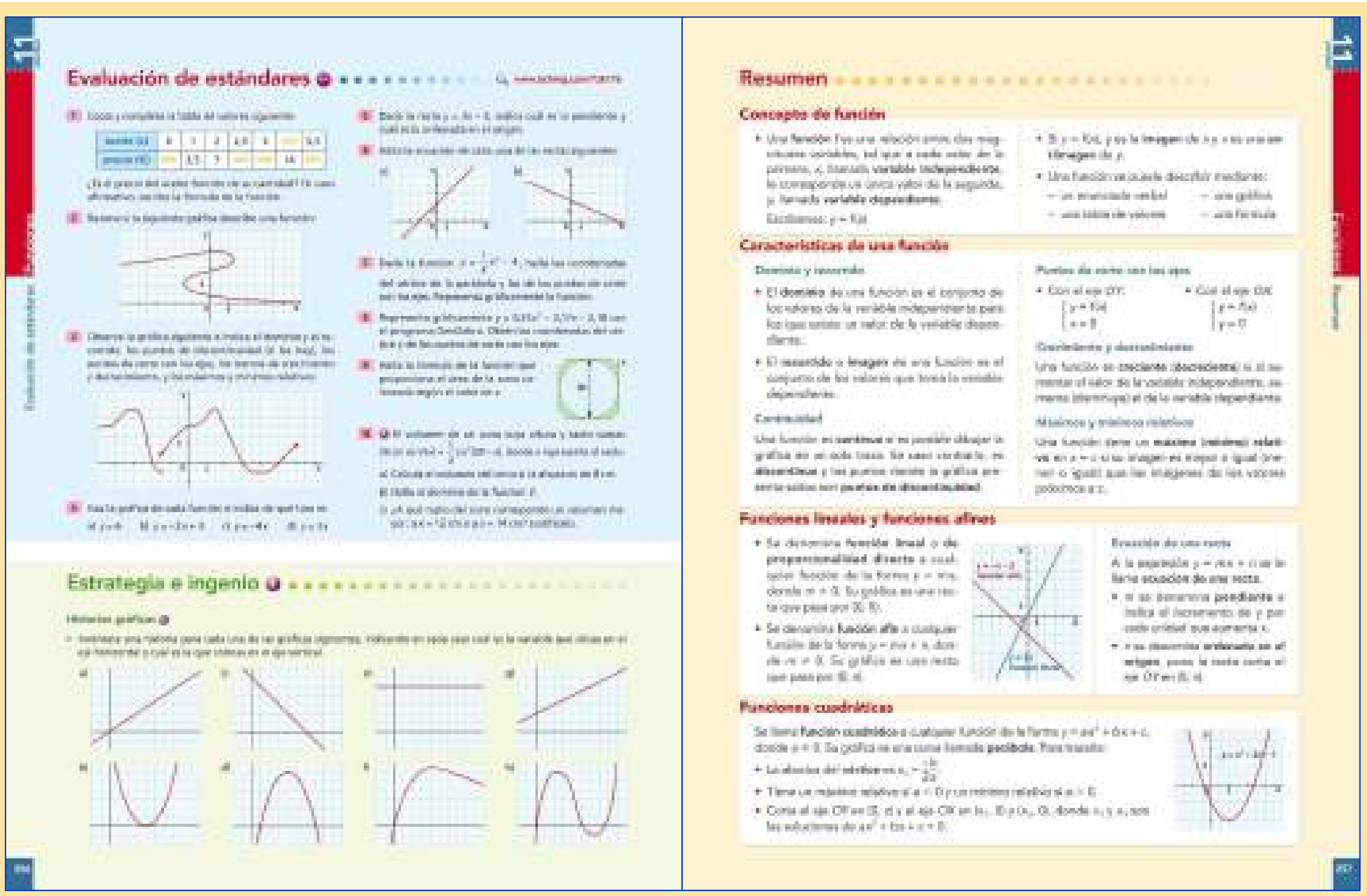
(Continúa en la página 11-33 de la guía)


Actividades




Desarrolla tus competencias

La excursión


Evaluación de estándares

Estrategia e ingenio

Resumen

Concepto de función

Características de una función

Funciones lineales y funciones afines

Funciones cuadráticas

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Repasa la unidad, pág. 250*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y ade-cuado a los contenidos dados.

■ *Acts. 27, 48, 50, 54, 62, 65, 71 y 72.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.

■ *Desarrolla…, pág. 255. Estrategia…, pág. 256. Historias gráficas.* Leer y comprender el estímulo de la actividad, generando ideas y supuestos.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 255.* Buscar, analizar y manejar información en Internet y usar los recursos tecnológicos disponibles.

APRENDER A APRENDER

■ *Repasa la unidad, pág. 250.* Saber transformar la información vista en conocimiento propio, así como ser consciente de las propias capacidades y carencias.

■ *Acts. 27, 40, 48, 50, 62, 65, 71 y 72.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

■ *Acts. 44, 63 y 68.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 255.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.

■ *Evaluación de estándares, pág. 256*. Ser consciente de las propias capacidades y carencias.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Para aplicar, pág. 253.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, evaluando las acciones realizadas.

■ *Acts. 32, 70, 71 y 72.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad didáctica, con un criterio propio.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 255.* Buscar las soluciones de forma creativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.

■ *Evaluación de estándares, pág. 256. Act. 10. Estrategia e ingenio, pág. 256.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Act. 48.* Manejar las habilidades sociales al exponer los criterios utilizados y saber comunicarse de manera constructiva en grupo.

ACTIVIDADES FINALES

■ La sección de *Actividades* incluye una colección de ejercicios, organizados según las secciones de la unidad didáctica, en orden creciente de dificultad, con el fin de afianzar todos los contenidos del tema, desde un punto de vista práctico y teórico.

■ La sección *Desarrolla…* contribuye a fomentar diferentes competencias clave y la utilización de distintos recursos para resolver un planteamiento dado. A través de un caso práctico, el alumno ejercitará su capacidad de análisis y su actitud proactiva en la búsqueda de soluciones, además de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica.

■ Con la sección de *Evaluación…* se pretende que los alumnos y alumnas valoren el nivel de conocimientos alcanzados. Propone una serie de actividades que repasan la unidad de un modo completo y práctico.

■ La sección *Estrategia…* propone una serie de acertijos o juegos relacionados con los conceptos trabajados durante el tema, con el fin de que el alumnado desarrolle su imaginación y adquiera destreza relacionando ideas.

■ El *Resumen* es la página final de la unidad didáctica que recopila los contenidos del tema organizándolos en un esquema que destaca las relaciones entre los conceptos y los procedimientos estudiados.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 250

REPASA LA UNIDAD

C1. Una función f es una relación entre dos magnitudes variables, tal que a cada valor de la primera, x, le corresponde un único valor de la segunda, y. Se escribe y = f (x).

En un mismo ejemplo, vamos a expresar la relación que hay, en una circunferencia, entre la longitud y su diámetro, en las distintas formas de presentación:

1. Mediante enunciado verbal: “la longitud de una circunferencia es el producto del diámetro por el número pi”,
2. Mediante una tabla de valores: la función anterior se expresa así:

Diámetro (cm)	1	2	3	4
Longitud (cm)	3,14	6,24	9,42	12,56

3. Mediante una fórmula: $y = f(x) = \pi \cdot x$, donde x es el diámetro e y la longitud.
4. Mediante una gráfica:

   Ver figura 5 en la página 11-35 de la guía

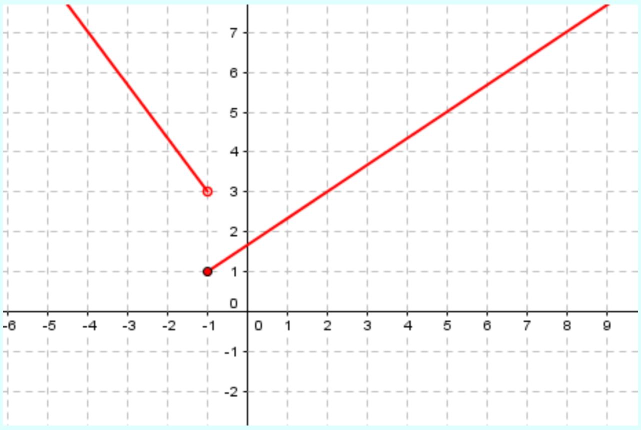
C2. Se llama dominio de una función al conjunto de todos los valores de la variable independiente x para los que existe un valor de la variable dependiente y.

Se llama recorrido o imagen de una función al conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente y.

Por ejemplo, la función y = x + 1

C3. Una función es continua si es posible dibujar la gráfica de un solo trazo. En caso contrario, es discontinua. Los puntos donde la gráfica presenta saltos se llaman puntos de discontinuidad.

Una gráfica discontinua en x = –1 es:



C4. Para hallar los puntos de corte con los ejes basta con resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la función y la ecuación del eje correspondiente.

Por ejemplo, para la función $y = 3x^2 - 12$, calculamos los puntos de corte:

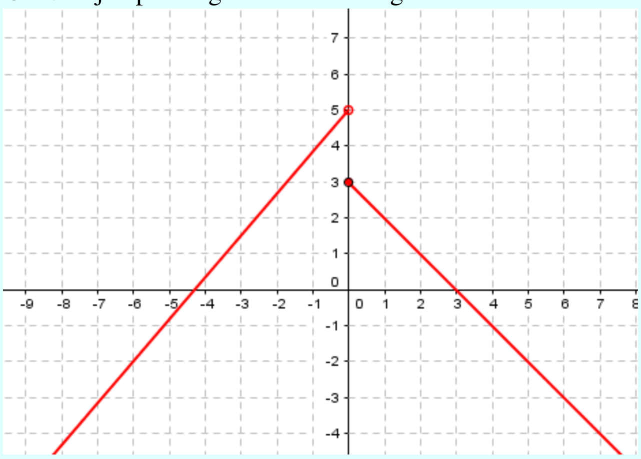
Con el eje OY: para x = 0 es f(0) = –12, así, el punto de corte con el eje OY es (0, –12)

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación $3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (2, 0) y (–2, 0)

C5. Un ejemplo de gráfica sería la siguiente:



No podemos afirmar que en x = 0 hay un máximo relativo, como se puede observar en la gráfica.

C6. Se llama función lineal o de proporcionalidad directa a cualquier función de la forma y = m x, donde m es un número diferente de cero. Por ejemplo, y = 2x

La gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas (0, 0). Para obtenerla basta con conocer un punto distinto del origen de coordenadas, y trazar la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

C7. Se llama función afín a cualquier función de la forma y = m x + n, donde m es un número diferente de cero. Por ejemplo, y = x + 2

Su gráfica se diferencia de la gráfica de una función lineal, en que no pasa por el origen de coordenadas.

C8. La expresión y = m x + n es la ecuación de una recta, pues los pares de valores (x, y) que satisfacen la ecuación son las coordenadas de los puntos de una recta del plano.

Para determinar la ecuación de una recta, debemos averiguar los valores de m y n. Por ejemplo, a partir de las coordenadas de dos puntos (x, y) de la recta. Se sustituyen en la expresión y = m x + n, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas m y n, y al resolverlo obtenemos la ecuación de la recta y = m x + n

C9. Se llama función cuadrática a cualquier función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números y $a \neq 0$. Por ejemplo, $y = x^2 - 2x + 1$

La curva que define su gráfica se llama parábola

Para trazar una parábola, elaboramos una tabla de valores con las coordenadas del vértice, las de los puntos de corte con los ejes y un par de puntos más. La abscisa del vértice de la parábola, que es el punto en el que la función presenta un máximo o un mínimo (relativo y absoluto), es $x_v = \frac{-b}{2a}$, y su ordenada es la imagen correspondiente.

C10. En la barra de Entrada, escribimos f(x) := 1/ (a·x+b). Al pulsar Intro, aparece un cuadro de diálogo en el que debemos seleccionar Crea deslizadores. Se crea así un deslizador para cada coeficiente a y b, de manera que podemos variar su valor entre – 5 y 5, y observar cómo se obtiene la familia de funciones de f(x).

PARA PRACTICAR

26. Las soluciones son las siguientes:

a) Tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	15	14	13	12	11

Fórmula: y = f(x) = 16 - x

b) Tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

Fórmula: y = f(x) = 2x

c) Tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

Fórmula: $y = f(x) = x^2$

27. Las soluciones son:

a) No describe a una función porque para un mismo valor de x, por ejemplo x = 1, le corresponden dos valores distintos de y.

b) Sí describe a una función porque para cada valor de x le corresponde un único valor de y.

28. Las tablas son:

a) El perímetro y es el triple del lado x, por tanto una tabla de valores que representa la relación entre ellas es:

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

b) La longitud y de la circunferencia es el doble de pi por el radio x, por tanto una tabla de valores que representa la relación entre ellas es:

x	1	2	3	4	5
y	6,28	12,56	18,84	25,12	31,4

29. Las relaciones son las siguientes:

a) La fórmula que relaciona el lado x de un triángulo equilátero y su perímetro y es: $y = 3x$

b) La fórmula que relaciona la longitud y de la circunferencia y su radio x es: $y = 2\pi x$

30. Las soluciones son:

a) El dominio es el conjunto de todos los números entre –4 y 6 (incluidos).

El recorrido es el conjunto de todos los números entre –4 y 4 (incluidos).

Los puntos de discontinuidad son: x = –1, x = 2.

Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –3) y al eje de abscisas en los puntos (–3, 0), (1, 0) y (4, 0).

b) El dominio es el conjunto de todos los números entre –1 (sin incluir) y 4 (incluido).

El recorrido es el conjunto de todos los números entre –4 (incluido) y 2 (sin incluir).

El punto de discontinuidad es: x = 0.

Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –1,5) y al eje de abscisas en los puntos (–2, 0) y (2, 0).

31. Los puntos de corte son:

a) Con el eje OY: puesto que f(0) = 1/2, el punto de corte con el eje OY es (0, 1/2).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación:

$2x + 1/2 = 0 \Rightarrow 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/4.$

Por tanto, el punto de corte con el eje OX es (–1/4, 0)

b) Con el eje OY: puesto que f(0) = –16, el punto de corte con el eje OY es (0, –16).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación:

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -4$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (4, 0) y (–4, 0).

c) Con el eje OY: puesto que f(0) = 1/9, el punto de corte con el eje OY es (0, 1/9).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación:

$$-\frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1/3$$

Por tanto, el punto de corte con el eje OX es (1/3, 0)

d) Con el eje OY: puesto que f(0) = -5, el punto de corte con el eje OY es (0, -5)

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación

$$7x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{7} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{5}{7}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{5}{7}}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $\left(\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\right)$

32. *Ver figura 6 en la página 11-35 de la guía.*

33. Las respuestas son:

a) Es creciente hasta 4. Es decreciente desde 4 en adelante.

b) Es creciente hasta –2 y desde 3 en adelante. Es decreciente desde –2 hasta 3.

c) Es creciente desde -2 hasta 2,5. Es decreciente hasta –2 y desde 2,5 en adelante.

d) Es creciente desde –3 hasta –1 y desde 1 hasta 3. Es decreciente desde –1 hasta 1.

34. Los extremos son

a) Tiene un máximo relativo en x = 4, que a su vez es máximo absoluto. No tiene mínimos.

b) Tiene un máximo relativo en x = -2 y un mínimo relativo en x = 3. No tiene máximos ni mínimos absolutos.

c) Tiene un mínimo relativo en x = -2 y un máximo relativo en x = 2,5. No tiene máximos ni mínimos absolutos.

d) Tiene un mínimo relativo en x = 1, que a su vez es mínimo absoluto. Tiene un máximo relativo en x = –1, que a su vez es máximo absoluto.

Página251

35. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Ver figura 7 en la página 11-35 de la guía.

36. Las respuestas son las siguientes:

a) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 3) y al eje de abscisas no lo corta.

Es creciente a partir de 2. Es decreciente hasta –2. Es constante desde –2 a 2

No tiene máximos ni mínimos relativos

Hay un mínimo absoluto en los valores de x entre –2 y 2, ya que todos los demás valores de la gráfica están por encima de las imágenes de esos valores, que es 3.

b) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 0) y al eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (6, 0)

Es creciente hasta 2 y a partir de 6. Es decreciente desde 2 a 6

Tiene máximo relativo en x = 2 y mínimo relativo en x = 6. No hay mínimo ni máximo absoluto.

c) Corta al eje de ordenadas en el punto (0; 0,2) y al eje de abscisas en los puntos (0,5; 0), (-4, 0) y (5, 0).

Es creciente hasta -2, y desde 0,5 a 3. Es decreciente desde -2 a 0,5, y desde 3 en adelante.

Tiene mínimo relativo en x = 0,5 y máximo relativo, en x = –2, x = 3.

Hay un máximo absoluto en x = –2, x = 3, ya que todos los demás valores de la gráfica están por debajo de las imágenes de esos valores, que es 2.

d) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –1) y al eje de abscisas en el punto (–2, 0).

Es creciente hasta -2 y a partir de 0. Es decreciente desde -2 a 0.

Tiene máximo relativo en x = –2.

Es discontinua en x = 0.

37. Las respuestas son:

a) El dominio es el conjunto de todos los números y el recorrido es el conjunto de todos los números mayores que 3.

b) Es continua, pues podemos trazar la gráfica de un solo trazo.

c) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 4) y al eje de abscisas en los puntos (–10, 0), (–6, 0), (4, 0) y (8, 0).

d) Es creciente desde –8 a 3, y a partir de 6. Es decreciente hasta –8, y desde 3 a 6.

e) Tiene máximo relativo en x = 3 y mínimo relativo (y absoluto) en x = –8 y x = 6.

38. La evolución de cada recta es:

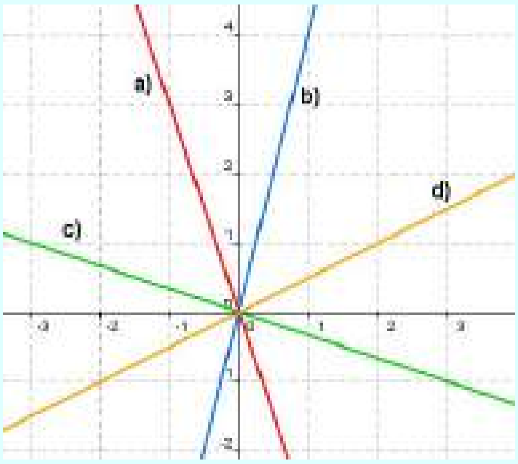
a) Es decreciente, pues la pendiente m = –3 es negativa.

b) Es creciente, pues la pendiente m = 4 es positiva.

c) Es decreciente, pues la pendiente m = –1/3 es negativa.

d) Es creciente, pues la pendiente m = 0,5 es positiva.

Lo comprobamos con las gráficas:

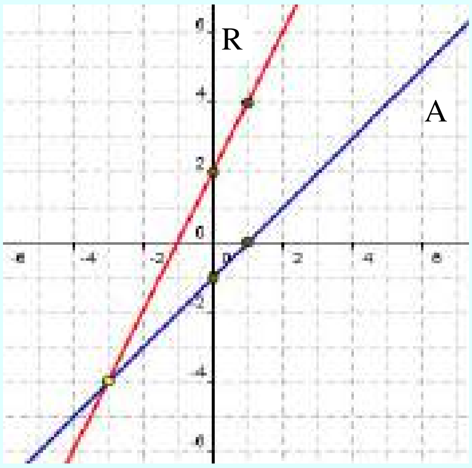


39. Por un lado, en las fórmulas de las ecuaciones de las rectas de A) y B) vemos que tienen pendientes positivas y por tanto crecientes, pero la pendiente de A) es mayor; Luego, la gráfica de a) se asocia a la fórmula de B), y la gráfica de b) a la fórmula de A)

Por otro lado, en las fórmulas de las ecuaciones de las rectas de C) y D) vemos que tienen pendiente negativa y por tanto decrecientes, pero la pendiente de C) es mayor; Luego, la gráfica de c) se asocia a la fórmula de D), y la gráfica de d) a la fórmula de C).

Resumiendo: a) B), b) A), c) D) y d) C).

40. Representamos los puntos (0, 2) y (1,4) y trazamos la recta (R) que los une. Representamos los puntos (0, -1) y (1,0) y trazamos la recta (A) que los une:



Comprobamos algebraicamente que el punto de corte es (–3, –4), resolviendo el sistema por igualación:

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2 = x - 1 \Rightarrow 2x - x = -1 - 2$$

$$\Rightarrow x = -3$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación x = –3, obtenemos y: y = -3 – 1 = –4

Por tanto, el punto de corte es (–3, –4)

41. Tenemos en cuenta que m = 3n y m + n = 12, de manera que sustituyendo en la segunda expresión:

$3n + n = 12 \Rightarrow 4n = 12 \Rightarrow n = 3.$

Y por tanto m = 3·3 = 9

La fórmula de la función es y = 9x + 3

42. Las soluciones:

a) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 4), por tanto la ordenada en el origen es n = 4

Pasa por el punto (1, 5) y debe satisfacer la ecuación y = mx + n:
$5 = m\cdot 1 + 4 \Rightarrow m = 5 - 4 \Rightarrow m = 1$ es la pendiente.
Su ecuación es y = x + 4

b) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –8), por tanto la ordenada en el origen es n = –8

Pasa por el punto (8, 0) y debe satisfacer la ecuación y = mx + n:
$0 = m\cdot 8 - 8 \Rightarrow 8m = 8 \Rightarrow m = 1$ es la pendiente.

Su ecuación es y = x – 8

c) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 6), por tanto la ordenada en el origen es n = 6

Pasa por el punto (6, 0) y debe satisfacer la ecuación y = mx + n:

$0 = m\cdot 6 + 6 \Rightarrow 6m = -6 \Rightarrow m = -1$ es la pendiente.

Su ecuación es $y = -x + 6$

d) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –3), por tanto la ordenada en el origen es n = –3

Pasa por el punto (–3, 0) y debe satisfacer la ecuación y = mx + n:

$0 = m\cdot(-3) - 3 \Rightarrow m = -1$ es la pendiente.

Su ecuación es $y = -x - 3$

43. Las respuestas son:

a) Los puntos (2, 4) y (-2, -4) deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 4 = m\cdot 2 + n \\ -4 = m\cdot(-2) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 4 \\ -2m + n = -4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$4m = 8 \Rightarrow m = 2$

Sustituimos m = 2 en la primera ecuación:

$2\cdot 2 + n = 4 \Rightarrow 4 + n = 4 \Rightarrow n = 0$

La ecuación de la recta es $y = 2x$

b) Los puntos (–3, 1) y (–5, –7) deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 1 = m\cdot(-3) + n \\ -7 = m\cdot(-5) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3m + n = 1 \\ -5m + n = -7 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$2m = 8 \Rightarrow m = 4$

Sustituimos m = 4 en la primera ecuación:

$-3\cdot 4 + n = 1 \Rightarrow -12 + n = 1 \Rightarrow n = 13$

La ecuación de la recta es $y = 4x+13$

c) Los puntos (2, 1/2) y (–3, –1/3) deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = m\cdot 2 + n \\ -\frac{1}{3} = m\cdot(-3) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = \frac{1}{2} \\ -3m + n = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$5m = 5/6 \Rightarrow m = 1/6$

Sustituimos m =1/6 en la primera ecuación:

$$2\cdot\frac{1}{6} + n = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} + n = \frac{1}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{6}$$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{x+1}{6}$

d) Los puntos (3/4, 1/3) y (–1/2, 2/3) deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = m\cdot\frac{3}{4} + n \\ \frac{2}{3} = m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9m + 12n = 4 \\ -3m + 6n = 4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción doble:

Multiplicamos la segunda ecuación por 2 y restamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 9m + 12n = 4 \\ -6m + 12n = 8 \end{cases} \Rightarrow 15m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{15}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 3 y sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 9m + 12n = 4 \\ -9m + 18n = 12 \end{cases} \Rightarrow 30n = 16 \Rightarrow n = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{-4x + 8}{15}$

44. Resuelto por el libro.

45. Los puntos de corte son:

a) Ecuación de la recta roja: buscamos dos puntos de coordenadas enteras (–1, 2) y (4, –1), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 2 = m\cdot(-1) + n \\ -1 = m\cdot 4 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m + n = 2 \\ 4m + n = -1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$-5m = 3 \Rightarrow m = -3/5$

Sustituimos m = –3/5 en la primera ecuación:

$$\frac{3}{5} + n = 2 \Rightarrow n = \frac{7}{5}$$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{-3x + 7}{5}$

Ecuación de la recta azul: buscamos dos puntos de coordenadas enteras (–2, 3) y (2, –3), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 3 = m\cdot(-2) + n \\ -3 = m\cdot 2 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2m + n = 3 \\ 2m + n = -3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$-4m = 6 \Rightarrow m = -6/4 = -3/2$

Sustituimos m = –3/2 en la primera ecuación:

$3 + n = 3 \Rightarrow n = 0$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{-3}{2}x$

Para obtener el punto de corte resolvemos el sistema por igualación:

$$\begin{cases} y = \frac{-3}{5}x + \frac{7}{5} \\ y = \frac{-3}{2}x \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{5}x + \frac{7}{5} = \frac{-3}{2}x \Rightarrow$$

$$-6x + 14 = -15x \Rightarrow 9x = -14 \Rightarrow x = \frac{-14}{9}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación $x = \dfrac{-14}{9}$,

obtenemos y: $y = \dfrac{-3}{2}\cdot\dfrac{-14}{9} = \dfrac{14}{6} = \dfrac{7}{3}$

El punto de corte es $\left(-\frac{14}{9}, \frac{7}{3}\right)$

b) Ecuación de la recta roja: buscamos dos puntos de coordenadas enteras (–4, 2) y (4, –1), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 2 = m\cdot(-4) + n \\ -1 = m4 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4m + n = 2 \\ 4m + n = -1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$-8m = 3 \Rightarrow m = -3/8$

Sustituimos m = –3/8 en la primera ecuación:

$$\frac{3}{2} + n = 2 \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta es $y = \frac{-3}{8}x + \frac{1}{2}$

Ecuación de la recta azul: buscamos dos puntos de coordenadas enteras (-3, –2) y (4, 2), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} -2 = m\cdot(-3) + n \\ 2 = m4 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3m + n = -2 \\ 4m + n = 2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$7m = 4 \Rightarrow m = 4/7$

Sustituimos m = 4/7 en la primera ecuación:

$$\frac{-12}{7} + n = -2 \Rightarrow n = \frac{-2}{7}$$

La ecuación de la recta es $y = \frac{4x-2}{7}$

Para obtener el punto de corte resolvemos el sistema por igualación:

$$\begin{cases} y = \frac{-3}{8}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{4}{7}x - \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{8}x + \frac{1}{2} = \frac{4}{7}x - \frac{2}{7} \Rightarrow$$

$-21x + 28 = 32x - 16 \Rightarrow 53x = 44 \Rightarrow x = 44/53$

y sustituyendo en la primera ecuación x = 44/53, obtenemos y:

$$y = \frac{-3}{8}\cdot\frac{44}{53} + \frac{1}{2} = \frac{-33}{106} + \frac{1}{2} = \frac{20}{106} = \frac{10}{53}$$

El punto de corte es $\left(\frac{44}{53}, \frac{10}{53}\right)$

46. Si la recta es paralela tiene la misma pendiente m = –3

Calculamos n sabiendo que la recta pasa por el punto: (-2, 5):

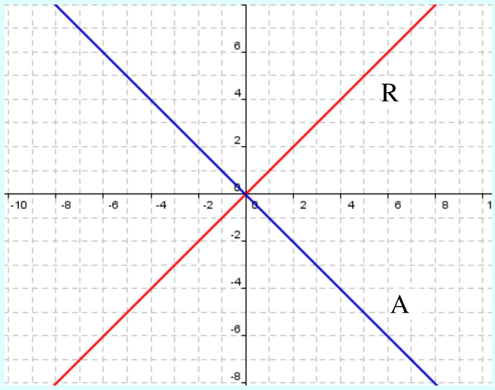
$y = mx + n \Rightarrow 5 = -3\cdot(-2) + n \Rightarrow 5 = 6 + n \Rightarrow n = -1$

La ecuación de la recta es y = –3x – 1

47. La bisectriz del primer y tercer cuadrante (roja, R) tiene pendiente m = 1, y su ecuación en y = x

La bisectriz del segundo y cuarto cuadrante (azul, A) tiene pendiente m = -1, y su ecuación en y = -x

Su representación es la siguiente:



48. Un criterio para asociar cada función con la gráfica correspondiente es obtener la primera coordenada del vértice:

a) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$. Por tanto, corresponde a la gráfica azul

b) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2}$. Por tanto, corresponde a la gráfica roja

c) $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$. Por tanto, corresponde a la gráfica negra

49. Las soluciones son:

a) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{4} = 0$

$y_v = 2\cdot0^2 - 5 = -5$

El vértice es el punto (0, –5)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, –5)

Con el eje OX: resolvemos

$2x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	$\sqrt{5/2}$	$-\sqrt{5/2}$	1	2
y	-5	0	0	-3	3

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

b) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$

$y_v = -0^2 + 2 = 2$

El vértice es el punto (0, 2)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 2)

Con el eje OX: resolvemos

$-x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $\left(\sqrt{2},0\right)$ y $\left(-\sqrt{2},0\right)$

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1	-1
y	2	0	0	1	1

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

c) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2} = -1$

$y_v = (-1)^2 + 2\cdot(-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

El vértice es el punto (–1, 0)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 1)

Con el eje OX: resolvemos $x^2 + 2x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow x = -1.$

Por tanto, el punto de corte con el eje OX es (–1, 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	-1	0	1	-2	-3
y	0	1	4	1	4

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

d) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-7}{-4} = 1{,}75$

$y_v = -2\cdot(1{,}75)^2 + 7\cdot(1{,}75) - 3 = -6{,}125 + 12{,}25 - 3 = 3{,}125$

El vértice es el punto (1,75; 3,125)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, -3)

Con el eje OX: resolvemos $-2x^2 + 7x - 3 = 0$

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{-4} = \dfrac{-7 \pm 5}{-4} \Rightarrow x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 3.$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0,5; 0) y (3, 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	1,75	0	0,5	3	1
y	3,125	-3	0	0	2

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

e) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2{,}5}{4} = 0{,}625$

$y_v = 2\cdot(0{,}625)^2 - 2{,}5\cdot(0{,}625) - 0{,}75 =$

$= 0{,}781 - 1{,}563 - 0{,}75 = -1{,}531$

El vértice es el punto (0,625; –1,531)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0; –0,75)

Con el eje OX: resolvemos

$2x^2 - \dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{4} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 10x - 3 = 0$

$x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100+96}}{16} = \dfrac{10 \pm 14}{16} \Rightarrow x_1 = 1{,}5;\ x_2 = -0{,}25$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0,75; 0) y (0,5; 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0,625	0	1,5	–0,25
y	–1,531	–0,75	0	0

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

f) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-\frac{1}{30}}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{1}{20} = -0{,}05$

$y_v = \dfrac{1}{3}\cdot(-0{,}05)^2 + \dfrac{1}{30}\cdot(-0{,}05) - \dfrac{1}{10} =$

$= 0{,}00083 - 0{,}0017 - 0{,}1 = -0{,}1$

El vértice es el punto (–0,05; –0,1)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0; -0,1)

Con el eje OX: resolvemos $\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{30}x - \dfrac{1}{10} = 0$

$\Rightarrow 10x^2 - x - 3 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+120}}{20} = \dfrac{1 \pm 11}{20} \Rightarrow x_1 = 0{,}6;\ x_2 = -0{,}5$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0,6; 0) y (–0,5; 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	–0,05	0	0,6	–0,5	–7	3
y	–0,1	–0,1	0	0	16	3

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

50. Las respuestas son:

a) Falso, sí es una parábola por tener el término en x^2

b) Falso, no tiene mínimo relativo al ser una parábola con el coeficiente a = –1 negativo y por tanto con las ramas hacia abajo (es un máximo relativo)

c) Verdadero, pues tienen el mismo valor absoluto, 3, del coeficiente a

d) Falso, pues si resolvemos la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$ $\Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -3$, vemos que corta al eje de abscisas en el punto (–3, 0)

51. Las soluciones son:

a) Los puntos de corte con el eje OX son (0,29; 0) y

(–1,69; 0).

El punto de corte con el eje OY es (0; -0,25).

El vértice, y por tanto el mínimo relativo, es el punto (–0,7; -0,5).

Ver figura 9 en la página 11-36 de la guía.

b) Los puntos de corte con el eje OX son (-3, 0) y (3, 0).

El punto de corte con el eje OY es (0, –27), que es un máximo relativo.

Tiene mínimos relativos en los puntos (1,73; –36) y (–1,73; –36).

Ver figura 9 en la página 11-36 de la guía.

c) El punto de corte con el eje OX es (2,81; 0)

El punto de corte con el eje OY es (0, -25)

No tiene máximo ni mínimos relativos

Ver figura 9 en la página 11-36 de la guía.

d) Los puntos de corte con el eje OX son (–49,96; 0), (1,39; 0) y (–1,43; 0).

El punto de corte con el eje OY es (0, –1).

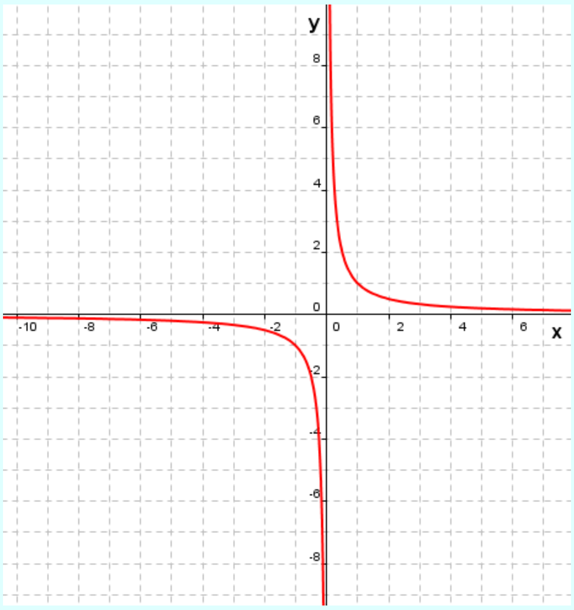
Tiene máximo relativo en el punto (–33,33; 184,19) y mínimo relativo (0, –1).

Ver figura 9 en la página 11-36 de la guía.

52. La tabla de valores es:

x	–0,4	–0,3	–0,2	–0,1	0,1	0,2	0,3	0,4
y	–2,5	–3,33	–5	–10	10	5	3,33	2,5

En el punto x = 0 la función no está definida (no pertenece al dominio).



53. Las respuestas son:

a) $y = ax + b$:

Al variar el valor de a, se modifica la pendiente de la recta. Además, si a > 0 la recta es creciente; si a < 0 la recta es decreciente, y si a = 0 la recta es constante (paralela al eje OX).

Al variar el valor de b, se modifica el punto de corte de la recta con el eje OY. Además, si b > 0 la recta corta el eje por encima del origen de coordenadas; si b < 0 la recta corta al eje por debajo del origen de coordenadas, y si b = 0 la recta pasa por el origen.

b) $y = \dfrac{a}{x + b}$

Al variar el valor de a, se modifica la separación de las dos ramas de la hipérbola. Además, si a > 0 es decreciente; si a < 0 es creciente, y si a = 0 es la recta constante y = 0.

Al variar el valor de b, se modifica la asíntota vertical de la hipérbola. Además, si b > 0 la asíntota está a la izquierda del eje OY; si b < 0 la asíntota está a la derecha del eje OY, y si b = 0 la asíntota es el eje OY.

c) $y = ax^3 + b$:

Al variar el valor de a, se modifica la curvatura de la función. Además, si a > 0 es creciente; si a < 0 es decreciente, y si a = 0 es una recta constante.

Al variar el valor de b, se modifica el punto de corte con el eje OY. Además, si b > 0 corta el eje por encima del origen de coordenadas; si b < 0 corta al eje por debajo del origen de coordenadas, y si b = 0 pasa por el origen de coordenadas.

d) $y = \dfrac{ax}{x^2 + b}$:

Al variar el valor de a, se modifican los intervalos de crecimiento de la función. Además, si a > 0 y b > 0 hay un primer intervalo decreciente, luego otro creciente y finalmente otro decreciente; si a > 0 y b < 0 es decreciente; si a < 0 y b > 0 hay un primer intervalo creciente, luego otro decreciente y finalmente otro creciente; si a < 0 y b < 0 es creciente; y si a = 0 es la recta constante y = 0.

Al variar el valor de b, se modifica la continuidad de la función. Si b > 0 es continua, y si b ≤ 0 es discontinua.

Página 253

54. Carla sale de su casa a una buena velocidad, pero a partir del kilómetro 6, cuando lleva 12 minutos de paseo, empieza a reducir un poco la velocidad. A 10 kilómetros de casa, a los 24 minutos, hace un descanso de unos 7 minutos, y después reanuda la marcha de vuelta a casa. A 4 minutos de su casa vuelve a hacer un descanso de unos 12 minutos, después de los cuales reanuda la marcha y llega a su casa después de 1 hora y 12 minutos desde que salió de casa.

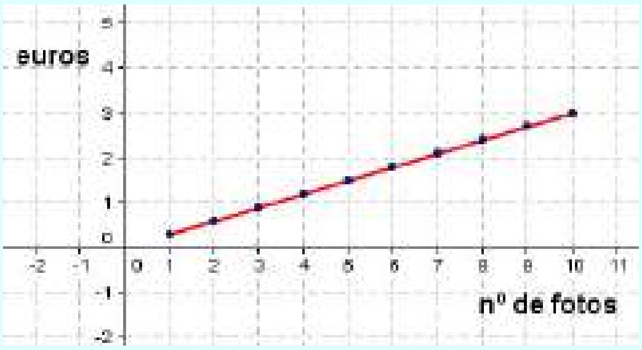
55. Las soluciones son:

a) La tabla de valores es:

Nº de fotos	1	2	3	4	5
Precio (euros)	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5

Nº de fotos	6	7	8	9	10
Precio (euros)	1,8	2,1	2,4	2,7	3

La gráfica es:



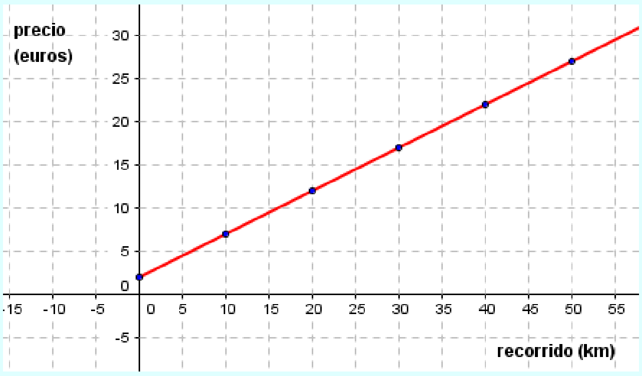
b) La fórmula de la función es y = 0,3x, donde x es el número de fotos e y el precio que cuestan. La constante 0,3 es el precio por unidad de foto.

56. Las soluciones son:

a) La tabla de valores es:

Recorrido (km)	10	20	30	40	50
Precio (euros)	7	12	17	22	27

La gráfica es:



b) Es una función afín. La fórmula de la función es y = 0,5x + 2, donde x es el número de kilómetros recorridos e y el precio que cuesta.

c) Sustituimos x = 15 en la fórmula: y = 0,5·15 + 2 = = 9,5. El coste es de 9,5 euros.

57. Las respuestas son:

a) La función es y = x + 5, donde x es la edad de su hermana Ana e y su edad.

b) La función es y = x – 3, donde x es la edad de su hermano Juan e y su edad, siendo x $\geq$ 3.

58. Aplicamos el teorema de Pitágoras, siendo x uno de sus catetos e y la hipotenusa:

$y^2 = x^2 + 7^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 49}$

59. Las soluciones son:

a) La tabla de valores es:

Resp. correctas	1	2	3	4	5
Nota	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2

Resp. correctas	10	20	30	40	50
Nota	0,4	0,8	1,2	1,6	2

b) La fórmula es y = 0,04x, que corresponde a una función lineal

La gráfica es:

Ver figura 10 en la página 11-37 de la guía.

c) Sustituimos y = 10 en la fórmula: 10 = 0,04·x

x = 10 : 0,04 = 250. El examen tiene 250 preguntas.

60. Las fórmulas son:

a) El área es la suma del área del cuadrado de lado 2x, y de medio círculo de radio x:

$$y = (2x)^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 = 4x^2 + \frac{\pi}{2}x^2 \Rightarrow y = \left(\frac{8+\pi}{2}\right)x^2$$

b) El área es la suma del área de dos círculos de radio x/4, y el área de un cuadrado de lado x, menos el área de un círculo de radio x/2:

$$y = 2\pi\left(\frac{x}{4}\right)^2 + x^2 - \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\pi + 1\right)x^2$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{8-\pi}{8}\right)x^2$$

61. Las respuestas son:

a) La tabla de valores con aproximaciones es la siguiente:

t	**f(t)**
0	0
1	0,343
2	0,686
3	1,029
4	1,372
5	1,715
6	2,058
7	2,401
8	2,744
9	3,087
10	3,43

t	**f(t)**
11	3,773
12	4,116
13	4,459
14	4,802
15	5,145
16	5,488
17	5,831
18	6,174
19	6,517
20	6,86

La gráfica es la siguiente:

Ver figura 11 en la página 11-37 de la guía.

Es una función lineal.

b) Puede verse que aparece en la tabla de valores que hemos realizado en el apartado anterior, luego, el punto sí pertenece a la gráfica de la función.

Significa que cuando transcurren 5 segundos entre el relámpago y el trueno, la tormenta se encuentra a 1,715 km de distancia.

62. Las soluciones son:

a) Sí es una función, porque la cantidad de agua varía en función del tiempo que transcurre desde la rotura

b) Despejamos la y (cantidad de agua) y queda:

y = (-72x + 51840) : 6 $\Rightarrow$ y = -12x + 8640

Sustituimos x = 20 en la expresión anterior:

y = -12·20 + 8640 = -240 + 8640 = 8400.

Quedan 8400 litros de agua en el depósito

c) Sustituimos y = 0 en la fórmula anterior:

$0 = -12x + 8640 \Rightarrow 12x = 8640 \Rightarrow x = 720$

Tardará en vaciarse 720 segundos, es decir, 12 minutos.

63. Resuelto por el libro.

Página 254

64. Las respuestas son las siguientes:

a) Para x = 0: y = 20, luego está a 20 metros de altura.

Para x = 1: $y = -4\cdot 1^2 + 16\cdot 1 + 20 = 32$, luego está a 32 metros de altura.

Para x = 5: $y = -4\cdot 5^2 + 16\cdot 5 + 20 = -100 + 80 + 20 =$ $= 0$, luego está en el suelo.

b) Calculamos el vértice de la parábola, donde está el máximo:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$y_v = -4\cdot 2^2 + 16\cdot 2 + 20 = -16 + 32 + 20 = 36$

El vértice es el punto (2, 36), por tanto tarda 2 segundos en llegar a la altura máxima y alcanza los 36 metros.

c) Según el apartado a) si x = 5, entonces y = 0. Es decir, en 5 segundos llega al suelo.

65. Las soluciones son:

a) Sí, es la función que calcula el área del rectángulo en función de la base x (la altura es 50 – x).

b) Sustituimos x = 12 en la fórmula del área:

$A(12) = 12\cdot(50 - 12) = 12\cdot 38 = 456$. El área mide 456 cm^2.

c) No, porque si la altura es 50 – x = 57, entonces la base x sería x = 50 – 57 = -7, que es imposible.

66. Las soluciones son:

a) Sí, es una función que calcula el volumen V en función del lado x de la base (la altura es 80 – 2x)

El dominio está formado por el conjunto de números desde 0 hasta 40 (sin incluir), porque para valores mayores o iguales a 40 sería la altura negativa: $80 - 2x \leq 0$

b) El área de la base es: x^2

El área lateral es: $4x(80 - 2x)$

El área total es, por tanto: $A(x) = 2x^2 + 4x(80 - 2x) =$ $= 2x^2 + 320x - 8x^2 = -6x^2 + 320x$

PARA AMPLIAR

67. El dominio de cada función es:

a) No puede ser $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números excepto el –2.

b) Tiene que ser $x \geq 0$. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números mayores o iguales que cero.

c) Tiene que ser $x^2 + 4 \geq 0$, que ocurre para cualquier x. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números.

d) No puede ser $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números excepto el 4.

68. Resuelto por el libro.

69. La tabla completa es:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	18	11	6	3	2	3	6	11	18

La fórmula de la función es: $y = x^2 + 2$.

70. Las respuestas son:

a) Obtenemos la fórmula de la función:

Los beneficios son los ingresos menos los costes

Los costes anuales son:

Costes fijos: 48 000 € · 12 = 576 000 €

Costes extras: 3 600 € · 18 = 64 800 €

Por tanto, los costes son de 576 000 € + 64 800 € = = 640 800 €

Los ingresos, en función del número de descargas x, son: 2,40·x

La función es: y = 2,40x – 640 800

La función representada es la siguiente:

Ver figura 12 en la página 11-37 de la guía.

b) Buscamos el punto de corte con el eje OX, donde la función empieza a ser positiva:

$2{,}40x - 640800 = 0 \Rightarrow x = 640\,800 : 2{,}40 = 267\,000$

Empieza a obtener beneficios a partir de 267 000 descargas.

c) Sustituimos en la fórmula y = 62 000:

$62\,000 = 2{,}40x - 640\,800 \Rightarrow 2{,}40x = 702\,800$

$x = 702\,800 : 2{,}40 = 292\,833{,}33$

Por tanto, debe conseguir 292 834 descargas.

71. Las respuestas son:

a) La tabla completa es la siguiente:

distancia (miles de km)		50	100	150	200
gasto (€)	**motor gasolina**	36 000	48 000	60 000	72 000
	motor diésel	36 500	47 000	57 500	68 000

b) Fórmula del gasto para gasolina:

y = 0,24x + 24000, donde x es el número de km (en miles) e y el gasto.

Fórmula del gasto para diésel:

y = 0,21x + 26000, donde x es el número de km (en miles) e y el gasto.

c) La representación es la siguiente:

Ver figura 13 en la página 11-38 de la guía.

Es más rentable el gasolina (recta roja, R) hasta los 66.667 km, donde se cortan las dos funciones; a partir de ahí es más rentable el diesel (recta azul, A).

72. Representamos las funciones, obteniendo los vértices y puntos de corte con los ejes:

Cohete de David:

Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1,95}{-0,30} = 6,5$$

$y_v = -0,15\cdot(6,5)^2 + 1,95\cdot 6,5 = 6,34$

El vértice es el punto (6,5; 6,34).

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 0).

Con el eje OX: resolvemos:

$0 = -0,15\cdot t^2 + 1,95\cdot t \Rightarrow t(-0,15t + 1,95) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0$ y $t_2 = 13$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0, 0) y (13, 0).

Cohete de Marta:

Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2,74}{-0,46} = 5,96$$

$y_v = -0,23\cdot(5,96)^2 + 2,74\cdot 5,96 = 8,16$

El vértice es el punto (5,96; 8,16).

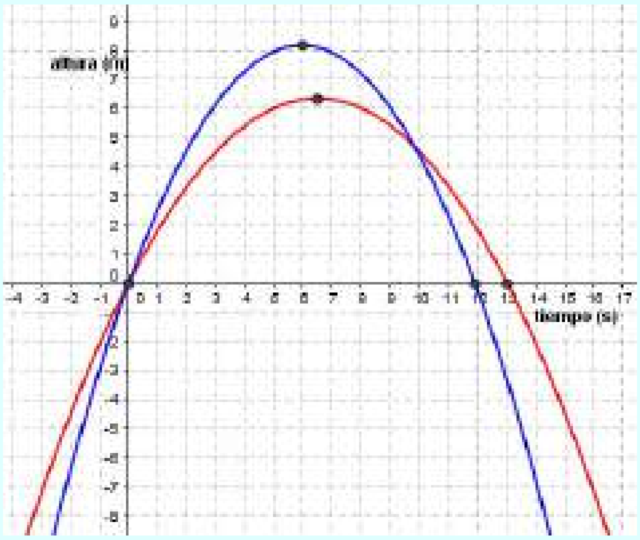
Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 0)

Con el eje OX: resolvemos $0 = -0,23\cdot t^2 + 2,74\cdot t \Rightarrow$

$t(-0,23t + 2,74) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ y $t_2 = 11,91$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0, 0) y (11,91; 0).



a) Sustituimos t = 5 en ambas funciones:

$f(5) = -0,15\cdot 5^2 + 1,95\cdot 5 = -3,75 + 9,75 = 6$

$g(5) = -0,23\cdot 5^2 + 2,74\cdot 5 = -5,75 + 13,7 = 7,95$

Por tanto, el cohete de David alcanza 6 metros de altura, y el de Marta 7,95 metros.

b) Al caer al suelo la altura es cero, por tanto obtenemos el tiempo a partir de los puntos de corte con el eje OX obtenidos anteriormente. Luego, el cohete de David tarda 13 s, y el de Marta 11,91 s.

c) Calculamos el otro punto de corte de ambas funciones:

$-0,15\cdot t^2 + 1,95\cdot t = -0,23\cdot t^2 + 2,74\cdot t$

$\Rightarrow 0,08t^2 - 0,79t = 0 \Rightarrow t(0,08t - 0,79) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0$ (se descarta) y $t_2 = 9,875$

Están a la misma altura a los 9,875 segundos.

d) No se puede afirmar que el cohete de David cae más lejos, pues las únicas variables que relacionan las fórmulas son el tiempo y la altura, en ningún caso la distancia desde donde son lanzados.

Página 255

DESARROLLA TUS COMPETENCIAS

1. La gráfica es la siguiente:

2. Las respuestas son:

a) Comenzó a 300 metros de altitud, y acabó a 400 metros.

b) Se alcanzó una altitud máxima de 600 metros.

c) Fueron cuesta arriba desde el inicio hasta el kilómetro 30, y cuesta abajo desde el kilómetro 30 hasta el final de la excursión (km 44).

d) Fueron a pie hasta el kilómetro 16 y en bici desde el kilómetro 16 hasta el final (km 44).

3. Las soluciones son:

a) La función es $c = 1,50\cdot t + 4$

b) Completamos la tabla:

Tiempo (h)	0,5	1	1,5	2	2,5
Coste (€)	4,75	5,50	6,25	7	7,75

c) El coste es de $60\cdot c$, es decir,

$60(1,50t + 4) = 90t + 240$.

Por tanto, es la opción C

4. Esta señal indica que la bajada tiene una inclinación del 10%, es decir, que la pendiente de la recta que une el punto inicial de la bajada y el punto final es m = –0,1.

Pág. 256

EVALUACIÓN DE ESTÁNDARES

1. La tabla completa es la siguiente:

Aceite (L)	0	1	2	2,5	3	4	5,5
Precio (€)	0	3,5	7	8,75	10,5	14	19,25

Sí, el precio depende de los litros de aceite, y la fórmula de la función es y = 3,5x, donde x son los litros de aceite e y es el precio.

2. No es una función, porque para ciertos valores de x le corresponden varios valores de y; por ejemplo, para x = 0 le corresponden y = 0,25, y = 1,75, y = 2,75.

3. Dominio: es el conjunto de todos los números desde –4,5 hasta –1,5 y desde –1 hasta 6.

Recorrido: es el conjunto de todos los números desde –0,5 hasta 3.

Puntos de discontinuidad: es discontinua desde –1,5 hasta –1.

Puntos de corte con los ejes: corta al eje OY en (0, 2) y al eje OX en (–2, 0), (3, 0) y (5, 0).

Tramos de crecimiento: Es creciente desde –4,5 hasta –3, desde –1 hasta 1,5 y desde 4,5 hasta 6. Es decreciente desde –3 hasta –1,5 y desde 1,5 hasta 3,3 aproximadamente. Es constante desde 3,3 hasta 4,5.

Extremos relativos: tiene máximos relativos en x = –3 y x = 1,5. No tiene mínimos relativos.

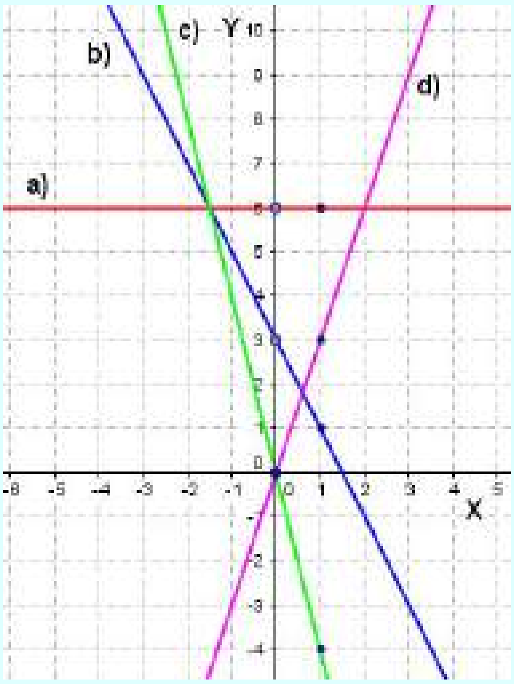
4. Las gráficas son:

a) Representamos los puntos (0, 6) y (1, 6) y trazamos la recta que los une. Es una función constante.

b) Representamos los puntos (0, 3) y (1, 1) y trazamos la recta que los une. Es una función afín.

c) Representamos los puntos (0, 0) y (1, -4) y trazamos la recta que los une. Es una función lineal.

d) Representamos los puntos (0, 6) y (1, 3) y trazamos la recta que los une. Es una función lineal.



5. La recta y = mx + n tiene pendiente m y ordenada en el origen n; por tanto, la pendiente es m = 2 y la ordenada en el origen en n = –3

6. Las ecuaciones son

a) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 3), por tanto n = 3.

Pasa por el punto (–3, 0) que debe satisfacer la ecuación y = mx + 3:
$0 = m\cdot(-3) + 3 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = 1$

La ecuación es y = x + 3

b) Buscamos dos puntos de coordenadas enteras (5, 0) y (–4, 4), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 2 = m\cdot 5 + n \\ 4 = m\cdot(-4) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m + n = 0 \\ -4m + n = 4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$9m = -4 \Rightarrow m = -4/9$

Sustituimos m = –4/9 en la primera ecuación: $5\cdot\frac{-4}{9} + n = 0 \Rightarrow n = \frac{20}{9}$

La ecuación de la recta es $y = \frac{-4x + 20}{9}$

7. Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{0,5} = 0$$

$$y_v = \frac{1}{4}\cdot 0^2 - 4 = -4$$

El vértice es el punto (0, –4).

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, –4)

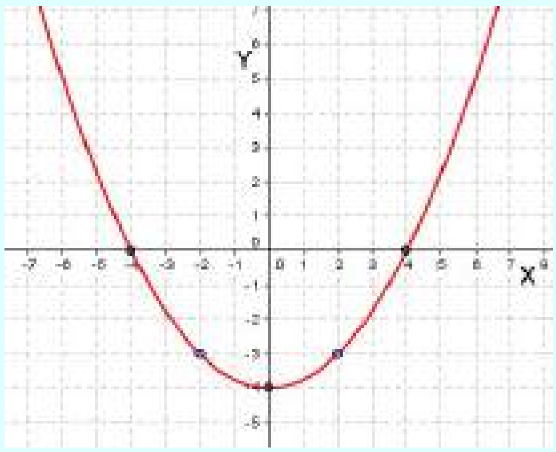
Con el eje OX: resolvemos:

$$\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -4$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (4, 0) y (-4, 0).

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	4	–4	2	–2
y	–4	0	0	–3	–3



8. La representación es la siguiente:

Ver figura 14 en la página 11-38 de la guía.

El vértice es (6,34; -12,23), el punto de corte con el eje OY es (0; -2,18) y los puntos de corte con el eje OX son (-0,65; 0) y (13,33; 0).

9. El área coloreada se obtiene restando al área del cuadrado de lado 8x, el área del círculo de radio 4x y la del círculo de radio x (4 cuartos de círculo).

El área del cuadrado es: $A_{cu} = (8x)^2 = 64x^2$

El área del círculo mayor es:

$A_{ci1} = \pi(4x)^2 = 3{,}14 \cdot 16x^2 = 50{,}24x^2$

El área del círculo mayor es: $A_{ci2} = \pi x^2 = 3{,}14x^2$

El área de la zona coloreada es:

$A = A_{cu} - A_{ci1} - A_{ci2} = 64x^2 - 50{,}24x^2 - 3{,}14x^2 = 10{,}62x^2$

La fórmula de la función es $A(x) = 10{,}62x^2$

10. Las soluciones son:

a) La altura es $20 - x \Rightarrow 20 - x = 8 \Rightarrow x = 20 - 8 = 12$

Por tanto, el volumen es $V(12) = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 8 =$ $= 1205{,}76 \text{ cm}^3$

b) El dominio es el conjunto de todos los números entre 0 y 20 (sin incluir), porque la altura 20 – x tiene que ser positiva, y por tanto x es un valor entre 0 y 20.

c) Si $x = 12 \Rightarrow V(12) = 1205{,}76 \text{ cm}^3$ (calculado en el apartado a)

Si $x = 14 \Rightarrow V(14) = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 14^2 \cdot 6 = 904{,}32 \text{ cm}^3$

Por tanto, el volumen mayor le corresponde al radio x = 12 cm

ESTRATEGIA E INGENIO: HISTORIAS GRÁFICAS

Actividad personal. A modo de ejemplo, especificaremos siempre y frente a x:

a) Velocidad frente a tiempo de un automóvil que acelera con aceleración constante.

b) Velocidad frente a tiempo de un meteorito cuando gira a causa del Sol.

c) Altura frente a velocidad de un esquiador descendiendo una montaña.

d) Profundidad frente a anchura de la trayectoria de un boomerang.

e) Posición frente a tiempo de una persona quieta en un lugar.

f) Interés frente a tiempo. Suponemos un objeto que no sabemos que exite hasta que se ve anunciado en televisión, se alcanza el máximo el día que lo compramos y decae a medida que pasa el tiempo.

g) Velocidad frente a tiempo, de un corredor que había empezado a correr antes de que diesen la salida.

h) Temperatura frente a tiempo de un día y medio en una ciudad con temperaturas nocturnas bajo 0.

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 11-3 de la guía)

4. Las soluciones son las siguientes:

a) $3x - 4 = 0 \rightarrow 3x = 4$

Soluciones: y = 0; x= 4 / 3

b) $\begin{cases} 5 = 2m + m + n \\ 1 = m + n \end{cases} \rightarrow 5 = 2m + 1 \rightarrow 2m = 4$

Soluciones: m = 2; n = –1

5. La resolución es la siguiente:

$$x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

Soluciones: $x_+ = 3/2$; $x_- = -2$

(Viene de la página 11-7 de la guía)

b) Con el eje OY: puesto que f(0) = –12, el punto de corte con el eje OY es (0, –12).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación $3x^2 - 12 = 0$; $x^2 = 4$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (2, 0) y (–2, 0).

c) Con el eje OY: puesto que f(0) = -20, el punto de corte con el eje OY es (0, -20).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación $12x^2 + 22x - 20 = 0$; $6x^2 + 11x - 10 = 0$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-10)}}{2 \cdot 6} = \frac{-11 \pm 19}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-5}{2},\ x_2 = \frac{2}{3}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $\left(\frac{-5}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

d) Con el eje OY: puesto que f(0) = 12, el punto de corte con el eje OY es (0, 12).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación

$x^2 + 5x + 12 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{2}$$

La ecuación no tiene solución y por tanto, no hay puntos de corte con el eje OX.

(Viene de la página 11-13 de la guía)

b) Recta *r*: es paralela al eje de abscisas, y por tanto m = 0, y corta al eje de ordenadas en (0, 3), y por tanto n = 3.

La ecuación de la recta es y = 3

Recta *s*: tenemos los puntos (4, 4) y (2, -3).

$$\begin{cases} 4 = m\cdot 4 + n \\ -3 = m\cdot 2 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m + n = 4 \\ 2m + n = -3 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

$2m = 7 \Rightarrow m = 7/2$

Sustituimos m = 7/2 en la primera ecuación:

$4\cdot(7/2) + n = 4 \Rightarrow 14 + n = 4 \Rightarrow n = -10$

La ecuación de la recta es $y = \frac{7}{2}x - 10$

Recta *t*: tenemos los puntos (-1, -3) y (-4, 4).

$$\begin{cases} -3 = m\cdot(-1) + n \\ 4 = m\cdot(-4) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m + n = -3 \\ -4m + n = 4 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

$3m = -7 \Rightarrow m = -7/3$

Sustituimos m = –7/3 en la primera ecuación:

$(7/3) + n = -3 \Rightarrow n = -3 - 7/3 \Rightarrow n = -16/3$

La ecuación de la recta es $y = \frac{-7x - 16}{3}$

(Viene de la página 11-15 de la guía)

c) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1$

$y_v = 1^2 - 2\cdot 1 = -1$

El vértice es el punto (1, –1)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 0)

Con el eje OX: resolvemos $x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0, 0) y (2, 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	1	2	–1	3
y	0	–1	0	3	3

Ver figura 2 en la página 11-34 de la guía

20. Las gráficas son las siguientes:

a) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$

$y_v = 2\cdot(-0{,}5)^2 + 2\cdot(-0{,}5) - 24 = -24{,}5$

El vértice es el punto (–0,5; –24,5)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, –24)

Con el eje OX: resolvemos $2x^2 + 2x - 24 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -4.$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (3, 0) y (–4, 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	–0,5	0	3	–4	1	2
y	–24,5	–24	0	0	–20	–12

Ver figura 3 en la página 11-34 de la guía

b) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{13}{12} \approx 1{,}08$

$y_v = 6\cdot\left(\frac{13}{12}\right)^2 - 13\cdot\left(\frac{13}{12}\right) - 5 = -\frac{289}{24} \approx -12{,}04$

El vértice es el punto (1,08; –12,04)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, –5)

Con el eje OX: resolvemos $6x^2 - 13x - 5 = 0$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169+120}}{12} = \frac{13 \pm 17}{12} \Rightarrow$

$x_1 = 2{,}5;\ x_2 \approx -0{,}33$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (2,5; 0) y (–0,33; 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	1,08	0	2,5	–0,33	-1
y	–12,04	–5	0	0	14

Ver figura 3 en la página 11-34 de la guía

(Viene de la página 11-17 de la guía)

25. Llamamos x e y a los números, que deberán cumplir:

$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$

Elaboramos una tabla con los pares de posibles números enteros, y el valor del producto entre ellos, teniendo en cuenta que los valores de x e y son intercambiables:

(x,y)	xy
(1, 19)	19
(2, 18)	36
(3, 17)	51
(4, 16)	64
(5, 15)	75

(x,y)	xy
(6, 14)	84
(7, 13)	91
(8, 12)	96
(9, 11)	99
(10, 10)	100

El mayor producto lo obtenemos con el par 10 y 10.

FIGURA 1

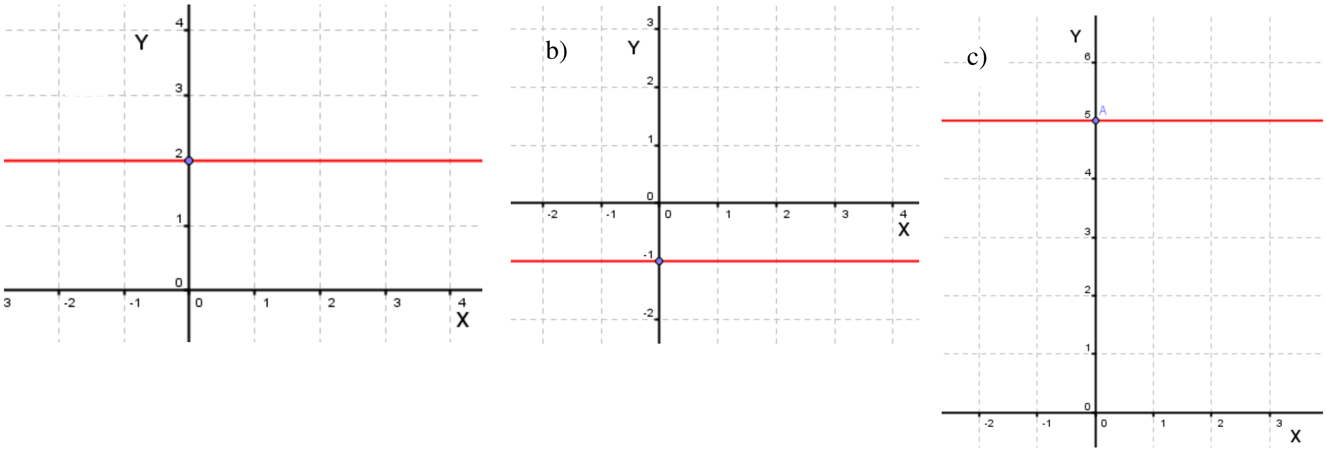


FIGURA 2

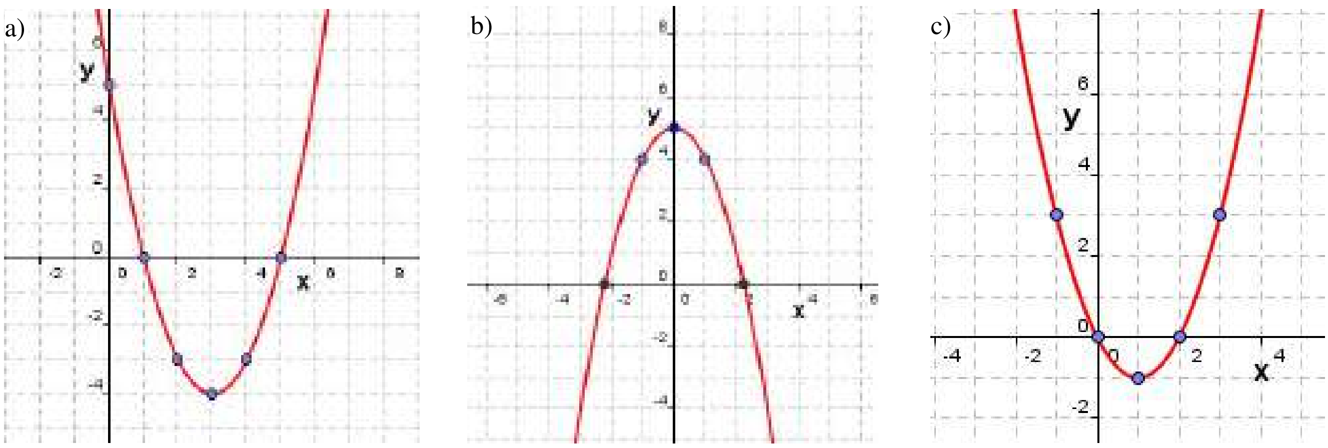


FIGURA 3

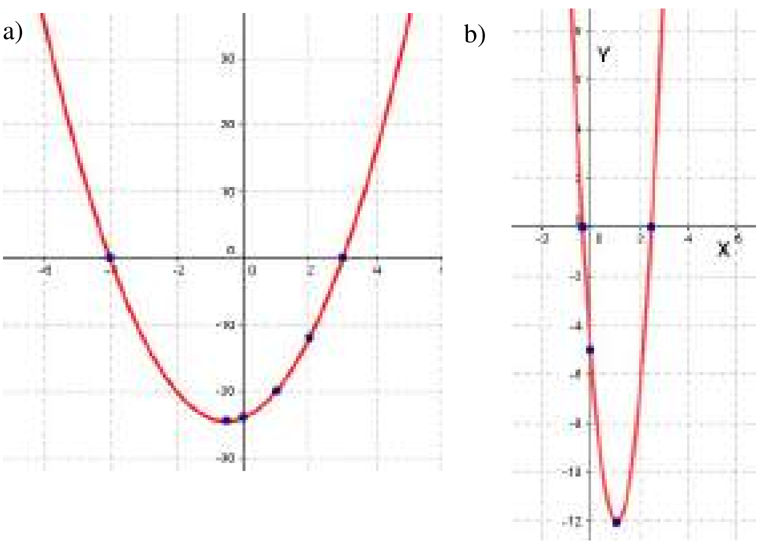


FIGURA 4

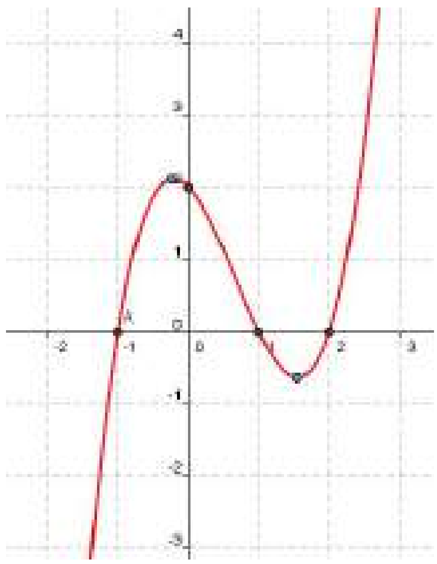


FIGURA 5

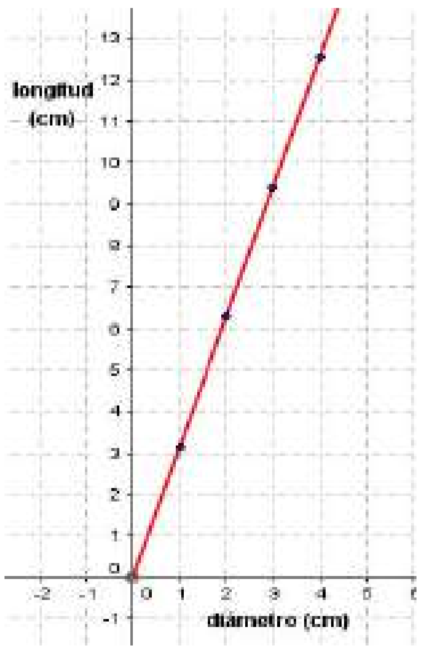


FIGURA 6

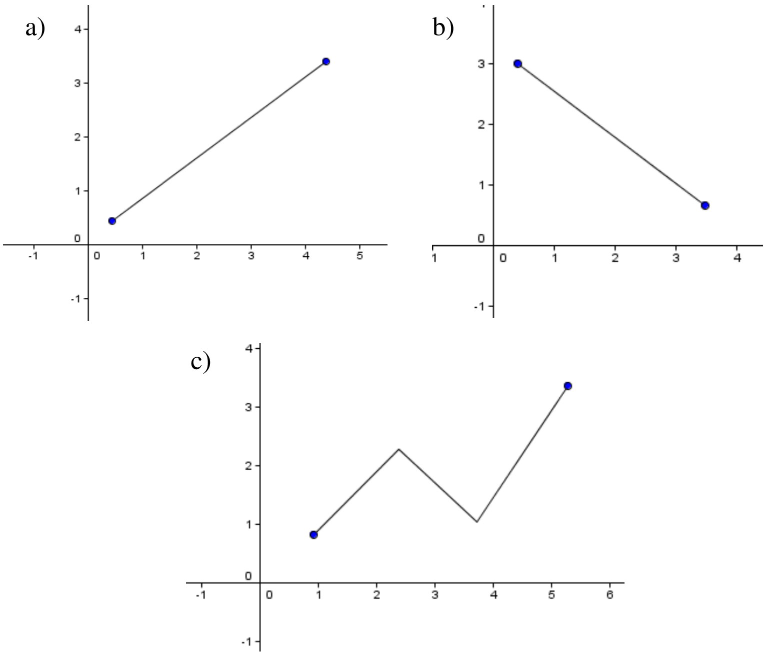


FIGURA 7

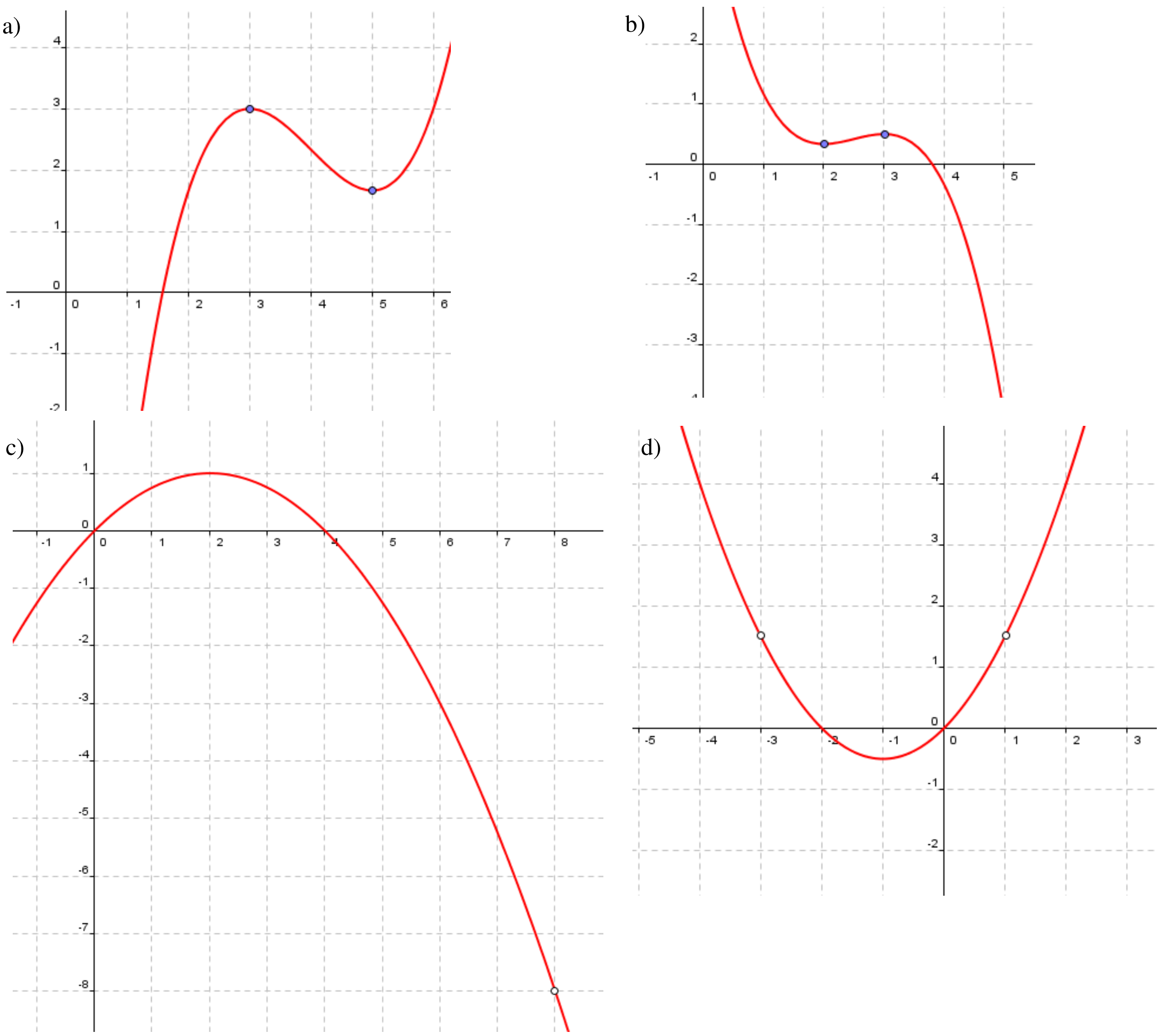


FIGURA 8

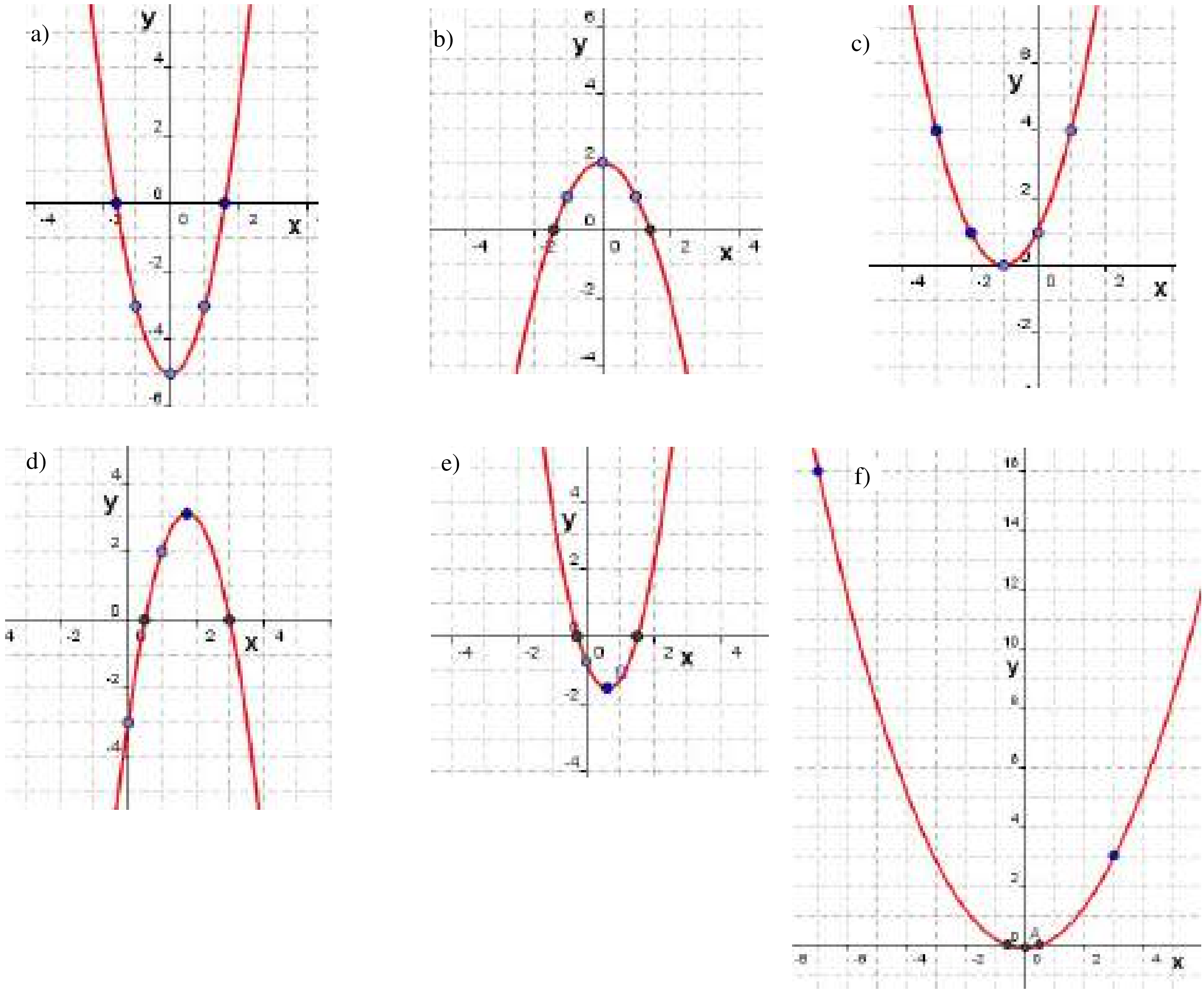


FIGURA 9

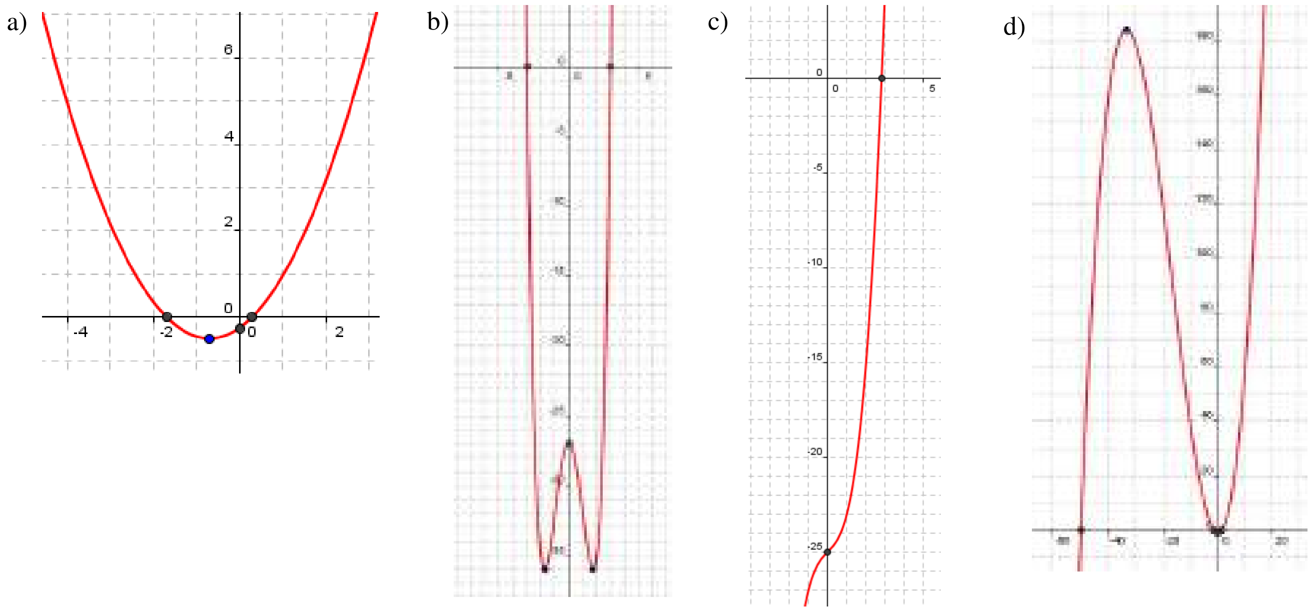


FIGURA 10

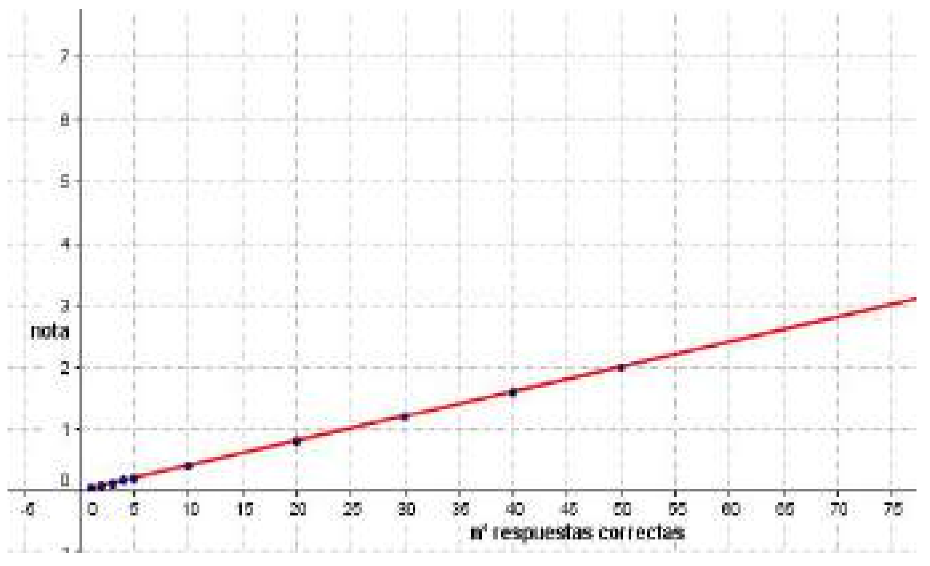


FIGURA 12

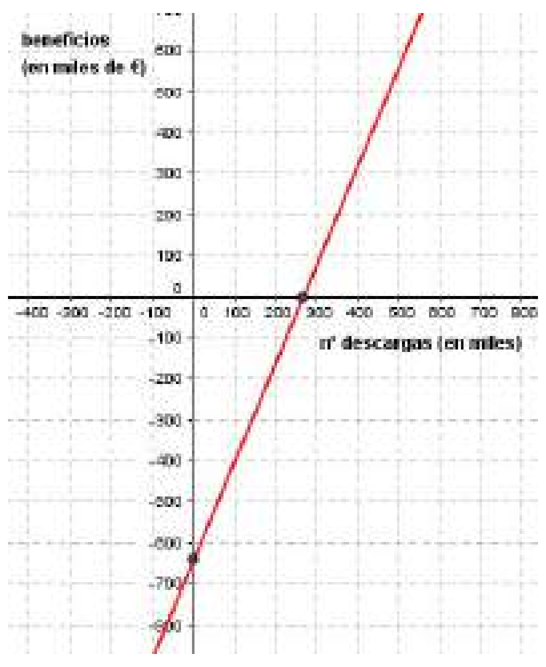


FIGURA 11

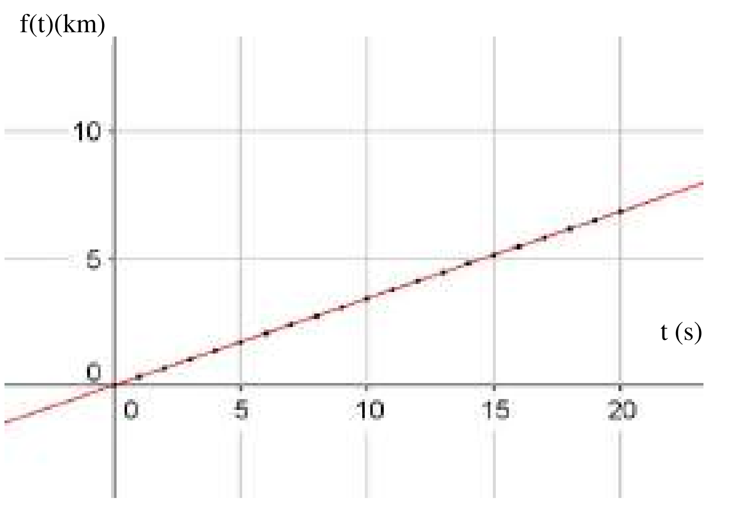


FIGURA 13

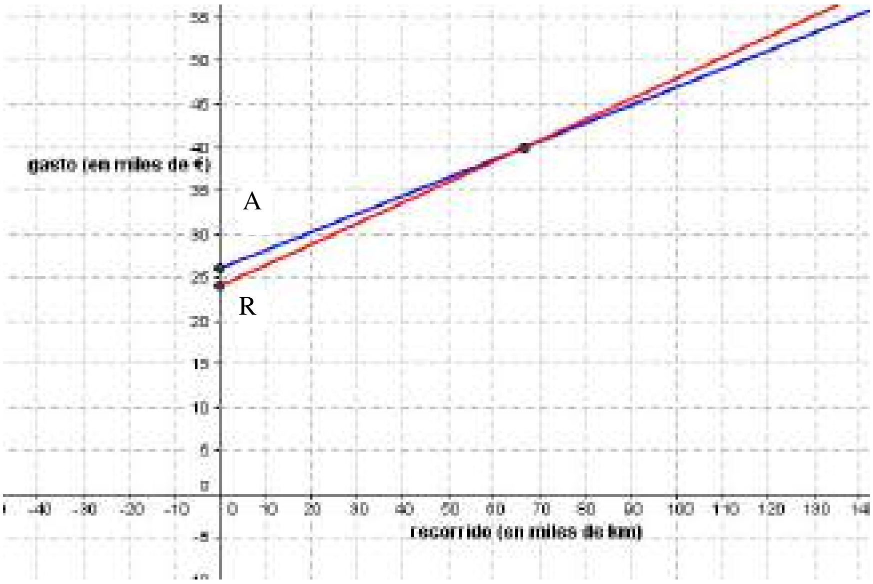
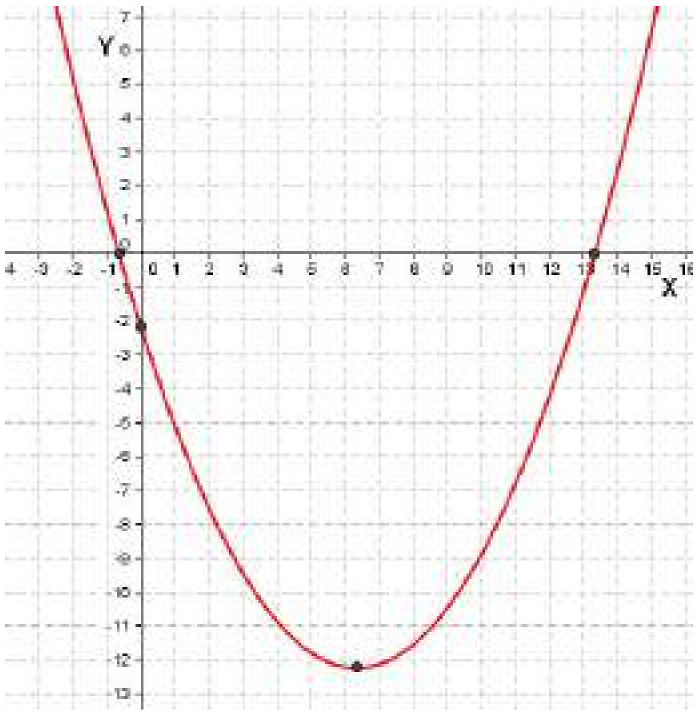


FIGURA 14



DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/738812	http://matematicasiesoja.wordpress.com/2o-eso/
http://www.tiching.com/749827	http://conteni2.educarex.es/mats/11806/contenido/
http://www.tiching.com/749828	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/representaciones/graficas_tablas/actividad.html
http://www.tiching.com/749829	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_funciones/index_2quincena11.htm
http://www.tiching.com/749830	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/caracteristicas/mancuentro/actividad.html
http://www.tiching.com/749831	http://www.vitutor.com/fun/2/c_3_e.html
http://www.tiching.com/749832	http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Recta_Ecuacion_de.html
http://www.tiching.com/749833	http://aprender-ensenyar-matematicas.blogspot.com.es/2011/12/dibujar-graficas-de-funciones-usando-el.html

INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ La finalidad de esta unidad didáctica consiste en ampliar el estudio de la estadística, que ya se inició en el curso anterior de esta etapa educativa.

En primer lugar leeremos el texto introductorio y observaremos la imagen de presentación. Después los comentaremos con los alumnos y alumnas siguiendo este cuestionario:

– *¿Qué es una población? ¿Sabría proponer un ejemplo?*

– *¿Qué es una muestra de una población?*

– *¿Puedes tener varias muestras de la misma población?*

– *¿Para qué sirve la estadística?*

– *¿Qué tipos de gráficos reconoces en la imagen de esta doble página?*

– *¿Conoces algún otro tipo de gráfico estadístico que se utiliza mucho?*

■ A continuación prestaremos atención al índice de contenidos y al esquema de esta unidad didáctica, y plantearemos estas preguntas al alumnado:

– *¿Qué es una variable estadística?*

– *¿Qué variables estadísticas podrías medir en tu clase?*

– *¿Conoces alguna medida que sirve para decir cómo es una muestra o una población?*

Empezamos la unidad

■ Con el fin de introducir y repasar ciertos conceptos que se desarrollarán a lo largo de la unidad, se proponen una serie de actividades, cuyos objetivos particulares son:

– En la actividad 1 se trata de relacionar el concepto de fracción con el de número decimal y el de porcentaje.

– La actividad 2 refuerza los procedimientos de aproximación y redondeo.

– En la actividad 3 se repasa el método de cálculo del porcentaje de un número.

– La actividad 4 trabaja la interpretación de un gráfico estadístico de barras.

■ Para concluir pediremos al alumnado que resuelva por parejas las actividades planteadas en el apartado *Para empezar*, de manera que identifiquen sus fortalezas y carencias en relación a este tema.

Competencias Clave

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 4.* Expresar por escrito los conocimientos adquiridos en cursos anteriores en la resolución de la actividad.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1, 2, 3 y 4.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.

■ *Acts. 1, 2 y 3.* Saber transformar la información recopilada en cursos anteriores en conocimiento propio.

■ *Esquema pág. 258.* Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Texto pág. 258.* Valorar el carácter práctico de la estadística en la vida cotidiana como una parte importante de las Matemáticas que nos permitirá relizar análisis de manera sistemàtica.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 3 y 4.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos de estadística del curso anterior.

Recursos didácticos

Navegamos por Tiching

– Para empezar el tema proponemos que accedan al siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749560

Presentaremos la página oficial del INE con el objetivo de que tengan acceso a diferentes estudios estadísticos y entiendan cómo esta disciplina está presente en nuestra sociedad y nos puede dar información sobre diferentes aspectos de la vida.

La página ofrece diferentes recursos. Como docentes les propondremos que visualicen el vídeo “Un dia en cifras” de casi tres minutos de duración y a continuación les preguntaremos:

- *¿Qué datos te han sorprendido más?*
- *¿Qué otras situaciones reales se podrían estudiar y analizar a través de la estadística?*
- *¿Qué utilizan para hacer la presentación de los datos? ¿Por qué crees que se presentan así?*

Podemos volver a esta página en otros momentos de la unidad, dejando esta posibilidad abierta para que ellos interactúen siempre que quieran.

Educamos en valores

Respeto a las ideas y opiniones diferentes de las propias

■ Las matemáticas constituyen una disciplina en la que se puede trabajar la convivencia.

Permiten potenciar los valores de la solidaridad, la colaboración y la tolerancia a través de las actividades de grupo.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de esta unidad didáctica que contribuyen a conseguir este objetivo:

- La actividad 21 de la página 270 el alumnado puede valorar diferentes estrategias de resolución propuestas por los compañeros.
- La actividad 34 de la página 274 permite que el alumnado compare diferentes las ideas de sus comañeros con las suyas propias.

Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

Soluciones de las actividades

Página 259

Para empezar…

1. Las respuestas son las siguientes:

a) 0,75 → 75% b) 0,4 → 40%

c) 0,6 → 60% d) 0,2759 → 27,59%

2. Los redondeos son los siguientes:

a) 0,21 b) 0,11 c) 0,67 d) 0,25

3. Los porcentajes son los siguientes:

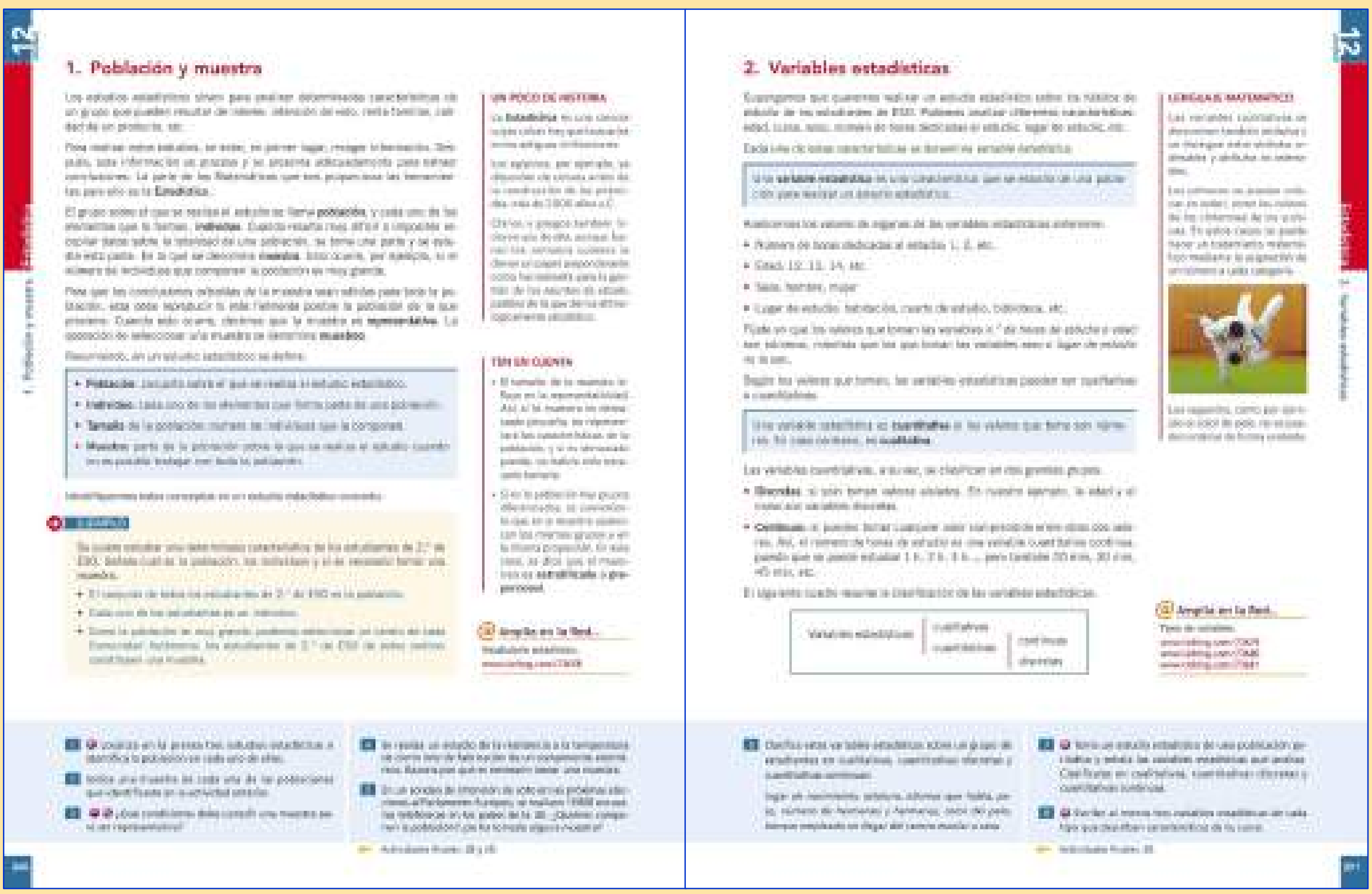
a) 9 b) 20 c) 15 d) 111

4. Las respuestas son las siguientes:

a) Participan 30 equipos en la categoría juvenil.

b) La categoría juvenil es la que más equipos reúne y la categoría alevín la que menos.

c) En total participan 100 equipos.



1. POBLACIÓN Y MUESTRA / 2. VARIABLES…

1. Población y muestra

■ El objetivo de esta sección consiste en introducir los conceptos básicos de individuo, muestra y población, reconociéndolos desde un punto de vista práctico.

Para empezar los alumnos y alumnas leerán los dos primeros párrafos y el documento del margen *Un poco de historia* que centran el campo de acción de la estadística y su evolución:

– *¿Para qué sirve la estadística?*
– *¿Cuándo se empezó a utilizar la estadística?*
– *¿Cuál es el origen de la palabra estadística?*

■ A continuación leerán el resto de la sección que introduce el significado de los conceptos clave:

– *¿Qué es la población?*
– *¿Qué es un individuo?*
– *¿Qué es una muestra? ¿Qué es el tamaño de la muestra?*

Después leerán la nota del margen que relaciona el tamaño y la representatividad de las muestras.

Seguidamente analizarán el ejemplo propuesto diferenciando la población de las posibles muestras.

Para terminar resolverán las actividades de la 1 a la 5 y las actividades finales 28 y 29 de la página 274.

2 Variables estadísticas

■ Proseguiremos leyendo los tres primeros párrafos de esta sección y los ejemplos que se proponen de variables estadísticas:

– *¿Qué es una variable estadística?*
– *¿Qué variables estadísticas pueden considerar en tu clase?*
– *¿Qué valores puede tomar la variable estadística peso de los alumnos?*

■ Después leerán el resto de la sección y el documento *Lenguaje matemático* que introducen los diferentes tipos de variables estadísticas:

– *¿Qué tipo de variable es la longitud de un animal?*
– *¿Cómo se distingue una variable discreta de una variable continua?*
– *¿Qué tipo de variable es el color del pelo de los alumnos de la clase?*

Como repaso de los conceptos introducidos, el alumnado puede acceder a los recursos digitales indicados en *@Amplía en la Red.*

Finalmente las alumnas y los alumnos resolverán las actividades 6, 7 y 8 de la página 261y la actividad final 30 de la página 274.

Competencias clave

Comunicación lingüística

■ *Act. 3.* Desarrollar la capacidad de expresar por escrito argumentos propios, así como trabajar la búsqueda, recopilación y procesamiento de información.

Aprender a aprender

■ *Act. 3.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor

■ *Act. 1.* Reflexionar antes de resolver la actividad y tomar decisiones de forma razonada.

■ *Acts. 7 y 8.* Afrontar los problemas siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la solución.

Recursos didácticos de la guía

✓ La actividad de refuerzo 1 propone una situación en la que el alumnado debe distinguir entre los conceptos de población y de muestra.

✓ La actividad de refuerzo 2 resultará útil para evaluar si el alumnado ha entendido correctamente el concepto de variable estadística y sabe clasificar los diferentes tipos de variables.

Recursos didácticos

Navegamos por Tiching

– Proponemos entrar en el siguiente enlace para trabajar los conceptos de población y muestra:

http://www.tiching.com/749562

Antes de introducirnos en el recurso, les pediremos que respondan a las siguientes preguntas:

- *Para estudiar la altura media de los españoles o la nota media de tus notas ¿utilizarías población (P) o muestra (M)?*
- *¿Qué diferencia hay entre muestra e individuo?*

El proyecto Descartes Ed@d ofrece recursos didácticos para trabajar la estadística. En esta página web los alumnos podrán encontrar las definiciones estadísticas más relevantes.

Nos interesará que asimilen bien los conceptos de población, muestra e individuo y para ello, les pediremos que accedan a la actividad interactiva en la que podrán practicar con diferentes ejemplos.

También podrán visualizar el vídeo de poco más de once minutos que repasa estos conceptos estadísticos.

Soluciones de las actividades

Página 260

1. Actividad personal. A modo de ejemplo escogeremos las en las siguientes direcciones:

1. www.tiching.com/751469 La población son todos los españoles viviendo en suelo español.

2. www.tiching.com/751470 – La población son todos los jugadores de la Eurocopa 2016.

3. www.tiching.com/751471 – La población es la población española.

2. Actividad personal. A modo de ejemplo:

En la primera y tercera noticia los datos provienen del INE (Instituto Nacional de Estadística), con lo que podemos afirmar que la muestra y la población son iguales.

En la segunda los datos provienen de la UEFA con lo que también podemos afirmar que la población y la muestra son iguales.

3. Para que una muestra sea representativa, esta debe reproducir fielmente la población de la que proviene.

4. La muestra es necesaria para asegurarnos que el componente puede soportar las temperaturas a las cuales será sometido durante su vida útil, sin que pierda las propiedades por las que lo utilizamos dentro del componente eléctrico.

5. Los componentes de la población son todos los ciudadanos de la UE. La muestra son las 15 000 personas encuestadas.

Página 261

6. La clasificación es la siguiente:

Cualitativas: lugar de nacimiento, idiomas que habla, color de pelo.

Cuantitativas discretas: número de hermanos y hermanas.

Cuantitativas continuas: estatura, peso, tiempo empleado en llegar del centro escolar a casa.

7. Actividad personal. A modo de ejemplo utilizaremos la noticia del enlace: www.tiching.com/751470.

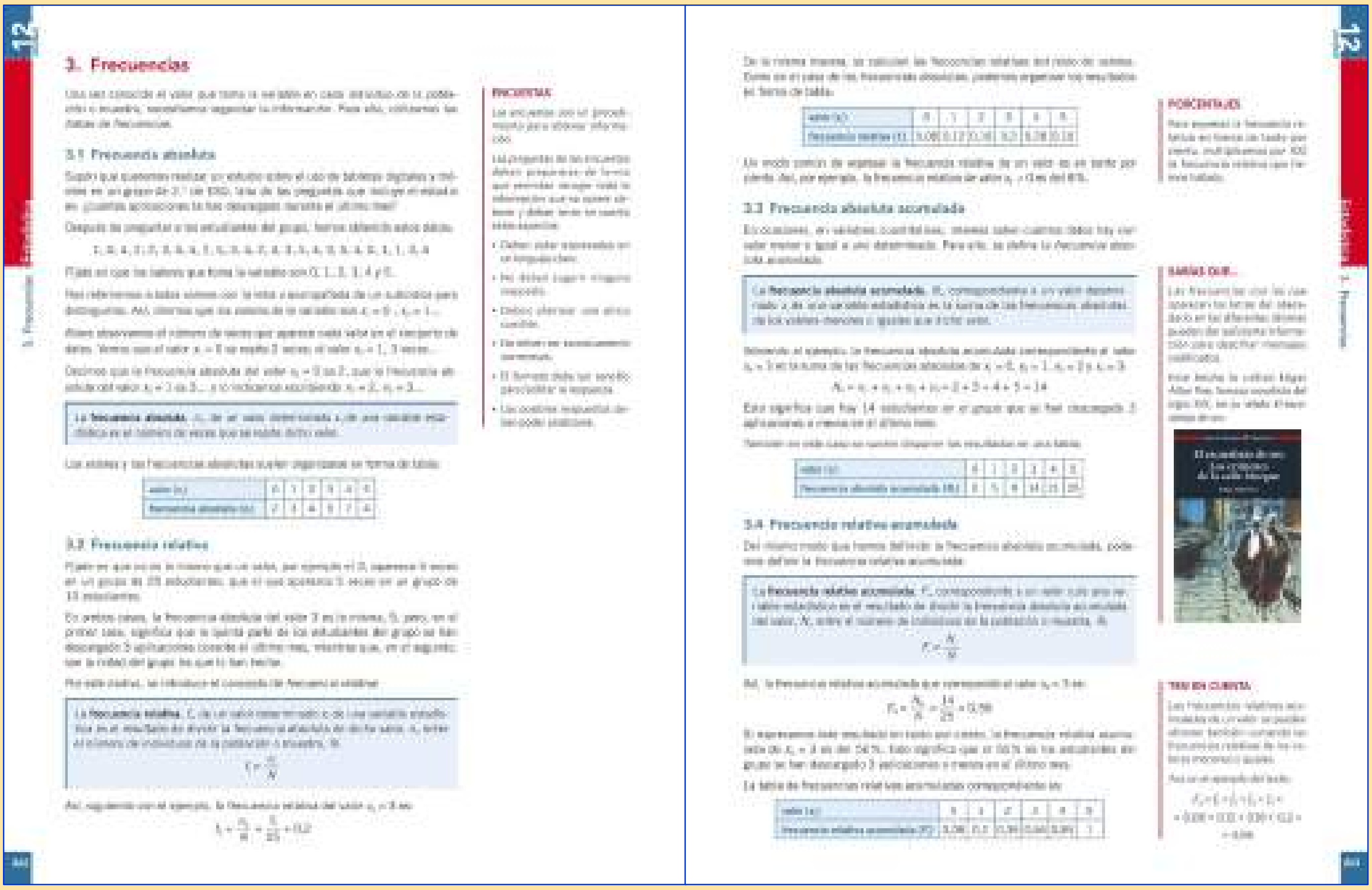
En esta noticia se tratan dos variables: la altura y la edad. En los dos casos las trata como variables cuantitativas continuas, aunque normalmente consideramos la edad una variable cuantitativa discreta.

8. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Cualitativas: asignatura favorita, sexo, color de ojos.

Cuantitativas discretas: número del piso en el que viven, libros leídos, año de nacimiento.

Cuantitativas continuas: nota media de matemáticas, tiempo dedicado a estudiar, y tiempo dedicado al ocio.



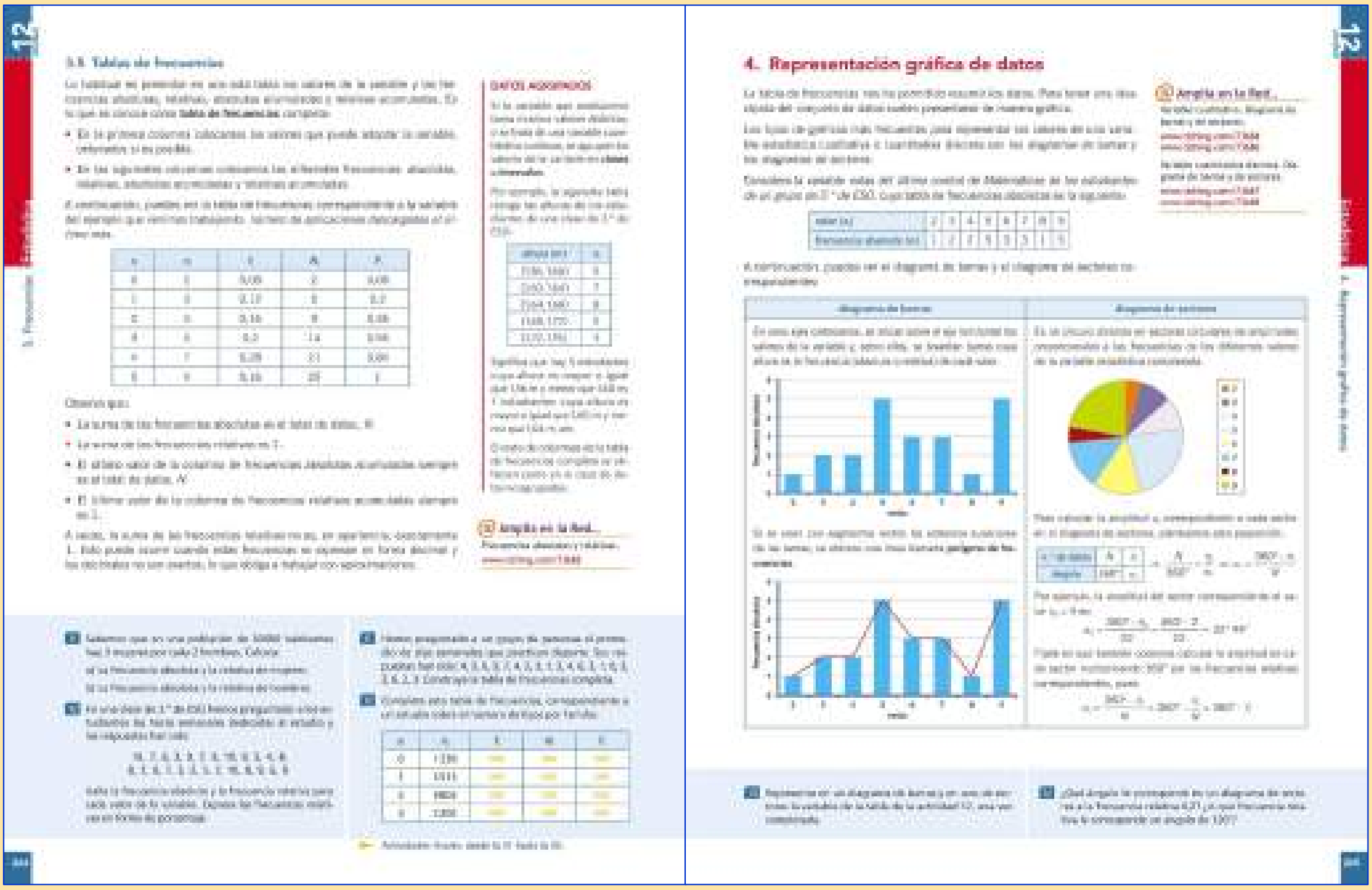
3. Frecuencias

3.1 Frecuencia absoluta

3.2 Frecuencia relativa

3.3 Frecuencia absoluta acumulada

3.4 Frecuencia relativa acumulada



3.5 Tablas de frecuencias

4. Representación gráfica de datos

■ Para empezar esta sección leeremos el documento *Encuestas* del que se deriva la necesidad de organizar la información estadística utilizando tablas de frecuencias.

■ A continuación leeremos el apartado *Frecuencia absoluta* interpretando el ejemplo que se propone y reconociendo cómo se obtienen los valores de la tabla:

– *¿Cuál es el tamaño de la muestra?*
– *¿Cómo se obtiene la frecuencia absoluta de uno de los valores de la variable?*

Después analizaremos la tabla de frecuencias absolutas resultante:

– *¿Qué notación se utiliza para designar la variable?*
– *¿Qué notación se utiliza para designar las frecuencias absolutas?*

■ Seguidamente leeremos el apartado 3.2 que justifica la necesidad de utilizar frecuencias relativas:

– *¿Cómo se calculan las frecuencias relativas?*
– *¿Qué relación hay entre las frecuencias relativas y los porcentajes?*

■ A continuación leeremos el apartado 3.3 que define y calcula las frecuencias absolutas acumuladas:

– *¿Cómo se obtienen las frecuencias absolutas acumuladas?*

■ Después leeremos el apartado 3.4 y seguiremos la misma metodología que en el caso anterior:

– *¿Cómo se calculan este tipo de frecuencias?*

■ El apartado 3.5 muestra la manera de organizar todos los tipos de frecuencias en una tabla de frecuencias:

– *¿Qué valor es la suma de las frecuencias absolutas?*

Seguidamente leerán el documento *Datos agrupados* que muestra como se trabaja cuando las frecuencias se presentan en clases o intervalos.

Para trabajar los métodos introducidos en este apartado pueden consultar los recursos de *@Amplía en la Red…*

4. Representación gráfica de datos

■ Empezaremos leyendo los dos primeros párrafos que destacan las ventajas de los gráficos estadísticos.

A continuación analizaremos los gráficos que representan la tabla de datos que se propone:

– *¿Qué representa cada rectángulo del diagrama de barras?*
– *¿Qué relación hay entre la amplitud de los sectores de un diagrama y las frecuencias de la tabla?*

Finalmente resolverán las actividades de las páginas 264 y 265 y las actividades finales de la 31 a la 36.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 9, 10 y 11.* Leer, comprender e interpretar los enunciados procesando correctamente los datos, de manera adecuada para la resolución del problema.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Act. 12.* Desarrollar la capacidad de manejar las tablas de frecuencias para observar los datos en los muestreos.

■ *Acts. 13 y 14.* Emplear técnicas específicas en estadística, como los diagramas de barras y de sectores, para comunicar la información obtenida.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 13 y 14.* Aplicar el proceso aprendido para representar graficamente las tablas de frecuencias.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 10 y 12.* Reflexionar y saber argumentar los puntos de vista propios de manera lógica mediante la propuesta de ejemplos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ Las actividades de refuerzo 4 y de ampliación 1 y 2 permiten practicar el uso de tablas de frecuencias.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 264

9. Las frecuencias son las siguientes:

a) La frecuencia relativa de mujeres será:

$$f_{mujeres} = \frac{3}{5} = 0,6$$

La frecuencia absoluta de mujeres será:

$$n_{mujeres} = 50\,000 \cdot \frac{3}{5} = 30\,000$$

b) La frecuencia relativa de hombres será:

$$f_{hombres} = \frac{2}{5} = 0,4$$

La frecuencia absoluta de hombres será:

$$n_{hombres} = 50\,000 \cdot \frac{2}{5} = 20\,000$$

10. Teniendo en cuenta que tenemos 24 estudiantes, calculamos:

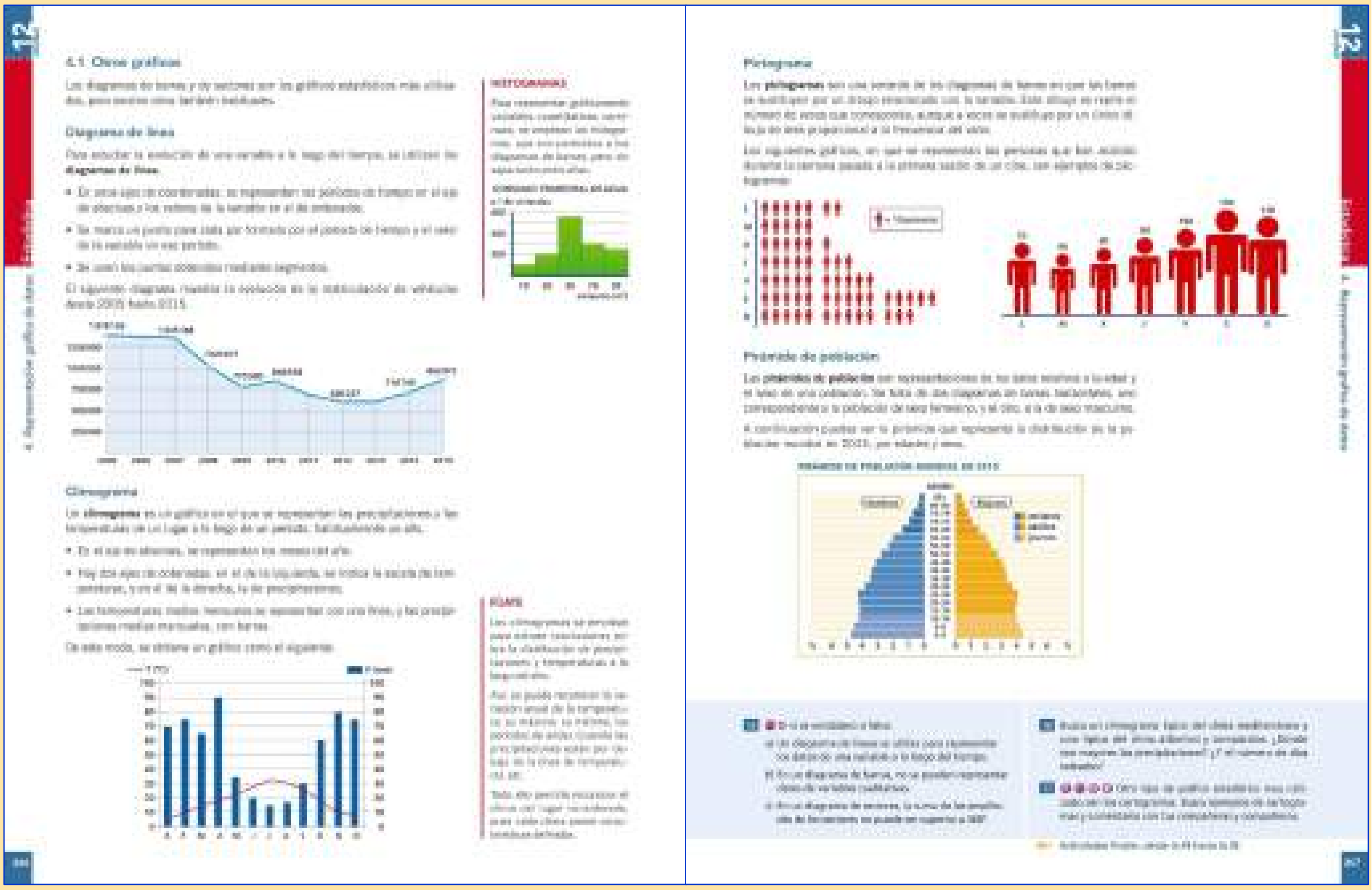
Horas empleadas: 2 $\rightarrow n_i = 1 \rightarrow f_i = 4\%$

Horas empleadas: 3 $\rightarrow n_i = 2 \rightarrow f_i = 8\%$

Horas empleadas: 4 $\rightarrow n_i = 1 \rightarrow f_i = 4\%$

Horas empleadas: 5 $\rightarrow n_i = 2 \rightarrow f_i = 8\%$

(Continúa en la página 12-26 de la guía)



4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE... (CONT.)

4.1 Otros gráficos

■ En este apartado ampliaremos el estudio de los tipos de gráficos estadísticos con algunos ejemplos muy frecuentes en el entorno cotidiano.

Para empezar las alumnas y los alumnos leerán el subapartado *Diagrama de línea* e interpretaremos en gráfico que se propone:

– *¿Qué variable estadística se representa?*

– *¿En qué eje se representan las frecuencias?*

– *¿Cuándo se matricularon más coches?*

– *¿Cuándo se matricularon menos coches?*

Después leerán el documento del margen *Histogramas* y remarcaremos las diferencias que hay entre este tipo de gráfico y los diagramas de barras:

– *¿Qué tipo de variables se representan mediante histogramas?*

– *¿Cómo son las columnas de los histogramas?*

■ Seguidamente leeremos el subapartado *Climogramas*, prestando mucha atención a las particularidades de su representación:

– *¿Qué variables se representan en un climograma?*

– *¿Qué gráfico se utiliza para las precipitaciones?*

– *¿Qué tipo de gráfico se usa para la temperatura?*

– *¿Cuál es el máximo de temperatura? ¿Cuándo ocurrió?*

– *¿Cuándo hay una época de aridez?*

Para practicar estos contenidos pueden resolver la actividad 16 de la página 267.

■ A continuación podemos utilizar la misma metodología que en los casos anteriores para interpretar los *Pictogramas*:

– *¿De qué están formadas las barras de este gráfico estadístico?*

– *¿Qué se indica en la leyenda de un pictograma?*

– *¿Qué diferencia hay en la representación de los dos pictogramas propuestos?*

■ Después leeremos el subapartado *Pirámide de población* y analizaremos las características del ejemplo que se incluye:

– *¿Qué se representa en el eje vertical?*

– *¿Qué representan los valores del eje horizontal?*

– *¿Cómo se han representado los sectores de jóvenes, adultos y ancianos?*

Para terminar los alumnos y las alumnas pueden contestar las actividades 15 y 17 de la página 267 y las actividades finales 37, 38 y 39 de la página 275 del libro del alumno y la alumna.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Act. 17.* Buscar, analizar y manejar información en Internet.

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 15.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos sobre los gráficos estadísticos.

■ *Act. 17.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 17.* Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación, siendo creativo e imaginativo para proponer ejemplos significativos.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Act. 17.* Estimular la realización de tareas de grupo utilizando las habilidades necesarias para ello.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La representación gráfica de datos estadísticos se trabaja en la actividad de refuerzo 4 y en la actividad de ampliación 1 en las que se construye un diagrama de sectores y un diagrama de barras.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Naveguemos por Tiching

– Para asimilar y asegurar los conceptos referentes a la representación gráfica de datos, proponemos entrar en el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749566

Este recurso del proyecto Descartes nos presenta un aplicativo que deberán instalar en su ordenador y que les permitirá profundizar en los diagramas de línea.

Se trata de una pantalla interactiva para cada tipo de gráfico. Pediremos a nuestros alumnos que practiquen en ellas, siguiendo las instrucciones dadas y que comprueben los resultados.

El profesor les pedirá que se organicen en grupos y que resuelvan las preguntas que se plantean en cada gráfica.

Finalmente, les podemos preguntar:

- *¿Qué característica debe tener la variable del eje X para que una gráfica de líneas tenga sentido?*
- *¿Tendría sentido usar una gráfica de líneas si en el eje X la variable es "número de hijos" o "religión"? ¿Por qué?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 267

15. Las respuestas son las siguientes:

a) Verdadero.

b) Falso. Los diagramas de barras y los diagramas de sectores son los más frecuentes para representar los valores de una variable cualitativa.

c) Verdadero.

16. El alumnado buscará en el libro de geografía o por Internet los climogramas y podrá observar las siguientes características:

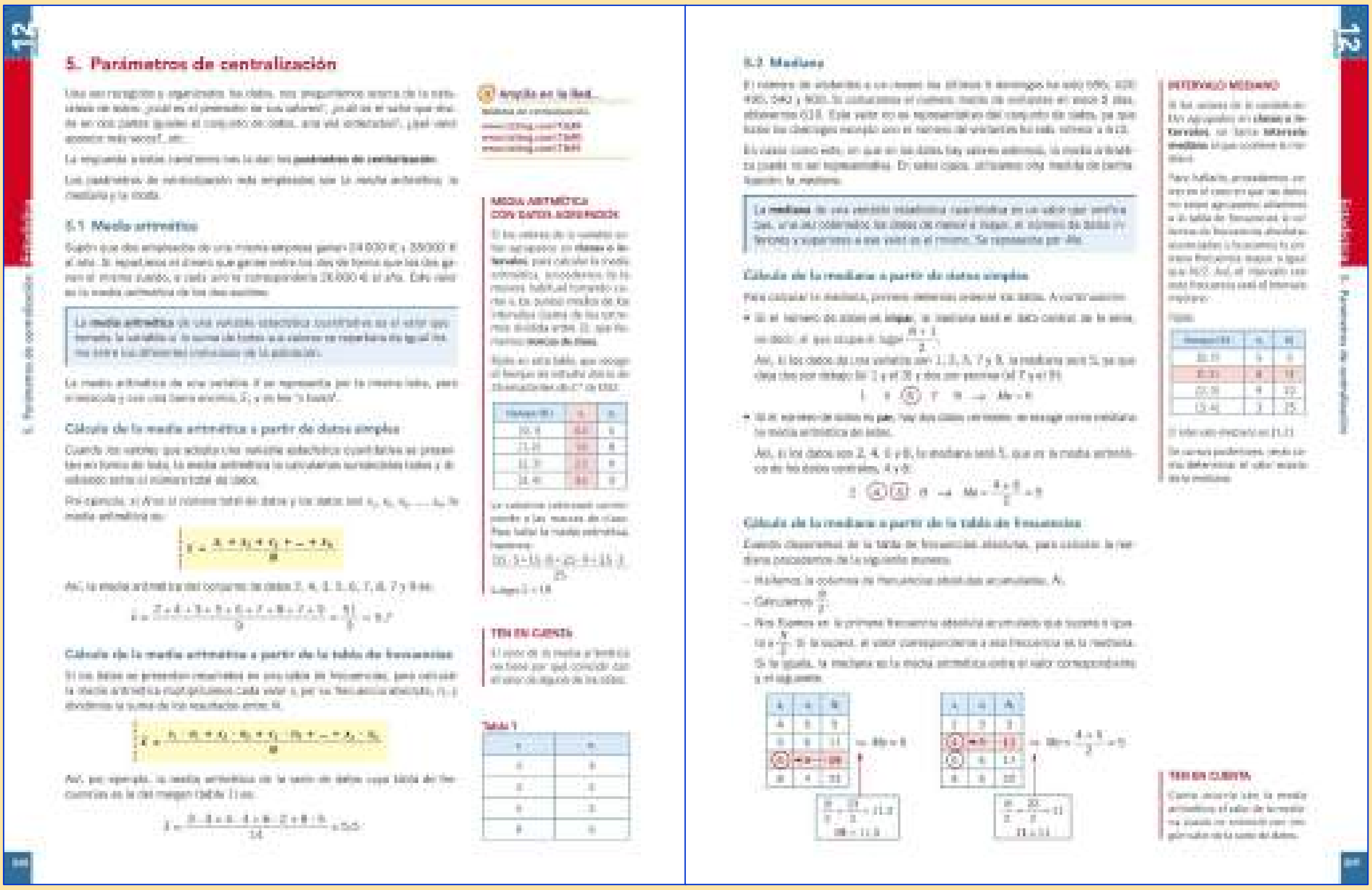
Las barras de precipitación son mucho más altas en el clima oceánico que en el mediterráneo por lo que podemos afirmar que llueve mucho más en el primero que en el segundo.

No tenemos una medida directa acerca de los días soleados, pero dado que en el clima mediterráneo las temperaturas son siempre muy cercanas a las barras de precipitación y sobre pasándolas en los meses de verano, podemos afirmar que tendremos más días soleados en un clima mediterráneo que en uno oceánico.

17. Los alumnos y alumnas podrán encontrar ejemplos de cartogramas en Internet. Al comentarlos podemos hacer que intenten buscar las ventajas y desventajas que pueden tener este tipo de gráficos.

Como ventajas podemos señalar el impacto visual que pueden llegar a tener, facilitando la transmisión de información.

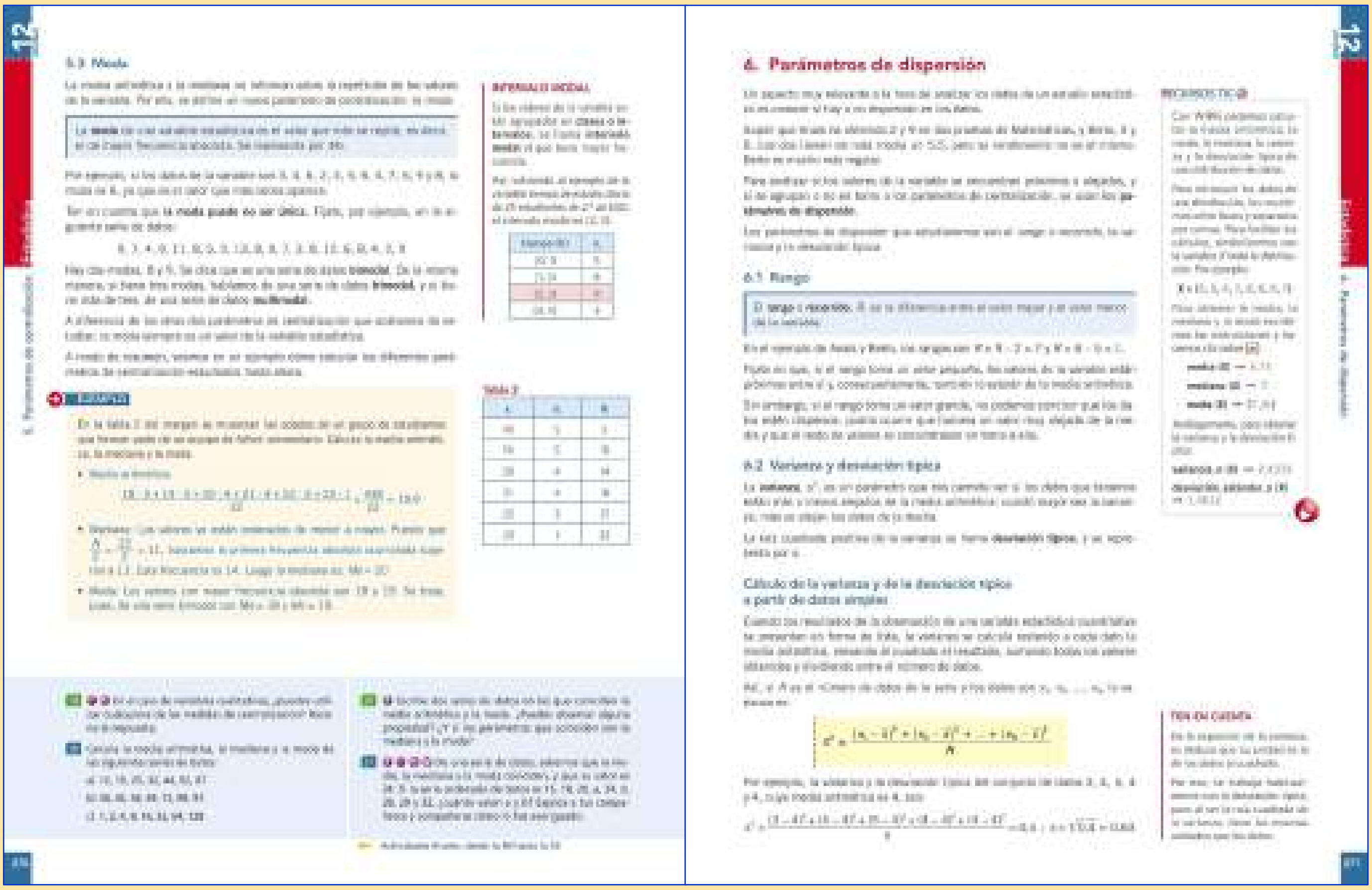
Como desventaja podemos remarcar lo difícil que puede llegar a ser el entender un diagrama de este tipo.



5. Parámetros de centralización

5.1 Media aritmética

5.2 Mediana



5.3 Moda

6. Parámetros de dispersión

6.1 Rango

6.2 Varianza y desviación típica

5. Parámetros de centralización

■ Para empezar leeremos la introducción del apartado 5.1 y el subapartado *Cálculo de la media a partir de datos simples* comprobando las operaciones:

– *¿Qué notación identifica la media aritmética?*

– *¿Cómo se calcula la media aritmética de una variable estadística?*

Después leeremos el subapartado *Cálculo de la media aritmética a partir de la tabla de frecuencias*, analizaremos el procedimiento indicado.

Seguidamente leeremos el documento *Media aritmética con datos agrupados* reconociendo las marcas de clase de los intervalos propuestos:

– *¿Qué es la marca de clase de un intervalo?*

Para practicar estos contenidos podemos consultar los recursos digitales del documento *@Amplía en la Red…*

■ A continuación leeremos la introducción del apartado 5.2 que justifica la utilización de la mediana.

Seguidamente analizaremos los ejemplos que se proponen en el subapartado *Cálculo de la mediana a partir de datos simples*:

– *¿Qué debemos tener en cuenta para calcular la mediana?*

A continuación utilizaremos la misma metodología para el subapartado *Cálculo de la mediana a partir de la tabla de frecuencias* y el documento *Intervalo mediano*.

– *¿Qué es el intervalo mediano?*

■ Después leeremos el apartado 5.3 y comprobaremos el cálculo de la moda en el ejemplo propuesto.

– *¿La moda es un valor de frecuencia?*

Para terminar resolverán las actividades de la 18 a la 21 de la página 270 y las actividades finales 46, 47 y 48.

6. Parámetros de dispersión

■ Leeremos la introducción de la sección y justificaremos la necesidad de calcular estos parámetros.

Después leeremos el apartado 6.1 e interpretaremos los ejemplos que se proponen:

– *¿Qué significa que el rango sea pequeño?*

Seguidamente leeremos el apartado 6.2 y analizaremos el cálculo de la varianza con el ejemplo que se incluye.

A continuación aplicaremos estos contenidos utilizando la calculadora WIRIS tal como se propone en el documento *Recursos TIC*.

Para terminar pueden calcular el rango y la varianza en las actividades 22 y 23 de la página 272.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 18 y 21.* Expresar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos en el apartado.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Recursos TIC, pág. 271.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la calculadora WIRIS, con la que se pueden calcular parámetros de dispersión.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 18 y 21.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridas para resolver las actividades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 20 y 21.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos sobre parámetros.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Act. 21.* Ser capaz de defender los propios argumentos, mostrando criterio propio ante el grupo.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 servirá como práctica del cálculo de algunos parámetros estadísticos.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 270

18. La única medida de centralización que podemos utilizar con las variables cualitativas es la moda, dado que al no ser variables numéricas no podemos operar con ellas para establecer la media o la mediana.

19. Las medidas de centralización son las siguientes:

a) Media: 35,29
Mediana: 32
Moda: Multimodal

b) Media: 64,86
Mediana: 69
Moda: Multimodal

c) Media: 31,875
Mediana: 12
Moda: Multimodal

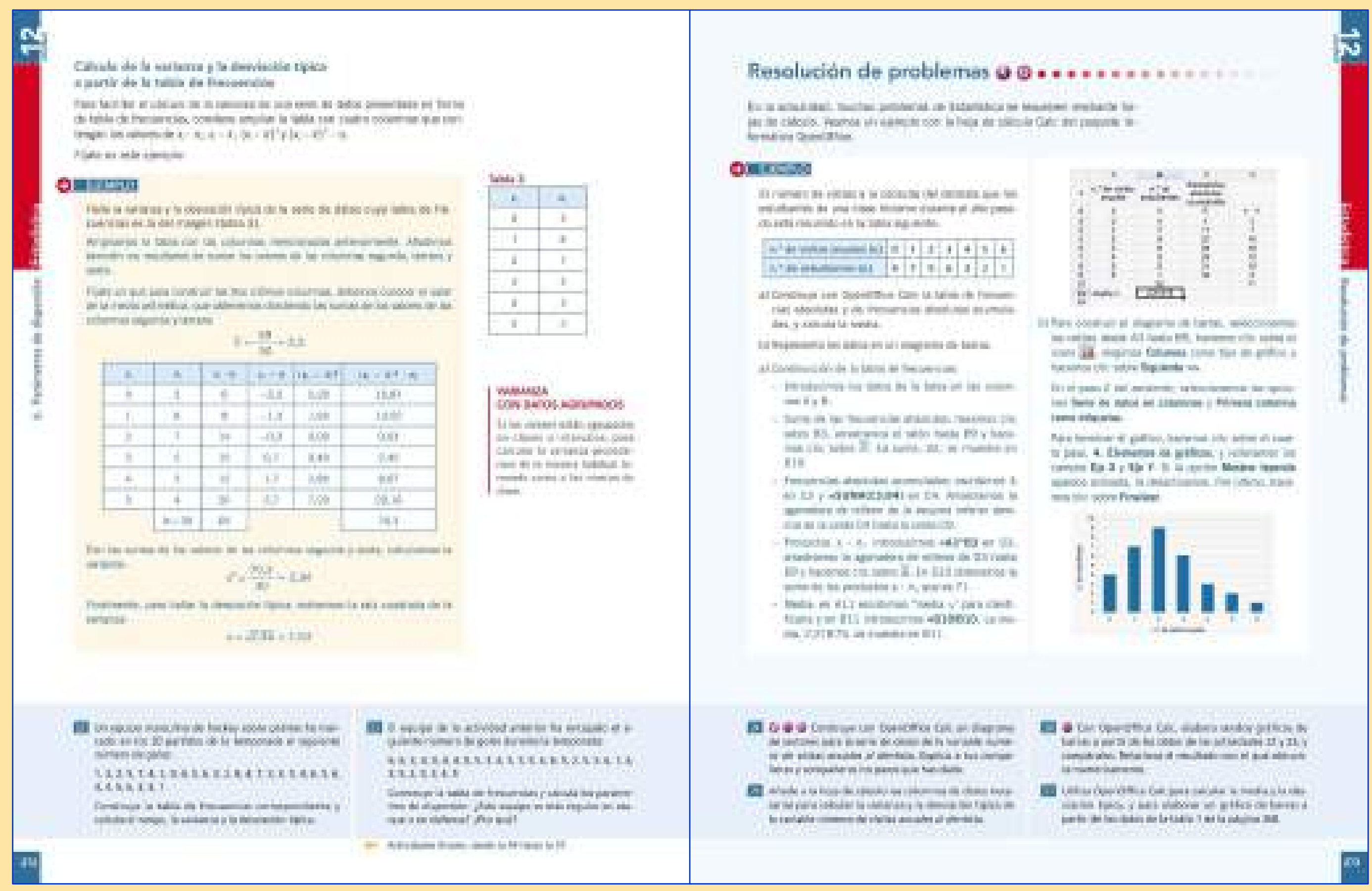
20. Respuesta personal. A modo de ejemplo, dos series donde coincidan la media aritmética y la moda serían:

9, 10, 6, 14, 10, 11; con media y moda 10.

75, 50, 0, 100, 50, 25, 50; con media y moda 50.

Puede observarse que cuanto más repetida sea una moda más tenderá la media hacia ella.

(Continúa en la página 12-26 de la guía)



6. PARÁMETROS... (CONT.) / RESOLUCIÓN...

6. Parámetros de dispersión (cont.)

■ Para empezar leeremos el subapartado *Cálculo de la varianza y la desviación típica a partir de la tabla de frecuencias*, que introduce una de las situaciones de cálculo más frecuentes en la práctica.

Primero deberán recordar el significado de la notación que se utiliza en la denominación de las nuevas columnas que se incorporan a la tabla:

– *¿Qué significa* $x_i \cdot n_i$*?*

– *¿Qué significa* $x_i - \bar{x}$*?*

Seguidamente leeremos el ejemplo resuelto que se propone en el libro utilizando la tabla incluida en el margen:

– *¿Qué es N? ¿Cómo se obtiene?*

– *¿Por qué no hay valores negativos en la quinta columna de la tabla?*

– *¿Cómo se obtiene la varianza?*

– *¿Cómo se calcula la desviación típica?*

– *¿Cómo calcularías la media aritmética con los datos de esta tabla?*

■ A continuación leeremos el documento *Datos agrupados* que recuerda la metodología de cálculo que hay que aplicar en esta situación.

El cálculo de los parámetros de dispersión con datos agrupados se puede repasar en la actividad resuelta 71 de la página 278 del libro del alumno.

En este punto pediremos a los alumnos y alumnas que resuelvan las actividades 22 y 23 de la página 272 y las actividades finales de la 54 a la 57 de la página 276.

Resolución de problemas

■ Esta sección propone resolver un problema de estadística utilizando una hoja de cálculo, concretamente Calc de OpenOffice.

En primer lugar abriremos la hoja de cálculo y seguiremos las indicaciones del apartado *a)* para incorporar todos los datos y las fórmulas que son necesarias para realizar los cálculos.

– *¿Qué formula permite realizar sumas?*

– *¿Cómo se arrastran las fórmulas?*

Seguidamente construiremos el diagrama de barras tal como se indica en el apartado *b)* hasta obtener el gráfico dibujado en el libro:

– *¿Por qué desactivamos la opción Leyenda del gráfico?*

Finalmente los alumnos y alumnas pueden resolver las actividades propuestas en la página 273 del libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 24*. Expresar oralmente el resultado obtenido de manera ordenada y adecuada.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Resolución de problemas, pág. 273*. Trabajar el uso habitual de los recursos tecnológicos disponibles.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 24 y 26*. Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Resolución de problemas, pág. 273*. Observar el planteamiento y resolución de problemas, identificando las estrategias utilizadas y el orden de las operaciones.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Act. 24*. Estimular la realización de tareas de grupo utilizando las habilidades necesarias para ello.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de ampliación 2 servirá como práctica del cálculo de la varianza y la desviación típica a partir de una tabla de frecuencias.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para repasar y reforzar los contenidos de la unidad, pediremos que accedan a esta página web:

http://www.tiching.com/749569

En ella encontrarán diferentes actividades para ampliar o reforzar los contenidos estudiados. Concretamente, podremos descargar los referentes a Estadística.

Como docentes, podemos plantearlo como un repaso final sobre la unidad y desarrollarlo conjuntamente en el aula.

Resultará interesante que el profesor aproveche el documento sobre gráficos engañosos, para comentar y analizar la utilización fraudulenta que algunos políticos o periodistas sacan en los medios de comunicación y como puede influir esto en la opinión pública.

Resultará enriquecedor estimular su espíritu crítico, podemos pedirles que analicen las noticias que puedan aparecer durante una semana y encuentren aquellas que hacen un mal uso de esta disciplina.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 272

22. Calculamos la media y con ella la tabla de frecuencias:

$$\bar{x} = \frac{121}{30} = 4,03$$

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
0	1	0	-4,03	16,27	16,27
1	2	2	-3,03	9,20	18,40
2	3	6	-2,03	4,13	12,40
3	6	18	-1,03	1,07	6,41
4	6	24	-0,03	0,00	0,01
5	5	25	-0,97	0,93	4,67
6	4	24	-1,97	3,87	15,67
7	2	14	-2,97	8,80	17,60
8	1	8	-3,97	15,73	15,73
	N = 30	121			106,97

Con estos valores calculamos la varianza y la desviación típica:

$$s^2 = \frac{106,97}{30} \approx 3,56 \qquad s = \sqrt{3,56} \approx 1,89$$

23. Calculamos la media y con ella la tabla de frecuencias:

$$\bar{x} = \frac{117}{30} = 3,9$$

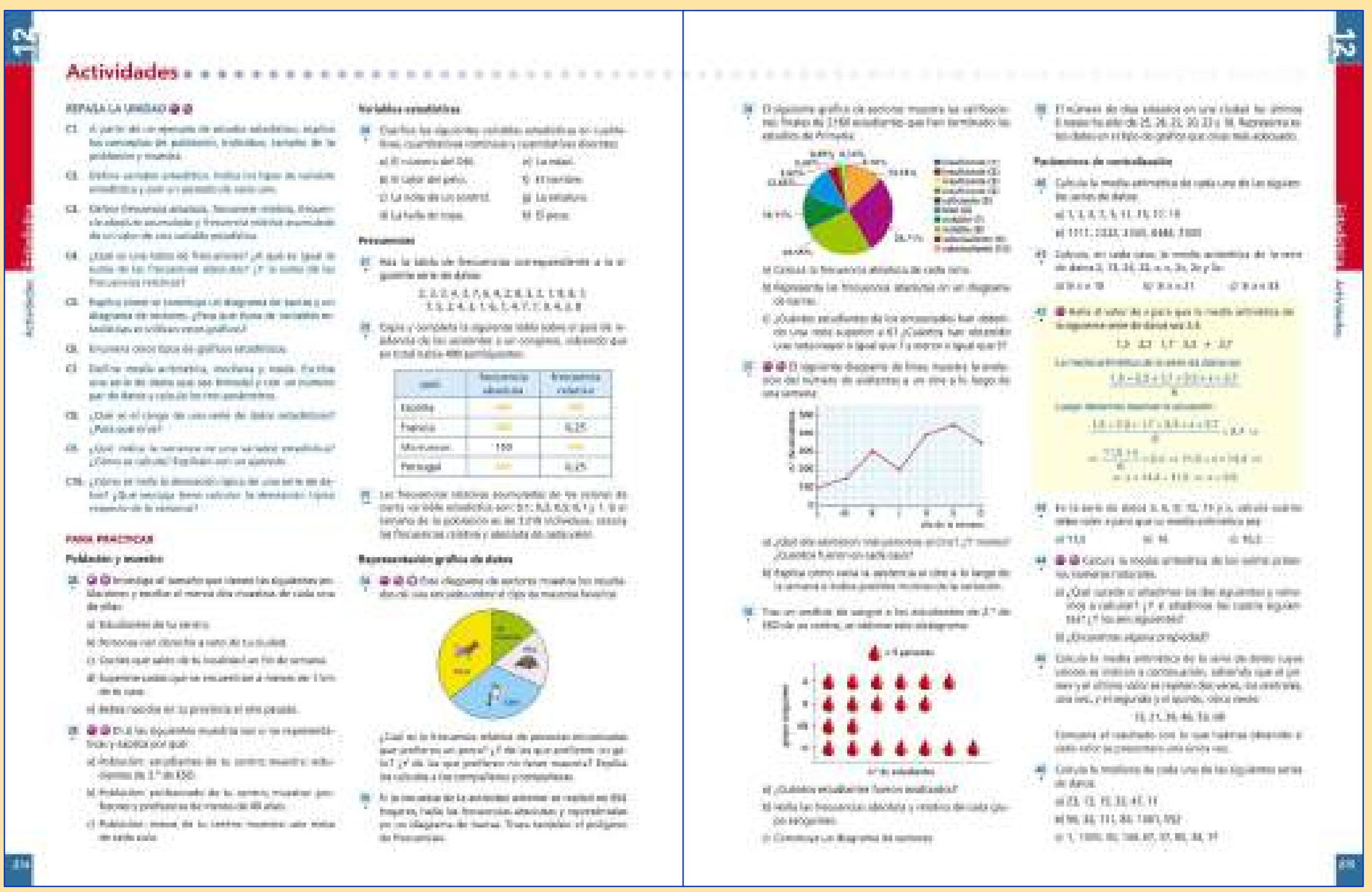
x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
0	2	0	-3,9	15,21	30,42
1	1	1	-2,9	8,41	16,82
2	2	4	-1,9	3,61	7,22
3	6	18	-0,9	0,81	1,62
4	6	24	0,1	0,01	0,02
5	8	40	1,1	1,21	2,42
6	5	30	2,1	4,41	8,82
	N = 30	117			67,34

Con los datos obtenidos calculamos la varianza y la desviación típica.

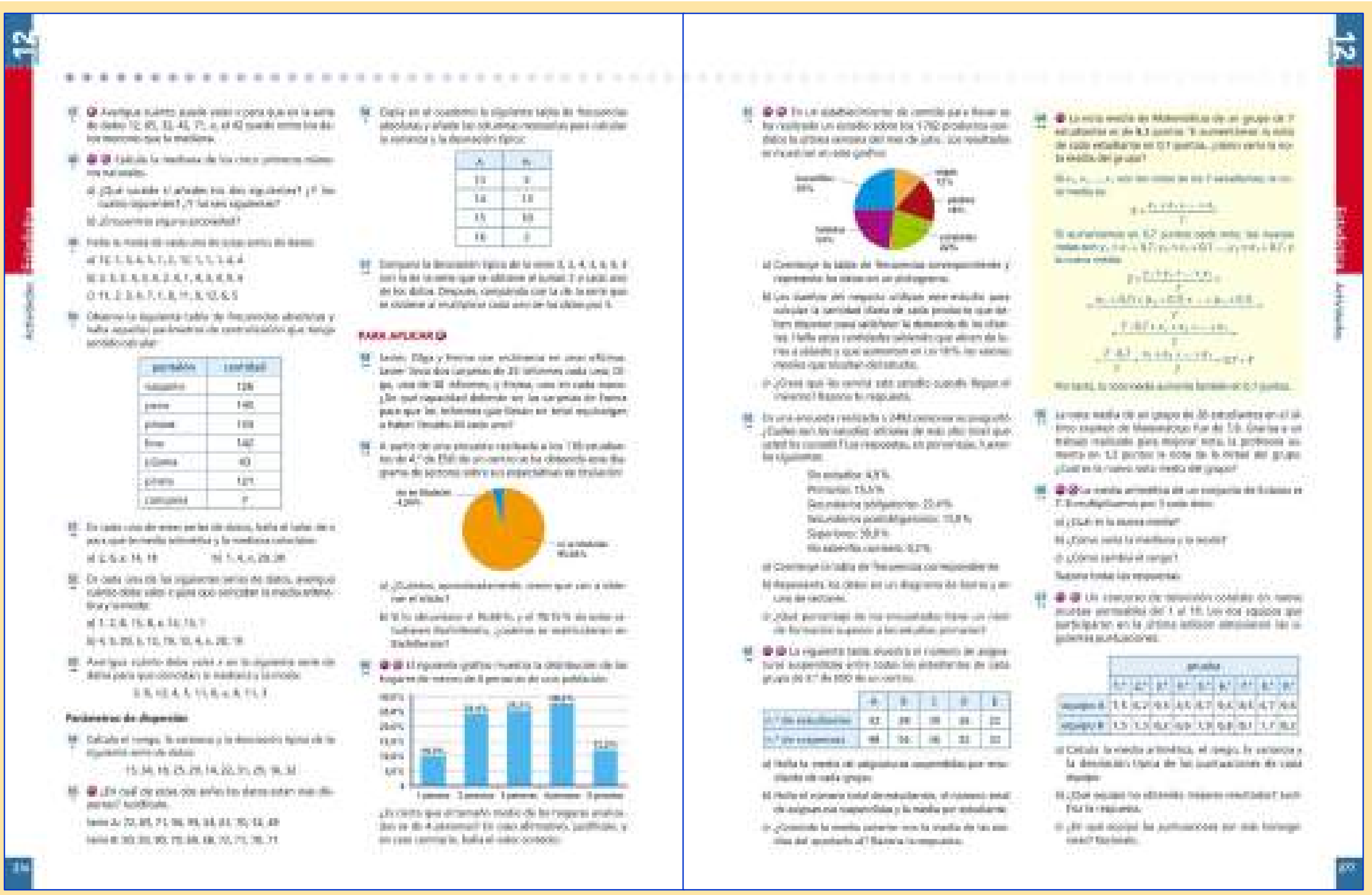
$$s^2 = \frac{67,34}{30} \approx 2,24 \qquad s = \sqrt{2,24} \approx 1,5$$

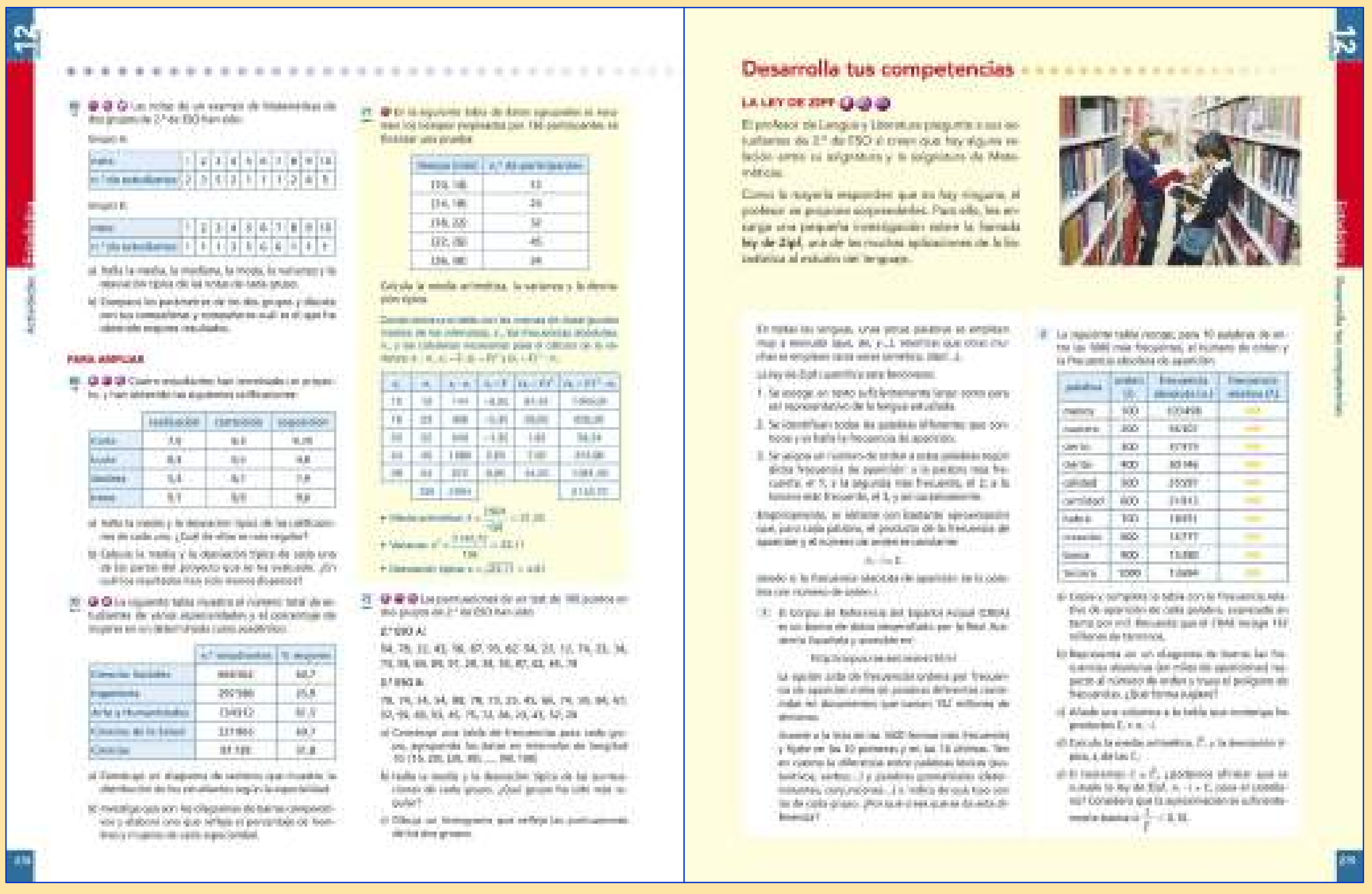
Podemos ver que tanto la desviación típica como la varianza son menores en el caso de la defensa, por lo que podemos afirmar que este equipo en mucho más regular en defensa que en ataque.

Continúa en la página 12-26 de la guía



Actividades





Desarrolla tus competencias

LA LEY DE ZIPF

PARA AMPLIAR

Evaluación de estándares

Estrategia e ingenio

Resumen

Población y muestra

Variables estadísticas

Frecuencias

Gráficos estadísticos

Parámetros de centralización

Parámetros de dispersión

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Repasa la unidad, pág. 274*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.

■ *Acts. 29, 34, 37, 44, 48, 60, 61, 63, 66, 67, 68, 69 y 72.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 279.* Leer y comprender el estímulo y los enunciados de la actividad, generando ideas y supuestos.

APRENDER A APRENDER

■ *Repasa la unidad, pág. 274* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, así como ser consciente de las propias capacidades.

■ *Acts. 29, 34, 37, 44, 48, 55, 60, 61, 63, 66, 67, 68, y 69.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

■ *Acts. 42, 64 y 71.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 279.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles

■ *Evaluación de estándares, pág. 280*. Ser consciente de las propias capacidades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Para aplicar, pág. 276.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar solucio-nes, evaluando las acciones realizadas.

■ *Acts. 28, 47, 69, 70 y 72.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos ad-quiridos a lo largo de la unidad, mostrando criterio propio.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 279. Estrategia e ingenio, pág. 280.* Buscar las soluciones de forma creativa e imaginativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.

■ *Evaluación de estándares, pág. 280. Acts. 7, 8, 9 y 10.* Ser consciente de las propias capacidades en el tema estudiado.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Acts. 28 y 70.* Buscar, analizar, seleccionar y manejar información utilizando técnicas y recursos para aprender.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Acts. 34 y 68.* Manejar las habilidades sociales al exponer un trabajo delante de los compañeros.

ACTIVIDADES FINALES

■ En la sección de *Actividades* el alumnado se enfrentará a una colección de ejercicios en orden creciente de dificultad, con el fin de afianzar todos los contenidos del tema, desde un punto de vista práctico y teórico.

■ La sección *Desarrolla…* persigue fomentar la autonomía del alumnado y la utilización de distintos recursos para resolver un planteamiento dado. A través de un caso práctico, el alumno ejercitará su capacidad de análisis y su actitud proactiva en la búsqueda de soluciones, además de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica.

■ Con la sección de *Evaluación…* se pretende que los alumnos y alumnas valoren el nivel de conocimientos alcanzados. Propone una serie de actividades que repasan la unidad de un modo completo y práctico.

■ La sección *Estrategia…* propone una serie de acertijos o juegos relacionados con los conceptos trabajados durante el tema, con el fin de que el alumnado desarrolle su imaginación y adquiera destreza relacionando ideas.

■ La finalidad de la sección *Resumen* es recopilar los contenidos fundamentales de la unidad en un mapa conceptual que destaque las relaciones entre los conceptos y los procedimientos estudiados.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 274

REPASA LA UNIDAD

C1. Actividad personal. A modo de ejemplo tomaremos el histograma acerca del consumo de agua de la página 266 del libro de texto.

La población de este estudio es el total de viviendas sobre las que se realiza de modo que muestra y población coinciden.

Un individuo de la población es una de las viviendas sobre las que se realiza el estudio.

Por último el total de población es el número de individuos que la conforman y podemos obtenerla sumando el valor de cada caja del histograma que, de manera aproximada, en este caso son 1 400 viviendas.

C2. Una variable estadística es una característica que se estudia de una población para realizar un estudio estadístico. Tenemos dos tipos de variables:

Cualitativas: toman valores no numéricos como el color de los ojos.

Cuantitativas: toman valores numéricos, que podrán ser discretos si la variable solo puede tomar valores determinados por ejemplo la edad, o continuas si pueden tomar cualquier valor comprendido entre otros dos valores como la estatura.

C3. La frecuencia absoluta n_i, de un valor determinado x_i, de una variable estadística es el número de veces que se repite dicho valor.

La frecuencia relativa f_i, de un valor determinado x_i, de una variable estadística es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de dicho valor, entre el número total de individuos de la población o muestra, N.

La frecuencia acumulada N_i, correspondiente a un valor determinado x_i, de una variable estadística es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales que dicho valor.

La frecuencia relativa acumulada F_i, correspondiente a un valor determinado x_i, de una variable estadística es el resultado de dividir la frecuencia absoluta acumulada del valor, N_i, entre el número de individuos de la población o muestra, N.

C4. Una tabla de frecuencias en una tabla donde se representan los valores de una variable, las frecuencias absolutas, relativas, absolutas acumuladas y relativas acumuladas.

La suma de las frecuencias absolutas es igual al total de datos. Y la suma de frecuencias relativas es igual a 1.

C5. Para construir un diagrama de barras utilizamos un eje cartesiano donde en el eje de abscisas situamos los diferentes valores que puede tomar la variable estadística y sobre ellos levantamos barras cuya altura será la frecuencia absoluta o la relativa, de cada valor.

En el caso de un diagrama de sectores dibujamos un círculo dividido en sectores circulares, uno para cada valor posible de la variable proporcional a la frecuencia de este.

Estos dos tipos de diagramas son útiles para representar variables cualitativas o cuantitativas discretas.

C6. Además del diagrama de barras y el de sectores, tenemos el diagrama de línea, el climograma, los pictogramas, las pirámides de población.

C7. La media aritmética de una variable estadística cuantitativa es el valor que tomaría la variable si la suma de todos sus valores se repartiera de igual forma entre los diferentes individuos de la población.

La mediana de un variable estadística cuantitativa es un valor que verifica que, una vez ordenados los datos de menor a mayor, el número de datos inferiores y superiores a este valor es el mismo.

La moda de una variable estadística es el valor que más se repite, es decir, el de mayor frecuencia absoluta.

Un ejemplo de serie de datos bimodal y población par sería: 1, 2, 3, 5, 5, 6, 7 ,7.

Los parámetros de centralización de esta serie son:

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+5+5+6+7+7}{8} = 4,5$$

$$Me = \frac{5+5}{2} = 5$$

Mo = 5 y Mo = 7

C8. El rango es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de la variable. Puede resultar útil para saber como de próximos o dispersos están los valores de la variable.

C9. La varianza s^2, es un parámetro de dispersión que se utiliza para medir lo alejados que están los datos de la media aritmética.

La calculamos mediante:

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

Así pues, la varianza de la serie: 2, 4, 8, 16, 32, 64 es: $s^2 = 469$

C10. La desviación típica se calcula como la raíz cuadrada de la varianza. La ventaja que tiene la desviación típica es que tiene las mismas unidades que la variable estadística.

PARA PRACTICAR

28. Actividad personal. A modo de ejemplo:

a) Los nacidos en enero. Los que llevan gafas.

b) Personas mayores de 30 años. Personas casadas.

c) Coches con matriculación no europea. Coches azules.

d) Supermercados a más de medio kilómetro. Pertenecientes a una cadena.

e) Bebés de ojos claros. Nacidos después de junio.

29. Las respuestas son las siguientes.

a) No. Los alumnos de 2º de ESO tienen características diferentes de los alumnos de otros cursos.

b) No. Se necesitarían profesores de todas las franjas de edad.

c) Sí. Al coger un aula de cada clase se tiene en cuenta las que están en todos los niveles.

30. La clasificación es la siguiente:

a) Cuantitativa discreta

b) Cualitativa

c) Cuantitativa discreta

d) Cuantitativa discreta

e) Cuantitativa discreta.

f) Cualitativa

g) Cualitativa continua.

h) Cualitativa continua.

31. La tabla de frecuencias es la siguiente:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	2	0,064	2	0,064
2	5	0,161	7	0,226
3	5	0,161	12	0,387
4	5	0,161	17	0,548
5	1	0,032	18	0,581
6	2	0,064	20	0,645
7	6	0,193	26	0,839
8	3	0,096	29	0,935
9	2	0,064	31	1

32. La tabla completa es la siguiente:

país	frecuencia absoluta	frecuencia relativa
España	50	0,125
Francia	100	0,25
Marruecos	150	0,375
Portugal	100	0,25

33. Construimos una tabla. Llamamos a los diferentes valores A, B, C, D y E.

Para obtener las frecuencias relativas restaremos las frecuencias relativas acumuladas consecutivas:

$f_i = F_i+1-F_i$.

Para calcular las frecuencias absolutas: $n_i = N \cdot f_i$.

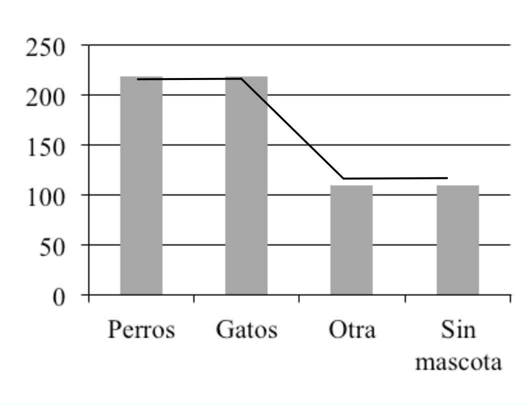
	frecuencia absoluta	frecuencia relativa
Valor A	321	0,1
Valor B	642	0,2
Valor C	642	0,2
Valor D	642	0,2
Valor E	963	0,3

34. Las frecuencias relativas de personas encuestadas que prefieren perros y que prefieren gatos es la misma: $1 / 3 \approx 0{,}333$. La frecuencia de personas encuestadas que prefieren no tener mascota es $1 / 6 \approx 0{,}167$.

35. Las frecuencias absolutas son:

Perros y gatos: $\frac{654}{3} = 218$

Sin mascota y otras: $\frac{654}{6} = 109$



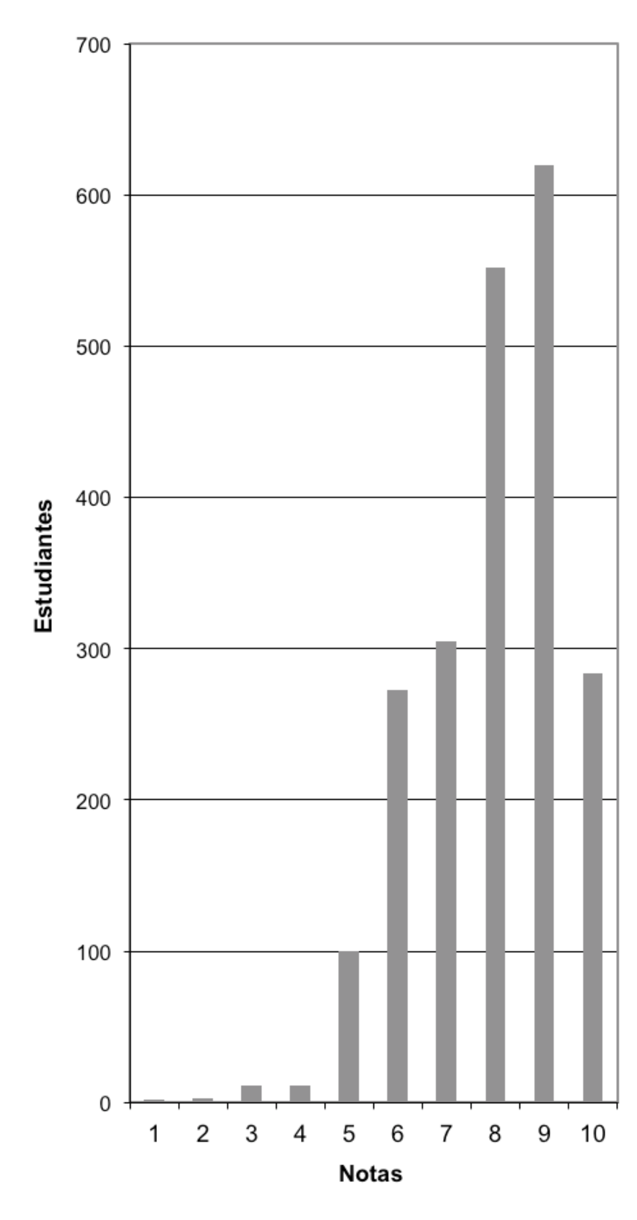
36. Suponiendo que tenemos 2 161 estudiantes:

a) Las frecuencias absolutas son las siguientes:

Nota	F. Abs.
1	2
2	3
3	11
4	11
5	100

Nota	F. Abs.
6	273
7	305
8	552
9	620
10	284

b) El diagrama de barras es el siguiente:



c) 1761 estudiantes tienen una nota por encima de 6. 1477 estudiantes han obtenido notas entre 7 y 9.

37. Las respuestas son las siguientes:

a) El día con mayor número de asistentes fue el sábado con 450 espectadores. El día con menos número de asistentes fue el lunes con 100 espectadores.

b) A medida que se acerca el fin de semana la asistencia aumenta. A mitad de semana puede verse un pico de asistentes, debido seguramente a que el miércoles será el día del espectador en este cine.

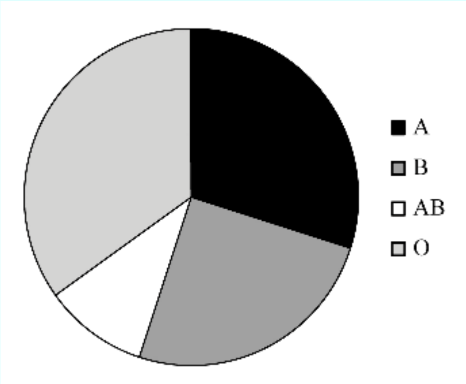
38. Las respuestas son las siguientes:

a) El total de estudiantes es 100.

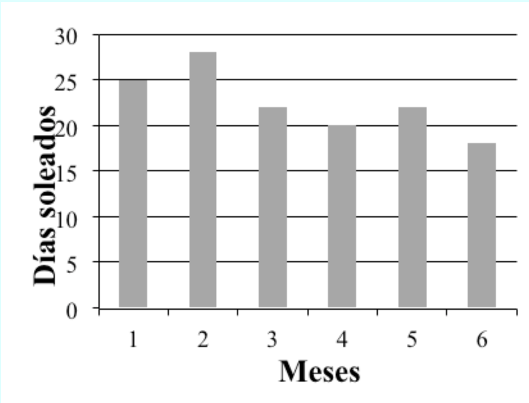
b) Las frecuencias son las siguientes:

G. sanguíneo	frec. absoluta	frec. relativa
A	30	0,3
B	25	0,25
AB	10	0,1
O	35	0,35

c) El diagrama de sectores es:



39. Los diagramas correctos serían el diagrama de barras o el de línea. A modo de ejemplo el diagrama de barra es el siguiente:



40. Las medias son:

a) 10

b) 3 333

41. Las medias para cada caso son:

a) $\bar{x} = \dfrac{161}{9} = 17,\widehat{8}$

b) $\bar{x} = \dfrac{260}{9} = 28,\widehat{8}$

c) $\bar{x} = \dfrac{368}{9} = 40,\widehat{8}$

42. Resuelto por el libro.

43. Seguimos el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior, y sabiendo que la suma de los elementos de la serie es: 45 + x

a) x = 69 – 45 = 24

b) x = 96 – 45 = 51

c) x = 61,2 – 45 = 16,2

44. La media aritmética de los 20 primeros números naturales es: 10,5.

a) La media de los 22 primeros números naturales es 11,5. De los 26 primeros es 13,5. De los 32 primeros es 16,5.

b) Podemos observar que al sumar una serie formada por los naturales consecutivos y con un número par de elementos, la media de esta es la suma ponderada del valor máximo y el valor mínimo.

45. Las medias que obtenemos son 38,56 si las frecuencias absolutas son diferentes para cada valor y 40 si los valores solo se repiten una vez.

Esto es porque si calculamos la distancia entre la mediana y los valores por encima y por debajo de ella es:

Me = 42,5

| 13- Me | = 29,5 | 68 – Me | = 25,5

| 21 – Me | = 21,5 | 53 – Me | = 10,5

Son mayores las distancias a los dos.

46. Las medianas son las siguientes:

a) 15   b) (83 + 111) / 2 = 97   c) 37

47. Ordenamos la serie en orden creciente para ver en que lugar quedaría x:

12, 32, 42, 65, 72

Si la mediana debe ser mayor a 42, podemos escoger cualquier valor siempre que x < 42.

48. La mediana de los 5 primeros números naturales es: 3.

a) De los 7 primeros la mediana es: 4. Con 11 la mediana que obtenemos es 6. De los 17 primeros es 9.

b) Podemos ver que al sumar una serie de naturales consecutivos la mediana la encontraremos haciendo la suma ponderada del valor máximo y el mínimo de la serie. Igual que pasaba con la media aritmética.

49. La moda de cada serie son las siguientes:

a) Mo = 1   b) Mo = 5   c) Mo = 4, Mo = 11

50. Con la tabla dada donde tenemos datos con bastante extremos podemos calcular la mediana: Me = 126

También podemos calcular la moda para ver cual es la prenda más repetida, que es este caso es la pana.

51. En los dos casos son series con número de elementos impares con lo que el elemento central será la mediana, y puesto que se nos dice que la mediana y la media deben ser iguales, en las dos series se cumplirá que:

$\bar{x} = \text{Me} = x$

a) $\bar{x} = \dfrac{40+x}{5} \to 4x = 40 \to x = 10$

b) $\bar{x} = \dfrac{55+x}{5} \to 4x = 55 \to x = \dfrac{55}{4} = 13,75$

52. La media aritmética y el elemento que falta serán iguales con lo que calculamos.

a) $\bar{x} = \dfrac{64+x}{9} \to 8x = 64 \to x = 8$

b) $\bar{x} = \dfrac{120+x}{11} \to 10x = 120 \to x = 12$

53. Buscamos la media de la serie sin el elemento que desconocemos: 3, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 11, 11, 12 → Me = 6, ya coincide con una de las modas de la serie.

Así pues si hacemos x = 6, con lo que mantenemos los dos parámetro iguales.

54. Los parámetros de dispersión de esta serie son los siguientes:

Rango: 34 – 14 = 20

Varianza: $s^2 = \frac{548,09}{24,09} \approx 22,78$

Desviación típica: $s = \sqrt{22,78} \approx 4,77$

55. Dado que las dos series tienen el mismo número de elementos, para saber la dispersión podemos simplemente calcular el rango de cada una, y la de mayor rango será la más dispersa.

A: 72 – 49 = 23

B: 93 – 50 = 43

La de mayor dispersión será la B.

Calcularemos la desviación típica de cada una de las series y la serie con una desviación típica mayor será la de mayor dispersión.

$s_A^2 = \frac{239,31}{61,8} \approx 15,47$ $s_B^2 = \frac{340,06}{72,4} \approx 18,44$

Llegamos a la misma conclusión, la serie B esta más dispersa.

56. La tabla completa es:

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
13	5	65	-1,3	1,69	8,45
14	13	182	-0,3	0,09	1,17
15	10	150	0,7	0,49	4,9
16	2	32	1,7	2,89	5,78
	30	429			20,3

$s^2 = \frac{20,3}{30} \approx 0,68 \rightarrow s = \sqrt{0,68} \approx 0,82$

57. Para la serie dada la desviación típica es: $s \approx 1,28$

Para la serie obtenida al sumar 2 tenemos: $s \approx 2,37$

Para la serie obtenida al multiplicar por 5: $s \approx 16,17$

Vemos que cuanto mayores son los datos mayor es la dispersión.

PARA APLICAR

58. Buscamos que la media de informes entre los tres sea de 40, con lo que si definimos x como el número de informes que lleva Emma en cada mano:

$$40 = \frac{2 \cdot 25 + 30 + 2x}{3} = \frac{80 + 2x}{3} \rightarrow 120 - 80 = 2x \rightarrow$$

$\rightarrow x = 20$

59. Las respuestas son las siguientes:

a) Aproximadamente unos 113 estudiantes creen que se titularán.

b) Unos 88 se matricularían en Bachillerato.

60. Si analizamos de el gráfico de barras de si hacer cálculos podemos ver que el valor central estará más cerca de 3 que de 4, por lo que para saber si lo que afirma el enunciado es cierto o no podemos calcular el tamaño medio de los hogares mediante el cálculo de la media a partir de la frecuencias.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + ... + x_p \cdot n_p}{N} = f_1 \cdot n_1 + ... + f_p \cdot n_p = 3,082$$

Por lo tanto, lo que decía el enunciado es cierto ya que la media de personas por hogar son 3.

61. Las respuestas son las siguientes:

a) La tabla de frecuencias es:

	n_i	f_i
Bocadillos	448	0,25
Bebidas	412	0,23
Ensaladas	394	0,22
Postres	323	0,18
Sopas	215	0,12

Para realizar el pictograma los alumnos escogerán un dibujo para los productos y representando cada dibujo un 2% del total vendido tendremos: 12 dibujos y medio para los bocadillos, 11 dibujos y medio para las bebidas, 11 dibujos para las ensaladas, 9 para los postres y 6 para las sopas.

b) Si la frecuencia absoluta es la cantidad de unidades del producto vendidas de manera semanal, para saber cuantos productos necesitaran diariamente de cada, teniendo en cuenta el 10% adicional, calculamos:

$$= \frac{n_i}{7} \cdot (1 + 10\%) = 1,1 \cdot \frac{n_i}{7}$$

Bocadillos: 70 Bebidas: 65 Ensaladas: 62

Postres: 51 Sopas: 34

c) Lo más probable es que no ya que con el frío del invierno aumentará la demanda de sopas y disminuirá la de ensaladas.

62. Las soluciones son las siguientes:

a) La tabla de frecuencias es:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
Sin estudios	122	0,049	122	0,049
Primarios	386	0,155	508	0,204
Sec. Obl.	683	0,274	1 191	0,478
Sec. Postobl.	324	0,13	1 515	0,608
Superiores	972	0,39	2 487	0,998
N/N	5	0,002	2 492	1

b) Los diagramas son:

Ver figura 2 en la página 12-28 de la guía.

c) Sin no contamos los encuestados que no han respondido el porcentaje de personas que con formación superior a los estudios primario es 79,4%

63. Las respuestas son las siguientes:

a) Para cada grupo la media de suspensos son:

A: 1,5 B: 0,5 C: 1,2 D: 2 E: 1,5

b) En total hay 138 alumnos, 225 asignaturas suspendidas, con lo que la media de asignaturas suspendidas por alumno es: 1,63.

c) No coincide puesto que cada clase tiene una media de suspenso diferente a las demás.

64. Resuelto por el libro.

65. La definición de media nos dice que es la nota que tendrían todos los estudiantes si se repartiera de igual forma entre todos ellos. De manera que la nueva nota media de la clase la podemos obtener haciendo la media de una alumna que hizo el trabajo y otro que no.

$$\overline{x} = \frac{7,6 + (7,6 + 1,2)}{2} = 8,2$$

66. Las respuestas son:

a) Multiplicar cada número de una suma es lo mismo que multiplicar el resultado de la suma, de manera que la nueva media será 7 · 3 = 21.

b) La mediana, que es la media ponderada entre los dos valores centrales por la misma razón que la media será tres veces la mediana original y la moda, puesto que de nuevo todos los valores están multiplicados por tres, si es que la había, también será tres veces la anterior.

c) El rango es la diferencia entre el valor máximo y el mínimo, así que también será el triple del original.

67. Las respuestas son las siguientes:

a) Los parámetros de dispersión son:

	Equipo A	Equipo B
Media	7,84	7,59
Rango	5,1	1,6
Varianza	2,75	0,31
Des. Típica	1,66	0,56

b) El equipo A es el que ha obtenido los mejores resultados ya que de los dos es el que tiene la media más alta.

c) La homogeneidad de los resultados la obtenemos mediante la varianza. De los dos equipos el B es el de menor varianza, lo que nos dice que los datos están menos dispersos y por tanto son más homogéneos.

68. Las soluciones son:

a) Para cada grupo los parámetros de dispersión son:

	Grupo A	Grupo B
Media	5,81	5,69
Mediana	5	6
Moda	3 y 10	6 y 7
Varianza	10,62	3,83
Des. Típica	3,26	1,96

b) Analizando los datos podemos ver que el grupo A tiene una media más alta y una de las modas es 10, por lo que podría argumentarse que el grupo con mejores resultados es este, pero si nos fijamos en las varianzas, la del grupo A es muy superior indicando que los resultados son más dispersos, es decir, que las notas son más extremadas y habrá suspendido más gente que en el grupo B donde, aunque la media es menor, la varianza también es mucho menor indicando unas notas más cercanas a esta, por lo que tendremos más estudiantes aprobados. Con esta conclusión es válido afirmar que los mejores resultados son los del grupo B.

PARA AMPLAR

69. Las respuestas son:

a) La media y desviación típica de cada estudiante son:

	Carla	Lucía	Andrea	Irene
Media	8,35	6,53	7,3	9,4
Des. Típica	0,72	1,43	1,45	0,36

La más regular de las 4 es Irene dado que tiene la desviación típica menor.

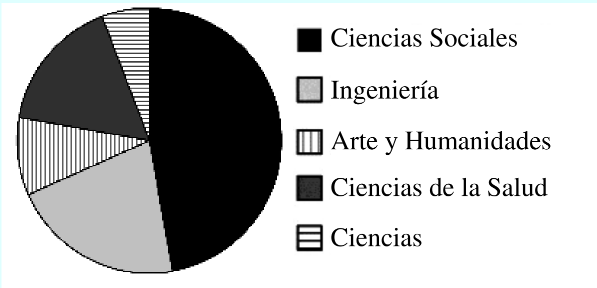
b) La media y desviación típica de cada parte son:

	Realización	Contenido	Exposición
Media	7,7	8,1	7,89
Des. Típica	1,59	0,9	1,89

Los resultados han estado menos dispersos en la parte del contenido.

70. Las soluciones son las siguientes:

a) El diagrama de sectores según la especialidad:



b) En un diagrama de barras comparativo tenemos más de una barra para cada categoría, en nuestro caso tendremos una barra para hombres y otra para mujeres.

Ver figura 3de la página 12-28 de la guía.

71. Resuelto por el libro.

72. Las soluciones son:

a) La tabla de frecuencias es la siguiente:

	Grupo A	Grupo B
[10, 20)	1	0
[20, 30)	3	3
[30, 40)	2	1
[40, 50)	1	3
[50, 60)	5	5
[60, 70)	3	3
[70, 80)	4	7
[80, 90)	4	2
[90, 100)	2	1

b) Mostramos los parámetros de dispersión de cada grupo en una tabla:

	Grupo A	Grupo B
Media	60,64	63,8
Des. Típica	23,79	20,01

El grupo más regular ha sigo el B puesto que es el que tiene una menor desviación típica.

c) *Ver figura 4 de la página 12-29 de la guía.*

DESARROLLA TUS COMPETENCIAS

1. Las 10 primeras palabras de la lista y las 10 últimas son:

orden	palabra	frec. absoluta
1.	de	9 999 518
2.	la	6 277 560
3.	que	4 681 839
4.	el	4 569 652
5.	en	4 234 281
6.	y	4 180 279
7.	a	3 260 939
8.	los	2 618 657
9.	se	2 022 514
10.	del	1 857 225
991.	proyectos	13 773
992.	flores	13 763
993.	niveles	13 759
994.	afirmó	13 758
995.	explicó	13 751
996.	n	13 748
997.	somos	13 727
998.	términos	13 719
999.	premio	13 701
1 000.	tercera	13 694

En el primer grupo tenemos preposiciones, determinantes, conjunciones y pronombres, mientras que en el segundo grupo tenemos nombres, formas verbales, la letra *n*, que en matemáticas es cualquier número indeterminado y un adjetivo.

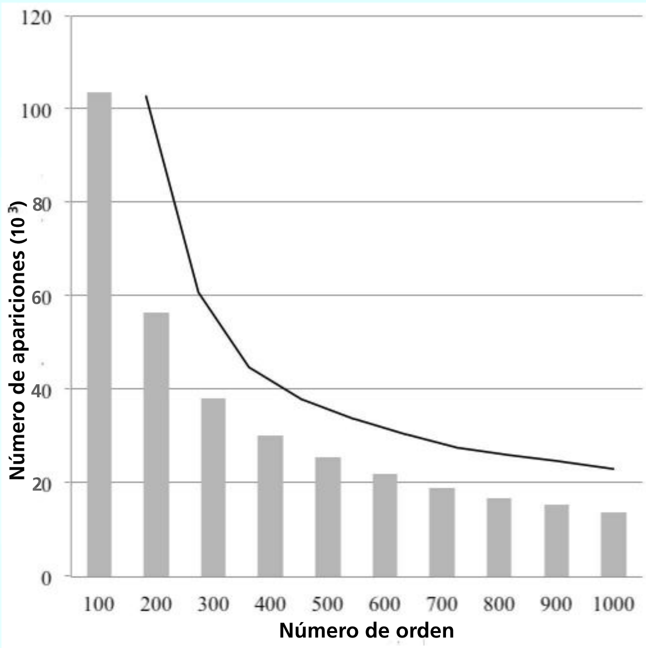
Esta diferencia es debida a la forma en la que la lengua construye las frases. La mayoría de nombres siempre van acompañados de un determinante o una preposición, para conectar frases hacemos servir las conjunciones y para elidir palabras y para hacer el lenguaje más económico hacemos uso de los pronombres.

En cambio, el uso de nombres y formas verbales depende siempre del contexto de la frase, de manera que su uso es mucho más específico.

2. a) Teniendo en cuenta que el total de palabras son 152 millones de términos.

palabra	orden (i)	frec. absoluta (n_i)	frec. relativa (f_i)
menos	100	103 498	$68{,}09 \cdot 10^{-5}$
nuestro	200	56 307	$37{,}04 \cdot 10^{-5}$
cierto	300	37 979	$24{,}99 \cdot 10^{-5}$
ciento	400	30 146	$19{,}83 \cdot 10^{-5}$
calidad	500	25 597	$16{,}84 \cdot 10^{-5}$
cantidad	600	21 812	$14{,}35 \cdot 10^{-5}$
habrá	700	18 951	$12{,}47 \cdot 10^{-5}$
creación	800	16 777	$11{,}04 \cdot 10^{-5}$
busca	900	15 280	$10{,}05 \cdot 10^{-5}$
tercera	1 000	13 694	$9{,}01 \cdot 10^{-5}$

b) El diagrama de barras y el polígono de frecuencias son los siguientes:



Nuestro polígono de frecuencias toma la forma de una función decreciente, de manera exponencial.

c) Añadiendo la columna C_i.

palabra	orden (i)	frec. absoluta (n_i)	$C_i = n_i \cdot i$
menos	100	103 498	10 349 800
nuestro	200	56 307	11 261 400
cierto	300	37 979	11 393 700
ciento	400	30 146	12 058 400
calidad	500	25 597	12 798 500
cantidad	600	21 812	13 087 200
habrá	700	18 951	13 265 700
creación	800	16 777	13 421 600
busca	900	15 280	13 752 000
tercera	1 000	13 694	13 694 000

d) La media aritmética es 12 508 230 y la desviación típica es 1 115 276.

e) La relación entre la desviación típica y la media es $\frac{s}{C} = 0,089$ por lo que podemos afirmar que en castellano se cumple la ley de Zipf.

EVALUACIÓN DE ESTÁNDARES

1. La población son todos los restaurantes de la ciudad. Tomar una muestra será necesario dependiendo de los recursos que tengamos para el estudio y lo grande que sea la ciudad. Una posible muestra para el estudio sería coger de manera aleatoria un número determinado de restaurantes de cada barrio de la ciudad.

2. Cualitativas: lugar de nacimiento y sexo.

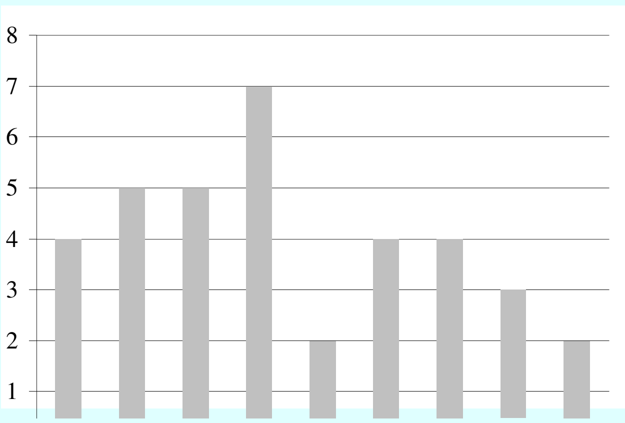
Cuantitativas discretas: edad y año de nacimiento.

Cuantitativas continuas: altura y peso.

3. La tabla de frecuencias es la siguiente:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
1	4	0,11	4	0,11
2	5	0,14	9	0,25
3	5	0,14	14	0,39
4	7	0,19	21	0,58
5	2	0,06	23	0,64
6	4	0,11	27	0,75
7	4	0,11	31	0,86
8	3	0,08	34	0,94
9	2	0,06	36	1

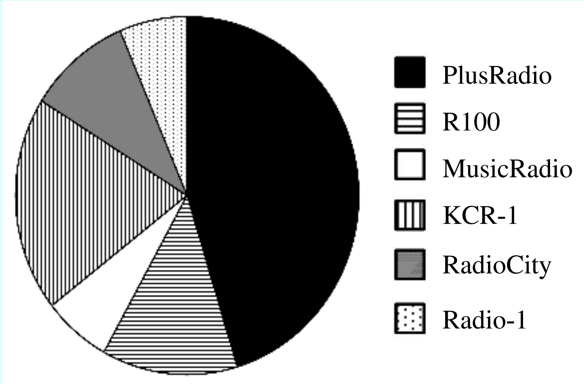
4. El diagrama de barras es:



5. La tabla de frecuencias es:

x_i	n_i	f_i
PlusRadio	350	0,45
R100	100	0,13
MusicRadio	50	0,06
KCR-1	150	0,19
RadioCity	75	0,10
Radio-1	50	0,06

El diagrama de sectores es:



6. Los parámetros de centralización y de dispersión son los siguientes:

$$\overline{x} = \frac{1+4+9+16+25+36+49+64+81+100}{10} =$$

$$= \frac{385}{10} = 38,5$$

Me = (25 + 36) : 2 = 30,5

Rec = 100 – 1 = 99

Todos tienen la misma frecuencia, por lo tanto, cualquier valor es *moda*.

$s^2 = 1\,051,05$

$s = 32,42$

7. Las respuestas son las siguientes:

a) La tabla de frecuencias es la siguiente:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
25	1	0,05	1	0,05
31	3	0,15	4	0,2
33	1	0,05	5	0,25
34	2	0,1	7	0,35
35	3	0,15	10	0,5
36	2	0,1	12	0,6
37	3	0,15	15	0,75
38	2	0,1	17	0,85
39	2	0,1	19	0,95
40	1	0,05	20	1

b) Los parámetros son:

$\overline{x} = 35,05$

Me = (35 + 36) : 2 = 35,5

Modas: 35 y 37

Re = 40 – 25 = 15

$s^2 \approx 12,15$

$s \approx 3,49$

Los datos ciertamente parecen bastante centrales alrededor de la media, pero el hecho de tener un valor tan extremo como 25 aumenta la dispersión, sin él obtendríamos una $s \approx 2,68$.

8. El tiempo medio también se doblará.

Si llamamos x_i a las horas que han dedicado los *n* participantes la semana anterior, entonces:

$$\frac{2x_1+2x_2+2x_3+...+2x_n}{n}=\frac{2\cdot(x_1+x_2+x_3+...+x_n)}{n}=$$
$$=2\cdot\overline{x}=2\cdot 2{,}3=4{,}6\text{ h}$$

9. Suponiendo que cada pregunta puede valer 10 puntos:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=4$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=24$$
$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9}{9}=5$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9=45$$
$$24+x_7+x_8+x_9=45$$

Puesto que buscamos la media para cada pregunta de las 3 que le quedan hacemos el cambio:

$$x_7+x_8+x_9=3\overline{x}$$
$$24+3\overline{x}=45\rightarrow 3\overline{x}=21\rightarrow \overline{x}=7$$

Esperanza deberá sacar de media un 7 en las 3 preguntas que le quedan.

10. Las soluciones son las siguientes:

a) Para Pedro la media es 7,1 y la desviación típica 2,29.

Para Marcos la media es de 7,2 y la desviación típica de 1,43.

b) Marcos ha sido el más regular puesto que su desviación típica es menor.

ESTRATEGIA E INGENIO

En el campo de fútbol

Buscamos en forma de cociente el porcentaje de asistentes partidarios del equipo local y los que están en tribuna.

$$13{,}\underline{4}=\frac{121}{9}\qquad 7{,}\underline{51}=\frac{744}{99}$$

Si *x* es el número de espectadores que hay en el estadio:

$$\frac{121}{9}\cdot\frac{x}{100}=\frac{121x}{900}=\frac{11^2\cdot x}{(2\cdot3\cdot5)^2}$$ son partidarios del equipo local.

$$\frac{744}{99}\cdot\frac{x}{100}=\frac{62x}{825}=\frac{2\cdot31\cdot x}{3\cdot5^2\cdot11}$$ están en tribuna.

Por lo tanto, *x* debe ser múltiplo de 900 y 825.

Como m.c.m (900, 825) = $2^2\cdot3^2\cdot5^2\cdot11=9.900$

Como el estadio está casi lleno, la solución es el múltiplo de 9.900 más próximo a 20.000.

Por lo tanto, la solución es que en el estadio había 9.900 · 2 = = 19.800 espectadores pues 9.900 · 3 = 29.700 > 20.000.

Humor estadístico

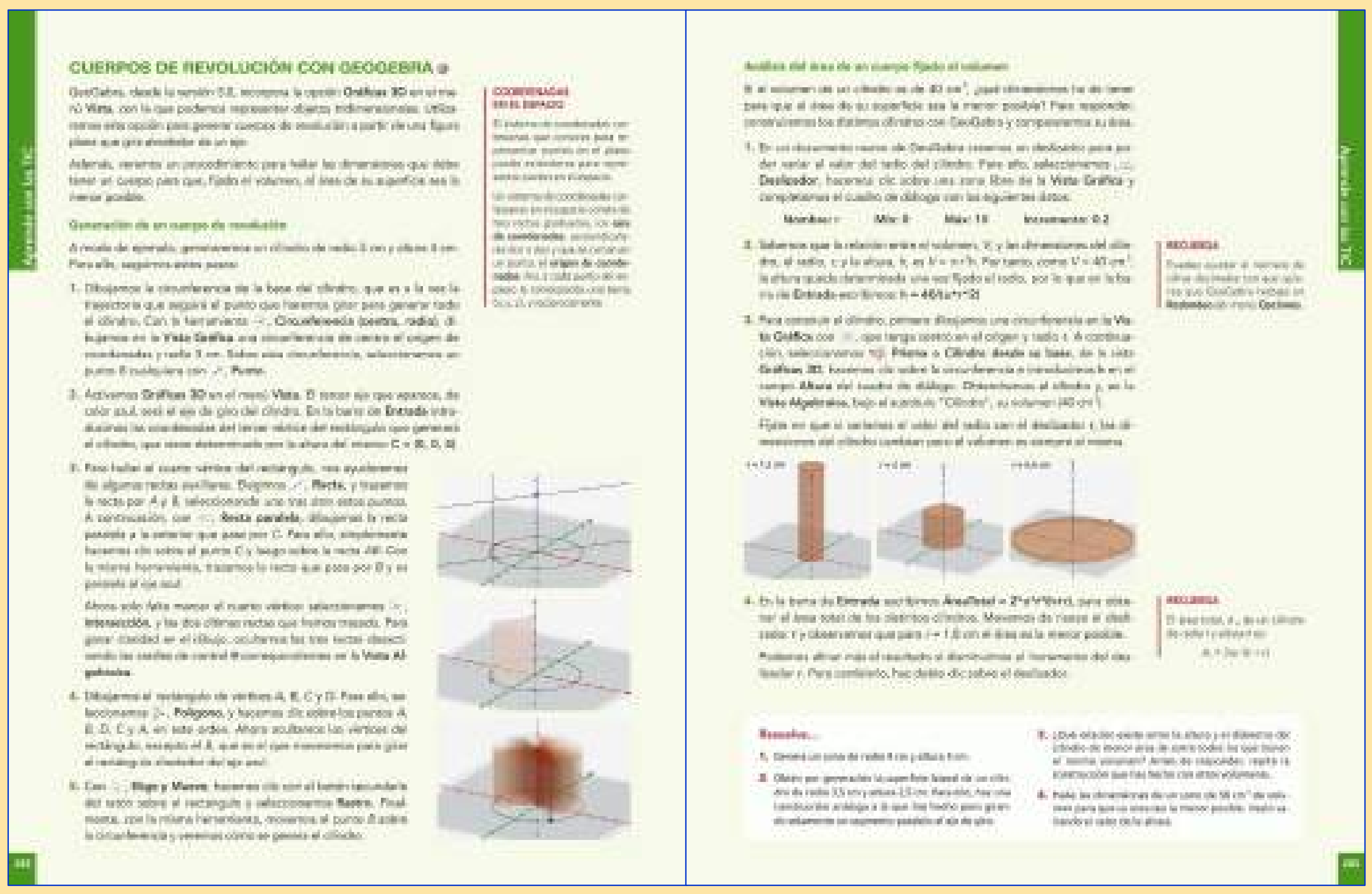
a) Ciertamente la tasa de mortalidad en los hospitales es mucho mayor que en cualquier otro lugar, pero esto es debido a que es el sitio al que van las personas cuando estamos gravemente enfermas o heridas.

b) Si calculamos la edad que tendría en 2016 una persona que nació en 1830, obtenemos que esta persona tendría 186 años, mucho más de lo que una persona puede llegar a vivir. Así pues, comiesen o no pepinillos esta gente ya esta muerta, no podemos afirmar que exista una correlación entre los pepinillos y las defunciones.

c) La expresión no hace referencia a una persona en concreto de las muchas que hay en Nueva York, sino a una persona de entre los millones que existen, con lo que es válido decir que en Nueva York se atropellan 6 personas por hora o 144 por día.

d) La definición de media nos dice que es el valor que tomaría una variable estadística si la suma de todos sus valores se repartiera de igual forma entre los diferentes individuos de una población. En este caso la variable sería el pollo y la población las dos personas a las cuales les tocaría medio pollo a cada una, pero puesto que una de ellas ya se lo habría comido, no hay nada a repartir y no tiene sentido calcular la media.

Otro ejemplo de estos usos incorrectos de la estadística podría ser: La probabilidad de tener un accidente de tráfico aumenta con el tiempo que pasas en la calle. Por tanto, cuanto más rápido circules, menor es la probabilidad de que tengas un accidente.


CUERPOS DE REVOLUCIÓN CON GEOGEBRA

Generación de un cuerpo de revolución

Análisis del área de un cuerpo fijado el volumen

Resuelve...

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 3.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1, 2.* Identificar las figuras geométricas y ser capaza de utilizar GeoGebra para desarrollar estratégias de resolución, siendo capaz de reproducirlos.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Simulación con GeoGebra.* Desarrollar la capacidad de construir una simulación de un experimento con el programa GeoGebra, para constituir figuras en tresdimensiones, potenciando la habilidad para analizar, comprobar y representar gráficamente el resultado.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 4.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos sobre GeoGebra y geometría, siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la solución.

■ *Act. 3.* Identificar en la realización del problema las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional y creativa, para trabajar la confianza en uno mismo.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 283

1. Actividad personal. Seguiremos los pasos indicados en la página 282 para obtener un cono cuyo radio sea 4 cm y su altura, 5 cm.

2. Actividad personal. Repetiremos los pasos de la pág. 282 para obtener ahora un cilindro de 3,5 cm de radio y 2,5 cm de altura. Obtenemos que su superficie lateral es 54,98 cm^2, que coincide exactamente con el resultado de aplicar la fórmula $A_{lat} = 2\pi rh$.

3. Actividad personal. Según el procedimiento explicado en la página 283 podemos dibujar diferentes cilindros con un mismo volumen. Si modificamos el valor del radio con el deslizador, es fácil comprobar que a mayor altura, el diámetro del cilindro disminuye según la fórmula $h = V/\pi(d/2)^2 = 4V/\pi d^2$

Por ejemplo, supongamos un cilindro de volumen fijo de 40 cm^3. Sus dimensiones para que el área sea mínima son r = 1,8 cm y h = 3,93 cm. Así, relación entre la altura y el diámetro es 3,93/(2·1,8) = 1,1.

4. Dibujamos con el GeoGebra un cilindro con un volumen de 50 cm^3. Creamos un deslizador con el valor de la altura y lo vamos modificando para determinar gráficamente las dimensiones del cono para que su área sea la menor posible. Estos valores son h = 4,91 cm y r = 1,8 cm.

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 12-7 de la guía)

Horas empleadas: 6 → $n_i = 2$ → $f_i = 8\%$

Horas empleadas: 7 → $n_i = 5$ → $f_i = 20\%$

Horas empleadas: 8 → $n_i = 5$ → $f_i = 20\%$

Horas empleadas: 9 → $n_i = 4$ → $f_i = 16\%$

Horas empleadas: 10 → $n_i = 3$ → $f_i = 13\%$

11. La tabla es la siguiente:

Horas deporte	n_i	f_i
0	1	0,0625
1	2	0,125
2	1	0,0625
3	6	0,375
4	3	0,1875
6	2	0,125
7	1	0,0625

12. La tabla completa es la siguiente:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	1 230	0,065 6	1 230	0,065 6
1	5 515	0,293 9	6 740	0,359 5
2	9 803	0,523 0	16 543	0,882 5
3	2 202	0,117 5	18 745	1

Página 265

13. Los diagramas son los siguientes:

Ver la figura 1 de la página 12-27

14. Para saber el ángulo que corresponde a una frecuencia relativa de 0,2 calculamos:

$\alpha_i = 360° \cdot f_i = 360° \cdot 0{,}2 = 72°$

Para saber la frecuencia relativa correspondiente a 120° hacemos el siguiente cálculo:

$$f_i = \frac{\alpha_i}{360°} = \frac{120°}{360°} = \frac{1}{3} \approx 0{,}667$$

(Viene de la página 12-11 de la guía)

Si los parámetros coincidentes fuesen la mediana y la moda la característica que podríamos remarcar de esa serie es que el valor central es el más repetido.

21. Sabiendo que los tres parámetros de centralización valen 24 podemos empezar por imponer la moda, y viendo que ningún dato está repetido, con que uno de los dos parámetros a ó b sean 24 basta, podemos expresar esta posibilidad como: a + b = 24 + x

Por otro lado deberá cumplirse que la media aritmética también sea 24, por lo que:

$$24 = \frac{15+18+20+a+24+b+28+29+32}{9}$$

$24 \cdot 9 = 166 + a + b = 166 + 24 + x = 190 + x$

$x = 216 - 190 = 26$

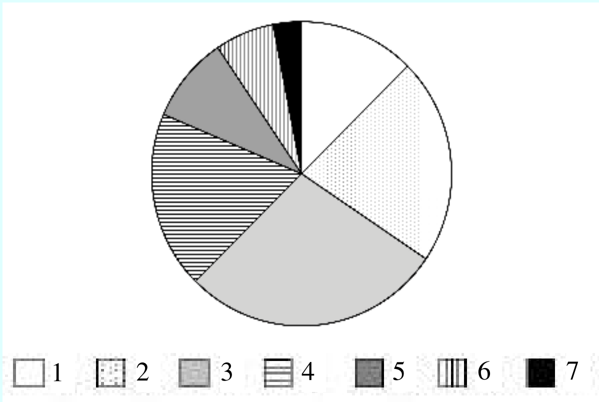
Con lo que concluimos que a = 24 y b = 26 haciendo que automáticamente se cumpla que la mediana sea 24.

(Viene de la página 12-13 de la guía)

Página 273

24. Actividad personal. Al explicar este ejercicio los alumnos deberían especificar la manera en la que han obtenido las amplitudes de los sectores del diagrama, haciendo referencia a la fórmula:

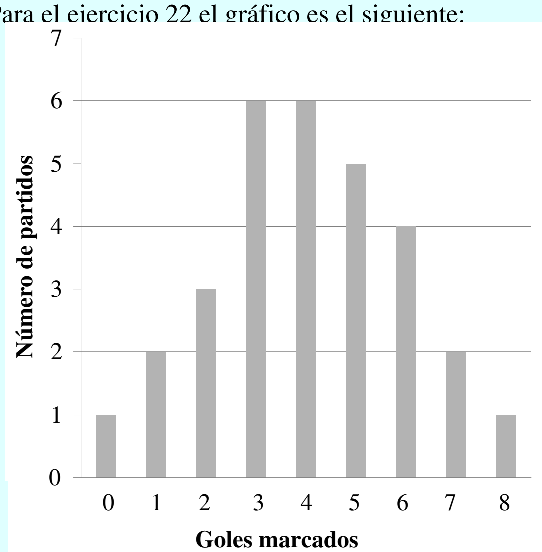
$$\alpha_i = \frac{360° \cdot n_i}{N}$$



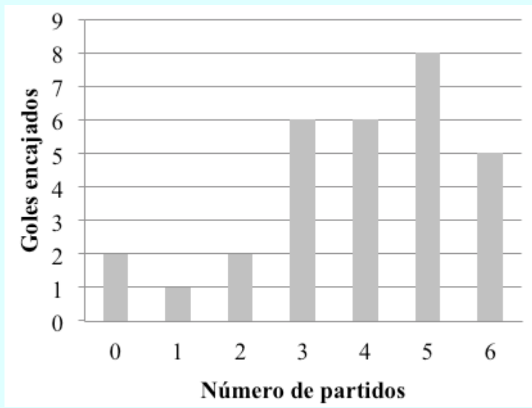
25. La varianza y la desviación típica que obtenemos es:

$$s^2 = \frac{73{,}47}{32} \approx 2{,}296 \qquad s = \sqrt{2{,}296} \approx 1{,}52$$

26. Para el ejercicio 22 el gráfico es el siguiente:



Para el ejercicio 23 el gráfico es:

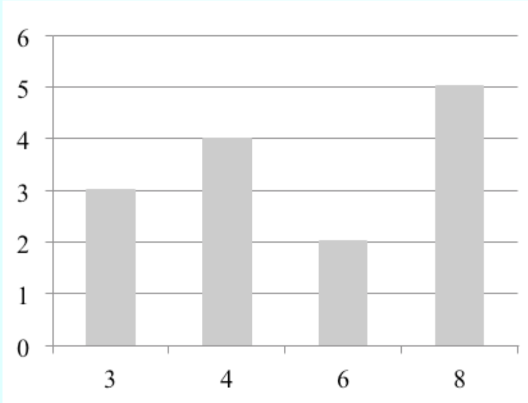


Tal y como indicaban la varianza y la desviación típica en el primer caso los el número de goles marcados está más repartido que en el caso de los goles encajados.

27. La media, la desviación típica y la gráfica de barras es la siguiente:

$$s^2 = \frac{59,2}{14} = 4,25$$

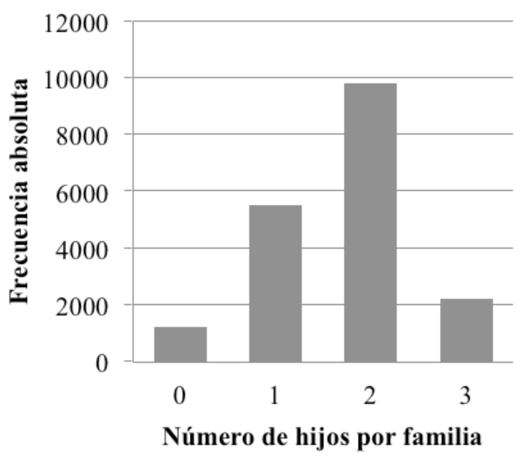
$$s = \sqrt{4,25} \approx 2,06$$



DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/749560	http://www.ine.es/explica/explica_estadymas.htm
http://www.tiching.com/749562	http://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/IntroduccionEstadisticaProbabilidad/2ESO/2_1PoblacionMuestraIndividuo.html
http://www.tiching.com/749566	http://proyectodescartes.org/Telesecundaria/matematicas2.htm
http://www.tiching.com/749569	http://www.srbarreiro.es/mat2eso.html
http://www.tiching.com/751469	http://politica.elpais.com/politica/2016/06/30/actualidad/1467280825_063213.html
http://www.tiching.com/751470	http://www.lavanguardia.com/deportes/20160606/402323658395/espana-la-seleccion-mas-baja-inglaterra-la-mas-joven.html
http://www.tiching.com/751471	http://www.elmundo.es/sociedad/2016/06/23/576bab80e5fdea99418b457b.html

FIGURA 1



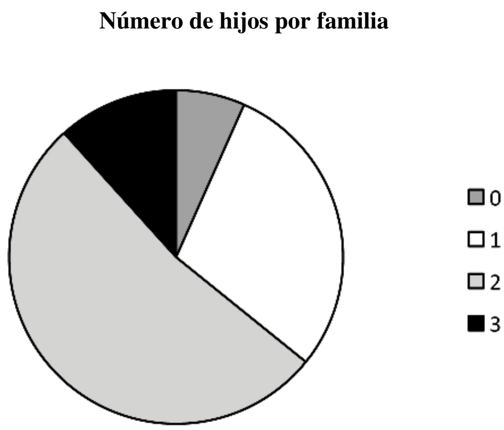
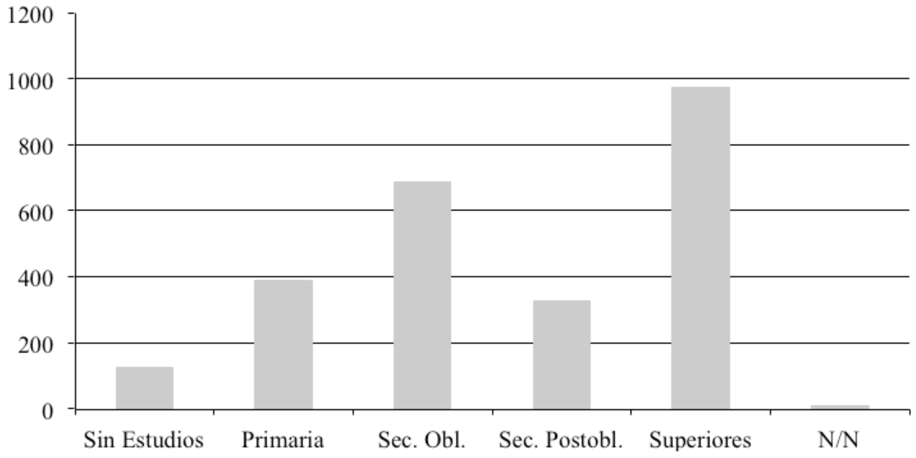


FIGURA 2



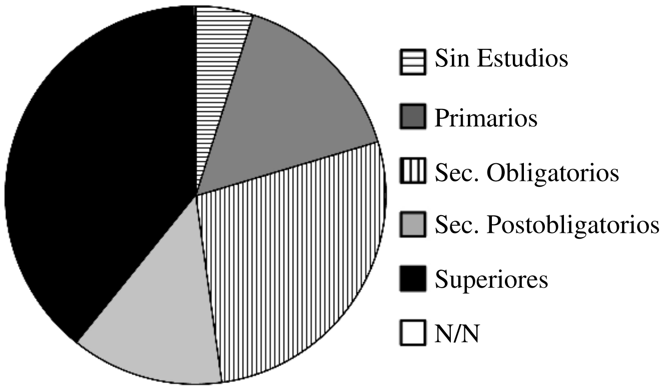


FIGURA 3

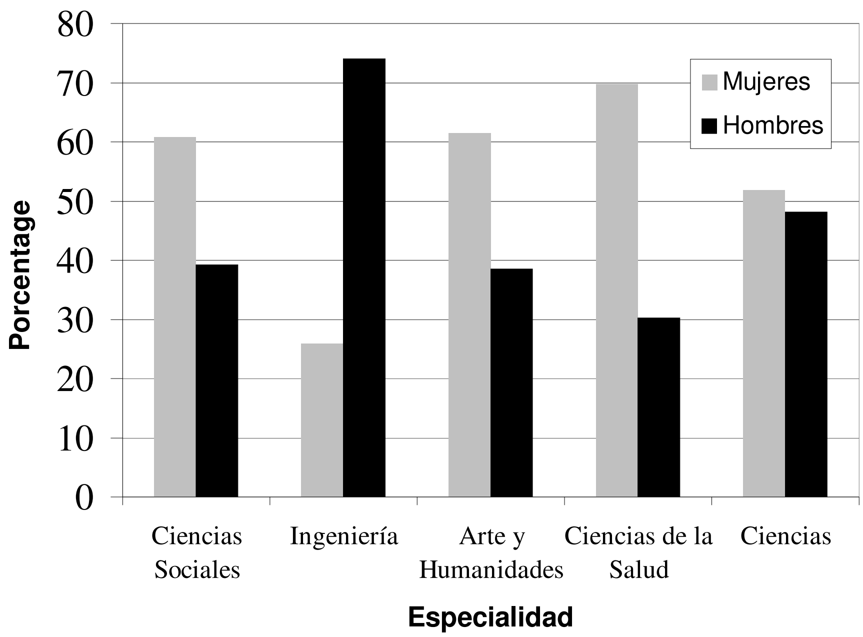
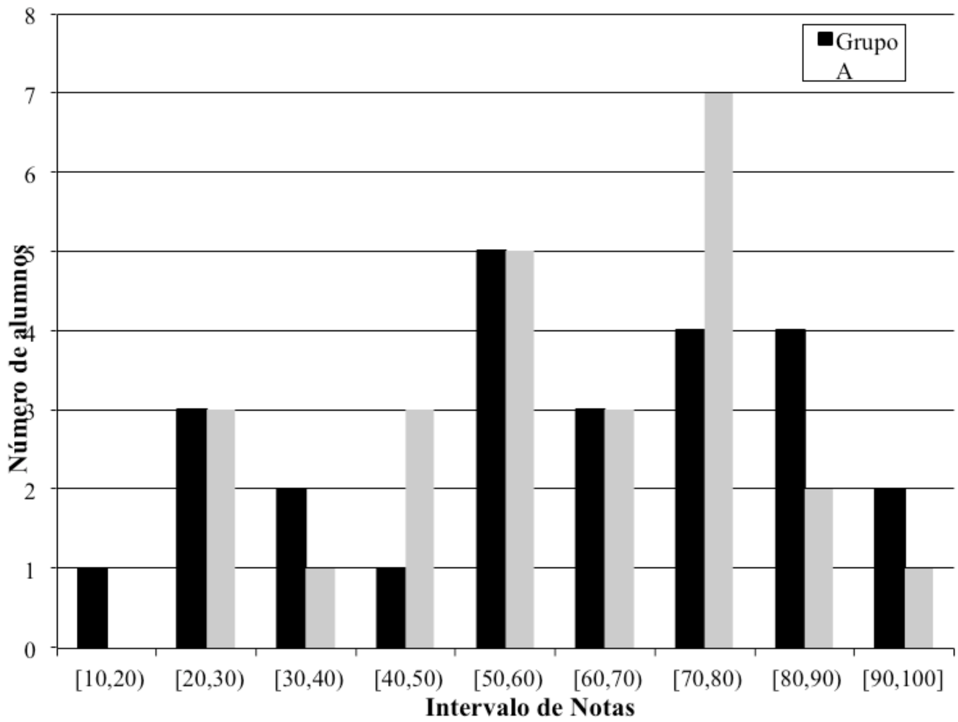


FIGURA 4



8
7
6
5
4
3
2
1
0
Número de alumnos
Grupo A
[10,20)
[20,30)
[30,40)
[40,50)
[50,60)
[60,70)
[70,80)
[80,90)
[90,100]
Intervalo de Notas