3 Expresiones algebraicas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 3. Ejercicios resueltos.

4. Para cada polinomio, indica su grado y sus coeficientes, calcula su valor numérico para $x = 3$ y $x = -5$.

a) $P(x) = -2x^4 + 32$

b) $Q(x) = 2x^3 + x + 30$

c) $R(x) = \frac{1}{3}x^2 - 5x + \frac{1}{6}$

d) $S(x) = -2x^3 - x^2 + 3x$

a) Cuarto grado. Coeficientes: –2, 0, 0, 0, 32 ; término independiente: 32. $P(3) = -130$ y $P(-5) = -1218$.

b) Tercer grado. Coeficientes: 2, 0, 1, 30; término independiente: 30. $Q(3) = 87$ y $Q(-5) = -225$.

c) Segundo grado. Coeficientes: $\frac{1}{3}$, –5, $\frac{1}{6}$; término independiente $\frac{1}{6}$. $R(3) = -\frac{71}{6}$ y $R(-5) = \frac{67}{2}$.

d) Tercer grado. Coeficientes: –2, –1, 3, 0; no tiene término independiente. $S(3) = -54$ y $S(-5) = 210$.

5. Dados los polinomios $P(x) = -x^3 + x^2 - 3x - 1$, $Q(x) = -3x^3 - 6x + 3$ y $R(x) = x^3 + 2x^2$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) - Q(x) + 2R(x)$

b) $2[P(x) - 3Q(x)] + \frac{1}{2}R(x)$

a) $4x^3 + 5x^2 + 3x - 4$

b) $\frac{33}{2}x^3 + 3x^2 + 30x - 20$

6. Halla las raíces del polinomio $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

$P(-3) = 0 = P\left(\frac{1}{2}\right)$. Luego las raíces son $x = -3$ y $x = \frac{1}{2}$.

7. Los ingresos y costes de una determinada operación comercial vienen dados por los siguientes polinomios, en los que *x* es el número de unidades producidas.

$$I(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 \qquad C(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x + 20$$

a) Calcula la expresión que determina los beneficios.

b) Calcula los beneficios en el caso de que los costes se reduzcan a la mitad.

a) $B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 - \left(-\frac{1}{10}x^2 + 2x + 20\right) = -\frac{3}{20}x^2 + 4x + 30$

b) $B(x) = I(x) - \frac{C(x)}{2} = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 - \left(-\frac{1}{20}x^2 + x + 10\right) = -\frac{1}{5}x^2 + 5x + 40$

8 a 11. Ejercicios resueltos.

12. Realiza los siguientes productos de polinomios.

a) $(2x^2-3x+5)(-3x+2)$ **b)** $(-x^3+x^2-2)(-3x^2-4)$ **c)** $(6x^3-x^2-3x)(2x^2+3x-7)$

a) $-6x^3+4x^2+9x^2-6x-15x+10=-6x^3+13x^2-21x+10$

b) $3x^5+4x^3-3x^4-4x^2+6x^2+8=3x^5-3x^4+4x^3+2x^2+8$

c) $12x^5+18x^4-42x^3-2x^4-3x^3+7x^2-6x^3-9x^2+21x=12x^5+16x^4-51x^3-2x^2+21x$

13. Escribe el desarrollo del cubo de una resta: $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3$.

$(a-b)^3=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-3a^2b+3b^2a-b^3$

14. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $2x-3x(x^2-5)+(2-x)(-3x^2+6)$

b) $2(3x-1)^2+5(3x-1)(3x+1)-4x(3x+2)^2$

c) $3(2x^2-3)^2-2x(x^2+3x)-(1-2x)(-x^2+2)$

a) $2x-3x^3+15x-6x^2+12+3x^3-6x=-6x^2+11x+12$

b) $18x^2+2-12x+45x^2-5-36x^3-16x-48x^2=-36x^3+15x^2-28x-3$

c) $12x^4-36x^2+27-2x^3-6x^2-2x^3+x^2+4x-2=12x^4-4x^3-41x^2+4x+25$

15. Simplifica la expresión $\boldsymbol{2xa-4xb-3ya+6yb}$.

$2x(a-2b)-3y(a-2b)=(a-2b)(2x-3y)$

16. Ejercicio resuelto.

17. Realiza las siguientes divisiones de monomios e indica si el resultado es un monomio.

a) $\dfrac{12x^4}{-3x^2}$ o **b)** $\dfrac{18x^5y^2z^4}{6x^2y^2z^3}$ **c)** $\dfrac{-54x^2y^4z^3}{18x^2y^2z^3}$ **d)** $\dfrac{8a^3d^2}{2b^3c^2d^3}$

a) $-4x^2$. Es un monomio.

b) $3x^3z$. Es un monomio.

c) $-3y^2$. Es un monomio

d) $\dfrac{4a^3}{b^3c^2d}$. No es un monomio.

18. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(3x^4-2x^2-x+4):(x+2)$ **b)** $\left(x^6+\frac{1}{2}x^4+x^2+4\right):(2x^3+x-4)$

a) Cociente: $3x^3-6x^2+10x-21$ Resto: 46

b) Cociente: $\dfrac{x^3}{2}+1$ Resto: x^2-x+8

19 y 20. Ejercicios resueltos.

21. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) $\left(2x^4-3x^3+2x^2-5x+3\right):(x+1)$

b) $\left(2x^5-x^3+2x-1\right):(x-3)$

c) $\left(2x^4-3x^2+8x+12\right):(x+2)$

d) $\left(5x^5-5x^3+5x-5\right):(x+3)s$

e) $\left(a^2+ab+b^2\right):(a-b)$

a) Cociente: $2x^3-5x^2+7x-12$. Resto: 15

b) Cociente: $2x^4+6x^3+17x^2+51x+155$. Resto: 464

c) Cociente: $2x^3-4x^2+5x-2$. Resto: 16

d) Cociente: $5x^4-15x^3+40x^2-120x+365$. Resto: –1100

e) Cociente: $a+2b$. Resto: $3b^2$

22. Divide los polinomios:

a) $\left(x^5-x+2\right):\left(x+\frac{1}{4}\right)$

b) $\left(4x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{4}\right):\left(x-\frac{3}{2}\right)$

a) Cociente: $x^4-\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{16}-\frac{x}{64}-\frac{255}{256}$. Resto: $\frac{2303}{1024}$

b) Cociente: $4x^2+\frac{16}{3}x+8$. Resto: $\frac{49}{4}$

23. Ejercicio interactivo.

24 y 25. Ejercicios resueltos.

26. Con ayuda de la regla de Ruffini, calcula el valor numérico del polinomio $P(x)=1{,}25x^3-0{,}75x^2+0{,}5x-1$, para $x=2{,}05$.

$P(2{,}05)=7{,}642$

27. Halla el valor de *m* para que sea exacta la siguiente división.

$$\left(2x^4+8x^3-20x^2-24x+16m\right):(x-2)$$

Aplicando la regla de Ruffini se obtiene de resto $R=16m-32$. Como este resto debe ser nulo, $m=2$.

28. Calcula el valor de *k* para que al dividir x^5+kx-2 entre $x+3$ se obtenga de resto –272.

	1	0	0	0	k	–2
–3		–3	9	– 27	81	$-3k-243$
	1	–3	9	– 27	$k+81$	$-3k-245$

Entonces, $-3k-245=-272$

Por lo tanto, $k=9$

29. Calcula el valor que debe tomar *k* para que el polinomio $c(x)=0{,}5x^3+0{,}125x^2+kx-1$ sea divisible por $(x+0{,}25)$.

$c(-0{,}25)=0{,}5(-0{,}25)^3+0{,}125(-0{,}25)^2+k(-0{,}25)-1=0\Rightarrow k=-4$

30 y 31. Ejercicios resueltos.

32. Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces.

a) $x^4-4x^3+2x^2+4x-3$

b) $9x^3+12x^2+4x$

c) x^6-16x^2

d) x^3-4x^2+x+6

e) $6x^3+11x^2+6x+1$

f) $2x^3+5x^2-x-6$

g) $x^4-3x^3+3x^2-3x+2$

h) x^6-9x^4

a) $(x-1)^2(x+1)(x-3)$; $x=1$ (doble), $x=-1$, $x=3$

b) $x(3x+2)^2$ $x=0$, $x=-\dfrac{2}{3}$

c) $x^2(x-2)(x+2)(x^2+4)$; $x=0$ (doble), $x=-2$, $x=2$

d) $(x-2)(x+1)(x-3)$; $x=2$, $x=-1$, $x=3$

e) $(x+1)(2x+1)(3x+1)$; $x=-1$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=-\dfrac{1}{3}$

f) $(x-1)(x+2)(2x+3)$; $x=-2$, $x=-\dfrac{3}{2}$, $x=1$

g) $(x-1)(x-2)(x^2+1)$; $x=1$, $x=2$

h) $x^4(x-3)(x+3)$; $x=0$ (cuarta), $x=3, x=-3$

33. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a) $P(x)=x^5+3x^4-2x^3-6x^2+x+3$ $\quad Q(x)=x^3+3x^2-x-3$

b) $P(x)=x$ $\quad Q(x)=x^2-x$ $\quad R(x)=x^3-2x^2+x$

a) $P(x)=(x-1)^2(x+1)^2(x-3)$, $Q(x)=(x+1)(x-1)(x+3)$

m.c.d.$\{P(x),Q(x)\}=(x-1)(x+1)$ m.c.m.$\{P(x),Q(x)\}=(x-1)^2(x+1)^2(x+3)(x-3)$

b) $P(x)=x$, $Q(x)=x(x-1)$, $R(x)=x(x-1)^2$

m.c.d.$\{P(x), Q(x), R(x)\}=x$ m.c.m.$\{P(x), Q(x), R(x)\}=x(x-1)^2$

34. Ejercicio interactivo.

35 y 36. Ejercicios resueltos.

37. Comprueba si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes.

$$\boldsymbol{A(x)=\frac{x^3+2}{x^2+5x-3}} \qquad \boldsymbol{B(x)=\frac{x^4+x^3+2x+2}{x^3+x^2+5x^2+5x-3x-3}}$$

Factorizando $B(x)=\dfrac{(x+1)(x^3+2)}{(x+1)(x^2+5x-3)}$ y multiplicando en cruz se ve que son equivalentes.

38. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas y halla su valor numérico para $x=2$.

a) $\dfrac{2x^4+x^3-11x^2+11x-3}{2x^3+3x^2-8x+3}$

b) $\dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{x^3-7x^2+16x-12}$

a) $\dfrac{(x+3)(x-1)^2(2x-1)}{(x-1)(x+3)(2x-1)}=x-1$. Para $x=2$ el valor numérico es 1.

b) $\dfrac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)^2}=\dfrac{x+3}{x-2}$. Para $x=2$ no tiene valor numérico.

39. Calcula y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{a^2}{ab}+\dfrac{ab^2}{b^4}-a$

b) $\dfrac{6}{2+x}-\dfrac{4}{2-x}+\dfrac{16}{x^2-4}$

c) $\left(x^2-y^2\right):\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$

d) $\dfrac{a+x}{x^2-a^2}\cdot\dfrac{x-a}{x+a}$

a) $\dfrac{a^2b^3+a^2b^2-a^2b^4}{ab^4}=\dfrac{a^2b^2\left(b+1-b^2\right)}{ab^4}=\dfrac{ab+a-ab^2}{b^2}$

b) $\dfrac{6x-12+4x+8+16}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{10x+12}{x^2-4}$

c) $\dfrac{(x-y)(x+y)}{\dfrac{x+y}{xy}}=\dfrac{xy(x-y)(x+y)}{x+y}=x^2y-xy^2$

d) $\dfrac{(a+x)(x-a)}{(x-a)(x+a)^2}=\dfrac{1}{x+a}$

40. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $A(x)=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}$

b) $B(x)=1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{1}{x}}}$

a) $A(x)=\dfrac{3x+2}{2x+1}$

b) $B(x)=\dfrac{2x^2+1+2x}{x^2+x+1}$

41. Si las expresiones $C_1(x)$ y $C_2(x)$ expresan el coste, en euros, de fabricar, para un modelo de bicicleta, x cámaras y x válvulas, respectivamente, calcula la suma de costes.

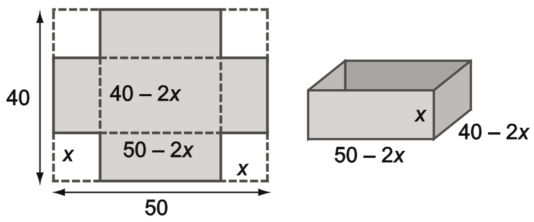
$$\boldsymbol{C_1(x)=500-\cfrac{x}{\cfrac{x^2}{10\,000}-1}}\qquad \boldsymbol{C_2(x)=1000-\cfrac{x}{\cfrac{x}{100}-1}}$$

$$C_1(x)+C_2(x)=500-\cfrac{x}{\cfrac{x^2}{10\,000}-1}+1000-\cfrac{x}{\cfrac{x}{100}-1}=\frac{1400x^2-15\,000\,000-2000x}{x^2-10\,000}$$

42. Ejercicio interactivo.

43. Ejercicio resuelto.

44. Con una cartulina rectangular de 50 cm x 40 cm se quiere construir una caja sin tapa recortando cuatro cuadros iguales en cada una de las esquinas. Escribe las expresiones algebraicas de la superficie y el volumen de la caja en función del lado del cuadrado.



$V(x)=x(50-2x)(40-2x)=4x^3-180x^2+2000x$

$S(x)=40\cdot 50-4x^2$

45. Se considera como indicador del bienestar de un país la media ponderada de tres porcentajes: el de afiliación a la seguridad social (*x*), el de población con renta superior a la línea de pobreza (*y*) y el de población activa con trabajo (*z*). Los pesos asignados a dichos porcentajes son 1 : 2 : 2. Escribe la expresión algebraica del indicador y calcula su valor para $x = 65$ %, $y = 80$ % y $z = 92$ %.

$I(x,y,z) = \dfrac{x+2y+2z}{5}$, $I(65,80,92) = 81{,}8\,\%$

46. El negocio de una empresa que fabrica memorias para ordenador tiene las siguientes características:

- **Costes fijos: 2200 €**
- **Costes por unidad: 7 €**
- **Precio de venta por unidad: 12 €**

Escribe las expresiones algebraicas que permiten calcular los beneficios en función del número de unidades producidas, y aplícalas para el caso concreto de que se fabriquen 650 memorias en cada uno de los siguientes casos.

a) Se vende toda la producción.

b) Queda sin vender el 12 % de la producción.

	Costes $C(x)$	Ingresos $I(x)$	Beneficios $B(x)$	$B(650)$
a)	$2200 + 7x$	$12x$	$5x - 2200$	1050
b)	$2200 + 7x$	$10{,}56x$	$3{,}56x - 2200$	114

47 a 60. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Polinomios

61. Identifica el número de variables, el grado, los coeficientes y el término independiente de los siguientes polinomios.

a) $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ **b)** $3xy^2z^3 - 2x^2y^3z^2$ **c)** $2y^2 + 3y + 4$ **d)** $4ab - 3cd^2 + 2d + 7$

a) Una variable, *x*. Grado 3. Coeficientes: 2, 3, -4 y término independiente 5.

b) Tres variables, *x*, *y*, *z*. Grado 7. Coeficiente de mayor grado -2 , el coeficiente de sexto grado 3.

c) Una variable, *y*. Grado 2. Coeficientes: 2, 3 y término independiente 4.

d) Cuatro variables, *a*, *b*, *c* y *d*. Grado 3. Coeficientes: –3, 4, 2, y término independiente 7.

62. Calcula el valor numérico en $x = 2$ y $x = 0{,}15$ de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ **b)** $Q(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - 2$ **c)** $R(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ **d)** $S(x) = \frac{1}{6}x^5 + \frac{2}{3}$

a) $P(2) = 21$, $P(0{,}15) = -2{,}95$

b) $Q(2) = \dfrac{23}{30}$, $Q(0{,}15) = -2{,}10$

c) $R(2) = -\dfrac{4}{3}$, $R(0{,}15) = 0{,}0149$

d) $S(2) = 6$, $S(0{,}15) = 0{,}666\,679$

63. ¿Son los valores de $x = -2$, $x = 2$, $x = -1$ y $x = 1$ raíces del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$?

$P(-2) = 0, P(2) \neq 0, P(-1) = 0, P(1) = 0$. Luego, las raíces son $x = -2, x = -1$ y $x = 1$.

64. Determina el valor de *a* para que $x = -2$ sea raíz del polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - (a+1)x^3 + 5ax - 4$$

Para que $x = -2$ sea raíz de $P(x)$ se tiene que cumplir que $P(-2) = 32 + 8(a+1) - 10a - 4 = 0$. Luego, $a = 18$.

Operaciones con polinomios

65. Simplifica los siguientes polinomios.

a) $8 - 2(2-3x)^2$ **b)** $(x-2)(x+3)(x-1)$ **c)** $4(2-5x)^2 - 16(1-5x)$ **d)** $-2(x+1)(x+2)^2$

a) $-18x^2 + 24x$ **b)** $x^3 - 7x + 6$ **c)** $100x^2$ **d)** $-2x^3 - 10x^2 - 16x - 8$

66. Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3$, $Q(x) = -x^3 - x^2 + 2$ y $R(x) = -3x^2 + 2x - 5$, calcula:

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$ **b)** $-2P(x) - 3Q(x) - 3R(x)$

a) $x^3 - 7x^2 + x$ **b)** $-x^3 + 18x^2 - 4x + 3$

67. Simplifica las siguientes expresiones polinómicas.

a) $2(3x-2)^2 - 3(3x+2)^2 - 2(3x-2)(3x+2)$

b) $(3x+2)^2 + 2(2x-3)^2 - (2x-5)(x-5)$

c) $(2x^2 - 2x - 1)(3x^2 - 2x) - 3x$

d) $(2x^2 - 3x + 2)(-3x^2 + x + 1) + (6x + 10)x^3$

e) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}\right) + \frac{6}{25}$

a) $-27x^2 - 60x + 4$ **b)** $15x^2 + 3x - 3$ **c)** $6x^4 - 10x^3 + x^2 - x$ **d)** $x^3 - 7x^2 - x + 2$ **e)** $x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{4}{15}x$

68. Desarrolla empleando las identidades notables.

a) $(2x+3)^2$ **b)** $(xyz^3 - x^2y)^2$ **c)** $(2z + 3xy)(3xy - 2z)$ **d)** $(3x + 2xy)^4$

a) $4x^2 + 12x + 9$ **b)** $x^2y^2z^6 - 2x^3y^2z^3 + x^4y^2$ **c)** $9x^2y^2 - 4z^2$ **d)** $16x^4y^4 + 96x^4y^3 + 216x^4y^2 + 216x^4y + 81x^4$

69. Emplea las identidades notables para escribir estas expresiones en forma de producto.

a) $x^2 + 4x + 4$ **b)** $4x^2 - 25$ **c)** $9x^2 - 12xy + 4y^2$ **d)** $x^2 - 5$

a) $(x+2)^2$ **b)** $(2x-5)(2x+5)$ **c)** $(3x-2y)^2$ **d)** $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

70. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(3x^3 - 4x^2 - 2x + 3) : (x^2 - 2x + 3)$

b) $(6x^4 + 11x^3 - 17x^2 + 11x - 3) : (2x^2 + 5x - 3)$

c) $(6x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 6x - 6) : (3x^2 + 2x + 1)$

d) $\left(2x^4 + \frac{11}{2}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{19}{4}x + \frac{3}{4}\right) : (x^2 + 3x - 1)$

a) Cociente: $3x + 2$. Resto: $-7x - 3$

b) Cociente: $3x^2 - 2x + 1$. Resto: 0

c) Cociente: $2x^2 + x - 3$. Resto: $-x - 3$

d) Cociente: $2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$. Resto: $2x + \frac{3}{2}$

71. Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(2x^4 - x^3 - x + 4) : (x - 3)$

b) $(-2x^4 - 3x^2 + 5x + 3) : (x + 2)$

c) $(-3x^3 + 2x^2 + x - 3) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $(2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2) : (-x + 3)$

a) Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 15x + 44$. Resto: 136

b) Cociente: $-2x^3 + 4x^2 - 11x + 27$. Resto: -51

c) Cociente: $-3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{4}$. Resto: $-\frac{21}{8}$

d) Cociente: $-2x^3 - 8x^2 - 26x - 78$. Resto: 232

72. Aplicando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de la siguiente división $(x^8 - a^8) : (x - a)$.

Cociente: $x^7 + ax^6 + a^2x^5 + a^3x^4 + a^4x^3 + a^5x^2 + a^6x + a^7$ Resto: 0

Teorema del resto y del factor

73. Sin realizar las divisiones, calcula su resto.

a) $(x^7 + x^3 - 2x + 1) : (x - 3)$

b) $(x^{12} - x^5 - x + 12) : (x + 1)$

a) $R = 3^7 + 3^3 - 6 + 1 = 2209$

b) $R = (-1)^{12} - (-1)^5 - (-1) + 12 = 15$

74. Sin realizar la división, comprueba que el binomio $x - 3$ es un factor del polinomio $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x - 6$.

El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = 3$ es 0, por lo que se deduce que $x - 3$ es un factor del polinomio.

75. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = 6x^5 - 44x^3 - 88x - k$ sea divisible por $x - 3$.

Dado que $P(x)$ es divisible por $x - 3$, se debe verificar que el valor numérico de $P(x)$ para $x = 3$ sea igual a 0.

$P(3) = 1458 - 1188 - 264 - k = 0 \Rightarrow k = 6$

76. Halla el valor de k para el que el polinomio $P(x) = 3x^3 - kx^2 + 6k - 2$ sea divisible por $x + 2$.

Dado que $P(x)$ es divisible por $x + 2$, se debe verificar que el valor numérico de $P(x)$ para $x = -2$ sea igual a 0.

$P(-2) = -24 - 4k + 6k - 2 = 0 \Rightarrow k = 13$

77. La división de $x^3 + mx + 2$ entre $x - 2$ da 6 como resto. ¿Cuánto vale m? ¿Cuál es el cociente?

$2^3 + 2m + 2 = 6$, por lo que $m = 2$, y el cociente es $x^2 + 2x + 2$.

78. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $x = 1$ y que $P(3) = 10$.

Para que $x = 1$ sea una raíz, debe ser $P(x) = (ax + b)(x - 1)$, y como $P(3) = 10$, entonces $(3a + b)(3 - 1) = 10$, luego $3a + b = 5$. Por ejemplo, $a = 1$, $b = 2$.

$P(x) = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

79. Halla la expresión de todos los polinomios de segundo grado que tienen por raíces –1 y 3. Determina aquel cuyo valor numérico para x = 5 es 24.

$P(x) = a(x + 1)(x - 3)$ $P(5) = a \cdot 6 \cdot 2 = 24$, por lo que $a = 2$ $P(x) = 2(x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$

80. Halla el número que hay que sumar al polinomio $x^3 - 2x^2 - 5x$ para que sea divisible por $(x - 3)$.

Se trata de hallar a para que $3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + a = 0$. Resolviendo, se tiene que $a = 6$.

81. Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^5 + ax^3 + b$ sea divisible por $(x^2 - 1)$.

Como $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, el polinomio debe ser divisible por $(x - 1)$ y por $(x + 1)$, es decir: $1^5 + a \cdot 1^3 + b = 0$ y $(-1)^5 + a(-1)^3 + b = 0$

$$\left.\begin{aligned} a + b &= -1 \\ -a + b &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = -1,\ b = 0$$

Factorización de polinomios

82. Encuentra las raíces del siguiente polinomio, teniendo en cuenta que todas ellas son números enteros.

$$\boldsymbol{P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24}$$

$x = 2$, $x = -3$, $x = 4$

83. Escribe un polinomio $P(x)$ cuyas raíces sean únicamente $x = -2$, $x = 5$, $x = 3$ y $x = -1$. ¿Hay más de uno?

Por ejemplo: $P(x) = (x + 2)(x - 5)(x - 3)(x + 1)$

Sí hay más de uno, pues se puede multiplicar por constantes, cambiar las multiplicidades de los factores o polinomio sin raíces reales sin que varíen las raíces.

84. Factoriza, utilizando la regla de Ruffini.

a) $x^3 - 5x^2 - x + 5$
b) $x^3 - 3x + 2$
c) $x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 27x^2 - 32x + 12$
d) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
e) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
f) $x^3 + x^2 - 5x + 3$
g) $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$

a) $(x - 1)(x + 1)(x - 5)$
b) $(x - 1)^2(x + 2)$
c) $(x - 1)^2(x + 3)(x - 2)^2$
d) $(x + 1)^4$
e) $(x - 3)(x + 2)(x - 1)$
f) $(x - 1)^2(x + 3)$
g) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$

85. Descompón en factores primos los siguientes polinomios.

a) $x^6 - 2x^5 - x^3 + 2x^2$
b) $2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 3$
c) $10x^4 - 7x^3 - 19x^2 + 19x - 3$
d) $3x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 11x^2 - 4x - 4$
e) $-2x^3 + 10x^2 - 14x + 6$

a) $x^2(x - 2)(x - 1)(x^2 + x + 1)$
b) $(x - 1)(x + 1)^2(2x - 3)$
c) $(x - 1)^2(2x + 3)(5x - 1)$
d) $(x - 2)(x + 1)(x + 2)(3x^2 + 1)$
e) $-2(x - 3)(x - 1)^2$

86. Factoriza los siguientes polinomios utilizando las identidades notables.

a) $4x^2-12x+9$ **d)** $25x^2-20x+4$ **g)** $25x^2+20xy+4y^2$ **j)** $4x^4-16x^2y+16y^2$

b) $18-2x^2$ **e)** $12-3x^2$ **h)** $-4y^2+25x^6$ **k)** $4x^3-9y^4x$

c) x^4-4x^2 **f)** $\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}$ **i)** $4x^2+12xy+9y^2s$ **l)** $a^2-(b+c)^2$

a) $(2x-3)^2$ **d)** $(5x-2)^2$ **g)** $(5x+2y)^2$ **j)** $(2x^2-4y)^2$

b) $2(3-x)(3+x)$ **e)** $3(2-x)(2+x)$ **h)** $(5x^3-2y)(5x^3+2y)$ **k)** $(2x-3y^2)(2x+3y^2)x$

c) $x^2(x-2)(x+2)$ **f)** $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}\right)^2$ **i)** $(2x+3y)^2$ **l)** $(a-b-c)(a+b+c)$

87. Descompón en factores los siguientes polinomios.

a) $x^2+y^2+2xy-z^2$ **b)** $4-9x^2-25y^2+30xy$

a) $(x+y)^2-z^2=(x+y-z)(x+y+z)$ **b)** $2^2-(3x-5y)^2=(2-3x+5y)(2+3x-5y)$

88. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios.

a) $P(x)=x^2+x-2$, $Q(x)=x^2+2x-3$

b) $P(x)=2x^2-2$, $Q(x)=4x-4$

c) $P(x)=x-1$, $Q(x)=2x+2$ y $R(x)=3x^2-3$

d) $P(x)=x^2(x-2)$, $Q(x)=x(x^2-4)$ y $R(x)=x^3-2x^2$

e) $P(x)=x^2+5x+6$, $Q(x)=x^2-4$ y $R(x)=x+2$

a) m.c.d. $=x-1$; m.c.m. $=(x-1)(x+2)(x+3)$

b) m.c.d. $=2x-2$; m.c.m. $=4(x-1)(x+1)$

c) m.c.d. $=1$; m.c.m. $=6(x-1)(x+1)$

d) m.c.d. $=x(x-2)$; m.c.m. $=x^2(x-2)(x+2)$

e) m.c.d. $=x+2$; m.c.m. $=(x+3)(x+2)(x-2)$

Fracciones algebraicas

89. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\frac{7x^2}{14x^2-21x}$ **d)** $\frac{3x^2-x}{x^3+2x}$ **g)** $\frac{x^3-x^2-8x+12}{x^2+x-6}$ **j)** $\frac{x^4+10x^3+21x^2-40x-100}{x^4+3x-10}$

b) $\frac{12-3x}{x-4}$ **e)** $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$ **h)** $\frac{x^4-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

c) $\frac{3x^2-12}{x+2}$ **f)** $\frac{-2x^4+5x^3-5x+2}{2x^4+7x^3+3x^2-8x-4}$ **i)** $\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-x^2-8x+12}$

a) $\frac{7x^2}{7x(2x-3)}=\frac{x}{2x-3}$

b) $\frac{-3(x-4)}{x-4}=-3$

c) $\frac{3(x-2)(x+2)}{x+2}=3(x-2)$

d) $\frac{x(3x-1)}{x(x^2+2)}=\frac{3x-1}{x^2+2}$

e) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+3)}=\frac{x+2}{x+3}$

f) $\frac{-(x+1)(x-1)(x-2)(2x-1)}{(x-1)(x+2)^2(2x+1)}=-\frac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x+2)^2(2x+1)}$

g) $\frac{(x+3)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)}=x-2$

h) $\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{x+1}{x-1}$

i) $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)^2}=\frac{x-1}{x+3}$

j) $\frac{(x+2)(x-2)(x+5)^2}{(x+2)(x^3-2x^2+4x-5)}=\frac{(x-2)(x+5)^2}{(x^3-2x^2+4x-5)}$

90. Halla, simplificando el resultado.

a) $x+1+\dfrac{1}{x-1}$ b) $2x-\dfrac{2x^2-1}{2+x}$

a) $\dfrac{x^2}{x-1}$ b) $\dfrac{4x+1}{2+x}$

91. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas y simplifica todo lo posible los resultados.

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}$ c) $\dfrac{2x^2-x}{x+3}+\dfrac{2x}{x-3}+\dfrac{12x}{9-x^2}$

b) $\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x-1}{x+5}-\dfrac{50}{x^2-25}$ d) $t-\dfrac{t^2}{t-1}+\dfrac{1}{t+1}$

a) $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}+\dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{x^2+1+x^3+x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{x(x+5)-(2x-1)(x-5)-50}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{x^2+5x-2x^2+10x+x-5-50}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{-x^2+16x-55}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{(11-x)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\dfrac{11-x}{x+5}$

c) $\dfrac{(2x^2-x)(x-3)+2x(x+3)-12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^3-6x^2-x^2+3x+2x^2+6x-12x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{2x^3-5x^2-3x}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{2x^2+x}{x+3}$

d) $\dfrac{t^3-t-t^3-t^2+t-1}{(t-1)(t+1)}=\dfrac{-t^2-1}{t^2-1}=-\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$

92. Realiza los siguientes productos y cocientes de fracciones algebraicas y simplifica todo lo posible los resultados.

a) $\dfrac{x^2-1}{x+3}\cdot\dfrac{x^2-4}{x-1}\cdot\dfrac{x^2-9}{x+2}$ b) $\dfrac{x^3-x}{2x-4}:\dfrac{4x+4}{3x-6}$ c) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right):\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ d) $\left(\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}\right):\left(\dfrac{1+x}{1-x}:\dfrac{x+1}{x}\right)$

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+2)}=(x+1)(x-2)(x-3)=x^3-4x^2+x+6$

b) $\dfrac{x(x-1)(x+1)\cdot 3(x-2)}{2(x-2)\cdot 4(x+1)}=\dfrac{3x(x-1)}{8}=\dfrac{3x^2-3x}{8}$

c) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right):\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)=\dfrac{(x+1)x^2}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{x}{x-1}$

d) $\dfrac{(x-1)^3(x+1)}{x(x+1)^3}=\dfrac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}$

93. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$ b) $\dfrac{x^4-y^4}{(x-y)^2}$ c) $\dfrac{x^4-16}{(x+2)^2}$ d) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$

a) $\dfrac{(x-y)(x+y)}{x+y}=x-y$

c) $\dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x+2)^2}=\dfrac{(x-2)(x^2+4)}{x+2}=\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x+2}$

b) $\dfrac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)^2}=\dfrac{(x+y)(x^2+y^2)}{x-y}=\dfrac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{x-y}$

d) $\dfrac{\dfrac{y^2-x^2}{x^2y^2}}{\dfrac{y-x}{xy}}=\dfrac{xy(y-x)(y+x)}{x^2y^2(y-x)}=\dfrac{y+x}{xy}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$

94. Calcula el valor de *k* para que, al simplificar la fracción algebraica $\dfrac{3+\dfrac{x-9}{x-1}}{k-\dfrac{x+1}{x-1}}$, resulte un polinomio de primer grado. Escribe la expresión de dicho polinomio.

$$\frac{3+\dfrac{x-9}{x-1}}{k-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{3x-3+x-9}{x-1}}{\dfrac{kx-k-x-1}{x-1}}=\frac{(4x-12)(x-1)}{\left((k-1)x-(k+1)\right)(x-1)}=\frac{4x-12}{(k-1)x-(k+1)}$$

El denominador debe ser constante, por tanto: $k = 1$, y el polinomio será: $\dfrac{4x-12}{-2}=-2x+6$.

Síntesis

95. Halla un polinomio de segundo grado que verifique las tres condiciones siguientes.

- **El coeficiente del término cuadrático es la unidad.**
- **Es divisible por x – 1.**
- **Toma el valor 24 para x = –3.**

Ya que el coeficiente de x^2 es 1 y que el polinomio es de segundo grado y divisible por $x - 1$, tendrá la forma: $P(x) = (x - 1)(x + a)$. Para que quede totalmente determinado, sólo es necesario calcular a.

Dado que $P(-3) = 24$, se obtiene que $a = -3$, luego $P(x) = (x - 1)(x - 3)$.

96. Escribe un polinomio de segundo grado que verifique las tres condiciones siguientes.

- **Es divisible por $x - 3$.**
- **Es divisible por $x + 4$.**
- **El valor numérico en el punto $x = -1$ vale 12.**

Según el teorema del factor, el polinomio debe tener como factores $x - 3$ y $x + 4$. Por tanto, la expresión del polinomio será de la forma $P(x) = k(x + 4)(x - 3)$, y como $P(-1) = 12$, tenemos que $k = -1$, luego $P(x) = -x^2 - x + 12$

97. Escribe un polinomio de cuarto grado que tenga por raíces:

a) 1, –2, 3 y –4 **b)** 1, 2 y –2 (doble) **c)** –1 y 1, las dos dobles

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)^2 = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

c) $(x - 1)^2(x + 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

98. Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 + bx^2 - 3x$, sabiendo que $x = 1$ es una de sus raíces.

Como $x = 1$ es una raíz, entonces $1^3 + b \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 0$, de donde $b = 2$ y $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$, cuya factorización es $P(x) = x(x - 1)(x + 3)$.

99. Dado el polinomio: $P(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 8x + a$:

a) Calcula el valor de a para que $P(-1) = -2$.

b) Para el valor de a hallado, descompón el polinomio como producto de factores de primer grado.

c) Calcula las raíces enteras de $P(x)$

a) $P(-1) = 2 - 9 + 9 + 8 + a = -2$, luego $a = -12$

b) $P = (x - 1)(x + 2)^2(2x + 3)$

c) $x = 1$, $x = -2$ y $x = -\dfrac{3}{2}$ (que no es entera)

100. Halla en cada caso el polinomio *P*(*x*) para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\dfrac{x+2}{2x-5}=\dfrac{x+3}{P(x)}$ **b)** $\dfrac{P(x)}{x^2+2x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}$

a) $P(x)=\dfrac{(x+3)(2x-5)}{x+2}$, que no se puede simplificar, $P(x)$ no puede ser un polinomio.

b) $P(x)=\dfrac{x^2(x^2+2x+1)}{(x+1)}=\dfrac{x^2(x+1)^2}{x+1}=x^2(x+1)=x^3+x^2$

101. Calcula los valores de *a* y de *b* para que el polinomio $4x^3+4x^2+ax+b$ sea divisible por $2x^2-x-1$. Escribe el cociente de la división.

$$\frac{4x^3+4x^2+ax+b}{2x^2-x-1}=2x+3+\frac{(a+5)x+(b+3)}{2x^2-x-1}\Rightarrow\begin{cases}a+5=0\\b+3=0\end{cases}\Rightarrow a=-5\ \ b=-3$$

102. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{(2x-1)(x+3)^2-3(x^2-x)(x+3)}{(x+3)^3}$ **b)** $\dfrac{(4x^2-2x^3)\cdot 6x}{x^2(x-2)}$

a) $\dfrac{-x^3+5x^2+21x-9}{(x+3)^2}=\dfrac{-(x+3)(x^2-8x+3)}{(x+3)^3}=-\dfrac{x^2-8x+3}{(x+3)^2}$ **b)** $\dfrac{-2x^2(x-2)6x}{x^2(x-2)}=-12x$

103. Calcula y simplifica la siguiente expresión.

$$\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{x-1}{x-1}}{\dfrac{1+x}{1+x}-\dfrac{x+1}{x-1}}$$

$$\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{x-1}{x-1}}{\dfrac{1+x}{1+x}-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{1-x}{1+x}+1}{1-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{\dfrac{2}{1+x}}{-\dfrac{2}{x-1}}=\frac{1-x}{1+x}$$

104. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas con dos variables.

b) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{a}{xz}+\dfrac{a^2}{yz}$ **c)** $\left(x+\dfrac{(x-1)^2}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{2}$ **e)** $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$

c) $\dfrac{1}{x-y}:\dfrac{1}{x^2+y^2-2xy}$ **d)** $\dfrac{3x^2y}{x-y}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}$ **f)** $(a-b)^2:\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

a) $\dfrac{z+ay+a^2x}{xyz}$

b) $\dfrac{x^2+y^2-2xy}{x-y}=\dfrac{(x-y)^2}{x-y}=x-y$

c) $\left(\dfrac{2x-x^2+x^2+1-2x}{2-x}\right)\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{1}{2-x}\cdot\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{3x^2y(x-y)(x+y)}{(x-y)6xy^2(x+y)}=\dfrac{x}{2y}$

e) $\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2+a^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{4ab+a^2}{(a-b)(a+b)}$

f) $(a-b)^2:\left(\dfrac{b-a}{ab}\right)=\dfrac{(a-b)^2\,ab}{(b-a)}=(b-a)ab=ab^2-a^2b$

105. Dadas las expresiones: $A = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+x}}}$ $\quad B = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+x}}}}$

a) Simplifícalas, expresando el resultado como cociente de polinomios.

b) Súmalas.

c) Multiplícalas.

a) $A = \dfrac{3x+5}{2x+3}$, $B = \dfrac{5x+8}{3x+5}$ **b)** $A + B = \dfrac{3x+5}{2x+3} + \dfrac{5x+8}{3x+5} = \dfrac{19x^2+61x+49}{6x^2+19x+15}$ **c)** $AB = \dfrac{3x+5}{2x+3} \cdot \dfrac{5x+8}{3x+5} = \dfrac{5x+8}{2x+3}$

CUESTIONES

106. Escribe dos polinomios diferentes que tengan las mismas raíces:

a) Si son del mismo grado. **b)** Si tienen diferente grado

a) $P(x) = 2x + 3$ $Q(x) = 4x + 6$ **b)** $P(x) = 2x + 3$ $Q(x) = 4x^2 + 12x + 9$

107. Di si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes.

a) Un polinomio de tercer grado puede tener seis raíces reales distintas.

b) Un polinomio de tercer grado puede tener una única raíz real.

c) La suma de dos polinomios de cuarto grado puede dar como resultado un polinomio de tercer grado.

d) El producto de dos polinomios de cuarto grado puede dar como resultado un polinomio de tercer grado.

e) Las fracciones algebraicas $A(x) = \dfrac{x+1}{x}$ y $B(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$ son equivalentes.

f) Las fracciones algebraicas $A(x) = \dfrac{x+1}{x}$ y $B(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x}$ son exactamente iguales.

a) Falso. Como máximo puede tener tres raíces reales distintas

b) Verdadero: $P(x) = (x + 1)(x^2 + 1)$

c) Verdadero: $P(x) = x^4 + x^3$ $Q(x) = -x^4 + 1$ $P(x) + Q(x) = x^3 + 1$

d) Falso. El producto es siempre de octavo grado.

e) Verdadero: $(x + 1)(x^2 - x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$

f) Falso. Para $x = 1$ $A(x) = 2$ y $B(x)$ no está definida.

108. Indica cuáles de las siguientes expresiones algebraicas son polinomios. En caso afirmativo, indica el grado del mismo.

a) $A(x) = -2x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - 3$ **b)** $B(x) = -3x^2 - 2x + \dfrac{1}{x}$ **c)** $C(x) = 2x^5 - \dfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{2}x$ **d)** $C(x) = 2x^5 - \dfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{2x}$

a) Polinomio de grado 2. **b)** No es un polinomio. **c)** Polinomio de grado 5. **d)** No es un polinomio.

109. Demuestra que el polinomio $P(x) = ax^3 + ax^2 + a$ con $a > 0$ no tiene ninguna raíz real positiva.

Si $x = r > 0$ es una raíz real positiva, entonces $P(r) = a(r^3 + r^2 + 1) = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + 1 = 0$.

Pero si $r > 0$, entonces $r^3 + r^2 + 1 > 1$. Por lo tanto, no puede ser nulo.

110. Demuestra esta igualdad algebraica. $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

$$((x+y)+z)^2 = (x+y)^2 + z^2 + 2(x+y)z = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

PROBLEMAS

111. Escribe expresiones algebraicas para las siguientes situaciones.

a) El perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide x.

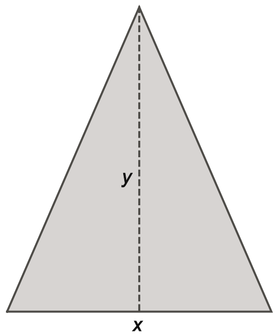
b) La suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos, siendo n el primero de ellos.

c) El perímetro de un triángulo isósceles donde el lado desigual mide x y la altura y.

a) Sea a la medida del lado del cuadrado: $x^2 = a^2 + a^2$, y despejando a, $a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, luego $P = 4a = 2\sqrt{2}\,x$.

b) Sean n, $n+2$ y $n+4$ los números consecutivos. Entonces: $S = n^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2 = 3n^2 + 12n + 20$

c)



Cada uno de los lados iguales es:

$$l = \sqrt{y^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4y^2+x^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2+x^2}\,.$$

Por tanto: $P = 2l + x = 2\,P = 2l + x = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4y^2+x^2} + x = \sqrt{4y^2+x^2} + x$

112. Se consideran todos los triángulos rectángulos tales que las medidas de sus catetos son dos números que se diferencian en dos unidades. Escribe una expresión que permita calcular el perímetro de dichos triángulos si *b* es el cateto mayor.

Sean b y $b-2$ las medidas de los catetos. Utilizando el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{b^2+(b-2)^2}$. Luego:

$$P = b + b - 2 + \sqrt{b^2+(b-2)^2} = 2b - 2 + \sqrt{2b^2 - 4b + 4}$$

113. Si *x* e *y* son dos números, expresa algebraicamente:

a) El primero más el cuadrado del segundo.

b) El primero por el cuadrado del segundo.

c) El producto del primero por el inverso del segundo.

d) Sabiendo que $x + y = 5$, expresa las relaciones anteriores dependiendo solo del número x.

e) Si $xy = 10$, halla el valor de $\frac{x^2+y^2-(x+y)^2}{5}$.

a) $x + y^2$ **b)** xy^2 **c)** $x\frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

d) $x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$: $x + y^2 = x + (5-x)^2 = x^2 - 9x + 25$ $xy^2 = x(5-x)^2 = x^3 - 10x^2 + 25x$ $\frac{x}{y} = \frac{x}{5-x}$

e) $xy = 10 \rightarrow \frac{x^2+y^2-(x+y)^2}{5} = \frac{x^2+y^2-x^2-y^2-2xy}{5} = \frac{-2xy}{5} = \frac{-2\cdot 10}{5} = -4$

114. Halla las expresiones algebraicas que dan el producto de:

a) Tres números naturales consecutivos.

b) Tres números pares consecutivos.

c) Tres múltiplos de cinco consecutivos.

a) $n(n+1)(n+2)$ **b)** $2n(2n+2)(2n+4)$ **c)** $5n(5n+5)(5n+10)$

115. La altura en metros de un cohete viene dada por la expresión $h(t) = 60t - 5t^2$, en la que t mide el tiempo en segundos.

a) ¿Qué altura alcanza el cohete al cabo de 1, 3, 6 y 8 segundos? ¿Y al cabo de 12?

b) Interpreta los resultados.

a) $h(1) = 60 - 5 = 55$ m; $h(3) = 180 - 45 = 135$ m; $h(6) = 360 - 180 = 180$ m; $h(8) = 160$ m, $h(12) = 0$ m

b) El cohete asciende durante los primeros 6 s, momento en el que comienza a caer, llegando al suelo a los 12 s.

116. Se considera un rectángulo de 20 metros de base y 12 de altura.

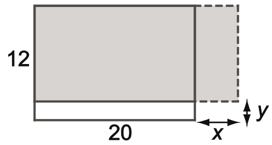
a) Escribe la expresión algebraica que determina el área de un nuevo rectángulo que se obtiene al incrementar la medida de la base en x metros y disminuir su altura en y metros.

b) Calcula el área del rectángulo obtenido al aumentar la base en 2 m y disminuir la altura en 4 m.

a) Las medidas del nuevo rectángulo son $20 + x$ y $12 - y$.

Por tanto, su área se puede escribir como: $S = (20 + x)(12 - y)$.

b) Para los valores indicados: $S = (20 + 2)(12 - 4) = 176$ m^2.



117. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 4 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 16 €, y el de tramo vertical, 25 €. Expresa el coste del marco en función de la longitud, x, del tramo horizontal.

Como el área es 4, la longitud del tramo horizontal es x y la longitud del tramo vertical es $\frac{4}{x}$.

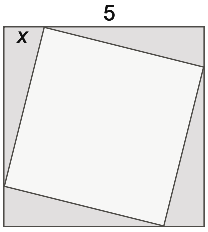
El coste es $C(x) = 16 \cdot 2x + 25 \cdot 2 \cdot \frac{4}{x} = 32x + \frac{200}{x} = \frac{32x^2 + 200}{x}$.

118. Halla la expresión algebraica que da la superficie de un triángulo isósceles de perímetro 8 cm en función de la base, x. ¿Cuánto vale su área si $x = 2$ cm?

Como el perímetro es 8 y la base es x, los lados iguales miden $4 - \frac{x}{2}$, y aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que la altura es $\sqrt{\left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 4x}$, por lo que la superficie es $S(x) = \frac{x}{2}\sqrt{16 - 4x}$ cm^2.

Sustituyendo en $x = 2$ se tiene que $S(2) = \frac{2}{2}\sqrt{16 - 8} = 2\sqrt{2}$ cm^2.

119. En un cuadrado de lado 5 unidades de longitud se marcan cuatro puntos, uno en cada lado, de forma que su distancia al vértice más próximo es de *x* unidades. Estos cuatro puntos forman un nuevo cuadrado tal y como muestra la figura.



a) Escribe una expresión algebraica que determine el perímetro del nuevo cuadrado.

b) Escribe una expresión algebraica que determine el área del nuevo cuadrado.

Lado del nuevo cuadrado: $L=\sqrt{x^2+(5-x)^2}=\sqrt{x^2+25+x^2-10x}=\sqrt{2x^2-10x+25}$

a) $P(x)=4\sqrt{2x^2-10x+25}$ **b)** $A(x)=L^2=2x^2-10x+25$

120. En la siguiente tabla aparece el número de CD que está dispuesto a comprar un cliente en función del precio de cada uno.

Precio en céntimos	Número de unidades
24	50
22	60
20	70
18	80

a) Establece una expresión algebraica que determine el precio de cada CD si se adquieren *x* unidades.

b) Establece una expresión algebraica que determine el precio total a pagar al comprar *n* CD (*n* comprendido entre 50 y 80).

a) El precio que se paga por cada CD es: $p(x)=24-2\cdot\frac{x-50}{10}=24-\frac{x-50}{5}=24-\frac{x}{5}+10=34-\frac{x}{5}$

b) $P(n)=n\left(34-\frac{n}{5}\right)=34n-\frac{n^2}{5}$

121. El coste de producir *x* chips de memoria para ordenador (*x* entre 0 y 5) viene dado por el polinomio $C(x)=-\frac{4}{5}x^2+8x$ €. El precio por unidad al que se pueden vender las *x* unidades producidas es de $P(x)=-\frac{1}{2}x^2+20$ €.

a) Indica los ingresos que se obtienen al producir y vender 2 unidades.

b) Escribe el polinomio que determina el beneficio según las *x* unidades producidas y vendidas.

c) Indica el beneficio si se han producido y vendido 3 unidades.

d) Indica el beneficio si se han producido y vendido 5 unidades.

e) Interpreta los resultados.

a) $2P(2)-C(2)=2\left(-\frac{1}{2}\cdot 2^2+20\right)-\left(-\frac{4}{5}\cdot 2^2+8\cdot 2\right)=23{,}2$ €

b) $B(x)=\text{Ingreso}-\text{Coste}=\left(-\frac{1}{2}x^2+20\right)x-\left(-\frac{4}{5}x^2+8x\right)=-\frac{1}{2}x^3+20x+\frac{4}{5}x^2-8x=-\frac{1}{2}x^3+\frac{4}{5}x^2+12x$

c) $B(3)=-\frac{1}{2}\cdot 27+\frac{4}{5}\cdot 9+12\cdot 3=29{,}7$ €

d) $B(5)=-\frac{1}{2}\cdot 125+\frac{4}{5}\cdot 25+12\cdot 5=17{,}5$ €

e) Se obtienen mayores beneficios si se producen 3 unidades de memoria que si se producen 5.

122. Se consideran tres barras homogéneas de metal compuestas de la siguiente forma:

- **Primera barra: 30 g de oro, 45 g de plata y 75 g de cobre**
- **Segunda barra: 60 g de oro, 30 g de plata y 135 g de cobre**
- **Tercera barra: 45 g de oro, 60 g de plata y 75 g de cobre**

¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una de las barras para obtener otra que contenga 64,5 g de oro, 69 g de plata y 136,5 de cobre?

Sean x, y, z los gramos de la primera, segunda y tercera barra respectivamente.

	Oro	Plata	Cobre
Primera barra	$\frac{30}{150}=\frac{2}{10}$	$\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$	$\frac{75}{150}=\frac{5}{10}$
Segunda barra	$\frac{60}{225}=\frac{4}{15}$	$\frac{30}{225}=\frac{2}{15}$	$\frac{135}{225}=\frac{9}{15}$
Tercera barra	$\frac{45}{180}=\frac{3}{12}$	$\frac{60}{180}=\frac{4}{12}$	$\frac{75}{180}=\frac{5}{12}$

$$\begin{cases} \frac{2}{10}x+\frac{4}{15}y+\frac{3}{12}z=64,5 \\ \frac{3}{10}x+\frac{2}{15}y+\frac{4}{12}z=69 \\ \frac{1}{2}x+\frac{9}{15}y+\frac{5}{12}z=136,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x+16y+15z=3870 \\ 18x+8y+20z=4140 \\ 30x+36y+25z=8190 \end{cases} \Rightarrow x=90, y=90, z=90$$

Se deberán tomar 90 g de la primera barra, 90 g de la segunda barra y 90 g de la tercera barra.

123. Un comerciante adquiere dos tipos de café para tostar, moler y, posteriormente, mezclar. El de mayor calidad tiene un precio de 10 €/kg, mientras que por el otro pagó 7,50 €/kg. El comerciante quiere obtener una mezcla que salga a 8,40 €/kg. ¿Cuál deberá ser la proporción de los tipos de cafés?

Sean x los kg de café de mayor calidad e K los kg de café de menor calidad. Entonces:

$10x+7,5y=8,4(x+y)$. Por tanto, $10x+7,5y=8,4x+8,4y \Rightarrow 1,6x-0,9y=0 \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{0,9}{1,6}=\frac{9}{16}$.

Deberá mezclar 9 partes del café de mayor calidad con 16 partes del café de inferior calidad.

124. Expresa algebraicamente el producto de un número por el cubo de otro si entre ambos suman 24.

Como entre los dos números suman 24, si uno es x, el otro es $24 - x$, por lo que su producto es $x(24-x)^3$.

125. Los costes, en euros, de fabricar x pares de zapatillas deportivas vienen dados por la expresión:

$$C(x) = -\frac{4}{25}x^2 + 70x + 600$$

a) Calcula el coste total que supone fabricar 50 pares de zapatillas.

b) Indica cuáles son los costes fijos.

c) Indica cuáles son los costes variables.

d) Indica cuáles son los costes totales para cada par de zapatillas cuando se fabrican x pares.

e) Indica cuáles son los costes variables para cada par de zapatillas cuando se fabrican x pares.

f) Indica cuáles son los costes totales por cada par de zapatillas cuando se fabrican 75 pares.

a) $C(50) = -\frac{4}{25} \cdot 2500 + 70 \cdot 50 + 600 = 3700$ €

b) Los costes fijos no dependen de la producción, vienen dados por el término independiente: $C_f = 600$ €.

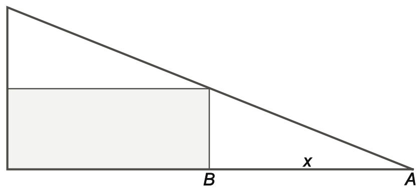
c) Los costes variables son el total de costes menos los costes fijos, por tanto: $C_v = -\frac{4}{25}x^2 + 70x$.

d) $\frac{C(x)}{x} = \frac{-\frac{4}{25}x^2 + 70x + 600}{x} = -\frac{4}{25}x + 70 + \frac{600}{x}$

e) $\frac{C_v(x)}{x} = \frac{-\frac{4}{25}x^2 + 70x}{x} = -\frac{4}{25}x + 70$

f) $\frac{C(75)}{75} = \frac{-\frac{4}{25} \cdot 75^2 + 70 \cdot 75 + 600}{75} = 66$ €

126. Un rectángulo se encuentra inscrito en un triángulo rectángulo de catetos 8 y 20 cm tal y como muestra la figura.



a) Escribe la expresión algebraica que determina el área del rectángulo suponiendo que la distancia entre los puntos A y B es de x metros.

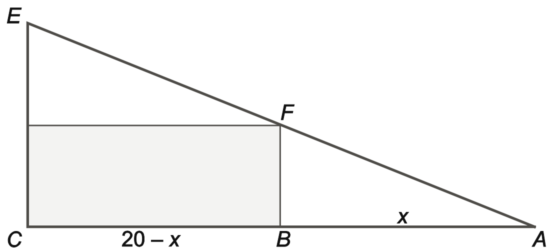
b) Calcula los valores numéricos de la expresión anterior para $x = 2$, $x = 5$ y $x = 10$.

a) Los triángulos ABF y ACE son semejantes y, por tanto, verifican el teorema de Tales:

$$\frac{x}{FB} = \frac{20}{8} \Rightarrow FB = \frac{2x}{5}$$

El área del rectángulo será:

$$S = (20 - x) \cdot \frac{2x}{5} = \frac{40x - 2x^2}{5} \text{ cm}^2$$



b)

$$S(2) = \frac{80 - 8}{5} = \frac{72}{5} = 14{,}4 \text{ cm}^2$$

$$S(5) = \frac{200 - 50}{5} = \frac{150}{5} = 30 \text{ cm}^2$$

$$S(10) = \frac{400 - 200}{5} = \frac{200}{5} = 40 \text{ cm}^2$$

ENTORNO MATEMÁTICO

Álgebra, zombis, alienígenas y lechugas

La empresa de animación digital FRIKACTION comercializa tres videojuegos: Frikaction 1 en la que unas cucarachas deben luchar contra una plaga de zombis, Frikaction 2 en la que se utilizan lechugas para acabar con los alienígenas que han invadido la Tierra, y Frikfashion en la que se utilizan tomates y otras hortalizas para adornar modernas ciudades.

La siguiente tabla muestra los datos del negocio:

Mantenimiento del local y otros costes fijos			1250 € por día
	Frikaction 1	Frikaction 2	Frikfashion
Precio de venta por unidad	45	39	30
Costes de fabricación por unidad	25	21	21

Un estudio de mercado ha demostrado que las preferencias de los jugadores se reparten de manera desigual; la segunda parte del juego Frikaction cumple con la premisa de que "segundas partes nunca fueron buenas" y no ha tenido tanta aceptación como la primera parte, mientras que el juego Frikfashion no ha sido bien acogido por los jugadores. De tal modo que, por cada tres unidades vendidas de Frikaction 1, se venden dos unidades de Frikaction 2 y una de Frikfashion.

Suponiendo que se producen y venden *x* unidades diarias del juego Frikaction 1 y que del resto de juegos se fabrican y venden en la proporción estimada por el estudio:

a) Calcula la expresión algebraica que proporciona los costes totales.

b) Calcula los ingresos totales.

c) Calcula el beneficio de la empresa y halla el beneficio para los casos específicos de $x = 25$ y $x = 100$ e interpreta los resultados.

a) $C(x) = 1250 + 25x + 21\cdot\frac{2}{3}x + 21\cdot\frac{x}{3} = 1250 + 25x + 14x + 7x = 1250 + 46x$

b) $I(x) = 45x + 39\cdot\frac{2}{3}x + 30\cdot\frac{x}{3} = 45x + 26x + 10x = 81x$

c) $B(x) = I(x) - C(x) = 35x - 1250$ $B(25) = -375$ € de pérdidas. $B(100) = 2250$ € de beneficios.

Para $x = 25$ hay pérdidas y para $x = 100$ hay beneficios.

Las cajas

La empresa FRIKACTION ha decidido asumir la fabricación de las cajas para guardar y enviar a las tiendas de venta los lotes de juegos que comercializa. Para ello utiliza planchas de cartón de 84 cm de largo y 56 cm de ancho.

Para construir la caja, el procedimiento que han implementado en la empaquetadora consiste en recortar cuatro cuadrados iguales en las cuatro esquinas y ajustarlos tal y como muestra la figura.

a) Calcula expresiones algebraicas que determinen la superficie y el volumen de la caja sin tapa que se obtiene en función del lado x de los cuadrados recortados.

b) Elabora una hoja de cálculo tal que muestre la superficie y el volumen de la caja para diferentes valores de *x*.

c) Con ayuda de la hoja de cálculo anterior, establece la longitud *x* que hace que el volumen de la caja sea máximo. ¿Cuánto vale la superficie en este caso?

a) $S(x) = 56\cdot 84 - 4x^2 = 4704 - 4x^2$ $V(x) = (84-2x)(56-2x)x = 4x^3 - 280x^2 + 4704x$

b)

x	7	8	9	10	10,97	10,98	10,99	11	12
Superficie	4508	4448	4380	4304	4222,6397	4221,7584	4220,8798	4220	4128
Volumen	20508	21760	22572	23040	23187,98669	23188,02077	23188,0252	23188	23040

c) El máximo volumen se obtiene al cortar cuadrados de lado 10,98 cm. La superficie aproximada, en este caso, es de 4221,76 cm^2

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula y simplifica.

a) $\left(2x^2-3x+1\right)\left(-x^2+2x-2\right)-2\left(2x-3\right)^2$

b) $2\left(3x-5\right)^2-3(3x-5)(3x+5)-2(3x+5)^2$

c) $2(2x+1)^3+3(2x+1)^2$

d) $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{5}\right)\left(3x^2+\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2$

a) $\left(2x^2-3x+1\right)\left(-x^2+2x-2\right)-2\left(2x-3\right)^2=-2x^4+7x^3-19x^2+32x-20$

b) $2\left(3x-5\right)^2-3(3x-5)(3x+5)-2(3x+5)^2=-27x^2-120x+75$

c) $2(2x+1)^3+3(2x+1)^2=16x^3+36x^2+24x+5$

d) $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{5}\right)\left(3x^2+\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x-1\right)^2=\frac{9}{2}x^4+\frac{51}{160}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{33}{50}$

2. Divide los polinomios:

a) $\left(6x^4-11x^3+14x^2+x-10\right):\left(3x^2-x-2\right)$

b) $\left(3x^4-4x^3+17x^2-4x-12\right):\left(x^2-x+6\right)$

a) Cociente: $2x^2-3x+5$. Resto: 0

b) Cociente: $3x^2-x-2$. Resto: 0

3. Factoriza los polinomios:

a) $x^3-7x^2+16x-12$

b) $2x^4+5x^3-21x^2+19x-5$

c) $16x^4-16x^2+4$

d) $2x^3y-3x^2y^2$

a) $x^3-7x^2+16x-12=(x-3)(x-2)^2$

b) $2x^4+5x^3-21x^2+19x-5=(x-1)^2(x+5)(2x-1)$

c) $16x^4-16x^2+4=4\left(2x^2-1\right)^2=4\left(\sqrt{2}x-1\right)^2\left(\sqrt{2}x+1\right)^2$

d) $2x^3y-3x^2y^2=x^2y(2x-3y)$

4. Calcula el valor numérico para $x = 1$ y para $x = -2$ del polinomio: $P(x) = -3x^4 - 5x^3 + 16x^2 - 15x + 122$.

$P(1)=115 \quad P(-2)=208$

5. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x)=-3x^3+12x^2+kx-21$ sea divisible por $x+3$.

$P(x)=-3\left(-3\right)^3+12\left(-3\right)^2-3k-21=-3k+168=0\Rightarrow k=56$

6. Utilizando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de la división $\left(2x^3+3x-2\right):\left(2x-1\right)$.

Cociente: $C\left(x\right)=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$ Resto: $-\frac{1}{4}$

7. Calcula el valor de k para que el valor numérico del polinomio $P(x) = -3x^3 - 2x^2 + kx - 6$ en el punto $x = -3$ valga 48.

$P(-3)=-3\left(-3\right)^3-2\left(-3\right)^2-3k-6=-3k+57=48\Rightarrow k=3$

8. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios:

$$P(x) = x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 52x - 60 \qquad Q(x) = x^3 - 7x + 6$$

$P(x) = (x-2)^2(x+3)(x-5)$ $Q(x) = (x-1)(x-2)(x+3)$

Por tanto el m.c.d de los dos polinomios es $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$ y su m.c.m. es $(x-1)(x+3)(x-2)^2(x-5)$.

9. Calcula y simplifica.

a) $\dfrac{2x}{x-3} - 3\left(\dfrac{3x-1}{x+3}\right) - \dfrac{7}{x^2-9}$

b) $1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}} - \dfrac{3}{x^2+2x+1}$

a) $\dfrac{2x}{x-3} - 3\left(\dfrac{3x-1}{x+3}\right) - \dfrac{7}{x^2-9} = \dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{9x-3}{x+3} - \dfrac{7}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x(x+3)-(9x-3)(x-3)-7}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{-7x^2+36x-16}{x^2-9}$

b) $1 + \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{x}} - \dfrac{3}{x^2+2x+1} = 1 + \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{3}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2+2x(x+1)-3}{(x+1)^2} = \dfrac{3x^2+4x-2}{x^2+2x+1}$

10. Determina, mediante una expresión algebraica, el área de un triángulo equilátero de perímetro 3*x*.

$S(x) = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$

11. Una empresa fabrica y vende un cierto producto. El coste en euros para producir *x* unidades viene dado por:

$$C(x) = \left(\frac{x}{250}\right)^2 + \frac{x}{500} + 20$$

Se sabe, además, que el precio al que puede vender cada unidad es $p(x) = \dfrac{x}{10\,000} - 0,25$ €. Calcula la expresión algebraica que determina los beneficios.

$B(x) = I(x) - C(x) = x\left(\dfrac{x}{10\,000} - 0,25\right) - \left(\dfrac{x}{250}\right)^2 - \dfrac{x}{500} - 20 = \dfrac{21x^2 - 63\,000x - 5\,000\,000}{250\,000}$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La factorización del polinomio $P(x,y) = 16x^4 - 81y^2$ es :

A. $(2x-3y)^4$

B. $(2x+3y)(2x-3y)(4x^2+9y^2)$

C. $(4x+9y)^2(4x-9y)^2$

D. $(8x^3-27y^3)(2x-3y)$

Solución: B

2. **La suma de las fracciones algebraicas $\frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}$ es:**

A. $\frac{-1}{x^2}$

B. $\frac{1}{x^2}$

C. $\frac{(2x^2 - x)}{x^3}$

D. Ninguna de las anteriores

Solución: A

3. **La diferencia de los lados de dos cuadrados es 3 cm. Si el lado del pequeño mide *x* cm, el valor absoluto de la diferencia de las áreas es:**

A. 15 cm^2 **B.** 27 cm^2 **C.** $6x + 9$ cm^2 **D.** $6x - 9$ cm^2

Solución: C

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Se consideran las fracciones algebraicas:**

$$A(x) = \frac{x+2}{x+1} \qquad B(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}$$

A. Son exactamente iguales.

B. Son equivalentes.

C. El valor numérico en $x = 1$ es el mismo.

D. Los valores numéricos en todos los puntos distintos de –1 y –2 son iguales.

Solución: B, C y D

5. **Se consideran las expresiones algebraicas:**

$$A(x) = \sqrt{2}x^2 \quad B(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{x} \quad C(x) = \frac{2+x}{\sqrt{x}}$$

A. Ninguna es un polinomio.

B. Solo una de ellas es un monomio.

C. Dos son polinomios.

D. Todas son polinomios.

Solución: B

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Se sabe que los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ verifican la siguiente relación $P(x) = (x-1)Q(x) + R$ siendo R un número real**

Se consideran las afirmaciones:

1. $P(1) = 0$ **2. $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.**

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes entre sí.$\Rightarrow$ a pero a $\not\Rightarrow$ b.

Solución: A

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Se quiere calcular el valor numérico en $x = a$, $y = b$ de la expresión algebraica:**

$$\frac{1}{\frac{y}{x} - \frac{1}{x}} : \frac{x^2 - 2x + 1}{xy - x - y + 1}$$

Para ello se aportan los siguientes datos:

1. $a = 3$

2. $b = -3$

A. Se puede eliminar 1.

B. Se puede eliminar 2.

C. No es necesario ningún dato.

D. No puede eliminarse ninguno.

Solución: B

4 Ecuaciones y sistemas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ **b)** $x^2 + 9x + 14 = 0$ **c)** $7x + 2 = 30x^2$

a) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+24}}{-4} = \begin{cases} x = -3 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ **b)** $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -7 \end{cases}$ **c)** $30x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5} \\ x = -\dfrac{10}{60} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.

a) $3x^2 + 18x = 0$ **b)** $16x^2 - 25 = 0$ **c)** $-5x^2 + 7x = 0$

a) $x(3x+18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 18 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{18}{3} = -6 \end{cases}$

b) $x^2 = \dfrac{25}{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{16}} = \pm\dfrac{5}{4} \Rightarrow x = \dfrac{5}{4} \quad x = -\dfrac{5}{4}$

c) $x(-5x+7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -5x + 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7}{5} \end{cases}$

5. Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + x + 4 = 0$ **b)** $4x^2 + 4x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 18x + 80 = 0$ **d)** $(x+2)^2 + 2(x-1)^2 = 2x(x-4) - 10$

a) $\Delta = -15$ Ninguna **b)** $\Delta = 0$ Una **c)** $\Delta = 4$ Dos **d)** $\Delta = 0$ Una

6. Halla una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces sea -3 y el producto -28.

Se aplican las fórmulas de Cardano-Vieta:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -3 \Rightarrow b = 3a \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} = -28 \Rightarrow c = -28a \end{array}\right\} \text{Si } a = 1 \Rightarrow b = 3 \text{ y } c = -28$$

Por tanto, una ecuación que cumple las condiciones es: $x^2 + 3x - 28 = 0$

7 y 8. Ejercicios resueltos.

9. Opera y resuelve las ecuaciones bicuadradas obtenidas.

a) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ **b)** $\frac{24}{x^2} = 3x^2 - 6$ **c)** $x\left((x+2)^2 - 4(x-1) - 2\right) = -\frac{5}{x}$

a) Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 - 20z + 64 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 16 \\ z = 4 \end{cases}$. Luego si $z = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$ y si $z = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

b) $\frac{24}{x^2} = 3x^2 - 6 \Rightarrow 3x^4 - 6x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$. Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 - 2z - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 4 \\ z = -2 \end{cases}$.

Luego $z = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$ y si $z = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2}$ no tiene solución real

c) $x\left((x+2)^2 - 4(x-1) - 2\right) = -\frac{5}{x} \Rightarrow x^2\left[x^2 + 6\right] + 5 = 0 \Rightarrow x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

Si $z = x^2 \Rightarrow z^2 + 6z + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = -5 \end{cases}$. Por tanto, no hay soluciones reales.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones por factorización.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

b) $6x^4 + 13x^3 - 8x^2 - 17x + 6 = 0$

c) $x^4 - 5x^3 - 39x^2 + 265x - 350 = 0$

d) $8x^4 + 10x^3 - 17x^2 - 7x + 6 = 0$

a) $(x - 1)^2(x - 4) = 0$; $x = 1$ (doble) y $x = 4$

b) $(x - 1)(x + 2)(2x + 3)(3x - 1) = 0$; $x = 1$, $x = -2$, $x = \frac{-3}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$

c) $(x - 5)^2(x - 2)(x + 7) = 0$; $x = 5$ (doble), $x = 2$ y $x = -7$

d) $(x - 1)(x + 2)(2x - 1)(4x + 3) = 0$; $x = 1$, $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{-3}{4}$

11. Ejercicio resuelto.

12. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x + \frac{2}{x} = -3$ **b)** $\frac{11x + 11}{9} = 2x - \frac{12}{2 - x} - 7$ **c)** $\frac{4}{x+2} + \frac{4}{x} = 3$ **d)** $\frac{6x+7}{x+3} = \frac{x}{x-1}$

a) $x^2 + 2 = -3x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x = -2,\ x = -1$

b) $(11x + 11)(2 - x) = 18x(2 - x) - 108 - 63(2 - x) \Rightarrow 7x^2 - 88x + 256 = 0 \Rightarrow x = 8,\ x = \frac{32}{7}$

c) $4x + 4(x + 2) = 3x(x + 2) \Rightarrow -3x^2 + 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2,\ x = -\frac{4}{3}$

d) $(6x + 7)(x - 1) = x(x + 3) \Rightarrow 5x^2 - 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = \frac{7}{5}$

13. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{2x}{3}+\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{7}{3x-3}$ **b)** $\dfrac{2x}{x-2}+\dfrac{3x}{x+2}=\dfrac{6x^2}{x^2-4}$ **c)** $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{x}{x+1}$ **d)** $\dfrac{x^3-8}{x-1}=\dfrac{24x+16}{x+2}$

a) $2x(x-1)+3(2x+3)=7\Rightarrow x^2+2x+1=0\Rightarrow x=-1$

b) $2x(x+2)+3x(x-2)=6x^2\Rightarrow -x^2-2x=0\Rightarrow x=0$, $x=-2$ (solución no válida)

c) $2+3x(x+1)=x(x-1)\Rightarrow 2x^2+4x+2=0=0\Rightarrow x=-1$ (solución doble), pero la solución no es válida

d) $(x^3-8)(x+2)=(24x+16)(x-1)\Rightarrow x^2(x^2+2x-24)=0\Rightarrow x=0$ (doble), $x=4$ $x=-6$

14 a 16. Ejercicios resueltos.

17. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+2}-x+4=0$ **c)** $\sqrt{x+1}-\sqrt{4x-3}=-5$ **e)** $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=5$

b) $x+\sqrt{10+x^2}=5$ **d)** $\sqrt{x+7}+\sqrt{2x}=\sqrt{x+23}$ **f)** $x^2-\sqrt{3x^2-2}=4$

a) $\sqrt{x+2}=x-4\Rightarrow\left(\sqrt{x+2}\right)^2=(x-4)^2\Rightarrow x+2=x^2+16-8x\Rightarrow x^2-9x+14=0$.

Luego $x=7$ (sí es solución) y $x=2$ (no es solución).

b) $\left(\sqrt{10+x^2}\right)^2=(5-x)^2\Rightarrow 10+x^2=x^2+25-10x\Rightarrow 10x=15$. Luego $x=\dfrac{3}{2}$ (sí es solución).

c) $\sqrt{x+1}=\sqrt{4x-3}-5\Rightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(\sqrt{4x-3}-5\right)^2\Rightarrow x+1=4x-3+25-10\sqrt{4x-3}\Rightarrow$

$\Rightarrow 10\sqrt{4x-3}=3x+21\Rightarrow\left(10\sqrt{4x-3}\right)^2=(3x+21)^2\Rightarrow 9x^2-274x+741=0$.

Luego $x=3$ (no es solución) y $x=\dfrac{247}{9}$ (sí es solución).

d) $\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{2x}\right)^2=\left(\sqrt{x+23}\right)^2\Rightarrow x+7+2x+2\sqrt{2x^2+14x}=x+23\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+14x}=16-2x\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{2x^2+14x}=8-x\Rightarrow\left(\sqrt{2x^2+14x}\right)^2=(8-x)^2\Rightarrow x^2+30x-64=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=-32 \text{ Solución falsa}\end{cases}$.

Luego $x=2$ (sí es solución) y $x=-32$ (no es solución).

e) $\sqrt{x+4}=5-\sqrt{x-1}\Rightarrow\left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2\Rightarrow x+4=25+x-1-10\sqrt{x-1}\Rightarrow 10\sqrt{x-1}=20\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow x-1=4$.

Luego x= 5 (sí es solución).

f) $\left(x^2-4\right)^2=\left(\sqrt{3x^2-2}\right)^2\Rightarrow x^4+16-8x^2=3x^2-2\Rightarrow x^4-11x^2+18=0$.

Luego $x=-3$ (sí es solución), $x=3$ (sí es solución), $x=-\sqrt{2}$ (no es solución) y $x=\sqrt{2}$ (no es solución).

18. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales.

a) $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x}=2$ **b)** $\frac{x-1}{\sqrt{x}}=x-1$ **c)** $\frac{x}{\sqrt{x}}=x-2$ **d)** $\sqrt{3\sqrt{16-x}}=\sqrt{2x-5}$

a) $\left(\sqrt{2x+7}\right)^2=\left(\sqrt{x}+2\right)^2 \Rightarrow 2x+7=x+4+4\sqrt{x} \Rightarrow (x+3)^2=\left(4\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2-10x+9=0$

Luego $x=9$, $x=1$ (sí son soluciones)

b) $\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^2=(x-1)^2 \Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x}=x^2-2x+1 \Rightarrow -x^3+3x^2-3x+1=0 \Rightarrow -(x-1)^3=0 \Rightarrow x=1$ (sí es solución)

c) $\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)^2=(x-2)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x}=x^2+4-4x \Rightarrow x^2-5x+4=0$. Luego $x=4$ (sí es solución), $x=1$ (no es solución)

d) $\left(\sqrt{3\sqrt{16-x}}\right)^2=\left(\sqrt{2x-5}\right)^2 \Rightarrow 3\sqrt{16-x}=2x-5 \Rightarrow \left(3\sqrt{16-x}\right)^2=(2x-5)^2 \Rightarrow 9(16-x)=4x^2-20x+25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-11x-119 \Rightarrow x=-\frac{17}{4}$ (no es solución), $x=7$ (sí es solución)

19 a 22. Ejercicios resueltos.

23. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log 3x=\log 6+2\log x$

b) $\log(2x+3)-\log(x-2)=\log 36$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log(2x-x^2)+1$

a) $3x=6x^2 \Rightarrow x(6x-3)=0$. Luego $x=0$ (no es solución) y $x=\frac{1}{2}$ (sí es solución)

b) $\log\frac{2x+3}{x-2}=\log 36 \Rightarrow \frac{2x+3}{x-2}=36 \Rightarrow 2x+3=36x-72 \Rightarrow x=\frac{75}{34}$

c) $\log(4-5x)+\log(2x-2)=\log\left(2x-x^2\right)+1 \Rightarrow \log\left[(4-5x)(2x-2)\right]=\log\left[10\left(2x-x^2\right)\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x-8-10x^2+10x=20x-10x^2 \Rightarrow -2x=8 \Rightarrow x=-4$ (no es solución). La ecuación no tiene solución.

24. Halla un número tal que si se añade a su logaritmo decimal el valor del logaritmo decimal de 2, el resultado es la unidad.

Número desconocido: x.

Por tanto, $\log x+\log 2=1 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$

25. Calcula el valor de un número si el doble de su logaritmo decimal es igual a la suma de los logaritmos decimales de 4 y de 9.

Número desconocido: x

$2\log x=\log 4+\log 9 \Rightarrow \log x^2=\log 36 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=6, x=-6$. El valor es $x=6$, la solución $x=-6$ no es válida.

26 a 28. Ejercicios resueltos.

29. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $4^{2x} = 16$ **b)** $7^{x-3} = 49$ **c)** $\frac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}}$ **d)** $4^{\frac{2x-3}{5}} = 64$

a) $4^{2x} = 16 \Rightarrow 4^{2x} = 4^2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

b) $7^{x-3} = 49 \Rightarrow 7^{x-3} = 7^2 \Rightarrow x-3 = 2 \Rightarrow x = 5$

c) $\frac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{4\cdot\frac{x(x-1)}{2}} \Rightarrow -x = 2x(x-1) \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{2}$

d) $4^{\frac{2x-3}{5}} = 64 \Rightarrow 4^{\frac{2x-3}{5}} = 4^3 \Rightarrow \frac{2x-3}{5} = 3 \Rightarrow 2x - 3 = 15 \Rightarrow x = 9$

30. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

b) $2^{x+4} - 8^x = 0$

c) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$

d) $2 \cdot 10^{2x+4} + 3 \cdot 10^{x+2} - 5 = 0$

a) $\frac{1}{2} \cdot 2^x + 2^x + 2 \cdot 2^x = 7 \Rightarrow \frac{7}{2} \cdot 2^x = 7 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

b) $2^{x+4} = \left(2^3\right)^x = 2^{3x} \Rightarrow x + 4 = 3x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

c) $\left(5^x\right)^2 - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \Rightarrow 5^x = \frac{30 \pm 20}{2} \Rightarrow \begin{cases} 5^x = 25 \Rightarrow x = 2 \\ 5^x = 5 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

d) $2 \cdot 10^{2x+4} + 3 \cdot 10^{x+2} - 5 = 0 \Rightarrow 20\,000\left(10^x\right)^2 + 300 \cdot 10^x - 5 = 0 \Rightarrow 20\,000\,z^2 + 300z - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4000z^2 + 60z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{-60 \pm 140}{8000} \Rightarrow z = 10^{-2}, z = -0{,}025$. Deshaciendo el cambio $x = -2$, $10^x = -0{,}025$ (sin solución real).

31. Ejercicio interactivo.

32. Ejercicio resuelto.

33. Di si los siguientes sistemas son lineales o no lineales e identifica las incógnitas, coeficientes y términos independientes.

a) $\begin{cases} 2x + xy = 3 \\ x + 3y = 4 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$

		Incógnitas	Primera ecuación		Segunda ecuación		Tercera ecuación	
			Coeficientes	Término independiente	Coeficientes	Término independiente	Coeficientes	Término independiente
a)	No lineal	*x*,*y*	2 (en *x*) 1 (en *xy*)	3	1 (en *x*) 3 (en *y*)	4	2 (en *x*) 5 (en *y*)	6
b)	Lineal	*x*, *y*, *z*	1,1 y 0	1	0, 1 y 1	2	1, 0 y 2	0

34. Indica si los pares de valores dados son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \mathbf{9x + 10y = 13} \\ \mathbf{-x + 4y = -4} \end{cases}$.

a) $x = -3$, $y = 4$ **b)** $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}$

a) $\begin{cases} 9(-3) + 10 \cdot 4 = -27 + 40 = 13 \\ -(-3) + 4 \cdot 4 = 3 + 16 = 19 \neq -4 \end{cases} \Rightarrow$ No es solución.

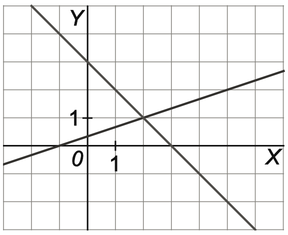
b) $\begin{cases} 9 \cdot 2 + 10\left(-\frac{1}{2}\right) = 18 - 5 = 13 \\ -2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$ Sí es solución.

35 a 39. Ejercicios resueltos.

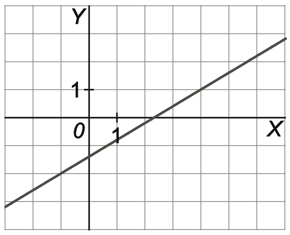
40. Resuelve gráficamente y por algún método algebraico.

a) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x - 5y = -10 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3(4 - y) = 6 \\ 3(2x - 9) - 5y = -1 \end{cases}$

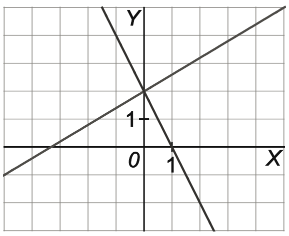
a) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 1, x = 2$



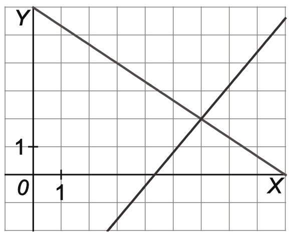
c) $\begin{cases} 6x - 10y = 14 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$, Infinitas soluciones.



b) $\begin{cases} 3x - 5y = -10 \\ 10x + 5y = 10 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 2$



d) $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 6x - 5y = 26 \end{cases} \Rightarrow x = 6, y = 2$



41. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + 3y^2 = 22 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 32 \\ -3x^2 + 4y^2 = -48 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 8 - 2x \\ 2x + 3(8 - 2x)^2 = 22 \end{cases} \Rightarrow 2x + 192 + 12x^2 - 96x = 22 \Rightarrow 12x^2 - 94x + 170 = 0$. Soluciones: $\begin{cases} x = 5, y = -2 \\ x = \frac{17}{6}, y = \frac{7}{3} \end{cases}$

b) $\begin{matrix} 3E_1 \\ 2E_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 9y^2 = 96 \\ -6x^2 + 8y^2 = -96 \end{cases} \Rightarrow 17y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$. Soluciones: $\begin{cases} y = 0, x = 4 \\ y = 0, x = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ (4 - y)^2 + 2y^2 = 19 \Rightarrow 3y^2 - 8y + 16 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ 3y^2 - 8y - 3 = 0 \end{cases}$. Soluciones: $\begin{cases} y = 3, \ x = 1 \\ y = -\frac{1}{3}, \ x = \frac{13}{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 13 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Soluciones: $\begin{cases} x = 2, \ y = 3 \\ x = -2, \ y = -3 \\ x = 3, y = 2 \\ x = -3, y = -2 \end{cases}$

42 a 44. Ejercicios resueltos.

45. Estudia y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x-3y+z=-14 \\ 5x-y-2z=-15 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ 3x-3y-2z=-1 \\ 3x-3y+2z=5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ 3x-y+3z=0 \\ 8x+y+z=-1 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y-z=11 \\ 2x-2y-z=8 \\ x+y-z=7 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ 5x-y-z=13 \\ 4x-2y-3z=14 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x-y+z=5 \\ x-y+2z=3 \\ x+2y-7z=0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 2x+5y-2z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

a) $\begin{matrix} E_2-3E_1 \\ E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -11y+8z=-25 \end{cases} \quad 9E_3-11E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=2 \\ -9y+7z=-20 \\ -5z=-5 \end{cases} \Rightarrow z=1, y=3, x=-2$

b) $\begin{matrix} E_2-E_1 \\ 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=11 \\ -3y=-3 \\ y-z=3 \end{cases} \Rightarrow y=1, z=-2, x=4$

c) $\begin{matrix} 2E_2-3E_1 \\ E_3-E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+4y-z=0 \\ -18y-z=-2 \\ 4z=6 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{3}{2}, y=\frac{1}{36}, x=\frac{25}{36}$

d) $\begin{matrix} 4E_2-5E_1 \\ E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -3y+2z=9 \end{cases} \quad 3E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} 4x+y-5z=5 \\ -9y+21z=27 \\ -15z=0 \end{cases} \Rightarrow z=0, y=-3, x=2$

e) $\begin{matrix} 5E_2-3E_1 \\ 5E_3-8E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y-2z=0 \\ -11y+21z=0 \\ -11y+21z=-5 \end{cases}$ Sistema incompatible. No tiene solución.

f) $\begin{matrix} 2E_2-E_1 \\ 2E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+z=5 \\ -y+3z=1 \\ 5y-15z=-5 \end{cases} \quad E_3+5E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+z=5 \\ -y+3z=1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow z=t, y=3t-1, x=t+2$

g) $\begin{matrix} 2E_2-E_1 \\ E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ y+3z=2 \\ 2z=2 \end{cases} \Rightarrow z=1, y=-1, x=1$

h) $\begin{matrix} 3E_2-2E_1 \\ 3E_3-E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 17y-8z=-4 \\ 4y+2z=1 \end{cases} \quad 17E_3-4E_2 \Rightarrow \begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 17y-8z=-4 \\ 66z=33 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{1}{2}, y=0, x=\frac{1}{2}$

46. Resuelve el siguiente sistema aplicando un cambio de variable que lo transforme en lineal.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=-7 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{5}{z}=-12 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z}=15 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable: $a=\dfrac{1}{x}$, $b=\dfrac{1}{y}$, $c=\dfrac{1}{z}$. Por tanto:

$$\begin{cases} a+2b-3c=-7 \\ 2a+3b-5c=-12 \\ 4a+4b-c=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a+2b-3c=-7 \\ -b+c=2 \\ -4b+11c=43 \end{cases} \Rightarrow E_3-4E_2 \Rightarrow \begin{cases} a+2b-3c=-7 \\ -b+c=2 \\ 7c=35 \end{cases} \Rightarrow c=5, b=3, a=2$$

Luego: $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{3}$, $z=\dfrac{1}{5}$

47. Calcula las edades de tres hermanos sabiendo que:

- **Las edades de los tres suman 44 años.**
- **La edad del hermano mediano es superior en medio año a la media aritmética de las edades de los otros dos hermanos.**
- **La suma de las edades de los dos hermanos menores supera en 10 años a la edad del mayor.**

x edad del hermano mayor en años, *y* edad del hermano mediano en años, *z* edad del hermano pequeño en años.

$$\begin{cases} x+y+z=44 \\ y=\dfrac{x+z}{2}+\dfrac{1}{2} \\ y+z=x+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=44 \\ x-2y+z=-1 \\ x-y-z=-10 \end{cases} \begin{matrix} E_2-E_1 \\ E_3+E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=44 \\ -3y=-45 \\ 2x=34 \end{cases} \Rightarrow x=17, y=15, z=12.$$

Por tanto, la edad del hermano mayor es 17 años, la del hermano mediano es 15 años y la del hermano pequeño 12 años.

48. Ejercicio interactivo.

49. La oferta y la demanda del mercado de un modelo de pantalones vaqueros, cuyo precio se encuentra entre 40 € y 60 €, en cierto momento vienen dadas por las expresiones:

$f_o=0{,}5p^2-40p+1000$ $\qquad f_d=-10p+750$

a) Calcula el punto de equilibrio de este mercado.

b) Halla el número de vaqueros vendidos cuando se produce el equilibrio de mercado.

a) Igualando ambas expresiones: $0{,}5p^2-40p+1000=-10p+750 \Rightarrow p=10$ (no válida) $p=50$ .Luego el punto de equilibrio se alcanza con un precio de 50 €.

b) Para $p=50$, sustituimos en f_0 o en f_d y el número de vaqueros vendidos es de 250 unidades.

50. La tabla muestra la población española (en millones de personas) en diferentes años:

Año	2005	2011	2012	2013	2014
Población	43	46,2	46,1	46,1	46

Calcula la tasa de crecimiento exponencial de la población española para los periodos:

a) 2005 a 2014 **b)** 2011 a 2013 **c)** 2012 a 2013

a) $46 = 43 \cdot e^{(2014-2005)r} \Rightarrow e^{9r} = \frac{46}{43} \Rightarrow \ln\left(e^{9r}\right) = \ln\left(\frac{46}{43}\right) \Rightarrow 9r = \ln\left(\frac{46}{43}\right) \Rightarrow r = 0{,}0075 \Rightarrow r\ \% = 0{,}75\ \%.$

b) $46{,}1 = 46{,}2 \cdot e^{(2013-2011)r} \Rightarrow e^{2r} = \frac{46{,}1}{46{,}2} \Rightarrow \ln\left(e^{2r}\right) = \ln\left(\frac{46{,}1}{46{,}2}\right) \Rightarrow 2r = \ln\left(\frac{46{,}1}{46{,}2}\right) \Rightarrow r = -0{,}001 \Rightarrow r\ \% = -0{,}1\%.$

c) $46{,}1 = 46{,}1 \cdot e^{(2013-2012)r} \Rightarrow e^{r} = \frac{46{,}1}{46{,}1} \Rightarrow r = 0 \Rightarrow \%r = 0\ \%$

51 a 61. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Ecuaciones de primer y segundo grado

62. Halla mentalmente las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones.

a) $3x + 1 - 2x = 6x$ **b)** $x^2 + x + 1 = 3 - x + x^2$ **c)** $3x + 2 - x = 2x - 5$ **d)** $\frac{1}{2}x + 3{,}5 = 2{,}6 - x$

a) $x = \frac{1}{5}$ **b)** $x = 1$ **c)** Sin solución **d)** $x = -0{,}6$

63. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $2x - 2(3x - 1) + 4(2x - 5) - 10 = 8x$

b) $2x - \frac{3x-1}{3} = x + \frac{1}{3}$

c) $\frac{3x-1}{4} - 2x = \frac{2x - \frac{7}{4}}{2} - (3x-1)$

d) $\frac{x+10}{2} + \frac{2(x-2)}{5} = \frac{5x-15}{3}$

a) $2x - 6x + 2 + 8x - 20 - 10 = 8x$, luego $x = -7$

b) $6x - 3x + 1 = 3x + 1$, luego $0 = 0$. Se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $3x - 1 - 8x = 4x - \frac{7}{2} - 12x + 4 \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $15x + 150 + 12x - 24 = 50x - 150$, luego $x = 12$

64. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(x - 2)^2 + (x + 4)(x - 2) = 2 - 3(x + 1)$

b) $-2(x - 2)^2 + 3x + 8 = 0$

c) $\frac{x(x-1)}{15} + \frac{(x-6)^2}{5} + \frac{(x+2)^2}{3} = \frac{(3x-2)(3x-4)}{15}$

a) $x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x - 2x - 8 - 2 + 3x + 3 = 0 \rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$, de soluciones $x = 1$, $x = \frac{-3}{2}$

b) $-2x^2 + 8x - 8 + 3x + 8 = 0$; $-2x^2 + 11x = 0$, de soluciones $x = 0$ y $x = \frac{11}{2}$

c) $x^2 - x + 3(x^2 + 36 - 12x) + 5(x^2 + 4 + 4x) = 9x^2 - 12x - 6x + 8$; $x = -120$

65. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas.

a) $x^2 + 18x = 0$ **b)** $2x^2 - 9x = 0$ **c)** $-x^2 + 2x = 0$ **d)** $2x^2 - 8 = 0$

a) $x = 0,\ x = -18$ **b)** $x = 0,\ x = \frac{9}{2}$ **c)** $x = 0,\ x = 2$ **d)** $x = 2,\ x = -2$

66. Indica el número de soluciones reales de las siguientes ecuaciones sin resolverlas.

a) $x^2 - 3x + 12 = 0$ **b)** $-4x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{1}{9} = 0$ **c)** $-3x^2 - x + 4 = 0$ **d)** $\frac{3}{2}x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{5}{2} = 0$

a) $\Delta = -39$. Ninguna solución real

c) $\Delta = 49$. Dos soluciones reales

b) $\Delta = 0$. Una solución real doble

d) $\Delta = \frac{151}{9}$. Dos soluciones reales

67. Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado que tenga las soluciones indicadas.

a) $x = 2,\ x = -3$ **b)** $x = 4$ (doble)

a) $(x - 2)(x + 3) = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

b) $(x - 4)^2 = 0 \rightarrow x^2 + 16 - 8x = 0$

68. Calcula, sin resolverlas, la suma y el producto de las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x^2 + 3x = 18$ **b)** $x^2 - 2x - 2 = 0$ **c)** $x^2 + \frac{x}{6} = \frac{1}{3}$ **d)** $ax^2 + ax - 1 = 0$

a) Suma $-\frac{3}{3} = -1$, producto $-\frac{18}{3} = -6$

c) Suma $-\frac{1}{6}$, producto $-\frac{1}{3}$

b) Suma 2, producto -2

d) Suma $-\frac{a}{a} = -1$, producto $-\frac{1}{a}$

69. Halla una ecuación de segundo grado que tenga como raíces:

a) $x_1 = -2, x_2 = 3$ **c)** $x_1 = -2, x_2 = -2$ **e)** $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{4}$

b) $x_1 = -2, x_2 = -5$ **d)** $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = -1$ **f)** $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = 2$

a) $x^2 - x - 6 = 0$ **c)** $x^2 + 4x + 4 = 0$ **e)** $12x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$ **d)** $3x^2 + x - 2 = 0$ **f)** $x^2 + \left(-\sqrt{2} - 2\right)x + 2\sqrt{2} = 0$

70. Escribe una ecuación de segundo grado tal que sus soluciones sumen $\frac{3}{4}$ y el producto de las mismas sea 2.

Respuesta abierta: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{4} = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = 2 = \frac{c}{a} \end{cases} \rightarrow$ Si, por ejemplo $a = 1 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4}x + 2 = 0$

71. Escribe una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces valga 3 y su producto –18.

Respuesta abierta: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = -18 = \frac{c}{a} \end{cases} \rightarrow$ Si, por ejemplo $a = 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

Ecuaciones de grado superior a dos

72. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$ **c)** $x^4 - 34x^2 - 72 = 0$ **e)** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **g)** $2(x + 1)^4 - 8x^3 - 8(x + 3) + 8 = 0$

b) $x^4 - 125x^2 + 484 = 0$ **d)** $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$ **f)** $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

a) $x = 1, x = -1, x = 7, x = -7$

b) $x = 2, x = -2, x = 11, x = -11$

c) $x = 6, x = -6$

d) Sin soluciones reales

e) $x = 2, x = -2, x = 1, x = -1$

f) $x = \pm\dfrac{1}{2}$

g) $x = 1, x = -1$

73. Opera y encuentra las soluciones de la siguiente ecuación: $\boldsymbol{x^2 = \dfrac{10x^2}{x^2 + 36} + 3}$

$x^4 + 36x^2 = 10x^2 + 3x^2 + 108$. Luego $x^4 + 23x^2 - 108 = 0$, cuyas soluciones son $x = 2$, $x = -2$

74. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas por factorización.

a) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$ **c)** $x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 + \dfrac{11}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x = 2$ **e)** $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

b) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0$ **d)** $x^6 + x^4 = 2x^5 + 2x^3$ **f)** $x^2(x + 1) = x(x + 1)$

a) $(x + 2)(x - 3)(x^2 + 1) = 0$, de soluciones $x = -2$, $x = 3$

b) $(x - 1)(6x^2 - x - 15) = 0$, de soluciones $x = 1$, $x = -\dfrac{3}{2}$ $x = \dfrac{5}{3}$

c) $(3x + 2)(x - 3)(x - 1)^2 = 0$, de soluciones $x = 1$ (doble), $x = 3$, $x = \dfrac{-2}{3}$

d) $x^3(x - 2)(x^2 + 1) = 0$; $x = 0$ (triple), $x = 2$

e) $(x - 1)^2(x + 1) = 0$; $x = 1$ (doble), $x = -1$

f) $(x + 1)x(x - 1) = 0$; $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$

75. Resuelve las siguientes ecuaciones estudiando los valores que anulan cada factor.

a) $(x - 4)(x + 5) = 0$ **b)** $x(x^2 - x - 1) = 0$ **c)** c) $(2x + 1)(3x + 1)(x^2 + 1) = 0$ d) $(x^2 - a)(x^2 + 2x - 3) = 0$

a) $x = 4, x = -5$ **b)** $x = 0$, $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ **c)** $x = \dfrac{-1}{2}$, $x = \dfrac{-1}{3}$ **d)** $x = \pm\sqrt{a}$ si $a \geq 0$, $x = 1$, $x = -3$

76. Escribe en cada caso una ecuación cuyas soluciones sean las indicadas.

a) 1 y 5 **b)** –2, –7, 2 y 7 **c)** $\dfrac{1}{2}$, –2 y $\dfrac{3}{4}$ **d)** a, b, $\dfrac{c}{4}$ y 0

a) $(x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

c) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x + 2)\left(x - \dfrac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{17}{8}x + \dfrac{3}{4} = 0$

b) $(x + 2)(x + 7)(x - 2)(x - 7) = 0 \Rightarrow x^4 - 53x^2 + 196 = 0$

d) $(x - a)(x - b)\left(x - \dfrac{c}{4}\right)x = 0$

77. Resuelve la ecuación $\boldsymbol{(x^3 - 2)^4 = 16}$ aplicando el cambio de incógnita $\boldsymbol{z = x^3 - 2}$.

$z^4 = 16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16} = \pm 2$. Si $z = 2$, entonces $x^3 = 2 + 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}$ y si $z = -2$, entonces $x^3 = -2 + 2 \Rightarrow x = 0$

Ecuaciones racionales

78. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{9}{4}$

b) $\frac{1}{2x}+\frac{2}{3x}+\frac{3}{4x}=\frac{13}{36}$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-1$

d) $\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}=\frac{1300}{729}$

e) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^3}$

f) $-2232+\frac{1100}{1+r}+\frac{1200}{(1+r)^2}=0$

a) $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}=\frac{9}{4}\Rightarrow 12(x+1)=9x^2\Rightarrow x=-\frac{2}{3},\ x=2$

b) $\frac{1}{2x}+\frac{2}{3x}+\frac{3}{4x}=\frac{13}{36}\Rightarrow\frac{23}{12x}=\frac{13}{36}\Rightarrow x=\frac{69}{13}$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-1\Rightarrow x^3+x^2+x+1=0\Rightarrow x=-1$

d) $\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}=\frac{1300}{729}\Rightarrow 729(r+2)=1300(r+1)^2\Rightarrow r=-\frac{79}{52}, r=\frac{2}{25}$

e) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^3}\Rightarrow a^3(a+1)=a^2\Rightarrow a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

f) $-2232+\frac{1100}{1+r}+\frac{1200}{(1+r)^2}=0\Rightarrow 558r^2+841r-17=0\Rightarrow r=0{,}02,\ r=-1{,}527$

79. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x+3=-\frac{2}{x}$

b) $2x-\frac{12}{2-x}=7+\frac{11x+11}{9}$

c) $\frac{x+9}{x}-\frac{5+x}{x+2}=\frac{12x+12}{x^2+2x}$

d) $\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+1}{x+2}=\frac{9}{20}$

e) $\frac{x+1}{2x}=\frac{x^2-1}{x-1}$

f) $\frac{4}{x}+\frac{4}{x+2}=3$

g) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{4x+12}{3x+3}$

h) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}=\frac{1}{x^2-a^2}$

a) $x^2+3x+2=0\Rightarrow x=-1, x=-2$

b) $36x-18x^2-108=126-63x+22x+22-11x^2-11x\Rightarrow 7x^2-88x+256=0\Rightarrow x=8, x=\frac{32}{7}$

c) $x^2+11x+18-5x-x^2=12x+12\Rightarrow x=1$

d) $20x^2+80+80x-20x^2-20-40x=9x^2+27x+18\Rightarrow 9x^2-13x-42=0\Rightarrow x=3, x=\frac{-14}{9}$

e) $x^2-1=2x\left(x^2-1\right)\Rightarrow\left(x^2-1\right)(1-2x)=0\Rightarrow x=1, x=-1, x=\frac{1}{2}$

f) $4x+8+4x=3x^2+6x\Rightarrow 3x^2-2x-8=0\Rightarrow x=2, x=\frac{-4}{3}$

g) $3x^2+3x+3x+3=4x^2+12x-4x-12\Rightarrow x^2+2x-15=0\Rightarrow x=3, x=-5$

h) $x+a+x-a=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

80. Resuelve la siguiente ecuación aplicando el cambio de variable $z = x^2 - 3x$.

$$\frac{x^2-3x-1}{(x^2-3x)^2-1}=\frac{x^2-3x-2}{(x^2-3x)^2}$$

$$\frac{z-1}{z^2-1}=\frac{z-2}{z^2}\Rightarrow\frac{1}{z+1}=\frac{z-2}{z^2}\Rightarrow z^2=(z+1)(z-2)\Rightarrow z^2-z^2+2+z=0\Rightarrow z=-2\Rightarrow x=2, x=1$$

Ecuaciones con radicales

81. Halla mentalmente la solución de las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x+1}=4$ **b)** $\sqrt{\frac{x}{4}}=9$ **c)** $\sqrt{3x+1}=7$ **d)** $\sqrt{x^4}=9$

a) $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=4^2\Rightarrow x+1=16\Rightarrow x=15$ (solución válida)

b) $\left(\sqrt{\frac{x}{4}}\right)^2=9^2\Rightarrow\frac{x}{4}=81\Rightarrow x=324$ (solución válida).

c) $\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=7^2\Rightarrow 3x+1=49\Rightarrow x=16$ (solución válida).

d) $x^2=9\Rightarrow x=\pm3$ (soluciones válidas).

82. Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $2-3\sqrt{x}=-x$ **b)** $3x+\sqrt{2x-2}=2\sqrt{2x-2}+23$ **c)** $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$ **d)** $3\sqrt{3x-1}=2\sqrt{3(2x-1)}$

a) $\left(3\sqrt{x}\right)^2=(2+x)^2\Rightarrow 9x=4+x^2+4x\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow x=4,\ x=1$ (soluciones válidas).

b) $(3x-23)^2=\left(\sqrt{2x-2}\right)^2\Rightarrow 9x^2-140x+531=0\Rightarrow x=9$ (válida), $x=\frac{59}{9}$ (no válida).

c) $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=\left(5-\sqrt{2x+3}\right)^2\Rightarrow x+1=25+2x+3-10\sqrt{2x+3}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(10\sqrt{2x+3}\right)^2=(x+27)^2\Rightarrow x^2-146x+429=0\Rightarrow x=3$ (válida), $x=143$ (no válida).

d) $\left(3\sqrt{3x-1}\right)^2=\left(2\sqrt{3(2x-1)}\right)^2\Rightarrow 27x-9=24x-12\Rightarrow x=-1$ (no válida).

83. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{2+\sqrt{x-4}}=\sqrt{12-x}$ **b)** $\frac{\sqrt{2x-1}}{4}=\frac{3}{\sqrt{2x-1}}$ **c)** $4x-5+\sqrt{6x^2-24x+25}=0$ **d)** $\frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$

a) $\left(\sqrt{2+\sqrt{x-4}}\right)^2=\left(\sqrt{12-x}\right)^2\Rightarrow 2+\sqrt{x-4}=12-x\Rightarrow\left(\sqrt{x-4}\right)^2=(10-x)^2\Rightarrow x^2-21x+104=0\Rightarrow\begin{cases}x=8\text{ (válida)}\\x=13\text{ (no válida)}\end{cases}$

b) Quitando denominadores: $2x-1=12\Rightarrow x=\frac{13}{2}$ (válida)

c) $\left(-\sqrt{6x^2-24x+25}\right)^2=(4x-5)^2\Rightarrow 6x^2-24x+25=25+16x^2-40x\Rightarrow 10x^2-16x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\text{ (válida)}\\x=\frac{8}{5}\text{ (no válida)}\end{cases}$

d) $\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow 2\sqrt{x-x^2}=x-1\Rightarrow 4x-4x^2=x^2+1-2x\Rightarrow 5x^2-6x+1=0\Rightarrow x=1,\ x=\frac{1}{5}$ (no válidas)

84. Resuelve la ecuación $\sqrt{x} = \sqrt[4]{36+5x}$.

$\left(\sqrt{x}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{36+5x}\right)^4 \Rightarrow x^2 = 36+5x \Rightarrow x^2 - 36 - 5x = 0 \Rightarrow x = -4$ (no válida), $x = 9$ (válida)

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

85. *Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log x = \log 2 - \log 4$

b) $2\log(2x-2) - \log(x-1) = 1$

c) $\log\left(65 - x^3\right) = 3\log(5-x)$

d) $\log x = \log 6 + 2\log\dfrac{x}{3}$

e) $\log 10^{\sqrt{20x+320}} = 10\sqrt{x}$

f) $3\log_x 2 + \log_x 4 = -5$

g) $\log\sqrt{7x+51} - 1 = \log 9 - \log\sqrt{2x-67}$

a) $\log x = \log 2 - \log 4 \Rightarrow \log x = \log 0,5 \Rightarrow x = 0,5$ (solución válida).

b)

$$2\log(2x-2) - \log(x-1) = 1 \Rightarrow \log\frac{(2x-2)^2}{x-1} = \log 10 \Rightarrow \frac{(2x-2)^2}{x-1} = 10 \Rightarrow \frac{4(x-1)^2}{x-1} = 10 \Rightarrow 4(x-1) = 10 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$ (solución válida)

c) $\log\left(65-x^3\right) = 3\log(5-x) \Rightarrow \log\left(65-x^3\right) = \log(5-x)^3 \Rightarrow 65 - x^3 = (5-x)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 65 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3 \Rightarrow 15x^2 - 75x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4, x = 1$ (soluciones válidas).

d) $\log x = \log 6 + 2\log\dfrac{x}{3} \Rightarrow \log x = \log\left(6\left(\dfrac{x}{3}\right)^2\right) \Rightarrow x = \dfrac{6x^2}{9} \Rightarrow 6x^2 = 9x \Rightarrow 3x(2x-3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ (solución válida), $x = 0$ (solución no válida).

e) $\log 10^{\sqrt{20x+320}} = 10\sqrt{x} \Rightarrow 10^{10\sqrt{x}} = 10^{\sqrt{20x+320}} \Rightarrow 10\sqrt{x} = \sqrt{20x+320} \Rightarrow 100x = 20x + 320 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{320}{80} = 4$ (solución válida)

f) $3\log_x 2 + \log_x 4 = -5 \Rightarrow \log_x(8\cdot 4) = -5 \Rightarrow x^{-5} = 32 = 2^5 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (solución válida)

g) $\log\sqrt{7x+51} - 1 = \log 9 - \log\sqrt{2x+67} \Rightarrow \log\dfrac{\sqrt{7x+51}}{10} = \log\dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{7x+51}}{10} = \dfrac{9}{\sqrt{2x+67}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 14x^2 + 571x + 3417 = 8100 \Rightarrow 14x^2 + 571x - 4683 = 0 \Rightarrow x = 7$ (solución válida), $x = -\dfrac{669}{14}$ (solución falsa)

86. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144$

c) $2^x + 2^{x+1} = 24$

d) $9^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0$

e) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90$

f) $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111$

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2^{2(x^2+1)} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2x^2 + 2 = 5x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -\dfrac{1}{2}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144 \Rightarrow 4^{(x-2)^2} = 4^9 \Rightarrow (x-2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 3 \Rightarrow x = 5 \\ x-2 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

c) $2^x + 2^{x+1} = 24 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

d) $9^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0 \Rightarrow \left(3^2\right)^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 + 5 \cdot 3^x - 24 = 0$

Si $z = 3^x \Rightarrow z^2 + 5z - 24 = 0 \Rightarrow z = 3,\ z = -8 \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ z = -8 \Rightarrow 3^x = -8 \text{ (sin solución real)} \end{cases}$

e) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90 \Rightarrow 3^2 \cdot 3^x + \dfrac{9^x}{9} = 90 \Rightarrow 3^2 \cdot 3^x + \dfrac{\left(3^x\right)^2}{9} = 90$

Si $z = 3^x \Rightarrow 9z + \dfrac{z^2}{9} = 90 \Rightarrow z^2 + 81z - 810 = 0 \Rightarrow z = 9, z = -90 \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ z = -90 \Rightarrow 3^x = -90 \text{ (sin solución real)} \end{cases}$

f) $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 + \dfrac{\left(3^x\right)^2}{3} + \dfrac{3^x}{3} = 111$

Así,

$z = 3^x \Rightarrow z^2 + \dfrac{z^2}{3} + \dfrac{z}{3} = 111 \Rightarrow 4z^2 + z - 333 = 0 \Rightarrow z = 9,\ z = -\dfrac{37}{4} \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ z = -\dfrac{37}{4} \Rightarrow 3^x = -\dfrac{37}{4} \text{ (sin solución real)} \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones

87. Comprueba en cada caso si los valores indicados forman una solución de los sistemas dados.

a) $\begin{cases} x+2y=4 \\ x-y=-1 \end{cases}$ $x=2,\ y=1$

b) $\begin{cases} x-2y-6z=2 \\ x+y+z=0 \\ -2x+y+3z=-4 \end{cases}$ $x=2,\ y=1,\ z=1$

a) No, porque no verifica la 2.ª ecuación

b) No, porque no verifica la 1.ª ecuación.

88. Comprueba que todas las ternas de números reales $(t,\ t,\ 3t-4)$, siendo t cualquier número real, son soluciones del siguiente sistema.

$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ -x+y=0 \\ 3y-z=4 \end{cases}$$

$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ -x+y=0 \\ 3y-z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2t-3t+4=4 \\ -t+t=0 \\ 3t-3t+4=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=4 \\ 0=0 \\ 4=4 \end{cases}$ Al verificarse las tres ecuaciones, las ternas son solución.

89. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 5x+2y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-3y=\frac{7}{3} \\ \frac{1}{5}x-\frac{3}{4}y=\frac{3}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} y=\frac{x+1}{2}+3 \\ y=2x+10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2(2x+y)-3(3x-2y)=-34 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+3(2x+y)=-1 \\ \frac{x}{2}+3y=14 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{3}{y+1}=-1 \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y+1}=\frac{3}{2} \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 5x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=13 \\ -19y=57 \end{cases} \Rightarrow y=-3,\ x=2$ x = 2, y =–3

b) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-3y=\frac{7}{3} \\ \frac{1}{5}x-\frac{3}{4}y=\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-9y=7 \\ 4x-15y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-9y=7 \\ -3y=2 \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{2}{3},\ x=\frac{1}{2}$

c) $\begin{cases} y=\frac{x+1}{2}+3 \\ y=2x+10 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2}+3=2x+10 \Rightarrow x=-\frac{13}{3},\ x=\frac{4}{3}$

d) $\begin{cases} 4x+2y-9x+6y=-34 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+8y=-34 \\ 3x-2y=12 \end{cases} \Rightarrow 7x=14 \Rightarrow x=2,\ y=-3$

e) $\begin{cases} 8x+3y=-1 \\ x+6y=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+3y=-1 \\ x=28-6y \end{cases} \Rightarrow 8(28-6y)+3y=-1 \Rightarrow y=5,\ x=-2$

f) $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y+1} \Rightarrow \begin{cases} a-3b=-1 \\ 2a+b=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2, y=1$

90. Resuelve y clasifica los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x-6y=-6 \\ 2x^2+y^2=76 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3xy-2x^2=-26 \\ 4x+5y=-7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2-5y^2=-2 \\ -2x^2+4y^2=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x+\dfrac{y}{2}=15 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x^2-2(x-y)^2=36 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2y^2}{3}=-\dfrac{61}{24} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x=6y-6 \\ 2(6y-6)^2+y^2=76 \end{cases} \Rightarrow 73y^2-144y-4=0 \Rightarrow y=2, y=\dfrac{-2}{73}$

Luego $y=2, x=6$, $y=\dfrac{-2}{73}, x=-\dfrac{450}{73}$. Es un sistema compatible determinado.

b) $\begin{cases} -3x\cdot\dfrac{7+4x}{5}-2x^2=-26 \\ y=-\dfrac{7+4x}{5} \end{cases} \Rightarrow -22x^2-21x+130=0 \Rightarrow x=2,\ x=-\dfrac{65}{22}$

Luego $x=2, y=-3$, $x=-\dfrac{65}{22}, y=\dfrac{53}{55}$. Es un sistema compatible determinado.

c) $\begin{cases} 3x^2-5y^2=-2 \\ -2x^2+4y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2-10y^2=-4 \\ -6x^2+12y^2=6 \end{cases} \Rightarrow y=\pm 1$

Luego $x=1, y=1$, $x=1, y=-1$, $x=-1, y=1$, $x=-1, y=-1$. Es un sistema compatible determinado.

d) $\begin{cases} 6x+y=30 \\ 2y+3x=xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=30-6x \\ 60-12x+3x=30x-6x^2 \end{cases} \Rightarrow x=4,\ x=\dfrac{5}{2}$

Luego $x=4, y=6$, $x=\dfrac{1}{2},\ y=15$.

e) $\begin{cases} -x^2-2y^2+4xy=36 \\ 3x+2y=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2-2y^2+4xy=36 \\ x=\dfrac{30-2y}{3} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{900+4y^2-120y}{9}-2y^2+\dfrac{120y-8y^2}{3}=36 \Rightarrow y=6, y=\dfrac{102}{23}$

Luego $y=6, x=6$, $y=\dfrac{102}{23}, x=\dfrac{162}{23}$. Es un sistema compatible determinado.

f) $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2y^2}{3}=-\dfrac{61}{24} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16x^2+3y^2=8 \\ 12x^2-16y^2=-61 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -48x^2+9y^2=24 \\ 48x^2-64y^2=-244 \end{cases} \Rightarrow 55y^2=220 \Rightarrow y=\pm 2$.

Luego $y=2,\ x=\dfrac{1}{2}$; $y=2,\ x=-\dfrac{1}{2}$; $y=-2,\ x=\dfrac{1}{2}$; $y=-2,\ x=-\dfrac{1}{2}$. Es un sistema compatible determinado.

91. Encuentra todas las soluciones de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases}\sqrt{x}-3y=2\\4x-2y=16\end{cases}$

b) $\begin{cases}2x-\sqrt{y-1}=2\\x-2y=-8\end{cases}$

c) $\begin{cases}2\sqrt{x^2-3}+y=\dfrac{7}{2}\\3x-y=\dfrac{9}{2}\end{cases}$

d) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\x-y=-5\end{cases}$

e) $\begin{cases}\sqrt{3x}+\sqrt{2y}=1\\2x-y=4\end{cases}$

f) $\begin{cases}\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=0\\2x+\dfrac{y}{2}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$

a) $\begin{cases}\sqrt{x}-3y=2\\4x-2y=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9y^2+12y+4\\x=\dfrac{1}{2}y+4\end{cases}\Rightarrow 9y^2+\dfrac{23}{2}y=0\Rightarrow\begin{cases}y=0,\ x=4 \text{ (válida)}\\y=-\dfrac{23}{18},\ x=\dfrac{121}{36}\text{ (no válida)}\end{cases}$

b) $\begin{cases}2x-\sqrt{y-1}=2\\x-2y=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y-1=4x^2+4-8x\\y=\dfrac{1}{2}x+4\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}x+3=4x^2+4-8x\Rightarrow\begin{cases}x=2,\ y=5 \text{ (válida)}\\x=\dfrac{1}{8},\ y=\dfrac{65}{16}\text{ (no válida)}\end{cases}$

c) $\begin{cases}2\sqrt{x^2-3}+y=\dfrac{7}{2}\\3x-y=\dfrac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x^2-12=\dfrac{49}{4}+y^2-7y\\x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{y}{3}\end{cases}\Rightarrow 4\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{y}{3}\right)^2-12=\dfrac{49}{4}+y^2-7y\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3}{2},\ x=2 \text{ (válida)}\\y=\dfrac{183}{10},\ x=\dfrac{38}{5}\text{ (no válida)}\end{cases}$

d) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5\\x-y=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=25+y-10\sqrt{y}\\x=y-5\end{cases}\Rightarrow y-5=25+y-10\sqrt{y}\Rightarrow\sqrt{y}=3\Rightarrow x=4, y=9$

e) $\begin{cases}\sqrt{3x}+\sqrt{2y}=1\\2x-y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3x}+\sqrt{2(2x-4)}=1\\y=2x-4\end{cases}\Rightarrow x^2-30x+81=0\Rightarrow x=3, y=2; x=27, y=50$ (no son válidas). El sistema no tiene solución.

f) $\begin{cases}\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}=0\\2x+\dfrac{y}{2}=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{y}\\\dfrac{2}{y}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow y^2-5y+4=0\Rightarrow x=1, y=1; x=\dfrac{1}{4}, y=4$

92. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales indicando si son compatibles o incompatibles, y escribiendo todas sus soluciones.

a) $\begin{cases} x+3y-2z=6 \\ 2x+3y-2z=8 \\ 4x+2y-6z=6 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+2y-2z=4 \\ 2x+5y-2z=10 \\ 4x+9y-6z=18 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ 2x-3y+5z=6 \\ 5x-3y+8z=6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y-3z=3 \\ 3x-2y+z=7 \\ 5x+2y-5z=1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+2y-z=-5 \\ 5x-y+2z=11 \\ 6x+y+z=5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ 2x-4y+3z=-2 \\ 4x-y+6z=-4 \end{cases}$

a) $\begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -10y+2z=-18 \end{cases} \quad E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=6 \\ -3y+2z=-4 \\ -7y=-14 \end{cases}$ $\Rightarrow y=2$, $z=1$, $x=2$. C. determinado

b) $\begin{matrix} E_2-3E_1 \\ E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=3 \\ -8y+10z=-2 \\ -8y+10z=-14 \end{cases}$. Incompatible.

c) $\begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ y+2z=2 \end{cases} \quad E_3-E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=4 \\ y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$ $\Rightarrow z=t$, $y=2-2t$, $x=6t$. C. indeterminado

d) $\begin{matrix} E_2-5E_1 \\ E_3-6E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=-5 \\ -11y+7z=36 \\ -11y+7z=35 \end{cases}$. Incompatible.

e) $\begin{matrix} E_2-2E_1 \\ E_3-5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ -18y+18z=36 \end{cases} \quad E_3-2E_2 \Rightarrow \begin{cases} x+3y-2z=-6 \\ -9y+9z=18 \\ 0=0 \end{cases}$ $z=t$, $y=t-2$, $x=-t$. C. indeterminado

f) $\begin{matrix} E_2-E_1 \\ E_3-2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ -3y+10z=-20 \end{cases} \quad 5E_3-3E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-2z=8 \\ -5y+5z=-10 \\ 35z=-70 \end{cases}$ $\Rightarrow z=-2$, $y=0$, $x=2$. C. determinado

93. *Encuentra las soluciones enteras del siguiente sistema.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2+z^2=10} \\ \boldsymbol{y^2+z^2=13} \\ \boldsymbol{x^2+2y-6z=-13} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2=10 \\ y^2+z^2=13 \\ x^2+2y-6z=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=10-z^2 \\ y^2=-z^2+13 \\ 10-z^2+2y-6z=-13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=13-z^2 \\ y=\dfrac{z^2+6z-23}{2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{z^2+6z-23}{2}\right)^2=13-z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^4+12z^3-6z^2-276z+477=0 \Rightarrow (z-3)(z^3+15z^2+39z-159)=0$$

La única solución entera del polinomio es $z=3$, y con ella: $z=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{13-3^2}=\pm 2$; $x=\pm\sqrt{10-3^2}=\pm 1$

Las soluciones son las ternas: $x=1$, $y=2$, $z=3$; $x=-1$, $y=2$, $z=3$, ya que las ternas formadas con el valor $y=-2$ no son válidas al no verificarse la tercera ecuación.

94. Resuelve los sistemas.

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5 \cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15 \cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3 \cdot 5^{x+1} + 2 \cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

g) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases}$

j) $\begin{cases} -3x + y = 70 \\ \log y - \log x^2 = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases} \Rightarrow 2^x = A, 3^y = B \Rightarrow \begin{cases} A + B = 11 \\ A^2 + B^2 = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \;\; B = 9 \Rightarrow x = 1 \;\; y = 2 \\ A = 9 \;\; B = 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log 9}{\log 2} \quad y = \dfrac{\log 2}{\log 3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5 \cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases} \Rightarrow 2^x = A, 3^y = B \Rightarrow \begin{cases} A + 6B = 8 \\ \dfrac{5}{2}A + B^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \;\; B = 1 \Rightarrow x = 1 \;\; y = 0 \\ A = -76 \;\; B = 14 \text{ Sin solución real} \end{cases}$

c) $\begin{cases} 15 \cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3 \cdot 5^{x+1} + 2 \cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$. Si $A = 5^x, B = 6^y \Rightarrow \begin{cases} 15A - 6B = 339 \\ 15A + 72B = 807 \end{cases} \Rightarrow A = 25, B = 6 \Rightarrow x = 2, y = 1$

d) $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x = 3y - 1 \end{cases} \Rightarrow 3^{3y-1} + 3^{y+1} = 18$. Si $z = 3^y \Rightarrow \dfrac{1}{3}z^3 + 3z = 18 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow y = 1, x = 2$

e) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \log \dfrac{x}{y} = \log 10 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{33 - y}{y} = 10 \Rightarrow 33 - 11y = 0 \Rightarrow y = 3,\; x = 30$

f) $\begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = 100 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow 100y^2 + y^2 = 29 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{29}{101}} \Rightarrow x = \pm 10\sqrt{\dfrac{29}{101}}, y = \pm\sqrt{\dfrac{29}{101}}$

g) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ \dfrac{100y}{x} = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{10}{x} \\ \dfrac{1000}{x^2} = 250 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 5$

h) $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 (y+2)^3 = 100 \\ (x-2)^4 (y+2)^5 = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow y = 10^5 - 2, x = 10^{-\frac{13}{2}} + 2$

i) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ 2^{x-24} = 2^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10y \\ x = 2y + 24 \end{cases} \Rightarrow x = 30, y = 3$

j) $\begin{cases} -3x + y = 70 \\ \log y - \log x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 70 + 3x \\ \dfrac{y}{x^2} = 10 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{14}{5}, y = \dfrac{392}{5}; x = -\dfrac{5}{2}, y = \dfrac{125}{2}$

95. Calcula el valor de k para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones. Para ese valor, escribe dichas soluciones.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 2z = 4} \\ \boldsymbol{2x + 5y - 2z = 10} \\ \boldsymbol{4x + 9y - 6z = k} \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss: $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = k - 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ 0\,z = k - 18 \end{cases}$

Para $k = 18$, se obtiene la ecuación $0 \cdot z = 0$, que se verifica para cualquier valor de z.

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por las fórmulas: $\begin{cases} x = 4 + 2\lambda - 2(2 - 2\lambda) = 6\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

96. Calcula los valores de k para que el siguiente sistema sea incompatible: $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 3z = 3} \\ \boldsymbol{3x - 2y + z = 7} \\ \boldsymbol{5x + 2y - 5z = k} \end{cases}$ **.**

Aplicando el método de Gauss: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ -8y + 10z = k - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ 0\,z = k - 13 \end{cases}$

Cuando $k \neq 13$, la última ecuación no tiene sentido y, por tanto, el sistema no tiene solución.

97. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 3y - 2z + 2w = 12} \\ \boldsymbol{2x - 2y - z + w = 5} \\ \boldsymbol{3x + y - 2z - 4w = 16} \\ \boldsymbol{3x - 3z - 3w = 15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ -8y + 4z - 10w = -20 \\ -9y + 3z - 9w = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ z - 7w = -1 \\ -3z - 45w = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ z - 7w = -1 \\ -66w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = 0 \\ z = -1 \\ y = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

98. Dado el sistema lineal de ecuaciones dependientes del parámetro real a: $\begin{cases} \boldsymbol{x + ay + z = 1} \\ \boldsymbol{2y + az = 2} \\ \boldsymbol{x + y + z = 1} \end{cases}$

a) Discute el sistema para los distintos valores de a. **b)** Resuelve el sistema para $a = 3$ y $a = 1$.

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + ay + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ (a - 1)y = 0 \end{cases}$

Si $a = 1$, la tercera ecuación es $0 = 0$, luego es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Si $a = 0$, el sistema es incompatible. Si $a \neq 1$ y $a \neq 0$, el sistema es compatible determinado con una única solución.

b) Si $a = 3$, entonces la solución es: $y = 0$, $z = \frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{3}$

Si $a = 1$, entonces la solución es: $y = \lambda$, $z = 2 - 2\lambda$, $x = 1 - \lambda - 2 + 2\lambda = -1 + \lambda$

Síntesis

99. Escribe una ecuación de segundo grado tal que una de sus raíces sea igual al doble de la otra.

Respuesta abierta, por ejemplo: Raíces: 2, 1. Ecuación: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

100. Escribe una ecuación de segundo grado tal que sus dos raíces sean inversas y su suma valga $\frac{10}{3}$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{10}{3} = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = 1 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow$ Si $a = 1 \Rightarrow x^2 - \dfrac{10}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$

101. Escribe una ecuación de tercer grado tal que tenga como soluciones $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $(x+2)(x-3)(x-5) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

102. Escribe una ecuación bicuadrada tal que sus únicas soluciones reales sean 1 y –1.

$(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0$

103. a) Calcula la suma y el producto de las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x + c = 0$.

b) Calcula el valor de c para que el producto de las soluciones de la ecuación anterior valga –18.

a) $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} = -3$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = c$

b) $x_1x_2 = \dfrac{c}{a} = c = -18$

104. Halla la expresión de un polinomio $P(x)$ de segundo grado tal que $P(0) = 2$, $P(1) = -1$ y $P(-1) = 1$.

Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases} P(0) = c = 2 \\ P(1) = a + b + c = -1 \\ P(-1) = a - b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b = -3 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2,\ b = -1, c = 2$$

Luego: $P(x) = -2x^2 - x + 2$

105. Halla la expresión de un polinomio de tercer grado que verifique que: $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 2$, $P(-2) = -6$.

Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases} P(0) = d = 0 \\ P(1) = a + b + c + d = 0 \\ P(-1) = -a + b - c + d = 2 \\ P(x) = -8a + 4b - 2c + d = -6 \end{cases} E_2 + E_3 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 2b = 2 \\ -a + b - c + d = 2 \\ -8a + 4b - 2c + d = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 1 \\ a + c = -1 \\ 8a + 2c = 10 \end{cases} E_4 + 2E_3 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 1 \\ a = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

El polinomio buscado es $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$.

106. Encuentra la solución de la ecuación: $5\log x = 3\log x + 2\log 6$

$5\log x = 3\log x + 2\log 6 \Rightarrow x^5 = 36x^3 \Rightarrow x = 0, x = -6$ (soluciones no válidas), $x = 6$ (solución válida).

107. Resuelve la siguiente ecuación: $13^{x^2+2x} - \frac{1}{13} = 0$

$13^{x^2+2x} = 13^{-1} \Rightarrow x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

108. Resuelve el siguiente sistema por tres métodos.

$$\begin{cases} 2x + 3y = -6 \\ 5x - y = 19 \end{cases}$$

La solución por cualquiera de los métodos es: $x = 3, y = -4$.

CUESTIONES

109. Demuestra que la ecuación $x^2-ax-a^2=0$ tiene dos soluciones reales diferentes para cualquier valor de *a* no nulo.

$\Delta = (-a)^2 - 4\cdot 1\cdot(-a^2) = a^2 + 4a^2 = 5a^2 > 0$ para cualquier $a \neq 0$.

110. Escribe, en cada caso, una ecuación de segundo grado:

a) Que no tenga ninguna solución real.

b) Que tenga una única solución real doble.

c) Que la suma de las raíces sea 7 y el producto –60.

d) Que el producto de las raíces sea el doble que su suma.

a) $x^2 + 1 = 0$ **b)** $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$ **c)** $x^2 - 7x - 60 = 0$ **d)** $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

111. a) Compara las soluciones de la ecuación de segundo grado $3x^2 - 4x - 4 = 0$ con las de la ecuación $-4x^2 - 4x + 3 = 0$.

b) Demuestra que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + 2 = 0$ son inversas de las de la ecuación $2x^2 + bx + 1 = 0$.

c) Demuestra que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son inversas de las de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

a) Las soluciones de la primera son $x = 2$ y $x = -\frac{2}{3}$, y las de la segunda, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{3}{2}$. Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

b) Las soluciones de la primera son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{2}$, y las de la segunda, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{4}$, que son inversas porque $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8}}{2} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 8}}{4} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \frac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

De la misma forma: $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 8}}{2} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8}}{4} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \frac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \frac{8}{8} = 1$.

c) En efecto, son inversas porque $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4ac} = \frac{4ac}{4ac} = 1$.

Y de la misma forma con la otra pareja de soluciones.

112. **a)** Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tengan como única solución la (0,0).

b) Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones entre las que se encuentre la (0,0)

a) Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ **b)** Respuesta abierta, por ejemplo: $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$

113. **a)** Escribe una ecuación racional que no tenga ninguna solución.

b) Escribe una ecuación bicuadrada que no tenga ninguna solución.

c) Escribe una ecuación irracional que no tenga ninguna solución.

a) $\dfrac{x^2+1}{x+1} = 0$ **b)** $(x^2+1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ **c)** $\sqrt{x} = -3$

PROBLEMAS

114. La suma de tres números pares consecutivos es 1242. ¿Cuáles son esos números?

Números: x, $x+2$, $x+4$

$x + x + 2 + x + 4 = 1242 \Rightarrow 3x = 1236 \Rightarrow x = 412$. Los números son: 412, 414 y 416.

115. Calcula dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 545.

Números: x, $x+1$

$x^2 + (x+1)^2 = 545 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 544 = 0 \Rightarrow x = -17$ (solución no válida), $x = 16$ (solución válida).

Los dos números son: 16 y 17.

116. Un triángulo rectángulo está formado por tres lados cuyas longitudes son números consecutivos. ¿Cuánto miden los lados de dicho triángulo?

Lados: x, $x+1$, $x+2$

$(x+2)^2 = x^2 + (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ (solución no válida), $x = 3$ (solución válida).

Las longitudes de los lados son: 3, 4 y 5.

117. La suma de los cuadrados de dos números naturales impares consecutivos es 1570. Calcula el valor del siguiente impar.

Números impares desconocidos: $2x+1$, $2x+3$. El siguiente impar es $2x+5$.

$(2x+1)^2 + (2x+3)^2 = 1570$. Luego $x = 13$, $x = -15$ (solución no válida). El siguiente impar es $2 \cdot 13 + 5 = 31$.

118. Al dividir dos números que suman 147 se obtiene 5 de cociente y 9 de resto. ¿Cuáles son esos números?

Los números son x e y. Suponemos que x es mayor que y.

$\begin{cases} x + y = 147 \\ x = 5y + 9 \end{cases}$ cuyas soluciones son $x = 124$ e $y = 23$. Los números son: 124 y 23.

119. Dos capitales iguales se colocan al 3% y al 4%, respectivamente, durante un año. El segundo capital produce 12,50 euros más de intereses que el primero. ¿A cuánto ascendían los capitales iniciales iguales?

Sea C el capital: $0{,}04C - 0{,}03C = 12{,}5 \Rightarrow C = 1250$ €.

120. Un padre tiene cuatro veces la edad de su hija. Dentro de cinco años sólo tendrá tres veces la edad de ella. ¿Cuáles son las edades actuales del padre y la hija?

	E. Actual	E. dentro de 5 años
Hija	x	$x+5$
Padre	$4x$	$4x+5$

$4x + 5 = 3(x+5) \Rightarrow x = 10$

Edad actual del padre 40 años, edad actual de la hija 10 años.

121. Hace tres años, las edades de dos personas estaban en la proporción 6 : 1, y dentro de seis años estarán en la proporción 3 : 1. ¿Cuáles son las edades que tienen ahora ambas personas?

	Hace tres años	Actual	Dentro de seis años
Persona A	$6x$	$6x+3$	$6x+9$
Persona B	x	$x+3$	$x+9$

$6x + 9 = 3(x+9) \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

Actualmente, las edades son de 39 y 9 años respectivamente.

122. Ernesto ha comprado un ordenador de sobremesa por valor de 400 €. A la hora de pagar, ha utilizado 32 billetes, unos de 20 € y otros de 5 € ¿Cuántos billetes de cada cantidad ha entregado?

Llamamos: x= número de billetes de 20 €, y= número de billetes de 5 €.

$\begin{cases} x + y = 32 \\ 20x + 5y = 400 \end{cases}$ La solución del sistema es: x= 16 e y= 16.

Ha entregado 16 billetes de 20 € y 16 billetes de 5 €.

123. Halla una fracción tal que se cumpla que si al numerador y al denominador se les suma una unidad, la fracción equivale a $\frac{1}{3}$, y si se les restan 3 unidades, equivale a $\frac{1}{5}$.

Llamamos x al numerador e y al denominador.

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+1} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x-3}{y-3} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3 = y + 1 \\ 5x - 15 = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 5x - y = 12 \end{cases} \Rightarrow x = 7, y = 23$$

La fracción es $\frac{7}{23}$.

124. Un almacenista trabaja con tres tipos de televisores. Por cada uno de los televisores del primer tipo, de gama baja, paga 350 €; por los del segundo, de gama media, 650 € y, finalmente, por los del tercero, de gama alta, 1150 €.

Un pedido de 240 unidades tiene un importe de 160 000 €. Determina el número de televisores pedidos sabiendo que el número de televisores del segundo tipo es el doble que los del primer y tercer tipo juntos.

Llamamos: x, y, z al número de televisores de gama baja, media y alta, respectivamente.

$\begin{cases} x + y + z = 240 \\ 350x + 650y + 1150z = 160000 \\ y = 2(x+z) \end{cases} \Rightarrow x = 45, y = 160, z = 35$. Luego se han pedido 45 televisores de gama baja, 160 televisores de gama media y 35 televisores de gama alta.

125. Un ciclista realiza un trayecto a la velocidad de 12 km/h. En cierto momento se le pincha una rueda, por lo que debe regresar andando a una velocidad de 4 km/h. Calcula a qué distancia del punto de partida se le pinchó la rueda, sabiendo que el tiempo total que invirtió entre la ida y la vuelta fue de dos horas y media.

Sea x la distancia en kilómetros desde el punto de salida hasta el lugar donde pinchó.

Tiempo invertido en la ida: $\frac{x}{12}$. Tiempo invertido en la vuelta: $\frac{x}{4}$.

$\frac{x}{12}+\frac{x}{4}=2,5 \Rightarrow \frac{4x}{12}=2,5 \Rightarrow x=7,5$ km. Se le pinchó la rueda a 7, 5 km del punto de partida.

126. Una fábrica de perfumes dispone de 600 L de un producto *A* y de 400 L de un producto *B*. Mezclando ambos productos se obtienen esencias diferentes.

Se quieren preparar dos clases de perfume, la primera, más barata, debe llevar tres partes de *A* y una de *B*, y la segunda clase, de mayor calidad, debe llevar los productos A y B al 50 % .

a) ¿Cuántos litros de cada clase de perfume se podrán preparar?

b) ¿Qué ingresos totales se obtendrán por la venta de la totalidad de los productos fabricados?

En el dibujo del enunciado se observa que el perfume más barato se vende a 50 €/L y el otro a 60 €/L.

a) Sean x= litros que se prepararán de la primera clase, y= litros que se prepararán de la segunda.

$\begin{cases} \frac{3x}{4}+\frac{y}{2}=600 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=400 \end{cases} \Rightarrow x= 400,\ y= 600$. Se podrán preparar 400 litros de la primera clase de perfume y 600 litros de la segunda clase de perfume.

b) Se obtendrá un ingreso total de $400 \cdot 50 + 600 \cdot 60 = 56\,000$ €.

127. Se quiere construir un marco rectangular para adornar una fotografía. Para ello se dispone de un listón de madera de 50 cm de longitud.

a) Escribe la expresión algebraica que relaciona el área encerrada por el marco con la longitud de uno de sus lados.

b) Determina las dimensiones del marco si se quiere que el área sea de 156 cm^2.

a) Sean a y $25 - a$ las medidas de los dos lados del rectángulo. Área: $S= 25a - a^2$.

b) $25a - a^2= 156$, de soluciones a=13, a= 12.Luego las dimensiones serán 12 y 13 cm.

128. En un hotel turístico tienen un total de 36 habitaciones con 60 camas. Sólo existen habitaciones individuales y dobles. Calcula el número de habitaciones de cada tipo que hay.

Sea x el número de habitaciones individuales e y el de dobles.

$\begin{cases} x+y=36 \\ x+2y=60 \end{cases} \Rightarrow x=12, y=24$. Hay 12 habitaciones individuales y 24 habitaciones dobles.

129. Un joyero compra dos anillos de oro por un total de 825 € y los vende por 863,75 € Calcula cuánto pagó por cada anillo si en la venta del primero ganó un 15% y en la del segundo perdió un 5%.

Sea x el precio en euros del primer anillo e y el precio en euros del segundo anillo.

$\begin{cases} x+y=825 \\ 1,15x+0,95y=863,75 \end{cases} \Rightarrow x=400, y=425$ .Pagó por el primer anillo 400 € y 425 € por el segundo anillo.

130. En una tienda de regalos se adquiere un libro y una pulsera. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 35 €, pero el dependiente informa al cliente de que a los libros se les aplica una rebaja del 6 %, y a las pulseras, una rebaja del 12 %, por lo que en realidad debe pagar 31,40 €. ¿Qué precio marcaban el libro y la pulsera? ¿Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de estos dos productos?

Sea x el precio inicial del libro e y el de la pulsera.

$$\begin{cases} 0,94x + 0,88y = 31,4 \\ x + y = 35 \end{cases} \Rightarrow x = 10, y = 25 .$$

Los productos marcaban 10 € el libro y 25 € la pulsera. Finalmente, 9,40 € y 22 €,respectivamente.

131. Un coche sale de un punto *A* a una velocidad de 90 km/h. En el mismo instante, otro coche sale a su encuentro desde un punto *B* situado a 10 km detrás de *A* y a una velocidad de 115 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en darle alcance?

El primer coche recorre x km a una velocidad de 90 km/h. El segundo coche recorre x+10 km a 115 km/h.

El tiempo que están circulando es el mismo: $\frac{x}{90} = \frac{x+10}{115}$, luego x=36 km.

El tiempo que tarda en dar alcance el segundo coche al primero es $\frac{36}{90} = 0,4\,\text{h} = 24\,\text{min}$.

132. Un coche sale de *A* en dirección a *B* a una velocidad de 80 km/h. Tres minutos después, otro coche sale de *B* en dirección a *A* a una velocidad de 100 km/h. Calcula en qué punto se encontrarán los dos coches si *A* y *B* distan 22 km.

El primer coche está circulando durante $\frac{x}{80}$. El segundo coche está circulando durante $\frac{22-x}{100}$.

El segundo sale 3 minutos después: $\frac{x}{80} = \frac{22-x}{100} + \frac{3}{60} \Rightarrow x$= 12. Se encuentran a 12 km de *A*.

133. El área de un rectángulo es de 35 unidades cuadradas. Si se aumenta un lado en2 unidades y se disminuye el otro en 3 unidades, el área disminuye en 17 unidades cuadradas. Halla las dimensiones del rectángulo inicial.

Sean x, y las dimensiones iniciales.

$$\begin{cases} xy = 35 \\ (x+2)(y-3) = 35-17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 35 \\ -3x + 2y = -11 \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{-11+3x}{2}\right) = 35 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 70 = 0 \Rightarrow x = 7 \text{, (solución válida)}$$

$x = \frac{-10}{3}$ solución no válida. Si $x = 7$, entonces $y = 5$.Luego las dimensiones son 7 y 5 cm.

134. Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20% del total y Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas.

Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 CENT por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

Sea x el número de panfletos repartidos por Julia; y, los repartidos por Clara, y z, por Miguel.

$$\begin{cases} y = 0,20(x+y+z) \\ x + y = 850 \\ z = 100 + x \end{cases} \Rightarrow x = 550, y = 300, z = 650$$

El dinero que recibe cada uno es: Julia: 550 · 0,01 = 5,50 €; Clara, 300 · 0,01 = 3 €; Miguel, 650 · 0,01 = 6,50 €.

135. Un técnico informático espera obtener 360 € por la reparación de varios equipos. El técnico se da cuenta de que cuatro ordenadores no tienen posible reparación y, para obtener el mismo beneficio, aumenta en 4,50 € el precio que va a cobrar por un equipo reparado. ¿Cuántos ordenadores tenía al principio? ¿A qué precio cobrará finalmente cada reparación?

Sea $x$el número de ordenadores que, en principio, debe reparar. Por cada uno cobrará $\frac{360}{x}$ €.

$$\left(\frac{360}{x}+4,5\right)(x-4)=360 \Rightarrow 360-\frac{1440}{x}+4,5x-18=360 \Rightarrow 4,5x^2-18x-1440=0 \Rightarrow$$

$x=20$, $x=-16$ (solución no válida).

Al principio, tenía 20 ordenadores para reparar y cobraba $\frac{360}{20}=18$ € por cada reparación, ahora cobrará 22,50 €.

136. A primera hora de la mañana, en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10 €, 20 € y 50 €) con un valor total de 16 000 €. Sabiendo que por cada 3 billetes de 50 € son necesarios 4 billetes de 20 €:

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber.

b) Resuélvelo por el método de Gauss.

Sea x el número de billetes de 10 €, y el de 20 € y z el de 50 €.

$$\begin{cases} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=16000 \\ 4z=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=800 \\ 3y-4z=0 \\ 10x+20y+50z=16\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=800 \\ 3y-4z=0 \\ 10y+40z=8000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=800 \\ 3y-4z=0 \\ 160z=24\,000 \end{cases}$$

Luego $z=150$, $y=200$, $x=450$. Se necesitan 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 50 €.

137. Un comercio tiene un total de 270 unidades de productos de tres tipos: *A*, *B* y *C*. Del tipo *A* tiene 30 unidades menos que de la totalidad de *B* más *C*, y del tipo *C* tiene el 35% de la suma de *A* más *B*. ¿Cuántos productos de cada tipo hay en el comercio?

$$\begin{cases} A+B+C=270 \\ A=B+C-30 \\ C=0,35(A+B) \end{cases} \Rightarrow A=120, B=80, C=70$$

Hay 120 productos del tipo *A*, 80 productos del tipo *B* y 70 productos del tipo *C*.

138. La oferta y la demanda del mercado de un conjunto de ropa para practicar judo en cierto momento vienen dadas por las expresiones:

$$\boldsymbol{f_0=0,45p^2-20p+500}$$

$$\boldsymbol{f_d=0,1p^2-18,5p+1000}$$

Siendo $30\le p\le 50$, en euros, calcula el punto de equilibrio de este mercado.

$$\begin{cases} f_o=0,45p^2-20p+500 \\ f_d=0,1p^2-18,5p+1000 \end{cases} \Rightarrow 0,35p^2-1,5p-500=0 \Rightarrow p=40$$

El punto de equilibro es 40 € y $f_o=f_d=420$.

139. La tabla muestra la oferta y la demanda del mercado de teléfonos móviles de cierto modelo para algunos valores del precio.

p	Unidades ofertadas	Unidades demandadas
150	725	1400
175	800	1100
200	1200	650

a) Calcula las expresiones de las funciones de oferta y demanda sabiendo que son polinomios de segundo grado con la indeterminada *p* variando entre 150 y 200 euros.

b) Calcula el punto de equilibrio del mercado.

a) Función de oferta: $f_o = ap^2 + bp + c$

$$\begin{cases} 150^2a + 150b + c = 725 \\ 175^2a + 175b + c = 800 \\ 200^2a + 200b + c = 1200 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{13}{50}, b = -\frac{163}{2}, c = 7100 \Rightarrow f_o = \frac{13}{50}p^2 - \frac{163}{2}p + 7100$$

Función de demanda: $f_d = ap^2 + bp + c$

$$\begin{cases} 150^2a + 150b + c = 1400 \\ 175^2a + 175b + c = 1100 \\ 200^2a + 200b + c = 650 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{25}, b = 27, c = 50 \Rightarrow f_d = -\frac{3}{25}p^2 + 27p + 50$$

b) Punto de equilibrio: $f_o = f_d \Rightarrow p = 100$ (solución no válida), $p = \frac{3525}{19} \simeq 186$ (solución válida). $f_o = f_d \simeq 929$

140. Una población pasa de 20 250 a 21 520 habitantes en los años 2010 y 2015. Utilizando el modelo de crecimiento exponencial de las poblaciones, calcula:

a) La tasa de crecimiento exponencial para ese periodo

b) La población que se estima para el año 2020 suponiendo que no varía la tasa de crecimiento

c) La población que había en 2003 considerando la tasa de crecimiento constante.

a) $21\,520 = 20\,250e^{(2015-2010)\cdot r} \Rightarrow e^{5r} = \frac{21\,520}{20\,250} \Rightarrow 5r = \ln\left(\frac{21\,520}{20\,250}\right) \Rightarrow r = 0{,}012 \Rightarrow r\ \% = 1{,}2\ \%$

b) $P_F = 20\,250e^{(2020-2010)\cdot 0{,}012} = 22\,832$ habitantes

c) $20\,250 = P_{2003}e^{(2010-2003)\cdot 0{,}012} \Rightarrow P_{2003} = \frac{20\,250}{e^{7\cdot 0{,}012}} = 18\,618$ habitantes

141. Calcula el tiempo necesario para que una población verifique las siguientes variaciones:

a) Que se doble, suponiendo que la tasa de crecimiento exponencial es del 1,25 %.

b) Que se triplique, suponiendo que la tasa de crecimiento exponencial es $r = 0{,}025$.

a) Utilizando la ecuación $P_f = P_ie^{rt}$ y suponiendo que $P_f = 2P_i$, se obtiene *t*:

$$2P_i = P_ie^{0{,}0125t} \Rightarrow e^{0{,}0125t} = 2 \Rightarrow \ln\left(e^{0{,}0125t}\right) = \ln 2 \Rightarrow 0{,}0125t = \ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{0{,}0125} = 55{,}45$$

Han de pasar 55,45 años para doblar la población.

b) Utilizando la ecuación $P_f = P_ie^{rt}$ y suponiendo que $P_f = 3P_i$, se obtiene *t*:

$3P_i = P_ie^{0{,}025t} \Rightarrow e^{0{,}025t} = 3 \Rightarrow t = 43{,}94$. Han de pasar 43,94 años para triplicar la población.

142. Un campo de labranza cuya área es de 192 m^2 tiene forma rectangular y su perímetro mide 56 m.

a) Calcula las dimensiones de dicho campo de labranza. **b)** Calcula la medida de sus diagonales.

Sean *x*, *y* las dimensiones del campo de labranza.

$$\begin{cases} 2x+2y=56 \\ xy=192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=28 \\ y=\dfrac{192}{x} \end{cases} \Rightarrow x^2-28x+192 \Rightarrow x=12, x=16$$. Si $x=12 \Rightarrow y=16$, si $x=16 \Rightarrow y=12$

a) Las medidas son 12 m y 16 m. **b)** Las diagonales miden $\sqrt{12^2+16^2}=20$ m.

143. La siguiente tabla muestra la población en algunos países europeos (en millones de personas) en los años 2005 y 2013:

	Alemania	Francia	Italia	Portugal	Finlandia
2005	82,5	62,8	57,9	10,5	5,2
2013	80,5	65,6	59,7	10,5	5,4

a) Calcula la tasa de crecimiento exponencial de la población para todos estos países en el periodo de 2005 a 2013.

b) Ordena de mayor a menor estos países, según su crecimiento relativo de la población.

a) Utilizando la ecuación $P_f=P_ie^{rt}$ y despejando, en cada caso, el valor de *t*, se obtiene:

	Alemania	Francia	Italia	Portugal	Finlandia
TCE [2005 , 2013]	–0,0031	0,0055	0,0038	0,0000	0,0047

b) Francia – Finlandia – Italia – Portugal – Alemania

144. En una pequeña envasadora se han comprado 35 L de aceite de oliva virgen extra y aceite puro de oliva para realizar una mezcla. El precio por litro de aceite virgen extra es de 4 €, mientras que por el litro de aceite puro se han pagado 3,25 €.

a) ¿Cuántos litros de aceite de la segunda clase se tienen que tomar para que la mezcla tenga un precio de 3,50 € el litro si no se quiere obtener ningún beneficio?

b) Si se quiere obtener un beneficio del 10 %, ¿a cuánto deberá cobrarse el litro de la mezcla anterior?

a) Se mezcla 35 L de aceite virgen extra de 4 € el litro y *x* kg de aceite puro de 3,25 € el litro

Se obtiene $35+x$ litros de mezcla de aceites a 3,5 € el litro. Por tanto:

$$35\cdot 4+3,25x=(35+x)3,5 \Rightarrow 140+3,25x=122,5+3,5x \Rightarrow 0,25x=17,5 \Rightarrow x=\frac{17,5}{0,25}=70$$

Luego se deben tomar70 litros de aceite puros de oliva.

b) Para obtener un beneficio del 10 % se debe cobrar el litro de la mezcla a $1,1\cdot 3,5=3,85$ €

145. Se cuenta con un presupuesto de 7550 € para fabricar tres tipos de contenedores para reciclar basura. El volumen y peso máximo que pueden tener dichos contenedores para su almacenaje es de 43 m^3 y 3750 kg, respectivamente. La tabla siguiente muestra el volumen y peso de los contenedores de los tres tipos, así como su precio. Calcula cuántos de ellos se pueden fabricar de cada tipo si se quiere agotar el presupuesto y la capacidad de almacenaje.

	Volumen (m^3)	Peso (kg)	Precio (€)
TIPO I	1	100	250
TIPO II	2	175	300
TIPO III	1,5	125	275

Sean:*x*,*y*,*z* el número de contenedores de tipo I, de tipo II y de tipo III, respectivamente.

$$\begin{cases} x+2y+1,5z=43 \\ 100x+175y+125z=3750 \\ 250x+300y+275z=7550 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=10, z=12$$

Se deben fabricar 5 contenedores de tipo I, 10 de tipo II y 12 de tipo III

146. En una clase de primero de bachillerato hay tantos alumnos que estudian Tecnologías de la Información y Comunicación como alumnos que estudian Literatura Universal; sin embargo, el número de alumnos que estudian Francés como segunda lengua extranjera es inferior en una unidad al de los que estudian Tecnologías de la Información y la Comunicación. A partir de estos datos, calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas

Sean:

x: número de alumnos de Tecnologías de la Información y Comunicación

y: número de alumnos de Literatura Universal

z:número de alumnos de Francés

$$\begin{cases} x = y \\ z = x-1 \\ x+y+z=35 \end{cases} \Rightarrow x+x+x-1=35 \Rightarrow 3x=36 \Rightarrow x=12 \text{ Luego, } \quad y=12 \;,\; z=11.$$

Por tanto 12 alumnos cursan Tecnologías de la Información y Comunicación y 12 alumnos cursan Literatura Universal y 11 alumnos cursan Francés.

147. Para construir una caja sin tapa se recortan cuatro cuadrados iguales en cada una de las esquinas de una cartulina de 30cm ×20 cm. Calcula el lado de los cuadrados para que el volumen de la caja sea de 832 cm³.

Medidas de la caja: *x*, 30 – 2*x*, 20 – 2*x*. $V = x(30-2x)(20-2x) = 832 \Rightarrow x = 2$.Los cuadrados son de lado 2 cm.

148. Un ciclista realiza un recorrido de ida y vuelta de 70 km en total. El primer tramo del recorrido es de subida, luego hay uno de bajada y un tercero llano. Tarda 1 h 47 min 37 s al ir y 1 h 25 min al volver, haciendo el recorrido a la inversa. Si la velocidad de subida es de 10 km/h, la de bajada, 40 km/h y en llano avanza a 30 km/h. ¿Qué distancia tiene cada tramo del recorrido?

	Subida	Bajada	Llano
Ida	*x*	*y*	35 –*x*–*y*
Vuelta	*y*	*x*	35 –*x*–*y*

$$\begin{cases} 1{,}794 = \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{40} + \dfrac{35-x-y}{30} \\ 1{,}417 = \dfrac{35-x-y}{30} + \dfrac{y}{10} + \dfrac{x}{40} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5269}{525}, y = \frac{526}{105}$$

Aproximadamente, el primer tramo tiene 10 km, el segundo tramo tiene 5 km y el tercer tramo 20 km.

149. Un globo que posee un pequeño motor realiza un viaje desde el punto *A* hasta el punto *B*, ida y vuelta. Gracias al motor, el globo adquiere una velocidad de 38 km/h. Supongamos, sin embargo, que el viento sopla de forma constante, y siempre en la dirección de *A* hacia *B*, y que, por tanto, la velocidad se modifica. La distancia que separa los puntos es de50 km.

a) Calcula la duración total del viaje en función de la velocidad con la que sopla el viento en la dirección indicada.

b) Calcula la velocidad del viento sabiendo que la duración total del viaje ha sido de 195 minutos.

Sea *x* la velocidad del viento en km/h.

a) Tiempo invertido en la ida: $T_1 = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \dfrac{50}{38+x}$, y en la vuelta: $T_2 = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \dfrac{50}{38-x}$.

$$T = \frac{50}{38+x} + \frac{50}{38-x} = \frac{3800}{1444-x^2}.$$

Luego la duración total del viaje en función de la velocidad es: $\dfrac{3800}{1444-x^2}$ horas.

b) Duración del viaje: 195 min = 3,25 h. Luego: $3{,}25 = \dfrac{3800}{1444-x^2} \Rightarrow x = \sqrt{1444 - \dfrac{3800}{3{,}25}} \simeq 16{,}6$ km/h.

150. Dos ciclistas corren por un velódromo a velocidades constantes. Cuando corren en sentido opuesto se encuentran cada 10 s, mientras que cuando van en el mismo sentido, un ciclista alcanza a otro cada 170 s. Sabiendo que la pista tiene una longitud de 170 m, ¿cuál es la velocidad de cada ciclista?

Sea x la velocidad del primer ciclista e y la del segundo ciclista.

$$\begin{cases} 10(x+y)=170 \\ 170(x-y)=170 \end{cases} \Rightarrow x=9, y=8.$$

Luego las velocidades son de 9 m/s el primer ciclista y 8 m/s el segundo ciclista.

151. Las funciones de demanda y de oferta correspondientes al mercado del último juego de estrategia, en cierto momento, son:

$$f_d=-\frac{1}{20}p^2+\frac{1}{2}p+180 \qquad f_o=\frac{13}{120}p^2-12p+A$$

donde A es un parámetro desconocido y $40 \le p \le 100$ €.Calcula el valor de A para que el equilibrio del mercado se alcance para 100 unidades demandadas. En este caso, halla la cantidad ofertada y el precio.

$f_d=-\frac{1}{20}p^2+\frac{1}{2}p+180=100 \Rightarrow -\frac{1}{20}p^2+\frac{1}{2}p+80=0 \Rightarrow p=45,31$, única solución válida y precio del producto.

$f_o=\frac{13}{120}p^2-12p+A \Rightarrow A=100-\frac{13}{120}\cdot 45,31^2+12\cdot 45,31=421,31$.

152. Dada la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, cuyas soluciones son x_1 y x_2, calcula, en función de a, b y c, el valor de la suma de las inversas de sus raíces.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}$$

ENTORNO MATEMÁTICO

A vueltas con la *pizza*

Miguel y Liliana tienen un pequeño restaurante italiano donde, además de las comidas que sirven en el local, sirven *pizzas*.

Miguel lleva la contabilidad de la empresa y observa que, de media, consigue vender 150 raciones de *pizzas* a un precio de 3 € cada ración.

Liliana acaba de terminar sus estudios de ciencias empresariales y, llena de energía y optimismo ha decidido aplicar sus conocimientos para intentar dar un nuevo impulso al negocio, ya que está convencida de que, pese al entusiasmo y buena voluntad que pone Miguel los resultados son manifiestamente mejorables.

Con gran minuciosidad realiza un estudio de mercado entre los vecinos del barrio y los barrios colindantes al suyo. Además observa a la competencia de la zona, y una vez segura de que nadie supera la calidad de sus *pizzas*, decide centrarse en el factor económico. Ha observado que por cada 15 CENT que se baje en el precio de la ración, la demanda de la misma aumenta en 30 unidades. Es decir, si baja el precio a 2,85 € la ración, conseguirá vender 180 raciones.

Liliana supone que la regla obtenida es cierta, al menos así lo dice la teoría, y se cumple siempre que el precio esté comprendido entre 1,50 € y 3 €.

a) Calcula el ingreso total que obtendrán Liliana y Miguel si no cambian los precios de las raciones.

b) Calcula el ingreso total que obtienen si venden cada ración a 2,70 €.

c) Si rebajan el precio a 0,15*x* €, calcula, en función de *x*, el ingreso total que obtienen.

d) Miguel ha calculado que para que les sea rentable el negocio, de la parte de la venta de pizzas deberían obtener unos ingresos de 702 € en total. ¿A qué precio deben vender las porciones?

a) $I = 150 \cdot 3 = 450$ €.

b) Si fijan el precio en 2,70 euros, venderán 150 + 2 · 30 = 210 raciones. Por tanto: $I = 210 \cdot 2{,}70 = 567$ €.

c) Si rebajan el precio 0,15x euros, se venderán 150 +30 *x* raciones. Por tanto:

$$I = (150 + 30x) \times (3 - 0{,}15x) = -4{,}5x^2 + 67{,}5x + 450 \text{ €}$$

d) $I = -4{,}5x^2 + 67{,}5x + 450 = 702 \Rightarrow 4{,}5x^2 - 67{,}5x + 252 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 7 \end{cases}$

Hay dos soluciones:

$x = 7$. Se venderán 150 + 7 · 30 = 360 raciones a 3 − 7 · 0,15 = 1,95 € la ración.

$x = 8$. Se venderán 150 + 8 ·v30 = 390 raciones a 3 − 8 · 0,15 = 1,80 € la ración.

Se deberá elegir la primera ya que los costes serían, evidentemente, inferiores.

Fabricando papel

Una fábrica de productos de papelería elabora tres tipos de cuadernos:

- **Tipo 1: Cuaderno de 100 folios de 80 gramos (80 gramos por metro cuadrado).**
- **Tipo 2: Cuaderno de 80 folios de 90 gramos.**
- **Tipo 3: Cuaderno de 120 folios de 100 gramos.**

Para su elaboración, cada cuaderno debe pasar por tres departamentos diferentes: departamento de tratamiento de la pasta de papel, departamento de encuadernación y departamento de supervisión del producto.

La tabla de la derecha muestra los minutos que debe estar cada tipo de cuaderno en cada uno de los departamentos así como el total de minutos diarios

con los que cuenta cada departamento para realizar su trabajo.

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	
Tratamiento	6	5	8	780 min
Encuadernación	5	4	6	610 min
Supervisión	1	1	2	170 min

a) Plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas en el que las incógnitas sean el número de cuadernos de cada tipo que se pueden fabricar al día para agotar exactamente la disponibilidad de tiempo de los departamentos.

Con ayuda de un programa de cálculo:

b) Resuelve el anterior sistema e interpreta los resultados.

c) Sin variar las condiciones, ¿cuántos cuadernos de tipo 1 y tipo 2 se deberán fabricar si se quieren fabricar 35 cuadernos de tipo 3 y agotar la disponibilidad de tiempo?

d) Si la empresa decide aumentar en un 10 % el tiempo disponible de los departamentos de tratamiento y encuadernación y en un 15 % el del departamento de supervisión, ¿cómo variará la solución del problema?

a) Sean:

x el número de cuadernos de Tipo 1, y el número de cuadernos de Tipo 2 y z el número de cuadernos de Tipo 3.

$$\begin{cases} 6x+5y+8z=780 \\ 5x+4y+6z=610 \\ x+y+2z=170 \end{cases}$$

b) El sistema es compatible indeterminado y sus infinitas soluciones pueden expresarse de la forma:

$$\begin{cases} x=-70+2t \\ y=240-4t \\ z=t \end{cases}$$

c) $z = t = 35 \Rightarrow x = 0 \quad y = 100$

Se fabricarán 100 cuadernos de Tipo 2 y 35 de Tipo 3

d) Aplicando las variaciones se tiene el sistema:

$$\begin{cases} 6x+5y+8z=780\cdot 1{,}1=858 \\ 5x+4y+6z=610\cdot 1{,}1=671 \\ x+y+2z=170\cdot 1{,}15=195{,}5 \end{cases} \Rightarrow E_2 \to E_1 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} 6x+5y+8z=858 \\ x+y+2z=187 \\ x+y+2z=195{,}5 \end{cases}$$

En este caso, el sistema no tiene solución.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Resuelve las ecuaciones

a) $-2\cdot\frac{3x-1}{25}-\frac{4x-1}{5}=x+\frac{7}{25}$ **b)** $\frac{2x}{3}-\frac{x-2}{12}+\frac{x+3}{2}=2x-\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{2x-1}{x+7}-\frac{2x+1}{x-7}=\frac{5}{8}$ **d)** $\frac{1}{x}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{7}{6}$

a) $x=0$ **b)** $x=2$ **c)** $x=-49, x=1$ **d)** $x=-3, x=2$

2. Halla una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus raíces sea –4 y el producto de las mismas sea –221.

Respuesta abierta, por ejemplo: $x^2+4x-221=0$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones de grado superior a dos.

a) $6x^5+11x^4+3x^3-3x^2-x=0$ **b)** $\frac{1}{x^2}-\frac{3x^2}{4}=-\frac{11}{4}$

a) $x(x+1)^2(2x-1)(3x+1)=0\Rightarrow x=0, x=-1, x=\frac{1}{2}, x=-\frac{1}{3}$

b) $4-3x^4=-11x^2\Rightarrow 3x^4-11x^2-4=0\Rightarrow\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}$

4. Halla la solución de las siguientes ecuaciones irracionales.

a) $\sqrt{x+\sqrt{4x+40}}=5$ **b)** $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=7$

a) $\sqrt{x+\sqrt{4x+40}}=5\Rightarrow x+\sqrt{4x+40}=25\Rightarrow x^2-54x+585=0\Rightarrow x=39$ (no válida) $x=15$ (válida).

b) $\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=7\Rightarrow\sqrt{x+1}=7-\sqrt{2x}\Rightarrow x+1=49+2x-14\sqrt{2x}\Rightarrow 14\sqrt{2x}=x+48\Rightarrow$

$\Rightarrow 392x=x^2+2304+96x\Rightarrow x^2-296x+2304=0\Rightarrow x=8$ (válida) $x=288$ (no válida).

5. Resuelve las ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

a) $6^{-2x^2+x+8}=36$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x+2^{x-1}+2^x=\frac{11}{4}$ **c)** $\log(100x)+2\log x=-1$ **d)** $2\log x-\frac{2}{5}\log x^5+\log x^2=4$

a) $6^{-2x^2+x+8}=36\Rightarrow -2x^2+x+8=2\Rightarrow 2x^2-x-6=0\Rightarrow x=2, x=-\frac{3}{2}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x+2^{x-1}+2^x=\frac{11}{4}\Rightarrow\frac{1}{2^x}+\frac{2^x}{2}+2^x=\frac{11}{4}$. Haciendo el cambio: $z=2^x$, $x=\log_2\left(\frac{4}{3}\right)$ y $x=-1$.

c) $\log(100x)+2\log x=-1\Rightarrow\log\left(100x^3\right)=\log\left(\frac{1}{10}\right)\Rightarrow 1000x^3=1\Rightarrow x=\frac{1}{10}$

d) $2\log x-\frac{2}{5}\log x^5+\log x^2=4\Rightarrow\log\left(\frac{x^2x^2}{\left(x^5\right)^{\frac{2}{5}}}\right)=\log 10000\Rightarrow\frac{x^4}{x^2}=10000\Rightarrow x=100$

6. Resuelve los sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ -2x - 7y = -\dfrac{13}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2x - 5y = 10 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{5y}{6} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$

a) $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$

b) $x = -5 - 5t, y = 2t$

7. Resuelve aplicando el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y - z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ 4x - y + 2z = -1 \end{cases}$

a) Sistema compatible indeterminado. Soluciones de la forma: $x = t, y = 2 - t, z = 1$.

b) No tiene solución

8. Resuelve los siguientes sistemas de segundo grado.

a) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 18 \\ -2x^2 + 3y^2 = 46 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x^2 + 3xy = -8 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 18 \\ -2x^2 + 3y^2 = 46 \end{cases} \Rightarrow 4y^2 = 64 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, y = 4; x = -1, y = 4 \\ y = -4 \quad x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, y = -4; x = -1, y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x^2 + 3xy = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5 - x}{2} \\ x^2 + 3xy = -8 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x\dfrac{5 - x}{2} = -8 \Rightarrow 2x^2 + 15x - 3x^2 + 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 16, y = -\dfrac{11}{2}; x = -1, y = 3$

9. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = \dfrac{19}{2} \\ 2^{x+1} + 3^{y-1} = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = \dfrac{19}{2} \\ 2^{x+1} + 3^{y-1} = 4 \end{cases} \quad 2^x = A, 3^y = B \Rightarrow \begin{cases} A + B = \dfrac{19}{2} \\ 2A + \dfrac{B}{3} = 4 \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{5}{3}B = -15 \Rightarrow B = 9 \quad A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -1, y = 2$

b) $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ \dfrac{100y}{x} = 250 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{10}{x} = \dfrac{250x}{100} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, y = 5$; $x = -2$ (no válida)

10. Calcula tres números pares consecutivos tales que la suma del primero más la media aritmética de los otros dos valga 271.

Sean los números pares consecutivos $2x$, $2x + 2$, $2x + 4$. $2x + \dfrac{(2x+2) + (2x+4)}{2} = 271 \Rightarrow x = 67$.

Los tres números pares son 134, 136 y 138.

Relaciona y contesta

Elige una única respuesta correcta en cada caso

1. El número de soluciones de la ecuación $x^3 + \frac{2}{x} = -3x$ es:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Solución: D.

2. Las soluciones de la ecuación $\sqrt{-x+2} - 2 = 2x$ son:

A. $x = -\frac{1}{4}$ y $x = -2$ **B.** $x = -\frac{1}{4}$ **C.** $x = -2$ **D.** La ecuación no tiene solución.

Solución: B

3. Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

A. Tiene seguro una solución.

B. Tiene seguro dos soluciones.

C. Seguro que no tiene solución.

D. Ninguna de las anteriores.

Solución: D

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Una ecuación polinómica con el término independiente nulo:

A. Tiene por lo menos una solución real.

B. El número de soluciones reales coincide con su grado.

C. El número de soluciones reales coincide con su grado menos 1.

D. Una de sus soluciones es $x = 0$.

Solución: A y D

5. Se considera el sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$

A. Si se añade la ecuación $2x + 2y + 2z = 6$, el sistema tiene infinitas soluciones.

B. Si se añade la ecuación $z = -4$, el sistema no tiene solución.

C. Si se añade la ecuación $2x + y + z = 4$ el sistema tiene como única solución $x = 1$ $y = 1$ $z = 1$.

D. Si se añade la ecuación $-x - z = -2$, el sistema tiene infinitas soluciones entre las que se encuentra la $x=1$, $y=1$, $z=1$.

Solución A, B y C

6. Se considera que un número *x* verifica las expresiones:

1. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$ **2.** $[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})]^2 = [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})]^2$

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son excluyentes

Solución: B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se quiere saber si existe equilibrio de mercado de un cierto producto. Para ello se aportan, referidas al producto:

1. La función demanda **2. La función oferta**

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Pueden eliminarse los dos datos.

D. No puede eliminarse ninguno.

Solución: D

5 Inecuaciones y sistemas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 3. Ejercicios resueltos.

4. Ordena de menor a mayor los siguientes números.

a) $\frac{11}{4}$, $\frac{68}{25}$, $\frac{14}{5}$ y $\frac{27}{10}$

b) $0{,}1\widehat{2}$, $\frac{11}{90}$, $\frac{3}{25}$ y 0,12

a) $\frac{11}{4}=\frac{275}{100}$ $\quad\frac{68}{25}=\frac{272}{100}$ $\quad\frac{14}{5}=\frac{280}{100}$ y $\frac{27}{10}=\frac{270}{100}\Rightarrow\frac{27}{10}<\frac{68}{25}<\frac{11}{4}<\frac{14}{5}$

b) $0{,}1\widehat{2}=\frac{11}{90}=\frac{55}{450}$ $\quad 0{,}12=\frac{3}{25}=\frac{54}{450}\Rightarrow 0{,}12=\frac{3}{25}<\frac{11}{90}=0{,}1\widehat{2}$

5. Comprueba en cada caso si el valor indicado forma parte de la solución de la inecuación.

a) $x = –2$ de la inecuación $x^3 + x^2 + x \le 6$

b) $x=-\frac{1}{2}$ de la inecuación $2(x-2)+\frac{x-1}{3}>x-1$

a) $(–2)^3 + (–2)^2 + (–2) = –8 + 4 – 2 = –6 \le 6 \Rightarrow$ Sí pertenece a la solución.

b) $\left.\begin{array}{l} 2\left(-\frac{1}{2}-2\right)+\frac{-\frac{1}{2}-1}{3}=-5-\frac{1}{2}=-\frac{11}{2} \\ -\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow-\frac{11}{2}<-\frac{3}{2}\Rightarrow$ No pertenece a la solución.

6. Resuelve las inecuaciones lineales siguientes.

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{8}\le\frac{x}{2}$

b) $2x-3-\frac{x}{2}>x+\frac{3x+1}{6}$

c) $x+2(x+1)+3(x+2)<\frac{x+38}{2}$

d) $2(-10x-3)-\frac{3}{7}(2x-5)+x\le-2(x-5)-\frac{222}{7}$

a) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{8}\le\frac{x}{2}\Rightarrow 4x-12-x+2\le 4x\Rightarrow -x\le 10\Rightarrow x\ge -10\Rightarrow$ Solución: $[–10, +\infty)$

b) $2x-3-\frac{x}{2}>x+\frac{3x+1}{6}\Rightarrow 12x-18-3x>6x+3x+1\Rightarrow 0x>19\Rightarrow$ Solución: $\varnothing$

c) $x+2(x+1)+3(x+2)<\frac{x+38}{2}\Rightarrow 2x+4x+4+6x+12<x+38\Rightarrow 11x<22\Rightarrow x<2\Rightarrow$ Solución: $(-\infty, 2)$

d) $2(-10x-3)-\frac{3}{7}(2x-5)+x\le-2(x-5)-\frac{222}{7}\Rightarrow 14(-10x-3)-3(2x-5)+7x\le-14(x-5)-222\Rightarrow$

$\Rightarrow -140x-42-6x+15+7x\le-14x+70-222\Rightarrow -125x\le-125\Rightarrow 125x\ge 125\Rightarrow x\ge 1\Rightarrow$ Solución: $[1, +\infty)$

7. Ejercicio resuelto.

8. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 2 \geq 0$ **c)** $-x^2 - 1 > 0$ **e)** $\frac{2}{3}x^2 + 4x < 2x$

b) $4 - x^2 < 0$ **d)** $3x^2 - x \geq x^2 - 5x$ **f)** $-x^2 - 2x - 1 > 0$

a) $x \in \mathbb{R}$

b) $(2 - x)(2 + x) < 0 \Rightarrow -(x - 2)(x + 2) < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

c) $x \in \varnothing$

d) $2x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow 2x(x + 2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$

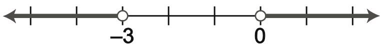
e) $2x^2 + 12x - 6x < 0 \Rightarrow 2x^2 + 6x < 0 \Rightarrow 2x(x + 3) < 0 \Rightarrow x \in (-3, 0)$

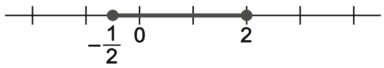
f) $-(x + 1)^2 > 0 \Rightarrow (x + 1)^2 < 0 \Rightarrow x \in \varnothing$

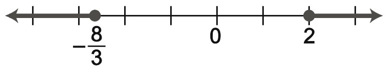
9. Representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a) $3x(1 + x) - 2(x^2 - 1) > 2$ **b)** $x^2 - \frac{3}{2}x \leq 1$ **c)** $\frac{x^2}{2} + \frac{x+1}{3} \geq 3$

a) $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$ **b)** $\left[\frac{-1}{2}, 2\right]$ **c)** $\left(-\infty, -\frac{8}{3}\right] \cup [2, +\infty)$



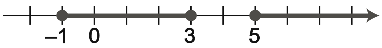


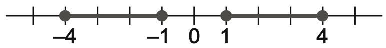


10. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa las soluciones.

a) $x^3 - 6x^2 + 7x + 15 \geq x^2$ **b)** $x^3 - 3x^2 < 1 - 3x$ **c)** $x^4 - 17x^2 \leq -16$

a) $[-1, 3] \cup [5, +\infty)$ **b)** $(-\infty, 1)$ **c)** $[-4, -1] \cup [1, 4]$

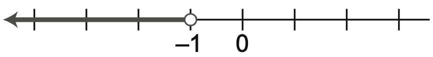




11. Representa en la recta real las soluciones de las siguientes inecuaciones racionales.

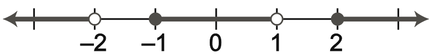
a) $\frac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0$ **b)** $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0$ **c)** $1 > \frac{2x}{x^2+1}$

a) $\frac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0 \Rightarrow \frac{4x-5}{(4x-5)(x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < 0 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow (-\infty, -1)$



b) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0$

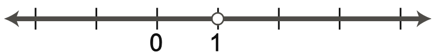
$(-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, +\infty)$



$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$

$x + 1$	–	–	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	–	+
$x - 1$	–	–	–	+	+
$x + 2$	–	+	+	+	+
$\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$	+	–	+	–	+

c) $1 > \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow x^2 + 1 > 2x \Rightarrow (x-1)^2 > 0 \Rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$



12. Ejercicio interactivo.

13 a 17. Ejercicios resueltos.

18. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 2x+1<x+2 \\ 3x-1\leq 4x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x-4>x \\ x\geq 2x-1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x-1<2x-(1+x) \\ 3(x+2)\geq 2(x-4) \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x\leq 6 \\ 3-x>2(x-4) \\ 5x+3>-(x-1) \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+1<x+2 \\ 3x-1\leq 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x\geq -1 \end{cases} \Rightarrow [-1,1)$

c) $\begin{cases} 3x-1<x-1 \\ 3x+6\geq 2x-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ x\geq -14 \end{cases} \Rightarrow [-14,0)$

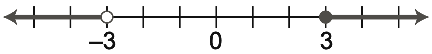
b) $\begin{cases} 3x-4>x \\ x\geq 2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>4 \\ x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\leq 1 \end{cases}$ No tiene solución

d) $\begin{cases} x\leq 6 \\ -3x>-11 \\ 6x>-2 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{3},\frac{11}{3}\right)$

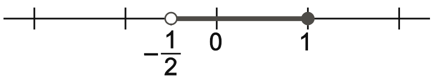
19. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y representa las soluciones.

a) $\begin{cases} -2x^2+4x+6\leq 0 \\ 3x^2+6x-9>0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-\frac{x}{2}>x-\frac{1}{4} \\ \frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{4}\leq 1 \\ 2x-3<3x-2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} -2x^2+4x+6\leq 0 \\ 3x^2+6x-9>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1)\geq 0 \\ (x+3)(x-1)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty) \\ x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup[3,+\infty)$



b) $\begin{cases} 2x-\frac{x}{2}>x-\frac{1}{4} \\ \frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{4}\leq 1 \\ 2x-3<3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x-2x>4x-1 \\ 2x+2+x-1\leq 4 \\ 2x-3x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x>-1 \\ 3x\leq 3 \\ -x<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{2} \\ x\leq 1 \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2},1\right]$



20. Ejercicio resuelto.

21. Representa los semiplanos formados por las soluciones de las siguientes inecuaciones.

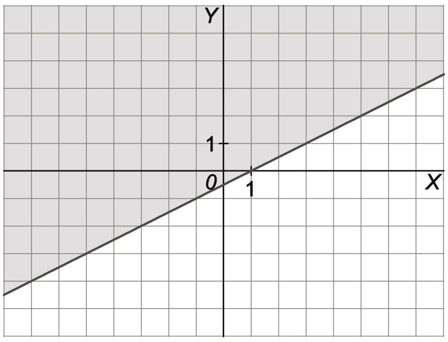
a) $x - 2y < 1$

b) $3x + y \geq 2$

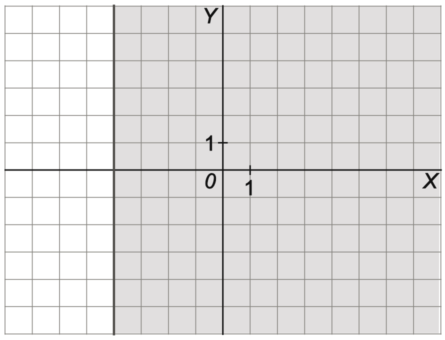
c) $x - 3y \leq 2x + 4 - 3y$

d) $5x + 3y + 10 < 2x + 2$

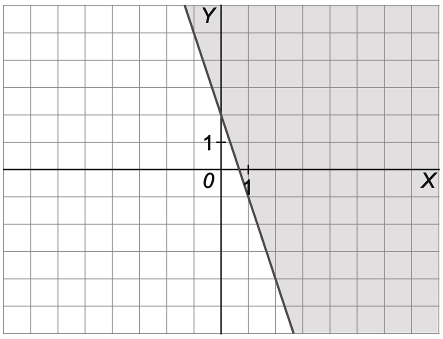
a)



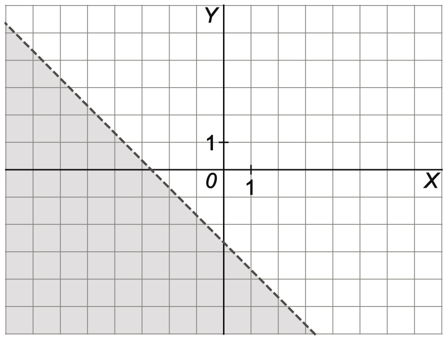
c)



b)

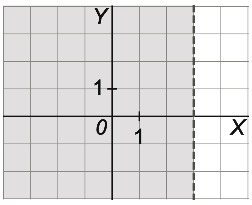


d)

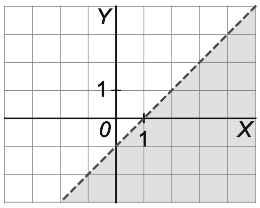


22. Escribe en cada apartado una inecuación de la que sea solución el semiplano representado.

a)



b)



a) Respuesta abierta. $x < 3$

b) Respuesta abierta. $y < x - 1$

23. Expresa mediante un sistema de inecuaciones los siguientes subconjuntos del plano.

a) Puntos pertenecientes al segundo cuadrante.

b) Puntos con ordenada positiva que están por encima de la bisectriz del primer cuadrante.

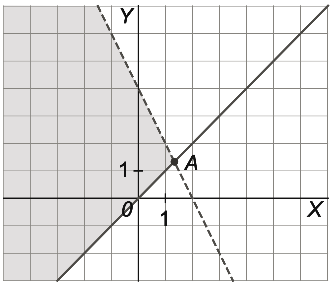
a) Respuesta abierta. $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

b) Respuesta abierta. $\begin{cases} y > 0 \\ y > x \end{cases}$

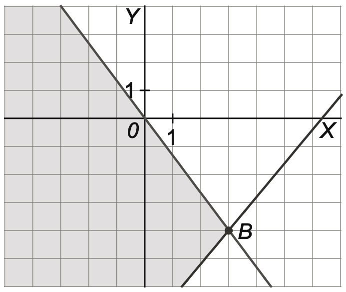
24. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases} y < -2x+4 \\ y \geq x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 6x-5y \leq 38 \\ 4x+3y \leq 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-y \geq 0 \\ y-2 \leq 0 \\ 2x+y \leq 10 \\ y \geq 0 \end{cases}$

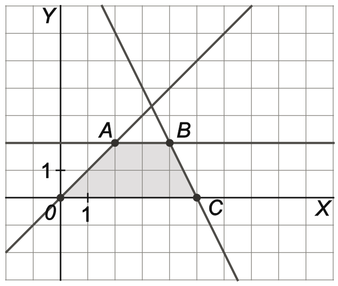
a)



b)



c)



$\begin{cases} y = -2x+4 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$\begin{cases} 6x-5y \leq 38 \\ 4x+3y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow B(3,-4)$

$\begin{cases} y = x \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2,2);\ \begin{cases} 2x+y = 10 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(4,2)$

$\begin{cases} y = 0 \\ 2x+y = 10 \end{cases} \Rightarrow C(5,0);\ O(0,0)$

25. Ejercicio interactivo.

26. Ejercicio resuelto.

27. En la población de un territorio se han producido, en un período de tiempo determinado, las siguientes variaciones medidas sobre la población inicial:

- **2,5 % de nacimientos**
- **0,5 % de emigrantes**
- **2,25% de defunciones**
- **0,75 % de inmigrantes**

¿Entre qué valores estará la población final si la inicial estaba entre 45000 y 46000 habitantes?

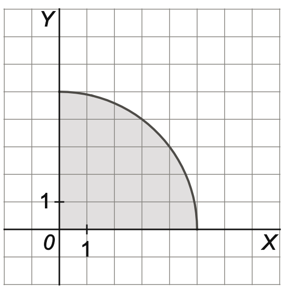
Sea x la población inicial: entonces $45\,000 < x < 46\,000$.

Nos piden entre qué valores estará: $P = x + 0{,}025x - 0{,}0225x - 0{,}005x + 0{,}0075x = 1{,}005x$.

Entonces tendremos que $45\,000 \cdot 1{,}005 < P < 46\,000 \cdot 1{,}005$, es decir, $45\,225 < P < 46\,230$.

28. Determina y representa la región del plano cuyos puntos son interiores a la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio 5 y que están situados en el primer cuadrante.

$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$



29. En la fabricación de un hectómetro de cable del tipo *A* se utilizan 16 kg de plástico y 4 kg de cobre, y en la de un hectómetro de cable de tipo *B*, 6 kg de plástico y 12 kg de cobre. Representa gráficamente las posibilidades de producción si se debe fabricar más cable de tipo *A* que de tipo *B* y se cuenta con 252 kg de plástico y 168 kg de cobre.

x hm de cable de tipo *A*, *y* hm de cable de tipo *B*

Material	Plástico	Cobre
Tipo *A*	16	4
Tipo *B*	6	12

$$\begin{cases} 16x + 6y \le 252 \\ 4x + 12y \le 168 \\ x \ge y \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 3y \le 126 \\ x + 3y \le 42 \\ x \ge y \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$$

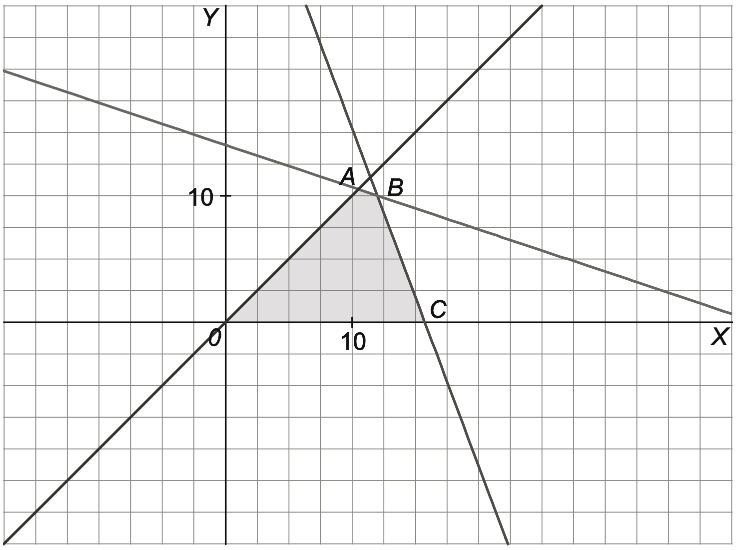
Vértices:

$$A \equiv \begin{cases} y = x \\ x + 3y = 42 \end{cases} \Rightarrow A(10{,}5;10{,}5)$$

$$B \equiv \begin{cases} 8x + 3y = 126 \\ x + 3y = 42 \end{cases} \Rightarrow B(12,10)$$

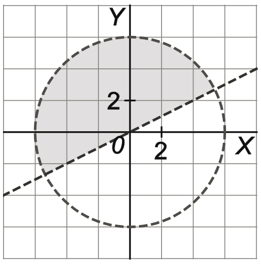
$$C \equiv \begin{cases} 8x + 3y = 126 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(15{,}75;\ 0)$$

$O(0,0)$



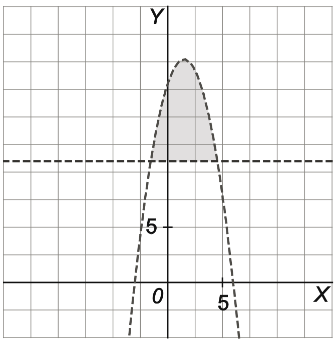
30. Determina y representa los puntos del interior del círculo de centro el origen de coordenadas y radio 6, cuya abscisa es menor que el doble de su ordenada.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 36 \\ x<2y \end{cases}$$



31. Determina las inecuaciones que cumplen los puntos (x, y) del interior de la región delimitada por la parábola $y = -x^2 + 3x + 18$ y la recta $y = 11$.

$$\begin{cases} y < -x^2 + 3x + 18 \\ y>11 \end{cases}$$



32 a 39. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Inecuaciones lineales y polinómicas

40. Indica si los números –10, –1, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{3}{5}$, 0, $\frac{3}{5}$, 1 y 5 son soluciones de la inecuación $\frac{8}{3}x+2\geq 0$.

Basta sustituir cada número en la expresión y comprobar si se verifica la desigualdad.

No son solución: –10, y –1. Sí lo son el resto.

41. Resuelve las siguientes inecuaciones lineales, expresa las soluciones en forma de intervalo y represéntalas sobre la recta real.

a) $\frac{8}{3}x+2\geq 0$

b) $2x-\sqrt{2}\leq 0$

c) $-x+1>-\frac{10}{7}$

d) $3(2x-5)-4(x-2)\leq 2-4x$

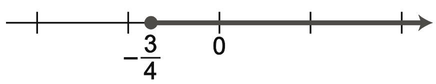
e) $2x-\frac{9x}{4}<\frac{x}{3}$

f) $\frac{x}{2}-\frac{3x}{5}<x+1$

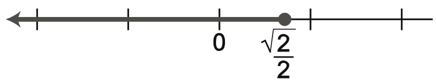
g) $\frac{x}{1-\sqrt{2}}<2$

h) $\frac{x+1}{3}-\frac{x+2}{4}+\frac{x-3}{18}\geq -\frac{8}{9}$

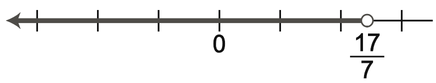
a) $\left[\frac{-3}{4},+\infty\right)$



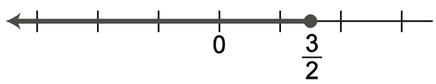
b) $\left(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$



c) $\left(-\infty,\frac{17}{7}\right)$

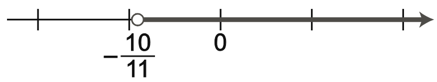


d) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$

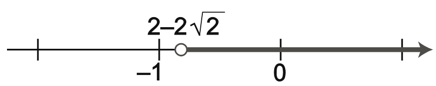


e) $(0,+\infty)$

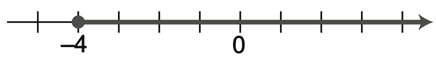
f) $\left(-\frac{10}{11},+\infty\right)$



g) $\left(2-2\sqrt{2},+\infty\right)$



h) $[-4,+\infty)$



42. Resuelve las siguientes inecuaciones con valores absolutos:

a) $|x-3| \le 5$ **c)** $|2x-8| \le 10$ **e)** $|x-3| \le -5$

b) $|x+2| < 4$ **d)** $|3x+9| \le 2$ **f)** $|x+3| < -5$

a) $[-2, 8]$ **b)** $(-6, 2)$ **c)** $[-1, 9]$ **d)** $\left[-\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}\right]$ **e)** $\varnothing$ **f)** $\varnothing$

43. Halla y representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + x - 12 \ge 0$

b) $-2x^2 + 3x > 0$

c) $4x^2 - 1 \le 0$

d) $6x^2 + x - 1 < 0$

e) $-2x^2 - 10x - 8 > 0$

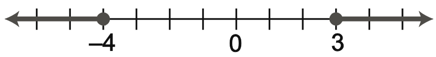
f) $2x^2 + x + 1 < 0$

g) $6 - x^2 \ge 0$

h) $(3x-1)(5x+2) \ge 0$

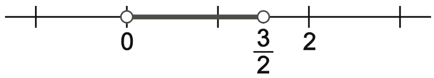
a) $x^2 + x - 12 \ge 0$, entonces $(x+4)(x-3) \ge 0$

Solución: $(-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$



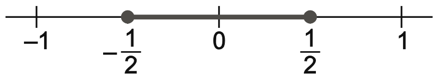
b) $-2x^2 + 3x > 0$, entonces $x(-2x+3) > 0$

Solución: $\left(0, \frac{3}{2}\right)$



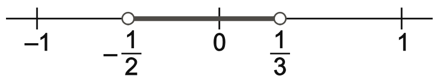
c) $4x^2 - 1 \le 0$, entonces $x^2 \le \frac{1}{4}$

Solución: $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



d) $6x^2 + x - 1 < 0$, entonces $6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0$

Solución: $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right)$



e) $-2x^2 - 10x - 8 > 0$, entonces $-2(x+4)(x+1) > 0$

Solución: $(-4, -1)$

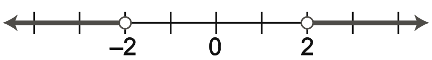
f) $2x^2 + x + 1 < 0$.

Como $2x^2 + x + 1 = 0$, no tiene soluciones reales.

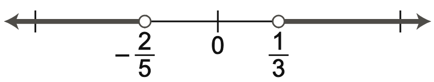
Solución: $\varnothing$

g) $-x^2 < -4$, es decir, $x^2 > 4$.

Solución: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



h) Las soluciones son: $\left(-\infty, -\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.



44. Simplifica y resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a) $(x-2)^2+5\le 2x$

b) $\dfrac{3x-6}{5}<\dfrac{4x-2x^2}{10}$

c) $5x^2+1\ge\dfrac{3x^2-1}{2}$

d) $3x^2+\dfrac{5}{6}x-2x<2x^2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{2}$

e) $(x-2)^2+(x+4)(x-2)+3x\ge -1$

f) $\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{3x-1}{5}+x>2$

a) $(x-2)^2+5\le 2x\Rightarrow x^2-6x+9\le 0\Rightarrow (x-3)^2\le 0\Rightarrow x=3\Rightarrow\{3\}$

b) $\dfrac{3x-6}{5}<\dfrac{4x-2x^2}{10}\Rightarrow 6x-12<4x-2x^2\Rightarrow 2x^2+2x-12<0\Rightarrow 2(x-2)(x+3)<0\Rightarrow(-3,2)$

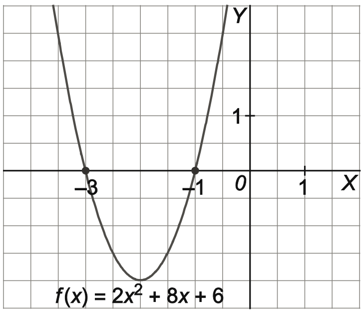
c) $5x^2+1\ge\dfrac{3x^2-1}{2}\Rightarrow 10x^2+2\ge 3x^2-1\Rightarrow 7x^2+3\ge 0\Rightarrow\mathbb{R}$

d) $3x^2+\dfrac{5}{6}x-2x<2x^2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{2}\Rightarrow x^2-\dfrac{5}{3}x-\dfrac{2}{3}<0\Rightarrow\dfrac{1}{3}(x-2)(3x+1)<0\Rightarrow\left(-\dfrac{1}{3},2\right)$

e) $(x-2)^2+(x+4)(x-2)+3x\ge -1\Rightarrow 2x^2+x-3\ge 0\Rightarrow 2(x-1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\ge 0\Rightarrow\left(-\infty,\dfrac{-3}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

f) $\dfrac{x^2-2}{2}-\dfrac{3x-1}{5}+x>2\Rightarrow 5x^2+4x-28>0\Rightarrow 5(x-2)\left(x+\dfrac{14}{5}\right)>0\Rightarrow\left(-\infty,\dfrac{-14}{5}\right]\cup(2,+\infty)$

45. Resuelve las inecuaciones dadas observando la gráfica de la función polinómica $f(x)=2x^2+8x+6$.



a) $x^2+4x+3\le 0$

b) $-x^2-4x-3>0$

a) $[-3,-1]$

b) $(-3,-1)$

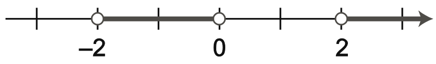
46. Representa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $x^3 - 4x > 0$ **c)** $x^4 - 1 \geq 0$ **e)** $x^4 - 5x^2 \geq 36$

b) $x^3 - 3x - 2 < 0$ **d)** $x^3 - 7x + 6 < 0$ **f)** $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} < 0$

a) $x^3 - 4x > 0$, entonces $x(x-2)(x+2) > 0$

Solución: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

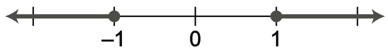


b) $x^3 - 3x - 2 < 0$, entonces $(x-2)(x+1)^2 < 0$

Solución: $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$

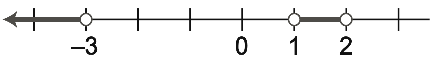
c) $x^4 - 1 \geq 0$, entonces $(x^2 - 1)(x^2 + 1) \geq 0$

Solución: $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$



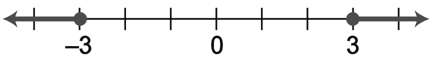
d) $x^3 - 7x + 6 < 0$, entonces $(x-2)(x-1)(x+3) < 0$

Solución: $(-\infty, -3) \cup (1, 2)$



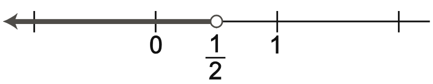
e) $x^4 - 5x^2 \geq 36$, entonces $(x^2 + 4)(x-3)(x+3) \geq 0$

Solución: $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$



f) $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} < 0$, entonces $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + 1\right) < 0$

Solución: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$



47. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $x\left(x^2+3x\right)>6x+8$

b) $2x^4-8x^3>2x-8$

c) $x^5-x^4-9x^3>12-16x-5x^2$

d) $x^2\left(x^2+1\right)+2x^3-6x>x\left(x^3-4x+1\right)$

a) $(x-2)(x+1)(x+4)>0$

$-\infty \qquad -4 \qquad -1 \qquad 2 \qquad +\infty$

$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+4)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)(x+1)(x+4)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Solución: $(-4,-1)\cup(2,+\infty)$

b) $2(x-4)(x-1)\left(x^2+x+1\right)>0$

$-\infty \qquad 1 \qquad 4 \qquad +\infty$

$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$
$4(x-1)(x-4)(x^2+x+1)$	$+$	$-$	$+$

Solución: $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

c) $(x-3)(x-1)^2(x+2)^2>0$

$-\infty \qquad -2 \qquad 1 \qquad 3 \qquad +\infty$

$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x-1)^2(x+2)^2$	$-$	$-$	$-$	$+$

Solución: $(3,+\infty)$

d) $x(x-1)(2x+7)>0$

$-\infty \qquad -\frac{7}{2} \qquad 0 \qquad 1 \qquad +\infty$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\left(x+\frac{7}{2}\right)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x(x-1)\left(x+\frac{7}{2}\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Solución: $\left(-\frac{7}{2},0\right)\cup(1,+\infty)$

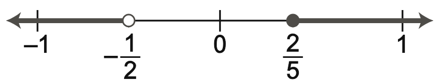
Inecuaciones racionales

48. Expresa gráficamente las soluciones de las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geq 0$ **b)** $\dfrac{x^2-1}{x+2} \leq 0$ **c)** $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0$ **d)** $\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0$

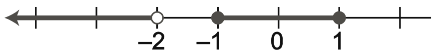
a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geq 0$

Solución: $\left(-\infty, \dfrac{-1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{2}{5}, +\infty\right)$



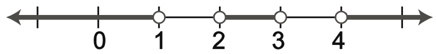
b) $\dfrac{x^2-1}{x+2} \leq 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x+1)}{x+2} \leq 0$

Solución: $(-\infty, -2) \cup [-1, 1]$



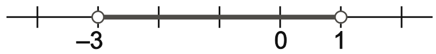
c) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6} > 0 \Rightarrow \dfrac{(x-4)(x-1)}{(x-3)(x-2)} > 0$

Solución: $(-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$



d) $\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+5x^2+3x-9} < 0 \Rightarrow \dfrac{(x+3)(x-1)^2}{(x-1)(x+3)^2} < 0 \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-1} < 0$

Solución: $(-3, 1)$



49. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geq -2$ **b)** $\dfrac{x-1}{x+3} - 1 > 0$ **c)** $\dfrac{x^2}{x-2} \leq 2$ **d)** $\dfrac{x^2-3}{x+3} < x$

a) $\left(-\infty, \dfrac{-1}{2}\right) \cup [0, +\infty)$ **b)** $(-\infty, -3)$ **c)** $(-\infty,\ 2)$ **d)** $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

50. Halla las soluciones de la inecuación

$$\frac{\boldsymbol{x^2 - kx - 2k^2}}{\boldsymbol{(x+k)(x^2-k^2)}} \geq \mathbf{0}$$

siendo *k* un número positivo.

$\dfrac{(x-2k)(x+k)}{(x+k)^2(x-k)} \geq 0$, de solución $(-k, k) \cup [2k, +\infty)$.

51. Sea *a* un número positivo y diferente de la unidad, demuestra que la suma de *a* con su inverso es superior a 2. Utiliza el desarrollo del cuadrado de la diferencia de un número y su inversa.

Sea *a* cualquier número estrictamente positivo y diferente de la unidad.

El cuadrado de $\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}$ es estrictamente positivo:

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} = a + \frac{1}{a} - 2 > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} > 2$$

Sistema de inecuaciones con una incógnita

52. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3<2x+5 \\ 3>2x+5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -3<x<3 \\ x^2>1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x+3(x-1)<7 \\ 3x+2\le x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3x-3<7 \\ 3x-x\le 6-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x<10 \\ 2x\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\le 2 \end{cases} \Rightarrow (-\infty,\ 2)$

b) $\begin{cases} 2x-\dfrac{x}{2}<2 \\ 2x+3(x-1)>x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-x<4 \\ 2x+3x-3>x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{4}{3} \\ x>\dfrac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{4}{3}\right)$

c) $\begin{cases} -8<2x \\ -2>2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4<x \\ -1>x \end{cases} \Rightarrow (-4,\ -1)$

d) $\begin{cases} x<3 \\ x>-3 \\ (x-1)(x+1)>0 \end{cases} \Rightarrow (-3, -1)\cup(1,\ 3)$

53. Halla la solución de los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2\le x\le 4 \\ -3\le x\le 2 \\ -4\le x\le 1 \end{cases}$

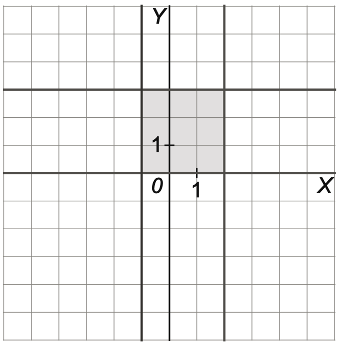
a) $\begin{cases} -3(x-3)-2x\le -3 \\ 2x-3<x+3 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+9-2x\le -3 \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x\le -12 \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{12}{5} \\ x<6 \\ x\le 5 \\ x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\dfrac{12}{5},\ 5\right]$

b) $\begin{cases} -2\le x\le 4 \\ -3\le x\le 2 \\ -4\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\le 1 \end{cases} \Rightarrow [-2,\ 1]$

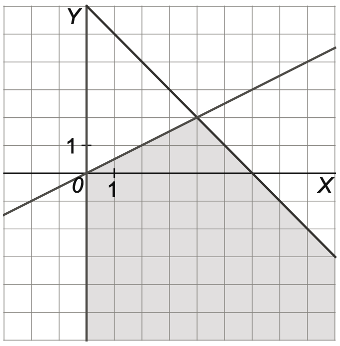
54. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y \le 6 \\ 2y \le x \\ x \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + y \le 2 \\ x \ge y - 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge 1 \\ x + y < 6 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x + 4y \ge 12 \\ -3x + 4y \le 4 \\ x - 4 \le 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x - 4 \ge 0 \\ x - 6 \le 0 \\ 3 \le y \\ y \le 5 \end{cases}$

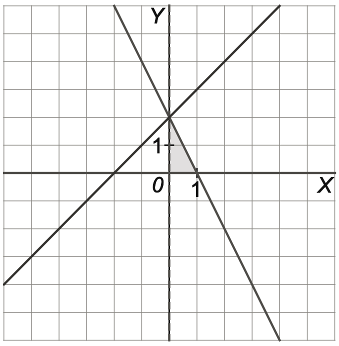
a) Vértices: (–1, 0), (–1, 3), (2, 0) y (2, 3)



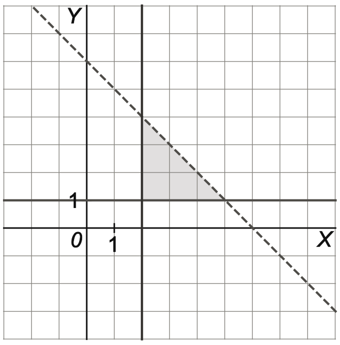
b) Vértices: (0, 0) y (4, 2)



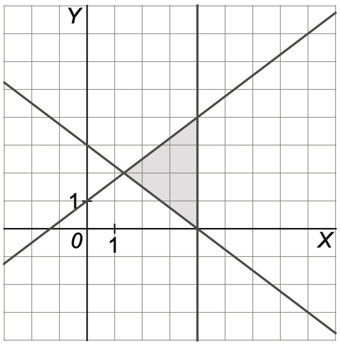
c) Vértices: (0, 0), (1, 0) y (0, 2)



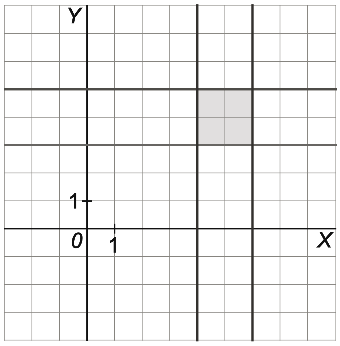
d) Vértices: (2, 1), (5, 1) y (2, 4)



e) Vértices: (4, 0), (4, 4) y $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$



f) Vértices: (4, 3), (4, 5), (6, 3) y (6, 5)



55. Halla los vértices de la región determinada por:

$$\begin{cases} 3x + y \le 12 \\ x - 2y \ge -3 \\ y > \dfrac{x}{2} - 2 \\ 2x + 3y \ge 1 \end{cases}$$

$A(4, 0)$, $B(3, 3)$, $C(2, -1)$ y $D(-1, 1)$

56. Escribe, para cada apartado, un sistema de inecuaciones tal que la representación gráfica de su solución sea la indicada.

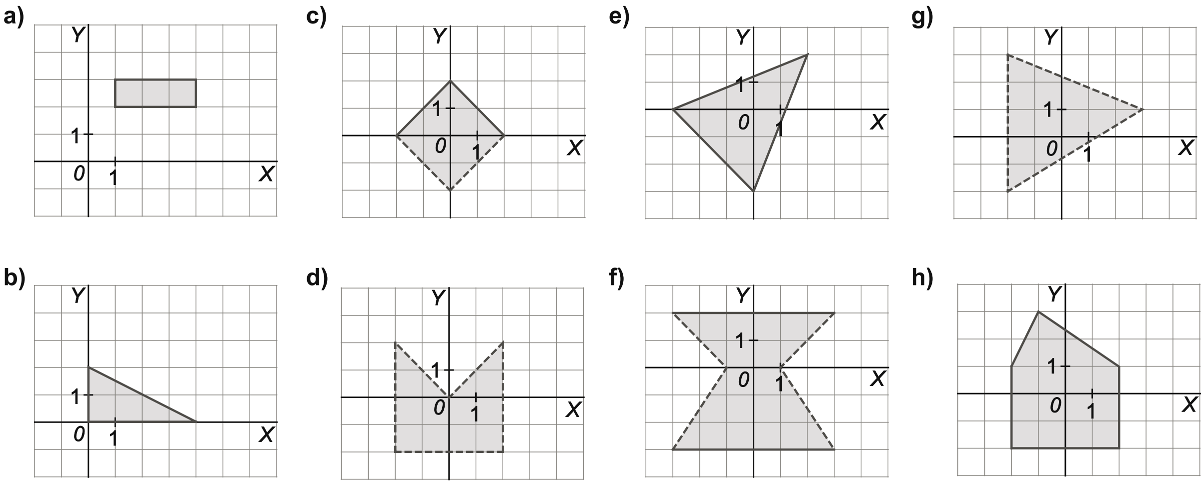
a) El cuarto cuadrante del plano.

b) Un cuadrado de centro el punto (2, 1) y lado 3.

c) Un rectángulo de base 2 y altura 8 centrado en el origen.

a) Respuesta abierta. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ **b)** Respuesta abierta. $\begin{cases} 0{,}5 \le x \le 3{,}5 \\ -0{,}5 \le y \le 2{,}5 \end{cases}$ **c)** Respuesta abierta. $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -4 \le y \le 4 \end{cases}$

57. Expresa mediante sistemas de inecuaciones las regiones sombreadas en las siguientes figuras.



a) $\begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \le x + 2 \\ y > x - 2 \\ y \le -x + 2 \\ y > -x - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y \le \dfrac{2}{5}x + \dfrac{6}{5} \\ y \ge -x - 3 \\ y \ge \dfrac{5}{2}x - 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} y < \dfrac{-2}{5}x + \dfrac{11}{5} \\ x > -2 \\ y > \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5} \end{cases}$

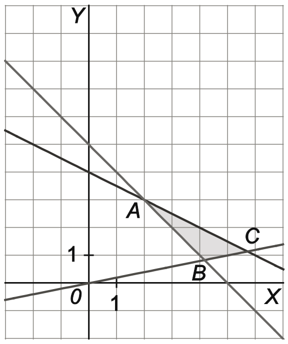
b) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le -\dfrac{1}{2}x + 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2 < x < 0 \\ y > -2 \\ y < -x \end{cases} \cup \begin{cases} 0 < x < 2 \\ y > -2 \\ y < x \end{cases}$

f) $\begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ y > -x - 1 \\ y > x - 1 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 \le y < 0 \\ y < \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} \\ y < -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$

h) $\begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ y \ge -2 \\ y \le 2x + 5 \\ y \le \dfrac{-2}{3}x + \dfrac{7}{3} \end{cases}$

58. Considera el siguiente sistema de inecuaciones $\begin{cases} x+2y \le 8 \\ x+y \ge 5 \\ x-5y \le 0 \end{cases}$ y resuélvelo gráficamente. Encuentra todas sus soluciones enteras.



Vértices: $A(2, 3)$, $B\left(\frac{25}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $C\left(\frac{40}{7}, \frac{8}{7}\right)$.

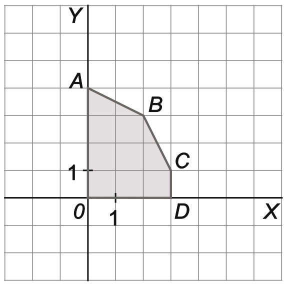
Las soluciones enteras son: (4, 2), (4, 1), (5, 1), (3, 2) y (2, 3).

59. Utilizando el desarrollo del cuadrado de una diferencia, demuestra que la media aritmética de dos números reales positivos es superior o igual a su media geométrica.

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{a}\sqrt{b} \ge 0 \Rightarrow a+b-2\sqrt{ab} \ge 0 \Rightarrow a+b \ge 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

60. La figura muestra la solución del sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} ax+by \le c \\ dx+ey \le f \\ y \ge 0 \\ 0 \le x \le g \end{cases}$$



Encuentra valores posibles para *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* y *g*.

Recta que pasa por $A(0, 4)$ y $B(2, 3)$: $ax+by=c \Rightarrow \begin{cases} 4b=c \\ 2a+3b=c \end{cases} \Rightarrow 4b=2a+3b \Rightarrow b=2a$

Recta que pasa por $B(2, 3)$ y $C(3, 1)$: $dx+ey=f \Rightarrow \begin{cases} 2d+3e=f \\ 3d+e=f \end{cases} \Rightarrow 2d+3e=3d+e \Rightarrow d=2e$

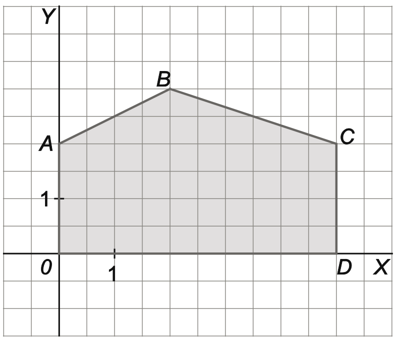
$CD \equiv x=3 \Rightarrow g=3$. Así, si por ejemplo : $a=1$ y $e=1$, entonces $b=2$, $c=8$, $d=2$, , $f=7$ y $g=3$.

61. Escribe todas las posibles soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones lineales siendo los valores de las incógnitas obligatoriamente números enteros.

a) $\begin{cases} x-2y \ge -4 \\ x+3y \le 11 \\ x \le 5 \\ x \ge 0 \quad y \ge 0 \end{cases}$

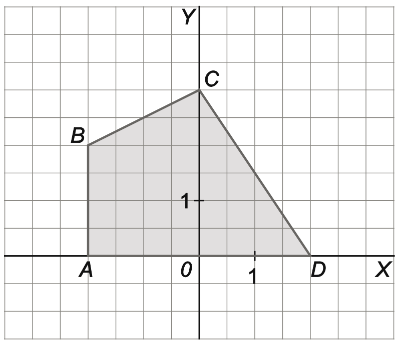
b) $\begin{cases} x-2y \ge -6 \\ 3x+2y \le 6 \\ x+2 \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

a)



(0, 0), (1, 0), (2, 0),(3, 0), (4, 0), (5, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), 4, 1), (5, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (2, 3)

b)



(–2, 0), (–1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0), (–2, 1), (–1, 1), (0, 1), (1, 1), (–2, 2), (–1, 2), (0, 2),(0, 3)

62. Dados dos números reales *a* y *b* tales que $a < b$, completa la tabla de signos y resuelve las inecuaciones.

$-\infty$ a b $+\infty$

$x - a$			
$x - b$			

a) $4(x-a)(x-b) > 0$ **c)** $(x-a)^2(x-b) < 0$

b) $-2(x-a)(x-b) \le 0$ **d)** $(x-a)^3 \ge 0$

a)

$-\infty$ a b $+\infty$

$x - a$	$-$	$+$	$+$
$x - b$	$-$	$-$	$+$
$4(x-a)(x-b)$	$+$	$-$	$+$

$$(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$$

b)

$-\infty$ a b $+\infty$

$x - a$	$-$	$+$	$+$
$x - b$	$-$	$-$	$+$
$-2(x-a)(x-b)$	$-$	$+$	$-$

$$(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$$

c)

$-\infty$ a b $+\infty$

$x - a$	$-$	$+$	$+$
$x - b$	$-$	$-$	$+$
$(x-a)^2(x-b)$	$-$	$-$	$+$

$$(-\infty, b)$$

d)

$-\infty$ a b $+\infty$

$x - a$	$-$	$+$	$+$
$(x-a)^3$	$-$	$+$	$+$

$$[a, +\infty)$$

63. Dados los números reales $a < b < c < d$, completa la siguiente tabla de signos.

$-\infty$ a b c $+\infty$

$x - a$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - b$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-a)(x-b)^2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - c$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-c}$	$-$	$+$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-b)}{(x-c)^2(x-a)}$	$+$	$-$	$+$	$+$

64. Aplicando las técnicas adecuadas para cada inecuación, resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ \dfrac{x}{x-3} \ge 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ -2x^2 + 2x - 1 \le 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x^3 - 8x^2 + 9x + 18 \ge 0 \\ \dfrac{2}{3-x} \le -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4x \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} \le 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 16x + 48 \le 0 \\ \dfrac{x+5}{2x-7} \le 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^3+x} > 0 \\ 2x^2 + 2x - 12 \le 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x^2 - 3x \le 0 \\ \dfrac{x}{x-3} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-3) \le 0 \\ \dfrac{x}{x-3} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \{x = 0\}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4x \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-4) \ge 0 \\ \dfrac{x-3}{x+1} \le 0 \end{cases} \Rightarrow (-1, 0]$

c) $\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ -2x^2 + 2x - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 16x + 48 \le 0 \\ \dfrac{x+5}{2x-7} \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

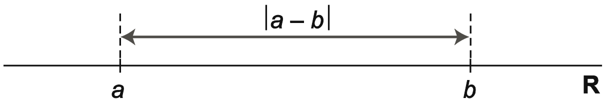
$\Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+4)(x-4) \le 0 \\ \dfrac{x+5}{2x-7} \le 0 \end{cases} \Rightarrow [-5, -4] \cup \left[3, \dfrac{7}{2}\right)$

e) $\begin{cases} x^3 - 8x^2 + 9x + 18 \ge 0 \\ \dfrac{2}{3-x} \le -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-3)(x-6) \ge 0 \\ \dfrac{x-5}{x-3} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

f) $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^3+x} > 0 \\ 2x^2 + 2x - 12 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x(x^2+1)} > 0 \\ 2(x-2)(x+3) \le 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} > 0 \\ (x-2)(x+3) \le 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 2]$

65. La distancia en la recta real entre los puntos que representan a los números *a* y *b* se puede calcular mediante la expresión $d(a, b) = |a - b|$.



a) Calcula la distancia entre los números reales –2 y –6.

b) Calcula el conjunto de números reales *x* cuya distancia al punto 2 es menor o igual a 4.

c) Calcula el conjunto de números reales *x* que verifican que su distancia al punto –2 es mayor o igual a 4.

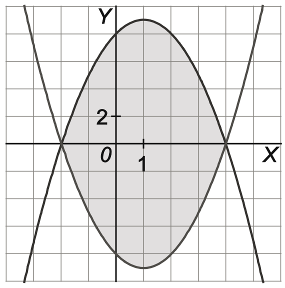
a) $d(-2,-6) = |-2-(-6)| = |-2+6| = 4$

c) $d(x,-2) = |x-(-2)| = |x+2| \geq 4 \Rightarrow x \leq -6$ o $x \geq 2 \Rightarrow (-\infty,-6] \cup [2,+\infty)$

b) $d(x,2) = |x-2| \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 6 \Rightarrow [-2,6]$

66. Escribe un sistema de inecuaciones que caracterice la región encerrada por las parábolas de la figura.

Nota: para hallar la ecuación de la parábola puedes usar la expresión $y = ax^2 + bx + c$.



$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 2x + 8 \\ y \geq x^2 - 2x - 8 \end{cases}$$

67. Calcula el conjunto de números reales tales que: $|x - 2| \leq |x - 6|$. Para ello:

a) Halla el punto que equidista de 2 y de 6.

b) Razona cuáles son los puntos que están más cerca de 2 que de 6.

a) El punto $x = 4$ equidista de 2 y de 6.

b) La inecuación expresa el conjunto de números reales que están más cerca de 2 que de 6. Por tanto, serán los más pequeños que 4: $(-\infty, 4]$.

Cuestiones

68. Realiza las siguientes acciones referidas a inecuaciones.

a) Escribe una inecuación de primer grado cuya solución sea todo el conjunto de los números reales.

b) Escribe una inecuación de primer grado que no tenga solución.

c) Escribe una inecuación de segundo grado cuya solución sea todo el conjunto de los números reales.

d) Escribe una inecuación de segundo grado que no tenga solución.

a) $x + 1 > x$ **b)** $x + 1 < x$ **c)** $x^2 + 1 > 0$ **d)** $x^2 + 1 < 0$

69. Efectúa las siguientes operaciones referidas a sistemas de inecuaciones.

a) Escribe un sistema de dos inecuaciones lineales con una incógnita tales que su solución sea todo el conjunto de los números reales.

b) Escribe un sistema de dos inecuaciones lineales con una incógnita que no tenga solución.

c) Escribe un sistema de dos inecuaciones de segundo grado con una incógnita tales que su solución sea todo el conjunto de los números reales.

d) Escribe un sistema de dos inecuaciones de segundo grado con una incógnita que no tenga solución.

e) Escribe un sistema de dos inecuaciones con una incógnita cuyo conjunto solución esté formado únicamente por el punto $x = 0$.

a) $\begin{cases} x+1 > x \\ x+2 > x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+1 < x \\ x+2 > x \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x^2+1 > 0 \\ x^2+2 > 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x^2+1 > 0 \\ x^2+2 \leq 0 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$

PROBLEMAS

70. Averigua qué números naturales verifican que al sumarles los dos siguientes se obtiene un número superior a 75.

$x + x + 1 + x + 2 > 75$, entonces $3x + 3 > 75$, luego $x > 24$.

Todos los números naturales superiores a 24 verifican la propiedad.

71. ¿Entre qué medidas se debe aumentar el lado de un cuadrado que tiene por área 36 cm² si se quiere que la nueva superficie esté comprendida entre cuatro y nueve veces la inicial?

El lado del cuadrado inicial mide: $l = \sqrt{36} = 6$ cm.

Sea x la medida que se añade al lado del cuadrado, entonces:

$$4 \cdot 36 \le (6+x)^2 \le 9 \cdot 36 \Rightarrow 144 \le (6+x)^2 \le 324 \Rightarrow 12 \le 6 + x \le 18 \Rightarrow 6 \le x \le 12$$

Debe añadirse entre 6 cm y 12 cm.

72. Se consideran los rectángulos cuya base mide el doble que la altura. ¿Cuáles verifican que su área está comprendida entre 8 cm² y 72 cm²?

Supongamos que las medidas son $2x$ de base y x de altura.

El área será:

$$S = 2xx = 2x^2 \Rightarrow 8 < 2x^2 < 72 \Rightarrow 4 < x^2 < 36 \Rightarrow 2 < x < 6$$

La medida de la altura ha de ser un número comprendido entre 2 cm y 6 cm.

73. Se quiere construir una plaza circular cuya superficie debe estar comprendida entre 5000 y 6000 m². ¿Entre qué dos valores se encuentra el radio de la plaza? ¿Y su perímetro?

Sea x el radio de la plaza. Debe ocurrir que:

$$5000 < \pi x^2 < 6000 \Rightarrow 1591{,}55 < x^2 < 1909{,}86 \Rightarrow 39{,}89 < x < 43{,}7 \text{ m.}$$

Por tanto, su perímetro estará entre $250{,}51 < 2\pi x < 274{,}58$ m.

74. Un montañero puede caminar a una velocidad comprendida entre 4 km/h y 6 km/h dependiendo de la mayor o menor dificultad del terreno. Averigua entre qué valores oscila el tiempo que tardará en recorrer una senda de 25 km.

$$4 \le v \le 6 \Rightarrow 4 \le \frac{e}{t} \le 6 \Rightarrow 4 \le \frac{25}{t} \le 6 \Rightarrow \begin{cases} 4 \le \dfrac{25}{t} \Rightarrow t \le \dfrac{25}{4} = 6{,}25 = 6\text{h } 15\text{min} \\ \dfrac{25}{t} \le 6 \Rightarrow t \ge \dfrac{25}{6} = 4\text{h } 10\text{min} \end{cases}$$

Deberá caminar entre 4 h 10 min y 6 h 15 min.

75. Un terreno rectangular mide el doble de largo que de ancho y está dividido en cuatro parcelas con las siguientes características:

- **Sus dimensiones son números enteros.**
- **La parcela más grande tiene un área de 450 m^2.**
- **La parcela más pequeña tiene un área comprendida entre 30 m^2 y 40 m^2.**
- **Las otras dos parcelas tienen la misma superficie.**

¿Cuál es el área total del terreno?

Sea x el área de la parcela más pequeña e y el área de una de las parcelas medianas. Tenemos que:

$\begin{cases} 30 < x < 40 \\ x < y < 450 \end{cases}$ y que $450 + 2y + x$ es el doble de un cuadrado perfecto $2k^2$, por lo que x debe ser par, $x = 2x'$, y queda $225 + y + x' = k^2$, con $\begin{cases} 15 < x' < 20 \\ 2x' < y < 450 \end{cases}$

Entonces, $225 + 30 + 15 < k^2 < 225 + 450 + 20 \Rightarrow 270 < k^2 < 695 \Rightarrow 17 \le k \le 26$.

Por tanto, el área total $2k^2$ puede ser 578, 648, 722, 800, 882, 968, 1058, 1152, 1250, o 1352 m^2.

76. En un territorio, el crecimiento de la población se ajusta a un modelo exponencial:

$$P_f = P_i\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

a) Si actualmente la población es de 25 000 personas, ¿cuál debe ser la tasa mínima de crecimiento para que en 5 años pase a ser de 30 000 personas?

b) Considerando la tasa de crecimiento del apartado anterior, ¿qué población habrá en el territorio pasados 50 años?

a) $P_i = 25\,000$ y queremos que ocurra que P_f sea al menos 30 000. Entonces:

$$30\,000 \le 25\,000\left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 \Rightarrow r = 3{,}71$$

b) $P_f = 25\,000\left(1 + \frac{3{,}71}{100}\right)^{50} \simeq 154\,515{,}4$. Habrá una población de 154 515 personas.

77. Al comprar 8 bolígrafos se pagó con un billete de 5 €, pero no se recuerda a cuánto ascendía la vuelta. Otro cliente fue a comprar 12 bolígrafos de la misma clase, pero tuvo que volver a casa, ya que los 6,50 € que llevaba para pagar no eran suficientes. ¿Qué se puede decir del precio de un bolígrafo?

Sea x el precio de cada bolígrafo en céntimos de euro. Entonces: $\begin{cases} 8x < 500 \\ 12x > 650 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 62{,}5 \\ x > 54{,}1\widehat{6} \end{cases}$

Por tanto, el precio de cada bolígrafo está entre 0,55 € y 0,62 €.

78. Una empresa de alquiler de coches ofrece dos posibles modelos de contrato.

- **El modelo *A* consiste en pagar una cantidad fija de 50 € además de 0,08 € por cada kilómetro recorrido.**
- **El modelo *B* consiste en pagar 80 € sin limitación de kilometraje.**

¿A partir de cuántos kilómetros interesa el alquiler según el modelo *B*?

Sea x el número de km a recorrer

$50 + 0{,}08x > 80 \Rightarrow x > \frac{30}{0{,}08} = 375$. Interesa el alquiler según el modelo B a partir de 375 km.

79. Una empresa precisa repartidores de *pizzas* y ofrece las siguientes opciones de contrato:

- **Se cobrará una cantidad mensual fija de 350 € más 3 € por cada *pizza* repartida.**
- **Sueldo fijo de 600 €, independiente del número de *pizzas* repartidas.**

Calcula el número mínimo de *pizzas* que se han de repartir para que convenga escoger la primera opción.

Sea x el número de pizzas. Entonces:

$$350 + 3x \geq 600 \Rightarrow x \geq 83{,}3$$

Por tanto, conviene elegir la primera opción a partir de 84 *pizzas*.

80. El nivel de alcohol, *N*, en sangre de una persona que ha bebido tres cuartos de litro de cerveza en función de su peso, *x*, en kilogramos, pasada media hora, es:

$$N = \frac{400}{7x}$$

Aunque nunca se debe conducir tras haber ingerido alcohol, la ley de tráfico establece fuertes multas para aquellas personas que conduzcan con un nivel superior a 0,3 g/L. Indica qué personas no podrían conducir a los 30 minutos de haber bebido tres cuartos de litro de cerveza.

$N = \frac{400}{7x} > 0{,}3 \Rightarrow 400 > 2{,}1x \Rightarrow x < \frac{400}{2{,}1} = 190{,}48$. Las que no superen los 190,48 kg de peso. (Ninguna)

81. Un alimento tiene las siguientes características en su composición:

- **Tiene el triple de masa de grasa que de hidratos de carbono.**
- **La masa de las proteínas es 16 veces la masa de los hidratos de carbono.**
- **En 100 g del alimento hay entre 20 g y 30 g de hidratos de carbono, proteínas y grasas en total.**

a) Determina las diferentes posibilidades de la composición de 100 g de ese alimento.

b) ¿Puede ocurrir que haya 0,5 g de hidratos de carbono, 8 g de proteínas y 1,5 g de grasas?

c) ¿Puede ocurrir que haya 1,25 g de hidratos de carbono, 20 g de proteínas y 3,75 g de grasas?

a) En 100 gramos de alimento: x g de hidratos de carbono, $3x$ g de grasa y $16x$ g de proteínas.

Por tanto: $20 \leq x + 3x + 16x \leq 30 \Rightarrow 20 \leq 20x \leq 30 \Rightarrow 1 \leq x \leq 1{,}5$

Entre 1 y 1,5 g de hidratos de carbono, entre 3 y 4,5 g de grasa y entre 16 y 24 g de proteínas.

b) No es posible, ya que no se verifican todas las condiciones.

c) Sí es posible.

82. Se quieren confeccionar camisetas deportivas de dos calidades, que se diferencian en la proporción de algodón y de fibra sintética que se utiliza.

La tabla siguiente da la composición de cada tipo de camiseta:

	Unidades de algodón	Unidades de fibra sintética
Calidad extra	4	1
Calidad media	2	3

Para confeccionar todas las camisetas se dispone de un total de 260 unidades de algodón y de 190 unidades de fibra sintética.

a) Determina, de forma gráfica, las diferentes posibilidades que hay de producir las camisetas.

b) ¿Es posible confeccionar 50 camisetas de calidad extra y 40 de calidad media?

a) Sean:

x número de camisetas de calidad extra

y el número de camisetas de calidad media

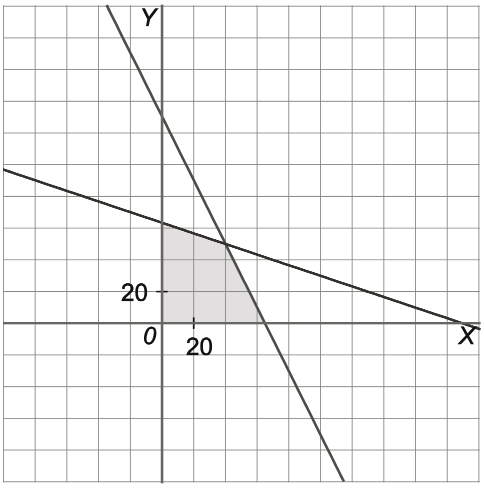
$$\begin{cases} 4x + 2y \le 260 \\ x + 3y \le 190 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Vértices:

A (0; 63,3)

B(40, 50)

C (65, 0)



b) No es posible por falta de algodón.

83. La función de demanda, f_d, correspondiente al mercado de alquiler de ciertas herramientas de bricolaje es para un precio, p, comprendido entre 15 € y 19 €:

$$f_d = -\frac{3}{10}p^2 - \frac{119}{10}p + 123$$

¿Para qué precios la demanda es inferior a 6 unidades?

$f_d < 6 \Rightarrow -3p^2 - 119p + 1170 < 0 \Rightarrow (-\infty, -47,82) \cup (8,16, +\infty)$

Como p está comprendido entre 15 € y 19 €, entonces para $15 \le p \le 19$ la demanda es inferior a 6 unidades.

84. El tratamiento de una enfermedad requiere la administración de dos sustancias curativas, *C* y *D*. Cada semana es preciso consumir por lo menos 30 mg de *C* y 42 mg de *D*. Estas sustancias están incluidas en dos tipos de comprimidos diferentes, *G* y *P*, de la forma siguiente:

- **En un comprimido *G* hay 3 mg de *C* y 5 mg de *D*.**
- **En un comprimido *P* hay 1 mg de *C* y 1 de *D*.**

a) Representa gráficamente las posibles formas en que pueden administrarse al paciente las dosis necesarias.

b) Indica si las condiciones se verifican al tomar:

- 1 comprimido *G* cada día de la semana
- 1 comprimido *P* de lunes a viernes
- 2 comprimidos *P* los sábados y domingos

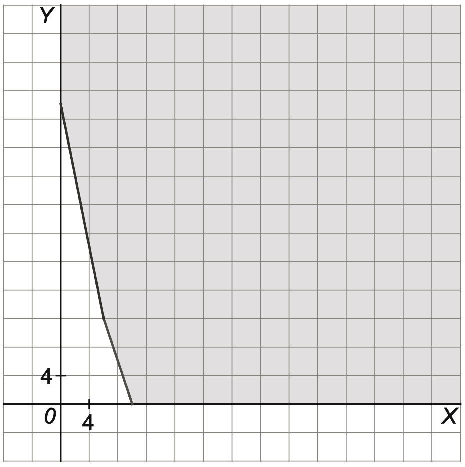
a) Sean:

x el número de comprimidos *G*

y el número de comprimidos *P*

$$\begin{cases} 3x + y \geq 30 \\ 5x + y \geq 42 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices: $A(0, 42)$, $B(6, 12)$ y $C(10, 0)$



b) 7 comprimidos *G* y 9 *P* sí las verifican.

85. En unos almacenes de ropa deportiva cuentan con 200 balones y 300 camisetas. Tras un estudio de mercado ponen las existencias a la venta en dos tipos de lotes. El primer lote lleva un balón y tres camisetas y el segundo dos balones y dos camisetas.

El número total de lotes no debe superar los 110 y, en particular, el número máximo de lotes del primer tipo no debe superar los 60.

a) Representa las posibles formas de elaborar los lotes.

b) Indica si cada una de las siguientes posibilidades verifica las condiciones:

- 40 del primer tipo y 80 del segundo.
- 40 del primer tipo y 70 del segundo.
- 70 del primer tipo y ninguno del segundo.

a) Sean

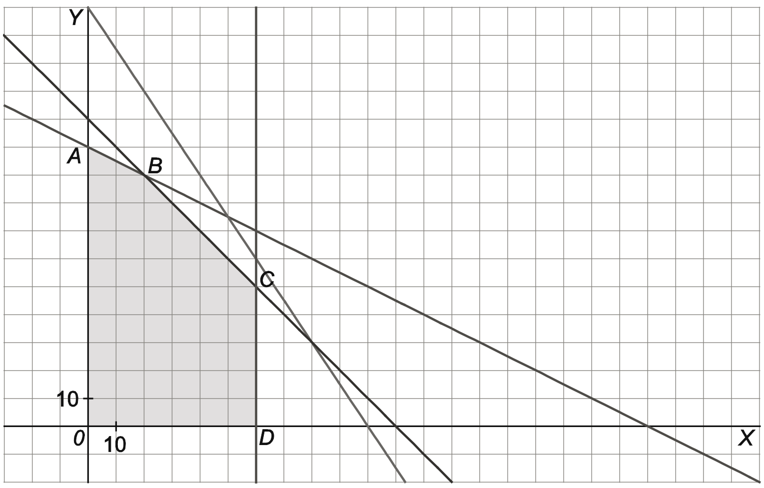
x el número de lotes tipo 1

y el número *de* lotes tipo 2.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 200 \\ 3x + 2y \leq 300 \\ x + y \leq 110 \\ 60 \geq x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Vértices: $A(0, 100)$, $B(20, 90)$

$C(60, 50)$ y $D(60, 0)$



b) No, sí y no, respectivamente.

ENTORNO MATEMÁTICO

Montamos una tienda de bicis…

Ángela es dentista, Juan es cocinero e Ignacio es abogado. Los tres hermanos tienen una afición común: la práctica del ciclismo amateur. Todos los fines de semana salen a dar una vuelta en bicicleta por caminos forestales.

En una de las ocasiones, decidieron hacer una competición: debían subir a la cima de un monte con una altura de 1400 m sobre el nivel del mar partiendo de su falda que se encuentra a 1050 m sobre el nivel del mar. El que llegara el último, debería comprar 30 € de lotería para el próximo sorteo.

Por supuesto, y como siempre, en un alarde de buena forma física… Juan llegó el último y compró la lotería y contra todo pronóstico… ¡ganaron el premio gordo!

Decidieron invertir el dinero ganado en montar una empresa de distribución y venta de bicicletas de montaña.

Después de realizar un estudio de mercado, estiman que las funciones de oferta y demanda de un cierto tipo de bicicletas son, para precios comprendidos entre $p = 200$ € y $p = 250$ €:

$$f_o = -\frac{7}{600}p^2 + \frac{23}{4}p - \frac{1990}{3} \qquad f_d = -\frac{2}{75}p^2 + \frac{56}{5}p - \frac{3370}{3}$$

donde f_o y f_d representa el número de unidades ofertadas y demandadas para el precio p.

a) Calcula para qué valores de p la oferta supera a la demanda y para qué valores la demanda supera a la oferta. Interpreta los resultados.

b) Halla para qué valores de p la oferta es superior a 35 unidades.

c) Halla para qué valores de p la demanda es inferior a 30 unidades.

a) $f_o > f_d \Rightarrow -\frac{7}{600}p^2 + \frac{23}{4}p - \frac{1990}{3} > -\frac{2}{75}p^2 + \frac{56}{5}p - \frac{3370}{3} \Rightarrow \frac{3}{200}p^2 - \frac{109}{20}p + 460 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3p^2 - 1090p + 92000 > 0 \Rightarrow (p-230)(3p-400) > 0 \Rightarrow p \in \left(-\infty, \frac{400}{3}\right) \cup (230, +\infty)$

Como el dominio de interés de los precios es [200, 250], la oferta superará a la demanda cuando el precio sea superiores a 230 € e inferior o igual a 250 €. Por el contrario, la demanda superará a la oferta cuando el precio sea superior o igual a 200 € e inferior a 230 €.

El punto de equilibrio del mercado se obtiene con un precio de 230 €.

b) $-\frac{7}{600}p^2 + \frac{23}{4}p - \frac{1990}{3} > 35 \Rightarrow p \in (217,\ 250)$

Para precios comprendidos entre 217 y 250 euros, la oferta es superior a 35 unidades.

c) $f_d = -\frac{2}{75}p^2 + \frac{56}{5}p - \frac{3370}{3} < 30 \Rightarrow p \in (239,\ 250)$

Para precios comprendidos entre 239 € y 250 €, la demanda es inferior a 30 unidades.

… o de accesorios de bicis

Una vez pasada la emoción de haber ganado, empiezan los miedos, y Ángela, Juan e Ignacio ya no están tan seguros de que las bicis sean buena idea. Un local grande, material grande, mucho trabajo,…

Por tanto han pensado, como segunda opción, colocar el premio en crear una empresa que empaquete y distribuya lotes de artículos para el mantenimiento de la bicicleta. Es algo más pequeño e incluso podrían empaquetar a mano y vender por internet.

Los lotes contendrán cámaras para las ruedas, cajas de parches y esprays para reparación de pinchazos.

Deciden elaborar dos tipos de lotes. La tabla siguiente muestra la composición de cada lote.

	Cámaras	Parches	Esprays
LOTE *A*	4	1	1
LOTE *B*	2	2	1

Se cuenta con un máximo de 70 cámaras, 30 cajas de parches y 20 esprays reparadores.

a) Suponiendo que se forman x lotes de tipo *A* e y lotes de tipo *B*, establece, mediante un sistema de inecuaciones con las incógnitas x e y, las condiciones que deben verificar los valores de x e y para que sea factible la elaboración de estos lotes teniendo en cuenta las existencias de cada producto.

b) Mediante GeoGebra dibuja la región de puntos (x,y) que cumplen todas las condiciones anteriores. Establece las coordenadas de todos los vértices de la región.

c) Indica si las siguientes soluciones son o no posibles:

A. $x = 5 \;\; y = 12$ **B.** $x = 5 \;\; y = 13$ **C.** $x = 10 \;\; y = 10$ **D.** $x = 17 \;\; y = 2$

d) Si finalmente se elaboran 15 lotes de *A* y 5 lotes de *B*, ¿se agotarán todas las existencias de los tres productos?

a) Si se forman x lotes de tipo *A* e y lotes de tipo *B*, se deberán cumplir todas y cada una de las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} 4x + 2y \le 70 \\ x + 2y \le 30 \\ x + y \le 20 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

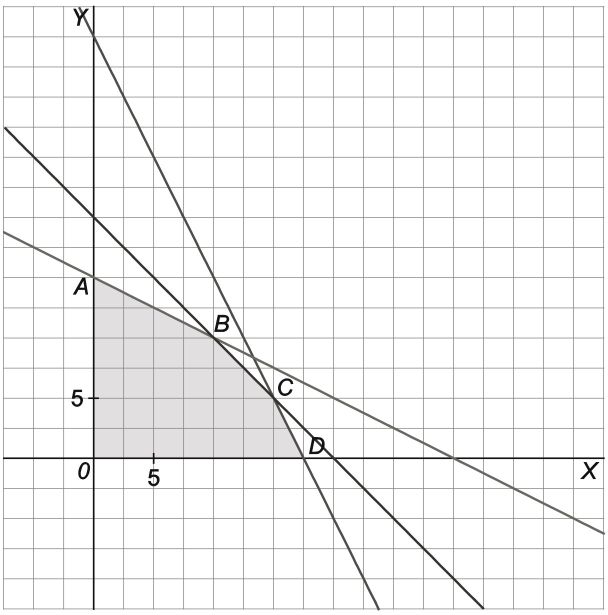
b) Vértices: $O(0, 0)$

$$A\begin{cases} x = 0 \\ x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow A(0,15)$$

$$B\begin{cases} x + y = 20 \\ x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow B(10,10)$$

$$C\begin{cases} x + y = 20 \\ 4x + 2y = 70 \end{cases} \Rightarrow C(15,5)$$

$$D\begin{cases} y = 0 \\ 4x + 2y = 70 \end{cases} \Rightarrow D(17,5;0)$$



c) A. $x = 5 \;\; y = 12$ Si. B. $x = 5 \;\; y = 13$. No. C. $x = 10 \;\; y = 10$ Si. D. $x = 17 \;\; y = 2$ No.

d) Se agotarán las existencias de cámaras y de esprays pero sobrarán 5 cajas de parches.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Resuelve las inecuaciones lineales.

a) $x-\frac{5}{2}>2+\frac{x+5}{2}$ **b)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-\frac{x}{8}\le\frac{45}{8}$

a) $(14,+\infty)$ **b)** $(-\infty,9]$

2. Resuelve las inecuaciones de segundo grado.

a) $4x^2+2x-12\le 0$ **b)** $-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{3}x\ge -1$

a) $2(x+2)(2x-3)\le 0\Rightarrow\left[-2,\ \frac{3}{2}\right]$ **b)** $(3-x)(2x+1)\ge 0\Rightarrow\left[-\frac{1}{2},\ 3\right]$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\frac{2x-3}{4x-1}\le -1$ **b)** $\frac{6}{5(x-3)}+\frac{4}{5(x+2)}\ge -1$

a) $\frac{6x-4}{4x-1}\le 0\Rightarrow\left(\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right]$ **b)** $\frac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-3)}\ge 0\Rightarrow(-\infty,-3]\cup(-2,2]\cup(3,+\infty)$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $x^4-10x^2+9\le 0$ **b)** $2x^3+x^2-5x\ge -2$

a) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)\le 0\Rightarrow[-3,\ \ -1]\cup[1,\ \ 3]$ **b)** $(x-1)(x+2)(2x-1)\ge 0\Rightarrow\left[-2,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

5. Resuelve el sistema de inecuaciones lineales con una incógnita.

$$\begin{cases}\mathbf{2x-3\le\frac{x-2}{3}+1}\\ \mathbf{-2x+5\ge 1}\end{cases}$$

$(-\infty,\ 2]$

6. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a) $\begin{cases}x^2-x-6\le 0\\ \frac{x-3}{x-2}<0\end{cases}$ **b)** $\begin{cases}2x-3<5\\ \frac{x-1}{x+1}<2\\ x^2-2x\ge 0\end{cases}$

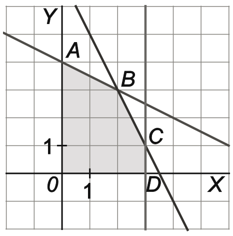
a) $\begin{cases}(x+2)(x-3)\le 0\\ \frac{x-3}{x-2}<0\end{cases}\Rightarrow(2,3)$ **b)** $\begin{cases}x<4\\ \frac{x+3}{x+1}>0\\ x(x-2)\ge 0\end{cases}\Rightarrow(-\infty,-3)\cup(-1,0]\cup[2,4)$

7. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

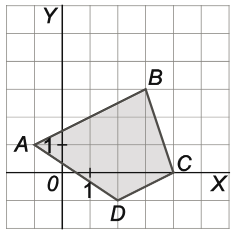
a) $\begin{cases} x+2y \le 8 \\ 2x+y \le 7 \\ 0 \le x \le 3 \quad y \ge 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x+y \le 12 \\ x-2y \ge -3 \\ y \ge \dfrac{x}{2}-2 \\ 2x+3y \ge 1 \end{cases}$

a) $O(0, 0)$, $A(0, 4)$, $B(2, 3)$, $C(3, 1)$, $D(3, 0)$



b) $A(-1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(4, 0)$, $D(2, -1)$



8. En una clase hay 15 chicas y 10 chicos. La media aritmética de las calificaciones de las chicas en el último examen de matemáticas ha sido 6,25. ¿Entre qué valores se encuentra la media de los chicos si se sabe que la media de toda la clase es superior a 5,25 e inferior a 6,5?

Sea x la media aritmética de la nota de los chicos en matemáticas. Como la media aritmética de las chicas es 6,25, entonces:

$$25 \cdot 5{,}25 \le 6{,}25 \cdot 15 + 10x \le 25 \cdot 6{,}5 \Rightarrow 131{,}25 \le 93{,}75 + 10x \le 162{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 37{,}5 \le 10x \le 68{,}75 \Rightarrow 3{,}75 \le x \le 6{,}875$$

Luego la media de los chicos se encuentra entre 3,75 y 6,875, ambas notas medias incluidas.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Las inecuaciones $2x-1 \le 0$ y $\dfrac{2x-1}{x+1} \le 0$ tienen como conjuntos solución respectivos C_1 y C_2.

A. $C_1 = C_2$ **B.** $C_1 \subset C_2$ **C.** $C_2 \subset C_1$ **D.** $C_1 = C_2 - \{-1\}$

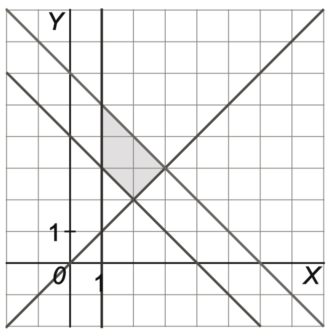
Solución: C

2. La solución de la inecuación $x^2 - (a+b)x + ab < 0$, donde $a < 0 < b$ es:

A. $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ **B.** $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ **C.** (a, b) **D.** $[a, b]$

Solución: C

3. La zona sombreada de $\mathbb{R}^2$ que aparece a la derecha puede ser determinada por el sistema de inecuaciones:



A. $\{x \ge 1, y \ge x, x+y \le 4, x+y \ge 6\}$

B. $\{x \ge 1, y \le x, x+y \ge 4, x+y \le 6\}$

C. $\{x \ge 1, y \ge x, x+y \ge 4, x+y \le 6, y \le 1\}$

D. $\{x \ge 1, y \ge x, x+y \ge 4, x+y \le 6\}$

Solución: D

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Si la solución de la inecuación $x^2 + x + c > 0$ con $c \neq 0$ es $(-\infty, c) \cup (b, +\infty)$, entonces:

A. $c = 2$ **C.** $b = -1$

B. $c = -2$ **D.** $b = 1$

Solución: B y D

5. Se considera la inecuación $\frac{x-1}{x+2} \geq r$.

A. $x = -3$ forma parte de la solución.

B. $x = -1$ y $x = 1$ forman parte de la solución.

C. $x = -5$ forma parte de la solución pero $x = -2$ no.

D. $x = -2$ forma parte de la solución pero $x = -5$ no.

Solución: A y C

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones

6. Se quiere obtener la solución de la inecuación $|x - r| \leq 2$. Se consideran las afirmaciones:

1. *r* es un número estrictamente negativo.

2. El conjunto solución es el vacío.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$ **C.** 1 y 2 son excluyentes entre sí.

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$ **D.** Nada de lo anterior.

Solución: D

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se quiere obtener y dibujar la solución de la inecuación $ax + by \leq 0$. Para ello se aportan los siguientes datos:

1. $a = 1$ y $b = 2$

2. $b = 2a$

A. Debe eliminarse necesariamente el dato 1.

B. Debe eliminarse necesariamente el dato 2.

C. Pueden eliminarse cualquiera de los dos datos.

D. Hacen falta los dos datos.

Solución: C

6 Funciones

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Obtén el dominio de las siguientes funciones:

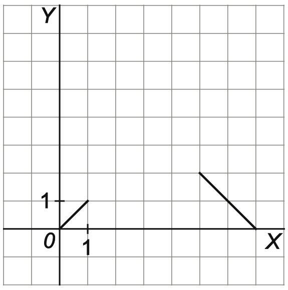
a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{5}$ **b)** $g(x)=\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$ **c)** $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+4}$

a) $D(f)=$ **b)** $D(g)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$ **c)** $D(h)=[-2,+\infty)$

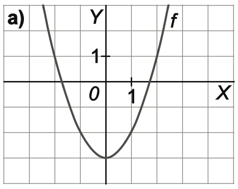
3. Dibuja una posible gráfica para la función *y* = *f*(*x*) con las siguientes restricciones en su dominio y recorrido:

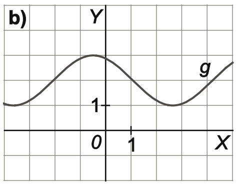
$$\boldsymbol{D(f)=[0,\ 1]\cup[5,\ 7]\ \text{y}\ R(f)=[0,\ 2]}$$

Respuesta abierta. Otra posible solución se muestra en las soluciones al final del libro.



4. Obtén el dominio y el recorrido de estas funciones.





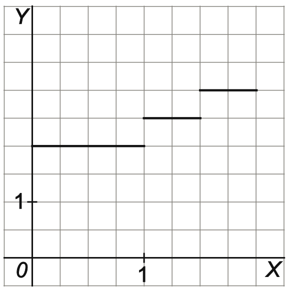
a) $D(f)=\mathbb{R}$; $R(f)=[-3,+\infty)$ **b)** $D(g)=\mathbb{R}$; $R(g)=[1,\ 3]$

5. Ejercicio resuelto.

6. En un aparcamiento se cobra 50 CENT más por cada media hora de uso a partir de la 1ª hora, además de un fijo de 2€. Encuentra la expresión de la función que da el coste en función del tiempo de aparcamiento y represéntala.

Sea x el tiempo de aparcamiento en horas.

$$f(x)=\begin{cases}2 & \text{si}\quad 0\le x<1\\ 2{,}5 & \text{si}\quad 1\le x<1{,}5\\ 3 & \text{si}\quad 1{,}5\le x<2\\ \ldots\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2 & \text{si}\quad 0\le x<1\\ 2+\dfrac{n}{2} & \text{si}\quad \dfrac{n+1}{2}\le x<\dfrac{n+2}{2}\end{cases}\ \text{con } n\in\mathbb{N}\ \text{y}\ n\ge 1$$



7. Para las siguientes funciones, calcula $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y determina su dominio.

a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<-1 \\ x^2 & \text{si } -1\le x\le 1 \\ x & \text{si } x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2}{x-2} & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x>0 \end{cases}$

a) Para $f(-2)$ se utiliza la primera expresión $f(x)=x$.

Para $f(-1)$, $f(0)$ y $f(1)$ se usa la segunda expresión $f(x)=x^2$.

Para $f(2)$ se utiliza la tercera expresión $f(x)=x$.

$f(-2)=-2$; $f(-1)=(-1)^2=1$; $f(0)=0^2=0$; $f(1)=1^2=1$; $f(2)=2$; $D(f)=\mathbb{R}$

b) Para $f(-2)$, $f(-1)$ y $f(0)$ se utiliza la primera expresión $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$.

$f(1)$ no está definido por no pertenecer al dominio.

Para $f(2)$ se utiliza la segunda expresión $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

$f(-2)=\dfrac{(-2)^2+2}{(-2)-2}=\dfrac{6}{-4}=-\dfrac{3}{2}$; $f(-1)=\dfrac{(-1)^2+2}{(-1)-2}=\dfrac{3}{-3}=-1$; $f(0)=\dfrac{0^2+2}{0-2}=\dfrac{2}{-2}=-1$

$f(2)=\dfrac{2+1}{2-1}=\dfrac{3}{1}=3$; $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

8. Expresa $f(x)=|x+5|-x$ como una función a trozos.

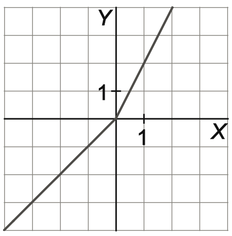
Si $x<-5$, $x+5<0$ por lo que $|x+5|=-(x+5)=-x-5 \Rightarrow |x+5|-x=-x-5-x=-2x-5$

Si $x\ge -5$, $x+5\ge 0$ por lo que $|x+5|=x+5 \Rightarrow |x+5|-x=x+5-x=5$

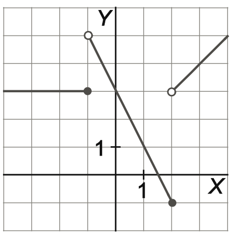
$f(x)=\begin{cases} -2x-5 & \text{si } x<-5 \\ 5 & \text{si } x\ge -5 \end{cases}$

9. Encuentra la expresión algebraica de las funciones:

a)



b)



a) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si } x\le -1 \\ -2x+3 & \text{si } -1<x\le 2 \\ x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

10. Ejercicio resuelto.

11. Dadas las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+3} \qquad g(x)=\frac{2}{x^2-9} \qquad h(x)=\sqrt{x-1}$$

Calcula el dominio y la expresión de las siguientes funciones:

a) $f+g$ **b)** $f-h$ **c)** $(f+h)g$ **d)** $\frac{1}{f}$ **e)** $\frac{g}{h}$ **f)** $\frac{h}{f}$

Se calcula previamente el dominio de cada función original: $D(f)=\mathbb{R}-\{-3\}$; $D(g)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$; $D(h)=[1,+\infty)$

a) $D(f+g)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$ $\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x-1}{x+3}+\frac{2}{x^2-9}=\frac{x^2-4x+5}{x^2-9}$

b) $D(f-h)=[1,+\infty)$ $\quad (f-h)(x)=f(x)-h(x)=\frac{x-1}{x+3}-\sqrt{x-1}$

c) $D((f+h)g)=[1,3)\cup(3,+\infty)$ $\quad [(f+h)g](x)=[f(x)+h(x)]g(x)=\left(\frac{x-1}{x+3}+\sqrt{x-1}\right)\cdot\frac{2}{x^2-9}$

d) $D\left(\frac{1}{f}\right)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$ $\quad \left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{x+3}{x-1}$

e) $D\left(\frac{g}{h}\right)=[1,3)\cup(3,+\infty)$ $\quad \left(\frac{g}{h}\right)(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{2}{(x^2-9)\sqrt{x-1}}$

f) $D\left(\frac{h}{f}\right)=(1,+\infty)$ $\quad \left(\frac{h}{f}\right)(x)=\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{(x+3)\sqrt{x-1}}{x-1}$

12. Sean las funciones $f(x)=2x^2-3x-5$ y $g(x)=x+h$, donde h es cualquier número real.

a) Calcula las funciones $f\circ g$ y $g\circ f$.

b) ¿Para qué valores de h tiene la función g compuesta con f una raíz en $x=0$?

a) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(x+h)=2(x+h)^2-3(x+h)-5=2x^2+(4h-3)x+(2h^2-3h-5)$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(2x^2-3x-5)=(2x^2-3x-5)+h=2x^2-3x+(h-5)$

b) $(f\circ g)(0)=2\cdot0^2+(4h-3)\cdot0+(2h^2-3h-5)=2h^2-3h-5=0\Rightarrow h_1=-1,\ h_2=\frac{5}{2}$

13. Dadas las funciones $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$, $g(x)=x-4$, $h(x)=\sqrt{x-3}$ y $k(x)=x^2+1$ determina el dominio y la expresión de las funciones:

a) $f\circ g$ **b)** $g\circ f$ **c)** $h\circ g$ **d)** $g\circ h$ **e)** $k\circ h$ **f)** $f\circ k$

Dominio de cada función original: $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$; $D(g)=\mathbb{R}$; $D(h)=[3,+\infty)$; $D(k)=\mathbb{R}$

a) $D(f\circ g)=\mathbb{R}-\{2\}$ $\quad (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-4)=\frac{(x-4)-1}{(x-4)+2}=\frac{x-5}{x-2}$

b) $D(g\circ f)=\mathbb{R}-\{-2\}$ $\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\left(\frac{x-1}{x+2}\right)-4=\frac{-3x-9}{x+2}$

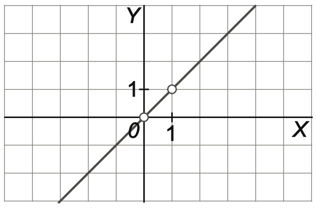
c) $D(h\circ g)=[7,+\infty)$ $\quad (h\circ g)(x)=h(g(x))=h(x-4)=\sqrt{(x-4)-3}=\sqrt{x-7}$

d) $D(g\circ h)=[3,+\infty)$ $\quad (g\circ h)(x)=g(h(x))=g\left(\sqrt{x-3}\right)=\sqrt{x-3}-4$

e) $D(g\circ k)=\mathbb{R}$ $\quad (g\circ k)(x)=g(k(x))=g(x^2+1)=(x^2+1)-4=x^2-3$

f) $D(f\circ k)=\mathbb{R}$ $\quad (f\circ k)(x)=f(k(x))=f(x^2+1)=\frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)+2}=\frac{x^2}{x^2+3}$

14. **Dadas las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{x}$, ¿a cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica de la ilustración?**



A. $s = f + g$

B. $p = f \cdot g$

C. $d = f - g$

D. $q = \dfrac{f}{g}$

Los dominios de las funciones *s*, *q* y *d*, incluyen el valor $x = 1$.

La función $q(x) = \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene dominio $D(q) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ y coincide con $y = x$ en el resto de sus puntos.

La respuesta correcta es la D.

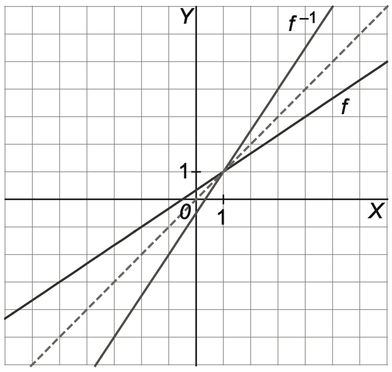
15. **Sea $f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$. Halla f^{-1} y dibuja su gráfica y la de f.**

Se intercambian las variables *x* e *y* en la ecuación explícita de *f*, $y = \dfrac{2x+1}{3}$, y despejamos *y*:

$$x = \frac{2y+1}{3}$$

$$3x = 2y + 1 \Rightarrow 2y = 3x - 1 \Rightarrow y = \frac{3x-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$$



16. **La función $f(x) = x^5 + x + 1$ admite inversa, f^{-1}. Utiliza la calculadora para aproximar $f^{-1}(10)$.**

Se busca un valor de *x* para el que $f(x) = x^5 + x + 1 = 10$.

Para ello se dan valores a*x* que hagan que*f*(*x*) se aproxime a 10.

x	1	1,4	1,5	1,6	2
$f(x) = x^5 + x + 1$	3	7,778	10,094	13,086	35

$$f^{-1}(10) \simeq 1{,}5$$

17. **Obtén la expresión y el dominio de la función inversa de $f(x) = \sqrt{2x-3}$. ¿Cuánto vale $f^{-1}(3)$?**

$y = \sqrt{2x-3} \Rightarrow y^2 = 2x - 3 \Rightarrow x = \dfrac{y^2+3}{2}$. Así pues, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+3}{2}$ con $x \geq 0$.

$$R(f) = [0, +\infty) \Rightarrow D(f^{-1}) = [0, +\infty)$$

$$f^{-1}(3) = 6$$

18. **Ejercicio interactivo.**

19. A partir de la gráfica de *f*, esboza las gráficas de las siguientes funciones.

a) $g(x)=f(x)+4y$

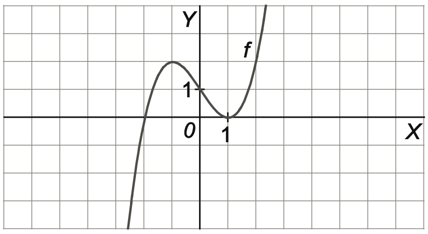
b) $g(x)=f(x+4)$

c) $g(x)=3f(x)$

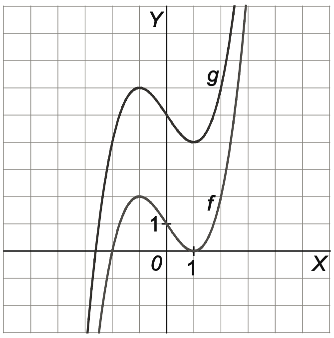
d) $h(x)=f(x)-1$

e) $h(x)=f(x-1)$

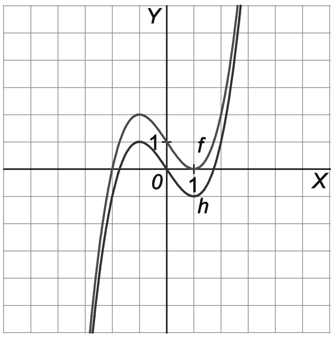
f) $h(x)=f(3x)$



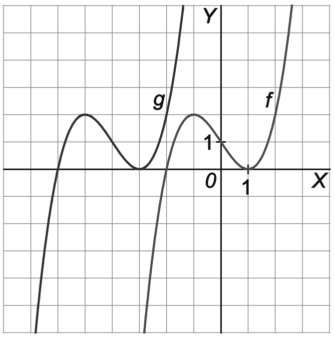
a) *g* se obtiene mediante una traslación vertical, subiendo la gráfica de *f* 4 unidades.



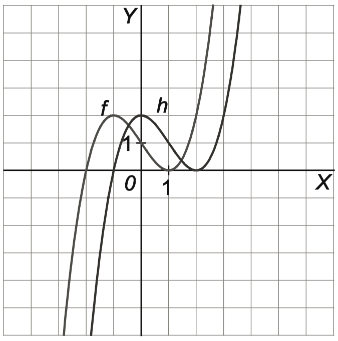
d) *h* se obtiene mediante una traslación vertical, bajando la gráfica de *f* 1 unidad.



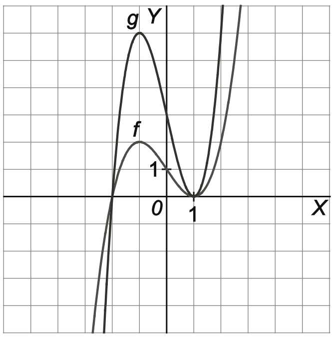
b) *g* se obtiene mediante una traslación horizontal, desplazando *f* 4 unidades hacia la izquierda.



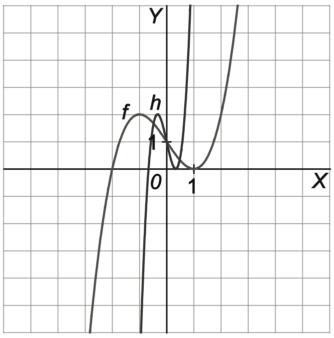
e) *h* se obtiene mediante una traslación horizontal, desplazando *f* 1 unidad hacia la derecha.



c) *g* se obtiene a partir de *f* mediante una dilatación vertical.



f) *h* se obtienea partir de *f* mediante una dilatación horizontal.



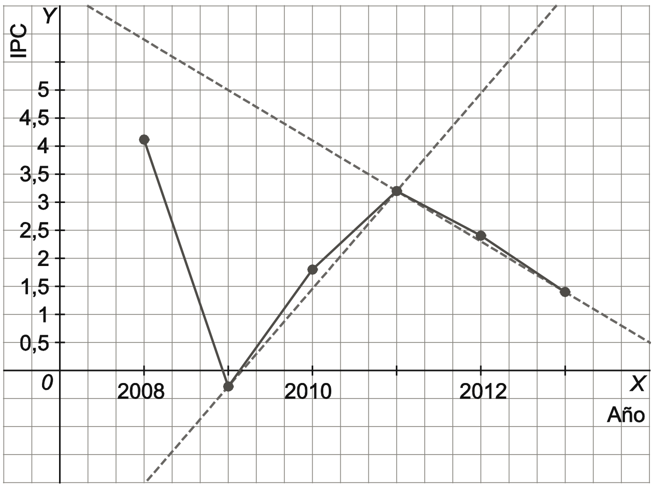
20. Ejercicio resuelto.

21. Se tienen los siguientes datos sobre la evolución del índice de precios al consumo (IPC).

Año	2008	2009	2010	2011	2012	2013
IPC	4,1	–0,3	1,8	3,2	2,4	1,4

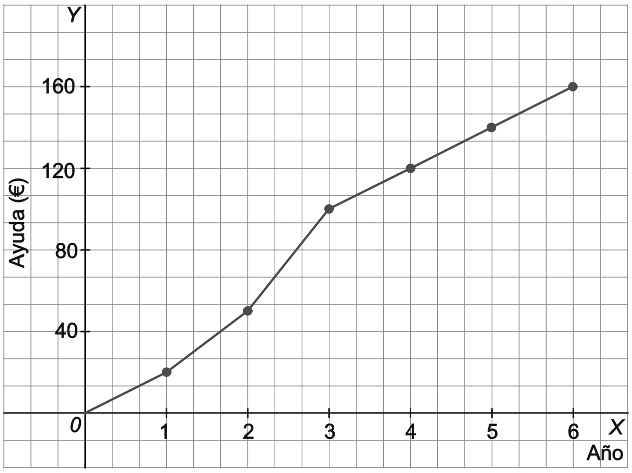
Representa gráficamente los datos y halla el máximo intervalo para el que la gráfica se aproxima a una recta.

La función se aproxima a una recta en el intervalo [2011, 2013].



22. La siguiente tabla expone la ayuda municipal que recibe una familia en función del número de hijos. Representa los datos y estudia para qué intervalo se puede aproximar por una recta.

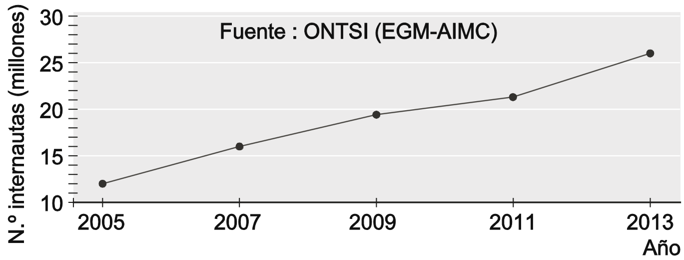
N.º de hijos	1	2	3	4	5	6
Ayuda (€)	20	50	100	120	140	160

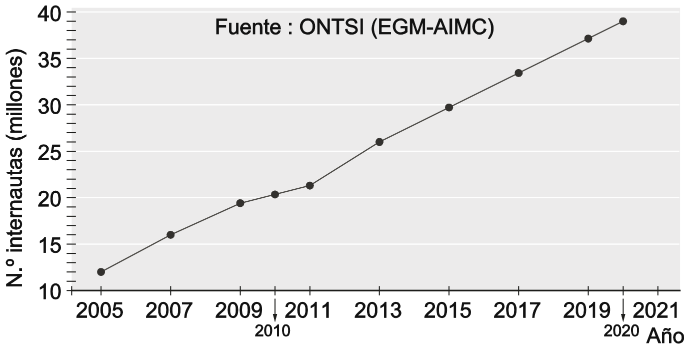


La función se puede aproximar por una recta en el intervalo [3, 6].

23. Ejercicio resuelto.

24. En la gráfica de la derecha se ha representado el número de personas que usan Internet al menos una vez al mes en España en los últimos años. Interpolando y extrapolando gráficamente, estima cuántos había en 2010 y cuántos habrá en 2020.





25. Ejercicio resuelto.

26. La población de cierto municipio en el año 2008 fue de 179 000 habitantes, y en 2013 era de250 000.

a) Calcula aproximadamente mediante interpolación lineal, la población que hubo en dicho municipio en el año 2010.

b) Estima por extrapolación lineal, la población que hubo en dicho municipio en 2015.

a) Se calcula la ecuación de la recta $y = mx + n$ que pasa por $A(2008, 179000)$ y $B(2011, 250000)$:

Como la recta pasa por A entonces: $y(2008) = 179\,000 \Rightarrow 179\,000 = 2008m + n$.

Como la recta pasa por B entonces: $y(2013) = 250\,000 \Rightarrow 250\,000 = 2013m + n$.

Se resuelve el sistema: $\begin{cases} 179\,000 = 2008m + n \\ 250\,000 = 2013m + n \end{cases} \Rightarrow m = 14\,200;\ n = -28\,334\,600$.

Por tanto se obtiene la ecuación: $y = 14\,200x - 28\,334\,600$.

Sustituyendo, en dicha ecuación, x por 2010, se obtiene $y = 14200 \cdot 2010 - 28\,334\,600 = 207\,400$.

Así pues se estima que en 2010 hubo una población de 207 400 habitantes.

b) Sustituyendo, en dicha ecuación, x por 2015, se obtiene $y = 14\,200 \cdot 2015 - 28\,334\,600 = 278\,400$

Así pues se estima que en 2015 hubo una población de 278 400 habitantes.

27. Iván está intentando ahorrar electricidad. La factura de enero fue de 56 €, la de febrero la perdió, en marzo gastó 36€,y en abril 34,50€.

a) Estima cuál fue su gasto en febrero y lo que pagará en mayo.

b) ¿Crees que con estos datos la predicción para diciembre sería fiable?

a) Para interpolar la factura de febrero se utilizan los datos de los dos meses más cercanos a él, enero y marzo. Se asigna el número 1 al mes de enero, 2 a febrero, …, hasta diciembre que sería el 12.

Sea x el número correspondiente a cada mes e y el correspondiente al gasto eléctrico.

Se debe hallar la recta de interpolación $y = ax + b$ que pasa por los puntos $A(1, 56)$ y $B(3, 36)$.

Dicha recta es $y = -10x + 66$ .El gasto en febrero,x= 2, será: $y = -10 \cdot 2 + 66 = 46$ €.

Para interpolar la factura de mayo se utilizan los datos de los dos meses más cercanos a él, marzo y abril. El gasto en mayo se estima en $y = -1{,}5 \cdot 5 + 40{,}5 = 33$ €.

b) Interpolando a partir de los datos de marzo y abril, que son los más cercanos a diciembre, x= 12, la predicción es: $y = -1{,}5 \cdot 12 + 40{,}5 = 22{,}5$ €.

Este dato no es fiable, ya que no parece lógico que el gasto eléctrico en diciembre seamenor que el de mayo.

Esto se debe a que los datos que se utilizan para estimar el gasto de diciembre están muy alejados de él.

28. Ejercicio resuelto.

29. Se tienen tres datos sobre los beneficios de una empresa en tres meses distintos:

Meses	1.º	4º.	5.º
Beneficios (miles de **€**)	0	3	0

a) Encuentra la función cuadrática que se ajusta a estos tres datos.

b) ¿Qué beneficios o pérdidas se estiman para el 6.º mes?

c) ¿En qué mes se obtiene el beneficio máximo?

a) Llamando x a los meses e y a los beneficios, debemos encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(1,0)$, $B(4,3)$ y $C(5,0)$.

Como pasa por el punto A, $f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$.

Como pasa por el punto B, $f(4) = 3 \Rightarrow 16a + 4b + c = 3$.

Como pasa por el punto C, $f(5) = 0 \Rightarrow 25a + 5b + c = 0$.

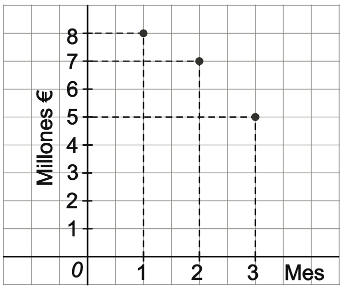
La solución del sistema resultante $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 16a + 4b + c = 3 \\ 25a + 9b + c = 0 \end{cases}$ es $a = -1,\ b = 6,\ c = -5$.

Por lo que la función cuadrática es $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

b) El balance estimado del 6º mes es $f(6) = -6^2 + 6 \cdot 6 - 5 = -5$, que representan unas pérdidas de 5000 **€**.

c) Como la parábola interpoladora, $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, es cóncava hacia abajo, su vértice, que es el punto $V(3, 4)$ será un máximo absoluto, El beneficio máximo será de 4000 **€**y se conseguirá en el tercer mes.

30. La figura muestra el volumen de ventas de una gran superficie comercial a lo largo de tres meses consecutivos. Encuentra la función cuadrática que se ajusta a esos tres datos. ¿Qué ventas se esperan para el siguiente mes?



La parábola pasa por los puntos $A(1,8)$, $B(2,7)$ y $C(3,5)$.

Como pasa por el punto *A*, $f(1)=8 \Rightarrow a+b+c=8$.

Como pasa por el punto *B*, $f(2)=7 \Rightarrow 4a+2b+c=7$.

Como pasa por el punto *C*, $f(3)=5 \Rightarrow 9a+3b+c=5$.

La solución del sistema resultante $\begin{cases} a+b+c=8 \\ 4a+2b+c=7 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$ es $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=8$.

La función cuadrática resultante es $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+8$.

Para $x=4$ se obtiene: $f(4)=-\dfrac{16}{2}+\dfrac{4}{2}+8=2$.

Así pues, para el mes siguiente, se esperan unas ventas de 2 millones de €.

31. Ejercicio interactivo.

32. Indica qué tipo de interpolación es el más adecuado en cada situación. Determina en cada caso su función de interpolación.

a) El número de personas que estaba en el paro en una ciudad en febrero si el número de parados durante los meses de Enero, Marzo y Abril son los que figuran en la tabla.

Mes	Enero	Marzo	Abril
N.º de personas	2500	2420	2360

b) Los beneficios de una empresa en el mes de febrero conociendo los siguientes datos.

Mes	Enero	Marzo	Abril
Beneficios (en euros)	230 000	255 000	220 700

c) El coste en pintura para decorar un cuadrado de 10 m de lado con los siguientes datos.

Lado (en metros)	5	15	25
Coste (en euros)	200	400	900

a) Como el número de parados es siempre decreciente en los meses indicados parece razonable emplear la interpolación lineal.

Para interpolar la factura de febrero se utilizan los datos de los dos meses más cercanos a él, enero y marzo. Llamando mes 1 al mes de enero, *x,*al número de mes, e *y,* al número de parados, se calcula la recta de interpolación $y=ax+b$ que pasa por los puntos $A(1, 2500)$ y $B(3, 2420)$.Esta recta es $y=-40x+2540$.

b) Como los beneficios crecen primero y después decrecen, parece adecuado utilizar la interpolación parabólica.Llamando mes 1 al mes de enero, *x,* al número de mes, e *y,*a los beneficios en miles de €, se calcula la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $A(1, 230)$, $B(3, 255)$ y $C(4; 220,7)$. Esta parábola es $y=-\dfrac{78}{5}x^2+\dfrac{749}{10}x+\dfrac{1707}{10}$.

c) Como en la situación del problema intervienen áreas se emplea la interpolación cuadrática, pues la variable dependiente está estrechamente relacionada con el cuadrado de la variable independiente (el área es el cuadrado del lado).

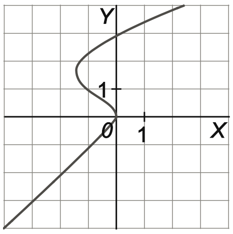
Llamando *x* al lado del cuadrado en metros,e *y,* al coste en cientos de €, se calcula la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $A(5,2)$, $B(15,4)$ y $C(25,9)$. Esta parábola es

$y=-\dfrac{3}{200}x^2-\dfrac{1}{10}x+\dfrac{17}{8}$

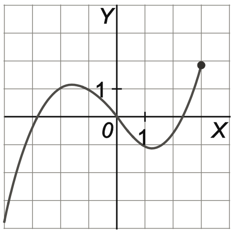
33 a 39. Ejercicios resueltos.

40. Analiza razonadamente si las siguientes gráficas corresponden o no a funciones reales de variable real.

a)



b)



Se dice que una relación entre dos variables *x* e *y*es una función, si a cada valor de *x* le corresponde un único valor de*y*, es decir si a cada valor de *x* le corresponde una única imagen *f*(*x*).

a) Esta gráfica no corresponde a una función pues hay valores de *x* a los que les corresponde más de una imagen. Por ejemplo, a $x=0$ le corresponden dos imágenes: $y=0$ e $y=3$.

b) Esta gráfica sí corresponde a una función porque no hay valores de x a los que les corresponda más de una imagen. En este caso se observa que sí que hay varios valores de x a los que les corresponde una misma imagen y. Por ejemplo, a $x=-3$ y $x=0$ le corresponde el mismo valor $y=0$, pero eso no contradice en absoluto la definición de función.

41. Obtén el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$

e) $f(x)=\sqrt{(x-1)(2x+3)}$

f) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

g) $f(x)=1+\sqrt{\dfrac{3-x}{5-x}}$

h) $f(x)=\log(5-x)$

a) $D(f)=\mathbb{R}$

b) $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

c) $D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

d) $D(f)=\mathbb{R}-\{-3,1\}$

e) $D(f)=\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]\cup[1,+\infty)$

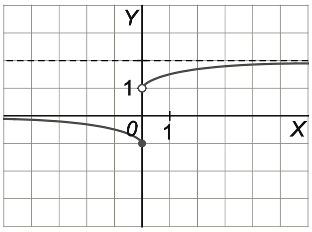
f) $D(f)=\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

g) $D(f)=(-\infty,3]\cup(5,+\infty)$

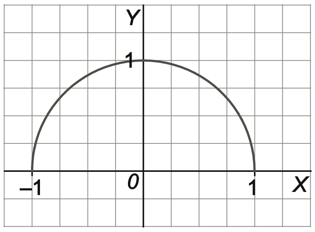
h) $D(f)=(-\infty,5)$

42. Dadas las siguientes gráficas de funciones, indica su dominio y su recorrido.

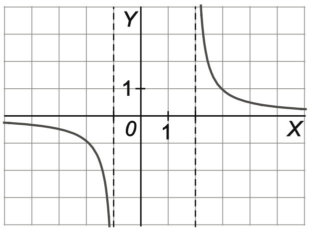
a)



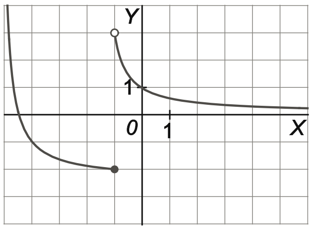
c)



b)



d)



a) $D(f)=\mathbb{R}$

$R(f)=[-1,0)\cup(1,2)$

b) $D(f)=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

$R(f) = \mathbb{R}-\{0\}$

c) $D(f)=[-1,1]$

$R(f) = [0,1]$

d) $D(f)=(-5,+\infty)$

$R(f)=[-2,+\infty)$

43. Escribe la expresión analítica de las funciones definidas por los siguientes enunciados y establece su dominio.

a) A cada número real se le asigna el triple de su cuadrado menos el doble de su cubo.

b) Un comercial cobra un fijo de 500 €al mes más un 2% de la facturación que haya obtenido durante dicho mes. Escribe la función que da el sueldo del comercial en función de dicha facturación mensual.

c) En una clase se tiene un diccionario por cada alumno, un atlas por cada dos alumnos y un ordenador por cada tres. Se pide la función que da el número total de materiales de apoyo que hay en la clase en función del número de alumnos de la misma.

a) $f(x)=3x^2-2x^3$ $\quad D(f)=\mathbb{R}$

b) $f(x)=500+0{,}02x$ $\quad D(f)=[0,+\infty)$

c) $f(x)=x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}\Rightarrow f(x)=\dfrac{11x}{6}$ $\quad D(f)=\{6n : n\in\mathbb{N}\}$ = “números naturales múltiplos de 6”

44. Para costearse el viaje de fin de curso, los alumnos de bachillerato deciden montar una miniguardería por las tardes para cuidar niños. El coste del local es de 500 € por mes; la licencia que exige el ayuntamiento asciende a 200 €; y además, van a invertir 100 € en imprimir unos folletos de propaganda. A los padres les cobrarán 20 €por cada tarde que pase su hijo en la guardería y cada cuidador se llevará 10 €por cada niño que tenga a su cargo.

a) ¿Cuáles son los gastos fijos que tendrán el primer mes?

b) ¿Cuántos niños tendrán que cuidar el primer mes para cubrir gastos?

c) Expresa como una función el beneficio o pérdida en función del número mensual de niños atendidos.

d) ¿Qué beneficios obtendrán si atienden a cien niños durante el primer mes?

a) 500 € del local + 200 € de licencia + 100 €de propaganda =800 €.

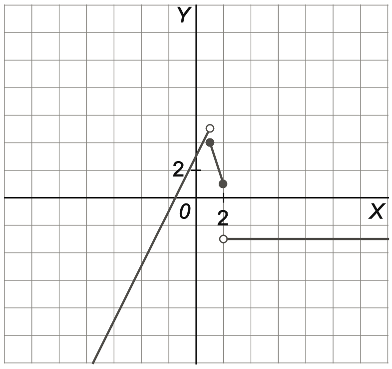
b) Ingresos – Gastos = $20x$ – (500 + 200 + 100 + $10x$) = $10x$ – 800 = 0 $\Rightarrow x$= 80. Deberán cuidar 80 niños.

c) $B(x)=10x-800$, pues Beneficios = Ingresos – Gastos

d) $B(100)=10\cdot 100-800=200$ €.

Funciones definidas a trozos

45. Representa la gráfica de $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{si } x<1\\ -3x+7 & \text{si } 1\le x\le 2\\ -3 & \text{si } x>2\end{cases}$ **y calcula** $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$.



Para $x=-2$ se cumple que $x<1$ por lo que $f(-2)=2(-2)+3=-1$.

Para $x=0$ se cumple que $x<1$ por lo que $f(0)=2\cdot 0+3=3$.

Para $x=1$ se cumple que $1\le x\le 2$ por lo que $f(1)=-3\cdot 1+7=4$.

Para $x=2$ se cumple que $1\le x\le 2$ por lo que $f(2)=-3\cdot 2+7=1$.

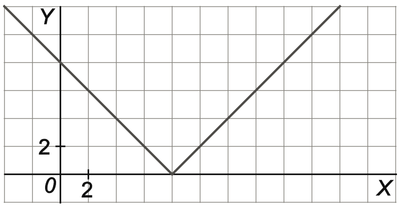
Para $x=5$ se cumple que $x>2$ por lo que $f(5)=-3$.

46. Expresa como funciones definidas a trozos y dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

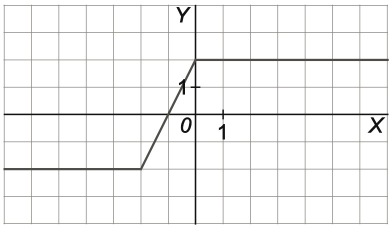
a) $f(x)=|8-x|$

b) $f(x)=|x+2|-|x|$

a) $f(x)=\begin{cases}8-x & \text{si } x<8\\ x-8 & \text{si } x\ge 8\end{cases}$

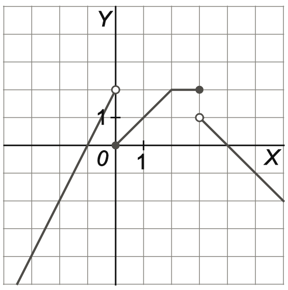


b) $f(x)=\begin{cases}-2 & \text{si } x<-2\\ 2x+2 & \text{si } -2\le x<0\\ 2 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$

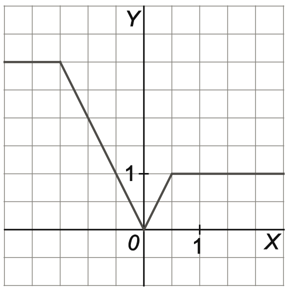


47. Encuentra las expresiones analíticas de las funciones cuyas gráficas son las siguientes.

a)



b)



a) $f(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{si } x<0\\ x & \text{si } 0\le x<2\\ 2 & \text{si } 2\le x\le 3\\ -x+4 & \text{si } x>3\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}3 & \text{si } x<-\dfrac{3}{2}\\ -2x & \text{si } -\dfrac{3}{2}\le x<0\\ 2x & \text{si } 0\le x\le\dfrac{1}{2}\\ 1 & \text{si } x>\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Operaciones con funciones

48. Dadas las funciones $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=\sqrt{2x-4}$, $h(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ y $t(x)=1-x^2$, calcula las siguientes funciones y determina sus dominios.

a) $(f-t)(x)$ **d)** $(ht)(x)$ **g)** $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

b) $(h+t)(x)$ **e)** $(fh)(x)$ **h)** $(gg)(x)$

c) $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)$ **f)** $\left(\dfrac{f}{t}\right)(x)$ **i)** $\left(\dfrac{tf}{h}\right)(x)$

$D(f)=\mathbb{R}$, $D(g)=[2,+\infty)$, $D(h)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$, $D(t)=\mathbb{R}$

a) $(f-t)(x)=2x^2-x-3$ $D(f-t)=\mathbb{R}$

b) $(h+t)(x)=\dfrac{-x^4+5x^2-3}{x^2-4}$ $D(h+t)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

c) $\left(\dfrac{f}{h}\right)(x)=\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-4\right)$ Como h nunca se anula, $D\left(\dfrac{f}{h}\right)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

d) $(ht)(x)=\dfrac{1-x^2}{x^2-4}$ $D(ht)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

e) $(fh)(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}=\dfrac{x+1}{x+2}$ $D(fh)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

f) $\left(\dfrac{f}{t}\right)(x)=\dfrac{x^2-x-2}{1-x^2}=\dfrac{x-2}{1-x}$ Como t se anula en $x=1$ y en $x=-1$, $D\left(\dfrac{f}{t}\right)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

g) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x^2-x-2}$ Como f se anula en $x=2$ y en $x=-1$, $D\left(\dfrac{g}{f}\right)=(2,+\infty)$.

h) $(gg)(x)=2x-4$ $D(gg)=[2,+\infty)$

i) $\left(\dfrac{tf}{h}\right)(x)=\left(1-x^2\right)\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-4\right)=-(x-1)(x+1)^2(x-2)^2(x+2)$. Como h nunca se anula $D\left(\dfrac{tf}{h}\right)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

49. Dadas las funciones $f(x)=1-x^2$, $h(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ y $g(x)=\sqrt{4-2x}$, halla estas funciones y sus dominios.

a) $(f\circ f)(x)$ **b)** $(h\circ g)(x)$ **c)** $(g\circ f)(x)$

$D(f)=\mathbb{R}$; $D(g)=(-\infty,2]$; $D(h)=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

a) $(f\circ f)(x)=f\left(1-x^2\right)=1-\left(1-x^2\right)^2=-x^4+2x^2$; $D(f\circ f)=\mathbb{R}$

b) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h\left(\sqrt{4-2x}\right)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{4-2x}\right)^2-4}=\dfrac{1}{4-2x-4}=-\dfrac{1}{2x}$

Para $x=0$ $g(0)=\sqrt{4}=2$, valor que anula el denominador de $\dfrac{1}{x^2-4}$, por lo que $D(h\circ g)=(-\infty,0)\cup(0,2]$.

50. Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\dfrac{3}{x}$ y $h(x)=\sqrt{x}$, calcula la expresión analítica de estas funciones:

a) $(f\circ g\circ h)(x)$ **b)** $(g\circ f\circ h)(x)$ **c)** $(f\circ h\circ g)(x)$ **d)** $(h\circ g\circ f)(x)$

a) $(f\circ g\circ h)(x)=f\left(g\left(h(x)\right)\right)=f\left(g\left(\sqrt{x}\right)\right)=f\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)=\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^2-1=\dfrac{9}{x}-1$ $D(f\circ g\circ h)=(0,+\infty)$

b) $(f\circ h\circ g)(x)=f\left(h\left(g(x)\right)\right)=f\left(h\left(\dfrac{3}{x}\right)\right)=f\left(\sqrt{\dfrac{3}{x}}\right)=\left(\sqrt{\dfrac{3}{x}}\right)^2-1=\dfrac{3}{x}-1$ $D(f\circ h\circ g)=(0,+\infty)$

c) $(g\circ f\circ h)(x)=g\left(f(h(x))\right)=g\left(f\left(\sqrt{x}\right)\right)=g\left(\left(\sqrt{x}\right)^2-1\right)=g(x-1)=\dfrac{3}{x-1}$ $D(g\circ f\circ h)=(0,1)\cup(0,+\infty)$

d) $(h\circ g\circ f)(x)=h\left(g\left(f(x)\right)\right)=h\left(g\left(x^2-1\right)\right)=h\left(\dfrac{3}{x^2-1}\right)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2-1}}$ $D(h\circ g\circ f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Función inversa

51. Dada $f(x)=2x-1$, calcula $f^{-1}(x)$. Calcula $(f\circ f^{-1})(x)$ y $(f^{-1}\circ f)(x)$ y analiza los resultados.

$y=2x-1\Rightarrow x=\dfrac{y+1}{2}$, por lo que $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{2}$

$(f\circ f^{-1})(x)=2\left(\dfrac{x+1}{2}\right)-1=x$; $(f^{-1}\circ f)(x)=\dfrac{(2x+1)-1}{2}=x$; por tanto, $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$

52. Calcula, cuando sea posible, las funciones inversas y los dominios de:

a) $f(x)=\dfrac{2x-3}{3x+1}$ **b)** $g(x)=\sqrt{x^3-1}$ **c)** $h(x)=\log x$ **d)** $t(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$

a) $y=\dfrac{2x-3}{3x+1}\Rightarrow x=\dfrac{-3-y}{3y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{3+x}{2-3x}$ $D(f)=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ $D(f^{-1})=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

b) $y=\sqrt{x^3-1}\Rightarrow x=\sqrt[3]{y^2+1}\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$ $D(g)=[1,+\infty)$ $D(g^{-1})=R(g)=[0,+\infty)$

c) $y=\log x\Rightarrow x=10^y\Rightarrow h^{-1}(x)=10^x$ $D(h)=(0,+\infty)$ $D(h^{-1})=\mathbb{R}$

d) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\Rightarrow x=\dfrac{1}{y^3}-2\Rightarrow t^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^3}-2$ $D(t)=\mathbb{R}-\{-2\}$ $D(t^{-1})=\mathbb{R}-\{0\}$

53. Calcula el valor de la función $f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}$ para $x=1$ y para $x=-2$. ¿Tiene f inversa? Justifica tu respuesta.

$f(1)=\dfrac{1^3+2}{1}=3$; $f(-2)=\dfrac{(-2)^3+2}{-2}=3$

Como $f(1)=f(-2)=3$ entonces la gráfica de f corta a la recta horizontal $y=3$ en dos puntos, por lo que no existe la inversa de f.

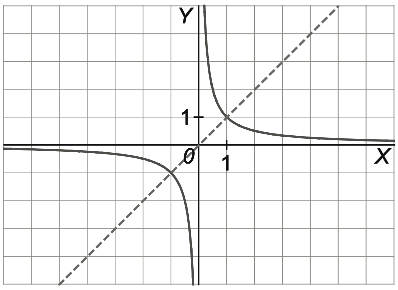
54. Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$

a) Calcula la función $(f\circ f)(x)$. ¿Qué conclusión obtienes?

b) Dibuja ahora la gráfica de *f*. Analizando dicha gráfica, ¿puedes corroborar tu conclusión del apartado anterior?

a) $(f\circ f)(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x$. Así pues, la función y su inversa son iguales: $f=f^{-1}$.

b) A partir de la gráfica siguiente se observa que la función *f* es simétrica respecto de la recta $y=x$, por lo que se verifica que $f=f^{-1}$ como se comentaba en el apartado anterior.



Construcción de funciones por traslación y dilatación

55. A partir de la gráfica de $f(x)=x^2$ dibuja, utilizando traslaciones y dilataciones, las gráficas de las siguientes funciones.

a) $a(x)=x^2-4$

b) $b(x)=x^2+2$

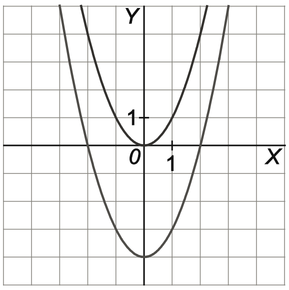
c) $c(x)=4x^2$

d) $d(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$

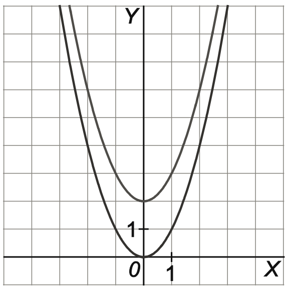
e) $e(x)=x^2-4x+4=(x-2)^2$

f) $f(x)=3x^2+6x-4=3(x+1)^2-7$

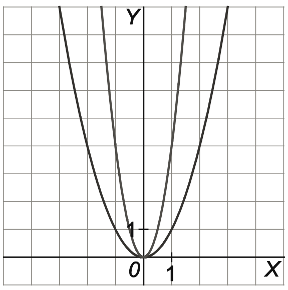
a) Traslación vertical de 4 unidades



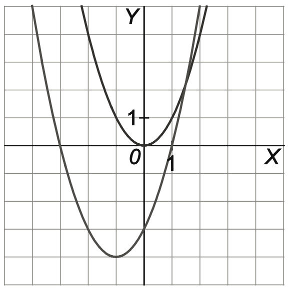
b) Traslación vertical de 2 unidades



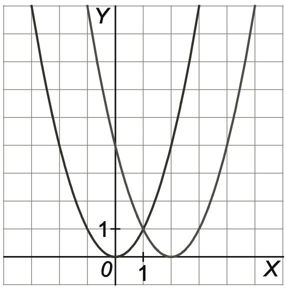
c)



d) Traslación horizontal (1 u) y vertical (4 u)

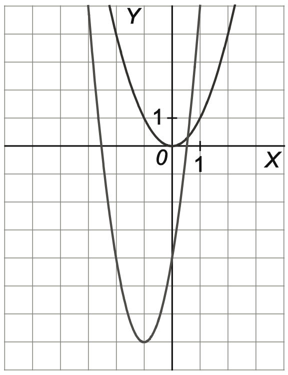


e) Traslación horizontal de dos unidades



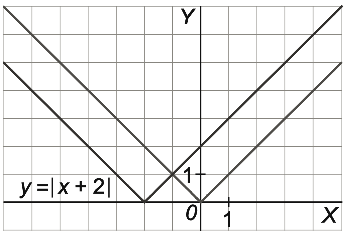
Dilatación vertical

f) Traslación horizontal (1 u), vertical (7 u) y dilatación

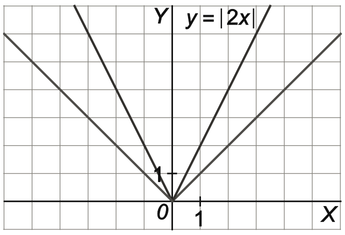


56. A partir de la gráfica de $j(x) = |x|$, dibuja, sin construir tablas de valores, las gráficas de las funciones:

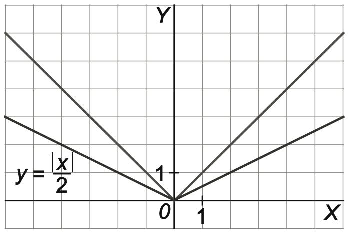
a) $a(x) = |x+2|$



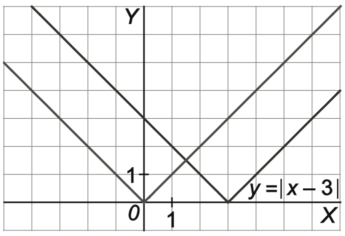
d) $d(x) = |2x|$



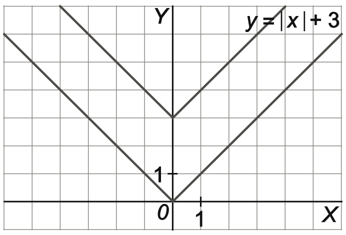
g) $g(x) = \dfrac{|x|}{2}$



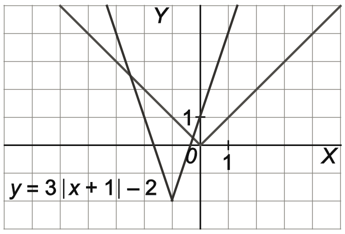
b) $b(x) = |x-3|$



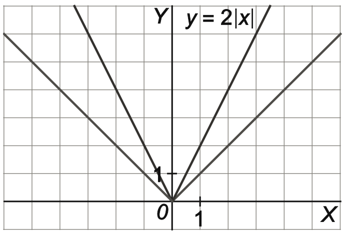
e) $e(x) = |x| + 3$



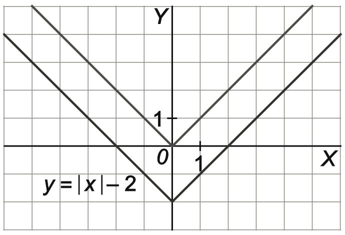
h) $h(x) = 3|x+1| - 2$



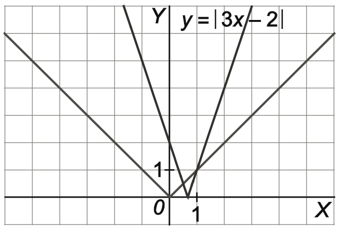
c) $c(x) = 2|x|$



f) $f(x) = |x| - 2$



i) $i(x) = |3x-2|$



Funciones definidas por tablas

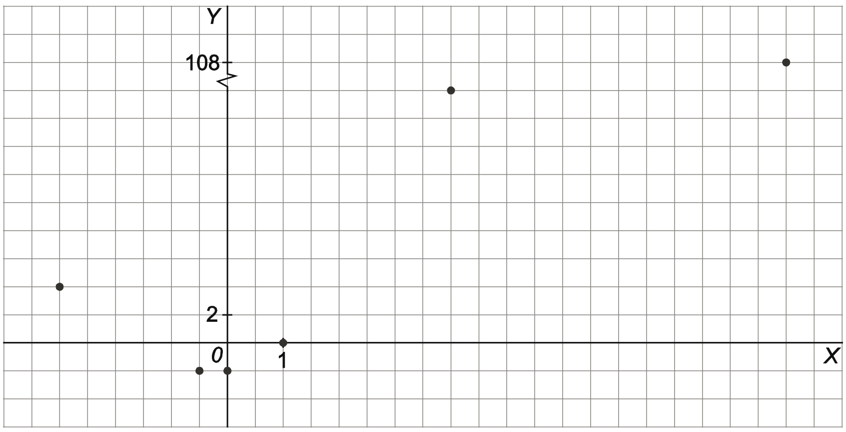
57. Representa gráficamente los datos de la siguiente tabla.

x	–3	–1	0	1	4	10
y	4	–2	–2	0	18	108

¿Qué tipo de curva se ajusta a esos datos? ¿Sabrías encontrar su ecuación?

Se descarta una recta, ya que hay crecimiento y decrecimiento. Así pues, se prueba una parábola.

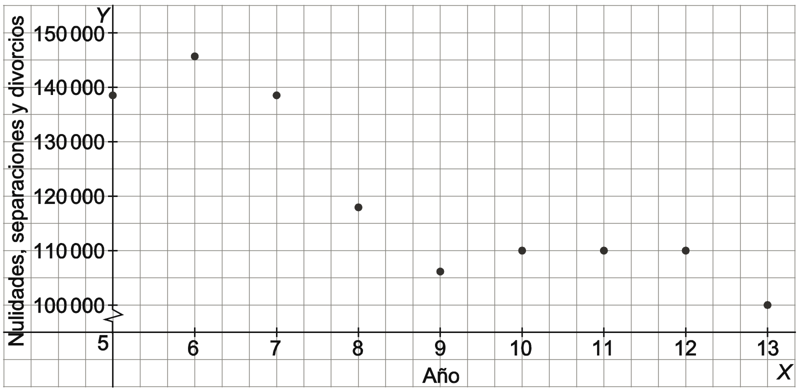
Se eligen los puntos más manejables y se busca la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(-1,\ -2)$, $B(0,\ -2)$ y $C(1,\ 0)$. Dicha parábola es: $f(x) = x^2 + x - 2$.



58. **El número de nulidades, separaciones y divorcios en España durante los últimos años se recogen en la siguiente tabla.**

2005	137 045
2006	145 919
2007	137 510
2008	118 939
2009	106 166
2010	110 321
2011	110 651
2012	110 764
2013	100 437

Representa gráficamente los datos anteriores, eligiendo escalas convenientes para su mejor comprensión.



59. **Se ha medido la temperatura de un líquido según se calentaba.**

La siguiente tabla recoge la temperatura del líquido en función del tiempo de calentamiento.

Tiempo (minutos)	Temperatura (ºC)
0	20
1	24
2	28
3	32
4	36
5	40

Si el líquido hierve a los 60ºC, ¿cuánto tiempo tendremos que calentarlo, suponiendo que su comportamiento no varía?

Por cada minuto aumenta 4 ºC; la función es: $T(x) = 20 + 4x$ y por tanto, $60 = 20 + 4x \Rightarrow x = 10$, los 60 ºC los alcanzará a los 10 minutos.

Interpolación lineal

60. A Jorge se le ha roto la calculadora y necesita calcular el seno del ángulo de 27,4º para resolver un problema. Su abuelo le muestra un libro de matemáticas en el que hay una tabla de valores del seno. En ella, Jorge encuentra los dos siguientes datos: $\text{sen } 27º = 0,454$ y $\text{sen } 28º = 0,469$.

Ayuda a Jorge a calcular, por interpolación, una estimación del seno de 27,4º.

Llamando x al ángulo en grados, e y, al seno de dicho ángulo, la recta interpoladora, $y = ax + b$, es la que pasa por los puntos $A(27;\ 0{,}454)$ y $B(28;0{,}469)$.

$$\begin{cases} 27a + b = 0{,}454 \\ 28a + b = 0{,}469 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}015 \\ b = 0{,}049 \end{cases}$$

La recta de interpolación es pues, $y = 0{,}015x + 0{,}049$.

Por tanto, $\text{sen}27{,}4º = 0{,}015 \cdot 27{,}4 + 0{,}049 = 0{,}46$

Se puede comprobar que el valor real de sen 27,4º es 0,4602, por lo que el error cometido es mínimo.

61. De una función $f(x)$ se conocen los pares de valores $(1{,}2;\ 5{,}72)$ y $(4;\ 11{,}6)$.

Halla la ecuación de la recta de interpolación y el valor que tomará $f(x)$ para $x = 2{,}1$.

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 5{,}72 = 12m + n \\ 11{,}6 = 4m + n \end{cases}$, obteniendo las soluciones $m = 2{,}1$ y $n = 3{,}2$.

La recta de interpolación es, por tanto, $y = 2{,}1x + 3{,}2$.

El valor buscado es $y = 2{,}1 \cdot 2{,}1 + 3{,}2 = 7{,}61$.

62. Sabiendo que $f(x)$ es una función lineal, y conocidos los datos de la siguiente tabla, ¿qué valor toma $f(0)$?¿Y $f(3)$?

x	$f(x)$
1	6
5	4

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 6 = m + n \\ 4 = 5m + n \end{cases}$, obteniendo $m = -\frac{1}{2}$ y $n = \frac{13}{2}$.

La recta interpoladora es, por tanto, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$. $\quad f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{13}{2} = \frac{13}{2} \quad f(3) = -\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{13}{2} = 5$

63. Se ha observado que la vida media de una bacteria varía en función de la temperatura del medio en el que vive según la siguiente tabla.

Temperatura (ºC)	6	9	12	15	16
Vida media (min)	104,2	140,4	181,7	220,2	257,6

¿Qué vida media estimas para un cultivo de bacterias en un medio a 10ºC? ¿Y a 13ºC?

Para los 10ºC, se calcula la recta de interpolación que pasa por los puntos (9; 140,4) y (12; 181,7).

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 140{,}4 = 9m + n \\ 181{,}7 = 12m + n \end{cases}$ Se obtiene $m = 13{,}77$ y $n = 16{,}5$.

La recta de interpolación es $y = 13{,}77x + 16{,}5$ y la vida media que se espera en un medio a10ºC es 154,2 min.

Para los 13 ºC, se calcula la recta que pasa por los puntos (12; 181,7) y (15; 220,2).

Se resuelve el sistema $\begin{cases} 181{,}7 = 12m + n \\ 220{,}2 = 15m + n \end{cases}$ Se obtiene $m = 12{,}83$ y $n = 27{,}7$.

La recta de interpolación es $y = 12{,}83x + 27{,}7$ y la vida media que se espera en un medio a 13ºC es 194,5 min.

Interpolación cuadrática

64. De una función *f*(*x*) se conocen los valores *f*(1)= 4, *f*(2)= 7 y *f*(4)=31.

a) Calcula la función cuadrática que toma dichos valores.

b) Calcula el valor de la función de interpolación para $x=3$.

c) ¿Tiene sentido utilizar la función de interpolación hallada para estimar el valor de la función para $x=0$?

a) Se resuelve el sistema $\begin{cases} a+b+c & = & 4 \\ 4a+2b+c & = & 7 \\ 16+4b+c & = & 31 \end{cases}$, cuyas soluciones son $a=3$, $b=-6$, $c=7$; $f(x)=3x^2-6x+7$.

b) $f(3)=3\cdot 3^2-6\cdot 3+7=16$

c) No parece adecuado utilizar la función hallada para estimar el valor de la función en $x=0$, pues en los tres valores dados en el enunciado la función es creciente, por lo que parece lógico que, siguiendo esa tendencia, $f(0)$ estuviera por debajo de $f(1)=4$. Sin embargo, usando la función hallada se estima $f(0)=7$.

65. Cierta empresa ha observado que los ingresos por ventas están estrechamente relacionados con el gasto asignado a publicidad y ha recogido algunos datos de años anteriores en una tabla.

Año	2013	2014	2015
Gasto en publicidad (× 1000 €)	1	3	5
Ingresos (× 1000 €)	4	26	64

a) Observa las variaciones que se producen en los gastos y en los ingresos, y decide qué tipo de interpolación es la más conveniente para reflejar la situación.

b) Calcula, mediante interpolación, qué ingresos se esperan si solo podemos gastar 4 500 €en publicidad.

c) Utiliza la función hallada en el apartado anterior para estimar que gasto en publicidad habría que hacer para ingresar 5000 €.

a) La variación en los gastos de publicidad es lineal, aumenta 2000 € cada año. En cambio, los ingresos no siguen esta ley lineal: primero aumentan 22 000 € y después 38 000 €. Por ello, se debe emplear la interpolación cuadrática.

Si se representan los datos sobre unos ejes se aprecia claramente que no se ajustan a una recta.

Llamando *x* a los gastos en publicidad en miles de €e *y* a los ingresos derivados en miles de €, se debe encontrar la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$ que pasa por los puntos $A(1,4)$, $B(3,26)$ y $C(5,64)$.

Dicha parábola es $f(x)=2x^2+3x-1$.

b) Con 4 500 **€**destinados a publicidad, se estima que se alcanzarán unos ingresos de $f(4{,}5)=2\cdot 4{,}5^2+3\cdot 4{,}5-1=53$, es decir, 53 000 €.

c) Se busca *x* para que $2x^2+3x-1=50$.

Resolviendo la ecuación se obtienen las soluciones x =–5,86 y x = 4,36.

Desechando la solución negativa se concluye que el gasto ha de ser de unos 4355 **€**.

66. **En un negocio de decoración solo venden alfombras cuya longitud es el doble que su anchura. Los precios, dependiendo del largo, se muestran en esta tabla.**

Largo (m)	Precio (€)
1	120
2	124
5	148

a) Calcula por interpolación cuadrática el precio de una alfombra de 3 metros de longitud.

b) Calcula por extrapolación cuadrática el precio de una alfombra de 8 metros de longitud.

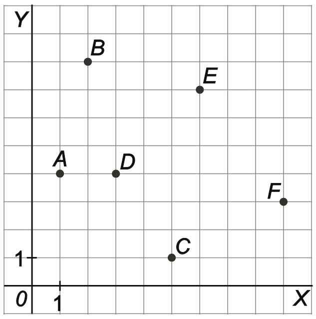
Llamando *x* a los metros del largo, e *y,* al precio en €, debemos encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(1, 120)$, $B(2, 124)$ y $C(5, 148)$. Dicha parábola es $f(x) = x^2 + x + 118$.

a) El precio de una alfombra de 3 m de largo será de $f(3) = 3^2 + 3 + 118 = 130$ €.

b) El precio de una alfombra de 8 m de largo será de $f(8) = 8^2 + 8 + 118 = 190$ €.

67. **Calcula dos funciones cuadráticas, una que pase por los puntos *A*, *B* y *C*, y la otra, por *D*, *E* y *F*.**

¿En qué punto se cortan ambas funciones?¿Corresponde a un valor interpolado o extrapolado de las parábolas?



Para hallar la función cuadrática que pasa por *A*(1, 4), *B*(2, 8) y *C*(5, 1) hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 25a + 5b + c = 1 \end{cases} \text{ y se obtiene la parábola } y = -\frac{19}{12}x^2 + \frac{35}{4}x - \frac{19}{6}.$$

Para hallar la función cuadrática que pasa por *D*(3, 4), *E*(6, 7) y *F*(9, 3) se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 4 \\ 36a + 6b + c = 7 \\ 81a + 9b + c = 3 \end{cases} \text{ y se obtiene la parábola } y = -\frac{7}{18}x^2 + \frac{9}{2}x - 6.$$

Sus puntos de corte son (–0,57; –8,71) y (4,13; 5,95).

El primero es un valor extrapolado de ambas parábolas, y el segundo es interpolado de ambas.

Aplicaciones de la interpolación

68. **Un agricultor ha comprado una hectárea de terreno y quiere plantar almendros. Sabe que si planta almendros en exceso no podrá regarlos convenientemente y la producción será baja. Para decidir cuántos almendros plantar, ha hecho un estudio en los campos vecinos del rendimiento obtenido y ha elaborado la siguiente tabla.**

Número de almendros	40	60	90
Kilos de almendras	20 000	24 000	22 500

a) Un amigo le aconsejó que plantara 50 almendros. ¿Cuántos kilos de almendras espera obtener en ese caso?

b) ¿Con cuántos almendros conseguiría la producción máxima?

Como los kilos de almendras crecen primero y después decrecen, es claro que la interpolación lineal no es adecuada. Además, como intervienen áreas, parece conveniente trabajar con la interpolación cuadrática. Llamando *x* al número (en decenas) de almendros, e *y,* a los miles de kilos de almendras producidos, se debe encontrar la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $A(4, 20)$, $B(6, 24)$ y $C(9; 22{,}5)$.

Dicha parábola es $f(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 7x$.

a) Con 50 almendros plantados se espera una producción de $f(5) = -0{,}5 \cdot 5^2 + 7 \cdot 5 = 22{,}5$, es decir, 22 500 kg.

b) Como la parábola está abierta hacia abajo, el máximo se alcanzará en su vértice, que es el punto $V(7; 24{,}5)$.

Es decir, plantando 70 almendros se espera conseguir la máxima producción, que asciende a 24 500 kg de almendras.

69. Las ventas de un determinado producto han variado en función de su precio de acuerdo a los datos de la tabla.

Precio (miles de €)	Unidades vendidas
100	20 000
110	23 000
120	21 500
130	18 500

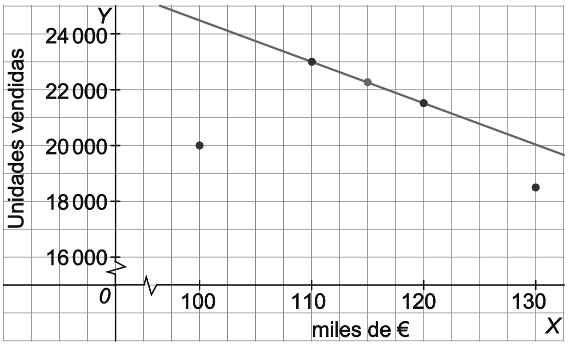
a) Halla la función de interpolación que se ajuste a los datos dados y calcula las ventas esperadas para un precio de 115 000 €.

b) Representa gráficamente los datos y la curva de interpolación en esa zona de valores.

a) Para hacer la interpolación se usarán los datos más próximos a 115 000 €, (110, 23000) y (120, 21500). La función de interpolación lineal es $f(x) = -150x + 39\,500$.

Las ventas esperadas para un precio de 115 000 € son $f(115) = -150 \cdot 115 + 39500 = 22\,250$ artículos.

b)



70. Una oruga está atacando a un bosque de pinos y los forestales están anotando el número de árboles afectados en función de los días transcurridos desde la irrupción de la plaga:

Días desde el comienzo de la plaga	2	4	6
Número de pinos infectados	10	14	22

a) Empleando técnicas de extrapolación lineal basándose en los datos de los días 4.º y 6.º, ¿cuál será la estimación de pinos infectados al cabo de nueve días?
b) Empleando técnicas de extrapolación cuadrática, ¿cuál será la estimación de pinos infectados tras nueve días?
c) Los forestales han estimado que si se infectan 430 ejemplares, habrá que comenzar a talar el bosque para que no se expanda la oruga. Si no se controla la plaga, ¿cuándo habrá que comenzar la indeseada tala, si trabajamos con la extrapolación cuadrática?

a) La función de interpolación para los datos (4, 14) y (6, 22) es $f(x) = 4x - 2$ así que al cabo de 9 días el número de pinos infectados será $f(9) = 4 \cdot 9 - 2 = 34$.

b) La función de interpolación cuadrática para los tres datos es: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 10$ y el número estimo de pinos infectados a los 9 días sería $g(9) = \frac{1}{2} \cdot 9^2 - 9 + 10 = 41{,}5$, es decir, estaría entre 41 y 42.

c) Resolvemos $\frac{1}{2}x^2 - x + 10 = 430$ cuyas soluciones son $x = -28$ y $x = 30$. Desechamos la solución negativa y concluimos que habrá que comenzar a talar a los 30 días de comenzada la plaga.

CUESTIONES

71. Determina si las expresiones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ corresponden a la misma función.

Como $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2}$, $f(x)$ y $g(x)$ coinciden en todos sus puntos excepto en $x = 2$, donde $f(2) = 1$ y la función $g(x)$ no está definida, ya que $D(f) = \mathbb{R}$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{2\}$. Luego no es la misma función.

72. ¿Puede haber funciones cuya gráfica sea simétrica respecto del eje de abscisas?

No, pues eso significaría que todos los valores del dominio tendrían más de una imagen.

73. ¿Qué tipo de gráfica tiene una función con dominio todos los números reales y recorrido un único número real?

Si la función *f* verifica que $D(f) = \mathbb{R}$ y $R(f) = \{a\}$, su gráfica es la recta $y = a$.

74. ¿Una función que incluya un valor absoluto con la variable en su interior, ¿se puede escribir siempre como una función definida a trozos?

No, pues puede ocurrir que las expresiones dentro del valor absoluto no cambien de signo con lo que no tiene sentido definirla a trozos. Por ejemplo: $f(x) = |x^2 + 1| = x^2 + 1$

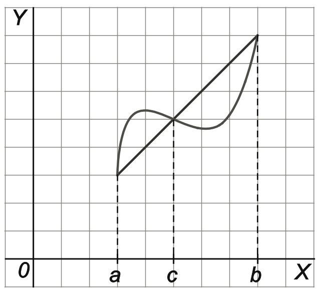
75. La gráfica de la función $f(x) = |g(x)| + |h(x)|$, siendo g y h polinomios de primer grado, ¿está formada por segmentos de recta?

Sí, pues si $g(x)$ cambia de signo en a y $h(x)$ lo hace en b con, por ejemplo, $\begin{cases} g(x) > 0 & \text{si} \quad x < a \\ g(x) < 0 & \text{si} \quad x > a \end{cases}$, $\begin{cases} h(x) > 0 & \text{si} \quad x < b \\ h(x) < 0 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$ con $a<b$, la función $f(x) = |g(x)| + |h(x)|$ sería: $\begin{cases} g(x) + h(x) & \text{si } x \le a \\ -g(x) + h(x) & \text{si } a < x \le b \\ -g(x) - h(x) & \text{si } x > bx \end{cases}$

que, al ser g y h polinomios de primer grado, verificaría que su gráfica estaría formada por segmentos de rectas.

76. Razona si es verdadera o inexacta la siguiente afirmación:

"Si *f* es una función definida en el intervalo [*a*, *b*] y *c* es un número de ese intervalo, el valor de *f*(*c*) obtenido por interpolación lineal entre *a* y *b* coincide con el verdadero valor de *f*(*c*) sólo si la gráfica de *f* es rectilínea en ese intervalo".

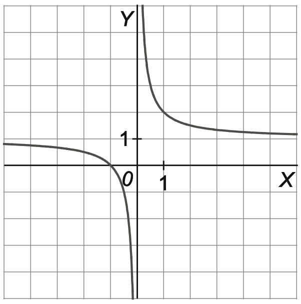


La afirmación es falsa, pues la gráfica de f puede cortar al segmento de extremos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ en el punto $(c, f(c))$ como muestra la figura.

77. ¿Qué grado debería tener un polinomio de interpolación si queremos que pase exactamente por cinco puntos que correspondan a datos experimentales?

El grado de dicho polinomio $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ debería ser menor o igual que 4 pues sus coeficientes a, b, c, d, e serían las incógnitas de un sistema lineal con cinco ecuaciones. Si $a = 0$, el grado sería menor que 4.

78. La gráfica de la figura representa una función que es cociente de dos polinomios *P* y *Q*, esto es, $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. ¿Qué se puede decir sobre las raíces del polinomio *Q*?



La única raíz de $Q(x)$ es $x = 0$, pues $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$.

79. ¿Tiene inversa la función $f(x)= x^3 - x$?

$f(x)$ no tiene inversa, pues como $f(-1) = f(1) = 0$, f^{-1} debería tener dos imágenes en $x = 0$, es decir $f^{-1}(0) = -1$ y a la vez $f^{-1}(0) = 1$.

80. Si las gráficas de las funciones *f* y *g*, ambas con dominio todos los números reales, coinciden para todos los valores del intervalo [0, 4] pero luego no coinciden, ¿pueden ser ambas funciones polinómicas?

La función $f - g$ es idénticamente nula en [0, 4], luego ambas no pueden ser polinómicas, pues si lo fueran el polinomio $f - g$ tendría infinitas raíces.

PROBLEMAS

81. Las funciones de oferta y demanda de un tipo de ordenador portátil vienen dadas, respectivamente, por $q(p) = 0{,}50p - 30$ y $r(p) = 600 - 0{,}25p$; *p* en €.

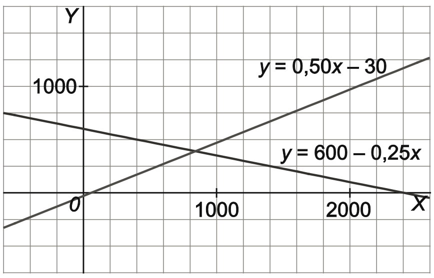
a) ¿Cuáles son las cantidades ofertadas y demandadas si el precio es de 500, 700 o 900 €?

b) Represéntalas y halla el precio de equilibrio (aquel en el que el valor de ambas funciones coincide).

a) Oferta: $q(500) = 220$; $q(700) = 320$; $q(900) = 420$. Demanda: $r(500)=475$; $r(700)=425$; $r(900)=493{,}75$

b) El precio de equilibrio, *p*, que vendrá dado por la solución de la ecuación $q(p) = r(p)$, es decir:

$0{,}50p - 30 = 600 - 0{,}25p$ da como solución $p = 840$ €.



82. El franqueo de las cartas varía según su peso, como se indica en la tabla:

Peso (g)	Precio (€)
Hasta 20	0,38
Hasta 50	0,54
Hasta 100	0,92
Hasta 500	2,03
Hasta 1000	4,58
Hasta 2000	5,19

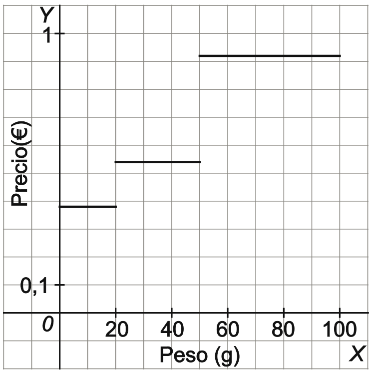
a) ¿Cuánto costaría franquear una carta de 145g?

b) Representa la gráfica de la función que nos indica el precio del franqueo según el peso de la carta. Elige adecuadamente la escala de los ejes para que se refleje toda la información.

c) ¿Es continua dicha función? ¿De qué tipo es?

a) Como 145 g se encuentra entre 100 y 500 gramos, costaría 2,03€.

b)

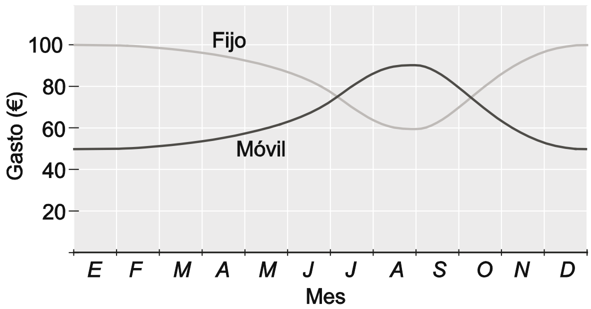


c) En la gráfica se observa que la función no es continua.Es una función escalonada, definida a trozos.

83. Esteban tiene dos teléfonos, uno fijo y uno móvil. Las curvas de la figura representan el gasto mensual en euros de cada uno de los dos teléfonos.

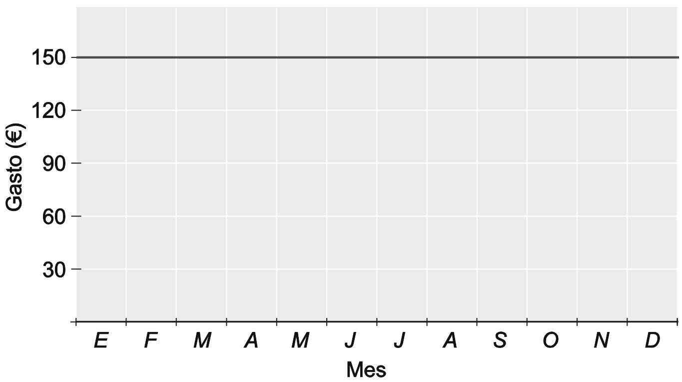
a) Explica en qué meses es más elevado el gasto en el teléfono móvil que en el fijo. ¿Por qué es así?

b) Dibuja la gráfica del gasto total mensual en teléfono de Esteban.



a) El gasto en el teléfono móvil es mayor que en el fijo en los meses de julio, agosto y septiembre, es decir, durante el verano. Resulta bastante razonable, pues es cuando más tiempo se pasa fuera de casa.

b)



84. Una empresa produce ratones inalámbricos para ordenadores de sobremesa y portátiles. Atendiendo a los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, al salario de sus trabajadores y a otros factores, se ha llegado a la conclusión de que producir ratones tiene un coste total, en euros, de $C(p) = 10p + 100\,000$.

a) Encuentra la expresión de la función C_m que nos da el precio unitario medio de un ratón al fabricar p unidades.

b) Calcula $C_m(10)$ y $C_m(1000)$. ¿A qué es debido que haya tanta diferencia entre un coste y otro?

a) $C_m(p) = \dfrac{C(p)}{p} = \dfrac{10p + 100000}{p} = 10 + \dfrac{100000}{p}$

b) $C_m(10) = 10010$; $C_m(1000) = 20$.

La diferencia está en los gastos de puesta en marcha de la maquinaria, salario de los trabajadores, etc., que son fijos, independientemente del número de ratones producidos, y que serían un auténtico derroche si se produjeran sólo 10 ordenadores.

85. Se designa por x la temperatura expresada en grados Fahrenheit y por $f(x)$ la misma temperatura expresada en grados Celsius. Sabiendo que f es una función lineal de x y que $f(40)=\dfrac{40}{9}$ y $f(50)= 10$, contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la temperatura Celsius correspondiente a 35 grados Fahrenheit?

b) ¿A qué temperatura expresada en grados Fahrenheit hierve el agua?

c) ¿A qué temperatura expresada en grados Fahrenheit se congela el agua?

a) Como f es una función lineal será de la forma $f(x) = ax+b$, por lo que:

$40a+b=\dfrac{40}{9}$ y $50a+b = 10$. Restando ambas ecuaciones se obtiene $10a = \dfrac{50}{9}$, $a = \dfrac{5}{9}$, $b = -\dfrac{160}{9}$.

Así pues, $f(x) = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$. Si $x = 35, f(x) = \dfrac{5}{9}\,35 - \dfrac{160}{9} = 1{,}7$ºC

b) Si $f(x) = 100$ºC, se tiene $100 = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$, $x=212$ºF.

c) Si $f(x) = 0$ºC, resulta $0 = \dfrac{5}{9}x - \dfrac{160}{9}$, $x = 32$ºF.

86. En una gran reserva natural hay una población de antílopes pertenecientes a una especie en peligro de extinción. Se piensa que el número de estos animales durante el período 2000– 2015 ha evolucionado aproximadamente según la siguiente función $f(x)=-2300x+ 54\,000$, donde x representa el tiempo en años, de forma que $x= 0$ corresponde a 2000, y $f(x)$ denota el número de antílopes a final de año.

a) Calcula el número de antílopes en 2005.

b) ¿Cuántos antílopes mueren cada año?

c) Si la población continúa evolucionando de este modo, ¿en qué año se extinguirá?

a) $f(5) = -2300 \cdot 5 + 54\,000 = 42\,500$ antílopes.

b) El números de antílopes que mueren cada año es $f(x) - f(x+ 1)$, es decir:

$[-2300x + 54000] - [-2300(x+1) + 54000] = 2300$ antílopes.

c) A ese ritmo la población se extinguiría cuando $f(x) = 0$, es decir $x=\dfrac{54000}{2300} = 23{,}4$ años, o sea, por el año 2023.

87. Un parque natural ha tenido durante el verano pasado más visitantes de los esperados, por lo que el servicio de limpieza ordinario no ha podido retirar toda la suciedad que la masiva afluencia de público ha generado. Llegado el otoño, los encargados del parque se plantean hacer una inversión extraordinaria para eliminar la suciedad acumulada. El coste de eliminar el *p* % de esos restos expresado en miles de € es:

$$C(p) = \frac{16p}{110 - p}$$

a) Sin hacer ningún cálculo, indica si esta función es creciente o decreciente.

b) Calcula cuánto costaría no eliminar ningún residuo, eliminar el 50% de los residuos y eliminarlos todos.

c) ¿Para qué puntos del dominio de *C* interesa en la práctica estudiar esta función? ¿Qué valores toma *C* en esa parte de su dominio?

d) Dibuja la gráfica de la función *C*.

e) ¿Qué proporción de la suciedad acumulada se podrá retirar si se aprueba una partida presupuestaria especial de 100 000 € destinada a tal fin?

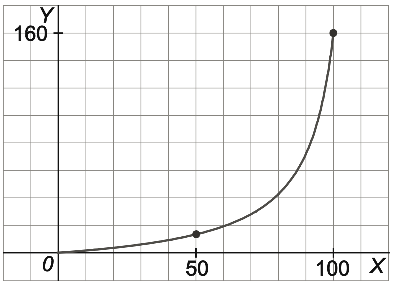
a) La función es naturalmente creciente, ya que cuántos más restos queramos eliminar más nos costarán. Si*p* aumenta, el numerador es más grande y el denominador más pequeño, por lo que la función crece.

b) Si $p = 0$, $C(0) = 0$. Si $p = 50$, $C(p) = \frac{16 \cdot 50}{60} =$ 13,3 mil €.

Si $p = 100$, $C(p) = \frac{16 \cdot 100}{10} = 160$ mil €.

c) Los valores *p* que interesan son los del intervalo [0, 100], donde *C* toma valores entre 0 y 160 mil €.

d)



d) Si $C(p) = 100$, entonces $100 = \frac{16p}{110 - p}$, $11000 = 116p$, $p = \frac{11000}{116} \simeq 95$ %.

88. El coste de la energía eléctrica se obtiene mediante una cantidad fija sumada a una variable proporcional a la cantidad de energía consumida. En dos meses distintos, Blanca ha pagado 71,40 € por 340 kWh, y 62,28 €,por 283 kWh.

- **En marzo pagó 71,40 € por 340 kW consumidos.**
- **En abril la factura fue de 62,28 €por 283 kWh.**

a) ¿Cuál es la cantidad fija que paga Blanca independientemente de su consumo mensual?

b) ¿Cuál es el importe de la factura en mayo si el consumo fue un 25 % más alto que el de abril?

a) Llamando *b* a la cantidad fija y *a* al precio del kWh,la función de coste, en euros, es $C(x) = ax + b$ donde *x* representa el gasto mensual en kWh.

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{l} 71{,}40 = a \cdot 340 + b \\ 62{,}28 = a \cdot 283 + b \end{array}\right\}$, y se obtiene que $a = \frac{9{,}12}{57} = 0{,}16$ y $b = 17$.

Por tanto Blanca paga una cantidad fija de 17 €.

b) El consumo en mayo será de $283 + 25\%$ de $283 = 353{,}75$ kWh.

La función coste $C(x) = 0{,}16x + 17$ evaluada con ese consumo es de $C(353{,}75) = 0{,}16 \cdot 353{,}75 + 17 = 73{,}6$ Por tanto, en mayo, el importe es de 73,6 €.

89. Un estudio de residuos urbanos recogidos en España ofrece los siguientes datos.

Años	Residuos urbanos (kg per cápita)
1995	510
1997	561
1999	615
2001	658

a) Estima cuántos kilogramos per cápita de residuos se recogieron en 1998 en España.

b) Estima cuántos kilogramos per cápita de residuos se recogieron en 2004 en España.

c) Estudios posteriores revelaron que en 2004 se recogieron 662 kilogramos de residuos per cápita en España. ¿Se ajusta el dato real al obtenido en la estimación anterior? ¿A qué crees que es debido?

a) A la vista de la tabla, las diferencias de residuos son proporcionales a las diferencias de años, es razonable pensar en obtener el resultado por interpolación lineal, por lo que si en 1997 fueron 561 kg y en 1999 fueron 615 kg, en 1998 serán aproximadamente $561 + \frac{615 - 561}{2} = 588$ kg.

b) Por extrapolación lineal, la ecuación de la recta, tomando como datos los años más próximos a 2004, a saber, 1999 y 2001 sería $y = mx + n$, con lo que tomando año cero a 1999 y año 2 a 2001, tendríamos el sistema $\begin{cases} 615 = n \\ 658 = 2m + n \end{cases}$, cuyas soluciones son $n = 615$ y $m = 21{,}5$,

con lo que al 2004, año 5, le corresponderían $21{,}5 \cdot 5 + 615 = 722{,}5$ kg.

c) El dato real es muy inferior a la estimación anterior, la razón estaba en que los ciudadanos han entendido que se pueden reciclar mucho material desechable.

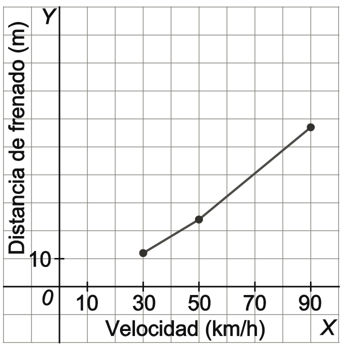
90. La DGT ha hecho un estudio sobre la distancia media que recorre un vehículo al detenerse en función de su velocidad.

Velocidad (km/h)	Distancia de frenado (m)
30	12
50	24
90	57,6

a) Representa estos datos y decide qué tipo de interpolación es la adecuada para este problema.

b) Estima la distancia de frenado para un vehículo que circula a 80 kilómetros por hora.

c) Calcula la distancia de frenado para un coche que lleva una velocidad de 150 km/h.



a) A la vista de la gráfica, se observa que la interpolación cuadrática es la adecuada.

b) Podemos construir la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con los datos (30, 12), (50, 24) y (90, 57,6) mediante el sistema: $\begin{cases} 12 = 900a + 30b + c \\ 24 = 2500a + 50b + c \\ 57{,}6 = 8100a + 90b + c \end{cases}$

Resolviendo se obtiene $a = 0{,}004$, $b = 0{,}28$, $c = 0$. Por tanto, la parábola en cuestión es $y = 0{,}004x^2 + 0{,}28x$.

Si $x = 80$, $y = 0{,}004 \cdot 6400 + 0{,}28 \cdot 80 = 48$ m.

c) Si la velocidad es de 150 km/hora, la distancia de frenado será: $y = 0{,}004 \cdot 22\,500 + 0{,}28 \cdot 150 = 132$ m.

91. Furbi, una cría de chimpancé, gana peso semana tras semana según muestra la siguiente tabla.

Tiempo	Peso (kg)
Nacimiento	1,5
Semana 1	2,1
Semana 2	2,5
Semana 3	
Semana 4	3,3

Por un fallo de la báscula, su peso en la tercera semana no pudo determinarse. Calcúlalo por interpolación lineal.

$\left.\begin{array}{l}\text{semana 2: } 2{,}5 \text{ kg}\\ \text{semana 4: } 3{,}3 \text{ kg}\end{array}\right\}$, así que en la semana 3 pesaría aproximadamente $2{,}5+\dfrac{3{,}3-2{,}5}{2}=2{,}9$ kg.

92. La tabla siguiente muestra las temperaturas tomadas cada cuatro horas en una ciudad a lo largo de un día.

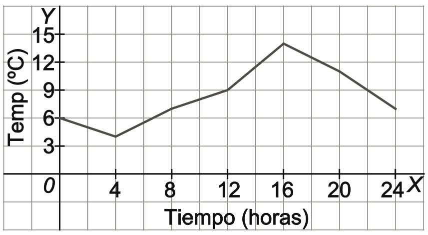
a) Representa los datos gráficamente.

b) Une los puntos obtenidos con segmentos y estima gráfica y analíticamente la temperatura a las 2 y a las 15 horas.

c) Señala los momentos del día en que la temperatura fue de 13 ºC aproximadamente.

Tiempo (horas)	Temperatura (ºC)
0	6
4	4
8	7
12	9
16	14
20	11
24	7

a)



b) Gráficamente:

2 horas → 5ºC

15 horas → 13ºC

Analíticamente (Interpolación lineal):

2 horas: $4+\dfrac{6-4}{2}=5$ºC

15horas: $\dfrac{T-9}{15-12}=\dfrac{14-9}{16-12}, T=9+\dfrac{15}{4}=12{,}75$ºC

c) A la vista de la gráfica, habría 13 ºC aproximadamente a las 17:30 y a las 15 horas.

93. Los aparcamientos públicos de cierta ciudad se rigen según una tarifa que explican en esta tabla.

Tiempo de estancia	Tarifa
De 0 a 30 minutos	0,0412 €/min
De 31 a 90 minutos	0,0370 €/min
De 91 a 660 minutos	0,0494 €/min
De 661 minutos hasta un máximo de 24 horas	31,6 €

a) ¿Cuánto habrá que pagar por una estancia de dos horas? Recuerda que se redondea siempre en el último cálculo.

b) ¿Cuánto habrá que pagar por una estancia de una hora?

c) Escribe la expresión analítica de la función que relaciona el precio con el tiempo de estacionamiento.

d) Con ayuda de algún programa informático, dibuja la gráfica correspondiente (de 0 hasta 800 minutos).

a) $120 \cdot 0{,}0494 = 5{,}928 \simeq 5{,}93$ **€**.

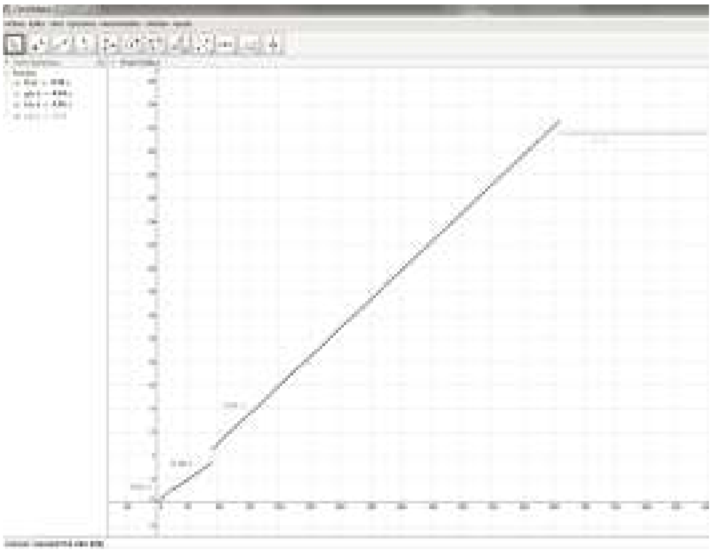
b) $60 \cdot 0{,}0370 = 2{,}22$ **€**.

c) Si x viene dado en minutos y $f(x)$ en €:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}0412x & \text{si} \quad 0 < x \leq 30 \\ 0{,}0370x & \text{si} \quad 30 < x \leq 90 \\ 0{,}0494x & \text{si} \quad 90 < x \leq 660 \\ 31{,}6 & \text{si} \quad 660 < x \leq 1440 \end{cases}$$

donde x viene dado en minutos y $f(x)$ en euros**.**

d) La gráfica siguiente está hecha con el programa GeoGebra:



94. La entrenadora de un delfinario ha tomado algunos datos sobre los saltos que realiza el delfín Flipper.

Tiempo (décimas de segundo)	Altura (m)
0	0
4	4
8	7
12	9
16	14
20	11
24	7

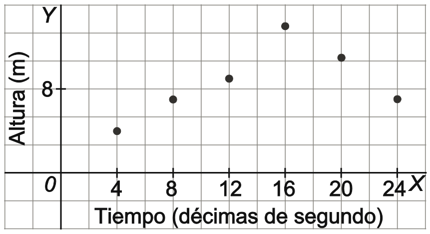
a) Razona qué tipo de interpolación usarías para calcular la altura que alcanza el delfín en determinados instantes.

b) Estima la altura que alcanza Flipper a los 1,5 segundos de iniciar su salto.

c) ¿Cuándo crees que consigue su altura máxima?

d) ¿Cuándo cae al agua?

a) Si representamos los datos gráficamente resulta una gráfica como la de la figura que sugiere que la interpolación cuadrática es la aconsejable.



b) Tomando como datos (4, 4), (16, 14) y (24, 7) la parábola

$y = ax^2 + bx + c$ que pasa por esos puntos se calcula resolviendo el sistema $\begin{cases} 16a + 4b + c = 4 \\ 256a + 16b + c = 14 \\ 576a + 24b + c = 7 \end{cases}$.

$a = -\frac{41}{480}$, $b = \frac{61}{24}$, $c = -\frac{72}{15}$, por lo que $y = -\frac{41}{480}x^2 + \frac{61}{24}x - \frac{72}{15}$

Si $x = 15$, la altura alcanzada es $y = -\frac{41}{480} \cdot 15^2 + \frac{61}{24} \cdot 15 - \frac{72}{15} = 14{,}1$ m.

c) La altura máxima alcanzada sería la ordenada del vértice de la parábola anterior, cuya abscisa sería $x = \frac{33}{2} = 16{,}5$ por lo que la ordenada es 14,06 m.

d) Siguiendo con la parábola anterior, el delfín cae al agua aproximadamente en el mayor valor de x solución de la ecuación $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{33}{2}x - 54 = 0$, es decir $x = 2{,}9$ segundos.

95. Una empresa se dedica a la fabricación de tapas metálicas para depósitos, cuyo coste depende, obviamente, del diámetro de la tapa. En la tabla de precios aparecen estos ejemplos:

Diámetro (cm)	115	155	205
Precio de la tapa (€)	46,80	66,70	102,5

Utilizando la interpolación cuadrática, contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué precio tendrá una tapa de 170 cm de diámetro?

b) ¿Y de tres metros de diámetro?

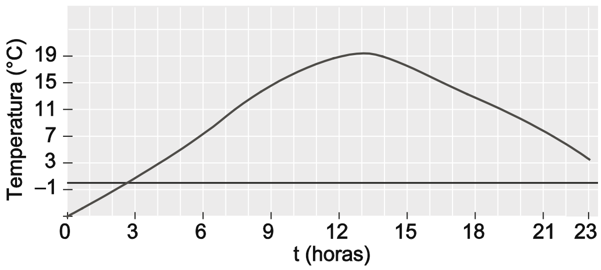
a) La parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos (115; 46,8), (155; 66,7) y (205; 102,5) tiene por coeficientes la solución del sistema: $\begin{cases} 13\,225a + 115b + c = 46{,}8 \\ 24\,025a + 155b + c = 66{,}7 \\ 42\,025a + 205b + c = 102{,}5 \end{cases}$ que es $\begin{matrix} a = 0{,}001\,86 \\ b = -0{,}0047 \\ c = 21{,}661 \end{matrix}$,

con lo que si x= 170 cm de diámetro, el precio de la tapa sería

y= 0,00186 · 170^2– 0,0047 · 170 + 21,661 = 74,616= 74,62€.

b) Si x = 300 cm, el precio de la tapa será: y = 0,00186 · 300^2– 0,0047 · 300 + 21,661 = 187,651 ≃ 187,65 €.

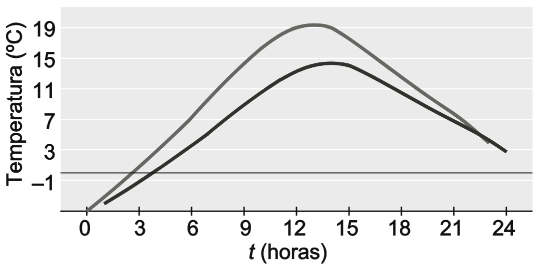
96. La gráfica representa la temperatura en el exterior de una nave industrial a lo largo de un día. Se ha observado que, debido al aislamiento, las temperaturas exteriores se suavizan en un 25 %, y las variaciones de la temperatura en el exterior son percibidas en el interior una hora después. Representa la gráfica de las temperaturas en el interior de la nave.



Que las temperaturas se suavicen un 25 % significa que la curva se contrae verticalmente al 75 %, es decir, que para una misma abscisa, la ordenada es el 75 % de la ordenada de la temperatura exterior.

Que las temperaturas se perciban una hora después significa que la gráfica se desplaza una unidad a la derecha, es decir, que la misma ordenada (temperatura) tiene la abscisa incrementada en una unidad.

La gráfica, por tanto, es la siguiente:



97. Las funciones "parte entera" y "parte decimal".

Como seguramente sabes, cualquier número real está entre dos enteros consecutivos; así, por ejemplo,

$1 \leq 1{,}8 < 2$; $4 \leq 4 < 5$; $-4 \leq -\pi < -3$; ...

Si el número real x verifica $n \leq x < n + 1$, siendo n un entero, se dice que n es la parte entera de x y se denota por $E(x) = n$.

a) Completa la siguiente tabla:

x	–3,4	–0,7	–0,5	0	0,3	0,9	1	1,3	$\sqrt{2}$	1,7	2,3	2,9
$E(x)$												

b) Representa gráficamente los puntos obtenidos en la tabla anterior.

c) ¿Cuáles son todos los números x tales que $E(x) = 3$? ¿Y $E(x) = -1$?

d) Representa gráficamente la función $E(x)$ en el intervalo $[-4, 3]$.

La función $D(x) = x - E(x)$ se llama parte decimal.

e) Calcula las imágenes por D de los números 1,7; 5 y –2,4.

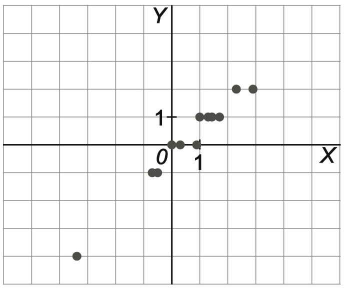
f) Escribe cinco números reales x tales que $D(x) = 0{,}4$.

g) Representa gráficamente la función $D(x)$ en el intervalo $[-4, 3]$.

a)

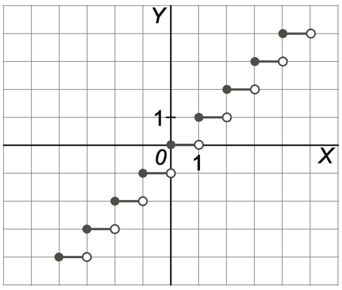
x	–3,4	–0,7	–0,5	0	0,3	0´9	1	1,3	$\sqrt{2}$	1,7	2,3	2,9
$E(x)$	–4	–1	–1	0	0	0	1	1	1	1	2	2

b)



c) Si $E(x) = 3$, entonces $3 \leq x < 4$. Si $E(x) = -1$, entonces $-1 \leq x < 0$.

d)



e) $D(1{,}7) = 1{,}7 - E(1{,}7) = 1{,}7 - 1 = 0{,}7$. $D(5) = 5 - E(5) = 5 - 5 = 0$. $D(-2{,}4) = -2{,}4 - E(-2{,}4) = -2{,}4 - (-3) = 0{,}6$.

f) 0,4, 1,4, –0,6, –3,6, –5,6.

g) Si $-4 \leq x < 3$, $D(x) = x - (-4) = x + 4$

Si $-3 \leq x < -2$, $D(x) = x - (-3) = x + 3$

Si $-2 \leq x < -1$, $D(x) = x - (-2) = x + 2$

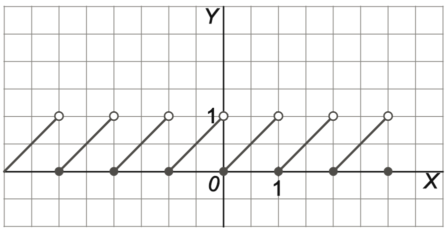
Si $-1 \leq x < 0$, $D(x) = x - (-1) = x + 1$

Si $0 \leq x < 1$, $D(x) = x$

Si $1 \leq x < 2$, $D(x) = x - 1$

Si $2 \leq x < 3$, $D(x) = x - 2$

Si $x = 3$, $D(x) = 3 - 3 = 0$



ENTORNO MATEMÁTICO

El "ratón inteligente"

Alicia es una emprendedora. Cuando terminó sus estudios de informática y marketing decidió montar un negocio que estuviera "a la última" y que fuera muy atractivo para los consumidores. Así surgió "El ratón inteligente", una tienda de ordenadores y dispositivos móviles que incluye un rincón en dónde los clientes pueden probar los últimos productos del mercado mientras charlan tomando un refresco o un café.

Aunque el negocio va bien, la venta de portátiles está bajando y Alicia decide estudiar una nueva oferta que haga que las ventas se recuperen. El jueves a las siete de la tarde no había clientes y, ni corta ni perezosa, echa el cierre, pone el cartel de "Cerrado por trance intelectual de la dueña" y se pone a leer informes y reflexionar: "Ahora compro los portátiles a 500 € la unidad y los vendo a 800 €. Así, estoy vendiendo 40 unidades al mes. Los estudios de mercado que he leído parecen indicar que por cada 25€ que baje el precio del ordenador, las ventas podrían aumentar en 5 unidades". Tras dos horas de leer papeles y reflexionar, Alicia se acomoda en el sillón y cierra losojos: "no tengo claro qué hacer".
Mientras Alicia se recupera, vamos a intentar solucionar su problema. Para ello:

a) Escribe la función de ganancia mensual que tendrá Alicia en función del precio de venta de cada portátil. (AYUDA: llama *x* al número de veces que disminuye 25 € el precio de venta)

b) Calcula el precio ideal de venta para maximizar la ganancia y el precio para el que la ganancia no cambiaría respecto de la actual.

a) El precio de venta de cada portátil es $V = 800 - 25x$.

El precio de compra de cada portátil es $C = 500$.

El número de unidades vendidas es $N = 40 + 5x$.

Por tanto la función *f*(*x*)que expresa la ganancia mensual *G* será $f(x) = N(V - C)$ por lo que:

$$f(x) = (40 + 5x)\left[(800 - 25x) - 500\right] = -125x^2 + 500x + 12000$$

b) En la siguiente tabla se observa que el precio ideal de venta es de $V = 750$ €, pues es donde la ganancia es máxima: $G = 12\,500$ €; y que para un precio de venta de $V = 700$ €, la ganancia es la misma que la actual de $G = 120\,00$€.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C	500	500	500	500	500	500	500	500	500
V	800	775	750	725	700	675	650	625	600
N	40	45	50	55	60	65	70	75	80
G	12 000	12 375	12 500	12 375	12 000	11 375	10 500	9375	8000

El cerrajero

Los padres de Mario se han ido unos días fuera y, aunque su madre no las tenía todas consigo "tiene 16 años pero a veces actúa como si tuviera 10" su padre le apoyó y, al final, le han dejado solo en la casa. El viernes, Mario quedó con los colegas del instituto para jugar un partido por la tarde. Cuando llega a casa a eso de las 8, muerto de hambre y deseando darse una buena ducha se da de bruces con la cruda realidad: "¡He olvidado las llaves dentro de casa!" Tras unos minutos de pánico, se tranquiliza e intenta recordar si alguien tiene llaves, baja al portal y allí se encuentra con la solución a su grave problema: dos anuncios de cerrajeros que decían así:

Abroya

25 € por reparación más 16 por cada cuarto de hora de trabajo.

Rapidez y garantía.

Cobropoco

31 € por reparación más 14 por cada cuarto de hora de trabajo.

Eficacia y sorpresa garantizada.

Al leer los anuncios, Mario vuelve a entrar en fase pánico: las matemáticas nunca han sido lo suyo. Se sienta en el suelo y empieza a pensar qué oferta será mejor.

¿Puedes ayudar a Mario y hacer un estudio que decida con claridad a partir de cuántos minutos de trabajo es más económico uno u otro cerrajero?

a) Escribe la función que da el precio de cada cerrajero en función de los minutos de trabajo.

b) Calcula el tiempo en minutos para el que el precio de ambos cerrajeros es el mismo.

c) Si el trabajo dura media hora, ¿cuál es la opción más económica? ¿Y si fuera necesaria una hora?

a) El precio por minuto de la empresa *Abroya* es $f(x)=25+\frac{16}{15}x$, siendo x el número de minutos, y el de la empresa *Cobropoco* es $g(x)=31+\frac{14}{15}x$.

b) El precio de ambos cerrajeros será el mismo para aquel valor de x que verifique que $f(x)=g(x)$, es decir: $25+\frac{16}{15}x=31+\frac{14}{15}x$, cuya solución es $x=45$, por tanto, el precio coincidirá a los tres cuartos de hora.

c) $f(30)=25+\frac{16}{15}30=57$, $g(30)=31+\frac{14}{15}30=59$, por lo que la opción más económica, si el trabajo dura media hora, es la de la empresa *Abroya* que cobraría 57€.

$f(60)=25+\frac{16}{15}60=89$, $g(60)=31+\frac{14}{15}60=87$, por lo que la opción más económica, si el trabajo dura una hora, es la de la empresa *Cobropoco* que cobraría 87€.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Si la función $y = f(x)$ está definida solamente en el intervalo $[0, 4]$ y la función $y = g(x)$ está definida solamente en el intervalo $[1, 7]$, ¿para qué números reales puedes asegurar que existe $f(x) + g(x)$?

Deben existir $f(x)$ y $g(x)$ en los mismos valores, así que $x \in [0, 4] \cap [1, 7] = [1, 4]$.

2. Dadas las funciones $f(x) = 5x^2 - 3x$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$ halla la expresión y el dominio de $f \circ g$, $g \circ f$ y $\frac{g}{f}$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-1}\right) = 5(x-1) - 3\sqrt{x-1}$.

$D(f \circ g) = [1, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x^2 - 3x) = \sqrt{5x^2 - 3x - 1}$.

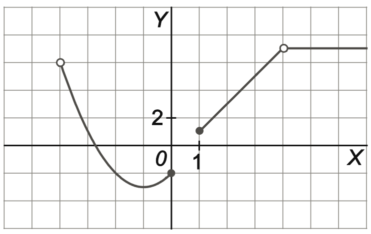
Como $D(f) = \mathbb{R}$, x estará en $D(g \circ f)$ si $5x^2 - 3x - 1 \geq 0$, por lo que

$$D(g \circ f) = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right] \cup \left[\frac{3-\sqrt{29}}{2}, +\infty\right)$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)x = \frac{\sqrt{x-1}}{5x^2 - 3x}.$$

$$D\left(\frac{g}{f}\right) = [1, \infty) - \left\{0, \frac{3}{5}\right\} = [1, \infty).$$

3. Observa la siguiente gráfica y determina el dominio y el recorrido de la función representada:



$D(f) = (-4, 0] \cup [1, 4) \cup (4 + \infty)$ $R(x) = [-3;\ 7]$

4. Escribe como una función definida a trozos $f(x) = |x^2 - 1|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

5. Calcula la función inversa de $f(x)=\dfrac{x+5}{x-1}$.

$y=\dfrac{x+5}{x-1}$; se despeja x: $x=\dfrac{5+y}{y-1}$, así que $f^{-1}(x)=\dfrac{x+5}{x-1}$.

6. A partir de $f(x)=x^2-4x+1$, halla la expresión de las funciones cuya gráfica, respecto de la de *f*:

a) Está desplazada dos unidades hacia arriba.

b) Está desplazada tres unidades hacia la izquierda.

c) Se ha dilatado verticalmente en un factor 2.

d) Se ha comprimido horizontalmente en un factor 2.

a) $g(x)=f(x)+2=x^2-4x+3$

b) $g(x)=f(x+3)=(x+3)^2-4(x+3)+1=x^2+2x-2$

c) $g(x)=2f(x)=2x^2-8x+2$

d) $g(x)=f(2x)=4x^2-8x+1$

7. Utilizando la interpolación lineal, obtén aproximadamente $\sqrt{29}$ sin utilizar la calculadora.

Tomando como datos $\sqrt{25}=5$ y $\sqrt{36}=6$, $\sqrt{29}=5+h$ siendo $\dfrac{h}{29-25}=\dfrac{6-5}{36-25}$, es decir $h=\dfrac{4}{11}$,

por lo que $\sqrt{29}\simeq 5+\dfrac{4}{11}=\dfrac{59}{11}\simeq 5{,}36$. La calculadora nos da un valor de 5,385…

8. Determina la función cuadrática que pasa por los puntos A(1, 0), B(2, −4) y C(4, 0).

$y=ax^2+bx+c$. Si la parábola pasa por (1, 0) y (4, 0) la abscisa del vértice es $x=\dfrac{5}{2}$, por lo que dicha parábola será $y=p\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+k$. Al pasar por (1, 0), $0=\dfrac{9}{4}p+k$ y al pasar por (2, –4), $-4=\dfrac{p}{4}+k$, con lo que, restando

$4=2p$, y por tanto $p=2$, $k=-\dfrac{9}{2}$ y la parábola es $y=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{9}{2}$, es decir $y=2x^2-10x+8$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada uno de los siguientes apartados

1. ¿Qué verifican las funciones *f* y *g* dadas por $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 0 \\ -1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **y** $g(x)=\begin{cases} 3x-3 & \text{si } x\le 0 \\ -3 & \text{si } x>0 \end{cases}$**?**

A. Sus gráficas se cortan en los puntos de abscisas 1 y 2.
B. Sus gráficas no tienen ningún punto en común.
C. Las gráficas de g y $\dfrac{f}{g}$ son paralelas.
D. $f(x)\cdot g(x)<0$ si $x>0$.

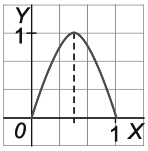
A. Es falso, pues $f(1)=-1$ y $g(1)=-3$.

B. Es verdadero, ya que si $x\le 0$, $x^2-1=3x-3$ tiene por soluciones 1 y 2, ninguna menor o igual que cero y si $x>0$, tampoco se cortan pues $-1\ne -3$.

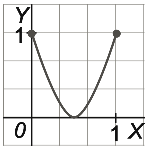
C. Es falso pues si $x\le 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-1}{3x-3}=\dfrac{x+1}{3}$, recta que no es paralela a $y=3x-3$.

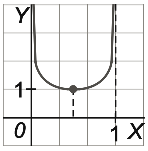
D. Es falso pues $(-1)(-3)>0$.

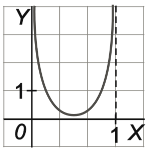
2. Si la gráfica de $f(x)$ en $[0, 1]$ es

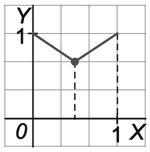


la de $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ **podría ser:**

A.


B.


C.


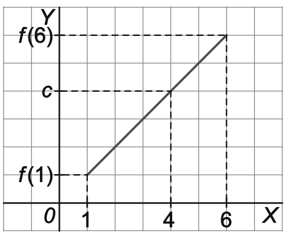
D.


Como $g(0)$ y $g(1)$ no existen, se descartan las respuestas A) y D). Finalmente, como $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{2}\right)}=1$, se descarta la respuesta C) La respuesta correcta es la B.

3. Por interpolación lineal de la función $y=f(x)$ en el intervalo $[1, 6]$, se obtiene el valor c para $x=4$, entonces:

A. $2(c-f(1))=3(f(6)-c)$ **B.** $\dfrac{c-f(1)}{3}<\dfrac{f(6)-c}{2}$ **C.** $\dfrac{c-f(1)}{3}>\dfrac{f(6)-c}{2}$ **D.** $c=f(4)$

Si interpretamos los datos del enunciado en la siguiente gráfica:



Se deduce que $\dfrac{c-f(1)}{3}=\dfrac{f(6)-c}{2}$, es decir $2(c-f(1))=3(f(6)-c)$. La respuesta correcta es la A.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Para la función inversa de $f(x) = x^3$, se verifica:

A. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ **B.** $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^3}$ **C.** $f^{-1}(-8) = -2$ **D.** $f^{-1}(x)$ no es una función.

Si $y=x^3$, $x=\sqrt[3]{y}$, por lo que la inversa será $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, y una respuesta correcta es A.

Como $f^{-1}(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$ también se verifica C.

5. Sea $f(x) = ax + b$ con $a \neq 0$ y $g(x) = cx + d$ con $c \neq 0$. Si $f \circ g = g$, entonces se verifica que:

A. $a = 1$ **B.** $b = 0$ **C.** $a = 1$ y $b = 0$ **D.** $a = c$ y $b = d$

$(f \circ g)(x) = g(x)$ nos lleva a $f(cx + d) = cx + d$, es decir, $a(cx + d) + b = cx + d$, $acx + ad + b = cx + d$, por lo que

$ac = c$, $ad + b = d$. Como $c \neq 0$, $a = 1$ y $b = 0$, una respuesta correcta es C.

También se verifican las respuestas A y B.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sean f y g funciones con dominio todo $\mathbb{R}$ con $g(x) \geq 0$ para cualquier valor de x. Entonces si:

1) $f(x) \geq g(x)$ **para todo** x **2)** $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

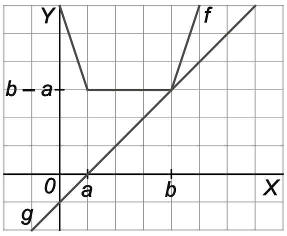
Si $f(x) \geq g(x)$ y $g(x) \geq 0$, entonces $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$, por lo que $1 \Rightarrow 2$ y $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 1$, al ser $g(x) \geq 0$, es $f(x) \geq g(x)$, con lo que $2 \Rightarrow 1$ y la respuesta correcta es la C.

Razona cuál de los siguientes datos es innecesario

7. Sean a y b números positivos con $a<b$. Para hallar el número de puntos de corte entre las gráficas de $f(x) = |x-a| + |x-b|$ y $g(x) = x - a$, nos dan los siguientes datos:

1. Valor de a **2. Valor de b**

A. Podemos prescindir de 1 pero no de 2.
B. Podemos prescindir de 2 pero no de 1.
C. Podemos prescindir de 1 y de 2.
D. No podemos prescindir ni de 1 ni de 2.



Dibujemos las gráficas de ambas funciones:

$$f(x)=\begin{cases} a-x+b-x=-2x+(a+b) & \text{si} \quad x<a \\ x-a+b-x=b-a & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ x-a+x-b=2x-(a+b) & \text{si} \quad b<x \end{cases}$$

El número de puntos de corte de ambas gráficas es 1, independientemente del valor de a y de b (con $0 < a < b$), por lo que la respuesta correcta es la C.

7 Límites y continuidad

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Calcula, operando en las expresiones originales, y formando una tabla de valores los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+5x^2+x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)^{x-2}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+5x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(x^2+5x+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+5x+1\right)=0^2+5\cdot 0+1=1$

x	$f(x)=\dfrac{x^3+5x^2+x}{x}$
0,1	$\dfrac{0,1^3+5\cdot 0,1^2+0,1}{0,1}\simeq 1,5$
0,01	$\dfrac{0,01^3+5\cdot 0,01^2+0,01}{0,01}\simeq 1,05$
0,0001	$\dfrac{0,0001^3+5\cdot 0,0001^2+0,0001}{0,0001}\simeq 1,0005$
0,000 001	$\dfrac{0,000\,001^3+5\cdot 0,000\,001^2+0,000\,001}{0,000\,001}\simeq 1,000\,005$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)=\sqrt{1}+1=2$

x	$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$
0,9	$\dfrac{0,9-1}{\sqrt{0,9}-1}\simeq 1,95$
0,99	$\dfrac{0,99-1}{\sqrt{0,99}-1}\simeq 1,995$
0,9999	$\dfrac{0,9999-1}{\sqrt{0,9999}-1}\simeq 1,999\,95$
0,999 999	$\dfrac{0,999\,999-1}{\sqrt{0,999\,999}-1}\simeq 1,999\,999\,5$

c) $\lim\limits_{x\to 2}(x+1)^{x-2}=(2+1)^{2-2}=3^0=1$

x	$f(x)=(x+1)^{x-2}$
1,9	$(1,9+1)^{1,9-2}\simeq 0,9$
1,99	$(1,99+1)^{1,99-2}\simeq 0,99$
1,9999	$(1,9999+1)^{1,9999-2}\simeq 0,9999$
1,999999	$(1,999\,999+1)^{1,999\,999-2}\simeq 0,999\,999$

4. Calcula, para cada una de las siguientes funciones dadas, el límite pedido en cada caso.

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x\le 2 \\ 3x-1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ no existe, pues los límites laterales existen pero no coinciden:

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

b) En este caso existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y vale 5 pues los límites laterales coinciden:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+1\right)=2^2+1=5$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=3\cdot 2-1=5$

5. Ejercicio resuelto.

6. Sabiendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-3$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, calcula los límites cuando $x\to a$ de las siguientes funciones.

a) $2f-3g$ **d)** $(f+g)$ **g)** $(f+g)^f$ **j)** $\dfrac{f}{g}$

b) $(3f)^2$ **e)** $\dfrac{g}{f}$ **h)** $(g)^{1-f}$

c) (fg) **f)** f^g **i)** $(f-4g)^{2f}$

En cada caso aplicamos las propiedades de los límites de funciones obtenidas mediante operaciones:

a) $\lim\limits_{x\to a}(2f-3g)(x)=2\lim\limits_{x\to a} f(x)-3\lim\limits_{x\to a} g(x)=2(-3)-0=-6$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left[(3f)^2\right](x)=\left(3\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^2=\left[3\cdot(-3)\right]^2=81$

c) $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]=(-3)\cdot 0=0$

d) $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=(-3)+0=-3$

e) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} g(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\dfrac{0}{-3}=0$

f) $\lim\limits_{x\to a}\left(f^g\right)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=(-3)^0=1$. Hay que tener en cuenta que f^g no existe en un entorno $E(a,\delta)$.

g) $\lim\limits_{x\to a}\left[(f+g)^f\right](x)=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\left[(-3)+0\right]^{-3}=-\dfrac{1}{27}$. Caso análogo al anterior para un entorno $E(a,\delta)$.

h) $\lim\limits_{x\to a}\left[(g)^{1-f}\right](x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)^{1-\lim\limits_{x\to a} f(x)}=0^{1-(-3)}=0^4=0$ si $g(x)>0\ \forall x\in E(a,\delta)$, en caso contrario no existe.

i) $\lim\limits_{x\to a}\left[(f-4g)^{2f}\right](x)=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)-4\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]^{2\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\left[(-3)-4\cdot 0\right]^{2\cdot(-3)}=(-3)^{-6}=\dfrac{1}{(-3)^6}=\dfrac{1}{729}$. Caso análogo al anterior.

j) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{-3}{0}$. Con los datos que tenemos, no puede calcularse.

7. Se conoce que las funciones *f* y *g* tienen límite en el punto $x = a$. Además $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = -1$.

Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ **b)** Si $\lim_{x\to a} g(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)} = 4$ **c)** $\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ es un cuadrado perfecto.

a) Es falsa. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ valiese cero, entonces $\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)$ también valdría cero.

b) Es Cierta, pues podemos calcular, previamente, $\lim_{x\to a} f(x)$:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right) = -1 \Rightarrow -2\cdot\lim_{x\to a} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{2}\text{, por lo que } \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

c) Cierta: $\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right) = -1 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{-1}{\lim_{x\to a} g(x)}$, por lo que:

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\right| = \left|\frac{\left[\dfrac{-1}{\lim_{x\to a} g(x)}\right]}{\lim_{x\to a} g(x)}\right| = \left|\frac{-1}{\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]^2}\right| = \frac{1}{\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]^2} = \left[\frac{1}{\lim_{x\to a} g(x)}\right]^2.$$

8. A partir de una tabla de valores, estima el valor de los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5}{1-2x}$ **b)** $\lim_{x\to 1}\dfrac{-4x+4}{x-1}$ **c)** $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6x+5}{1-2x} = -3$ pues:

x	$f(x) = \dfrac{6x+5}{1-2x}$
10	$\dfrac{6\cdot 10+5}{1-2\cdot 10} \simeq -3{,}421\,053$
100	$\dfrac{6\cdot 100+5}{1-2\cdot 100} \simeq -3{,}040\,201$
10000	$\dfrac{6\cdot 10\,000+5}{1-2\cdot 10\,000} \simeq -3{,}000\,400$
1 000 000	$\dfrac{6\cdot 1\,000\,000+5}{1-2\cdot 1\,000\,000} \simeq -3{,}000\,004$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{-4x+4}{x-1} = -4$ pues:

x	$f(x) = \dfrac{-4x+4}{x-1}$
0,9	$\dfrac{-4\cdot 0{,}9+4}{0{,}9-1} = -4$
0,99	$\dfrac{-4\cdot 0{,}99+4}{0{,}99-1} = -4$
0,999	$\dfrac{-4\cdot 0{,}9999+4}{0{,}9999-1} = -4$
0,999 999	$\dfrac{-4\cdot 0{,}999\,999+4}{0{,}999\,999-1} = -4$

c) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x+1} = 0$ pues:

x	$f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$
–0,9	$\dfrac{(-0{,}9)^2+2(-0{,}9)+1}{(-0{,}9)+1} = 0{,}1$
–0,99	$\dfrac{(-0{,}99)^2+2(-0{,}99)+1}{(-0{,}99)+1} = 0{,}01$
–0,9999	$\dfrac{(-0{,}9999)^2+2(-0{,}9999)+1}{(-0{,}9999)+1} = 0{,}0001$
–0,999 999	$\dfrac{(-0{,}999\,999)^2+2(-0{,}999\,999)+1}{(-0{,}999\,999)+1} = 0{,}000\,001$

9. Halla el valor de los siguientes límites, utilizando una tabla de valores.

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4x+3}{x-3}$ **b)** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x+3}$ **c)** $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-1}{2x^2+1}$

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4x+3}{x-3}$ no existe porque los valores se hacen arbitrariamente grandes en valor absoluto, pero positivos o negativos según nos acercamos por la derecha o por la izquierda de $x=3$.

x	$f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x-3}$
2,9	$\frac{(2{,}9)^2+4(2{,}9)+3}{(2{,}9)-1}=-230{,}1$
3,1	$\frac{(3{,}1)^2+4(3{,}1)+3}{(3{,}1)-1}=250{,}1$
2,9999	$\frac{(2{,}9999)^2+4(2{,}9999)+3}{(2{,}9999)-1}\simeq -239\ 990$
3,0001	$\frac{(3{,}0001)^2+4(3{,}0001)+3}{(3{,}0001)-1}\simeq 240\ 010$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x+3}=+\infty$

x	$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x+3}$
10	$\frac{10^2-10+1}{10+3}=7$
100	$\frac{100^2-100+1}{100+3}\simeq 96$
10000	$\frac{10\ 000^2-10\ 000+1}{10\ 000+3}\simeq 9996$
1 000 000	$\frac{1\ 000\ 000^2-1\ 000\ 000+1}{1\ 000\ 000+3}\simeq 999\ 996$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+x-1}{2x^2+1}=\frac{3}{2}$

x	$f(x)=\frac{3x^2+x-1}{2x^2+1}$
–10	$\frac{3(-10)^2+(-10)-1}{2(-10)^2+1}\simeq 1{,}437\ 811$
–100	$\frac{3(-100)^2+(-100)-1}{2(-100)^2+1}\simeq 1{,}494\ 875$
–10000	$\frac{3(-10\ 000)^2+(-10\ 000)-1}{2(-10\ 000)^2+1}\simeq 1{,}499\ 950$
–1 000 000	$\frac{3(-1\ 000\ 000)^2+(-1\ 000\ 000)-1}{2(-1\ 000\ 000)^2+1}\simeq 1{,}499\ 999$

10. Calcula, eliminado las indeterminaciones.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-3x^2}{x^2+x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4x^2-x^3-3x}{x^2-3x+2}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-3x^2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(2x-3)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(2x-3)}{x+1}=0$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{1-0}=1$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-4)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)}{(x-4)}=-1$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4x^2-x^3-3x}{x^2-3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4x^2-x^3-3x}{(x-1)(x-2)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-2}{(x-1)(x-2)}-\dfrac{4x^2-x^3-3x}{(x-1)(x-2)}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+4x-2}{(x-1)(x-2)}$

Este límite no existe, ya que sus límites laterales no coinciden: por la izquierda es $-\infty$ y por la derecha es $+\infty$.

11. Halla el valor de los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x-90}{x^3-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x-90}{x^3-3}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{90}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{3}{x^3}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{90}{x^3}}{1-\frac{3}{x^3}}=\dfrac{0+0-0}{1-0}=0$

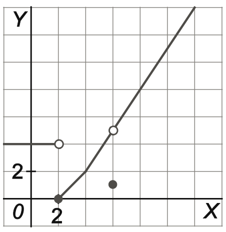
b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-x}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2-2}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{0}$.Dicho límite no existe, pues sus límites laterales no coinciden: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-x}=\left(\dfrac{+}{+}\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2-\sqrt{x}}{2-x}=\left(\dfrac{+}{-}\right)=-\infty$

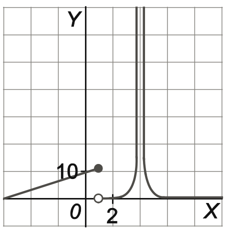
c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$

12. Ejercicio interactivo.

13. Ejercicio resuelto.

14. Identifica los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos.





La primera función tiene una discontinuidad de salto finito en $x=2$y una discontinuidad evitable en $x=6$.

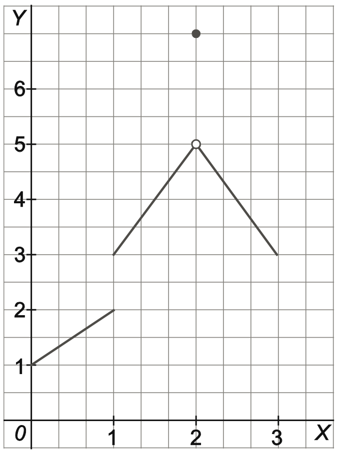
La segunda función tiene una discontinuidad de salto finito en $x=1$ y una discontinuidad de salto infinito en $x=4$.

15. Dibuja la gráfica de una función que verifique a la vez estas cuatro condiciones:

I. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$ **II.** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ **III.** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$ **IV.** $f(2) = 7$

¿Es continua esta función en $x = 1$? ¿Y en $x = 2$?

La función no es continua en ninguno de esos valores pues tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 1$ y una discontinuidad evitable en $x = 2$.



16. **a)** ¿Hay algún valor de x para el que no esté definida la función $f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 5x^2 + 6}$?

b) ¿Dónde es continua esta función?

a) $D(f) = \mathbb{R}$ ya que el denominador no se anula para ningún valor de x pues $x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$.

b) La función es continua en todo su dominio, es decir, en todo $\mathbb{R}$ **.**

17. Escribe una función que no sea continua ni en $x = 1$ ni en $x = 7$.

Respuesta abierta, por ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-7)}$ **.**

18. ¿En qué puntos no son continuas estas funciones?

a) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x^4+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2+x-12}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

a) Es continua en todo $\mathbb{R}$ porque el denominador no se anulapara ningún valor de$x$.

b) Es discontinua en $x = 1$, porque la imagen $f(1)$ no está definida (ya que $x = 1$ anula el denominador).

c) Como $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$, la función es discontinua en $x = -4$ y en $x = 3$.

d) Como el denominador se anula para $x = 1$ y para $x = 2$, en dichos valores la función es discontinua.

19. ¿Es continua $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 8x + 7}$ en $x = 1$?

No, porque la imagen $f(1)$ no está definida ya que se anula $x^2 - 8x + 7$ para $x = 1$.

20. Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-7x+12}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\le 0 \\ x-1 & \text{si } 0<x\le 3 \\ 2x-4 & \text{si } 3<x \end{cases}$

a) Función racional cuyo denominador se anula para x=3 y para x=4, por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{3,\ 4\}$. La discontinuidad en $x = 3$ es evitable.

b) Las funciones $y = x + 1$, $y = x - 1$, $y = 2x - 4$ son continuas por ser polinómicas, por lo que hay que estudiar la función en los puntos intermedios: $x = 0$, $x = 3$.

Si nos acercamos al cero por la izquierda, el valor de la función $x + 1$ se aproxima a 1 que es el valor de f en 0. Si nos aproximamos al cero por la derecha, los valores de la función $x - 1$ se aproximan a –1, así pues la función no es continua en $x = 0$.

Tanto si nos acercamos por la izquierda, con $x - 1$, como por la derecha, con $2x - 4$, a $x = 3$, la función se aproxima a 2 que es el valor de $f(3)$, por tanto la función en continua en $x = 3$.

Así pues, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

21. Determina cuánto debe valer *a* para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^3+a & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2-a & \text{si} \quad 1<x \end{cases}}$$

Las funciones que definen la función son continuas por ser polinómicas. Solo queda asegurarnos de la continuidad en x= 1, obligando a que los límites laterales coincidan ambos con $f(1)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^3+a)=1+a$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-a)=1-a$ $\qquad$ $f(1)=1+a$

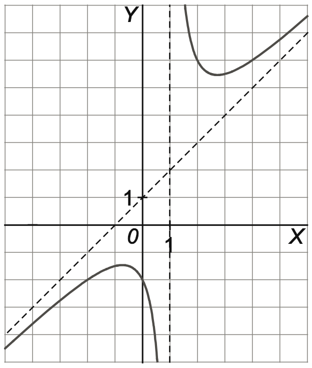
Igualando, se tiene que $1+a=1-a$, de donde se deduce que a debe valer 0 para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

22. Ejercicio resuelto.

23. Escribe todas las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}$ y esboza sus gráficas.

La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=1$ ya que:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2}{x-1}=+\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2}{x-1}=-\infty$$



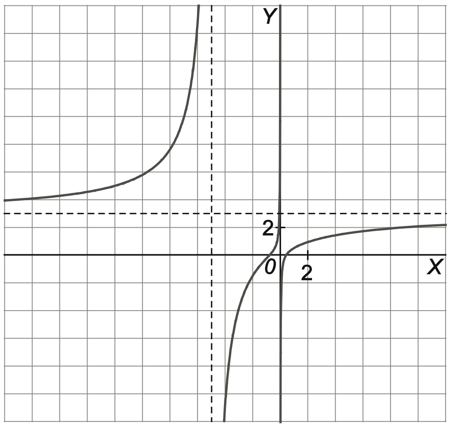
(Las posibles asíntotas verticales en las funciones racionales hay que buscarlas entre los valores que anulan el denominador, pero esto no quiere decir que en todos los valores que anulan el denominador haya asíntotas verticales, como se verá en el ejercicio 25).

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{x-1}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2}{x-1}=-\infty$.

Como $\dfrac{x^2+2}{x-1}=(x+1)+\dfrac{3}{x-1}$, la función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua de ecuación $y=x+1$.

La función $g(x)$ tiene dos asíntotas verticales, una es $x=0$ y otra es $x=-5$ (que son los valores que anulan el denominador) ya que: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to -5^+}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -5^-}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=+\infty$.



Al calcular los límites en el infinito vemos que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=3$

y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+x-1}{x^2+5x}=3$, por lo que se deduce que la recta $y=3$ es una asíntota horizontal tanto a derecha como a izquierda.

Al ser una función racional y tener asíntotas horizontales, no tiene asíntotas oblicuas.

24. Calcula las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}$.

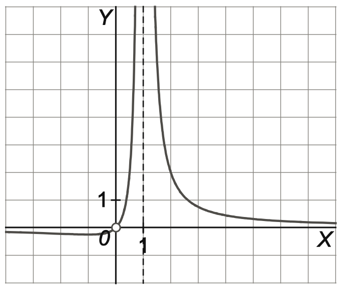
Como: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}=x+\dfrac{1-x}{x^2+x+1}$, la recta $y=x$ es asíntota oblicua de $f(x)$.

La función no tiene asíntotas verticales pues el denominador no se anula nunca.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, la función no tiene asíntotas horizontales.

25. Esboza la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}$.

Las posibles asíntotas verticales son $x=0$ y $x=1$.



Como $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{(x-1)^2}=0$, entonces $x=0$ no es asíntota.

Podemos decir que en $x=0$ hay una agujero. Este es un buen ejemplo de valor que anula el denominador, pero no indica que haya una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}=+\infty$, $x=1$ es asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x(x-1)^2}=0$, así pues la función tiene una asíntota horizontal de ecuación $y=0$.

26. ¿Puede tener una función racional asíntotas horizontales y oblicuas a la vez?

No, ambas asíntotas, en una función racional, son incompatibles, pues:
–Tendrá asíntotas horizontales si grado(numerador) $\leq$ grado(denominador).
–Tendrá asíntotas oblicuas si grado(numerador) $=$ 1 $+$ grado(denominador).

27. Ejercicio interactivo.

28. El número de individuos de una población en un instante *t* viene dado por la función:

$$N(t) = 300te^{rt} \text{ si } t > 0$$

donde *r* es una constante.

Estudia cómo se comporta a largo plazo la población si:

a) $r > 0$ **b)** $r < 0$ **c)** $r = 0$

a) Al ser r positivo, $\lim\limits_{t\to+\infty} 300te^{rt} = +\infty$, la población crece indefinidamente, de forma exponencial, es decir, muy rápido.

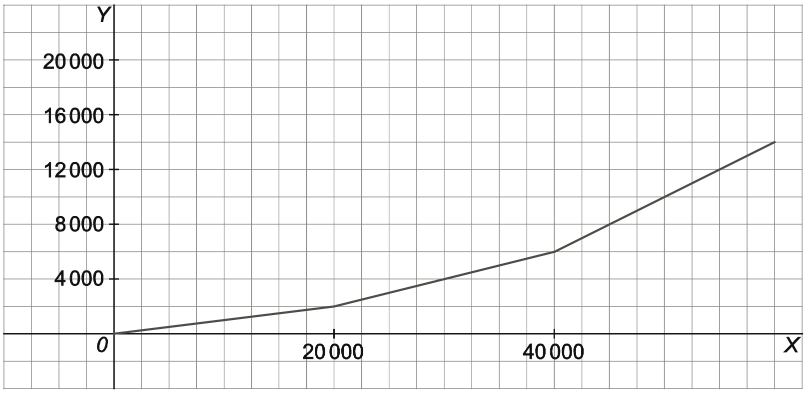
b) Al ser r negativo, $\lim\limits_{t\to+\infty} 300te^{rt} = 0$, la población tiende a desaparecer.

c) Al ser r nulo, $\lim\limits_{t\to+\infty} 300te^{rt} = +\infty$, la población crece indefinidamente, de forma lineal, es decir, a un ritmo mucho más lento que en el apartado a.

29. En la tabla se indica cómo varía el tipo impositivo del impuesto sobre la renta de un país según la renta.

Renta anual (€)	Tipo (%)
Inferior a 20000	10
Entre 20000 y 40000	20
Superior a 40000	40

Representa gráficamente esta función y estudia su continuidad.



$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1x & \text{si} \quad x \leq 20\,000 \\ 2000 + 0{,}2(x - 20\,000) & \text{si} \quad 20\,000 < x \leq 40\,000 \\ 6000 + 0{,}4(x - 40\,000) & \text{si} \quad x > 40\,000 \end{cases}$$

Es una función continua.

30 a 37. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Límites de funciones

38. Considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 2 \\ 2x+1 & \text{si } 2<x<4 \\ -x+13 & \text{si } 4<x \end{cases}$$

Calcula, si existen, los siguientes números: $f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $f(4)$, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, $f(5)$, $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

$f(2)=4$.

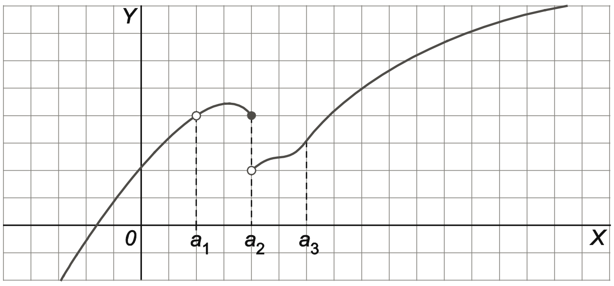
$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe porque sus límites laterales no coinciden: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2^2=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2\cdot 2+1=5$.

$f(4)$ no está definida.

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=9$ ya que sus límites laterales valen 9: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=2\cdot 4+1=9$, $\lim\limits_{x\to 2^{4+}} f(x)=-4+13=9$.

$f(5)=8$ y $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=8$.

39. La gráfica de $f(x)$ es la de la figura.



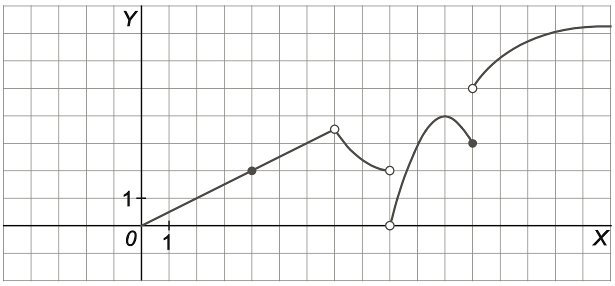
¿Existen $\lim\limits_{x\to a_1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a_2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a_3} f(x)$?

$\lim\limits_{x\to a_1} f(x)$ sí existe aunque no exista $f(a_1)$.

$\lim\limits_{x\to a_2} f(x)$ no existe porque sus límites laterales no coinciden.

$\lim\limits_{x\to a_3} f(x)$ sí existe y, en este caso, vale lo mismo que $f(a_3)$.

40. A partir de la gráfica de f dada en la figura, calcula, si existen, $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 12} f(x)$.



$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 7} f(x)=3{,}5$

Ni $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to 12} f(x)$ existen debido a que sus respectivos límites laterales no coinciden.

41. Con ayuda de tu calculadora, obtén los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2^+}(-\ln(x-2))^{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

a) Evaluando en la función $f(x)=(-\ln(x-2))^{x-2}$ valores cada vez más cercanos a 2 por la derecha: 2,1; 2,01, 2,001,… se obtiene que $\lim\limits_{x\to 2^+}(-\ln(x-2))^{x-2}=0$. Por ejemplo: $f(2{,}000\,001)\simeq 0{,}000\,013\,8$

b) Evaluando en la función $g(x)=x^x$ valores cada vez más cercanos a 0 por la derecha: 0,1; 0,01, 0,001,… se obtiene que: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=1$. Por ejemplo: $g(0{,}000\,001)=0{,}000\,001^{0{,}000\,001}\simeq 0{,}999\,99$

42. Razona por qué no existen los límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x}{x^2-9}$

a) El numerador de $\dfrac{x^2}{x-2}$ es siempre positivo, en cambio el denominador será negativo o positivo según estemos a la izquierda o a la derecha de 2. Así pues, el límite lateral por la izquierda de 2 será menos infinito y por la derecha será más infinito. Por tanto, dicho límite no existe.

b) La situación es análoga a la anterior. En este caso, el numerador es siempre negativo y el denominador será positivo o negativo dependiendo de por dónde nos acerquemos a x=–3.

43. Calcula, si existen:

a) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ para $f(x)=\begin{cases}x & \text{si } x<0\\ -x & \text{si } x>0\end{cases}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ para $f(x)=\begin{cases}2-x^2 & \text{si } x<2\\ x+2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

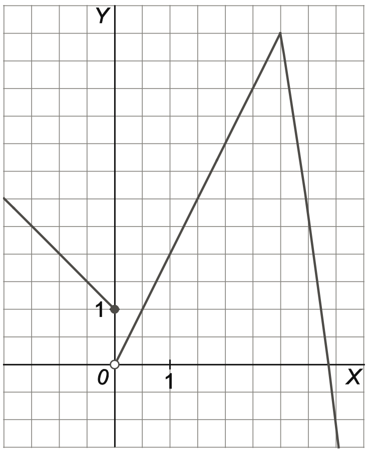
b) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ para $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<1\\ -x+2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

a) Sí existe: $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

b) Sí existe: $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1^2=1$ $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-1+2=1$ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

c) No existe porque sus límites laterales no coinciden: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=2-2^2=-2$ $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=2+2=4$

44. Dibuja la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases}-x+1 & \text{si } x\leq 0\\ 2x & \text{si } 0<x\leq a\\ -x^2+15 & \text{si } a<x\end{cases}$ **y determina para qué valores de** a **existe** $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ **.**

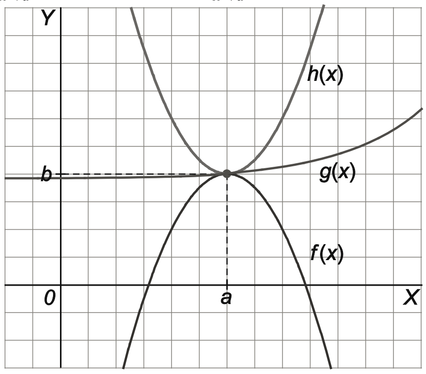


$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=2a$ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=-a^2+15$

Para que exista dicho límite los límites laterales han de coincidir, es decir, $2a=-a^2+15\Rightarrow a^2+2a-15=0$, que tiene dos soluciones: $a=3$ y $a=-5$, pero la solución negativa tenemos que descartarla porque $a>0$.

Así pues, a= 3.

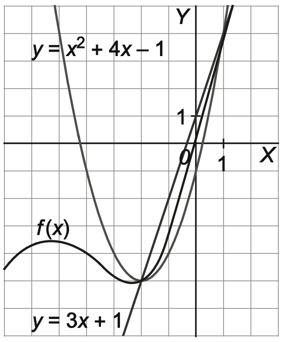
45. Haz un esquema para ilustrar que:"Si $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b=\lim\limits_{x\to a}h(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$ "



Este resultado se conoce con el acertado nombre del teorema del sandwich.

Si una función está encajonada entre otras dos y los límites de los "panes" coinciden, entonces, el límite del "jamón" también coincidirá con el de aquellos.

46. Si la función $f(x)$ verifica que $3x+1 \le f(x) \le x^2+4x-1$ para todo número x, haz un bosquejo de la gráfica de $f(x)$ en las cercanías de $x=1$ y calcula $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.



Usando el teorema del sandwich, visto en el ejercicio precedente:

como $4=\lim\limits_{x\to 1}(3x+1)\le \lim\limits_{x\to 1} f(x)\le \lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x-1)=4$, entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$.

Propiedades de los límites

47. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{3}+2g(x)\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\sqrt{g(x)}\right)$ **c)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)^2$ **d)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)+1}$

a) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{3}+2g(x)\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{3}+2\lim\limits_{x\to a} g(x)=\dfrac{b}{3}+2c$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\sqrt{g(x)}\right)=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]\sqrt{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=b\sqrt{c}$ solo si $c\ge 0$. Si c fuese negativo, dicho límite no existiría.

c) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)^2=(b+c)^2$

d) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)+1}=\dfrac{b}{c+1}$ solamente si $c\ne -1$. Los restantes casos son:

Si $c=-1$ y $b\ne 0$, habría que estudiar los límites laterales (que serían $+\infty$ y/o $-\infty$) y ver si coinciden o no.

Si $c=-1$ y $b=0$ tendríamos una indeterminación.

48. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, ¿para qué valores de b y c existen los siguientes límites?

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}$ **e)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(g(x))^2+1}$ **g)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{g(x)-c}$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\sqrt{g(x)}\right)$ **d)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)^{-f(x)}$ **f)** $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)^2$ **h)** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)g(x)}$

El problema nos está pidiendo los valores de b y c para que los límites sean finitos.

a) Si $c\ne 1$. Aunque en caso de que $a=1$ y $b=0$ también podría haberlo.

b) Si $c\ge 0$.

c) Si $b<0$, no estaría definida la función f^g en un entorno de a. Si $b>0$ el límite existe siempre y es b^c. Si $b=0$ y $f(x)\ge 0\ \forall x\in E(a,\delta)$ y $c\ne 0$ el límite es $0^c=0$, pero si $c=0$ tendríamos una indeterminación.

d) Si $b+c>0$ el límite existe. Si $b+c<0$ la función no estaría definida. Si $b+c=0$ y $f(x)+g(x)\ge 0\ \forall x\in E(a,\delta)$ y $b\ne 0$, el límite existe y es $(b+c)^{-b}=\dfrac{1}{(b+c)^b}$, pero si $b=c=0$ tendríamos una indeterminación.

e) Existe siempre porque el denominador jamás se anula.

f) Existe siempre.

g) Da lugar a una indeterminación que habría que estudiar.

h) Si b y c son ambos distintos de 0, el límite existe. Si $b=c=0$ tendríamos una indeterminación que habría que estudiar para saber si existe el límite. Evidentemente, si solo b o solo c son cero, el límite no existe.

Cálculo de límites

49. Utiliza las propiedades de los límites para calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x+4}{x^2+1}}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-3x}{x^2-5}$ **g)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}}{2x-7}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{2x-1}$ **d)** $\lim\limits_{x\to -1}(x+3)^{2x+1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2}{x^2+4}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 3}(x+5)^{x-3}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{2+3}{2-1}=\dfrac{5}{1}=5$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{2x-1}=\dfrac{3-3}{2\cdot 3-1}=\dfrac{0}{5}=0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{2x+4}{x^2+1}}=\sqrt{\dfrac{2\cdot 0+4}{0^2+1}}=\sqrt{\dfrac{4}{1}}=\sqrt{4}=2$

d) $\lim\limits_{x\to -1}(x+3)^{2x+1}=(-1+3)^{2\cdot(-1)+1}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-3x}{x^2-5}=\dfrac{2\cdot 5^2-3\cdot 5}{5^2-5}=\dfrac{50-15}{25-5}=\dfrac{35}{20}=\dfrac{7}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2}{x^2+4}=\dfrac{2}{(-2)^2+4}=\dfrac{2}{4+4}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

g) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}}{2x-7}=\dfrac{\sqrt{5+4}}{2\cdot 5-7}=\dfrac{\sqrt{9}}{10-7}=\dfrac{3}{3}=1$

h) $\lim\limits_{x\to 3}(x+5)^{x-3}=(3+5)^{3-3}=8^0=1$

50. Halla los siguientes límites indeterminados:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{4-x^2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{3x}$ **g)** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}{x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-10x+9}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$

b) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-2)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-2}{x+5}=\dfrac{5-2}{5+5}=\dfrac{3}{10}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{4-x^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)}{2x(4-x^2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{2x(2-x)(2+x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{2x(2+x)}=\dfrac{1}{2\cdot 2(2+2)}=\dfrac{1}{16}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{5}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right)}{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(5-x)-5}{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{5-x}+\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{10}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x+1)}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{0+1}{3}=\dfrac{1}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-10x+9}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{(x-1)(x-9)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{(x-1)(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{(x-9)}{(x-1)(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\dfrac{1}{48}$

g) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{9+6h+h^2-9}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6h+h^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(6+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(6+h)=(6+0)=6$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-x^2\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(x^2\right)^2\right]\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left[1^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right]\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-x^4\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(1-x)\left(x^2+x+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{(1-x)\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\left(x^2+x+1\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x}+x^2\right)}=\dfrac{1(1+1+1)(1+1)}{(1+1)}=\dfrac{6}{2}=3$

51. Calcula $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ con $f(x)=\begin{cases} 3x+7 & \text{si} \quad x<2 \\ 1 & \text{si} \quad x=2 \\ x^2+9 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

Debemos estudiar los límites laterales:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x+7)=13$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+9)=13$, luego $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=13$

52. Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{x^2+x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^3+x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2x-4}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x-2}}{\sqrt{x}+5}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1+0}{3-0}=\dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3}{x^2}-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{0-0}{1+0+0}=0$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\dfrac{1}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{1+0}=1$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3}{x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{2x^3}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\dfrac{2}{1+0+0}=2$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{3}{2x+1}\right)=0-0=0$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{2x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x-3}-1\right)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}{(2x-4)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x-3}\right)^2-1^2}{(2x-4)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-3)-1}{(2x-4)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{2(x-2)\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x-3}+1\right)}=0$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x-2}}{\sqrt{x}+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\frac{4x}{x}-\frac{2}{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{5}{\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\frac{2}{x}}}{1+\frac{5}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\sqrt{4-0}}{1+0}=\dfrac{2}{1}=2$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$

53. Halla $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ para $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$.

Se expresa la función a trozos: $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}=\begin{cases}\dfrac{-x+2}{x+1} & x\le 2\\ \dfrac{x-2}{x+1} & x>2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+2}{x+1}=-1$

54. Utiliza la calculadora para conjeturar el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$ y comprueba posteriormente si tu conjetura es correcta.

Con la calculadora se evalúa $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$ sustituyendo la x por números cada vez más próximos a cero (tanto por su izquierda como por sus derecha): $f(0{,}1)\simeq 1{,}048$; $f(0{,}01)\simeq 1{,}00498$; $f(0{,}001)\simeq 1{,}0005$; $f(-0{,}1)\simeq 0{,}95$; $f(-0{,}001)\simeq 0{,}9995$ … Se observa que lo valores de $f(x)$ se aproximan claramente a 1.

En efecto: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{1+2x}+1}{\sqrt{1+2x}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+2x}+1\right)=1$

55. Utiliza la calculadora para hallar $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}$.

Se evalúa la función $f(x)=\dfrac{x^3}{2^x}$ para valores de x positivos cada vez más grandes: 10, 100, 1000,…

Y se obtiene que: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{2^x}=0$. Por ejemplo, para $x=100$, $f(100)=\dfrac{100^3}{2^{100}}\simeq 7{,}9\cdot 10^{-25}$.

56. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2-2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-2}{(x+1)}=\dfrac{-2}{2}=-1$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\dfrac{3}{x^2-1}+\dfrac{2x}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{3+2x(x-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2-1}=+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{2x}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-2x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-2x^2-2x+2}{x^2-1}=-\infty$

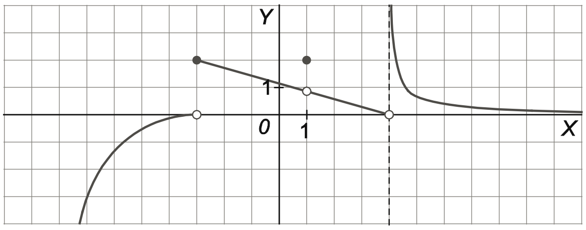
d) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{x^2-25}-\dfrac{1}{x-5}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-(x+5)}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-5}{x^2-25}$.

Este último límite no existe pues los límites laterales no coinciden: $\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{-5}{x^2-25}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{-5}{x^2-25}=-\infty$.

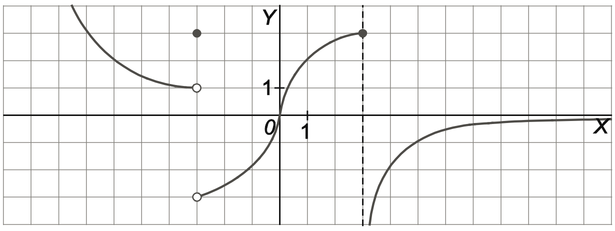
Continuidad

57. Señala los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y di de qué tipo son:

a)



b)



a) En $x = -3$ de salto finito, en $x = 1$ evitable y en $x = 4$ de salto infinito.

b) En $x = -3$ de salto finito y en $x = 3$ de salto infinito.

58. Si *f* y *g* son funciones continuas con $f(2) = 7$ y $\lim\limits_{x\to 2}(3f(x) - 2g(x)) = 1$, calcula $g(2)$.

Como *f* y *g* son continuas, entonces $\lim\limits_{x\to 2}(3f(x) - 2g(x)) = 3f(2) - 2g(2)$, por lo que

$3f(2) - 2g(2) = 1 \Rightarrow 3\cdot 7 - 2g(2) = 1 \Rightarrow g(2) = 10$.

59. Calcula, si los hay, los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

a) Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

b) Discontinuidad evitable en $x = 2$, pues $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ y $f(2) = 0$.

c) Es continua en todo $\mathbb{R}$ pues $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 2+2 = 4 = f(2)$.

d) Discontinuidad evitable en $x = 2$, pues no existe $f(2)$, pero sí existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$.

60. Explica por qué las funciones dadas son discontinuas en el punto cuya abscisa se señala:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2},\ x = 2$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases},\ x = 1$ **c)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases},\ x = 2$

a) Porque no existe $f(2)$.

b) Porque no coincide $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ con $f(1) = 0$.

c) Porque no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ya que $\left[\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -1\right] \neq \left[\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1\right]$.

61. Halla el valor de *a* para que la función: $f(x)=\begin{cases} ax+2 & \text{si } x\le -1 \\ ax^2-2 & \text{si } x>-1 \end{cases}$ sea continua en todos los puntos.

Solo preocupa qué ocurre en el punto de cambio, ya que las funciones que rigen en los dos trozos son continuas.

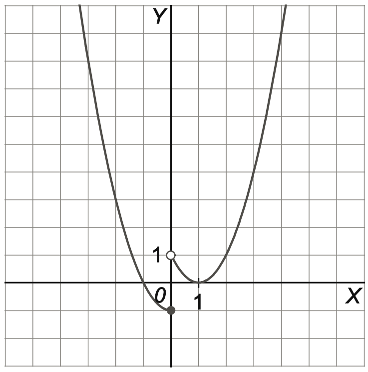
Los límites laterales en $x=-1$ deben coincidir: $\left[\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-a+2\right]=\left[\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=a-2\right] \Rightarrow -a+2=a-2 \Rightarrow a=2$

62. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad en el punto $x=0$.

a)



b) No es continua en $x=0$. Hay discontinuidad de salto finito.

63. Para las siguientes funciones definidas a trozos, determina los valores de los parámetros *a* y *b* que las hacen continuas para todos los valores reales de *x*.

Una vez determinados *a* y *b*, esboza la gráfica de cada función.

a) $f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x\le 1 \\ 2bx^2 & \text{si } 1<x\le 3 \\ 2x+3 & \text{si } x>3 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -4x+a & \text{si } x\le -2 \\ x^2-5 & \text{si } -2<x<1 \\ bx+3 & \text{si } 1\le x \end{cases}$

Las funciones que definen cada tramo son continuas, solo falta estudiar qué ocurre en los puntos de cambio.

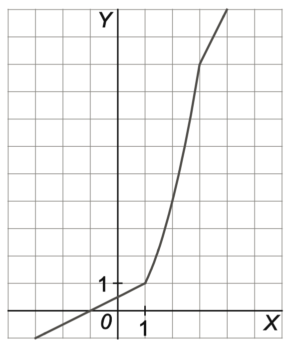
a) Para que *f* sea continua debe ser continua en $x=1$ y en $x=3$.

$\left[f(1)=a+b\right]=\left[\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=a+b\right]=\left[\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2b\right]$

$\left[f(3)=18b\right]=\left[\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=18\right]=\left[\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=9\right]$.

Luego deben cumplirse simultáneamente las condiciones $\begin{cases} a+b=2b \\ 18b=9 \end{cases}$.

Así pues, $a=b=\dfrac{1}{2}$.



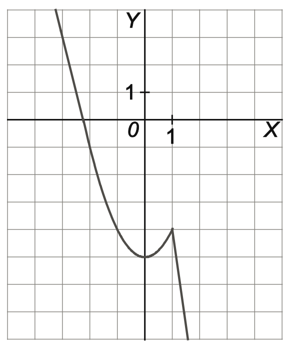
b) Para que *g* sea continua debe ser continua en $x=-2$ y en $x=1$.

$\left[f(-2)=8+a\right]=\left[\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=8+a\right]=\left[\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-1\right]$

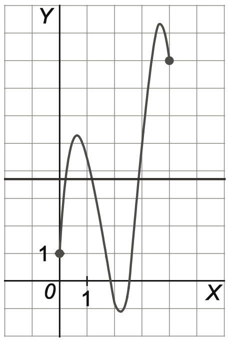
$\left[f(1)=b+3\right]=\left[\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-4\right]=\left[\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=b+3\right]$.

Luego deben cumplirse simultáneamente las condiciones $\begin{cases} 8+a=-1 \\ b+3=-4 \end{cases}$.

Así pues, $a=-9$ y $b=-7$



64. Dibuja una posible gráfica de una función continua f tal que $f(0)=1$ y $f(4)=8$, y comprueba si existe algún número c entre 0 y 4 tal que $f(c)=3{,}7$. Basándote en el resultado anterior, ¿crees que la ecuación $x^3+x-1=0$ tiene alguna solución comprendida entre 0 y 1?

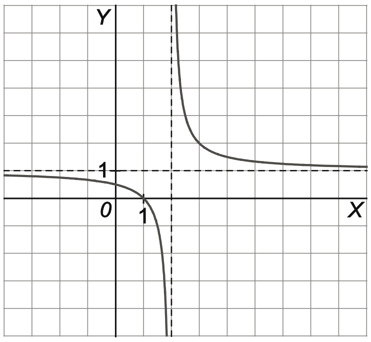


Sí, porque si se considera la función $f(x)=x^3+x-1$ se puede ver que es una función continua y que $f(0)=-7$ y $f(1)=1$.

Luego su gráfica corta al eje de abscisas entre 0 y 1.

Asíntotas

65. Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ y esboza su gráfica.



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$

La recta $x=2$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

La recta $y=1$ es una asíntota horizontal.

66. ¿Tiene asíntotas verticales la función $f(x)=\dfrac{3-x}{1+x^2}$?

No, pues su denominador no se anula nunca.

67. De una cierta función f sabemos que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$. Escribe una posible fórmula para $f(x)$.

Se considera una función racional. Como el denominador ha de anularse en $x=2$ y en $x=3$, la función puede ser de la forma $f(x)=\dfrac{?}{(x-2)(x-3)}$. El numerador se elige para que se cumplan los requisitos de los signos de $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$.

Por ejemplo, valdría $f(x)=\dfrac{2x-5}{(x-2)(x-3)}$.

68. Encuentra, sin operar, la asíntota oblicua de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x+4+\dfrac{1}{x}$

b) $f(x)=x+2+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=3x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{x+2}$

d) $f(x)=-x+1-\dfrac{3}{x-2}$

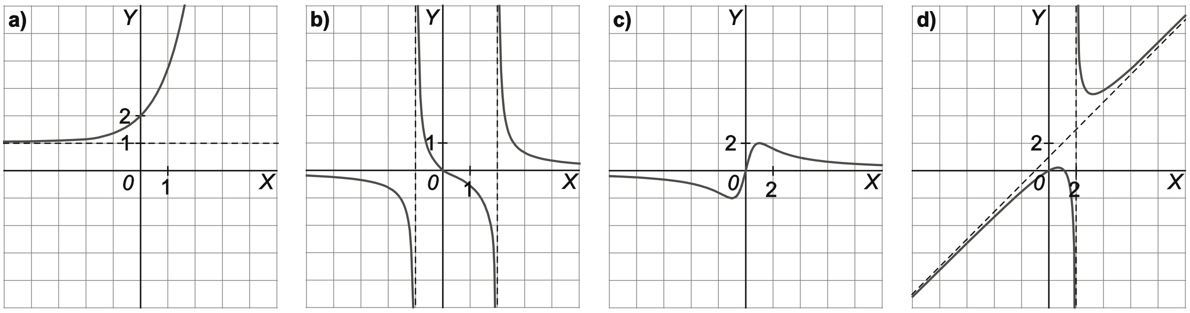
a) $y=x+4$

b) $y=x+2$

c) $y=3x-\dfrac{1}{2}$

d) $y=-x+1$

69. Di de qué tipo son las asíntotas de cada una de las funciones dadas por las siguientes gráficas, y da su ecuación si esta resulta evidente.



a) Asíntota horizontal: $y = 1$.

b) Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 2$. Asíntota horizontal: $y = 0$.

c) Asíntota horizontal: $y = 0$.

d) Asíntota vertical: $x = 2$. Asíntota oblicua: $y = x + 1$.

70. Obtén las asíntotas oblicuas de:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3-x+1}{x^2+2}$

d) $f(x) = x+3+\dfrac{1}{x}$

a) Como $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1} = x+1+\dfrac{2}{x-1}$, la asíntota oblicua es $y = x+1$.

b) Como $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x} = x-2+\dfrac{1}{x}$, la asíntota oblicua es $y = x-2$.

c) Como $f(x) = \dfrac{2x^3-x+1}{x^2+2} = 2x+\dfrac{-5x+1}{x^2+2}$, la asíntota oblicua es $y = 2x$.

d) $f(x) = x+3+\dfrac{1}{x}$, la asíntota oblicua es $y = x+3$.

71. Considera la función $f(x) = a + \dfrac{b}{x+c}$ siendo *a*, *b* y *c* números reales. Calcúlalos sabiendo que:

- **La gráfica de *f* presenta en $-\infty$ una asíntota horizontal de ecuación *y*= 2.**
- **La gráfica de *f* presenta en *x*= 1 una asíntota vertical.**
- **El punto (6,3) pertenece a la gráfica de *f*.**

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$ e *y*= 2 es una asíntota horizontal en $-\infty$, debe ser $a = 2$.

Como la gráfica de *f* presenta en *x*= 1 una asíntota vertical, el denominador debe anularse para dicho valor, luego $1+c=0$ y entonces $c=-1$.

Como el punto (6, 3) pertenece a la gráfica de *f*, $f(6) = 2+\dfrac{b}{6-1} = 3$, luego $b = 5$.

Así pues, la función es $f(x) = 2+\dfrac{5}{x-1}$.

72. Obtén las asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x)=\dfrac{(x-5)^2}{(x-1)(x-3)}$ y esboza su gráfica.

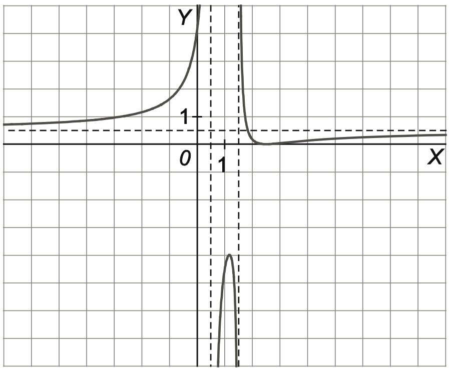
Asíntotas verticales:

$x=1$, pues $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$

$x=3$, pues $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$

Asíntota horizontal:

$y=1$, pues $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$



73. Si $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x+2}$, demuestra que $f(x)$ se puede escribir como $f(x)=2x-5+\dfrac{9}{x+2}$. ¿Tiene alguna asíntota horizontal $f(x)$? ¿Y vertical? ¿Y oblicua?

$$2x-5+\frac{9}{x+2}=\frac{(2x-5)(x+2)+9}{x+2}=\frac{2x^2-x-1}{x+2}=f(x)$$

$f(x)$ no tiene asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Tiene una asíntota vertical en $x=-2$, pues $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$

La recta $y=2x-5$ es asíntota oblicua, pues $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)-(2x-5)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{9}{x+2}=0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-(2x-5)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{9}{x+2}=0$

CUESTIONES

74. Si $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=b$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)=c$, calcula $\lim\limits_{x\to a} 2g(x)$.

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=b=c+\lim\limits_{x\to a} g(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=b-c$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to a} 2g(x)=2b-2c$.

75. Si f es una función continua definida en $\mathbb{R}$ y que admite como asíntota la recta $y=x-1$, ¿se puede asegurar que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$?

Nos dicen que $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$, así que $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \infty} f(x-1)=+\infty$, por lo que sí podemos asegurar lo que nos piden.

76. ¿Es posible que dos funciones polinómicas distintas coincidan para todos los valores de un cierto intervalo $[a, b]$?

No, pues entonces el polinomio diferencia tendría infinitas raíces (todos los números del intervalo [*a*, *b*]), con lo que ambas funciones deberían ser la misma.

77. Si la función $f+g$ es continua en $x=2$, ¿puedes concluir que tanto f como g son continuas en ese punto?

No, por ejemplo $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\le 2\\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\le 2\\ x & \text{si } x>2\end{cases}$

Ninguna de ellas es continua en $x=2$, pero $(f+g)(x)=x+1$ que sí es continua en $x=2$.

78. **Supón que f es continua en el intervalo $[1, 4]$ y que f nunca se anula en dicho intervalo. ¿Qué puedes decidir sobre los signos de $f(1)$ y de $f(4)$?**

Los signos de $f(1)$ y de $f(4)$ deben ser iguales pues, en caso contrario, al ser f continua, debería cortar al eje de abscisas en algún punto de [1, 4].

79. **¿Hay algún valor de k para el que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ 2k+1 & \text{si } x=0 \\ 3x & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$?**

Para que f sea continua en $x=0$, se debe cumplir que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, pero $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.

Por lo tanto no hay ningún valor de k que haga a f continua en $x=0$.

80. **Si $f(x)=\dfrac{g(x)}{t(x)}$, con $g(x)$ y $t(x)$ polinomios y $t(x)\neq 0$ para cualquier x real, ¿cuál es el máximo número de asíntotas que puede tener la función $y=f(x)$?**

Si $t(x)\neq 0$, f no puede tener asíntotas verticales.

Puede tener una asíntota horizontal, si grado $g(x)\leq$ grado $t(x)$o tener una asíntota oblicua si grado $g(x)=1+$ grado $t(x)$.

Así pues, f podrá tener, como máximo, una asíntota.

81. **Si f es continua en $x=2$, ¿cuál es el valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)-f(2)$?**

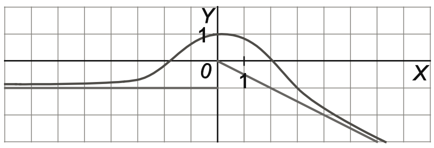
Si f es continua en $x=2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ por lo que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)-f(2)=0$.

82. **Si $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)-7)=0$ y f es continua en $x=3$, ¿puedes asegurar que la gráfica de f corta a la recta horizontal $y=7$?**

Si $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)-7)=0$ y f es continua en $x=3$, resulta que $f(3)=7$, por lo que la gráfica de f corta a la recta $y=7$ en el punto $A(3, 7)$.

83. **Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x)+1]=0$, ¿puede tener la función $y=f(x)$ dos asíntotas no verticales?**

Se afirma que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ y que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1$, por lo que f sí puede tener dos asíntotas no verticales: una oblicua en $+\infty$ y otra horizontal en $-\infty$. En cualquier caso, f no puede ser un cociente de polinomios pues en estos, las asíntotas horizontales por la izquierda lo son también por la derecha.



84. **Si la función f, definida en $\mathbb{R}$ verifica que para todo $x>0$ es $\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{1}{100}$, justifica que la curva $y=f(x)$ no tiene ninguna asíntota horizontal.**

Si f estuviera definida solo en los reales positivos, la afirmación sería verdadera, pues

$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{1}{100}\Rightarrow f(x)>\dfrac{1}{100}x$ y como $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{100}x=+\infty$, resultaría que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

Pero, como la función f está definida en $\mathbb{R}$, podría tener asíntota horizontal por la izquierda, en $-\infty$.

85. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ y $g(x)$ coincide con $f(x)$ excepto en $x=a$, ¿qué puedes decir sobre $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

Si $f(x)=g(x)$ excepto en $x=a$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$, por lo que podemos asegurar que $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$.

86. Si no existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ni $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿no existe necesariamente $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$?

Puede existir el límite de la suma, por ejemplo en las funciones $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\le a\\ 2 & \text{si } x>a\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}5 & \text{si } x\le a\\ 4 & \text{si } x>a\end{cases}$.

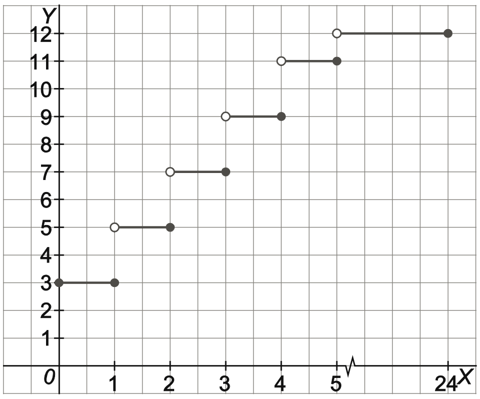
PROBLEMAS

87. En un aparcamiento se cobran 3 € por la primera hora o fracción y 2 por cada hora o fracción siguiente, hasta llegar a un máximo de 12 € por un día.

a) Dibuja una gráfica que refleje el precio de dejar el coche en ese aparcamiento, como función del tiempo que permanece allí.

b) Estudia los puntos de discontinuidad de esta función y su significado para alguien que deje su coche allí aparcado.

a)



b) La función es discontinua en $x=1, 2, 3, 4, 5$. No es aconsejable dejar el coche aparcado un número no entero de horas, hasta $x=5$, pues hay que pagar la hora completa.

88. Antes de comenzar la producción en serie, una empresa aeronáutica ha fabricado 3 aparatos para venderlos por un total de 9 millones de €, después de calcular los gastos de fabricación, realizar el estudio de mercado, etc. Una vez efectuado este trabajo, comienza la producción en serie, siendo entonces el coste de fabricación de cada avión de 0,3 millones de €.

Se representa por x el número de aviones fabricados en serie, y por $f(x)$ el precio de un avión para x aviones construidos.

a) Explica por qué $f(x)=\dfrac{0{,}3x+9}{x+3}$ para $x>0$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y explica en términos económicos el valor obtenido.

a) Los tres primeros aparatos han costado 9 millones de € y cada uno de los siguientes 0,3 millones de €, así que los $x+3$ primeros aviones costarán $(0{,}3x+9)$ millones de €, por lo que el precio de un avión para x aviones fabricados será $f(x)=\dfrac{0{,}3x+9}{x+3}$ si $x>0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0{,}3$, lo que significa que si fabrican muchísimos aviones, pueden obviar el alto precio de los tres primeros aparatos.

89. Las conclusiones de un estudio demográfico establecen que el número de habitantes de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, en los próximos años, por la siguiente función:

$$f(t) = \frac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}$$

siendo *t* el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es el tamaño actual de la población?

b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población?

a) El valor de $f(0)$, es decir, 5000 habitantes.

b) Sí, se estabilizaría en torno a los 7500 habitantes pues $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 7500$.

90. El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función

$$f(t) = \frac{18 + t^2}{(t + 3)^2},$$

donde *t* es el tiempo medido en años desde *t*= 0.

Calcula la población inicial y el tamaño de la población a largo plazo, cuando el tiempo tiende a infinito.

La población inicial nos la da el valor de $f(0) = 2$, es decir, dos millones.

A largo plazo la población tenderá a $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{18 + t^2}{(t + 3)^2} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t^2 + 18}{t^2 + 6t + 9} = 1$, es decir, un millón.

91. El rendimiento (medido de 0 a 100) de cierto producto en función del tiempo de uso (*x*, en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = 8{,}5 + \frac{3x}{1 + x^2}, \quad x \geq 0$$

Por mucho que pase el tiempo, ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al que el producto tenía cuando era nuevo?

El rendimiento cuando el producto es nuevo viene dado por $f(0) = 8{,}5$.

Si $x > 0$, $f(x) = 8{,}5 + \frac{3x}{1 + x^2} > 8{,}5$. Así pues, por mucho que pase el tiempo, el rendimiento nunca será inferior a cuando era nuevo.

92. Se ha investigado el tiempo *T*, en minutos, que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento *x*, en días, obteniéndose:

$$T(x)=\begin{cases}\dfrac{300}{x+30} & \text{si } 0\le x\le 30\\ \dfrac{1125}{(x-15)(x-5)}+2 & \text{si } x>30\end{cases}$$

a) Justifica que la función *T* es continua en todo su dominio.

b) ¿Se puede afirmar que cuanto más se entrene un deportista menor será el tiempo en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?

c) Aunque un deportista se entrene suficientemente, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 3 minutos? ¿Y en menos de 2 minutos?

a) *T* es continua en [0, 30) pues el denominador no se anula en ese intervalo. Por la misma razón, lo es si $x>30$ (nótese que su denominador solo se anula si $x=15$ o si $x=5$).

Veamos si es continua en $x=30$:

$\lim\limits_{x\to 30^-} T(x)=5$; $\lim\limits_{x\to 30^+} T(x)=\dfrac{1125}{15\cdot 25}+2=5$; $T(30)=5$, así que *T* es continua en todo su dominio.

b) Si $x<30$, cuanto más tiempo entrene, mayor será el denominador y, por tanto, menor será el tiempo. Análogamente si $x>30$. Finalmente, como *T* es continua en $x=30$, podemos asegurar lo pedido.

Como la inecuación $\dfrac{300}{x+30}>10$, es decir, $300>300+10x$ no tiene solución en [0, 30] y la inecuación $\dfrac{1125}{(x-15)(x-5)}+2>10$, es decir, $1125>8(x-15)(x-5)$, $x^2-20x+65{,}625<0$ tampoco tiene solución si $x>30$ (el discriminante es negativo), resulta que ningún deportista tardaría más de 10 minutos en realizar dicha prueba.

c) En menos de 3 minutos sí. Basta con que $\dfrac{1125}{(x-15)(x-25)}<1$ y eso ocurre, por ejemplo, en $x=60$ días.

En menos de 2 minutos no, pues *T* es estrictamente decreciente y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$.

93. La temperatura (en grados centígrados) de un trozo de metal sumergido en una solución durante 9 horas viene dada por $T(t)=10+\dfrac{20}{1+t}-5t$, $0\le t\le 9$. Halla:

a) La temperatura inicial del metal.

b) ¿A cuánto tiende la temperatura del metal al final del proceso?

a) $T(0)=30$ºC.

b) $\lim\limits_{t\to 9} T(t)=\lim\limits_{t\to 9}\left(10+\dfrac{20}{1+t}-5t\right)=-33\ ^{\circ}\text{C}$, que obviamente es el valor de $T(9)$.

94. Las pérdidas o ganancias de una empresa, expresadas en centenas de miles de €cuando han transcurrido *t* años, vienen reflejadas por la función $f(t)=\dfrac{2t-4}{t+2}$.

a) ¿Gana dinero la empresa en los dos primeros años?

b) ¿Cuánto gana el 5.º año?

c) ¿Existe límite para las ganancias? En caso afirmativo, ¿cuál es ese límite?

a) No, pues si $t \le 2$, $f(t) \le 0$.

b) $f(5) - f(4) = \dfrac{10-4}{7} - \dfrac{8-4}{6} = \dfrac{6}{7} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{21} \approx 0{,}19$ x 100 000 €, es decir, 19000 €.

c) Sí, pues $\dfrac{2t-4}{t+2} = 2 - \dfrac{8}{t+2}$, luego dicha empresa nunca ganaría más de 200 000 €.

95. El precio en € de *x* litros de aceite comprados en una almazara viene dado por la función:

$$P(x)=\begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ \sqrt{ax^2+2000} & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

a) Determina el valor de la constante *a* para que la función *P*(*x*) sea continua.

b) Si se comprasen muchísimos litros de aceite, ¿a cuánto saldría aproximadamente el precio de cada litro?

a) *P* es continua en $\mathbb{R}$ salvo, si acaso, en $x = 20$. Estudiemos qué ocurre en $x = 20$.

$\lim\limits_{x\to 20^-} P(x) = 60$; $\lim\limits_{x\to 20^+} P(x) = \sqrt{400a+2000}$; $P(20) = 60$.

Por tanto, para que sea continua en $x = 20$, debe ser $60 = \sqrt{400a+2000} \Rightarrow 3600 = 400a + 2000 \Rightarrow a = 4$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+2000}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2+2000}{x^2}} = 2$ €.

ENTORNO MATEMÁTICO

Spyrador 007

Juan y Javier están jugando al tenis, pero, al poco de empezar, Juan se da cuenta de que Javier no está concentrado: "¡Eh! ¿Qué te pasa, Javi? Estás que no das una." En esto, Javier se sienta en el suelo y con la cara descompuesta le dice a Juan que está muy preocupado por el trabajo. Juan le anima y comenta "Venga, vamos a cambiarnos y a tomar un refresco y me cuentas el problema". En efecto, a la media hora, están sentados en una terraza y Javier le explica a Juan sus preocupaciones:

"El futuro de la empresa depende de un nuevo producto –el Spyrador 007–, un potente aspirador robótico de pequeño tamaño y silencioso como un espía. Mi jefa me ha pedido que evalúe cuántas unidades podemos fabricar para asegurar una ganancia suficiente sin asumir riesgos en el caso de que nos falle algún cliente. Llevo dándole vueltas al problema un par de semanas y no consigo encontrar la solución."

Juan se echa a reír diciendo: "No te preocupes, ¿paraqué tienes un amigo matemático como yo que se pasa el tiempo haciendo números, cuentas y ecuaciones? Dame todos los datos y en poco tiempo seguro que te doy una solución". Dicho y hecho, a los cuatro días, Juan le envía a Javier el siguiente correo:

"Con los datos que me diste, he concluido que las ganancias totales de tu empresa en función del número de aspiradores vendidos, *x*, se puede aproximar por la función:

$$G(x)=\begin{cases} 10x(x-50) & \text{si} \quad 0\le x\le 50 \\ 50\sqrt{x^2+36x-4300} & \text{si} \quad x>50 \end{cases}$$

Ayuda a Javier a analizar la propuesta de su amigo contestando a estas preguntas:

a) ¿Hay una diferencia esencial entre fabricar 49 unidades y fabricar 51 unidades?

b) Justifica que la función ganancia total es continua.

c) ¿Cuántos aspiradores hay que fabricar para obtener la menor ganancia?

d) Vendiendo muchas unidades, ¿se puede llegar a ganar 60 € por unidad?

e) ¿Cuál es la ganancia máxima por unidad que puede obtener?

a) $G(49)=10\cdot 49(49-50)=-490$; $G(51)=50\sqrt{51^2+36\cdot 51-4300}\simeq 585$.

Eso quiere decir que si se venden 49 unidades se pierde dinero pero si se venden 51 unidades se gana.

b) $G(x)$es continua en $x=50$, pues $\lim\limits_{x\to 50^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 50^-} 10x(x-50)=10\cdot 50(50-50)=0$

$\lim\limits_{x\to 50^+} G(x)=\lim\limits_{x\to 50^+} 50\sqrt{x^2+36x-4300}=50\sqrt{50^2+36\cdot 50-4300}=0$ y $G(50)=10\cdot 50(50-50)=0$

Además, en el resto de los valores la función es continua.

c) La primera función, es negativa en el intervalo (0, 50) con un mínimo en $x=25$, $G(25)=-6250$.

La segunda función siempre positiva, para valores mayores de 50.

Por tanto, la menor ganancia se da cuando se fabrican 25 aspiradores, que es cuando más dinero se pierde.

d) En el intervalo (0, 50) la función G es negativa. A partir de $x=50$, la función es positiva y creciente pero:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{50\sqrt{x^2+36x-4300}}{x}=\lim_{x\to+\infty}50\sqrt{1+\frac{36}{x}-4300x^2}=50$$

Así pues, nunca se podrá ganar más de 50 € por unidad.

e) La ganancia máxima por unidad será de 50 € aproximadamente, pues, como comentamos en el apartado anterior nunca se alcanza.

Matecología

Susana tiene una empresa llamada "Soluciones Matecológicas". Su trabajo consiste en ofrecer planes de actuación a las empresas para reducir el impacto ambiental que produce su actividad. Ahora acaba de entregar un estudio a una central térmica de carbón para reducir la polución que esta genera. Está contenta porque cree que ha dado con una buena solución. La conclusión principal del informe es la siguiente:

"Reducir el vertido de una central térmica que quema carbón es una tarea costosa si nos proponemos reducir la polución en porcentajes altos y con precios desorbitados si nos proponemos reducirla casi totalmente. Naturalmente reducir la polución en pequeños porcentajes tiene un coste muchísimo menor. Por eso, si queremos construir una función que ligue el porcentaje de reducción con el coste que nos supone, dicha función debe contemplar las características anteriores y, por tanto, no será una función lineal, ni siquiera polinómica, sino algo más sofisticada. Analizando los datos referidos a sus instalaciones hemos estimado que el coste en €, de reducir un *x* % el vertido viene dado por la función:

$$C(x) = \frac{10\,000x}{100 - x}, \quad \text{con } 0 \le x < 100$$

Analiza la propuesta de Susana, contestando estas preguntas

a) Calcula el coste de reducción de un 20 % del vertido.

b) Calcula que porcentaje de reducción se logrará si se invierten10 000 €.

c) Calcula el coste de reducir en un 80 % el vertido.

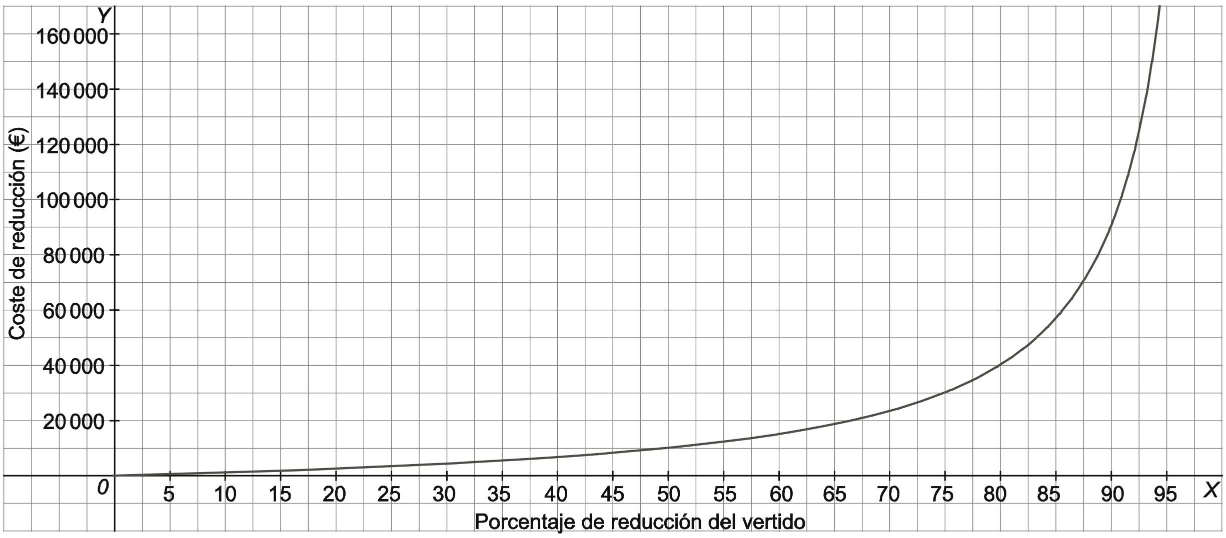
d) Esboza la gráfica de la función $C(x)$ en todo su dominio.

a) $C(20) = \frac{10\,000 \cdot 20}{100 - 20} = \frac{200\,000}{80} = 2500$ €.

b) Resolvemos la ecuación $\frac{10\,000x}{100 - x} = 10\,000$; $x = 50$. Es decir, se reduciría en un 50 %.

c) $C(80) = \frac{10\,000 \cdot 80}{100 - 80} = \frac{800\,000}{20} = 40\,000$ €.

d)



AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

Las cuatro primeras cuestiones están referidas a la función *f*, definida para todo $x > 4$, por $f(x) = -2x + 1 + \frac{8}{x-4}$. Hay que responder justificadamente si son verdaderas o falsas las afirmaciones que se hacen:

1. Otra expresión para *f* es $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 12}{4-x}$.

Manipulando la expresión dada para $f(x)$, se llega a que $f(x) = -2x + 1 + \frac{8}{x-4} = \frac{(-2x+1)(x-4)+8}{x-4} = \frac{2x^2-9x-4}{4-x}$ que no coincide con el enunciado anterior, por lo que 1 es falsa.

2. La recta $x = 4$ es asíntota vertical de la gráfica de *f*.

Verdadera, pues, por ejemplo, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Falsa, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-2x + 1 + \frac{8}{x-4}\right) = -\infty$

4. La recta de ecuación $y = -2x + 1$ es una asíntota oblicua de la gráfica de *f*.

Verdadera, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (-2x+1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{8}{x-4} = 0$

5. Calcula el valor del límite: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x+1)}{x-2} = -2$$

6. Calcula . $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x - 2x^3}{6x^3 - 5x^2 + 2x - 1}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x - 2x^3}{6x^3 - 5x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - 2}{6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

7. Determina el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{(x-1)^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - |x-1|\right)$. Para valores grandes de x, (en concreto, $x > 1$), $|x - 1| = x - 1$, así que el límite pedido es $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - (x-1)\right) = 1$.

8. Halla el valor de *k* que hace que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases} x^2-kx, & \text{si } x\le -2 \\ 6kx-3, & \text{si } x>-2 \end{cases}$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-kx & \text{si} \quad x\le -2 \\ 6kx-3 & \text{si} \quad x>-2 \end{cases}$$

f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ sea cual fuere *k*.

Para que sea continua en *x*=–2, debe ocurrir que $f(-2)=\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$, es decir:

$4+2k=-12k-3$, $k=\dfrac{-1}{2}$. Así pues, si $k=\dfrac{-1}{2}$, la función será continua en todo $\mathbb{R}$ **.**

9. Si la recta $y=2x+1$ es una asíntota oblicua por la derecha de la función racional $y=f(x)$, calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+3}$.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]=0$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-(2x+1)}{x}=0$, es decir, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ y al ser *f* un cociente de polinomios, el grado del numerador será una unidad mayor que el del denominador. Así pues, $\dfrac{f(x)}{x^2+3}$ es un cociente de polinomios con el grado del denominador mayor que el del numerador y, por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+3}=0$.

10. Escribe una función racional definida en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ y tal que su gráfica admita como asíntotas las rectas $x=1$ e $y=2$.

Por ejemplo, $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

Relaciona y Contesta

Elige la única respuesta correcta en cada uno de los siguientes apartados

1. Si $f(x)=x^2+x-4$, entonces:

A. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4$ **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x-4)=+\infty$. La respuesta correcta es la B.

2. La curva dada por $f(x)=\dfrac{3}{x}+4$ admite como asíntota la recta de ecuación:

A. $y=\dfrac{3}{x}$ **B.** $y=4$ **C.** $y=0$ **D.** $y=3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x}+4\right)=4$, por lo que la recta $y=4$ es asíntota. La respuesta correcta es la B.

3. En una de estas cuatro funciones, la recta *x*=1 no es asíntota vertical. ¿En cuál?

A. $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ **B.** $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x\le 1\end{cases}$ **C.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **D.** $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=-1$.

Por tanto, $x=1$ no es asíntota vertical. La respuesta correcta es la C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. Si $f(x)=\frac{1}{x}-2x+1$, la gráfica de *f* verifica:

A. Tiene dos asíntotas.

B. Tiene como asíntota vertical la recta $x=0$.

C. Tiene una asíntota oblicua.

D. Tiene como asíntota horizontal la recta $y=0$.

$f(x)=\frac{1}{x}-2x+1$ tiene dos asíntotas: La recta $x = 0$, pues, por ejemplo, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ y la recta $y = -2x + 1$, pues $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. Por tanto, A es verdadero.

B es verdadero como se acaba de de ver y lo mismo C.

D es falso, pues $f(x)=\frac{1-2x^2+x}{x}$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

5. Si $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ entonces:

A. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

B. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

C. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

D. $\lim_{x\to-1} f(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ luego A es verdadero.

$\lim_{x\to 0^+} x^2=0$ y $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$. B es verdadero.

$\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$. C es falso.

$\lim_{x\to-1} x^2=1$ y $\lim_{x\to-1}\frac{1}{x}=-1$. D es verdadero.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Sea $f(x)=x\cdot g(x)$ y sean estas dos afirmaciones:

1. La gráfica de *g* corta a la recta $y=1$.
2. La gráfica de *f* corta a la recta $y=x$.
Entonces:

A. $1\Rightarrow 2$ pero $2\not\Rightarrow 1$

B. $2\Rightarrow 1$ pero $1\not\Rightarrow 2$

C. $1\Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

$1\Rightarrow 2$, pues si existe *a* tal que $g(a)=1$, entonces $f(a)=ag(a)=a$, por lo que la gráfica de *f* corta a la recta $y=x$, al menos en el punto de abscisa *a*.

$2\not\Rightarrow 1$, pues el hecho de que exista *b* tal que $f(b)=b$, es decir, $bg(b)=b$ puede ocurrir siendo $b=0$ y $g(b)\neq 1$. Por ejemplo, si $g(x)=-x^2$ y $f(x)=x(-x^2)=-x^3$, la gráfica de *f* corta a la recta $y=x$ (en el punto (0, 0)), pero la gráfica de *g* nunca corta a la recta $y=1$.

Así que la respuesta correcta es la A.

Razona cuál de los siguientes datos es innecesario

7. Para saber si la ecuación $f(x)=1$ tiene o no solución en el intervalo $[-2, 2]$ se dan los siguientes datos:

1. $D(f)=\mathbb{R}$ **2.** ***f*** **es continua en $[-2, 2]$** **3.** **$f(-2)$ es negativo** **4.** **$2<f(2)$**

Entonces, puede eliminarse, por innecesario:
A. El dato 1
B. El dato 2
C. El dato 3
D. El dato 4

Sobra el dato 1. $D(f)=\mathbb{R}$, pues, basta que el dominio de *f* contenga al intervalo [–2, 2] y eso está asegurado por el dato 2.

8 Derivadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Para $f(x) = x^2 - 1$ y con ayuda de la calculadora, halla:

a) $TVM\,f\,[1, 100]$ **c)** $TVM\,f\,[1, 2]$ **e)** $TVM\,f\,[1; 1{,}01]$

b) $TVM\,f\,[1, 10]$ **d)** $TVM\,f\,[1; 1{,}1]$ **f)** $TVM\,f\,[1;1{,}001]$

¿A qué valor se acercará $TVM\,f\,[1; 1{,}0001]$? ¿Cuál será el valor de $TVI\,f\,(1)$?

a) $TVM\,f\left[1{,}100\right] = \dfrac{f(100)-f(1)}{100-1} = \dfrac{9999-0}{99} = 101$

b) $TVM\,f\left[1{,}10\right] = \dfrac{f(10)-f(1)}{10-1} = \dfrac{99-0}{9} = 11$

c) $TVM\,f\left[1{,}2\right] = \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = \dfrac{3-0}{1} = 3$

d) $TVM\,f\left[1;1{,}1\right] = \dfrac{f(1{,}1)-f(1)}{1{,}1-1} = \dfrac{0{,}21-0}{0{,}1} = 2{,}1$

e) $TVM\,f\left[1;1{,}01\right] = \dfrac{f(1{,}01)-f(1)}{1{,}01-1} = \dfrac{0{,}0201-0}{0{,}01} = 2{,}01$

f) $TVM\,f\left[1;1{,}001\right] = \dfrac{f(1{,}001)-f(1)}{1{,}001-1} = \dfrac{0{,}020\,001-0}{0{,}001} = 2{,}001$

Es claro que $TVM\,f\left[1;\,1{,}00001\right]$ se acerca a 2:

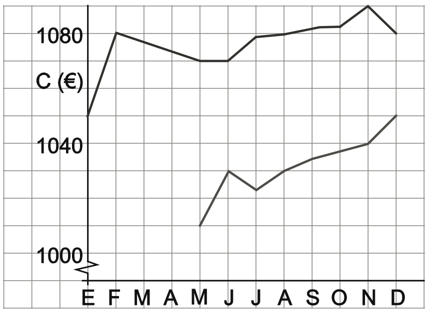
$$TVM\,f\left[1;1{,}00001\right] = \frac{f(1{,}00001)-f(1)}{1{,}00001-1} = \frac{0{,}000\,020\,0001-0}{0{,}00001} = 2{,}000\,01 \to 2$$

$$TVI\ f(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2) = 2$$

4. La gráfica muestra la evolución de dos inversiones en dos fondos diferentes y en distintos momentos.

a) ¿Cuál es la *TVM* de cada uno de los capitales desde el inicio? ¿Y en los últimos 4 meses? ¿Y en el último mes?

b) ¿Puedes decidir qué fondo es más rentable?



Llamando t a los meses transcurridos desde el comienzo del estudio, f a la función superior y ga la función inferior:

a) Desde el inicio:

$$TVM\,f\left[0{,}11\right] = \frac{f(11)-f(0)}{11-0} = \frac{1080-1050}{11} = 2{,}73\ ;\ TVM\,g\left[4{,}11\right] = \frac{g(11)-g(4)}{11-4} = \frac{1050-1010}{7} = 5{,}71$$

En los últimos cuatro meses:

$$TVM\,f\left[7{,}11\right] = \frac{f(11)-f(7)}{11-7} = \frac{1080-1080}{4} = 0\ ;\ TVM\,g\left[7{,}11\right] = \frac{g(11)-g(7)}{11-7} = \frac{1050-1030}{4} = 5$$

En el último mes:

$$TVM\,f\left[10{,}11\right] = \frac{f(11)-f(10)}{11-10} = \frac{1080-1090}{1} = -10\ ;\ TVM\,g\left[10{,}11\right] = \frac{g(11)-g(10)}{11-10} = \frac{1050-1040}{1} = 10$$

b) Es más rentable el fondo de la gráfica inferior.

5 y 6. Ejercicios resueltos.

7. Calcula las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = x^2$, en $x = -2$

b) $f(x) = 3x^3 + 4$,en $x = 4$

c) $f(x) = x^3 + x^2$, en $x = 1$

d) $f(x) = x^2 + 5x - 3$, en $x = -1$

a) $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(h-4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h-4) = -4$

b) $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(4+h)^3 + 4 - (3\cdot 4^3 + 4)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(64 + 48h + 12h^2 + h^3) + 4 - 196}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h(48 + 12h + h^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 3(48 + 12h + h^2) = 3\cdot 48 = 144$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^3 + (1+h)^2 - (1^3 + 1^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 + 3h + 3h^2 + h^3) + (1 + 2h + h^2) - 2}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(5 + 4h + h^2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (5 + 4h + h^2) = 5$

d) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-1+h)^2 + 5(-1+h) - 3 - (-7)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 - 2h + h^2) - 5 + 5h + 4}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(3+h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (3+h) = 3$

8. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes curvas en los puntos indicados.

a) $f(x) = x^2 + x - 2$, en $x = 1$

b) $f(x) = 2x^2 - x$, en $x = 4$

c) $f(x) = x^3$, en $x = 2$

d) $f(x) = x^3 + 2x$, en $x = -1$

Como la ecuación de la recta tangente en el punto (a, $f(a)$) es $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, en cada caso se debe calcular $f(a)$ y $f'(a)$.

a) $f(1) = 0$ y $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 + (1+h) - 2 - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1 + 2h + h^2) + (1+h) - 2}{h} = 3$

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - 0 = 3(x - 1)$. Simplificando: $y = 3x - 3$.

b) $f(4) = 28$ y $f'(4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(4+h)^2 - (4+h) - 28}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(15+2h)}{h} = 15$

La ecuación de la recta tangente en $x = 4$ es $y - 28 = 15(x - 4)$. Simplificando: $y = 15x - 32$.

c) $f(2) = 8$ y $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(8 + 12h + 6h^2 + h^3) - 8}{h} = 12$

La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y - 8 = 12(x - 2)$. Simplificando: $y = 12x - 16$.

d) $f(-1) = -3$ y $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-1+h)^3 + 2(-1+h) - (-3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(5 - 3h + h^2)}{h} = 5$

La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y + 3 = 5(x + 1)$. Simplificando: $y = 5x + 2$.

9. Copia y completa la siguiente tabla para la función $f(x) = x^3$ en $a = 1$.

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$					

A partir de los resultados de la tabla, ¿cuál podría ser el valor de la derivada de la función *f* en el punto de abscisa $x = 1$?

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$	7	4,75	3,31	3,0301	3,003

Observando los datos de la tabla se podría deducir que $f'(-1) = 3$.

10. Ejercicio resuelto.

11. Aplicando la definición de derivada, obtén la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = (x-1)^2$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x}$

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h-1)^2-(x-1)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+1+2xh-2x-2h-x^2+2x-1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh-2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x-2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x-2) = 2x-2$$

b) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$$

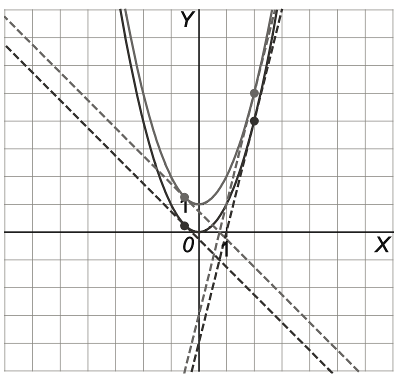
c) $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

12. Obtén las funciones derivadas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2+1$. Dibuja las gráficas de *f* y *g*, y observa cómo son las tangentes en puntos de igual abscisa. ¿Confirma tu cálculo anterior dicha observación?

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh}{h} = 2x$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+1-x^2-1}{h} = 2x$$



Las rectas tangentes en puntos de igual abscisa son paralelas, ya que las pendientes en ambos casos son $2x$.

13. **a)** Deduce la derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

b) ¿Hay algún punto en la curva $y=f(x)$ en el que la tangente sea horizontal? ¿Y en el que la tangente tenga pendiente positiva?

a) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x+h-1}-\dfrac{1}{x-1}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x-1-(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$

b) Como la derivada es siempre negativa, no hay ningún punto en que la recta tangente sea horizontal o de pendiente positiva.

14. **Halla el punto de la gráfica de la función $f(x)=x^2-5$ en el que la tangente es paralela a la recta $y=4x+3$.**

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-5-(x^2-5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2}{h}=2x$

Para que la recta tangente sea paralela a $y=4x+3$ debe ser $f'(x)=4$, es decir, $2x=4$, $x=2$.

El punto de la gráfica es $P(2, f(2))=P(2,-1)$ y la ecuación de la recta tangente es $y+1=4(x-2)$.

15. **Calcula las derivadas sucesivas de la función $f(x)=x^3$ hasta que obtengas la función idénticamente nula.**

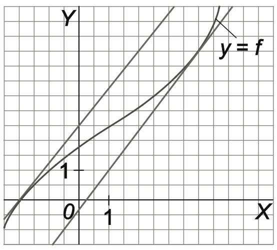
$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=3x^2$

$f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)^2-3x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(6x+3h)}{h}=6x$

$f'''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f''(x+h)-f''(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6(x+h)-6x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6h}{h}=6$

Al ser $f'''(x)$ constante, la cuarta derivada será nula: $f^{iv)}(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'''(x+h)-f'''(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{6-6}{h}=0$

16. **Observa la siguiente gráfica. Teniendo en cuenta que las rectas trazadas son tangentes a la función $f(x)$, halla los valores de la derivada de f en los puntos de abscisas $x=-2$ y $x=4$.**



$f'(-2)=\dfrac{2,5}{2}=1,25$ $\qquad f'(4)=\dfrac{4}{3}=1,\widehat{3}$

17. **Ejercicio interactivo.**

18 y 19. **Ejercicios resueltos.**

20. **Calcula las derivadas de las funciones siguientes:**

a) $f(x)=x^3$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ **c)** $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}$

a) $f'(x)=3x^2$

b) $f(x)=x^{-2}\Rightarrow f'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\dfrac{2}{x^3}$

c) $f(x)=x^{\frac{3}{4}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}=\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

d) $f(x)=x^{-\frac{3}{2}}\to f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

21. Calcula la pendiente de la tangente a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el punto de abscisa 8.

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 8$ es $m = f'(8)$. Se calcula la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ y su valor en $x = 8$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$ es la pendiente pedida.

22. Calcula la pendiente de la tangente a $f(x) = e^x$ en el punto de corte de esta con el eje de ordenadas.

El punto de corte de $f(x) = e^x$ con el eje de ordenadas es $P(0, e^0) = P(0, 1)$. La pendiente de la tangente en dicho punto es $f'(0)$, por lo que: $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$.

23. ¿Cómo son las rectas tangentes a las curvas $f(x) = \ln x$ en $P(1, 0)$ y $g(x) = \text{sen } x$ en $Q(0, 0)$?

Se calcula el valor de la derivada correspondiente en sendas abscisas:

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(x) = \text{sen } x \Rightarrow g'(x) = \cos x \Rightarrow g'(0) = \cos 0 = 1$$

Las tangentes tienen la misma pendiente y, por tanto, son paralelas.

24. ¿En qué puntos de la gráfica de $f(x) = x^t$, con t un número positivo e impar, la recta tangente a la gráfica es decreciente, es decir, tiene pendiente negativa?

Su derivada es $f'(x) = tx^{t-1}$ y, como t es impar, t – 1 es par, por lo que x^{t-1} es no negativo. Por tanto la pendiente nunca será negativa.

25. Ejercicio resuelto.

26. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^4 \cdot x^{-2}$ **c)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$ **e)** $f(x) = x\,\text{tg}\,x$

b) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$ **d)** $f(x) = (\cos x)^{\frac{3}{2}}$ **f)** $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

a) $f(x) = x^4 \cdot x^{-2} = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

d) $f(x) = (\cos x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}(\cos x)^{\frac{3}{2}-1}(-\text{sen } x) = -\frac{3}{2}\text{sen } x\sqrt{\cos x}$

b) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

e) $f(x) = x\,\text{tg}\,x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \text{tg}\,x + x(1 + \text{tg}^2 x) = \text{tg}\,x + x + x\text{tg}^2 x$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

f) $f(x) = \ln(x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}2x = \frac{2x}{x^2 - 1}$

27. Halla las siguientes derivadas.

a) $f(x) = \text{sen } x + \frac{1}{\cos x}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

a) $f(x) = \text{sen } x + (\cos x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = \cos x - (\cos x)'(\cos x)^{-2} = \cos x + \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}$

b) $f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

28. Actividad interactiva.

29 y 30. Ejercicios resueltos.

31. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ **b)** $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ **c)** $f(x) = x(x-2)$ **d)** $f(x) = (x-1)^2$

a) Como $f'(x) = 2x - 6 > 0$ si $x > 3$, la función es creciente en $(3, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 3)$.

b) Como $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ es una parábola cóncava hacia arriba que corta al eje de abscisas en $x = 1$ y $x = 3$, la función es decreciente en (1, 3) y creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

c) Como $f'(x) = 2x - 2 > 0$ si $x > 1$, la función es creciente en $(1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 1)$.

d) Como $f'(x) = 2(x-1) > 0$ si $x > 1$, la función es creciente en $(1, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 1)$.

32. La curva de ecuación $y = x^2 + bx + c$ pasa por el punto $P(-2, 1)$ y alcanza un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$. Halla los números b y c.

Planteamos un sistema de ecuaciones:
Como la curva para por $P(-2, 1)$ tenemos que $1 = 4 - 2b + c$.
Y como la derivada $f'(x) = 2x + b$ se anula en $x = -3$ tenemos que $2(-3) + b = 0$, luego $b = 6$ y $c = 9$.
La ecuación de la curva es $y = x^2 + 6x + 9$.

33. Calcula el valor máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x) = 3x^2 - x$ en $[-3, 5]$ **b)** $f(x) = (x-1)(x-2)$ en $[0, 3]$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 5]$ **d)** $f(x) = \sqrt{x}$ en $[4, 9]$

a) $f'(x) = 6x - 1 = 0$ si $x = \dfrac{1}{6}$. $f(-3) = 30$, $f\left(\dfrac{1}{6}\right) = -\dfrac{1}{12}$, $f(5) = 70$. El valor mínimo es $-\dfrac{1}{12}$ y el máximo es 70.

b) $f'(x) = 2x - 3 = 0$ si $x = \dfrac{3}{2}$. $f(0) = 2$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$, $f(3) = 2$. El valor mínimo es $-\dfrac{1}{4}$ y el máximo es 2.

c) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ es siempre negativa y, por tanto, la función es decreciente. En [1, 5], el máximo lo alcanzará en $x = 1$ y el mínimo en $x = 5$. Así pues, el valor máximo es $f(1) = 1$ y el mínimo $f(5) = \dfrac{1}{5}$.

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ es siempre positiva y, por tanto, la función es creciente. En [4, 9] el valor mínimo es $f(4) = 2$ y el máximo $f(9) = 3$.

34. Halla el valor de a para que el mínimo de la función $f(x) = x^2 + 2x + a$ sea igual a 8.

$f'(x) = 2x + 2 = 0$ si $x = -1$, por lo que el vértice de la parábola está en el punto de abscisa $x = -1$.

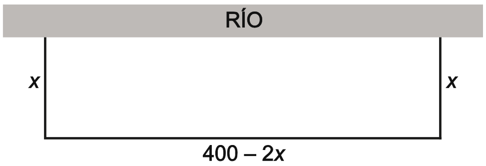
Se pide $f(-1) = 8$, luego $1 - 2 + a = 8$, y se obtiene que $a = 9$.

35. Ejercicio resuelto.

36. Un agente comercial cobra por la venta de un cierto producto una comisión dada por: $C(x) = 100 + \frac{x}{100} - \frac{x^2}{1000}$,donde x representa la cantidad en miles de € de la venta efectuada. Determina la cantidad que habrá de vender para que la comisión sea máxima.

$C'(x) = \frac{1}{100} - \frac{x}{500} = \frac{5-x}{500} = 0$ si $x = 5$. Como la parábola es cóncava hacia abajo, en $x = 5$ hay un máximo. Debe vender 5000 €.

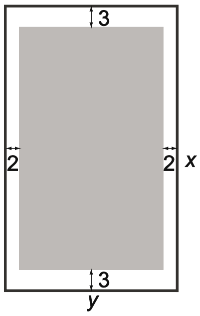
37. Eduardo dispone de 400 m de alambre con los que quiere vallar un campo rectangular aprovechando que un río hace ya de valla en un lado. ¿Cómo debe hacerlo para cercar la máxima superficie?



Si los lados perpendiculares al río miden x metros, el lado paralelo al río debe medir $400 - 2x$ y el área del rectángulo será $A(x) = x(400 - 2x)$. La parábola alcanza el máximo cuando $x = 100$ y, por tanto, abarcará una superficie de 20 000 m^2.

Los lados deben medir: 100 m los perpendiculares al río y 200 m el otro.

38. Se quiere escribir un texto de 81 cm^{2}en una hoja. Si debe haber 2 cm de margen en cada lateral y 3 cm arriba y abajo. ¿cuáles son las dimensiones de la hoja de menor área?



Se llama x a la altura la hoja e y al ancho (ambas medidas en centímetros)

Se pide minimizar el área, es decir xy.

La relación entre x e y viene dada por $(x - 6)\cdot\ (y - 4) = 81$.

De la expresión anterior se despeja y: $y - 4 = \frac{81}{x-6} \to y = \frac{81}{x-6} + 4$.

La función a minimizar es: $f(x) = xy = x\left(\frac{81}{x-6} + 4\right) = \frac{81x}{x-6} + 4x = \frac{4x^2 + 57x}{x-6}$

Y su derivada es: $f'(x) = \frac{(8x+57)(x-6) - (4x^2+57x)}{(x-6)^2} = \frac{4x^2 - 48x - 342}{(x-6)^2}$.

Igualando la derivada a cero se obtiene que $4x^2 - 48x - 342 = 0 \Rightarrow x = 6 \pm \frac{9}{2}\sqrt{6}$ **.**

Se rechaza la solución negativa y se obtienen que para que la superficie de la hoja sea mínima la altura debe medir $x \simeq 17{,}02$ cm y el ancho $y \simeq \frac{81}{17{,}02-6} + 4 \simeq 11{,}35$ cm. El área de la hoja será de 193,18 cm^2.

39. El coste, en €, de fabricar x televisores es $D(x) = 200x + x^2$, con $0 \le x \le 80$ y cada televisor se vende a 300 €.

a) ¿Qué función da los beneficios de la venta de x televisores.

b) ¿Cuándo se obtiene el máximo beneficio y cuál sería este?

a) Si fabricamos x televisores ingresaremos $300x$ € y los costes serán de $200x + x^2$ €, así pues, la función que nos da los beneficios en función del número de televisores fabricados y vendidos es:

$B(x) = \text{ingresos} - \text{costes} = 300x - \left(200x + x^2\right) = 100x - x^2$

b) $B'(x) = 100 - 2x$, por lo que la derivada de la función se anula en $x = 50$. Luego se obtendrán máximos beneficios fabricando 50 televisores y serán de 2500 €.

40. Actividad interactiva.

41 a 47. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Tasa de variación

48. En cada caso, calcula la tasa de variación media en el intervalo dado.

a) $f(x) = 3x^2 + x$ en [–2, 4]

b) $f(x) = 5$ en [–500, 317]

c) $f(x) = 4x^3 - 5$ en [–3, 0]

d) $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + x$ en [1, 5]

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ en [8, 12]

f) $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ en [0, 6]

g) $f(x) = |x^3 - 4|$ en [–5, 5]

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 2}$ en [–1, 1]

a) $TVM\,f\left[-2,4\right] = \dfrac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \dfrac{52 - 10}{6} = \dfrac{42}{6} = 7$

b) $TVM\,f\left[-500,317\right] = \dfrac{f(317) - f(-500)}{317 - (-500)} = \dfrac{5 - 5}{317 - (-500)} = \dfrac{0}{817} = 0$

c) $TVM\,f\left[-3,0\right] = \dfrac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \dfrac{(4 \cdot 0^3 - 5) - \left[4(-3)^3 - 5\right]}{3} = \dfrac{(-5) - (-113)}{3} = 36$

d) $TVM\,f\left[1,5\right] = \dfrac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \dfrac{(2 \cdot 5^4 - 6 \cdot 5^3 + 5) - (2 \cdot 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 1)}{4} = \dfrac{505 - (-3)}{4} = 127$

e) $TVM\,f\left[8,12\right] = \dfrac{f(12) - f(8)}{12 - 8} = \dfrac{\sqrt{12^2 - 4} - \sqrt{8^2 - 1}}{4} = \dfrac{\sqrt{140} - \sqrt{60}}{4} = \dfrac{2\sqrt{35} - 2\sqrt{15}}{4} = \dfrac{\sqrt{35} - \sqrt{15}}{2} \simeq 1{,}02$

f) $TVM\,f\left[0,6\right] = \dfrac{f(6) - f(0)}{6 - 0} = \dfrac{\dfrac{6}{6+2} - \dfrac{0}{0+2}}{6} = \dfrac{\dfrac{3}{4} - 0}{6} = \dfrac{1}{8}$

g) $TVM\,f\left[-5,5\right] = \dfrac{f(5) - f(-5)}{5 - (-5)} = \dfrac{|5^3 - 4| - |(-5)^3 - 4|}{10} = \dfrac{121 - 129}{10} = -\dfrac{4}{5}$

h) $TVM\,f\left[-1,1\right] = \dfrac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{1}}{1^2 + 2} - \dfrac{\sqrt[3]{-1}}{(-1)^2 + 2}}{1 - (-1)} = \dfrac{\dfrac{1}{3} - \left(-\dfrac{1}{3}\right)}{2} = \dfrac{1}{3}$

49. Se estima que dentro de *t* años, la tirada de un periódico local será $C(t) = 50t^2 + 100t + 2000$ ejemplares.

a) Calcula la tasa de variación media en los próximos 3 años.

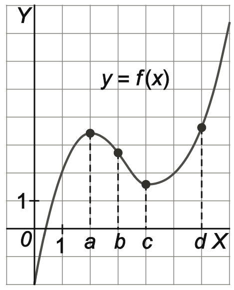
b) Halla la tasa de variación instantánea en el tercer año.

a) $TVM\,C\left[0,3\right] = \dfrac{C(3) - C(0)}{3 - 0} = \dfrac{(50 \cdot 3^2 + 100 \cdot 3 + 2000) - (50 \cdot 0^2 + 100 \cdot 0 + 2000)}{3} = 250$ ejemplares/año

b) $TVI\ C(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{C(3+h) - C(3)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left[50(3+h)^2 + 100(3+h) + 2000\right] - \left[50 \cdot 3^2 + 100 \cdot 3 + 2000\right]}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{50h^2 + 400h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (50h + 400) = 400$ ejemplares/año

50. Considera la gráfica de la figura y contesta a las siguientes preguntas.



a) ¿Entre qué parejas de puntos consecutivos es negativa la tasa de variación media?

b) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos es máxima la tasa de variación media?

c) ¿Entre qué pareja de puntos consecutivos está más próxima a 0 la tasa de variación media?

a) La *TVM* es negativa entre *a* y *b* y entre *b* y *c*, ya que $f(a) > f(b)$ y $f(b) > f(c)$.

b) La *TVM* es máxima entre *c* y *d*, ya que $f(c) < f(d)$ por lo que su *TVM* es positiva.

c) La *TVM* es más cercana a cero entre *a* y *b*, ya que su valor está entre –1 y 0.

Derivada de una función en un punto

51. Aplicando la definición de derivada, halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $x = 0$

c) $f(x) = 2x + 1$ en $x = 3$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 1$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1 - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(h+2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (h+2) = 2$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{1}{h+1} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1-(h+1)}{h(h+1)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{(h+1)} = -1$

c) $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(3+h)+1-7}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2 = 2$

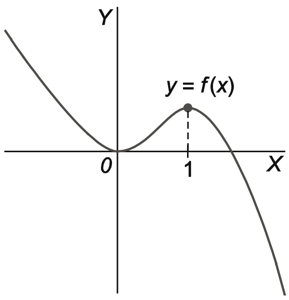
d) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1+h} - 1\right)\left(\sqrt{1+h} + 1\right)}{h\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h} + \sqrt{1}\right)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+h} + 1\right)} = \dfrac{1}{2}$

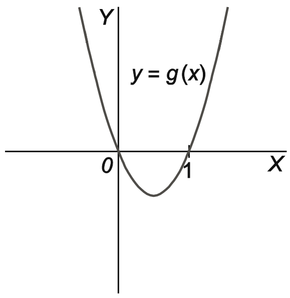
52. La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(2, 3)$ pasa también por el punto $Q(-1, 0)$. ¿Cuánto vale $f'(2)$?

$f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente por $P(2,3)$. Calculamos la ecuación de la recta, $y = mx+n$, que pasa por esos dos puntos: $\begin{cases} 3 = 2m + n \\ 0 = -m + n \end{cases} \Rightarrow m = 1;\ n = 1$. Así pues, $f'(2) = m = 1$.

Función derivada

53. Observa las dos gráficas siguientes y contesta razonadamente si puede ser la función $g(x)$ la derivada de la función $f(x)$.

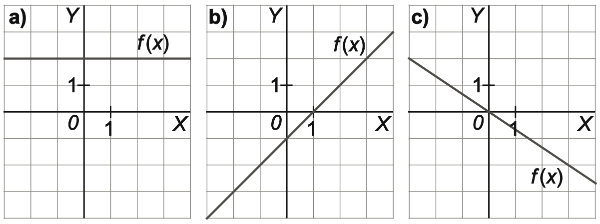




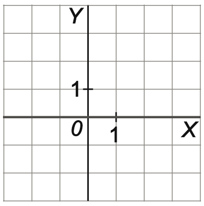
La función $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y, por tanto, su derivada debe ser negativa en este mismo intervalo, pero $g(x)$ es positiva en $(-\infty, 0)$. Así que $g(x) \neq f(x)$.

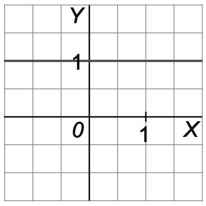
54. En cada caso, utiliza la gráfica de *f* para estimar el valor de la derivada en los puntos indicados y, a continuación, esboza la gráfica de la función $y = f'(x)$.

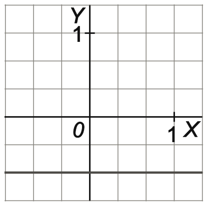
a) $f'(2)$, $f'(3)$ **b)** $f'(-2)$, $f'(0)$, $f'(2)$ **c)** $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(4)$



a) $f'(2) = f'(3) = 0$ **b)** $f'(x) = 1$ en todos los puntos **c)** $f'(x) = -\dfrac{2}{3}$ en todos los puntos







Interpretación geométrica

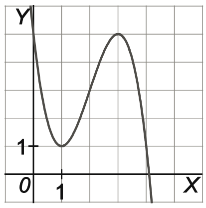
55. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ si tienes estos datos sobre su derivada:

$f'(x) > 0$ en (1, 3) **$f'(x) < 0$ para $x < 1$ y para $x > 3$** **$f'(x) = 0$ para $x = 1$ y para $x = 3$**

La función $f(x)$ debe ser decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y creciente en (1, 3);

además, en $x = 1$ y en $x = 3$ debe tener tangente horizontal.

Con estos requisitos, una posible gráfica para $f(x)$ es la que se muestra a la derecha:



56. Dada la curva de ecuación $y = -x^3 + 26x$, calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma que sean paralelas a la recta $y = -x$.

La pendiente de una recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$. Debe ser igual a la pendiente de la recta $y = -x$, es decir, igual a –1. Así pues, $m = f'(a) = -1$.

$f'(x) = -3x^2 + 26 = -1 \Rightarrow x = -3$ y $x = 3$. Por tanto $a_1 = -3$ y $a_2 = 3$.

Una de las rectas tangentes pasa por el punto de tangencia $P(3, f(3)) = P(3, 51)$. Su ecuación es $y = -x + 54$.

La otra recta tangente pasa por el punto de tangencia $P(-3, f(-3)) = P(-3, -51)$. Su ecuación es $y = -x - 54$.

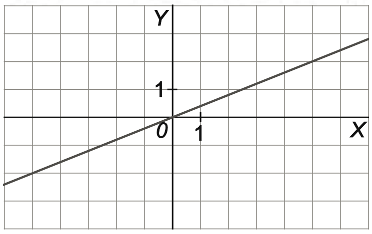
57. ¿En qué puntos son horizontales las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$?

Se calculan los valores de x para los que se anula la derivada: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0$ si $x = 1$ o $x = \dfrac{1}{3}$.

Los puntos en los que la recta tangente a la curva es horizontal son $P(1, f(1)) = P(1, -2)$ y

$Q\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = Q\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{50}{27}\right)$.

58. **Dada la curva de ecuación $y = -x^2 + x$, calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la misma que sean paralelas a la recta de la figura.**



La recta de la figura tiene por pendiente $m = \frac{2}{5}$. Para calcular los puntos en los que se trazan las tangentes paralelas a la recta del dibujo se debe resolverla ecuación $-2x+1 = \frac{2}{5}$, que tiene por solución $x = \frac{3}{10}$. Por tanto, la tangente que se pide será $y - \frac{21}{100} = \frac{2}{5}\left(x - \frac{3}{10}\right)$.

59. **Obtén la pendiente de la tangente a la curva $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en el punto de abscisa 8.**

La pendiente m buscada es $f'(8)$. Se calcula pues la función derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$.

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ y la pendiente que se pide es $m = f'(8) = \frac{2}{3\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{3}$.

60. **Obtén los puntos de la curva $y = x^3$ en los que su tangente es paralela a la recta $y = 12x + 1$.**

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$, que a su vez debe ser igual a la pendiente de la recta $y = 12x+1$. Así pues, $m = f'(a) = 12$. Las abscisas de los posibles puntos de tangencia se encuentran derivando la función e igualando la derivada a 12: $f'(x) = 3x^2 = 12 \Rightarrow x = -2$ y $x = 2$. Por lo que los puntos son $P(-2, f(-2)) = P(-2, -8)$ y $Q(2, f(2)) = Q(2, 8)$.

61. **Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = \frac{x^2}{2} + 1$ que sea paralela a la recta $y = x + 3$.**

La pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = a$ es $m = f'(a)$, que a su vez debe ser igual a la pendiente de la recta $y = x + 3$. Así pues, $m = f'(a) = 1$. La abscisa del punto de tangencia se calcula derivando la función e igualando la derivada a 1: $f'(x) = x = 1 \Rightarrow x = 1$. Por tanto, $a = 1$, y la recta tangente $y - f(a) = m(x - a)$, es $y - \frac{3}{2} = 1\cdot(x-1)$.

Derivadas de funciones elementales y operaciones

62. **Halla la derivada de $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ de dos formas: aplicando la derivada del cociente y escribiendo f como suma de potencias de x. Observa que deben coincidir los resultados.**

Se deriva $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ aplicando la derivada del cociente: $f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x} - (x+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

Ahora se escribe f como suma de potencias: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$.

Se deriva la expresión anterior: $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{x-1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

63. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=x^3-2x^2+4x+1$

b) $f(x)=4x^5+3x^3-2x^2-x$

c) $f(x)=-x^7+2x^5-5x^3+7$

d) $f(x)=6x^6-5x^5+4x-8$

e) $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+x-1$

f) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}+2x$

g) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}+2\sqrt{x^3}-x^2$

h) $f(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}-3$

i) $f(x)=3x^2-x+4-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}$

j) $f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-3x+6x^2$

a) $f'(x)=3x^2-4x+4$

b) $f'(x)=20x^4+9x^2-4x-1$

c) $f'(x)=-7x^6+10x^4-15x^2$

d) $f'(x)=36x^5-24x^4+4$

e) $f'(x)=x^4-2x^3+1$

f) $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+2$

g) $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}-2x$

h) $f'(x)=-\frac{6}{x^4}+\frac{6}{x^3}-\frac{1}{x^2}$

i) $f'(x)=6x-1+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3}$

j) $f'(x)=-\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^2}-3+12x$

64. Deriva los siguientes productos y cocientes.

a) $f(x)=(x^2+x)(5x^3+1)$

b) $f(x)=(2x^4-x^2)(x^3-5x)$

c) $f(x)=e^x\ln x$

d) $f(x)=x(\ln x-1)+2$

e) $f(x)=2^x\text{sen } x$

f) $f(x)=\text{sen } x\ \text{tg}x$

g) $f(x)=3x\sqrt{x}-2x^2\cos x$

h) $f(x)=3^x\text{sen}x+x\sqrt[4]{x}$

i) $f(x)=\log_2 x-\text{sen } x+x$

j) $f(x)=\frac{3x^2-3}{x^3+1}$

k) $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+x-1}$

l) $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

m) $f(x)=\frac{x}{e^{-x}}$

n) $f(x)=\frac{\cos x}{\text{sen}x}$

o) $f(x)=\frac{\log_2 x}{1+\text{sen}x}$

p) $f(x)=\frac{x^2+1}{\ln x}$

q) $f(x)=\frac{\cos x}{e^x}$

r) $f(x)=\frac{\text{sen}x+\cos x}{\ln x}$

a) $f'(x)=(2x+1)(5x^3+1)+15x^2(x^2+x)=25x^4+20x^3+2x+1$

b) $f'(x)=(8x^3-2x)(x^3-5x)+(2x^4-x^2)(3x^2-5)=14x^6-55x^4+15x^2$

c) $f'(x)=e^x\ln x+e^x\frac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

d) $f'(x)=1(\ln x-1)+x\frac{1}{x}=\ln x-1+1=\ln x$

e) $f'(x)=2^x\ln 2\cdot\text{sen}x+2^x\cos x=2^x(\ln 2\cdot\text{sen}x+\cos x)$

f) $f'(x)=\cos x\ \text{tg}\, x+\text{sen}\, x(\text{tg}^2\, x+1)=\text{sen}\, x+\frac{\text{sen}\, x}{\cos^2 x}$

g) $f'(x)=3\sqrt{x}+\frac{3x}{2\sqrt{x}}-4x\cos x+2x^2\text{sen}x$

h) $f'(x) = 3^x \ln 3 \cdot \operatorname{sen} x + 3^x \cos x + \sqrt[4]{x} + \dfrac{x}{4\sqrt[4]{x^3}}$

i) $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln 2} - \cos x + 1$

j) $f'(x) = \dfrac{6x(x^3+1) - 3x^2(3x^2-3)}{(x^3+1)^2} = \dfrac{-3x^4+9x^2+6x}{(x^3+1)^2}$

k) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+x-1)-(x^2-2)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2} = \dfrac{x^2+2x+2}{(x^2+x-1)^2}$

l) $f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x^2-x+1)-(x^2+x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} = \dfrac{-2x^2+4x}{(x^2-x+1)^2}$

m) $f(x) = xe^x$ y $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

n) $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

o) $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x\ln 2}(1+\operatorname{sen} x) - \log_2 x \cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2} = \dfrac{1+\operatorname{sen} x - x\cdot \ln 2 \cdot \log_2 x \cdot \cos x}{x\ln 2(1+\operatorname{sen} x)^2}$

p) $f'(x) = \dfrac{2x\ln x - (x^2+1)\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{2x^2\ln x - x^2 - 1}{x(\ln x)^2}$

q) $f'(x) = \dfrac{-\operatorname{sen} x\, e^x - \cos x\, e^x}{(e^x)^2} = -\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{e^x}$

r) $f'(x) = \dfrac{(\cos x - \operatorname{sen} x)\ln x - (\operatorname{sen} x + \cos x)\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{x\ln x\cos x - x\ln x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x - \cos x}{x(\ln x)^2}$

65. Aplica la regla de la cadena para derivar estas funciones.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$

b) $f(x) = (x^2+1)^{15}$

c) $f(x) = e^{x^3-x+1}$

d) $f(x) = \operatorname{tg}(x^3+4x-1)$

e) $f(x) = \log_3(x^2 - \sqrt{x})$

f) $f(x) = \cos^2(5x-3)$

g) $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

h) $f(x) = \ln^2(\cos x)$

i) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3-4x)}{x}$

j) $f(x) = \dfrac{1+\ln x^2}{x^3}$

k) $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - x}$

l) $f(x) = 5^{x+\cos x}$

m) $f(x) = \operatorname{tg}^3(x^2+1)$

n) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\sqrt{x})$

o) $f(x) = \log_3 \sqrt[3]{4x^2-x+4}$

p) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$

q) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - e^{-x}}$

r) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

s) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(2x-1)}{\cos(x^2+1)}$

t) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

a) $f'(x) = \cos(2x)\cdot 2 = 2\cos(2x)$

b) $f'(x) = 15(x^2+1)^{14}\cdot 2x = 30x(x^2+1)^{14}$

c) $f'(x) = e^{x^3-x+1}\cdot(3x^2-1)$

d) $f'(x) = (\operatorname{tg}^2(x^3+4x-1)+1)\cdot(3x^2+4)$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{\ln 3\cdot(x^2-\sqrt{x})}\cdot\left(2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

f) $f'(x) = 2\cos(5x-3)(-\operatorname{sen}(5x-3))\cdot 5 = -10\cos(5x-3)\operatorname{sen}(5x-3)$

g) $f'(x) = \cos(\operatorname{sen} x)\cos x$

h) $f'(x) = 2\ln(\cos x)\cdot\dfrac{1}{\cos x}\cdot(-\operatorname{sen} x) = -\dfrac{2\ln(\cos x)\operatorname{sen} x}{\cos x}$

i) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{3x^2-4}{x^3-4x}\cdot x-\ln\left(x^3-4x\right)}{x^2}=\dfrac{3x^2-4-\ln\left(x^3-4x\right)\left(x^2-4\right)}{x^2\left(x^2-4\right)}$

j) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x}{x^2}\cdot x^3-3x^2\left(1+\ln x^2\right)}{x^6}=-\dfrac{x^2+\ln x^2}{x^6}$

k) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\text{sen}x-x}}\cdot(\cos x-1)=\dfrac{\cos x-1}{2\sqrt{\text{sen}x-x}}$

l) $f'(x)=\ln 5\cdot 5^{x+\cos x}\left(1-\text{sen}x\right)$

m) $f'(x)=3\text{tg}^2\left(x^2+1\right)\left(\text{tg}^2\left(x^2+1\right)+1\right)\cdot 2x=6x\cdot\text{tg}^2\left(x^2+1\right)\left(\text{tg}^2\left(x^2+1\right)+1\right)$

n) $f'(x)=2\text{sen}\left(\sqrt{x}\right)\cos\left(\sqrt{x}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\text{sen}\left(\sqrt{x}\right)\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

o) $f'(x)=\dfrac{1}{\ln 3\,\sqrt[3]{4x^2-x+4}}\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(4x^2-x+4\right)^2}}\cdot(8x-1)=\dfrac{8x-1}{3\ln 3\left(4x^2-x+4\right)}$

p) $f'(x)=2\text{sen}x\cos x\cdot\cos^2 x+\text{sen}^2 x\cdot 2\cos x\cdot(-\text{sen}x)=2\text{sen}x\cos x(\cos^2 x-\text{sen}^2 x)$

q) $f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{\left(x^2-e^{-x}\right)^3}}\cdot\left(2x+e^{-x}\right)=\dfrac{2x+e^{-x}}{4\sqrt[4]{\left(x^2-e^{-x}\right)^3}}$

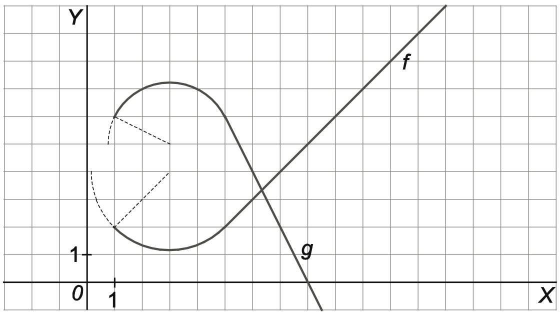
r) $f'(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

s) $f'(x)=\dfrac{\left(\text{tg}^2(2x-1)+1\right)\cdot 2\cdot\cos(x^2+1)-\text{tg}(2x-1)\left(-\text{sen}(x^2+1)\right)\cdot 2x}{\cos^2(x^2+1)}$

t) $f'(x)=\dfrac{x}{x-1}\cdot\dfrac{x-(x-1)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2-x}$

66. En la figura se dan las gráficas de las funciones *f* y *g*, compuesta por arcos de circunferencia y segmentos. Calcula:

a) $(f+g)'(5)$ **b)** $(fg)'(5)$ **c)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(5)$ **d)** $(f\circ g)'(5)$ **e)** $\left(f^2\right)'(5)$ **f)** $(g\circ f)'(5)$



Trazando la recta tangente a las funciones f y g en $x=5$ y contando los cuadritos se puede hallar su pendiente, es decir, su derivada: $f'(5)=1$ y $g'(5)=-2$. Análogamente $g'(2)=\dfrac{1}{2}$. Además, $f(5)=2$ y $g(5)=6$.

a) $(f+g)'(5)=f'(5)+g'(5)=1-2=-1$

b) $(f\,g)'(5)=f'(5)g(5)+g'(5)f(5)=1\cdot 6+2(-2)=2$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(5)=\dfrac{f'(5)\,g(5)-g'(5)\,f(5)}{[g(5)]^2}=\dfrac{16-2(-2)}{6^2}=\dfrac{5}{18}$

d) $(f\circ g)'(5)=f'(g(5))\,g'(5)=f'(6)\,(-2)=1\,(-2)=-2$

e) $\left(f^2\right)'(5)=2f(5)f'(5)=2\cdot 2\cdot 1=4$

f) $(g\circ f)'(5)=g'\left(f(5)\right)f(5)=g'(2)f'(5)=\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$

67. A partir de la relación $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ y aplicando la regla de la cadena, deduce la derivada de la función $y = \cos x$ y, a continuación, la derivada de $y = \text{tg}x$.

$$(\cos x)' = \left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \text{sen}\, x \cdot (-1) = -\text{sen}\, x$$

$$\text{Si } f(x) = \text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \text{sen}\, x\,(-\text{sen}\, x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos

68. La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ satisface las siguientes condiciones.

a) Pasa por el punto (0, 0).

b) Tiene un mínimo relativo en el punto (1, –1).

Calcula los coeficientes *a*, *b* y *c*.

Como *f* pasa por el punto (0, 0), $f(0) = 0$, por lo que $a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c = 0$; $c = 0$.

Como *f* pasa por el punto (1, –1), $f(1) = -1$, por lo que $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c = -1$; $a + b = -1$.

Tiene un mínimo de abscisa $x = 1$, por lo que $f'(1) = 0$; $3^a + b = 0$.

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{3}{2}$

69. Deduce la fórmula que da el valor de la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$. Recuerda que el vértice de una parábola es siempre un máximo o un mínimo relativo.

El vértice de una parábola es su máximo o su mínimo, entonces $f'(x) = 2ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

70. Para cada valor de *a* se considera la función $f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x + 2}$. Calcula el valor de *a* para que *f* tenga un mínimo relativo en $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{(6x - a)(x + 2) - (3x^2 - ax)}{(x + 2)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{(12 - a) \cdot 4 - (12 - 2a)}{16} = 0 \Rightarrow a = 18$$

Para verificar que dicho extremo es un mínimo, se estudia el signo de la derivada cerca de $x = 2$.

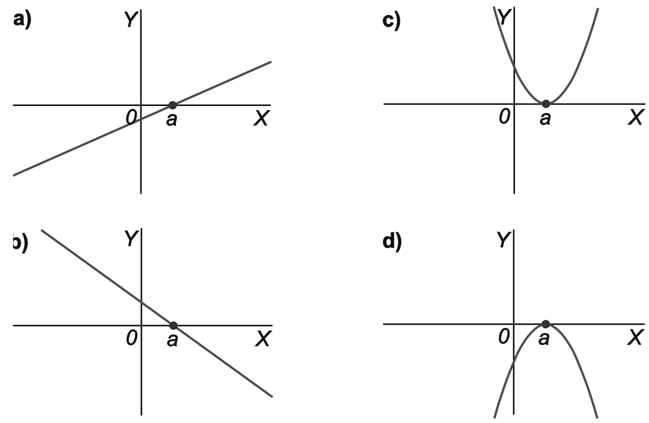
$$f(x) = \frac{3x^2 - 18x}{x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3(x + 6)(x - 2)}{(x + 2)^2}$$

$-6 < x < 2 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente a la izquierda de $x = 2$.

$x > 2 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente a la derecha de $x = 2$.

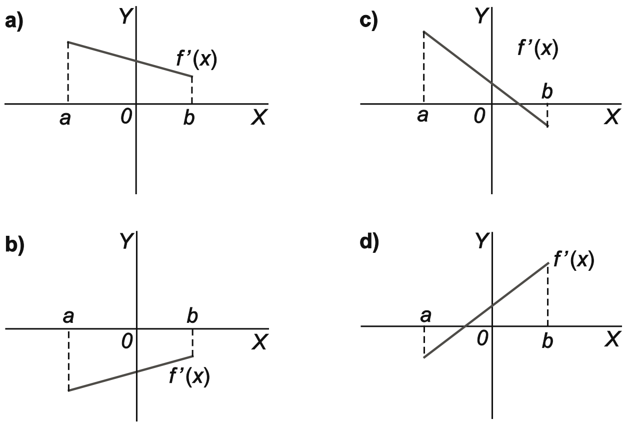
Entonces, para $a = 18$, la función dada tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

71. Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la derivada de una función que tiene un máximo en el punto $x = a$.



Si tiene un máximo, además de anularse en *a*, debe pasar de ser positiva a negativa, por pasar *f* de creciente a decreciente. Por tanto, la solución es la gráfica b.

72. Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con la derivada de una función creciente en el intervalo [*a*, *b*].



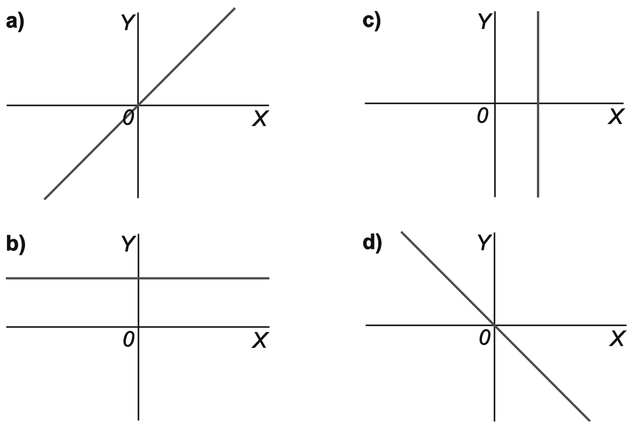
Si *f* es creciente en el intervalo [*a*, *b*], la derivada debe ser positiva en dicho intervalo, por lo que la solución es la gráfica a.

73. Razona y relaciona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con el tipo de función descrito en cada caso.

I. Una función lineal creciente.

II. Una función cuadrática, esto es, un polinomio de segundo grado, cuyo vértice corresponde al mínimo absoluto de la misma.

III. Una función cuadrática cuyo vértice corresponde al máximo absoluto de la misma.



I. Si f es una función lineal creciente su derivada es una función constante positiva, por lo que la solución es la gráfica b**.**

II. Si f es una función cuadrática con un mínimo absoluto, es decreciente hasta dicho mínimo y creciente después, por lo que su derivada será negativa antes de ese valor y positiva después. La solución es la gráfica a**.**

III. Si f es una función cuadrática con un máximo absoluto, es creciente hasta dicho punto y decreciente después, por lo que su derivada será positiva antes de ese valor y negativa después. La solución es la gráfica d.

Problemas de optimización

74. Encuentra dos números no negativos que sumen 14, de forma que la suma de sus cuadrados sea:

a) Máxima **b)** Mínima

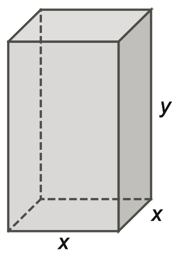
Los números son x y $14 - x$. La suma de sus cuadrados es $x^2 + (14 - x)^2$.

La derivada de la función $f(x) = x^2 + (14 - x)^2 = 2x^2 - 28x + 196$ es $f'(x) = 4x - 28$ que se anula para $x = 7$.

Se buscan los máximos o mínimos en los valores de x que anulan la derivada y en los extremos del dominio de definición de la función que, en este caso es $[0, 14]$, pues los números no pueden ser negativos.

Como $f(0) = 196$, $f(7) = 98$ y $f(14) = 196$, el máximo se alcanza cuando uno de los números es 0 y el otro 14; y el mínimo cuando los dos números son iguales a 7**.**

75. Un depósito abierto de chapa y de base cuadrada debe tener capacidad para 13 500 litros. ¿Cuáles han de ser sus dimensiones para que precise la menor cantidad de chapa?



Si el lado de la base mide x metros y la altura mide y metros, la función a minimizar es

$x^2 + 4xy$.

Se establece la relación entre x e y utilizando el dato del volumen: $x^2y = 13{,}5$ m^3.

De esa expresión se despeja la variable y: $y = \dfrac{13{,}5}{x^2}$ y la función a minimizar es:

$$f(x) = x^2 + \frac{4 \cdot 13{,}5}{x} = x^2 + \frac{54}{x} = \frac{x^3 + 54}{x}$$

$f'(x) = \dfrac{3x^3 - \left(x^3 + 54\right)}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 54}{x^2} = 0$ si $2x^3 - 54 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$ que es un mínimo de la función ya que la derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha del 3.

Así pues, las dimensiones que minimizan la cantidad de chapa son 3 metros de lado de la base y $\dfrac{13{,}5}{3^2} = 1{,}5$ metros de altura. Esta mínima cantidad de chapa son $f(3) = 27$ m^2.

76. Los beneficios que se obtienen de la venta de *x* unidades de un determinado producto vienen dados por la expresión $B(x) = -2x^3 + 216x - 256$.

a) ¿Cuántas unidades vendidas dan el mayor beneficio?

b) Determina el número de unidades que hay que vender para el que se maximice el beneficio medio: $\frac{B(x)}{x}$.

a) Hay que hallar el máximo de la función $B(x) = -2x^3 + 216x - 256$, en la que *x* no puede ser negativa.

$B'(x) = -6x^2 + 216$; $B'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 216 = 0 \Rightarrow x = 6$. La solución negativa se descarta obviamente. Se comprueba si es, en efecto, máximo:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad 0 < x < 6 \Rightarrow f'(x) > 0 \\ \text{Si} \quad x > 6 \Rightarrow f'(x) < 0 \end{array}\right\} P(6, B(6)) = P(6, 608)$$

El beneficio máximo es de 608 y se obtiene con la venta de 6 unidades.

b) Hay que hallar el máximo de la función $B_m(x) = \frac{B(x)}{x} = \frac{-2x^3 + 216x - 256}{x} = -2x^2 + 216 - \frac{256}{x}$, en la que *x* no puede ser negativa.

$B_m{}'(x) = -4x + \frac{256}{x^2}$; $B_m{}'(x) = 0 \Rightarrow -4x + \frac{256}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 4$

Se comprueba si es, en efecto, máximo: $\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad 0 < x < 4 \rightarrow B_m{}'(x) > 0 \\ \text{Si} \quad x > 4 \rightarrow B_m{}'(x) < 0 \end{array}\right\} P(4, B_m(4)) = P(4, 120)$

El beneficio medio máximo es de 120 y se obtiene con la venta de 4 unidades.

CUESTIONES

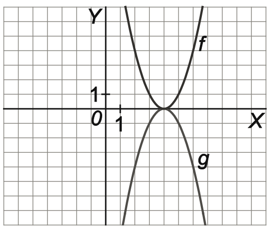
77. Las siguientes afirmaciones son falsas. Haz ver con algún dibujo que, efectivamente, lo son.

a) Si $f(3) > g(3)$, entonces $f'(3) \geq g'(3)$

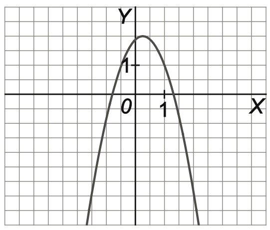
b) Si $f'(0) > 0$, entonces $f(0) \leq f(1)$

c) Si $f'(1) = 0$, entonces $f(0) = f(2)$

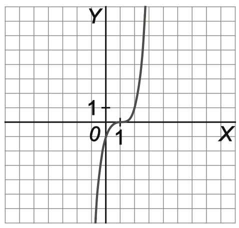
a) $f(3) > g(3)$ pero $f'(3) < 0$ y $g'(3) > 0$.



b) $f'(0) > 0$ pero $f(0) > 0$ y $f(1) = 0$.



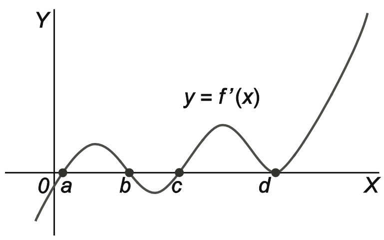
c) $f'(1) = 0$ pero $f(0) < 0$ y $f(2) > 0$.



78. ¿Es tangente la recta $y = x + 5$ a la curva $y = x^4 - 3x + 2$?

De ser tangente, lo sería en un punto de la curva en el que $y' = 1$. Pero $y' = 4x^3 - 3 = 1 \Rightarrow x = 1$. El punto de la curva de abscisa $x = 1$ tiene ordenada $y = 1^4 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$. Pero el punto (1, 0) no pertenece a la recta $y = x + 5$, luego no es tangente.

79. Decide las abscisas de los puntos en los que *f* presenta un extremo relativo, si la gráfica de $y = f'(x)$ es:

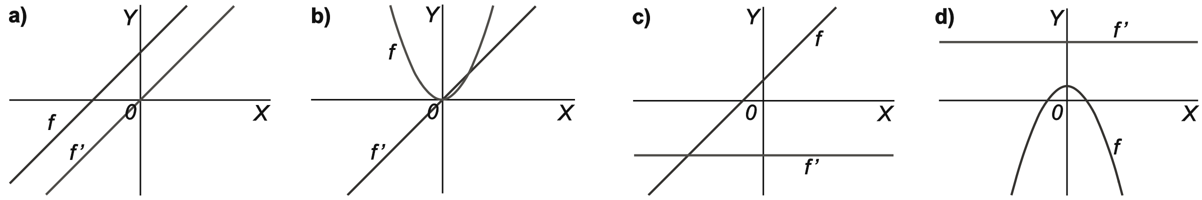


Los máximos y mínimos relativos están en los puntos en los que la derivada cambia de signo. Si pasa de positiva a negativa, serán máximos, y si el cambio es de negativo a positivo, serán mínimos.

Así pues, presenta un máximo en $x = b$ y mínimos en $x = a$ y en $x = c$.

Obsérvese que en $x = d$ la derivada no cambia de signo.

80. Razona cuál de las siguientes gráficas se corresponde con una función y su derivada.



De una función polinómica a su derivada se baja un grado, con lo que se descarta la función del apartado a. Además, como las parábolas crecen y decrecen, a los lados del vértice, la derivada debe tener un cambio de signo, y la función derivada f' del apartado d no cambia de signo.

Como en c la función f es creciente, f' debería ser positiva, y es negativa.

En conclusión, el único apartado correcto es el b.

81. Si $f'(a) = 0$, entonces ¿tiene que presentar la gráfica de f un máximo o un mínimo relativo en el punto de abscisa a?

No necesariamente, por ejemplo, $f(x) = x^3$ y $a = 0$.

82. El máximo valor de f en el intervalo $[a, b]$, ¿se alcanza necesariamente en un punto con tangente horizontal?

No necesariamente, por ejemplo, $f(x) = x^2$ y $[a, b] = [-1, 4]$.

83. Si $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h) \neq f(2)$, entonces la gráfica de f ¿puede tener tangente en el punto de abscisa 2?

No, pues si $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h) \neq f(2)$, entonces f no es continua en $x = 2$ y por tanto no tiene tangente en dicho punto.

84. Si f tiene tangente en todos los puntos y es creciente, entonces ¿tiene que ocurrir que $f'(x) > 0$ para cualquier valor de x?

No, por ejemplo $f(x) = x^3$ es creciente en $\mathbb{R}$ y $f'(0) = 0$.

85. Si f y g son funciones con derivadas en todos los puntos y $f(x)g(x) = x + 3$, ¿puede presentar alguna de las dos curvas, f o g, algún máximo en el eje de abscisas?

No, pues $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1$, y si hubiera algún máximo de alguna de las dos en el eje de abscisas, por ejemplo f, en ese punto $(a, f(a))$ sería $f(a) = 0$ y $f'(a) = 0$ con lo que la expresión anterior sería igual a 0.

86. Responde verdadero o falso.

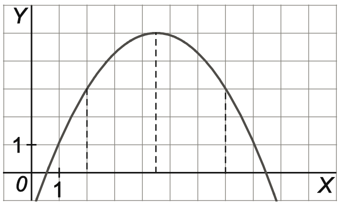
a) Si f tiene derivada en todos los puntos y $f(2) = f(7)$, debe haber un número c entre 2 y 7 con $f'(c) = 0$.

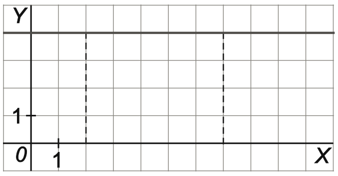
b) Existe f para la que $f(2) = 3$, $f(5) = 6$ y $f'(x) > 1$ para todo x.

c) Si f y g son positivas y crecientes, entonces $f\,g$ es creciente.

a) Verdadera, pues si una función toma el mismo valor en los extremos de un intervalo sólo se pueden dar una de estas dos situaciones:

La función toma valores distintos de los extremos en los puntos del interior, con lo que, obligatoriamente pasará de creciente a decreciente, o viceversa, y alcanzará un extremo relativo $x = c$ en el interior, donde la derivada se anulará.





La función en el interior toma los mismos valores que en los extremos por lo que se trata de una función constante. En este caso se verifica que en cualquier c de (2, 7) se cumple que $f'(c) = 0$.

b) Falso, pues $TMV\,f\,[2, 5] = 1$ y si para todo x fuera $f'(x) > 1$, sería $TMV\,f\,[2, 5] > 1$.

c) Verdadero, pues $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) > 0$, pues ambos sumandos son positivos.

PROBLEMAS

87. El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función $P(t) = \dfrac{15 + t^2}{(t+1)^2}$, donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$.

Calcula:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanzará la mínima población y el tamaño de ésta en ese momento.

c) El tamaño de la población a largo plazo.

a) $P(0) = 15$ millones.

b) $P'(t) = \dfrac{(t+1)^2 \cdot 2t - (15+t^2) \cdot 2(t+1)}{(t+1)^4} = \dfrac{2\left[t(t+1) - (15+t^2)\right]}{(t+1)^3} = \dfrac{2(t-15)}{(t+1)^3} = 0$ si $t = 15$

Si $0 < t < 15$, $P'(t) < 0$, por lo que P es decreciente y si $t > 15$, $P'(t) > 0$ con lo que P es creciente. Así pues, al cabo de 15 años se alcanza el mínimo absoluto en el tamaño de la población, que vale $P(15) = \dfrac{240}{256} \simeq 0{,}94$ millones.

c) $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15+t^2}{(t+1)^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{15+t^2}{t^2+2t+1} = 1$, con lo que la población tiende a estabilizarse en torno al millón de individuos.

88. Una empresa de venta por teléfono ha establecido para sus empleados un incentivo mensual, $f(x)$ (en €), en relación con el valor x (también en €) de lo vendido por cada uno según la función.

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}03x-30 & \text{si } 0\le x\le 10\,000 \\ \dfrac{600x}{x+10\,000} & \text{si } x>10\,000 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de f e indica si hay algún valor en las ventas que la empresa valore especialmente.

b) ¿Es el incentivo siempre creciente en relación con las ventas realizadas?

c) ¿Puede un empleado recibir 600 €de incentivo? ¿Por qué? ¿Y 598 €?

a) Como f es continua, de forma evidente, para $x\ne 10\,000$, se estudia la continuidad sólo en $x = 10\,000$.

$\lim\limits_{x\to 10000^-} f(x) = 270$; $\lim\limits_{x\to 10000^+} f(x) = 300$, así que f no es continua en $x = 10000$, valor en ventas que la empresa valora especialmente.

b) Hasta 10000 sí, pues el incentivo mensual viene dado por una recta de pendiente positiva.

Si $x > 10\,000$, $f'(x)=\dfrac{600(x+10\,000)-600x\cdot 1}{(x+10\,000)^2}=\dfrac{600\cdot 10\,000}{(x+10\,000)^2}>0$ con lo que f también es creciente si

$X > 10000$.

Finalmente, como $\lim\limits_{x\to 10\,000^-} f(x) < \lim\limits_{x\to 10\,000^+} f(x)$, resulta que, efectivamente, el incentivo es siempre creciente en relación con las ventas realizadas.

c) Como $f(10\,000) = 270$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 600$ y $f'(x) > 0$, ningún empleado podrá alcanzar los 600 € de incentivo.

Sí se pueden alcanzar 598€.

89. Una compañía puede producir x cientos neumáticos de calidad A. Además, por cada x cientos neumáticos de calidad A es capaz de producir $\dfrac{40-12x}{6-x}$ cientos neumáticos de calidad B, que dejan la mitad de beneficio que los de calidad A. Por problemas de almacenamiento, la compañía no puede producir más de 550 neumáticos de calidad A.

Halla el número de neumáticos de cada tipo que resulte más rentable producir.

Llamando b al beneficio que producen cada cien neumáticos de calidad A, el beneficio total viene dado por la función $f(x) = bx + f(x) = bx+\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{40-12x}{6-x}=b\left[x+\dfrac{20-6x}{6-x}\right]$ Se pide encontrar el máximo de f en [0; 5,5].

$f'(x) = b\, f'(x)=b\left[1+\dfrac{(6-x)(-6)+(20-6x)}{(6-x)^2}\right]=b\left[1-\dfrac{16}{(6-x)^2}\right]=0$ si $6 - x = \pm 4$, $x = 10$ o $x = 2$.

Se calcula el valor de la función para estos valores de x: $f(0) = 3{,}3b$; $f(5{,}5) < 0$ y $f(2) = 4b$. El máximo beneficio se obtiene en $x = 2$, es decir, produciendo 200 neumáticos de calidad A y 400 de calidad B.

90. Los beneficios de una fábrica de camisas dependen del número de camisas que se fabrican cada día, según la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 19$, donde x mide el número de camisas fabricadas al día, y $f(x)$, la ganancia en miles de € al mes. Atendiendo al número de máquinas y personal necesarios, la fábrica puede optar por fabricar un número diario de camisas comprendido entre 1000 y 4000. ¿Cuántas camisas debe fabricar para obtener un beneficio máximo?

Se pide el máximo de f en [1, 4].

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 0$ si $x = 2$ o $x = 3$.

Se calcula el valor de la función para estos valores de x: $f(1) = 4$, $f(2) = 9$, $f(3) = 8$ y $f(4) = 13$.

Se observa que el máximo beneficio se obtiene fabricando 4000 camisas diarias.

91. En el año 2000 se fundó una asociación ecologista. Se sabe que el número de sus miembros ha variado con los años según la función

$$N(t) = 40(t^3 - 4{,}5t^2 + 6t + 3)$$

donde *t* mide el número de años desde el inicio de la fundación.

a) ¿Cuántos fueron los socios fundadores?

b) ¿En qué período de tiempo aumentó el número de socios?

c) ¿En qué año tuvo la sociedad el mínimo número de socios?

a) En el año 2000 tenemos que $t = 0$, por lo que $N(0) = 120$ socios fundadores.

b) $N'(t) = 40(3t^2 - 9t + 6) > 0$ si $t < 1$ o $t > 2$, así que hasta el año 2001 aumentó el número de socios, que volvió a aumentar a partir del final del 2002.

c) Calculamos los valores de la función $N(t)$ al inicio de cada intervalo de crecimiento, que son $(0, 1)$ y $(2, +\infty)$: $N(0) = 120$, $N(2) = 200$, por lo que el mínimo número de socios se produjo en el momento de su fundación, año 2000.

92. Se ha estudiado el rendimiento de los empleados de una oficina a medida que transcurre la jornada laboral desde las 8 hasta las 15 horas, analizando el número de instancias revisadas en una hora. La función que expresa dicho rendimiento es

$$R(t) = 30t - 10{,}5t^2 + t^3$$

siendo *t* el número de horas transcurridas desde el inicio de la jornada laboral.

a) Halla la tasa de variación media del rendimiento $R(t)$ entre $t = 2$ y $t = 4$.

b) Determina en qué momento se produce el máximo y el mínimo rendimiento entre las 9 y las 14 horas, y entre las 9 y las 12 horas.

a) $TVM\,R\,[2, 4] = \dfrac{R(4) - R(2)}{4 - 2} = \dfrac{16 - 26}{2} = -5$

b) $R'(t) = 30 - 21t + 3t^2 = 0$ si $t = 2$ o $t = 5$.

Se pide el máximo y el mínimo de $R(t)$ en [1, 6] y en [1, 4].

En [1, 6], se calcula $R(1) = 20{,}5$; $R(2) = 26$; $R(5) = 12{,}5$ y $R(6) = 18$. El momento de máximo rendimiento entre las 9 y 14 horas se produce en $t = 2$, es decir, a las 10 de la mañana; y el de mínimo rendimiento en $t = 5$, es decir, a las 13 horas.

En [1, 4], además de los valores calculados previamente, $R(1)$ y $R(2)$, se calcula $R(4) = 16$. El máximo rendimiento entre las 9 y las 12 se alcanzará en el mismo punto que antes, es decir, a las 10 de la mañana; y el mínimo en $t = 4$, es decir, a las 12 horas.

93. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 8 m². El metro lineal de tramos horizontales cuesta 2,50 €, y el de tramos verticales, 5 €. Determina las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo y el precio de dicho marco.

Llamando *x* e *y* a las dimensiones de la ventana, como indica la figura, el precio del marco es: $P(x, y) = 2(2{,}5x + 5y) = 5x + 10y$ €.

Como $xy = 8$ entonces $y = \dfrac{8}{x}$ y el precio será $P(x) = 5x + \dfrac{80}{x}$. Se calcula el mínimo de *P*, para $x > 0$.

$P'(x) = 5 - \dfrac{80}{x^2} = 0$ si $x = 4$ o $x = -4$. Se descarta la solución negativa.

Si $0 < x < 4$, $P'(x) < 0$, por lo que *P* es decreciente. Si $x > 4$, $P'(x) > 0$ y *P* es creciente, así que el mínimo absoluto se encuentra en $x = 4$, $y = \dfrac{8}{4} = 2$, $P(4) = 5 \cdot 4 + \dfrac{80}{4} = 20 + 20 = 40$.

Las dimensiones del marco son de 4 m el tramo horizontal y 2 m el tramo vertical. El coste mínimo es de 40 €.

94. Considera la función *f* definida en (0, +∞) mediante la fórmula $f(x) = \dfrac{2(1+\ln x)}{x}$.

a) Resuelve la ecuación $f(x) = 0$, redondeando el resultado hasta las milésimas.

b) Resuelve la inecuación $f(x) > 0$.

c) Obtén $f'(x)$ y los máximos o mínimos relativos de $f(x)$.

d) Esta función sirve como modelo para analizar los beneficios mensuales (en miles de €) de una empresa que vende *x* miles de objetos. Utilizando las cuestiones anteriores, responde estas preguntas.

1. ¿Cuál es el mínimo número de objetos que deben vender para que el beneficio sea positivo?

2. ¿Cuántos objetos deben vender para obtener el máximo beneficio?

a) $f(x) = 0$ si $\ln x = -1$, $x = \dfrac{1}{e} = 0{,}367879441171442\ldots \simeq 0{,}368$.

b) Si $0 < x < \dfrac{1}{e}$, $f(x) < 0$ y si $x > \dfrac{1}{e}$, $f(x) > 0$, por lo que $f(x) > 0$ en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$.

c) $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}\cdot x - 2(1+\ln x)\cdot 1}{x^2} = -\dfrac{2\ln x}{x^2} = 0$ si $\ln x = 0$ cuya solución es $x = 1$.

El único posible máximo o mínimo relativo se encuentra en $x = 1$.

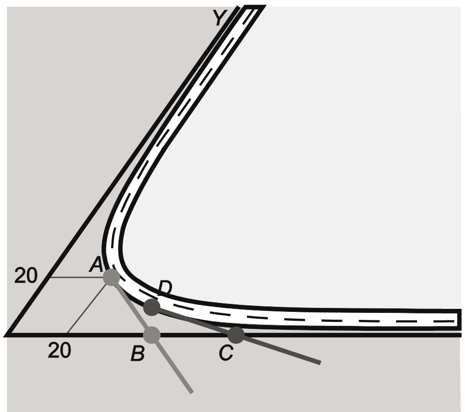
Si $x < 1$, $f'(x) > 0$. Si $x > 1$, $f'(x) < 0$. En $x = 1$ hay un máximo relativo, que además es absoluto.

d) 1. El beneficio es positivo en $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$, así que el valor de *x* pedidos es $\dfrac{1}{e}$, que corresponde a 368 objetos.

2. El máximo beneficio se obtiene en $x = 1$, que corresponde a $f(1) = 2$, es decir, vendiendo 2000 objetos.

ENTORNO MATEMÁTICO

Salirse por la tangente



Sergio es un piloto profesional de pruebas. Acaba de llegar a un circuito en construcción en el que le han ofrecido probar el trazado para mejorar la seguridad. Una de las pruebas que tiene que realizar es tomar la curva llamada "platillo volante" a una velocidad elevada para forzar al vehículo a salirse por la tangente en el punto central de la curva y, así, ajustar las indicaciones y el espacio libre para que los posibles accidentes no tengan consecuencias graves.

Como Sergio es un profesional ha procurado formarse en matemáticas y física y con los planos en la mano empieza a estudiar la situación de la curva:

"La curva tiene forma de hipérbola y considerando como ejes de coordenadas aproximados las dos rectas que une, se puede describir bastante bien por la función $y = \frac{400}{x}$, donde tanto *x* como *y* están dados en metros.

La recta de seguridad parte del punto *A* que en el plano corresponde a las coordenadas (20, 20) metros. La longitud de esa recta debe ser el doble que la distancia que hay de *A* al punto *B* situado en el eje *X*". Lee con atención las notas de Sergio y ayúdale en su trabajo contestando las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las coordenadas del punto *B* en el que la recta tangente a la curva en *A* corta el eje de abscisas?

b) Si se establece una segunda recta de seguridad que debe cortar al eje *X* en el punto *C* cuya abscisa es 1,5 veces la de *B*, ¿en qué punto *D* de la curva debe iniciarse dicha recta?

a) Se calcula la función derivada: $f'(x) = -\frac{400}{x^2}$.

La recta tangente a la función $f(x) = \frac{400}{x}$ en el punto *A* tiene pendiente $m = f'(20) = -\frac{400}{20^2} = -1$.

La ecuación de dicha recta es: $y - 20 = -1 \cdot (x - 20)$. Simplificando: $y = -x + 40$.

Dicha recta cortará al eje de abscisas, $y = 0$, en el punto $B(40, 0)$.

b) La abscisa correspondiente al punto *C* es $1{,}5 \cdot 40 = 60$, por lo que *C* tiene coordenadas $C(60, 0)$.

La recta tangente en el punto $D(x_0, y_0)$ tendrá pendiente: $m = f'(x_0) = -\frac{400}{x_0^2}$.

Además, por ser *D* un punto de la curva, verificará su ecuación: $y_0 = f(x_0) = \frac{400}{x_0}$.

Se sustituye en la ecuación punto–pendiente de la recta tangente en *D*, $y - y_0 = m(x - x_0)$, los datos que se conocen: $y = 0$, $x = 60$, $m = f'(x_0) = -\frac{400}{x_0^2}$, y resulta la ecuación: $0 - \frac{400}{x_0} = -\frac{400}{x_0^2}(60 - x_0)$, cuya solución es $x_0 = 30$.

Además $y_0 = f(30) = \frac{40}{3}$. Por tanto, la recta debe iniciarse en el punto $D\left(30, \frac{40}{3}\right)$.

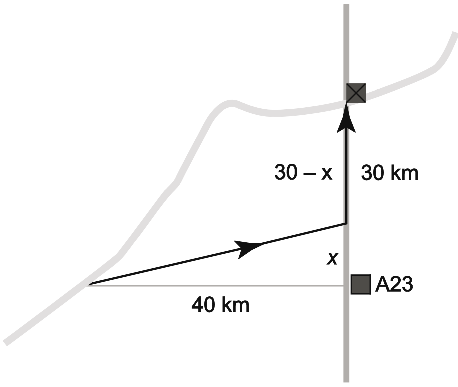
"Contrarreloj"

Laura y Miguel están en el puesto A23 de Protección Civil situado en una carretera. A primera hora de la mañana han tenido que viajar 40 km campo a través en dirección perpendicular a la carretera, para comprobar el estado de un dique en un arroyo, debilitado por las intensas lluvias.

"Si llego a saber que esto era tan aburrido no me hubiera apuntado voluntario" dice Miguel cuando bajan para revisar el dique. Laura se ríe y le contesta "mejor estar aburrido, ya que eso significa que no está pasando nada grave. Además cállate que basta que lo digas para..." Laura no termina la frase porque en ese momento les avisan del centro de operaciones. Ha habido una crecida 30 km carretera arriba del puesto A23 y una familia está atrapada en su casa. Por la información que les han podido dar, el agua les alcanzará en 55 minutos.

Los compañeros se miran excitados y asustados. Pueden ir campo a través directos a la casa amenazada pero entonces su velocidad no sería superior a 50 km/h, mientras que en la carretera podrían alcanzar los 120 km/h. Miguel dice "no hay problema, vamos a calcular hacia qué punto de la carretera debemos ir en línea recta para que el tiempo total de nuestro viaje sea mínimo. Para algo me tienen que servir las matemáticas del instituto".

Realiza el cálculo con ayuda del esquema que rápidamente ha dibujado Miguel y comprueba si llegarán a tiempo para evacuar a la familia.



Se utiliza la fórmula del MRU (movimiento en una recta con velocidad constante): $v = \dfrac{e}{t}$,

donde v = velocidad, e= distancia y t = tiempo. Despejando el tiempo en dicha fórmula: $t = \dfrac{e}{v}$.

Llamamos v_1, e_1 y t_1 los datos del primer tramo, campo a través, y v_2, e_2 y t_2 los del segundo, los de la carretera.

La función que relaciona la distancia x con el tiempo total empleado es $t = f(x) = t_1 + t_2$.

Aplicando el teorema de Pitágoras, la distancia recorrida campo a través es $e_1 = \sqrt{x^2 + 1600}$.

Como v_1 = 50 km/h y v_2 = 120 km/h y $e_2 = 30 - x$ tenemos que $t_1 = \dfrac{e_1}{v_1} = \dfrac{\sqrt{x^2+1600}}{50}$ y $t_2 = \dfrac{e_2}{v_2} = \dfrac{30-x}{120}$.

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1600}}{50} + \dfrac{30-x}{120} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{12x - 5\sqrt{x^2+1600}}{600\sqrt{x^2+1600}} = 0$.$x \simeq$ 18,334 km.

Como $f'(x) < 0$ si $0 < x < 18{,}334$, y $f'(x) > 0$ si $18{,}334 < x < 30$, entonces $x \simeq 18{,}334$ es un mínimo de $f(x)$.

El tiempo empleado es $f(18{,}334) \simeq 0{,}977$ horas $= 0{,}977 \cdot 60$ minutos $\simeq 58$ minutos.

Eso quiere decir que, aún siguiendo el camino más rápido, no llegarán a tiempo.

Hay que observar que en los casos extremos se obtienen resultados parecidos:

$f(0) = 1, 05$ horas = 1 hora y 3 minutos

$f(30) = 1$ hora

Por tanto, si hacen todo el trayecto campo a través, se tardarán 1 hora, y si hace el trayecto mayor que se puede por carretera, 30 km, después de 40 km campo a través, se tarda prácticamente lo mismo, una hora exacta.

AUTOEVALUACION

Averigua qué has aprendido

1. Determina los dominios de f y de f', así como una expresión para f' en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x)=\frac{x}{2}-x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2}$ **b)** $f(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x\sqrt{3}}$

a) $f'(x)=\frac{1}{2}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{x^2}$, $D(f)=D(f')=\mathbb{R}-\{0\}$

b) $f'(x)=-\frac{8}{x^3}+\frac{15}{x^4}-\frac{2}{\sqrt{3}\,x^2}$, $D(f)=D(f')=\mathbb{R}-\{0\}$

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2+x}$ **b)** $f(x)=\cos^2(3x-4)$

a) Si $x\neq 0 \Rightarrow f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ y, por tanto, $f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-(x-1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

b) $f'(x)=2\cos(3x-4)\left[-\text{sen}(3x-4)\right]\cdot 3=-6\cos(3x-4)\,\text{sen}(3x-4)$

3. Halla las expresiones de las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{(5x+1)^2}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\left(1+5\sqrt{x}\right)^3$

a) $f'(x)=\frac{2(5x+1)\cdot 5(x^2-1)-(5x+1)^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2(5x+1)(5x^2-5-5x^2-x)}{(x^2-1)^2}=-\frac{2(5x+1)(x+5)}{(x^2-1)^2}$

b) $f'(x)=3\left(1+5\sqrt{x}\right)^2\cdot\frac{5}{2\sqrt{x}}=\frac{15\left(1+5\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}}$

4. Halla la derivada segunda de la función $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

$f'(x)=\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\cdot\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-(x+1)}{x^2}=-\frac{1}{x(x+1)}$ $\quad f''(x)=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$

También se pueden usar las propiedades de logaritmos y luego derivar: $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x(x+1)}$ $\quad f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}=\frac{-x^2+x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}=\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$

5. ¿Hay algún punto en la gráfica de $f(x)=\frac{3}{x+1}$ en el que la tangente sea horizontal?

No, pues $f'(x)=-\frac{3}{(x+1)^2}$ nunca se anula.

6. **En cada caso, determina los puntos de la gráfica de *f* en los que la tangente tiene de pendiente *m*.**

a) $f(x)=\left(x^2-x-2\right)^3$, $m=0$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}$, $m=1$

a) $f'(x)=3\left(x^2-x-2\right)^2(2x-1)=0$ se cumple si $x^2-x-2=0$ o $2x-1=0$, cuyas soluciones son:

$x=-1$, $x=2$ y $x=\dfrac{1}{2}$, por lo que los puntos de la gráfica en el que la tangente tiene pendiente 0 son:

$A(-1, f(-1))=A(-1, 0)$; $B(2, f(2))=B(2, 0)$ y $C\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=C\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{729}{64}\right)$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}}=1$ cuya solución es: $4\sqrt{\dfrac{x}{2}-1}=1\Rightarrow\dfrac{x}{2}-1=\dfrac{1}{16}\Rightarrow x=\dfrac{17}{8}$.

El punto de la gráfica en el que la tangente tiene pendiente 1 es $A\left(\dfrac{17}{8}, f\left(\dfrac{17}{8}\right)\right)=A\left(\dfrac{17}{8},\dfrac{1}{4}\right)$.

7. **Sea $f(x)=ax^3+bx^2+3x$. Determina *a* y *b* sabiendo que en el punto *A*(1, 2) la tangente a la gráfica de *f* es una recta horizontal.**

Como *A* es un punto de la curva, se tiene que verificar $f(1)=2$, es decir $a+b+3=2\Rightarrow a+b=-1$.

$f'(x)=3ax^2+2bx+3$; $f'(1)=0$, es decir, $3a+2b+3=0\Rightarrow 3^a+2b=-3$

Se resuelve el sistema $\left.\begin{matrix}a+b=-1\\3a+2b=-3\end{matrix}\right\}$ y se obtiene $a=-1$ y $b=0$.

8. **Encuentra el máximo valor de la función $f(x)=x^2(x-1)$ en el intervalo [–1, 2].**

Como $f(x)=x^2(x-1)=x^3-x^2$, $f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)=0$ si $x=0$ o si $x=\dfrac{2}{3}$.

$f(-1)=-2$; $f(2)=4$; $f(0)=0$ y $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}$, así que el máximo valor de *f* en [–1, 2] se alcanza en $x=2$ y vale 4.

9. **Si $f'(2)=4$, $g'(2)=-3$, $f(2)=-1$, $g(2)=1$, $f'(1)=2$ y $g'(-1)=5$, calcula la derivada en $x=2$ de las funciones.**

a) $h(x)=f(g(x))$

b) $k(x)=g(f(x))$

a) $h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$ así que $h'(2)=f'(g(2))\cdot g'(2)=f'(1)\cdot(-3)=2\cdot(-3)=-6$.

b) $k'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$ así que $k'(2)=g'(f(2))\cdot f'(2)=g'(-1)\cdot 4=5\cdot 4=20$.

10. **Encuentra dónde es creciente y dónde es decreciente la función $f(x)=(1000-x)^2+x^2$.**

$f'(x)=-2(1000-x)+2x=4x-2000=0$ si $x=500$.

$f'(x)>0$ si $x>500$ y $f'(x)<0$ si $x<500$.

Así pues, *f* es creciente en $(500, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 500)$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada uno de los siguientes apartados.

1. La tangente a la curva de ecuación $y = x^2$ en el punto $P(2, 4)$ pasa por el punto:

A. (1, 3) **C.** (–1, 0)

B. (1, –4) **D.** (–1,–8)

$f'(x) = 2x$ $f'(2) = 4$, por lo que la ecuación de la tangente pedida es $y - 4 = 4(x - 2)$, es decir, $y = 4x - 4$, que pasa por el punto (–1, –8).La respuesta es la D.

2. Si la tangente a la gráfica de f en el punto $P\left(1, \frac{2}{3}\right)$ corta al eje de ordenadas en el punto (0, 1), el valor de $f'(1)$ es:

A. $\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3}$ **D.** 1

Como la recta que pasa por $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ y por (0, 1), tiene pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{0 - 1} = -\frac{1}{3}$, entonces $f'(1) = -\frac{1}{3}$, por lo que la respuesta es la C.

3. La derivada de $(f \circ g)$ en el punto $x = 0$, siendo $g(x) = e^{-6x}$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$, toma el valor:

A. 0 **C.** –2

B. –1 **D.** e

$(f \circ g)'(0) = f'(g(0))\, g'(0)$. Como $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ y $g'(x) = -6e^{-6x}$, se tiene que $f'(g(0)) = f'(1) = \frac{1}{3}$ y $g'(0) = -6$.

$(f \circ g)'(0) = \frac{1}{3} \cdot (-6) = -2$, por lo que la respuesta es la C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas.

4. **Considera la función $f(x) = 2x\sqrt{3-x}$, definida en $(-\infty, 3]$ y sea *T* la tangente a su gráfica en el punto de abscisa 0. Entonces:**

A. Para todo x de $(-\infty, 3]$, $f'(x) = \dfrac{6-3x}{\sqrt{3-x}}$

B. Para todo x de $(-\infty, 3]$, $f'(x) \leq 4$

C. La ecuación de la recta *T* es $y = 2\sqrt{3x}$.

D. Para todo x de $(-\infty, 3]$, $f'(x) = 2\sqrt{3-x} + \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$

A. $f'(x) = 2\sqrt{3-x} - \dfrac{2x}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{2(3-x)-x}{\sqrt{3-x}} = \dfrac{6-3x}{\sqrt{3-x}} \Rightarrow$ A es verdadera.

B. Falsa pues, por ejemplo, $f'(-1) = \dfrac{9}{2} > 4$.

C. Es falsa pues $f(x) = 2\sqrt{3x}$ no es la ecuación de una recta.

D. Es falsa pues $f'(x) = 2\sqrt{3-x} - \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$.

5. **Si *f* es la función definida por la fórmula $f(x) = \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{1000} + \dfrac{1}{10^3}$, si $x \neq 0$, entonces:**

A. El dominio de *f* son todos los números reales.

B. $f'(1) = -\dfrac{9}{2}$

C. Las tangentes en los puntos de abscisas 1 y –1 son paralelas.

D. $f'(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} - \dfrac{5}{x^2}$

A. Como $x = 0$ no está en el dominio de *f* la afirmación A es falsa.

B. $f'(x) = -\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, por lo que $f'(1) = -5 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{9}{2} \Rightarrow$ B es verdadera.

C. $f'(-1) = -5 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{11}{2}$. Así pues, como $f'(-1) \neq f'(1)$, la afirmación C es falsa.

D. Es verdadero, como hemos visto en el cálculo del apartado B.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas.

6. **Sea *f* una función definida en $\mathbb{R}$, con derivada en todos sus puntos y considera las dos afirmaciones siguientes:**

1 $f'(x) > 0$

2. ***f* es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.**

Entonces:

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí

$1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$ como ocurre con la función $f(x) = x^3$, en $x = 0$, pues $f(x)$ es creciente en $x = 0$, pero $f'(0)$ no es positiva. Por tanto, la afirmación correcta es la A.

Razona cuál de los siguientes datos es innecesario

7. **Para encontrar el número que mide la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ en un intervalo cerrado se tienen los siguientes datos:**

1. El valor de *a* **2. El valor de *b*** **3. El valor de *c***

Entonces, puede eliminarse, por innecesario:

A. El dato 1

B. El dato 2

C. El dato 3

D. Todos los datos son necesarios.

Si el máximo se alcanza en $x = p$ y el mínimo en $x = q$

$f(p) - f(q) = \left(ap^2 + bp + c\right) - \left(aq^2 + bq + c\right) = a\left(p^2 - q^2\right) + b(p - q)$, con lo que sobra el valor de c .La respuesta correcta es la C.

9 Funciones elementales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Encuentra los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones y estudia su signo.

a) $f(x) = 6x - 5$ **b)** $f(x) = x^2 + 3x - 4$ **c)** $f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x+1}$ **d)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$

a) $D(f) = \mathbb{R}$. Signo de la función: $f(x) > 0$ si $x > \dfrac{5}{6}$ y $f(x) < 0$ si $x < \dfrac{5}{6}$

Cortes con eje X: $y = 0$; $6x - 5 = 0$; $x = \dfrac{5}{6}$. El punto $A\left(\dfrac{5}{6}, 0\right)$

Corte con eje Y: $x = 0$; $y = 6 \cdot 0 - 5 = -5$. El punto $B(0, -5)$

b) $D(f) = \mathbb{R}$. Signo de la función: $f(x) < 0$ si $x \in (-4, 1)$ y $f(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

Cortes con eje X: $y = 0$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $x_1 = -4$; $x_2 = 1$. Los puntos $A(-4, 0)$ y $B(1, 0)$

Corte con eje Y: $x = 0$, $y = 0^2 + 3 \cdot 0 - 4 = -4$. El punto $C(0, -4)$

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$. Signo de la función: $f(x) > 0$ si $x \in (-2, -1) \cup (3, +\infty)$ y $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 3)$

Cortes con eje X: $y = 0$; $\dfrac{(x-3)(x+2)}{x+1} = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 3$. Los puntos $A(-2, 0)$ y $B(3, 0)$

Corte con eje Y: $x = 0$, $y = \dfrac{(0-3)(0+2)}{0+1} = \dfrac{-3 \cdot 2}{1} = -6$. El punto $C(0, -6)$

d) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. Signo de la función: $f(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

Cortes con eje X: $y = 0$; $\sqrt{x^2 - 3x} = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$. Los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 0)$

Corte con eje Y: $x = 0$, $y = \sqrt{0^2 - 3 \cdot 0} = 0$. El punto $A(0, 0)$

3. Estudia si las siguientes funciones son pares o impares, o ninguna de las dos cosas.

a) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ **c)** $f(x) = |x|$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

a) $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x = -f(x)$. Por lo que $f(x)$ es impar.

b) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$. Por lo que $f(x)$ es par.

c) $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Por lo que $f(x)$ es par.

d) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^3 + 1} = \dfrac{1}{-x^3 + 1}$. $f(-x) \neq f(x)$. $f(-x) \neq -f(x)$. Por lo que $f(x)$ no es par ni impar.

4. Ejercicio resuelto.

5. Esboza las gráficas de las siguientes parábolas.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) $f(x) = x^2 - x + 3$

c) $f(x) = -x^2 + 9$

d) $f(x) = -x^2 - 1$

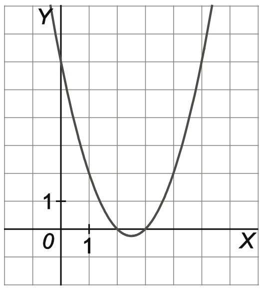
a) $D(f) = \mathbb{R}$. $f(x) = (x-2)(x-3)$.

Cortes con el eje *X*: *A*(2, 0) y *B*(3, 0). Corte con el eje *Y*: *B*(0, 6)

Signo de la función: $f(x) > 0$ *si* $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ y $f(x) < 0$ si $x \in (2, 3)$

Vértice de la parábola: $f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(x) = 0$ *si* $x = \frac{5}{2} \Rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *V* es un mínimo absoluto.



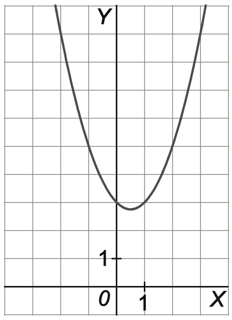
b) $D(f) = \mathbb{R}$. $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$.

No corta al eje *X*. Corte con eje *Y*: $C(0, 3)$

Signo de la función: *f*(*x*) es siempre positiva.

Vértice de la parábola: $f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 0$ *si* $x = \frac{1}{2} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *V* es un mínimo absoluto.



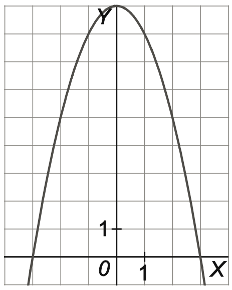
c) $D(f) = \mathbb{R}$. $f(x) = -(x-3)(x+3)$.

Corte con eje *X*: *A*(–3, 0) y *B*(3, 0). Corte con eje *Y*: *C*(0, –9)

Signo de la función: $f(x) > 0$ si $x \in (-3, 3)$ y $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

Vértice de la parábola: $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0$ *si* $x = 0 \Rightarrow V(0, 9)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. *V* es un máximo absoluto.



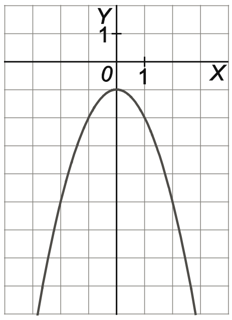
d) $D(f) = \mathbb{R}$. $f(x) = -(x^2 + 1)$

No corta al eje *X*. Corte con eje *Y*: *C*(0, –1)

Signo de la función: *f*(*x*) es siempre negativa.

Vértice de la parábola: $f'(x) = -2x \Rightarrow f'(x) = 0$ *si* $x = 0 \Rightarrow V(0, -1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. *V* es un máximo absoluto.



6. Determina los puntos de corte con los ejes y el signo de las siguientes funciones polinómicas y esboza su correspondiente gráfica.

a) $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

b) $(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$

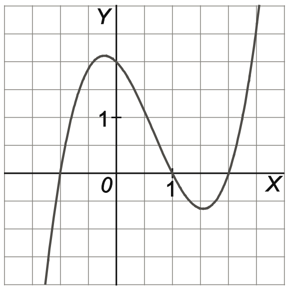
c) $f(x) = -(x - 1)^2(x - 3)^2$

d) $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$

e) $f(x) = -2x(x^2 - 3x + 2)$

f) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$

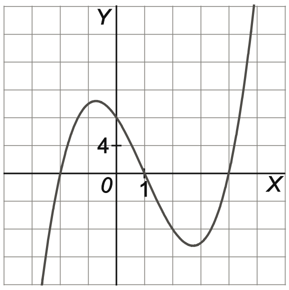
a) Cortes los ejes: Eje X ($y = 0$): $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(2, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $D(0, 2)$



$-\infty$ $\quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad$ $+\infty$

$x + 1$	–	+	+	+
$x - 1$	–	–	+	+
$x - 2$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+

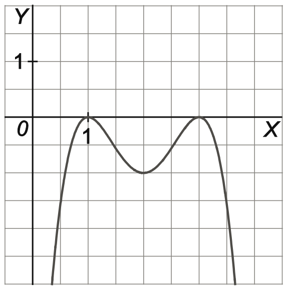
b) Cortes con los ejes: Eje X ($y = 0$): $A(-2, 0)$, $B(1, 0)$ y $C(4, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $D(0, 8)$.



$-\infty$ $\quad -2 \quad 1 \quad 4 \quad$ $+\infty$

$x + 2$	–	+	+	+
$x - 1$	–	–	+	+
$x - 4$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+

c) Cortes con los ejes: Eje X ($y = 0$): $A(1, 0)$ y $B(3, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $C(0, -9)$

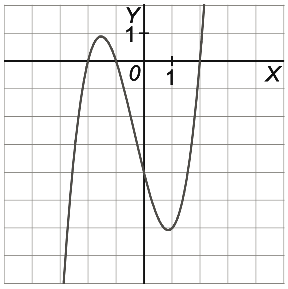


$-\infty$ $\quad 1 \quad 3 \quad$ $+\infty$

$(x - 1)^2$	+	+	+
$(x - 3)^2$	+	+	+
$f(x)$	–	–	–

d) $f(x) = (x+2)(x-2)(x+1)$

Cortes con los ejes: Eje X ($y = 0$): $A(-2, 0)$, $B(-1, 0)$ y $C(2, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $D(0, -4)$

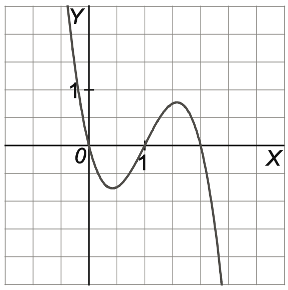


$-\infty$ $\quad -2 \quad -1 \quad 2 \quad$ $+\infty$

$x + 2$	–	+	+	+
$x + 1$	–	–	+	+
$x - 2$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+

e) $f(x) = -2x(x-1)(x-2)$

Cortes con los ejes: Eje X ($y = 0$): $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ y $B(2, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $O(0, 0)$

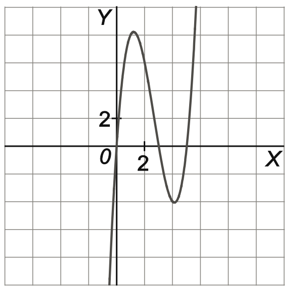


$-\infty$ $\quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad$ $+\infty$

$-2x$	+	–	–	–
$x - 1$	–	–	+	+
$x - 2$	–	–	–	+
$f(x)$	+	–	+	–

f) $f(x) = x(x-3)(x-5)$.

Corte con los ejes: Eje X ($y = 0$): $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ y $B(5, 0)$. Eje Y ($x = 0$): $O(0, 0)$



$-\infty$ $\quad 0 \quad 3 \quad 5 \quad$ $+\infty$

x	–	+	+	+
$x - 3$	–	–	+	+
$x - 5$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+

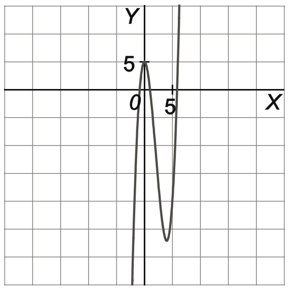
7. Haz el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y dibuja sus gráficas.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
b) $f(x) = x^3 - 7x + 6$
c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 5$
e) $f(x) = 3x^4 - 15x^3 + 19x^2 - 5x + 6$
f) $f(x) = x^5 - 5x^3$

a) $f(x) = (x-1)\left(x - \dfrac{5+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{5-3\sqrt{5}}{2}\right) \simeq (x-1)(x-5{,}85)(x+0{,}85)$

Cortes con el eje X ($y = 0$): (–0,85; 0), (1, 0) y (5,85; 0). Corte con el eje Y ($x = 0$): (0, 5)

	$-\infty$ a $-0{,}85$	$-0{,}85$ a 1	1 a $5{,}85$	$5{,}85$ a $+\infty$
$x + 0{,}85$	–	+	+	+
$x - 1$	–	–	+	+
$x - 5{,}85$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \Rightarrow f(x)$ creciente

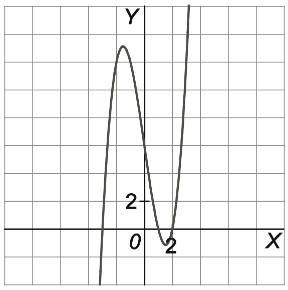
$f'(x) < 0$ si $x \in (0, 4) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $E(0, 5)$ Mínimo relativo: $F(4, -27)$

b) $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2)$

Cortes con el eje X ($y = 0$): (–3, 0), (1, 0) y (2, 0). Corte con el eje Y ($x = 0$): (0, 6)

	$-\infty$ a -3	-3 a 1	1 a 2	2 a $+\infty$
$x + 3$	–	+	+	+
$x - 1$	–	–	+	+
$x - 2$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$f'(x) = 3x^2 - 7$

$f'(x) > 0$ si $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\dfrac{7}{3}}, +\infty\right) \Rightarrow f(x)$ creciente

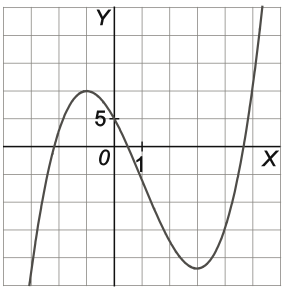
$f'(x) < 0$ si $x \in \left(-\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \sqrt{\dfrac{7}{3}}\right) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $\left(-\sqrt{\dfrac{7}{3}}, \dfrac{14}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}} + 6\right)$ Mínimo relativo: $\left(\sqrt{\dfrac{7}{3}}, -\dfrac{14}{3}\sqrt{\dfrac{7}{3}} + 6\right)$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x = x(x^2 - 3x - 9)$

Cortes con el eje X ($y = 0$): (0, 0), $\left(\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$. Corte con el eje Y ($x = 0$): (0, 0)

	$-\infty$ a $-1{,}850$	$-1{,}850$ a 0	0 a $-4{,}85$	$-4{,}85$ a $+\infty$
x	–	–	+	+
$x^2 - 3x - 9$	+	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

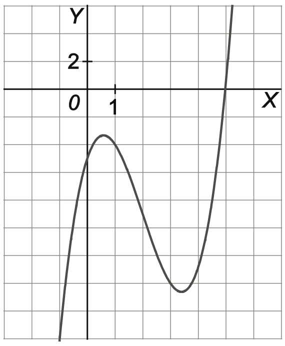
$f'(x) = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \Rightarrow f(x)$ creciente

$f'(x) < 0$ si $x \in (-1, 3) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $(-1, 5)$. Mínimo relativo: $(3, -27)$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x - 5$



Corte con eje X ($y = 0$): (5, 0).
Corte con eje Y ($x = 0$): (0, –5).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

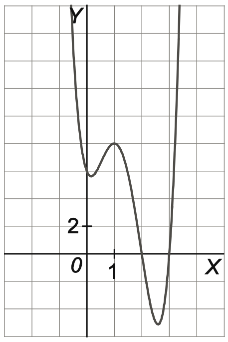
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 6$

$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup \left(2+\sqrt{2}, +\infty\right) \Rightarrow f(x)$ creciente

$f'(x) < 0$ si $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $\left(2-\sqrt{2}, -9+4\sqrt{2}\right)$; Mínimo relativo: $\left(2+\sqrt{2}, -9-4\sqrt{2}\right)$

e) $f(x) = 3x^4 - 15x^3 + 19x^2 - 5x + 6$



Corte con eje X ($y = 0$): (2, 0) y (3, 0)
Corte con eje Y ($x = 0$): (0, 6)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

No presenta simetrías.

$f'(x) = 12x^3 - 45x^2 + 38x - 5 = (x-1)\left(12x^2 - 33x + 5\right) \simeq (x-1)(x-0{,}16)(x-2{,}59)$

$f'(x) > 0$ si $x \in (0{,}16; 1) \cup (2{,}59; +\infty) \Rightarrow f(x)$ creciente

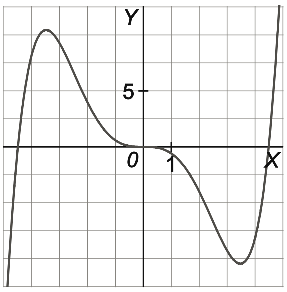
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty; 0{,}16,) \cup (1; 2{,}59) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $(1, 8)$; Mínimo relativo: $(0{,}16; 5{,}63)$; Mínimo absoluto: $(2{,}59; -5{,}11)$

f) $f(x) = x^5 - 5x^3 = x^3\,(x^2 - 5) = x^3\,(x + 2,\,24)\,(x - 2{,}24)$ es una función impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

Cortes con el eje X ($y = 0$): A(–2,24; 0), O(0, 0) y B(2,24; 0). Corte con el eje Y ($x = 0$): O(0, 0)

	−∞ … −2,24	−2,24 … 0	0 … 2,24	2,24 … +∞
$x + 2{,}24$	–	+	+	+
x^3	–	–	+	+
$x - 2{,}24$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

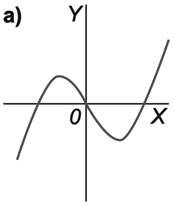
$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2 - 3)$

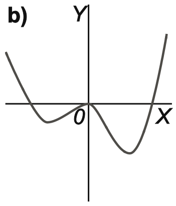
$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right) \Rightarrow f(x)$ creciente

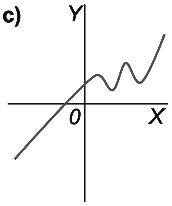
$f'(x) < 0$ si $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup \left(0, \sqrt{3}\right) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Máximo relativo: $\left(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}\right)$ Mínimo relativo: $\left(\sqrt{3}, -6\sqrt{3}\right)$

8. Las gráficas siguientes son de funciones polinómicas. Deduce en cada caso cuál es su mínimo grado posible y el signo del coeficiente de mayor grado.

a)


b)


c)


a) Está función tiene 2 extremos relativos, por lo que su derivada $f'(x)$ debe tener, al menos, 2 raíces distintas, y será, pues, como mínimo de grado 2. Por tanto, como la función f(x) es de un grado más que su derivada, será, como mínimo, de grado 3: $f(x) = ax^3 + \dots$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (ax^3 + ...) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^3 = +\infty$, el coeficiente *a* del monomio de mayor grado es positivo.

b) En la gráfica se ve que la función tiene 3 extremos relativos, por lo que su derivada $f'(x)$ debe ser, al menos, de grado 3. Así pues, la función f(x), será, como mínimo, de grado 4: $f(x) = ax^4 + \dots$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (ax^4 + ...) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^4 = +\infty$, el coeficiente *a* del monomio de mayor grado es positivo.

c) La función tiene 4 extremos relativos, por lo que la función $f(x)$, será, como mínimo, de grado 5: $f(x) = ax^5 + \dots$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (ax^4 + ...) = \lim\limits_{x\to+\infty} ax^4 = +\infty$, el coeficiente *a* del monomio de mayor grado es positivo.

9. Determina la expresión de una función polinómica de grado cuatro que tenga simetría respecto del eje *Y* y que no corte en ningún punto al eje de abscisas.

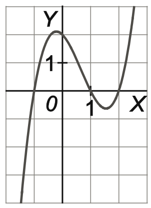
Por ser simétrica respecto del eje *Y*, $f(x)$ tiene simetría par, y por ser polinómica, debe ser de la forma: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Además, si $f(x)$ no corta al eje de abscisas, los coeficientes *a*, *b* y *c* debe ser tales que la ecuación $ax^4 + bx^2 + c = 0$ no tenga solución real, por ejemplo $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$.

10. Escribe una función polinómica de tercer grado, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $b \neq 0$ que no tenga ni máximos ni mínimos relativos.

Para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ no tenga ni máximos ni mínimos relativos, es suficiente que la derivada nunca se haga cero, es decir, que $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \neq 0$ para todo *x*. Para ello basta con que el discriminante de la ecuación $3ax^2 + 2bx + c = 0$ sea negativo, es decir, que $4b^2 - 12ac < 0$. Esta situación se presenta, por ejemplo, con $b = 1$, $c = 1$, $a = 1$. Podemos elegir, en ese caso, cualquier valor para el coeficiente *d*, como por ejemplo $d = 0$
Así pues $f(x) = x^3 + x^2 + x$ no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

11. Escribe una función polinómica de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo.

Basta con pensar en una función que corte tres veces al eje de abscisas, cambiando de signo cada vez, por ejemplo: $f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 1)$.



12. Ejercicio resuelto.

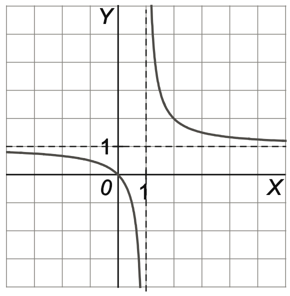
13. Realiza el estudio de estas funciones racionales y dibuja su correspondiente gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ **g)** $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+1}$ **e)** $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-4}$ **h)** $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3}{x+2}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **i)** $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{1\}$



Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

La función es positiva en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(0,1)$.

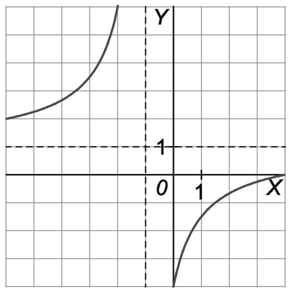
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, por tanto, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ no se anula nunca: es negativa en todo el dominio, por tanto la función es siempre decreciente y carece de extremos relativos.

b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$



Corte con el eje X: $f(x)=0\Rightarrow \dfrac{x-4}{x+1}=0\Rightarrow x-4=0\Rightarrow x=4$, es decir, f corta al eje X en el punto $A(4,0)$.

Corte con el eje Y: $f(0)=-4$, es decir, f corta al eje Y en $B(0,-4)$.

La función es positiva en $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$ y negativa en $(-1, 4)$.

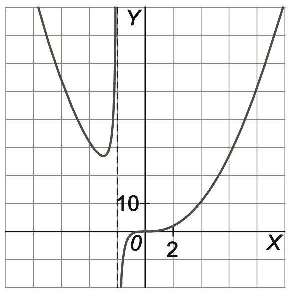
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-4}{x+1}=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-4}{x+1}=1$, por tanto, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}$ no se anula nunca: es positiva en todo el dominio, por tanto la función es siempre creciente y carece de extremos relativos.

c) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x+2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\}$



Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

La función es positiva en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y negativa en $(-2, 0)$.

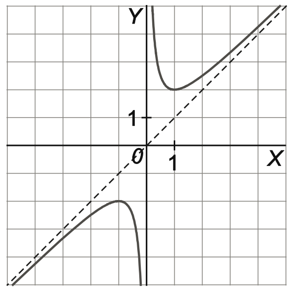
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=\dfrac{2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$ se anula en $x=-3$ y en $x=0$. La derivada es negativa (función decreciente) en $(-\infty,-3)$ y positiva (función creciente) en $(-3,-2)$ por lo que el punto $A(-3, 27)$ es un mínimo relativo. Es positiva (función creciente) en $(-2, 0)$ y sigue siendo positiva (función creciente) en $(0,+\infty)$, por lo que el punto $O(0, 0)$ no es un extremo a pesar de que tenga tangente horizontal. Es un punto de inflexión.

d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$



Es una función impar porque $f(-x) = -f(x)$, por tanto, su gráfica es simétrica respeto del origen de coordenadas.

No corta al eje *X* porque $f(x)$ nunca se anula.

No corta al eje *Y* porque $x = 0 \notin D(f)$.

La función es negativa en $(-\infty, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$

Asíntotas verticales: Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -0^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$, por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

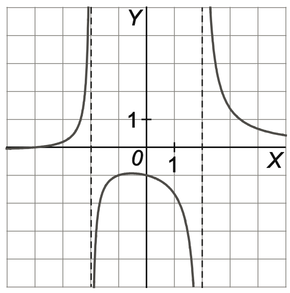
Como sí cumple la condición de los grados, dividimos para obtener la asíntota oblicua: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.

La asíntota oblicua es la recta $y = x$.

La derivada $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ se anula en $x = -1$ y en $x = 1$.

La derivada es positiva (función creciente) en $(-\infty, -1)$ y negativa (función decreciente) en $(-1, 0)$, por lo que el punto $A(-1, -2)$ es un máximo relativo. Y es negativa (función decreciente) en $(0, 1)$ y positiva (función creciente) en $(1, +\infty)$, por lo que el punto $B(1, 2)$ es un mínimo relativo.

e) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$



Corta a los ejes en los puntos $A(-4, 0)$ y $B(0, -1)$.

La función es negativa en $(-\infty, -4) \cup (-2, 2)$ y positiva en $(-4, -2) \cup (2, +\infty)$.

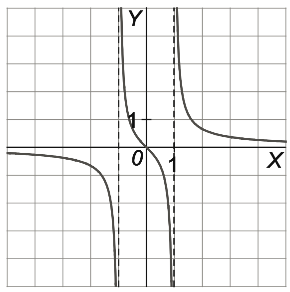
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = -2$ es una asíntota vertical. Y también, como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas, porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x) = -\dfrac{x^2+8x+4}{(x^2-4)^2}$ se anula en $x = -7{,}46$ y en $x = -0{,}54$. La derivada es negativa (función decreciente) en $(-\infty; -7{,}46)$ y positiva (función creciente) en $(-7{,}46, -2)$, por lo que el punto $C(-7{,}46; -0{,}07)$ es un mínimo relativo. La derivada es positiva (función creciente) en $(-2; -0{,}54)$ y negativa (función decreciente) en $(-0{,}54; 2)$, por lo que el punto $D(-0{,}54; -0{,}93)$ es un máximo relativo. Además, en $(2, +\infty)$ la derivada es negativa y la función decreciente.

f) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$



Es una función impar porque $f(-x) = -f(x)$, por tanto, su gráfica es simétrica respeto del origen de coordenadas.

Solo corta a los ejes en el punto $O(0, 0)$.

La función es negativa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y positiva en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

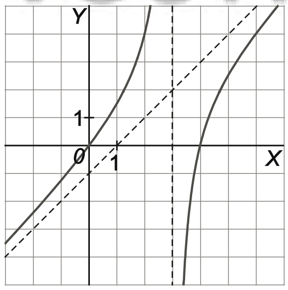
Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical. Y también, como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$, por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x) = -\dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ no se anula nunca: es negativa en todo el dominio, por tanto la función es siempre decreciente y carece de extremos relativos.

g) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$



Corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-4x}{x-3} = \dfrac{x(x-4)}{x-3} = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$

y $x = 4$, por tanto, *f* corta al eje *X* en los puntos $O(0,0)$ y $A(4,0)$.

Corta al eje *Y* en el origen de coordenadas.

La función es negativa en $(-\infty, 0) \cup (3, 4)$ y positiva en $(0, 3) \cup (4, +\infty)$.

Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

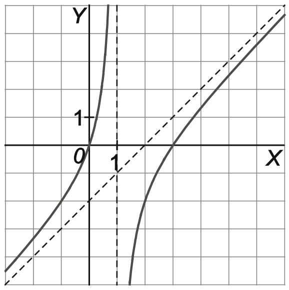
Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

Como cumple la condición de los grados, dividimos para obtener la asíntota oblicua:

$f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x-3} = x - 1 - \dfrac{3}{x-3}$. La asíntota oblicua es la recta $y = x - 1$.

La derivada $f'(x) = \dfrac{x^2-6x+12}{(x-3)^2}$ no se anula nunca pues $x^2-6x+12 = (x-3)^2+3$. Es positiva en todo el dominio, por tanto la función es siempre creciente y carece de extremos relativos.

h) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$



Corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-3x}{x-1} = \dfrac{x(x-3)}{x-1} = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ y

$x = 3$, por tanto, *f* corta al eje *X* en los puntos $O(0,0)$ y $A(3,0)$.

Corta al eje *Y* en el origen de coordenadas *O*.

La función es negativa en $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$ y positiva en $(0, 1) \cup (3, +\infty)$.

Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

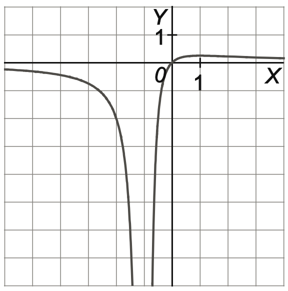
Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-3x}{x-1} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-3x}{x-1} = -\infty$, por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

Como cumple la condición de los grados, dividimos para obtener la asíntota oblicua:

$f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x-1} = x - 2 - \dfrac{2}{x-1}$. La asíntota oblicua es la recta $y = x - 2$.

La derivada $f'(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$ no se anula nunca ya que $x^2-2x+3 = (x-1)^2+2$, por lo que es positiva en todo el dominio. Por tanto la función es siempre creciente y carece de extremos relativos.

i) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : (x+1)^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{-1\}$



Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

La función es negativa en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$.

Asíntotas verticales: como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

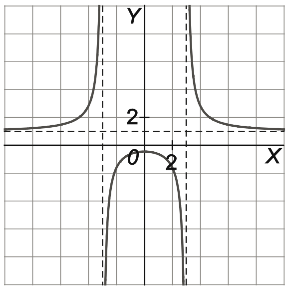
No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada, $f'(x) = \dfrac{1-x}{(x+1)^3}$, se anula en $x = 1$: es positiva (función creciente) en $(-1, 1)$ y es negativa (función decreciente) en $(1, +\infty)$, por tanto el punto $A\left(1, \dfrac{1}{4}\right)$ es un máximo absoluto.

14. Estudia las siguientes funciones racionales y dibuja su correspondiente gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-9}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{9x^2}{x^2+x-2}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-9\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-3,3\}$



La función es par, por lo tanto, simétrica respecto del eje *Y*.

No corta al eje X. El corte con el eje Y es el punto $A\left(0,-\dfrac{4}{9}\right)$.

Asíntotas verticales:

Como $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-3$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=3$ es una asíntota vertical.

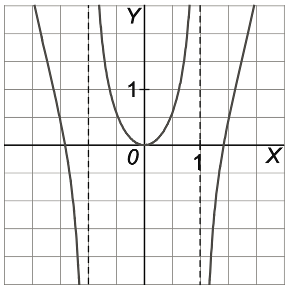
Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2-9}=1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2-9}=1$, por tanto, la recta $y=1$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=\dfrac{-26x}{(x^2-9)^2}$ se anula en $x=0$. Es positiva en $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$ y negativa en $(0,3)\cup(3,+\infty)$ por lo que el punto $A\left(0,-\dfrac{4}{9}\right)$ es un máximo relativo.

b) $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2-1}=\dfrac{x^2(x^2-2)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x^2\left(x+\sqrt{2}\right)(x-\sqrt{2})}{(x+1)(x-1)}$



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

La función es par, por lo tanto, simétrica respecto del eje *Y*.

Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Asíntotas verticales:

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

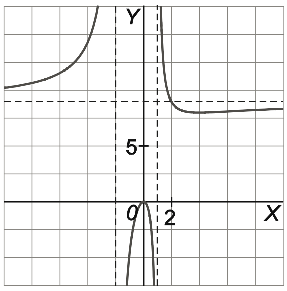
Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

No tiene asíntotas oblicuas porque no cumple la condición de los grados.

La derivada $f'(x)=\dfrac{2x(x^4-2x^2+2)}{(x^2-1)^2}$ se anula en $x=0$. Es negativa (función decreciente) en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y positiva (función creciente) en $(0,1)\cup(1,+\infty)$. El punto $O(0,0)$ es un mínimo relativo.

c) $f(x)=\dfrac{9x^2}{x^2+x-2}=\dfrac{9x^2}{(x+2)(x-1)}$



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: (x+2)(x-1)\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

La función es positiva en $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(-2,0)\cup(0,1)$.

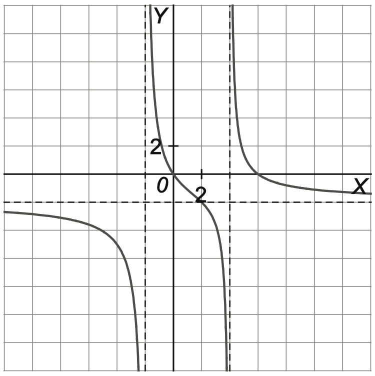
Asíntotas verticales: Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical y como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ también lo es.

Asíntotas horizontales: Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=9$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=9$, la recta $y=9$ es asíntota horizontal de la función, tanto a la derecha como a la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{9x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$ se anula en $x=0$ y en $x=4$. Es positiva (función creciente) en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(4,+\infty)$ y negativa (función decreciente) en $(0,1)\cup(1,4)$.

Por tanto, el punto $O(0,0)$ es un máximo relativo y el punto $A(4,8)$ es un mínimo relativo.

15. Representa una función racional cuyas asíntotas son las rectas $x = -2$, $x = 4$ e $y = -2$ y cuya derivada es siempre negativa en todos los puntos en que está definida. ¿Cuántas veces se anula una función con estas propiedades?



Se trata de un cociente de polinomios de igual grado en el numerador y en el denominador. El denominador se anula en $x = -2$ y $x = 4$.

Al ser la función siempre decreciente, debe ocurrir que $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, por lo que entre $x = -2$ y $x = 4$ debe anularse una vez y tener un punto de inflexión, (no puede tener máximos ni mínimos).

También debe anularse en $(4, +\infty)$.

Otra posible opción es que en esos puntos tuviese una discontinuidad evitable.

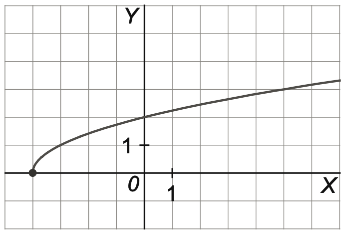
Una posible gráfica se muestra al margen.

16. Ejercicio resuelto.

17. Haz un estudio de las siguientes funciones radicales y dibuja su gráfica.

a) $f(x) = \sqrt{x+4}$ **b)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x}{x-2}}$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ **d)** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$

a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x + 4 \geq 0\} = [4, +\infty)$



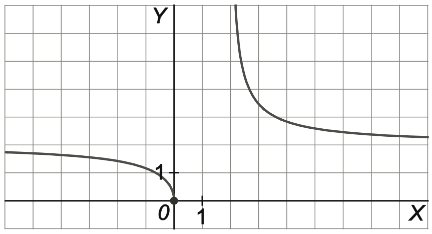
$f(x) = \sqrt{x+4}$ es continua y nunca es negativa.

Corte con ejes: $A(-4, 0)$ y $B(0, 2)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales. No tiene asíntotas verticales.

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$, siempre es positiva (salvo en $x = -4$), por lo que la función es creciente.

b) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{4x}{x-2} \geq 0\right\} = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$

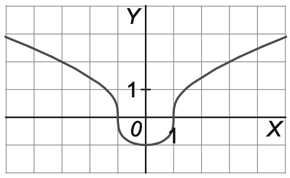


Nunca es negativa. Corte con ejes: $O(0, 0)$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha.

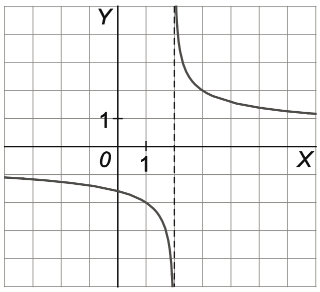
$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^2\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}}$ siempre es negativa, la función es decreciente. No tiene puntos con tangente horizontal.



c) $D(f) = \mathbb{R}$. Es continua. No tiene asíntotas verticales. Es par, por lo tanto, simétrica respecto del eje *X*. Corte con ejes: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ no tiene asíntotas horizontales. No tiene asíntotas oblicuas.

$f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ se anula en $x = 0$: es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. $O(0,0)$ es un mínimo absoluto.



d) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$ No corta a los ejes.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, tanto por la izquierda como por la derecha. No tiene asíntotas oblicuas.

$f'(x) = \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{(x-2)^4}} = \dfrac{-2}{(3x-6)\sqrt[3]{x-2}}$ es siempre negativa, por lo que la función $f(x)$ es decreciente. No tiene puntos con tangente horizontal.

18. Realiza el estudio completo y representa:

a) $f(x)=\sqrt{(x-2)(x-1)}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:(x-2)(x-1)\ge 0\}=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

Corte con el eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow\sqrt{(x-2)(x-1)}=0\Rightarrow(x-2)(x-1)=0\Rightarrow x=1$ y $x=2\Rightarrow$ Puntos $A(1,0)$ y $B(2,0)$.

Corte con el eje *Y*. $f(0)=\sqrt{2}$, es decir, *f* corta al eje *Y* en $C\left(0,\sqrt{2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. No tiene asíntotas horizontales. No tiene asíntotas verticales.

Las asíntotas oblicuas serán de la forma $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x-2)(x-1)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{(x-2)(x-1)}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2}}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x-2)(x-1)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)(x-1)-x^2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}+x}=-\frac{3}{2}$$

Así pues, la recta $y=x-\dfrac{3}{2}$ es una asíntota oblicua.

Cuando $x\to-\infty$, podría haber otra asíntota oblicua, también de la forma $y=mx+n$:

$m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{(x-2)(x-1)}}{x}=-1$. Obsérvese que $\left|\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\right|=1$ y como $\dfrac{f(x)}{x}$ es negativo para valores negativos de x, entonces $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ debe ser -1 claramente.

$$n=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x-2)(x-1)}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)(x-1)-x^2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}-x}$$

Para hallar este último límite, lo mejor es hacer un cambio de variable $x=-t$ y calcular:

$$n=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+2}{\sqrt{(x-2)(x-1)}-x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t+2}{\sqrt{(-t-2)(-t-1)}+t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{3t+2}{\sqrt{t^2+3t+2}+t}=\frac{3}{2}$$

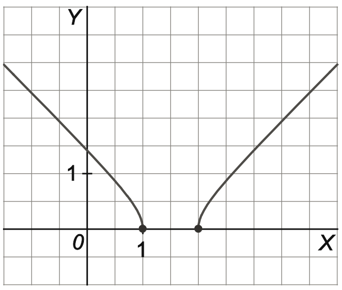
Es decir, por la izquierda la asíntota oblicua es la recta $y=-x+\dfrac{3}{2}$.

Este último cálculo de la asíntota oblicua por la izquierda podríamos haberlo obviado si caemos en la cuenta de que la función es simétrica respecto de la recta vertical $x=\dfrac{3}{2}$.

La derivada $f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x-2)(x-1)}}$ se anula en $x=\dfrac{3}{2}\notin D(f)$. No tiene puntos con tangente horizontal.

La función decrece si $x<1$ y crece si $x>2$.

La gráfica será, pues:



b) $\sqrt{1-x}$ está definida para $x \le 1$. El denominador se anula para $x = 0$, así que $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

Corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} = 0 \Rightarrow x = 0$, que como no pertenece al dominio, *f* no corta al eje *X*.

No corta al eje *Y* ya que $x = 0$ no está en el dominio.

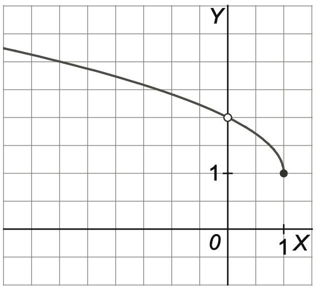
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ no existe ya que la función no está definida para dichos valores.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{1-1+x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1-x}\right) = 2$.

No tiene asíntotas verticales. En el punto de abscisa $x = 0$ hay una discontinuidad evitable.
No tiene asíntotas oblicuas.

La derivada $f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ nunca es positiva. La función es decreciente. No tiene puntos con tangente horizontal.



19. Ejercicio interactivo.

20. Ejercicio resuelto.

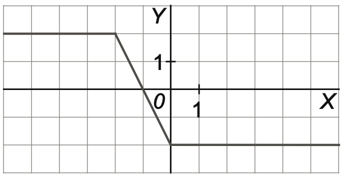
21. Escribe las siguientes funciones como funciones a trozos y dibuja su gráfica.

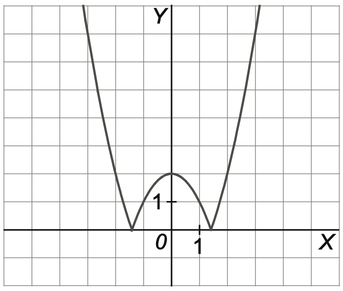
a) $f(x) = |x| - |x+2|$

b) $g(x) = |x^2 - 2|$

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ -2x-2 & \text{si} \quad -2 < x < 0 \\ -2 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si} \quad x < -\sqrt{2} \\ 2-x^2 & \text{si} \quad -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \\ x^2-2 & \text{si} \quad x > \sqrt{2} \end{cases}$



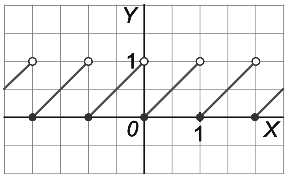


22. Ayudándote de una tabla de valores representa las siguientes funciones:

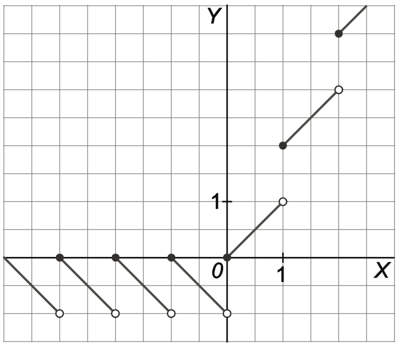
a) $f(x) = x - [x]$

b) $g(x) = |x| + [x]$

a) La función coincide con la parte decimal de x.



b) Cuidado al calcular $g(x)$ para valores negativos de x



23. Ejercicio resuelto.

24. Determina el dominio de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas.

a) $f(x) = a^{\sqrt{x^2-1}}$

b) $f(x) = a^{\frac{x}{x+2}}$

c) $g(x) = \log_a\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

d) $g(x) = \log_a \sqrt[3]{1-x^2}$

a) $x^2 - 1 \geq 0$ si $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \Rightarrow D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

c) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $1 - x^2 > 0$ si $x \in (-1, 1) \Rightarrow D(f) = (-1, 1)$

25. Realiza el estudio de las siguientes funciones y dibuja sus gráficas.

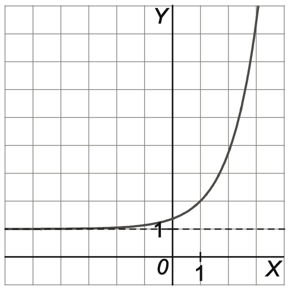
a) $f(x) = e^{x-1} + 1$

b) $f(x) = xe^{-x}$

c) $f(x) = \ln(x+1)$

d) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

a) Una opción sencilla para representar esta función es partir de $y = e^x$, desplazándola una unidad a la derecha para obtener $y = e^{x-1}$ y, finalmente, subirla una unidad, para obtener $f(x)$.



$D(f) = \mathbb{R}$. Es continua y siempre positiva. No tiene asíntotas verticales.

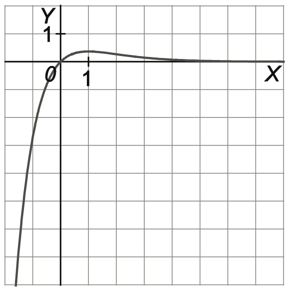
Puntos de corte con los ejes: $A\left(0, \dfrac{1}{e} + 1\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. La recta y = 1 es una asíntota horizontal por la izquierda.

Su derivada $f'(x) = e^{x-1}$ es siempre positiva por lo que la función es creciente en todo su dominio.

No tiene extremos relativos.

b) $D(f) = \mathbb{R}$. Es continua. No tiene asíntotas verticales.



Puntos de corte con los ejes: $O(0, 0)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

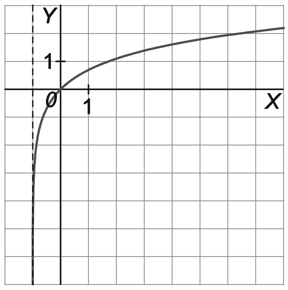
La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por la derecha.

Su derivada $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$ se anula si $x = 1$.

La función es creciente si x < 1 y decreciente si x > 1.

El punto $B\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$ es un máximo absoluto.

c) La gráfica es la de la de $y = \ln x$ desplazada una unidad a la izquierda.



$D(f) = (-1, +\infty)$. Es continua.

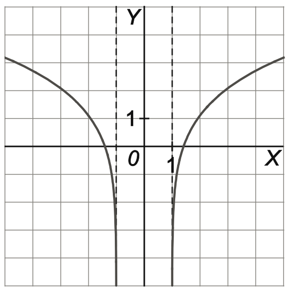
Puntos de corte con los ejes: $O(0, 0)$.

Como $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la función.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Su derivada $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ es siempre positiva por lo que la función es creciente en todo su dominio. No tiene extremos relativos.

d) $x^2 - 1 > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.



Puntos de corte con los ejes: $A\left(-\sqrt{2}, 0\right)$y $B\left(\sqrt{2}, 0\right)$.

Como $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales de la función.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. No tiene asíntotas horizontales.

Su derivada $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$ se anula en $x = 0 \notin D(f)$.

La función es decreciente si x < –1 y creciente si x > 1.

No tiene extremos relativos.

26. Utilizando la calculadora, halla el valor de *x* en las siguientes ecuaciones, restringiendo el resultado a ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$.

a) $\text{sen}x = \frac{1}{2}$

b) $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\text{sen}x = 0$

a) $x = \frac{\pi}{6}\text{rad} = 30°$

b) $x = \frac{\pi}{3}\text{rad} = 60°$

c) $x = \frac{\pi}{4}\text{rad} = 45°$

d) $x = 0\,\text{rad} = 0°$

27. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{arcsen}\left(3x^3 - 2x + 1\right)$

b) $f(x) = \arccos\left(x + \text{sen}x\right)$

c) $f(x) = \arccos e^x$

d) $f(x) = \text{arctg}\sqrt{x}$

a) $f'(x) = \dfrac{9x^2 - 2}{\sqrt{1 - \left(3x^3 - 2x + 1\right)^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-(1 + \cos x)}{\sqrt{1 - \left(x + \text{sen}x\right)^2}}$

c) $f'(x) = \dfrac{-e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

28. Ejercicio interactivo.

29. Ejercicio resuelto.

30. Un joven es contratado por una compañía telefónica como vendedor. Debe elegir entre dos tipos de retribución:

- ***A*: un sueldo fijo de 420 € más el 14 % de las ventas que consiga.**
- ***B*: un 26 % de las ventas que consiga.**

a) Encuentra dos funciones que aclaren al joven cómo se comporta cada uno de los sueldos dependiendo de lo que venda.
b) Según el volumen de ventas que realice, ¿cuál de los dos sueldos es más ventajoso?

a) Si llamamos *x* a las ventas (€) conseguidas, los sueldos (€) vienen dados por estas dos funciones: $A(x) = 420 + \frac{14}{100}x$; $B(x) = \frac{26}{100}x$

b) $A(x) = B(x)$ si $420 + 0{,}14x = 0{,}26x$, es decir, si $x = 3500$ €.
Hasta 3500 € de venta es preferible *A* y a partir de dicho volumen es preferible *B*.

31 a 36. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Propiedades globales de las funciones

37. Para las siguientes funciones, determina el dominio, calcula los puntos de corte con los ejes y estudia el signo, según los valores que tome la variable independiente a lo largo del dominio. Esboza la gráfica de la función.

a) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = (x-1)(x-3)^2(x-7)$

c) $f(x) = x(x^2+2)(x^2-1)$

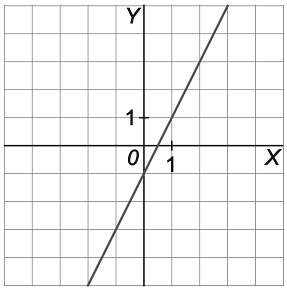
d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4}$

e) $f(x) = \dfrac{(x^2-9)x}{x+3}$

a) La función es una recta creciente. $D(f) = \mathbb{R}$.

Puntos de corte con los ejes: $A\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ y $B(0, -1)$

La función es positiva en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ y negativa en $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$.



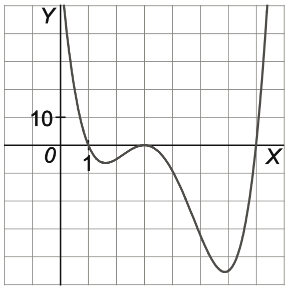
b) Función polinómica. $D(f) = \mathbb{R}$

Puntos de corte con los ejes: $A(0, 63)$; $B(1, 0)$; $C(3, 0)$; $D(7, 0)$

Signo: Como es continua, sólo podría cambiar de signo cuando corta al eje X.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

La función es positiva en $(-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ y negativa en $(1, 3) \cup (3, 7)$.



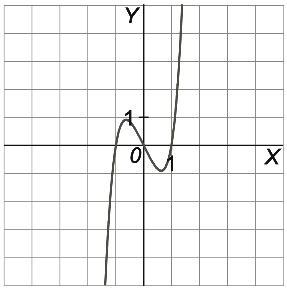
c) Función polinómica. $f(x) = x\left(x^2+2\right)\left(x^2-1\right) = x\left(x^2+2\right)(x-1)(x+1)$

$D(f) = \mathbb{R}$. Puntos de corte con los ejes: $A(0, 0)$; $B(-1, 0)$; $C(1, 0)$

Signo: Como es continua, sólo podría cambiar de signo cuando corta al eje X.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

La función es positiva en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

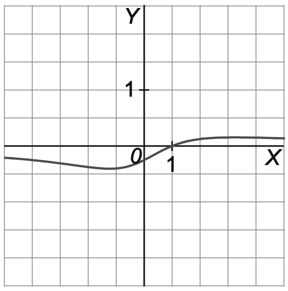


d) Función racional. $D(f) = \mathbb{R}$. El denominador no se anula nunca.

Puntos de corte con los ejes: $A\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$; $B(1, 0)$

Signo: La función es positiva en $(7, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, 1)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

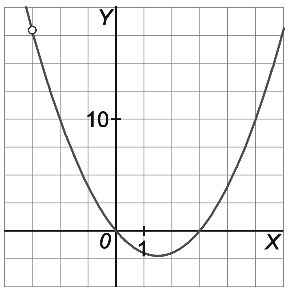


e) Si $x \neq -3$, $f(x) = \dfrac{\left(x^2-9\right)x}{x+3} = \dfrac{(x+3)(x-3)x}{x+3} = x(x-3)$. La gráfica de $f(x)$ es la de la parábola $g(x) = x(x-3)$ con un agujero en $A(-3, 18) \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

Puntos de corte con los ejes: $B(0, 0)$; $C(3, 0)$

La función es positiva en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ y negativa en (0, 3).

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



38. Estudia si las siguientes funciones tienen simetría respecto del eje *Y* o respecto del origen de coordenadas.

a) $f(x)=x^4-2x^2+3$

b) $f(x)=x(x-1)(x+1)$

c) $f(x)=x^2-3x$

d) $f(x)=x^2(x^2-1)(x^2+1)$

e) $f(x)=\dfrac{x}{2x^3-5}$

f) $f(x)=\dfrac{x^4+x}{2x+1}$

g) $f(x)=x^2|x|$

h) $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|-x^2}$

a) $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+3=x^4-2x^2+3=f(x)$. La función es simétrica con respecto del eje *Y*.

b) $f(-x)=-x(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)$. La función es simétrica respecto del origen.

c) $f(-x)=(-x)^2-3(-x)=x^2+3x$. No presenta ninguna de las dos simetrías.

d) $f(-x)=(-x)^2\left[(-x)^2-1\right]\left[(-x)^2\right]+1=x^2(x^2-1)(x^2+1)=f(x)$. La función es simétrica con respecto del eje *Y*.

e) $f(-x)=\dfrac{-x}{2(-x)^3-5}=\dfrac{-x}{-2x^3-5}=\dfrac{x}{2x^3+5}$. No presenta ninguna de las dos simetrías.

f) $f(-x)=\dfrac{(-x)^4+(-x)}{2(-x)+1}=\dfrac{x^4-x}{-2x+1}$. No presenta ninguna de las dos simetrías.

g) $f(-x)=(-x)^2|-x|=x^2|x|=f(x)$. La función es simétrica con respecto del eje *Y*.

h) $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{|-x|-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{|x|-x^2}=-f(x)$. La función es simétrica respecto del origen.

39. Halla el dominio de las siguientes funciones y los puntos en donde cortan a los ejes de coordenadas.

a) $f(x)=x^2+2x+2+\dfrac{10}{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{3-x}$

[Nota: en cada caso escribe la función dada como cociente de dos polinomios.]

a) $f(x)=x^2+2x+2+\dfrac{10}{x-3}=\dfrac{(x^2+2x+2)(x-3)+10}{x-3}=\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x-3}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)}{x-3}$

$D(f)=\mathbb{R}-\{3\}$.

Puntos de corte con los ejes: $A\left(0,-\dfrac{4}{3}\right); B(-2,0); C(1,0); D(2,0)$.

b) $f(x)=\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{-2x}{(3+x)(3-x)}$

$D(f)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Funciones polinómicas

40. Encuentra la función lineal $f(x)=ax+b$ que pasa por los puntos (2, –3) y (5, 3).

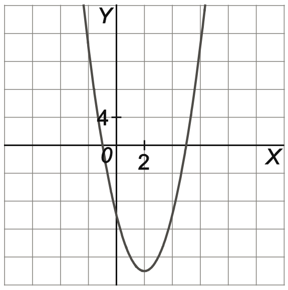
Si $f(x)=ax+b$, $\left.\begin{matrix}f(2)=-3\\ f(5)=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}2a+b=-3\\ 5a+b=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow a=2,\ b=-7\Rightarrow f(x)=2x-7$

41. Una parábola corta los ejes en los puntos (–1, 0), (5, 0) y (0, –10).

a) ¿Cuál es su vértice?

b) ¿Pasa por el punto (3, 16)?

c) Esboza su gráfica.



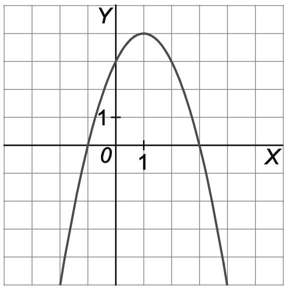
Al cortar al eje de abscisas en $A(-1, 0)$ y $B(5, 0)$ la abscisa de su vértice es $\frac{5+(-1)}{2} = 2$, y la ecuación de la parábola es $f(x) = a(x - 2)^2 + k$.
Como $f(5) = 0$, es $9a + k = 0$ y como $f(0) = -10$, tenemos que $4a + k = -10$.
Restando estas dos últimas igualdades, llegamos a $a = 2$, $k = -18$
La parábola es $y = 2(x - 2)^2 - 18 = 2x^2 - 8x - 10$.

a) El vértice es el punto V(2, –18).

b) No, porque $f(3) = -16$.

c) La gráfica se muestra al margen.

42. Haz un estudio completo de la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

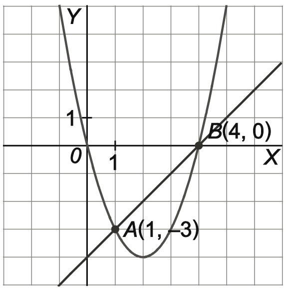


Es cóncava hacia abajo.
Corte con eje X: $A(-1, 0)$ y $B(3, 0)$
Corte con eje Y: $C(0, 3)$
Vértice: $V(1, 4)$

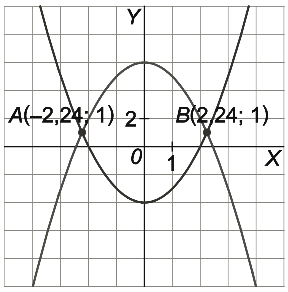
43. Halla gráficamente los puntos de corte de:

a) La recta $y = x - 4$ con la parábola $y = x^2 - 4x$.
b) Las parábolas $y = x^2 - 4$ e $y = -x^2 + 6$.

a)



b)



44. Halla la ecuación de la parábola que corta al eje vertical en y = 2 y cuyo vértice es el punto (1, 1).

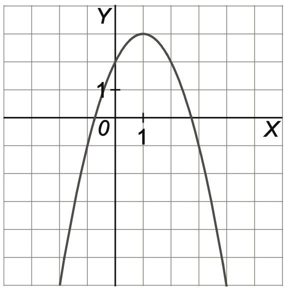
Se calcula el valor de los coeficientes a, b, c en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Se sabe que $f(0) = 2 = c$; y que $f(1) = 1$, por lo que $a + b + 2 = 1$; y que $-\frac{b}{2a} = 1$.

Así pues, $a + b = -1$, $-b = 2a$. De esto se deduce que $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$.
La ecuación de la parábola es $y = x^2 - 2x + 2$.

45. La ecuación de una parábola es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + 2$. Se sabe que el punto (1, 3) es su vértice y que pasa por el punto (2, 2). Calcula los valores de a y b y representa su gráfica.

Se calcula el valor de los coeficientes a, b en $f(x) = ax^2 + bx + 2$.
Se sabe que $f(1) = 3$, es decir, que $a + b + 2 = 3 \Rightarrow a + b = 1$.
Como $f(2) = 2$, $4a + 2b + 2 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = 0$.
Con estas dos ecuaciones se calcula a y b: $a = -1$, $b = 2$.
La ecuación de la parábola es $y = -x^2 + 2x + 2$.
El dato que asegura que el punto (1, 3) es el vértice es innecesario. Basta con decir que la parábola pasa por dicho punto.
Se comprueba fácilmente que $V(1, 3)$ es el vértice de la parábola.



46. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y esboza sus gráficas.

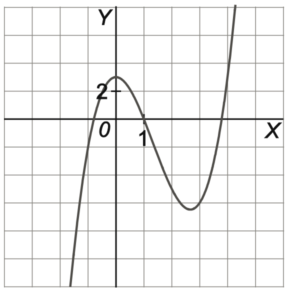
a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$
b) $f(x) = 4x^3 + 4x - 8$
c) $f(x) = x(x^2 + 2)(x^2 - 1)$
d) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$
e) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$
f) $f(x) = (x + 3)^2(x - 2)^2$

a) Corte con los ejes: $A(0, 3)$; $B(-0{,}79; 0)$; $C(1, 0)$; $D(3{,}79; 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 3x^2 - 8x$ se anula si $x = 0$ y si $x = 2{,}67$.

El punto $A(0,3)$ es un máximo relativo y el punto $E(2{,}67; -6{,}48)$ es un mínimo relativo.

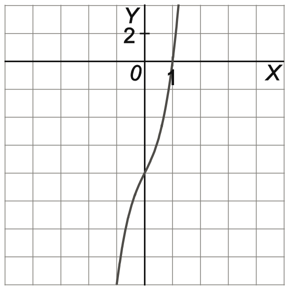


b) $f(x) = 4x^3 + 4x - 8 = 4(x - 1)(x^2 + x + 2)$

Corte con los ejes: $A(0, -8)$; $B(1, 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 12x^2 + 4$ no se anula nunca: es siempre positiva y, por tanto, la función es creciente.



c) $f(x) = x(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$ La función es impar, por tanto, simétrica respecto del origen.

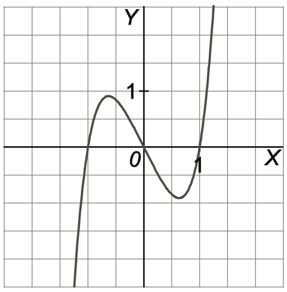
Corte con los ejes: $O(0, 0)$, $A(-1, 0)$ y $B(1, 0)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

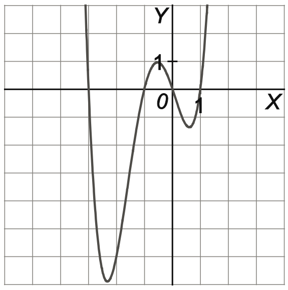
La derivada $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2$ se anula si $x = -0{,}63$ y si $x = 0{,}63$.

El punto $C(-0{,}63; 0{,}91)$ es un máximo relativo.

El punto $D(0{,}63; -0{,}91)$ es un mínimo relativo.



d) $f(x) = x(x+3)(x+1)(x-1)$

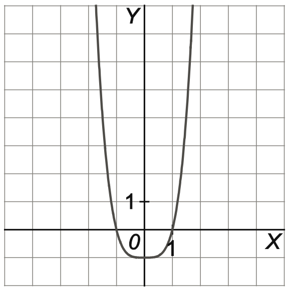


Corte con los ejes: $O(0,0)$, $A(-3, 0)$, $B(-1, 0)$ y $C(1, 0)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 2x - 3$ se anula en tres números, cuyos valores aproximados son $x_1 = -2{,}33$; $x_2 = -0{,}53$ y $x_3 = 0{,}61$.

e) $f(x) = (x+1)(x-1)(x^2+1)$



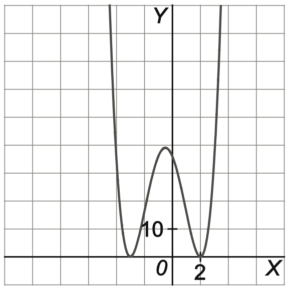
La función es par, por tanto, simétrica respecto del eje *X*.

Corte con los ejes: A(0, –1), *B*(–1, 0) y *C*(1, 0)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 4x^3$ solo se anula si $x = 0$. El punto $A(0,-1)$ es un mínimo absoluto.

f) $f(x) = (x+3)^2(x-2)^2$



Corte con los ejes: *A*(0, 36), *B*(–3, 0) y *C*(2, 0)

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La derivada $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 22x - 12$ se anula para tres valores:

$x_1 = -3$; $x_2 = -0{,}5$ y $x_3 = 2$.

Los puntos *B*(–3, 0) y *C*(2, 0) son mínimos absolutos.

El punto *D*(–0,5; 39,6) es un máximo relativo.

47. Encuentra *a*, *b* y *c* para que la función polinómica $y = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ cumpla que tiene tangente horizontal en el punto *A*(1, 0) y su tangente en el punto de abscisa $x = 2$ es paralela a la recta de ecuación $12x - y + 7 = 0$.

La derivada de la función es $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$.

La ecuación explícita de la recta es $y = 12x + 7$, por lo que su pendiente es $m = 12$.

Como la función pasa por el punto *A*(1, 0), se sabe que $f(1) = 0 \Rightarrow 2 + a + b + c = 0$.

Como la función tiene tangente horizontal en el punto *A*(1, 0), entonces $f'(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a + b = 0$.

Como en $x = 2$ la recta tangente tiene pendiente $m = 12$, entonces $f'(2) = 12 \Rightarrow 24 + 4a + b = 12$.

Resolviendo el sistema obtenido, se tiene que $a = -3$, $b = 0$, $c = 1$.

Funciones racionales y radicales.

48. Determina el dominio, la continuidad, los puntos de corte con los ejes, el signo y las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{-6x^2}{x^2+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^5}{x^4+1}$

c) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-4x}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$

e) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3+x^2}$

f) $f(x)=\dfrac{2x-6}{x^2+2x+5}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:x^2+1\neq 0\}=\mathbb{R}$ .Es continua. No tiene asíntotas verticales.

Es par, es decir, simétrica respeto del eje *Y*.

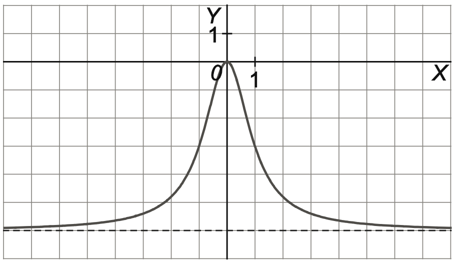
Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es siempre negativa salvo en el origen que vale cero.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-6$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-6$, la recta $y=-6$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

No tiene asíntotas oblicuas.

La derivada $f'(x)=\dfrac{-12x}{(x^2+1)^2}$ se anula en $x=0$ y es positiva (función creciente) en $(-\infty,\,0)$ y negativa (función decreciente) en $(0,\,+\infty)$ Tiene un máximo relativo en el punto $O(0,0)$.



b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:x^4+1\neq 0\}=\mathbb{R}$. Es continua. No tiene asíntotas verticales.

Es impar, es decir, simétrica respeto del origen.

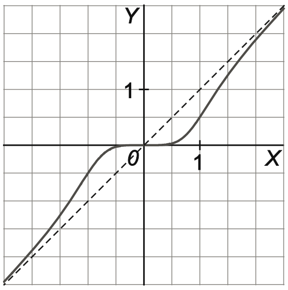
Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es negativa en $(-\infty,0)$ y positiva en $(0,+\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados. La recta $y=x$ es asíntota oblicua.

La derivada $f'(x)=\dfrac{x^4(x^4+5)}{(x^4+1)^2}$ se anula en $x=0$ y es positiva (función creciente) en los demás casos por tanto, el punto $O(0,0)$ no es un extremo a pesar de que tenga tangente horizontal. Es un punto de inflexión.



c) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:x^2-4x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{0,4\}$

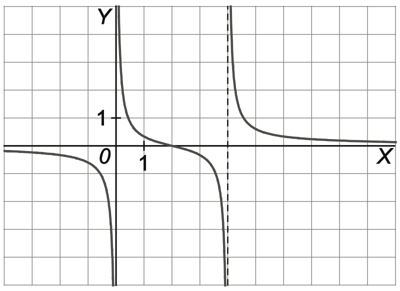
Corta a los ejes en el punto $A(2,0)$.

Es negativa en $(-\infty,\,0)\cup(2,\,4)$ y positiva en $(0,\,2)\cup(4,\,+\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=0$ es una asíntota vertical y como $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=4$ también lo es.

Asíntotas horizontales: como $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

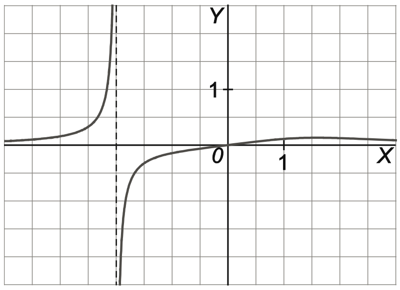
La derivada $f'(x)=\dfrac{-(x^2-4x+8)}{(x^2-4x)^2}$ no se anula nunca, (observa que $-(x^2-4x+8)=-[(x-2)^2+4]$) es negativa en todo el dominio), por tanto la función es siempre decreciente y carece de extremos relativos.



d) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^3+8\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\}$. Corta a los ejes en el origen $O(0,0)$.

Es positiva en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y negativa en $(-2,0)$.

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.



Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

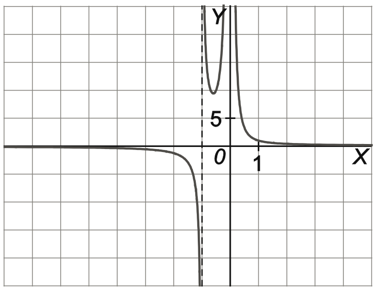
La derivada $f'(x)=\dfrac{-2(x^3-4)}{(x^3+8)^2}$ se anula si $x=1{,}59$. Es positiva (función creciente) en $(-2;\ 1{,}59)$ y negativa (función decreciente) en $(1{,}59;+\infty)$.

El punto $A(1{,}59;\ 0{,}13)$, es un máximo relativo. La función también es creciente en el intervalo $(-\infty,-2)$.

e) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^3-x^2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1,0\}$.No corta a los ejes. Es negativa en $(-\infty,-1)$ y positiva en $(-1,0)\cup(0,+\infty)$

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=0$ también lo es.



Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

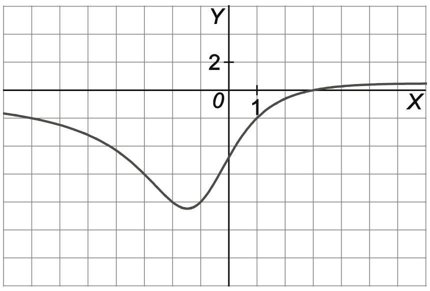
La derivada $f'(x)=\dfrac{-(x^3+3x+2)}{x^3(x+1)^2}$ se anula pero no se puede resolver fácilmente la ecuación $-(x^3+3x+2)=0$ porque no es posible hallar su raíz con Ruffini. Con ordenador se encuentra que la solución es $x=-0{,}60$. La derivada es negativa (función decreciente) en $(-1;-0{,}60)$ y positiva (función creciente) en $(-0{,}60;\ 0)$.

El punto $A(-0{,}60; 9{,}44)$, es un mínimo relativo.

La función es también decreciente en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

f) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2+2x+5\neq 0\}=\mathbb{R}$. Es continua y no tiene asíntotas verticales.

Corta a los ejes en $A(3,0)$ y en $B(0;-1{,}2)$. Es negativa en $(-\infty,3)$ y positiva en $(3,+\infty)$.



Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{-2(x^2-6x-11)}{(x^2+2x+5)^2}$ se anula en $x=-1{,}47$ y en $x=7{,}47$.

Es negativa (función decreciente) en $(-\infty;-1{,}47)$ y positiva (función creciente) en $(-1{,}47; 7{,}47)$

El punto $C(-1{,}47;\ -2{,}12)$ es un mínimo absoluto.

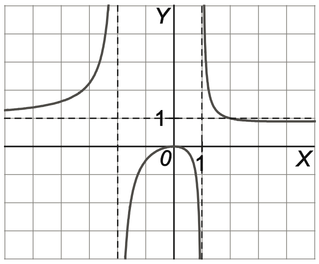
Por otra parte, la derivada es negativa (función decreciente) en $(7{,}47;+\infty)$, por lo que el punto $D(7{,}47;0{,}12)$ es un máximo, que también es absoluto.

49. Haz un estudio completo de las siguientes funciones y esboza, en cada caso, su gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$ **e)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x+4}$ **g)** $f(x)=\dfrac{5}{x^4-x^2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}$ **h)** $f(x)=\dfrac{-2x^3}{x+2}$

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=\dfrac{x^2}{(x+2)(x-1)}$



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:(x+2)(x-1)\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2,1\}$

Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es positiva en $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(-2,0)\cup(0,1)$.

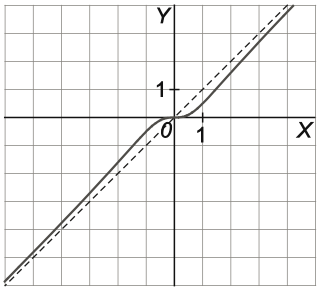
Como $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical y como $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ también lo es.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, la recta $y=1$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x^2+x-2)^2}$ se anula en $x=0$ y en $x=4$. Es positiva (función creciente) en $(-2,0)$ y negativa (función decreciente) en $(0,1)$. El punto $O(0,0)$ es un máximo relativo.

Por otra parte, la derivada es negativa (función decreciente) en $(1,4)$ y positiva (función creciente) en $(4,+\infty)$ por lo que punto $A(4;0,89)$ es un mínimo relativo.

b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:x^2+1\neq 0\}=\mathbb{R}$. Es continua. No tiene asíntotas verticales.



Es impar, es decir, simétrica respeto del origen.

Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es negativa en $(-\infty,0)$ y positiva en $(0,+\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

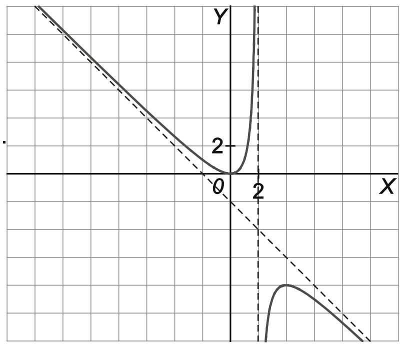
Tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados:

$f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}=\dfrac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$. La recta $y=x$ es asíntota oblicua.

La derivada $f'(x)=\dfrac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$ se anula en $x=0$ y es positiva (función creciente) en los demás casos.

El punto $O(0,0)$ no es un extremo a pesar de que tenga tangente horizontal. Es un punto de inflexión.

c) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:2-x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{2\}$



Solo corta a los ejes en el punto $O(0,0)$.

Es positiva en $(-\infty,0)\cup(0,2)$ y negativa en $(2,+\infty)$.

Como $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados:

$f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}=-x-2+\dfrac{4}{2-x}$ La recta $y=-x-2$ es asíntota oblicua.

La derivada $f'(x)=\dfrac{-x(x-4)}{(2-x)^2}$ se anula en $x=0$ y en $x=4$.

Es negativa (función decreciente) en $(-\infty,0)$ y positiva (función creciente) en $(0,2)$.

El punto $O(0,0)$ es un mínimo relativo.

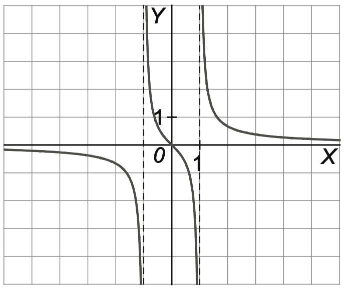
Por otra parte, la derivada es positiva (función creciente) en $(2,4)$ y negativa (función decreciente) en $(4,+\infty)$

El punto $A(4,-8)$ es un máximo relativo.

d) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1,1\}$. La función es impar, por tanto, simétrica respecto al origen.

Solo corta a los ejes en el $O(0,0)$.

Es negativa en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ y positiva en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.



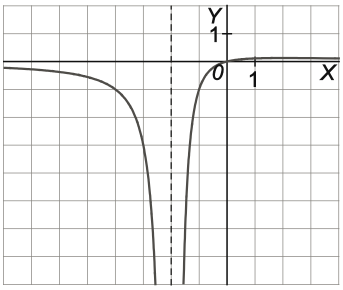
Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical y como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ también lo es.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=-\dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ no se anula nunca, es negativa en todo el dominio. La función es siempre decreciente y carece de extremos relativos.

e) $f(x)=\dfrac{x}{(x+2)^2}$. $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:(x+2)^2\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2\}$. Solo corta a los ejes en el origen $O(0,0)$.

Es negativa en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y positiva en $(0,+\infty)$.



Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto por la derecha como por la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{2-x}{(x+2)^3}$ se anula si $x=2$. Es positiva (función creciente) en $(-2,2)$ y negativa (función decreciente) en $(2,+\infty)$.

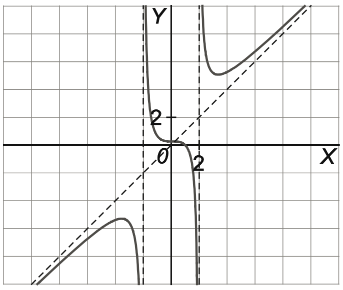
El punto $A(2;\,0{,}125)$, es un máximo absoluto.

En el intervalo $(-\infty,-2)$ la función es decreciente.

f) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Solo corta a los ejes en los puntos $A(1,0)$ y $B(0;\,0{,}25)$

Es negativa en $(-\infty,-2)\cup(0{,}25;\,2)$ y positiva en $(-2;\,0{,}25)\cup(2,+\infty)$.



Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

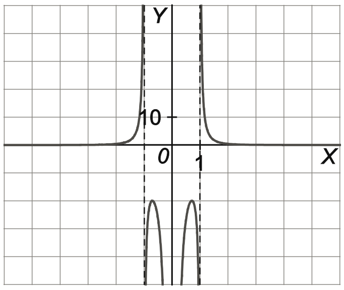
Tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados:

$f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}=x+\dfrac{4x-1}{x^2-4}$ La recta $y=x$ es asíntota oblicua.

La derivada $f'(x)=\dfrac{x(x^3-12x+2)}{(x^2-4)^2}$ se anula en $x=0$ y en otros tres puntos que no se pueden calcular a través de Ruffini, pero sí con ayuda de algún programa informático.

Los puntos $C(-3{,}54;\,-5{,}32)$ y $D(0{,}17;\,0{,}2505)$ son máximos relativos y los puntos $O(0;\,0{,}25)$ y $E(3{,}38;\,5{,}07)$ son mínimos relativos.

g) $f(x)=\dfrac{5}{x^2\left(x^2-1\right)}$



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x^4-x^2\neq 0\right\}=\mathbb{R}-\left\{-1, 0, 1\right\}$

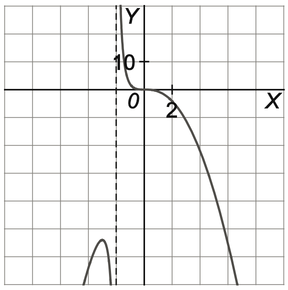
Es una función par y, por tanto, simétrica respecto del eje de ordenadas.
No corta a los ejes.
Es positiva en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(-1,0)\cup(0,1)$.

Como $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical. Por simetría, la recta $x=1$ también es asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la función, tanto a la derecha como a la izquierda.

La derivada $f'(x)=\dfrac{10-20x^2}{x^3(x^2-1)^2}$ se anula si $x=-0{,}71$ y si $x=0{,}71$. Es positiva (función creciente) en $(-1;-0{,}71)$ y negativa (función decreciente) en $(-0{,}71; 0)$, por tanto, el punto $A(-0{,}71;-20)$, es un máximo relativo. Por simetría, el punto $B(0{,}71;-20)$ también es un máximo relativo.

h) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x+2\neq 0\right\}=\mathbb{R}-\left\{-2\right\}$



Solo corta a los ejes en el origen $O(0,0)$.
Es negativa en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y positiva en $(-2,0)$.

Como $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Tampoco tiene asíntotas oblicuas por no cumplir la condición de los grados.

La derivada $f(x)=\dfrac{-4x^2(x+3)}{(x+2)^2}$, se anula en $x=-3$ y en $x=0$.

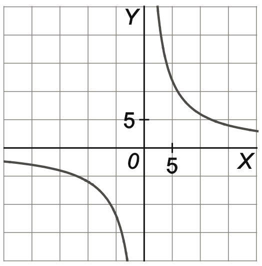
Es positiva (función creciente) en $(-\infty,-3)$ y negativa (función decreciente) en $(-3,-2)$, por lo que el punto $A(-3,-54)$ es un máximo relativo.

Por otra parte, la derivada es negativa (función decreciente) en $(-2,0)$ y sigue siendo negativa (función decreciente) en $(0,+\infty)$ por lo que el punto (0, 0) no es un extremo a pesar de que tenga tangente horizontal. Es un punto de inflexión.

50. Escribe varias parejas de números cuyo producto sea 60 y, posteriormente, escribe una función que los relacione. Dibuja su gráfica.

x	1	3	4	–1	–6
y	60	20	15	–60	–10

La función ha de cumplir $xy=60\Rightarrow y=\dfrac{60}{x}$. Es decir, $f(x)=\dfrac{60}{x}$.



51. Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x}}{x-2}$

d) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$

f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} : x^2+4\geq 0\}=\mathbb{R}$.

b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} : [x+2\geq 0]-[x=0]\}=[-2,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$.

c) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} : [x+6\geq 0]-[x=2]\}=[-6,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$.

d) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} : x^2-9\geq 0\}=(-\infty,\ -3]\cup[3,\ +\infty)$.

e) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} : [x^2-1\geq 0]-[x=-3]\}=(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ -1]\cup[1,\ +\infty)$.

f) $D(f)=\{x\in\mathbb{R} : [x^2+1\geq 0]-[x=\pm 1]\}=\mathbb{R}-\{-1,\ 1\}$.

52. Halla las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4x+1}{x}}$

b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^3}}$

a) $D(f)=\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right]\cup(0,+\infty)$

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$. Por tanto, la recta $x=0$ es una asíntota vertical de *f*(*x*).

Asíntotas horizontales: Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, la recta $y=2$ es una asíntota horizontal de *f*(*x*), tanto por la derecha como por la izquierda.
No tiene asíntotas oblicuas.

b) $D(f)=(-\infty,\ 0)\cup[2,\ +\infty)$.

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$. Por tanto, la recta $x=0$ es una asíntota vertical de *f*(*x*).

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Por tanto, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de *f*(*x*), tanto por la derecha como por la izquierda.
No tiene asíntotas oblicuas.

53. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^b}{x-b}$ siendo *b* un entero positivo.

a) Determina las asíntotas de la función *f*(*x*) para cualquier valor del parámetro *b*.

b) Halla el valor del parámetro *b* para que *f* tenga tangente horizontal en el punto de abscisa $x=4$.

a) Si $b=1$, entonces, $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$. La recta $x=1$ es una asíntota vertical y la recta $y=1$ es una asíntota horizontal de la función.

Si $b=2$, entonces, $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$. La recta $x=2$ es una asíntota vertical y la recta $y=x+2$ es una asíntota oblicua de la función.

Si $b\geq 3$, entonces, $f(x)=\dfrac{x^b}{x-b}$. La recta $x=b$ es una asíntota vertical. No tiene más asíntotas.

b) La derivada de $f(x)=\dfrac{x^b}{x-b}$ es $f'(x)=\dfrac{bx^{b-1}(x-b)-x^b}{(x-b)^2}$.

Como $f'(4)=0\Rightarrow b4^{b-1}(4-b)-4^b=4^{b-1}\left[b(4-b)-4\right]=0\Rightarrow b(4-b)-4=0\Rightarrow (b-2)^2=0\Rightarrow b=2$

Funciones valor absoluto y parte entera

54. Expresa como funciones definidas a trozos y representa gráficamente, cada una de las siguientes funciones.

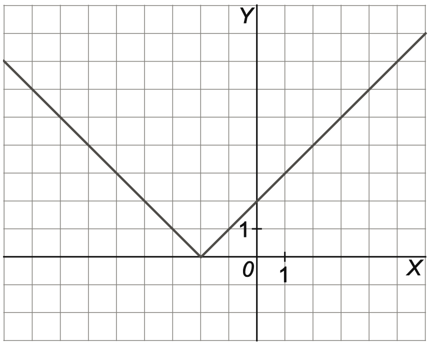
a) $f(x) = |x+2|$

b) $f(x) = |x-1|+2$

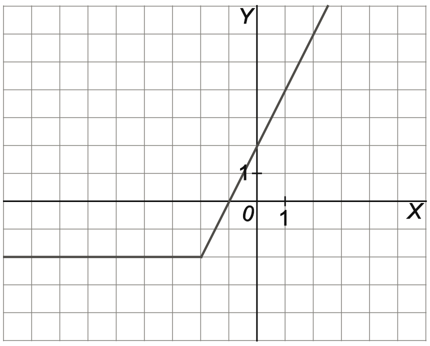
c) $f(x) = |x+2|+x$

d) $f(x) = 2|x-1|$

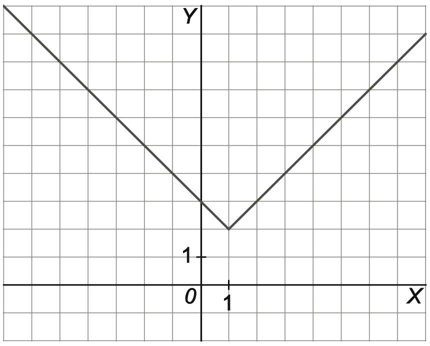
a) $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si} \quad x < -2 \\ x+2 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$



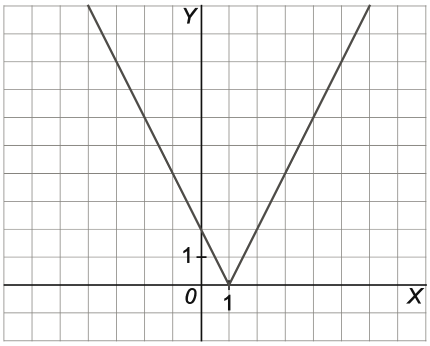
c) $f(x) = \begin{cases} -x-2+x = -2 & \text{si} \quad x < -2 \\ x+2+x = 2x+2 & \text{si} \quad x \geq -2 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} -x+1+2 = -x+3 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1+2 = x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

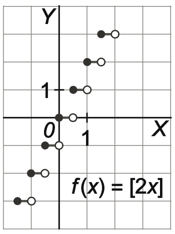


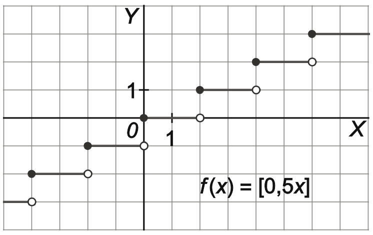
d) $f(x) = \begin{cases} 2(-x+1) = -2x+2 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2(x-1) = 2x-2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$



55. Dada la función $f(x) = [ax]$, razona cuál será la representación de *f* en función del valor del parámetro *a* y dibuja la gráfica para los casos $a = 2$ y $a = 0,5$.

Suponemos que *a* es positivo.
Si $0 < a < 1$ la parte entera se "expande". Si $a > 1$, la parte entera se "contrae".





Funciones exponenciales y logarítmicas

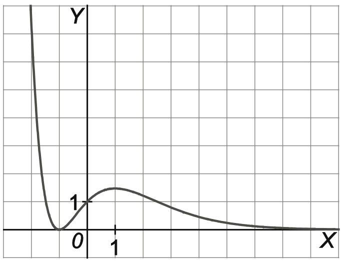
56. Realiza un estudio completo y esboza la gráfica de la función $f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$.

$D(f)=\mathbb{R}$ y es continua, por lo que no tiene asíntotas verticales. Además, no presenta simetrías.

La función nunca es negativa.

Corte con ejes: $f(x)=0$ si $x=-1$. Los puntos $A(-1, 0)$ y $B(0, 1)$ son los puntos de corte con los ejes.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Por tanto, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ por la derecha.



$$f'(x)=\frac{e^x\cdot 2(x+1)-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{1-x^2}{e^x}.$$

La derivada se anula sólo si $x=1$, $x=-1$.

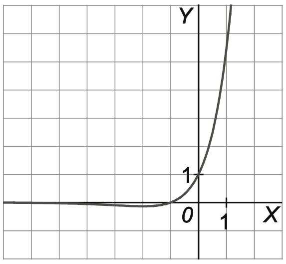
si $x<-1$, $f'(x)<0$

si $-1<x<1$, $f'(x)>0$

si $x>1$, $f'(x)<0$

Así pues $A(-1, 0)$ es un mínimo absoluto y $C\left(1,\frac{4}{e}\right)$ es un máximo relativo.

57. Estudia los puntos de corte con los ejes, el signo, los límites en el infinito de la función $f(x)=(1+x)e^x$ y, finalmente, esboza su gráfica.



$D(f)=\mathbb{R}$ y es continua, por lo que no tiene asíntotas verticales.

No presenta simetrías.

Corte con ejes: $f(x)=0$ si $x=-1$.

Los puntos $A(-1, 0)$ y B(0, 1) son los puntos de corte con los ejes.

La función es negativa si $x<-1$ y positiva si $x>-1$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Por tanto, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ por la izquierda.

58. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $\lim_{x\to3^-} f(x)=+\infty$ **b)** $\lim_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

a) $D(f)=\mathbb{R}$ porque e^{5x} siempre es positivo.

b) $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2-4}{x}>0\right\}$

$$\frac{x^2-4}{x}>0\Rightarrow\frac{(x+2)(x-2)}{x}>0\Rightarrow x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)\text{ y } D(f)=(-2,0)\cup(2,+\infty)$$

59. Dadas las funciones $f(x)=\log_2(x^2-16)$ y $g(x)=\log_2(6x)$, estudia su dominio y encuentra las coordenadas del punto de corte entre ellas.

$f(x)=\log_2(x^2-16)$ está definida solo si $x^2-16=(x-4)(x+4)>0$ luego $D(f)=(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

$g(x)=\log_2(6x)$ está definida para $6x>0$, luego $D(g)=(0,+\infty)$.

Las funciones se cortan si $\log_2(x^2-16)=\log_2(6x)$, es decir, si $x^2-6x-16=0$, cuyas soluciones son $x=8$ y $x=-2$. Como $x=-2\notin D(g)$, tenemos que las funciones se cortan en el punto $A(8,\log_2(48))=A(8;5{,}58)$.

60. Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln \dfrac{2x}{2-x}$ **b)** $f(x) = x^2 e^x$

a) $D(f) = (0,2)$. Por tanto, no tiene asíntotas horizontales

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$. Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$. Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de $f(x)$.

b) $D(f) = \mathbb{R}$ y es continua, por lo que no tiene asíntotas verticales.

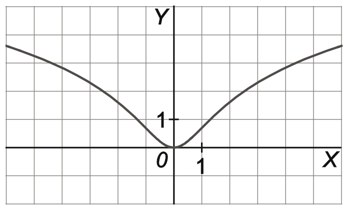
Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ por a la izquierda.

61. Haz un estudio completo y esboza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$ **b)** $f(x) = 2x^2 + 4\ln x$

a) $D(f) = \mathbb{R}$



La función es par, por tanto es simétrica respecto del eje Y.

Puntos de corte con los ejes: $f(x) = 0 \Rightarrow 1 + x^2 = 1 \Rightarrow x = 0$. $O(0, 0)$

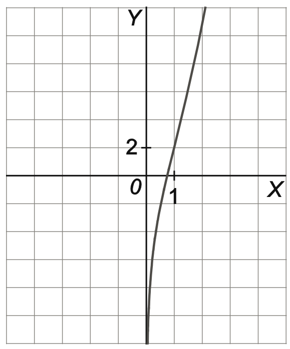
La función es siempre positiva.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

No tiene asíntotas.

$f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$. La derivada se anula si $\dfrac{2x}{1 + x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$. La derivada es negativa a la izquierda de $x = 0$ y positiva a su derecha, por lo que el punto $O(0, 0)$ es un mínimo, además, es absoluto.

b) $D(f) = (0, +\infty)$



Puntos de corte con los ejes: $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4\ln x = 0$,

ecuación que no se sabe resolver.

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ y la función es continua;

cortará en algún punto al eje X (ya que pasa de negativa a positiva).

Además, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, indica que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

$f'(x) = 4x + \dfrac{4}{x}$. La derivada es siempre positiva en $D(f) = (0, +\infty)$.

Por tanto, la función es siempre creciente. No tiene extremos.

62. Dada la función $f(x) = \log_2(8x - 4) - \log_2(x + 3)$, estudia su dominio y sus asíntotas verticales.

¿Se puede expresar $f(x)$ en función de un solo logaritmo?

Dominio: se debe cumplir que $8x - 4 > 0$ y que $x + 3 > 0$ por lo que $D(f) = \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

$f(x) = \log_2(8x - 4) - \log_2(x + 3) = \log_2\left(\dfrac{8x - 4}{x + 3}\right)$ con $x > \dfrac{1}{2}$

Asíntotas verticales. Se estudia lo que ocurre a la derecha de $x = \dfrac{1}{2}$, como $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = \dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

Aunque no lo pide el enunciado, como $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[\log_2\left(\dfrac{8x - 4}{x + 3}\right)\right] = \log_2 8 = 3$, se puede asegurar que la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal por la derecha.

63. Sea $f(x) = xe^{-ax}$, con a un parámetro real. Calcula los valores del parámetro a para que f tenga un extremo relativo en $x = 3$. Para estos valores del parámetro, indica si en $x = 3$ se alcanza un máximo o mínimo.

Como un extremo relativo anula la derivada: $f'(3) = 0$.

$$f'(x) = e^{-ax} + x\left(e^{-ax}\cdot(-a)\right) = e^{-ax}(1-ax)$$

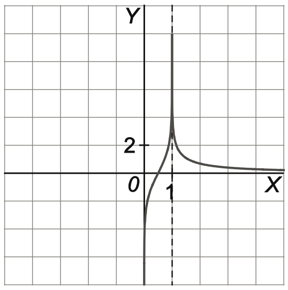
$$f'(3) = 0 \Rightarrow e^{-3a}(1-3a) = 0 \Rightarrow 1-3a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

La función es $f(x) = xe^{-\frac{x}{3}}$ y su derivada es $f'(x) = e^{-\frac{x}{3}}\left(1-\frac{x}{3}\right)$.

La derivada es positiva a la izquierda de $x = 3$ y negativa a su derecha, por tanto, el punto $A(3, f(3))$ es un máximo. Además, es un máximo absoluto.

64. Dada la función $f(x) = \ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right)$, estudia su dominio, sus puntos de corte con los ejes, su signo y sus asíntotas, y dibuja su gráfica.

Es una función logarítmica.



$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{|x-1|} > 0\right\} = (0,1)\cup(1,+\infty).$$

Se escribe como una función a trozos:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right) = \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función no corta al eje Y.

Corte con eje X:

si $0 < x < 1$, $\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = 1 \Rightarrow x = 1-x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. La función corta al eje X en el punto $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

si $x > 1$, $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow x = x-1$ no tiene solución.

Asíntotas verticales:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. La recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Funciones trigonométricas y sus inversas

65. Si se sabe que sen $x = 0{,}4$ y que x está en el cuadrante I; calcula, utilizando las relaciones trigonométricas, cos x y tg x.

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, entonces, $0{,}4^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 0{,}84 \Rightarrow \cos x = \pm 0{,}92$.

Como el ángulo x pertenece al primer cuadrante, el coseno ha de ser positivo, es decir $\cos x = 0{,}92$.

Finalmente: $\text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\cos x} = \frac{0{,}4}{0{,}92} = 0{,}43$

66. Halla sen x y tg x si se sabe que cos $x = -0{,}4$ y que x pertenece al cuadrante II.

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, entonces, $\text{sen}^2 x + (-0{,}4)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 x = 0{,}84 \Rightarrow \text{sen} x = \pm 0{,}92$.

Como el ángulo x pertenece al segundo cuadrante, el seno ha de ser positivo: $\text{sen}\, x = 0{,}92$.

$$\text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\cos x} = \frac{0{,}92}{-0{,}4} = -2{,}3$$

67. Para un ángulo *x* del cuadrante III, la tangente toma el valor de 3. Calcula sen *x* y cos *x*.

$\cos x = -\sqrt{\dfrac{1}{1+\text{tg}^2 x}} = -\sqrt{\dfrac{1}{1+3^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ $\quad\quad$ $\text{sen}\, x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

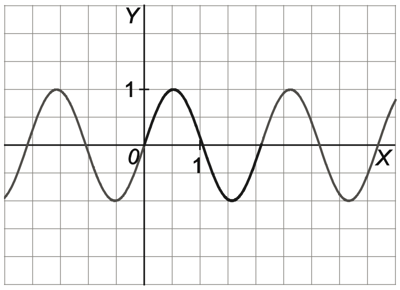
68. Con la ayuda de la calculadora o el ordenador, representa las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas e identifica su dominio, su recorrido, los puntos de corte con los ejes, su signo y su período.

a) $f(x) = \text{sen}3x$ $\quad$ **b)** $f(x) = 2+3\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$ $\quad$ **c)** $f(x) = 5\cos x$ $\quad$ **d)** $f(x) = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

[Nota: recuerda que los valores de *x* han de estar en radianes.]

En cada caso se restringe el estudio de la función a su período correspondiente.

a) $f(x) = \text{sen}(3x)$. $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [-1,1]$.

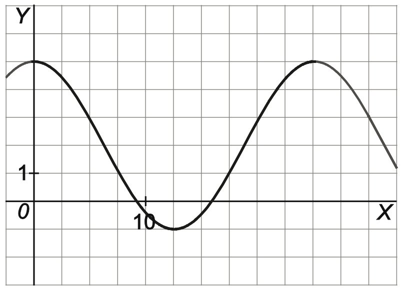


Periodo: Como la función seno es periódica de período 2π, la función $f(x) = \text{sen}(3x)$ es periódica de período $\dfrac{2}{3}\pi$.

Puntos de corte con los ejes dentro del período: $sen(3x) = 0$ si $3x = 0$ o $3x = \pi$, luego los cortes con los ejes son $A(0, 0)$; $B\left(\dfrac{\pi}{3}, 0\right)$.

Aunque no lo pide, es conveniente saber los puntos máximos y mínimos (donde la función vale –1 y 1) que en este caso son $C\left(\dfrac{\pi}{6},1\right); D\left(\dfrac{\pi}{2},-1\right)$.

b) $f(x) = 2+3\cos\left(\dfrac{x}{4}\right)$. $D(f) = \mathbb{R}$. $R(f) = [-1, 5]$.

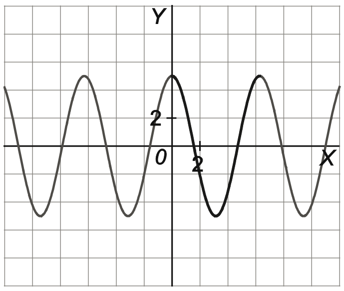


Período: La función coseno es periódica de periodo 2π luego esta función es periódica de periodo 8π.

Puntos de corte con los ejes dentro del período: $\cos\left(\dfrac{x}{4}\right) = -\dfrac{2}{3}$ si $x = 9{,}2$ o $x = 15{,}9$. Los puntos de corte son $A(0, 5)$; $B(9{,}2; 0)$; $C(15{,}9; 0)$.

Aunque no lo pide, es conveniente saber los puntos máximos y mínimos (dónde la función vale –1 y 5) que en este caso son $D(0,5); E(4\pi,-1)$.

c) $f(x) = 5\cdot\cos x$. $D(f) = \mathbb{R}$. $R(f) = [-5,5]$

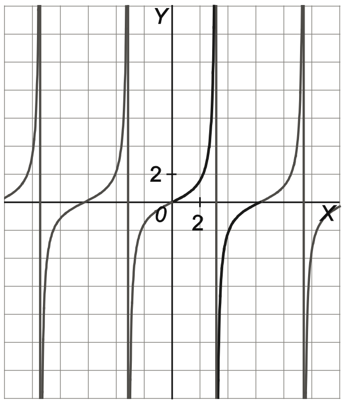


Período: La función coseno es periódica de periodo 2π.

Puntos de corte con los ejes dentro del período: $5\cdot\cos x = 0$ si $x = \dfrac{\pi}{2}$ o $x = \dfrac{3\pi}{2}$, luego los cortes con los ejes son $A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$; $B\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$.

Aunque no lo pide, es conveniente saber los puntos máximos y mínimos (donde la función vale –5 y 5) que en este caso son $C(0,5); D(\pi,-5)$.

d) $f(x) = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. $D(f) = \mathbb{R}-\{(2k+1)\pi \,/\, k \text{ entero}\}$. $R(f) = \mathbb{R}$.



Período: Como la función tangente es periódica de periodo π, la función $f(x) = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ es periódica de periodo 2π.

Puntos de corte con los ejes dentro del período: $\text{tg}\dfrac{x}{2} = 0$ si $x = 0$ luego los cortes con los ejes son $A(0, 0)$.

69. ¿Tiene algún punto con tangente horizontal la función $f(x) = \text{arctg}\,(3x + 1)$?

La derivada de la función es $f'(x) = \dfrac{3}{1+(3x+1)^2}$, que no se anula para ningún valor de x, por tanto, no hay ningún punto con tangente horizontal.

70. Calcula las derivadas de estas funciones.

a) $f(x) = \text{arcsen}\left(x^3 - 3x\right)$

b) $f(x) = \arccos\left(x + e^x\right)$

c) $f(x) = \text{arctg}\left(\sqrt{x-1}\right)$

d) $f(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{\sqrt{1-\left(x^3-3x\right)^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-\left(1+e^x\right)}{\sqrt{1-\left(x+e^x\right)^2}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x-1} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2} \cdot \dfrac{x+1-x}{\left(x+1\right)^2} = \dfrac{1}{2x^2+2x+1}$

Cuestiones

71. ¿Qué debe cumplir el número b para que la función $f(x) = x^4 + bx^2$ corte tres veces al eje X?

$f(x) = x^4 + bx^2 = x^2(x^2 + b)$. Un punto de corte es el $O(0, 0)$. Los otros dos salen de la relación $x^2 + b = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-b}$ para lo cual es necesario que $b < 0$.

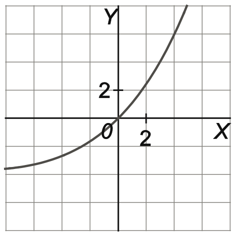
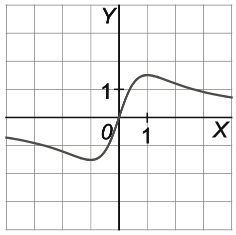
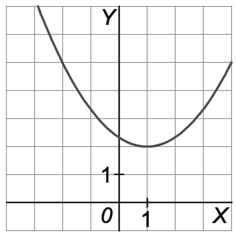
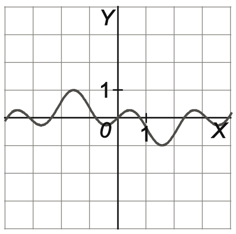
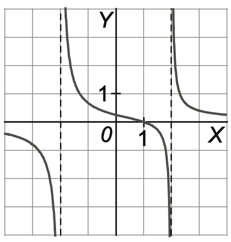
72. Si $y = f(x)$ es una función simétrica respecto del eje de ordenadas y $f(x)$ nunca se anula, ¿puedes asegurar que $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ es también simétrica respecto de dicho eje?

$g(a) = \dfrac{1}{f(a)}$; $g(-a) = \dfrac{1}{f(-a)}$. Como $f(a) = f(-a)$, entonces $g(a) = g(-a)$ y, efectivamente, g es también simétrica respecto del eje de ordenadas.

73. ¿Puedes asegurar que para cualquier función f definida en $\mathbb{R}$, la gráfica de $g(x) = f(x) - f(-x)$ sea simétrica respecto del origen?

$g(a) = f(a) - f(-a)$; $g(-a) = f(-a) - f\left(-(-a)\right) = f(-a) - f(a) = -\left[f(a) - f(-a)\right] = = -g(a)$, así que la función $g(x)$ es simétrica respecto del origen.

74. En la siguiente tabla, asocia las funciones de la columna izquierda a las gráficas de la columna derecha y justifica tu elección:

$f(x)=\dfrac{3x}{1+x^2}$	
$g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$	
$h(x)=\text{sen } x\cos(2x)$	
$j(x)=xe^{\frac{x}{10}}$	
$k(x)=\dfrac{(x-1)^2}{3}+2$	

La segunda gráfica corresponde a la función f pues tiene la asíntota horizontal $y = 0$, $D(f) = \mathbb{R}$ y pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0)$.

La quinta gráfica corresponde a la función g pues tiene dos asíntotas verticales $x = 2$ y $x = -2$ y pasa por el punto $(1, 0)$.

La tercera gráfica corresponde a la función k pues es una parábola con el vértice en el punto $(1, 2)$.

La cuarta gráfica corresponde a la función h pues es una función periódica por estar formadas por trigonométricas.

Lógicamente, la gráfica que queda, la primera, debería corresponder a la función j, y así es, pues dicha función pasa por el punto $O(0, 0)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **.**

75. ¿Puede ocurrir que la función $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{x^2+1}$ tome algún valor positivo?

No puede ocurrir nunca pues $\dfrac{x^2}{x^2+1}<1$ para cualquier valor de x y su logaritmo sería negativo.

76. Demuestra que la función $f(x) = x^5 + 6x^3 + \text{tg } x$ es creciente en todo su dominio.

$f'(x)=5x^4+18x^2+\dfrac{1}{\cos^2 x}\geq 0$ para todo x del dominio de f.

77. Si a es un número negativo y la tangente a la gráfica de $y = ae^x$ en el punto de abscisa 0 pasa por el punto $A(-a, 0)$, ¿cuál es el valor de a?

La pendiente de la tangente es $y'(0) = ae^0 = a$.

Por otra parte, dicha tangente pasa por (0, a) y ($-a$, 0), así que su pendiente debe ser $\dfrac{a-0}{0-(-a)} = 1$, con lo que

$1 = y'(0) = a$, así que a debería valer 1, pero eso no es posible pues a es negativo.

78. Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ donde p(x) y q(x) son polinomios de segundo grado y el polinomio $q(x)$ tiene dos raíces reales, ¿puedes asegurar que la gráfica de f tiene dos asíntotas verticales?

No, pues puede ocurrir que alguna de las raíces del denominador lo sea también del numerador y, en ese caso, no tendría una asíntota vertical sino una discontinuidad evitable.

Por ejemplo, si $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$, su denominador tiene dos raíces: $x = 1$ y $x = 2$ y en cambio $f(x)$ tiene sólo una asíntota vertical pues $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ si $x \neq 1$, que sólo tiene como asíntota vertical la recta $x = 2$.

79. ¿Es posible que haya funciones polinómicas de tercer grado que tengan en común con el eje de abscisas solamente dos puntos?

Sí, si una de sus raíces es doble, por ejemplo $f(x) = x^2(x - 1)$.

80. ¿Cortará la gráfica de $y = e^{\frac{x^2+1}{x^2}}$ a la recta $y = 2$?

No, pues para ello debería haber un número x tal que $e^{\frac{x^2+1}{x^2}} = 2$ y como $\dfrac{x^2+1}{x^2}$ siempre es mayor que 1,

$e^{\frac{x^2+1}{x^2}}$ siempre es mayor que $e = 2{,}718\ldots$, por lo que nunca podrá valer 2.

81. Si la gráfica de $y = f(x)$ admite como asíntota horizontal la recta $y = 3$, entonces ¿puedes asegurar que la gráfica de $y = \dfrac{2x \cdot f(x)}{x+1}$ admite como asíntota horizontal la recta $y = 6$?

Sí, ya que sabemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$, así que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x\, f(x)}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x+1} \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \cdot 3 = 6$.

Por tanto la recta $y = 6$ es asíntota de dicha función.

PROBLEMAS

82. Cierto artículo se vende a un precio por kilogramo *x*, que depende de la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:

- **a 10 euros el kg si $0 \le x < 5$**
- **a 9 euros el kg si $5 \le x < 10$**
- **a 7 euros el kg si $10 \le x < 20$**
- **a 5 euros el kg si $20 \le x$**

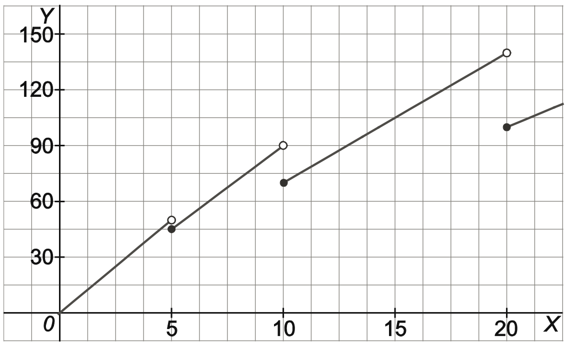
a) Escribe la función que representa el precio del artículo.

b) Haz su representación gráfica.

c) Estudia su continuidad.

a) $f(x) = \begin{cases} 10x & \text{si} \quad 0 \le x < 5 \\ 9x & \text{si} \quad 5 \le x < 10 \\ 7x & \text{si} \quad 10 \le x < 20 \\ 5x & \text{si} \quad 20 \le x \end{cases}$

b)



c) Como se observa en la gráfica, *f* no es continua en $x = 5$, 10 y 20 y sí es continua en todos los demás valores de *x*.

83. En una empresa el número de montajes diarios hechos por un operario es función del número de días trabajados, *t*, a través de la expresión:

$$\mathbf{M(t) = \frac{11t + 17}{2t + 12}, \ t \ge 1,}$$

a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día?

b) ¿En cuántos días alcanzará cinco montajes diarios?

c) ¿Qué ocurrirá con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?

d) El dueño de la empresa cree que el número de montajes aumenta con los días de trabajo. ¿Piensas que está en lo cierto?

e) Dibuja la gráfica de la función.

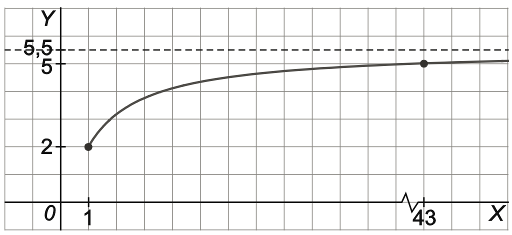
a) $M(1) = \dfrac{28}{14} = 2$ montajes.

b) $M(t) = \dfrac{11t + 17}{2t + 12} = 5$; $11t + 17 = 10t + 60$, $t = 43$ días.

c) Como $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{11t + 17}{2t + 12} = 5{,}5$, el número de montajes diarios se aproximaría a 5,5.

d) Como $M'(t) = \dfrac{(2t + 12)11 - (11t + 17)2}{(2t + 12)^2} = \dfrac{98}{(2t + 12)^2} > 0$ para cualquier valor de *t*, luego *M*(*t*) es creciente, así que el dueño de la empresa sí está en lo cierto.

e)



84. Las tarifas de estacionamiento en un aparcamiento se rigen según esta tabla:

Horas	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)
Precio (€)	5	7	9	11	13

Encuentra la función que relaciona las horas de estacionamiento con el coste del mismo.

$$f(x)=\begin{cases} 5 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 7 & \text{si} \quad 1 \le x < 2 \\ 9 & \text{si} \quad 2 \le x < 3 \\ 11 & \text{si} \quad 3 \le x < 4 \\ 13 & \text{si} \quad 4 \le x < 5 \end{cases}$$

85. Una discoteca abre a las 10 de la noche sin ningún cliente y cierra cuando se han marchado todos. Se supone que la función que representa el número de clientes (N) en función del número de horas que lleva abierto, t, es: $N(t) = 80t - 10t^2$.

a) Determina cuál es el máximo número de clientes y a qué hora se alcanza.

b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

a) El máximo número de clientes se alcanza en el vértice de la parábola, es decir si $N'(t) = 80 - 20t = 0$, $t = 4$, es decir, a las cuatro horas de abrir (las 2 de la madrugada) y dicho número es $N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160$ clientes.

b) Cerrará cuando $N(t) = 0$, o sea, $80t - 10t^2 = 0$, $t = 0$, $t = 8$, así que la discoteca cierra a las seis de la mañana.

86. Una plaga de orugas está asolando una isla de alto valor ecológico. Un grupo de biólogos ha realizado estudios de campo y ha comprobado con preocupación que actualmente hay 136 000 ejemplares cuando hace tres años había 17 000.

a) Encuentra la ley exponencial de la forma $y = ae^{kt}$ que da el número de orugas en función del tiempo.

b) Los biólogos han estimado que cuando la población de orugas supere el medio millón de ejemplares, la vegetación de la isla será irrecuperable. ¿Cuándo llegará este momento si no se toman las medidas oportunas?

c) ¿Hace cuántos años había solo cien orugas?

a) $y = ae^{kt}$; $y(0) = a = 136\,000$.

$y(-3) = 17\,000 = 136\,000 \cdot e^{-3k}$, es decir $e^{-3k} = \frac{17}{136} = \frac{1}{8}$, así que $e^k = \sqrt[3]{8} = 2$, por lo que la exponencial buscada es $y = 136\,000 \cdot 2^t$.

b) $136\,000 \cdot 2^t > 500\,000$ si $2^t > 3{,}68$, $t \cdot \ln 2 > \ln 3{,}68$, $t > \frac{\ln 3{,}68}{\ln 2} = 1{,}88$; es decir que dentro de poco menos de 2 años la vegetación de la isla será irrecuperable si no se toman las medidas oportunas.

c) $136\,000 \cdot 2^t = 100$, $2^t = 0{,}000\,74$, $t \ln 2 = \ln 0{,}000\,74$; $t = \frac{\ln 0{,}000\,74}{\ln 2} = -10{,}4$.

Hace poco más de 10 años sólo había 100 orugas en la isla.

87. Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado, en los próximos años, por la función $f(t) = 100\log\left(\dfrac{1000t+100}{t+10}\right)$, donde *t* es el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es el tamaño actual de la población?
b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población?¿En qué valor?

a) $f(0) = 100 \log 10 = 100$.

b) Sí, pues $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 100 \log\dfrac{1000t+100}{t+10} = 100 \log \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1000t+100}{t+10} = 100 \log 1000 = 300$ con lo que el tamaño de la población se estabilizaría en torno a los 300 individuos.

88. En una fábrica, el coste de producción en euros, de un modelo de motocicleta viene dado por la función

$$C(x) = 10x^2 + 2000x + 250\,000$$

donde *x* es el número de motocicletas fabricadas.

El precio de venta de cada motocicleta es 8000 € y se venden todas las motocicletas fabricadas.

a) Define la función de ingresos que obtiene la fábrica en función de las unidades vendidas.

b) ¿Cuál es la función que expresa los beneficios de la cadena de montaje?

c) ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

a) $I(x) = 8000x$, donde $I(x)$ indica los ingresos obtenidos por la venta de *x* motocicletas.

b) $B(x) = I(x) - C(x) = -10x^2 + 6000x - 250000$, donde $B(x)$ expresa los beneficios obtenidos por *x* motocicletas vendidas.

c) Al ser $B(x)$ una parábola su máximo lo alcanza en $B'(x) = 0 \Rightarrow$, $x = 300$ siendo los beneficios obtenidos de:

$B(300) = -10 \cdot 300^2 + 6000 \cdot 300 - 250\,000 = 650\,000$ €.

89. La emisión de gases contaminantes, en toneladas, en una gran industria durante las 10 horas de actividad, viene dado por la expresión $n(t) = \dfrac{t}{8}(20-2t)$, $0 \le t \le 10$, siendo *t* el tiempo en horas.

a) ¿Cuál es el nivel máximo de las emisiones? ¿Cuándo se produce? ¿En qué intervalos aumenta o disminuye dicho nivel?
b) ¿En qué momentos el nivel es de cuatro toneladas?

a) Como la función $n(t)$ es una parábola, su máximo lo alcanzará en su vértice. Así pues $n'(t) = \dfrac{5}{2} - \dfrac{t}{2} = 0$ si

$t = 5$, es decir, a las 5 horas de actividad; y dicho nivel máximo valdrá $n(5) = \dfrac{25}{4} = 6{,}25$ toneladas.

Durante las 5 horas primeras aumenta el nivel, y en las restantes disminuye.

b) $n(t) = \dfrac{t}{8}(20 - 2t) = 4$; $\dfrac{5}{2}t - \dfrac{t^2}{4} - 4 = 0$; $t^2 - 10t + 16 = 0$; $t_1 = 2$ y $t_2 = 8$; por lo que a las dos horas y a las ocho horas de actividad, el nivel de emisión de gases es de 4 toneladas.

90. Los beneficios de una empresa desde su fundación vienen dados, en millones de euros, por la función

$B(t) = \dfrac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$, $0 \le t \le 8$; donde t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

a) Estudia la monotonía y los extremos de $B(t)$.

b) Dibuja la gráfica de $B(t)$ en el intervalo [0,8] y explica, a partir de ella la evolución de los beneficios de esta empresa en los últimos 8 años.

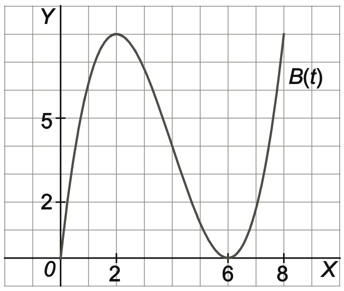
a) $B'(t) = \dfrac{3t^2}{4} - 6t + 9 = 0$ si $t^2 - 8t + 12 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

Así pues, si $0 \le t < 2$, $B'(t) > 0$ con lo que B es creciente.

Si $2 < t < 6$, $B'(t) < 0$, B es decreciente.

Si $t > 6$, $B'(t) > 0$, B es creciente.

Tenemos, entonces que en $(2, B(2))$ la función presenta un máximo relativo y en $(6, B(6))$ un mínimo relativo.



b) Los beneficios de la empresa crecieron durante los dos primeros años. Entre el segundo y el sexto año bajaron. Del sexto al octavo volvieron a crecer, alcanzando el valor máximo dichos beneficios cuando $t = 2$ o $t = 8$ pues $B(2) = 8$ millones de euros y $B(8) = 8$ millones de euros.

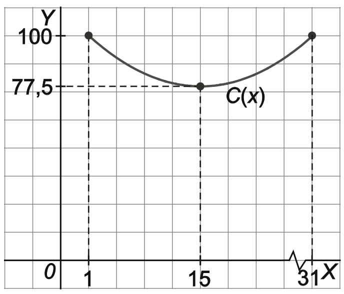
91. Durante 31 días consecutivos, las acciones de una compañía han tenido una cotización dada por la función $C(x) = 0{,}1x^2 - 3x + 100$, donde x es el número de días transcurridos.

a) Haz un estudio completo de dicha función y dibuja su gráfica.

b) ¿Cuáles has sido las cotizaciones máxima y mínima de la compañía?¿En qué días se consiguieron?

c) ¿Durante qué período de tiempo las acciones estuvieron al alza?¿Y a la baja?

a) $C(x) = 0{,}1x^2 - 3x + 100$ representa una parábola cuya abscisa x del vértice viene dada por la ecuación $C'(x) = 0{,}2x - 3 = 0$; $x = 15$, es decir, $V(15; 77{,}5)$ y que por ejemplo corta al eje de ordenadas en (0, 100) siendo su gráfica la de la figura:



b) La mínima cotización se alcanzó en el vértice, es decir, el decimoquinto día y la máxima en el día 31 pues $C(31) > C(1) = 97{,}1$; siendo sus valores

$C(15) = 77{,}5$ y $C(31) = 103{,}1$.

c) Las acciones estuvieron al alza entre los días 15 y 31 y a la baja entre los días 1 y 15.

92. La ley de enfriamiento de Newton establece que un objeto se enfría de acuerdo a la ley:

$$T(t) = T_{amb} + (T_0 - T_{amb})e^{-kt}$$

donde $T(t)$ es la temperatura del objeto después de haber transcurrido t minutos; T_{amb} la temperatura ambiente; T_0 la temperatura inicial del cuerpo, y k una constante que depende del objeto.

Una taza de café en una habitación a 20ºC se enfría de 80ºC a 60ºC en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo tardará en enfriarse a 30ºC? ¿Y en alcanzar la temperatura ambiente?

$T_0 = 80$ºC; $T(3) = 60$ºC; $T_{amb} = 20$º C, así que $60 = 20 + (80 - 20)\, e^{-3k}$, de donde $e^{3k} = \frac{3}{2}$, $e^k = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ por lo que:

$T(t) = 20º + 60\,(e^k)^{-3} = 20 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^t$.

Si t = 30, resulta que $30 = 20 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^t$; $\left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{1}{6}$; $t \ln\frac{3}{2} = \ln 6$, $t = \frac{\ln 6}{\ln\frac{3}{2}} = 4{,}42$ minutos.

Por otra parte, la temperatura ambiente la alcanzaría en la solución de la ecuación $20 = 20 + 60\left(\frac{2}{3}\right)^t$, por lo que se debe cumplir que $\left(\frac{2}{3}\right)^t = 0$, y eso es imposible. Como era de esperar, a largo plazo la temperatura de la taza se aproximará todo lo que queramos a la temperatura ambiente, pero sin llegar a alcanzarla, pues $\lim_{t\to+\infty} T(t) = 20$, lo que implica un comportamiento asintótico.

ENTORNO MATEMÁTICO

Un refresco no muy frío

Después de un intenso partido de fútbol, un grupo de amigos compran refrescos en la máquina que hay a la entrada del vestuario. Aunque sus colegas hacen bromas de ello, a Manuel le gusta tomar agua. Para su sorpresa cuando cae la botella está parcialmente congelada. Los demás se parten de risa y le dicen que pida un cuchillo y un tenedor para tomarla, pero él aguanta las bromas y decide dejarla en el banco del vestuario pensando: "seguro que mientras me ducho y me visto el hielo se habrá derretido del todo y el agua tendrá una temperatura adecuada para beberla". Entonces, Quique, el listillo de clase, le comenta: "hombre, como el termómetro del vestuario marca 30ºC, la ley de enfriamiento de los cuerpos de Newton dice que la temperatura del agua, en grados centígrados, después de *t* minutos viene dada por la función

$$f(t) = 30 - Ae^{-kt}$$

donde *A* y *k* son constantes a determinar".

a) Manuel entra a la ducha cuando el hielo ya se ha deshecho y el agua está a 0ºC. Si tarda 20 minutos en estar aseado y vestido y entonces el agua está a unos 5ºC, ¿podrá calcular con la ayuda de Quique los valores de *A* y *k* y saber, cuánto tiempo debe esperar para que el agua alcance los 10ºC y poder beberla?

b) Suponiendo que dejara en la botella una parte del agua a 10ºC, ¿qué habrá pasado con la temperatura si alguien la encuentra al cabo de 1000 años?

a) Inicialmente la temperatura es de 0ºC, por tanto $f(0) = 0 \Rightarrow 30 - Ae^{-k \cdot 0} = 0 \Rightarrow A = 30 \Rightarrow f(t) = 30 - 30e^{-kt}$.

Para calcular k: $f(20) = 30 - 30e^{-20k} = 5 \Rightarrow k = 0{,}01 \Rightarrow f(t) = 30 - 30e^{-0{,}01t}$.

Para que la temperatura alcance los 10ºC debe verificarse: $f(t) = 30 - 30e^{-0{,}01t} = 10 \Rightarrow t \simeq 40$ minutos y medio.

b) $f(1000) = 30 - 30e^{-0{,}01 \cdot 1000} = 29{,}998\,638\ldots$, es decir se acercará mucho a la temperatura ambiente de 30ºC, pero no lo alcanzará, ni siquiera, en mil años pues su comportamiento es asintótico.

Intención de voto

Marina y Jorge han terminado hace unos meses sus estudios universitarios de periodismo y estadística, respectivamente, y están trabajando en prácticas en una empresa de comunicación.

A los dos meses de trabajar en la empresa, les encargan la realización de una encuesta de intención de voto en la ciudad de Nueva Mangancia. Allí, llevan varias semanas con noticias relacionadas con casos de corrupción en el Ayuntamiento. Marina le dice a Jorge "Ésta es nuestra ocasión para demostrar que somos unos buenos profesionales. Es un caso muy importante y el director confía en nosotros". Jorge está de acuerdo y contesta "Entre los dos elaboramos las preguntas, tú te ocupas de elegir la muestra y encuestar a las personas y yo de analizar los datos".

Una vez hecho el trabajo de campo, los dos becarios tienen la siguiente información:

En Mangancia hay 100 000 vecinos con derecho a voto.

El apoyo de los vecinos al partido gobernante está decreciendo de forma exponencial, de manera que en un mes ha descendido la intención de voto al mismo del 35 % al 10 %.

El principal partido de la oposición ha aumentado de forma lineal su intención de voto, que ha pasado, en los mismos 30 días, del 15 % al 20 %.

Un nuevo partido que era minoritario en la Corporación, ha aumentado de forma espectacular su apoyo pasando del 5 % al 25 % en el mismo período de tiempo. Ayuda a la pareja de amigos a analizar los datos y contesta:

Si la evolución de la intención de voto sigue igual, ¿cuáles serán los resultados que obtendrán los tres partidos en las elecciones anticipadas que se celebrarán dentro de dos meses?

Para el partido gobernante, elegimos una función exponencial del tipo $f(t) = Ae^{-Bt}$, donde t es el número de meses.

Como $f(0) = 35$, $f(0) = Ae^{-0\cdot t} = A = 35 \Rightarrow f(t) = 35e^{-Bt}$.

Como $f(1) = 10$, $f(1) = 35e^{-B\cdot 1} = 10 \Rightarrow B \simeq 1{,}25 \Rightarrow f(t) = 35e^{-1{,}25t}$.

Así pues, con esa tendencia, en dos meses la intención de voto al partido gobernante será del $f(2) = 35e^{-1{,}25\cdot 2} \simeq 2{,}87$ %.

Para el principal partido de la oposición asociamos una función lineal $g(t) = at + b$.

Como $f(0) = 15$ y $f(1) = 20$, obtenemos que $a = 5$ y $b = 15$ por lo que $g(t) = 5t + 15$.

Si se mantuviera esa tendencia lineal, al cabo de dos meses, la intención de voto sería del $g(2) = 5 \cdot 2 + 15 = 25$ %.

Respecto al nuevo partido, si su crecimiento fuera exponencial obtendríamos la función $f(t) = 5e^{1{,}6t}$, por lo que al cabo de dos meses, la intención de voto sería del $h(t) = 5e^{1{,}6\cdot 2} \simeq 123$ %, lo cual no tiene sentido.

Si, por el contrario, su crecimiento fuera lineal, sería $h(t) = 20t + 5$ y nos daría un valor, después de dos meses, del $h(2) = 20 \cdot 2 + 5 = 45\%$, que es un resultado más realista.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Determina el signo y la simetría de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4x}{x - 1}$ **b)** $g(x) = x^2 - 4$

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 4x}{x - 1}$; f no es par pues existe $f(-1)$ y no existe $f(1)$.

$f(x)$ no es impar pues, por ejemplo, $f(2) = 24$ y $f(-2) = \dfrac{-8}{-3} = \dfrac{8}{3}$ así que no se verifica en general que $f(x) = -f(-x)$.

Para estudiar el signo se escribe $f(x) = \dfrac{x(x^2 + 2x + 4)}{x - 1}$ y como $x^2 + 2x + 4 > 0$ para cualquier x basta estudiar el signo de $h(x) = \dfrac{x}{x + 1}$. Así pues, si $x < 0$, $h(x) > 0$, o sea, $f(x) > 0$.

Si $0 < x < 1$, $h(x) < 0$, es decir, $f(x) < 0$. Finalmente si $x > 1$, $h(x) > 0$, $f(x) > 0$.

Resumiendo: f es positiva en $(-\infty, 0)$, negativa en $(0, 1)$ positiva en $(1, +\infty)$ y $f(0) = 0$.

b) g es par pues $g(x) = g(-x)$.

g es positiva en $(-\infty, -2)$ y en $(2, +\infty)$ y negativa en $(-2, 2)$ siendo $g(2) = g(-2) = 0$.

2. Sean las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = x^5$.

a) Halla la simetría de las funciones f, g, $f + g$ y fg.

b) La suma de dos funciones impares, ¿será siempre impar?

c) El producto de dos funciones impares, ¿será siempre par?

a) $(f + g)(x) = x^5 + x^3 - 3x$; $fg(x) = x^8 - 3x^6$

Así pues, f y g son impares (polinomios con sólo exponentes impares)

$f + g$ es impar (polinomios con sólo exponentes impares)

fg es par (polinomios con sólo exponentes pares)

b) Sí, pues si f y g verifican $f(x) = -f(-x)$ y $g(x) = -g(-x)$, entonces:

$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x)$.

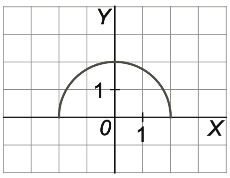
c) Sí, pues $fg(-x) = f(-x)\,g(-x)$ = $fg(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x) = fg(x)$

3. Calcula el valor de a para que el vértice de la parábola $y = ax^2 + 6x - a$, esté situado en el punto de abscisa $x = 1$.

La abscisa del vértice viene dada por $2ax + 6 = 0$, $x = -\dfrac{3}{a}$ que valdrá 1 si $a = -3$.

4. Determina la simetría, los puntos de corte con los ejes y el signo de la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Esboza su gráfica.

$f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$ por lo que la función tiene simetría par.



Cortes con el eje Y: $x = 0$, $y = 2$ (sólo admitimos la raíz positiva Punto $A(0, 2)$

Cortes con el eje X: $y = 0$, $x = \pm 2$. Puntos $B(-2, 0)$ y $C(2, 0)$.

La función siempre es positiva, por definición, en todo su dominio $D(f) = [-2, 2]$.

5. Determina todas las asíntotas de la función racional: $f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}$.

$f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=\dfrac{x(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x(x-2)}{(x+3)}$ si $x\neq 3$.

Como $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-3$ es una asíntota vertical.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Sí tiene asíntota oblicua porque cumple la condición de los grados:

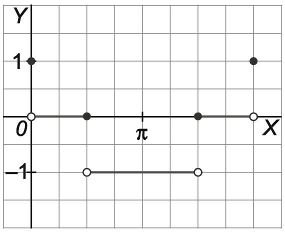
$f(x)=\dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9}=x-5+\dfrac{15x-45}{x^2-9}=x-5+\dfrac{15}{x+3}$. La recta $y=x-5$ es asíntota oblicua.

6. Determina los valores de *m* y *n* para que la función trigonométrica $f(x)=m+\mathrm{sen}(nx)$ tenga un máximo relativo en el punto $A(\pi, 3)$.

$f'(x)=n\cos(nx)\Rightarrow f'(\pi)=n\cos(n\pi)=0$ de donde $n=\dfrac{1}{2}+k$ donde *k* es un numero entero.

Además *k* debe ser par, pues entonces la función *f*(*x*) alcanza un máximo en $x=\pi$, $\mathrm{sen}\left(\left(\dfrac{1}{2}+k\right)\pi\right)=1$ y $m=2$.

7. Representa la función $f(x)=[\cos x]$ para valores de x en el intervalo $[0, 2\pi]$.



8. ¿Tiene asíntotas verticales u horizontales la función $f(x)=\ln(e^x+1)$?

Tiene la asíntota horizontal $y=0$, por la izquierda, pues $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$.

No tiene asíntotas verticales pues $D(f)=\mathbb{R}$.

9. Halla la derivada de la función $f(x)=\mathrm{arc\,tg}\left(e^{-x+1}\right)$.

$f'(x)=-\dfrac{e^{-x+1}}{1+e^{-2x+2}}$

10. Sea *f* la función definida en $(0, +\infty)$ por la fórmula $f(x)=2x+3-\ln x$. Señala las afirmaciones correctas:

a) *f* es una función impar.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3$

c) *f* tiene una asíntota vertical.

d) La gráfica de *f* es siempre creciente.

a) $f(-x)\neq -f(x)$ por lo que la afirmación a) es falsa.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+3-\ln x)=+\infty$.

c) Como se ve en el apartado anterior la función tiene la asíntota vertical $x=0$, por lo que la afirmación c) es cierta.

d) Como $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ y $f'(x)<0$ si $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ y $f'(x)>0$ si $x>\dfrac{1}{2}$ la función no es siempre creciente por lo que la afirmación d) es falsa.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La recta tangente a la curva $f(x) = -0{,}5x + 2\cos x - 1$ en el punto de abscisa 0 es:

A. $x + 2y - 2 = 0$ **B.** $y = x + 2$ **C.** $x - y + 2 = 0$ **D.** $y = 2$

$f'(x) = -\frac{1}{2} - 2\,\text{sen}\,x \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$ por lo que su recta tangente tiene pendiente $-\frac{1}{2}$. La respuesta correcta es la A.

2. Si $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, entonces:

A. f es creciente en $\mathbb{R}$.

B. f no es siempre positiva.

C. f presenta un máximo relativo en el punto de abscisa $\frac{3}{2}$.

D. f no tiene ni máximo ni mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

$f(x) = |x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$. En $1 \le x \le 2$, $f'(x) = -2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ y $f(x)$ pasa de creciente a decreciente, luego hay un máximo relativo. La respuesta correcta es la C.

3. Si $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{1 + x^4}$, entonces:

A. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de f.

B. La gráfica de f no tiene asíntotas.

C. La gráfica de f nunca corta sus asíntotas.

D. f tiene tangente horizontal en el punto de corte con el eje de ordenadas.

$f(x)$ no tiene asíntotas verticales porque nunca se anula el denominador por lo que la A es falsa.

Además $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ por lo que tiene la asíntota horizontal $y = 0$, con lo que la B es falsa.

La función pasa por el punto (–1, 0) que pertenece también a la asíntota $y = 0$, por lo que la C es falsa.

Finalmente la función corta al eje de ordenadas en el punto (0, 1) y como $f'(x) = \dfrac{-x^6 - 4x^3 + 3x^2}{(1 + x^4)^2} \Rightarrow f'(0) = 0$ la tangente en (0, 1) es horizontal. Por tanto D es cierta.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas.

4. Sea la función $f(x) = xe^{2x} - 1$. Entonces:

A. Para todo x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^{2x}$

B. f es creciente en $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

C. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x + 1)e^{2x}$ con lo la A es falsa.

$f'(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{2}$. Si $x > -\frac{1}{2}$, $f'(x) > 0$ y f es creciente, así que B es verdadera.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, por lo que la C es verdadera.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-xe^{-2x} - 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(-1 - \frac{x}{e^{2x}}\right) = -1$ pues $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = 0$ ya que la curva $y = e^{2x}$ crece mucho más rápido que $y = x$. Así que la D es falsa.

5. Para todo *x* mayor que 3 consideramos la función $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)$. Entonces:

A. $f'(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$

B. Para todo x > 3, $f(x)\geq 0$.

C. *f* es decreciente en $(3, +\infty)$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

A es falsa pues $f'(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)'=\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)\left(-\dfrac{4}{(x-3)^2}\right)=-\dfrac{4}{(x+1)(x-3)}$

Si $x>3$, $\dfrac{x+1}{x-3}>1$, con lo que $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)>0$ y la B es verdadera.

Si $x>3$, $f'(x)<0$, con lo que *f* decreciente y la C es verdadera.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-3}\right)=\ln 1=0$ por lo que la D es falsa.

Elige la solución correcta entre las dos afirmaciones dadas.

6. Sea *f* una función con tangente en todos sus puntos. Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones siguientes:

1 La tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa 1 es horizontal.

2. La curva $y=f'(x)$ corta al eje de abscisas en el punto $A(1, 0)$.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. 1 y 2 se excluyen entre sí.

1 nos dice que $f'(1)=0$ y 2 nos dice que f' pasa por (1, 0), es decir, $f'(1)=0$. Así pues la respuesta es la C: $1 \Leftrightarrow 2$.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Queremos saber si la tangente a la curva $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ en el punto de abscisa 1 forma triángulo con el eje de abscisas y la recta $y=3x-1$ y nos dan los siguientes datos:

1. El valor de *a* **2. El valor de *b*** **3. El valor de *c***

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 2.

C. Puede eliminarse el dato 3.

D. No puede eliminarse ningún dato.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, $f'(1)=3a+2b+c$

Los datos *a*, *b* y *c* no pueden eliminarse pues influyen en la pendiente de la tangente en $(1, f(1))$, que podría, de eliminarse alguno, ser 0 o 3, y por tanto, ser dicha recta paralela a alguna de las dos anteriores. La respuesta correcta es, por tanto, la D.

10 Estadística unidimensional

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Clasifica justificadamente las siguientes variables en cualitativas, cuantitativas discretas o continuas.

a) Número de defectos en un modelo de automóvil.

b) Origen, por continentes, de los ciudadanos extranjeros residentes en España.

c) Edad de los habitantes de una determinada ciudad.

d) Cociente intelectual de los alumnos de una escuela.

e) Distribución del PIB de un país en 2012 por sectores económicos (agricultura, industria, servicios).

f) Temperatura registrada el día 1 de julio en cada una de las capitales de provincia de España.

g) Color de ojos de los alumnos y alumnas de un centro.

h) Toneladas de cereal producidas en una determinada región en los últimos 50 años.

a) Variable cuantitativa discreta

b) Variable cualitativa

c) Variable cuantitativa discreta

d) Variable cuantitativa continua

e) Variable cualitativa

f) Variable cuantitativa continua

g) Variable cualitativa

h) Variable cuantitativa continua

2. La tabla recoge la percepción de la situación económica de España, según el barómetro del CIS (enero 2013), sobre una muestra de 2483 personas

x_i	Muy buena	Buena	Regular	Mala	Muy mala	NS/NC	Total
f_i	1	16	207	942	1313	4	2483

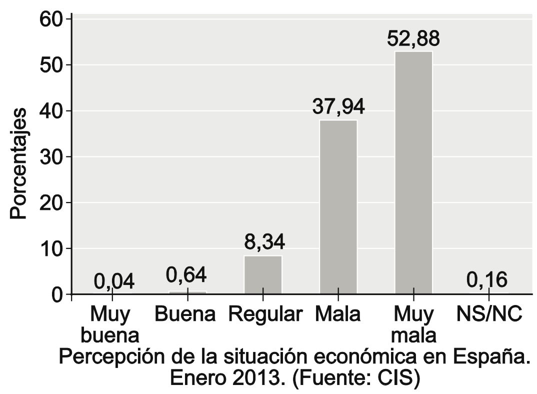
a) Halla las frecuencias relativas y los porcentajes.

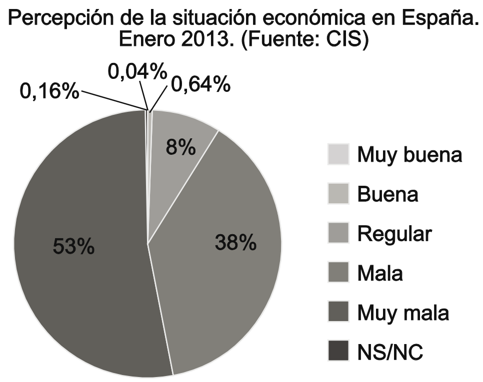
b) Representa gráficamente los porcentajes mediante un diagrama de barras y uno de sectores

a) Las frecuencias relativas y los porcentajes para las categorías de la variable se recogen en la tabla siguiente

X	f_i	h_i	%
Muy buena	1	0,00040	0,04
Buena	16	0,00644	0,64
Regular	207	0,08337	8,34
Mala	942	0,37938	37,94
Muy mala	1313	0,52880	52,88
NS/NC	4	0,00161	0,16
Total	2483	1	100

b) Los diagramas de barras y de sectores:





3. A lo largo del último mes, las urgencias atendidas en un centro de salud han sido las siguientes

0 1 3 1 2 7 4 1 2 1 4 3 6 5 3

1 2 2 5 8 6 3 0 1 1 3 5 4 2 2

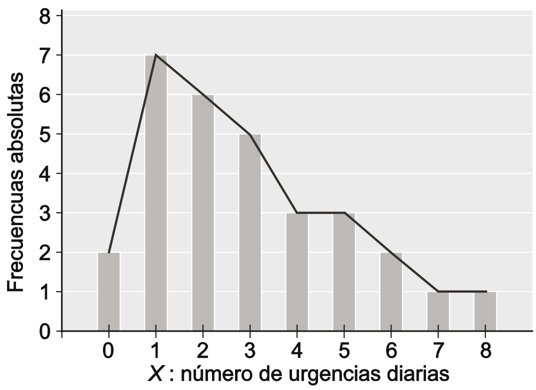
a) Construye la tabla de frecuencias.

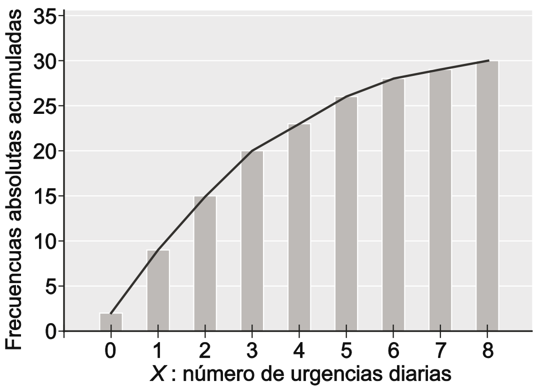
b) Representa gráficamente los datos mediante un diagrama de barras de frecuencias absolutas y otro de frecuencias absolutas acumuladas. Dibuja los correspondientes polígonos de frecuencias.

a) Efectuado el recuento, la tabla de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas queda:

x_i	f_i	F_i
0	2	2
1	7	9
2	6	15
3	5	20
4	3	23
5	3	26
6	2	28
7	1	29
8	1	30
	30	

b) Los diagramas de barras de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas son:





4. Ejercicio resuelto.

5. En una encuesta sobre el precio mensual del alquiler en euros (X), se han obtenido los datos de 1000 viviendas repartidas en una amplia región.

Clases	f_i
[100, 200)	42
[200, 300)	55
[300, 500)	135
[500, 700)	300
[700, 1000)	283
[1000, 1500)	110
[1500, 2000]	75

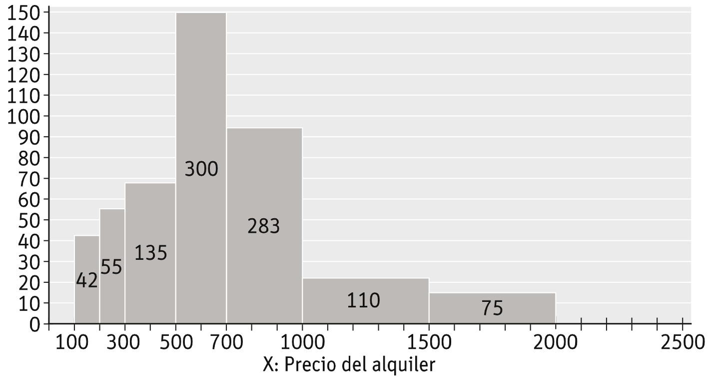
a) Representa gráficamente los datos mediante el histograma de frecuencias absolutas.

b) Dibuja el histograma de frecuencias relativas acumuladas

c) Representa los polígonos de frecuencias en los histogramas anteriores.

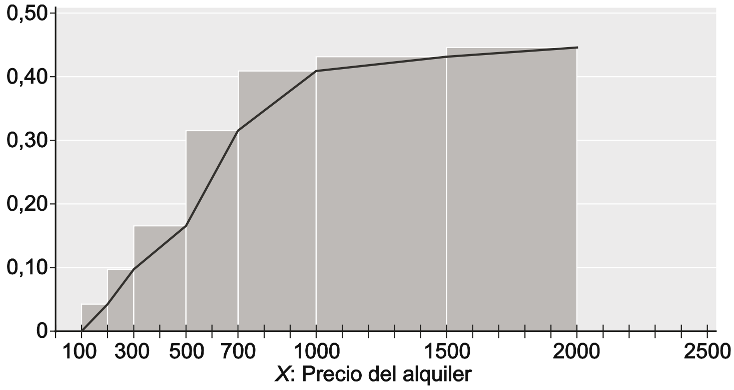
a) Como los intervalos no tienen la misma longitud, para dibujar los rectángulos del histograma se debe calcular su altura en función de la densidad de frecuencias correspondiente a cada clase. Para ello se elige una unidad, en este caso unidad=100 y la altura del rectángulo se establece para que el área represente la frecuencia absoluta:

X	f_i	Altura
[100, 200)	42	42
[200, 300)	55	55
[300, 500)	135	67,5
[500, 700)	300	150
[700, 1000)	283	94,3
[1000, 1500)	110	22
[1500, 2000]	75	15
	1000	



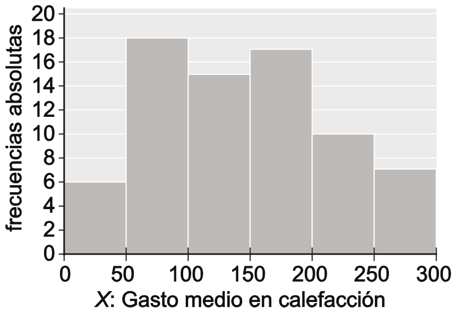
b) Para representar el histograma de frecuencias relativas acumuladas, se debe calcular la altura de cada rectángulo, teniendo en cuenta la longitud de cada clase y la frecuencia relativa que le corresponde:

X	f_i	h_i	H_i	altura	altura acumulada
[100, 200)	42	0,042	0,042	0,042	0,042
[200, 300)	55	0,055	0,097	0,055	0,097
[300, 500)	135	0,135	0,232	0,068	0,165
[500, 700)	300	0,300	0,532	0,150	0,315
[700, 1000)	283	0,283	0,815	0,094	0,409
[1000, 1500)	110	0,110	0,925	0,022	0,431
[1500, 2000]	75	0,075	1	0,015	0,446
	1000	1			



c) Los polígonos de frecuencias de los histogramas anteriores ya se han dibujado en los mismos.

6. **El gasto medio mensual en calefacción (*X*), en euros, de 73 viviendas se muestra en el siguiente gráfico .**



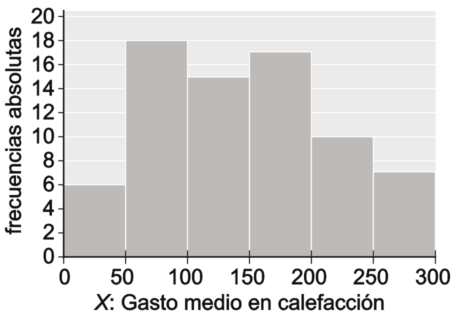
a) Completa la tabla de frecuencias.

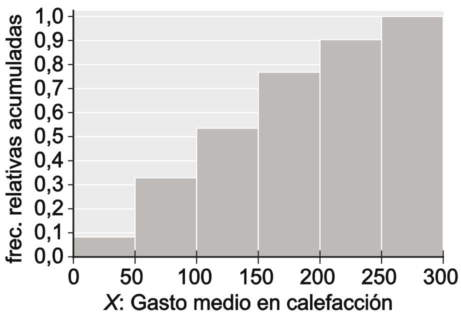
b) Dibuja los histogramas de frecuencias absolutas y de frecuencias relativas acumuladas.

a) Se completa la tabla con las frecuencias relativas (h_j) y las frecuencias acumuladas, tanto las absolutas (F_j) como las relativas (H_j):

Clases	f_j	h_j	F_j	H_j
[0, 50)	6	0,08219	6	0,08219
[50, 100)	18	0,24658	24	0,32877
[100, 150)	15	0,20548	39	0,53425
[150, 200)	17	0,23288	56	0,76712
[200, 250)	10	0,13699	66	0,90411
[250, 300]	7	0,09589	73	1,00000
	73	1		

b) Se representan los histogramas de frecuencias absolutas, sin acumular y acumuladas:





7. **Ejercicio interactivo.**

8 y 9. **Ejercicios resueltos.**

10. Considera la siguiente distribución de frecuencias de una variable cuantitativa discreta.

x_i	2	3	4	5	6	7
f_i	8	7	10	8	9	6

a) Calcula la media aritmética.

b) Determina la moda y la mediana

c) Halla los cuartiles y los percentiles 5 y 95.

a) La tabla proporciona la distribución de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas necesarias para contestar las preguntas.

x_i	f_i	F_i	f_ix_i
2	8	8	16
3	7	15	21
4	10	25	40
5	8	33	40
6	9	42	54
7	6	48	42
	48		213

La media es entonces: $\overline{x} = \dfrac{213}{48} = 4,4375$.

b) Usando la tabla anterior tenemos que la modal es $M_o = 4$, al ser este el valor de frecuencia absoluta .

Para la mediana se tiene en cuenta que el 50 % de 48 es 24, y ordenados los datos de menor a mayor, el valor de la variable que ocupa los lugares 24 y 25 es 4, de acuerdo a la columna de frecuencias absolutas acumuladas. Por tanto es $M = 4$.

c) Utilizando la columna de las frecuencias acumuladas de la tabla, los cuartiles Q_1 y Q_3 se calculan de forma similar a la mediana:

El 25 % de 48 es 12 y por tanto el primer cuartil corresponde al valor 3, por tanto $Q_1 = 3$.

De igual forma , el 75% de 48 es 36, con lo que se llega a $Q_1 = 6$.

Los percentiles 5 y 95 se calculan por el mismo procedimiento que los cuartiles:

El 5 % de 48 es 2,4; de manera que el percentil 5 corresponde al valor 2, esto es, $p_5 = 2$.

El 95 % de 48 es 45,6; con los que finalmente, se tiene $p_{95} = 7$.

11. La tabla recoge la distribución acumulada de las edades de 120 habitantes de una aldea.

a) Completa la tabla de frecuencias.

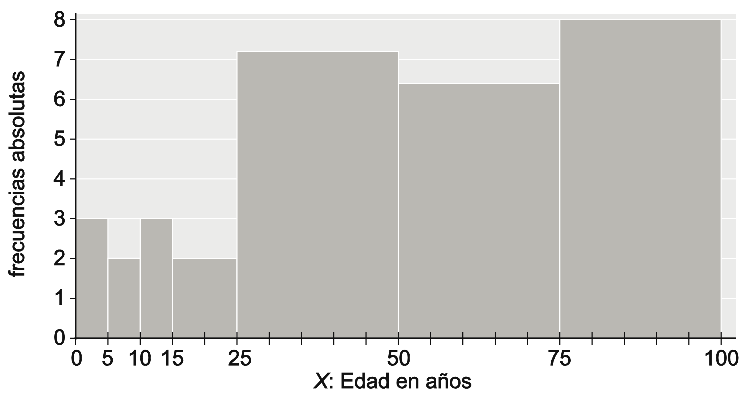
b) Dibuja el histograma de frecuencias absolutas.

c) Calcula la media, la moda y la mediana y los deciles 1 y 9.

a) La tabla proporciona la distribución de las frecuencias absolutas acumuladas. Se incluyen las clases, las frecuencias absolutas y relativas y las frecuencias relativas acumuladas y la columna $f_i \cdot x_i$.

Clases	f_j	F_j	h_j	H_j	$f_j x_j$
[0, 5)	3	3	0,0250	0,0250	7,5
[5, 10)	2	5	0,0167	0,0417	15,0
[10, 15)	3	8	0,0250	0,0667	37,5
[15, 25)	4	12	0,0333	0,1000	80,0
[25, 50)	36	48	0,3000	0,4000	1350,0
[50, 75)	32	80	0,2667	0,6667	2000,0
[75, 100]	40	120	0,3333	1,0000	3500,0
	120		1		6990,0

b) Para dibujar el histograma debe tenerse en cuenta que las clases tienen distinta amplitud. En la tabla se ha calculado la altura de los rectángulos del histograma tomando 5 años como unidad:



Clases	f_i	altura
[0, 5)	3	3
[5, 10)	2	2
[10, 15)	3	3
[15, 25)	4	2
[25, 50)	36	7,2
[50, 75)	32	6,4
[75, 100]	40	8
	120	

c) La media es $\bar{X} = \frac{6990}{120} = 58,25$ años;

La clase modal es [75, 100] ya que presenta la mayor densidad de frecuencias por unidad de medida (5 años) (el rectángulo es el de más altura en el histograma)

Para la mediana se tiene en cuenta que el 50% de 120 es 60, y por tanto está en el intervalo [50, 75), intervalo de amplitud 25, con 32 observaciones. Antes de este intervalo se acumulan 48 observaciones, luego la mediana es:

$$M = 50 + \frac{(60-48)\cdot 25}{32} = 59,38$$

Los deciles 1 y 9 se calculan por el mismo procedimiento:
El 10 % de 120 es 12 y, como se ve en la tabla de las frecuencias acumuladas, $D_1 = 25$.
El 90 % de 120 es 108, de manera que el percentil 90 se encuentra en el intervalo [75, 100], intervalo de amplitud 25 con 40 observaciones. Antes de este intervalo se tienen 80 observaciones:

$$D_9 = 75 + \frac{(108-80)\cdot 25}{40} = 92,5$$

12. Ejercicio resuelto

13. En un test de aptitudes, la puntuación obtenida (*X*) por 260 alumnos se distribuye como sigue:

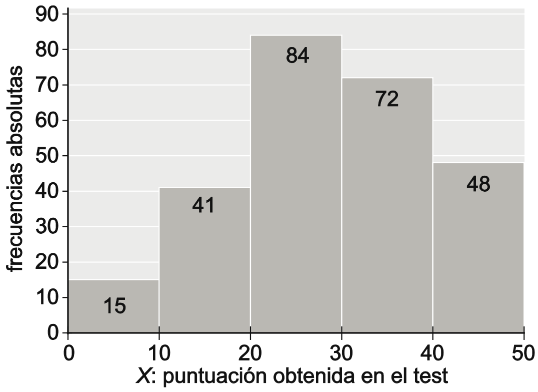
Clases	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50]
f_i	15	41	84	72	48

a) Dibuja el histograma de frecuencias absolutas.

b) Calcula la media, la mediana y la moda.

c) Halla las desviaciones absoluta media y típica y el CV.

a)



b) Para los cálculos se construye la tabla siguiente:

Clases	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$	F_i	$f_i\lvert x_i - \bar{X}\rvert$
[0, 10)	15	5	75	375	15	355,96
[10, 20)	41	15	615	9225	56	562,96
[20, 30)	84	25	2100	52 500	140	313,38
[30, 40)	72	35	2520	88 200	212	451,38
[40, 50]	48	45	2160	97 200	260	780,92
	260		7470	247 500		2464,62

La media es: $\bar{X} = \dfrac{7470}{260} = 28{,}73$.

La clase modal es [20, 30), que contiene 84 observaciones.

Cálculo de la mediana:

El 50 % de 260 es 130, de forma que la mediana está en el intervalo [20, 30), de amplitud 10 y 84 observaciones. Hasta llegar a esta clase se han acumulado 56 observaciones, luego:

$$M = 20 + \frac{(130 - 56) \cdot 10}{84} = 28{,}81$$

c) La desviación absoluta media es: $D_{\bar{x}} = \dfrac{2464{,}62}{260} = 9{,}479$

Se calculan la varianza y la desviación típica:

$$s^2 = \frac{247500}{260} - 28{,}73^2 = 126{,}466 \Rightarrow s = \sqrt{126{,}466} = 11{,}246$$

Finalmente, el coeficiente de variación, que mide la variabilidad relativa de las puntuaciones del test:

$$CV = \frac{11{,}246}{28{,}73} = 0{,}3914$$

14. Ejercicio interactivo.

15 a 20 Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Tablas de frecuencia y gráficos

21. Para determinar si un dado es equilibrado o no, se lanza 100 veces y se anota el número obtenido en cada lanzamiento

6	**1**	**1**	**2**	**5**	**1**	**6**	**4**	**4**	**3**	**4**	**3**	**6**	**5**	**1**	**6**	**1**	**2**	**3**	**1**
3	**3**	**4**	**5**	**6**	**4**	**2**	**5**	**4**	**4**	**3**	**5**	**2**	**3**	**6**	**5**	**6**	**5**	**1**	**3**
6	**1**	**5**	**6**	**5**	**6**	**5**	**2**	**1**	**2**	**6**	**3**	**2**	**5**	**2**	**4**	**3**	**4**	**3**	**3**
6	**4**	**2**	**5**	**5**	**4**	**3**	**5**	**2**	**3**	**1**	**3**	**6**	**2**	**6**	**4**	**1**	**1**	**4**	**2**
5	**2**	**1**	**6**	**6**	**1**	**4**	**6**	**1**	**4**	**2**	**1**	**3**	**4**	**3**	**1**	**6**	**1**	**5**	**2**

a) Forma la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

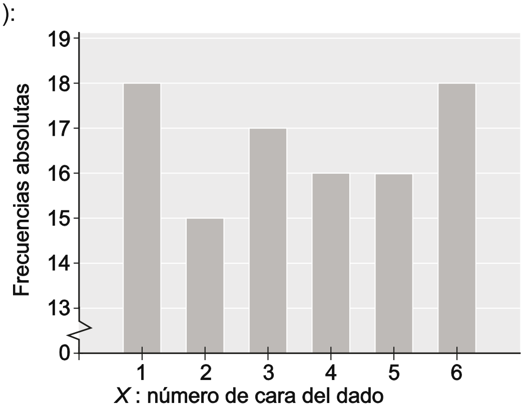
b) Representa gráficamente la distribución.

c) A la vista de la tabla y el gráfico, ¿se puede afirmar que el dado está equilibrado?

a) Una vez realizado el recuento, la distribución de frecuencias absolutas y relativas es:

x_i	f_i	h_i
1	18	0,18
2	15	0,15
3	17	0,17
4	16	0,16
5	16	0,16
6	18	0,18
	100	1

b) La distribución de las frecuencias absolutas (o relativas) se puede representar mediante un diagrama de barras (observa la escala del eje vertical):



c) A la vista del diagrama de barras y de la tabla de frecuencias, aunque hay diferencias entre las frecuencias de los distintos resultados, no hay suficiente información para decir que el dado está sesgado. Habría que aumentar el número de ensayos para poder llegar a una conclusión. Si el dado está equilibrado, la frecuencia relativa de cada resultado debería estabilizarse en torno a $\frac{1}{6}$.

22. En la tabla siguiente, se muestra la distribución de frecuencias de una variable estadística *X*.

x_i	1	3	5	7	9	11
f_i	14	10	8	30	32	21

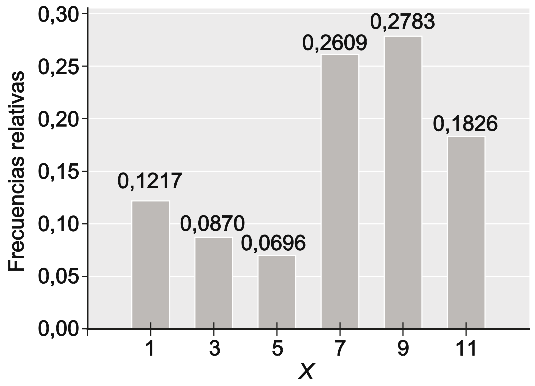
a) Halla la distribución de frecuencias absolutas acumuladas y de frecuencias relativas absolutas y acumuladas.

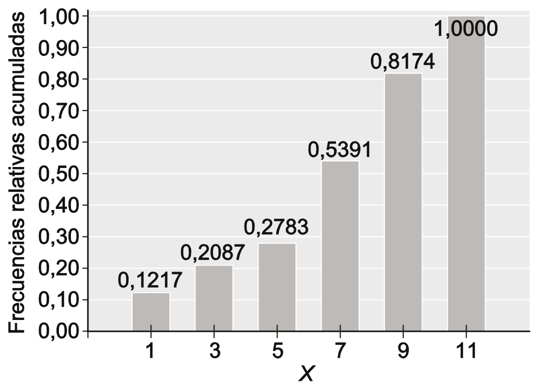
b) Representa los diagramas de frecuencias relativas y de frecuencias relativas acumuladas.

a) La tabla se amplía con las columnas de las frecuencias absolutas y las frecuencias relativas.

x_i	f_i	h_i	F_i	H_i
1	14	0,1217	14	0,1217
3	10	0,0870	24	0,2087
5	8	0,0696	32	0,2783
7	30	0,2609	62	0,5391
9	32	0,2783	94	0,8174
11	21	0,1826	115	1,0000
	115	1		

b) Los diagramas de frecuencias relativas y frecuencias relativas acumuladas son respectivamente:





23. *La primera estrofa y el estribillo de la canción del pirata, de José Espronceda (1808–1842) dicen así:

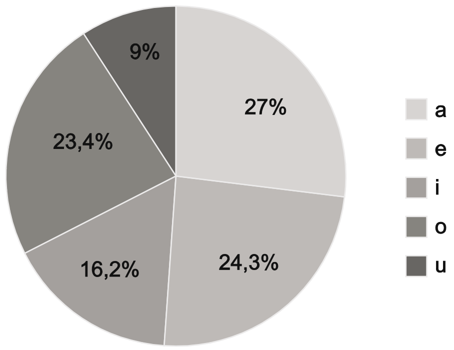
Con cien cañones por banda,
viento en popa a toda vela,
no corta el mar, sino vuela,
un velero bergantín;
bajel pirata que llaman
por su bravura, el Temido
en todo el mar conocido
del uno al otro confín
Que es mi barco mi tesoro,
que es mi Dios la libertad;
mi ley, la fuerza y el viento,
mi única patria, la mar

Obtén la distribución de frecuencias de las vocales, tantos absolutas como relativas y representa la última gráficamente.

Efectuado el recuento de vocales, la tabla con las frecuencias absolutas y relativas es:

X	f_i	h_i	Ángulo (grados sexagesimales)
a	30	0,2703	97,30
e	27	0,2432	87,57
i	18	0,1622	58,38
o	26	0,2342	84,32
u	10	0,0901	32,43
	111	1	360

Para representar gráficamente con un diagrama de sectores las frecuencias relativas, se ha añadido a la tabla la columna del ángulo que le corresponde a cada letra. Así, dicha representación queda como sigue.



24. Las altitudes máximas de cada una de las 50 provincias de España son:

898	**2083**	**1558**	**2606**	**1482**	**2648**
2591	**1110**	**2531**	**1482**	**2131**	**2399**
1654	**2613**	**1813**	**1371**	**1570**	**1839**
1544	**2913**	**3479**	**2262**	**912**	**3404**
1445	**2167**	**2262**	**1949**	**2648**	**3143**
1821	**2430**	**2065**	**2001**	**2438**	**2124**
2536	**1177**	**2425**	**3715**	**2430**	**1129**
2313	**1447**	**2024**	**1447**	**1832**	**964**
2124	**2313**				

Fuente: Instituto Geográfico Nacional

a) Obtén la distribución de frecuencias absolutas agrupando los datos en 7 clases.

b) Representa el histograma de frecuencias absolutas.

a) La altura máxima es 3715 metros y la mínima es 898,

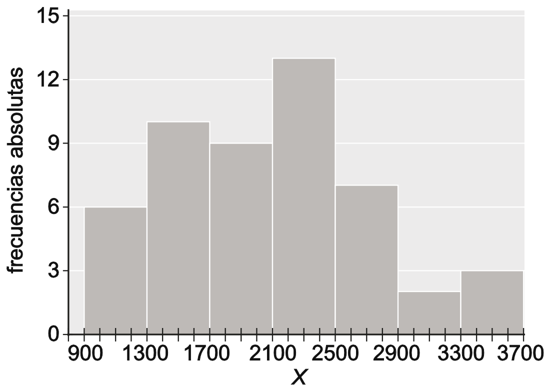
El rango de datos es $3715 - 898 = 2817$.

Si buscamos clases de similar amplitud esta debería ser próxima a $\frac{2817}{7} = 402,43$ m.

Así, si tomamos 900 m como inicio del rango y, por simplificar, con intervalos de amplitud 400, podemos organizar los datos en una tabla de frecuencias así aumentando la amplitud del último intervalo en 100 m.

Clases	x_i	f_i
[900, 1300)	1100	6
[1300, 1700)	1500	10
[1700, 2100)	1900	9
[2100, 2500)	2300	13
[2500, 2900)	2700	7
[2900, 3300)	3100	2
[3300, 3700)	3500	3
		50

b) El histograma correspondiente puede ser este:



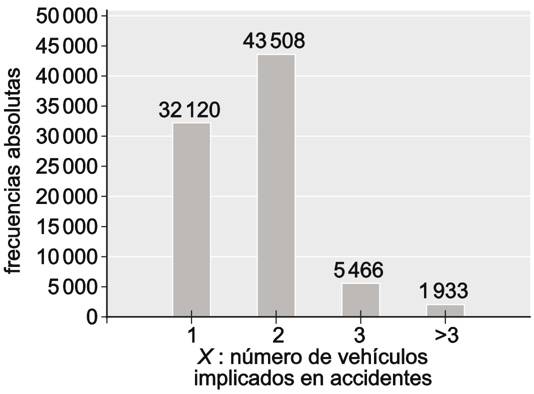
25. El número de vehículos implicados en accidentes con víctimas mortales y el número total de accidentes se dan en esta tabla:

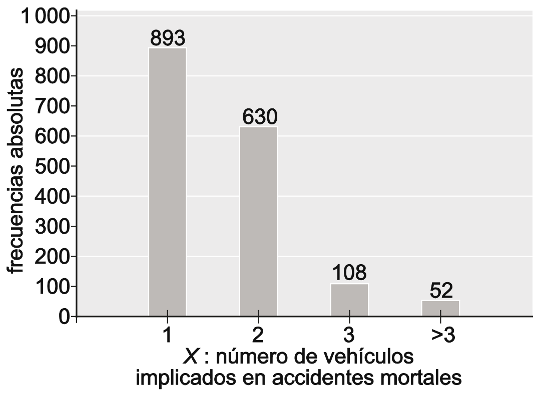
x_i	Mortales	Total
1	893	32 120
2	630	43 508
3	108	5466
> 3	52	1933

a) Representa las dos distribuciones mediante un diagrama de barras.

b) Dibuja el diagrama de sectores para cada distribución con los porcentajes correspondientes.

a) Los diagramas de barras de frecuencias absolutas son:

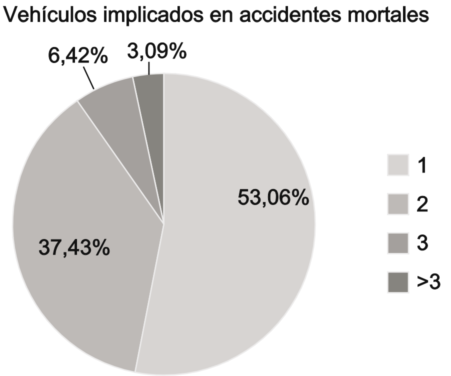


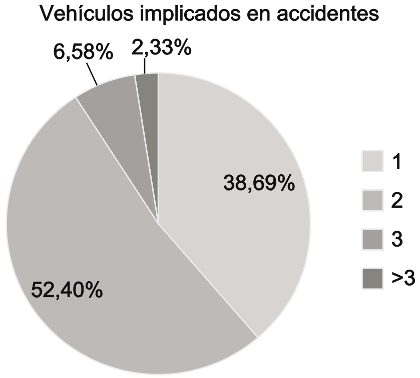


b) A la tabla se le añaden las columnas correspondientes a los porcentajes del número de accidentes con victimas mortales y del número total de accidentes, además de las columnas con los grados sexagesimales que corresponden a cada valor de la variable.

x_i	mortales	Total	% mortales	% Total	Ángulo mortales	Ángulo total
1	893	32 120	53,06 %	38,69 %	191,02	139,27
2	630	43 508	37,43 %	52,40 %	134,76	188,65
3	108	5466	6,42 %	6,58 %	23,10	23,70
> 3	52	1933	3,09 %	2,33 %	11,12	8,38
	1683	83 027	100 %	100 %	360	360

Y los diagramas de sectores correspondientes son:





26. El porcentaje de población activa, por sectores económicos, que se desprende de la Encuesta de Población Activa (EPA), de finales de 2012, incluyendo el total y distinguiendo entre hombres y mujeres, se muestra en la tabla siguiente.

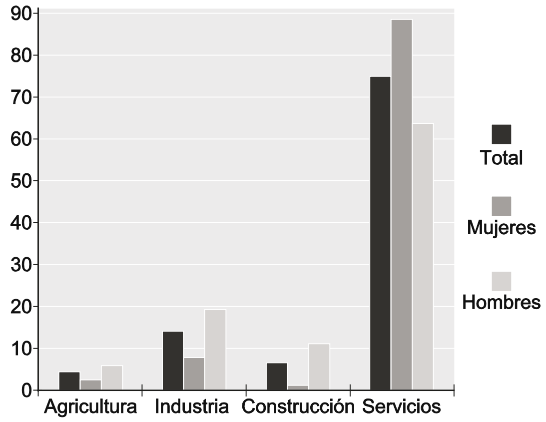
Sector	Total	Mujeres	Hombres
Agricultura	4,4	2,5	5,9
Industria	14,1	7,8	19,3
Construcción	6,6	1,2	11,1
Servicios	74,9	88,5	63,7

a) Representa las tres distribuciones en un mismo diagrama de barras.

b) ¿Qué diferencias se observan entre los hombres y las mujeres?

c) Dibuja un diagrama de sectores para cada distribución.

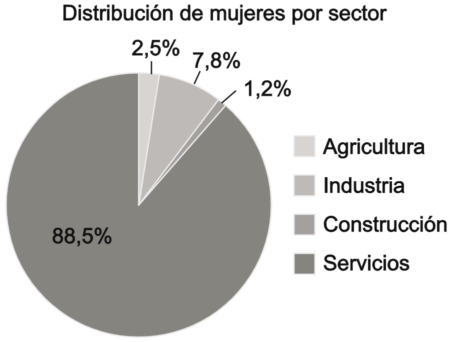
a) El diagrama de barras es el dela derecha.

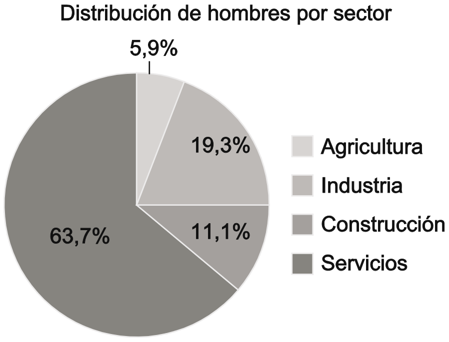


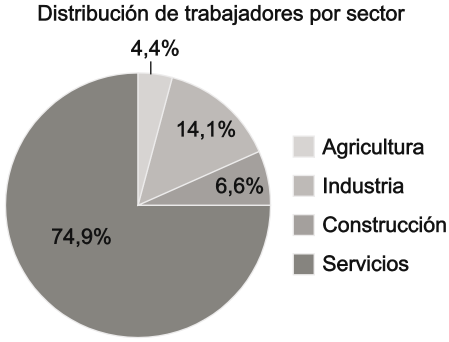
b) Entre otras observaciones, se puede ver que los hombres son mayoría en los sectores de agricultura, industria y construcción, mientras que en el sector servicios sucede lo contrario.

c) Para hacer los diagramas de sectores se incuye en la tabla una columna con los grados sexagesimales correspondientes a cada distribución:

Sector	Total	Ángulo total	Mujeres	Ángulos mujeres	Hombres	Ángulo hombres
Agricultura	4,4	15,84	2,5	9	5,9	21,24
Industria	14,1	50,76	7,8	28,08	19,3	69,48
Construcción	6,6	23,76	1,2	4,32	11,1	39,96
Servicios	74,9	269,64	88,5	318,6	63,7	229,32
		360		360		360







Medidas de localización y de dispersión

27. En cierta ocasión, se reunieron 5 miembros de una misma familia, de edades 23, 28, 32, 35 y 40 años.

a) Calcula la media y la varianza de las edades.

b) Cuatro años más tarde vuelven a reunirse los mismos familiares, ¿cuál será entonces su edad media? ¿y la varianza?

a) La media aritmética es: $\bar{X} = \dfrac{23+28+32+35+40}{5} = 31{,}6$

Y la varianza: $s^2 = \dfrac{23^2+28^2+32^2+35^2+40^2}{5} - 31{,}6^2 = 33{,}84$

b) Cuatro años más tarde, la nueva variable es $Y = X + 4$. La media será cuatro años más y la varianza la misma, es decir,

$\bar{Y} = 35{,}6$

$s_Y^2 = 33{,}84$

Si los datos se "trasladan" uniformemente, la dispersión respecto a la media no varía.

28. Sabiendo que 3 es la media del conjunto de datos:

2, 3, 2, 5, *x*, 6, 4, 0

Encuentra el valor del dato que falta.

Se escribe la media del conjunto de datos y se iguala a 3:

$$\frac{2+3+2+5+x+6+4+0}{8} = 3 \Rightarrow x + 22 = 24 \Rightarrow x = 2$$

29. El salario medio (X) en cuatro empresas ubicadas en una misma población y el número de empleados que actualmente tiene cada una de ellas viene dado en la tabla siguiente.

Empresa	A	B	C	D
x_i	1500	1625	1450	1275
f_i	115	60	38	77

a) Calcula el ingreso medio de todos los empleados.

b) Elige y dibuja un gráfico que represente la importancia relativa de estas cuatro empresas en cuanto al número de empleados.

c) Halla la varianza y la desviación típica.

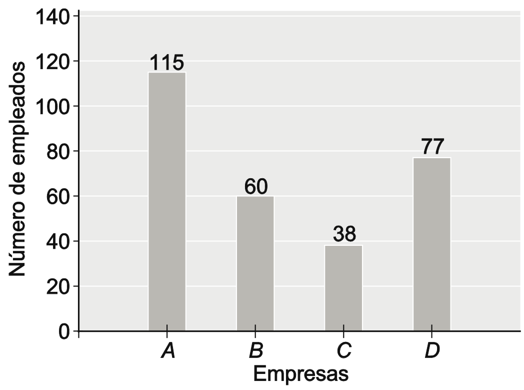
d) Calcula el coeficiente de variación y comenta el resultado que se obtiene.

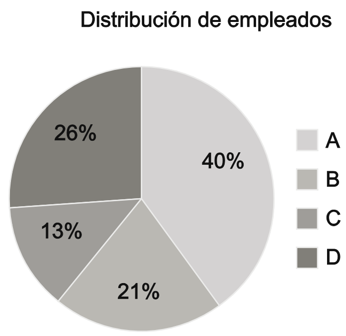
a) Para los cálculos de los apartados a), c) y d) se construye la tabla siguiente:

Empresa	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
A	1500	115	172 500	258 750 000
B	1625	60	97 500	158 437 500
C	1450	38	55 100	79 895 000
D	1275	77	98 175	125 173 125
		290	423 275	622 255 625

El salario medio de los empleados de las cuatro empresas es: $\overline{X} = \frac{1}{290}\sum_{i=1}^{4} f_i x_i = \frac{423\,275}{290} = 1459{,}57$

b) Se puede representar el número de empleados de cada empresa mediante un diagrama de barras o uno de sectores, utilizando las frecuencias absolutas o relativas (porcentajes). En el diagrama de barras se ha representado cada empresa con su número de empleados (frecuencia absoluta) y en el de sectores cada empresa con el porcentaje de empleados del total que le corresponde (frecuencia relativa).





c) Calculamos la varianza y la desviación típica usando los datos de la tabla anterior:

$$s_x^2 = \frac{1}{290}\sum_{i=1}^{4} f_i x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{622\,255\,625}{290} - 1459{,}57^2 = 15\,367{,}49 \Rightarrow s_x = 123{,}97$$

d) El coeficiente de variaciones, por tanto, $CV = \frac{s_x}{\overline{x}} = \frac{123{,}97}{1459{,}57} = 0{,}0849$.

El valor obtenido indica que los salarios son relativamente homogéneos entre las empresas, al presentar una baja variabilidad.

30. En un determinado mes la media aritmética de los salarios abonados por una empresa a sus empleados ascendió a 1400 euros. La media de los salarios pagados a los hombres ascendió a 1600 euros, mientras que la media de los pagados a las mujeres fue de 1350. Con esta información, ¿cuáles son los porcentajes de mujeres y hombres empleados en esta empresa?

Si p es la proporción de hombres que trabaja en esta empresa, $1 - p$ es la proporción de mujeres. Entonces, con la información proporcionada se tiene que:

$$1600\,p + 1350\,(1-p) = 1400$$

De donde se obtiene que $p = 0{,}2$. Es decir el 20 % de los empleados de esta empresa son hombres y el 80 % mujeres.

31. El número de faltas de asistencia (*X*), en un grupo de 35 alumnos, a la clase de Matemáticas Aplicadas a la Ciencias Sociales I, se ha agrupado en la tabla siguiente

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	12	8	7	5	3	2

a) Representa gráficamente la distribución de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas.

b) Dibuja los polígonos de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas.

c) Calcula el número medio de faltas de asistencia en esta clase. También la moda y la mediana.

d) Calcula las desviaciones absoluta media y típica.

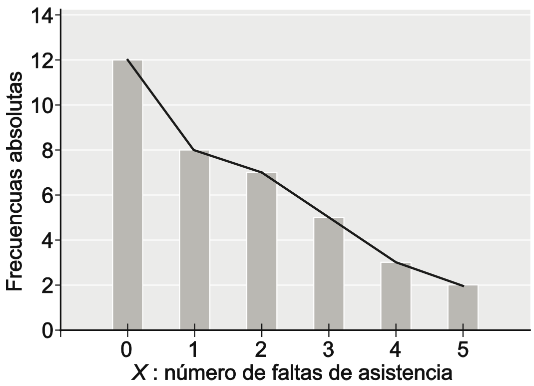
e) ¿Cuántas faltas tiene como mínimo un alumno que se encuentra entre el 25% que más falta?

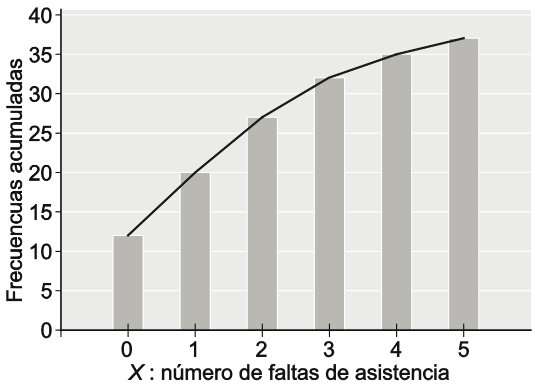
f) Determina los percentiles 34 y 67.

a) Para las representaciones gráficas y los cálculos de media y mediana se añaden a la tabla las columnas de frecuencias absolutas acumuladas y la de los productos necesarios para los apartados siguientes.

Los diagramas de barras y las gráficas de los polígonos de frecuencias absolutas y absolutas acumuladas son:

x_i	f_i	F_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$	$\lvert x_i-\bar{X}\rvert$	$f_i\cdot\lvert x_i-\bar{X}\rvert$
0	12	12	0	0	1,59	19,08
1	8	20	8	8	0,59	4,72
2	7	27	14	28	0,41	5,74
3	5	32	15	45	1,41	7,05
4	3	35	12	48	2,41	7,23
5	2	37	10	50	3,41	6,82
	37		59	179	9,82	50,64





b) Los polígonos de frecuencias se incluyen en los gráficos anteriores.

c) El número medio de faltas viene dado por: $\bar{X}=\frac{59}{37}=1{,}59$ faltas de asistencia

La moda es $M_o=0$, ya que es el valor de la variable que presenta mayor frecuencia (12).

Como se tiene un número impar de datos (37), la mediana es el valor de la variable que ocupe la posición 19 que, observando la columna de las frecuencias acumuladas, es $M=1$.

d) La varianza y desviación típica vienen dadas por:

$$s_x^2=\frac{1}{37}\sum_{i=1}^{6}f_ix_i^2-\bar{X}^2=\frac{179}{37}-1{,}59^2=2{,}295\Rightarrow s_x=1{,}515$$

Para el cálculo de la desviación absoluta media usamos la última columna:

$$D_x=\frac{1}{37}\sum_{i=1}^{6}f_i\left|x_i-\bar{X}\right|=\frac{50{,}64}{37}=1{,}379$$

e) Un alumno que está entre el 25% de alumnos que más falta se sitúa por encima del tercer cuartil. Como el 75% de 37 es 27,75, mirando la columna de frecuencias absolutas acumuladas, vemos que debe tener al menos 3 faltas.

f) Para identificar los percentiles 34 y 67, vemos que:

El 34 % de 37 es 12,58. La primera frecuencia absoluta acumulada que alcanza esta cifra corresponde a $p_{34}=1$.

El 67 % de 37 es 24,79. La primera frecuencia absoluta acumulada que alcanza esta cifra corresponde a $p_{67}=1$.

32. De una muestra de 100 hogares, seleccionados aleatoriamente en una ciudad pequeña, se contabiliza el número de personas empleadas. Los datos se recogen agrupados en la tabla siguiente

x_i	0	1	2	3	4
f_i	11	35	32	13	9

a) Calcula el número medio de empleados por hogar y su desviación típica.

b) Representa los datos. ¿Puede considerarse asimétrica esta distribución?

c) Determina los percentiles 5 y 95. ¿Cuántas unidades de la muestra se encuentran entre esos dos percentiles?

a) Se amplía la tabla con las columnas necesarias para calcular los valores que se pide

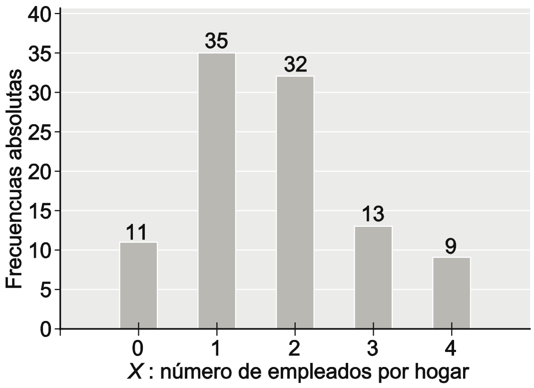
x_i	f_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
0	11	0	0
1	35	35	35
2	32	64	128
3	13	39	117
4	9	36	144
	100	174	424

Entonces, el número medio de empleados (la media de la distribución), su varianza y desviación típica son:

Media $\bar{X} = \frac{174}{100} = 1{,}74$ empleados

Varianza: $s_x^2 = \frac{424}{100} - 1{,}74^2 = 1{,}2124 \Rightarrow s_x = \sqrt{1{,}2124} = 1{,}1011$

b) Se representa la gráfica mediante un diagrama de barras de frecuencias absolutas:



La distribución de frecuencias es claramente asimétrica. Para ser simétrica, las frecuencias a izquierda y derecha del valor $x = 2$ deberían ser "parecidas".

c) Para el cálculo del percentil 5, p_5, se ordenan los datos de menor a mayor y el valor que deja al menos el 5 % de los datos por debajo (y como mucho el 95 % de los datos por encima) (el 5 % de 100 es 5) es $p_5 = 0$.

El percentil 95, p_{95}, el que deja como mucho 5% de los datos encima (y al menos el 95% por debajo) es $p_{95} = 4$.

Entre estos dos valores se encuentra el 90% de los datos de la muestra. Como se tienen 100 observaciones, 90 de ellas están entre estos dos valores. Ahora bien, si descontamos los valores $x = 0$ (11 observaciones) y $x = 4$ (9 observaciones), entre estos dos valores tenemos 80 observaciones distintas de 0 y 4.

33. En la tabla siguiente se muestra el número de alumnos f_i, la calificación media, x_i, y la varianza, s^2, en tres grupos de alumnos que cursan Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, de 1º de Bachillerato.

Grupo	f_i	x_i	s^2
A	31	6,2	2,8
B	35	5,8	3
C	32	5	2

a) Calcula la nota media global de los tres grupos.

b) Halla el coeficiente de variación para cada grupo y ordena los grupos por homogeneidad.

a) Para responder a las cuestiones planteadas, se añaden a la tabla las columnas de los productos f_ix_i y la de los coeficientes de variación de cada grupo, CV_i

Grupo	f_i	x_i	s^2	f_ix_i	CV_i
A	31	6,2	2,8	192,2	0,2699
B	35	5,8	3	203	0,2986
C	32	5	2	160	0,2828
	98			555,2	

La nota media global se obtiene ponderando la media de cada grupo por su número de alumnos. Es decir:

$$\overline{X} = \frac{1}{98}\sum_{i=1}^{3} f_i x_i = \frac{552{,}2}{98} = 5{,}67$$

b) El coeficiente de variación de cada grupo se ha incluido en la última columna de la tabla

$CV_i = \frac{s_i}{\overline{X}}$, con lo que resulta, ordenados de menor a mayor variabilidad

$CV_A = 0{,}2699$, $CV_C = 0{,}2828$ y $CV_B = 0{,}2986$.

34. *La producción de remolacha azucarera dada en toneladas (X), en 4 fincas con distintos tipos de cultivo y distintas superficies dadas en hectáreas se da en la tabla siguiente:

Fincas	ha	x_i
A	6	42
B	10	60
C	4	32
D	7	40

a) Calcular el rendimiento por ha en cada una de las cuatro fincas.

b) Hallar el rendimiento medio global y la variabilidad por ha de terreno.

a) Se añade a la tabla la columna de los rendimientos medios por ha en cada una de las cuatro fincas, obtenido dividiendo la producción total de cada finca por su superficie.

Puede observarse que el rendimiento medio más alto se da en la finca C, 8 toneladas por ha, y el más bajo en la finca D, 5,714 toneladas por ha.

Fincas	ha	x_i	RM/ha
A	6	42	7,000
B	10	60	6,000
C	4	32	8,000
D	7	40	5,714
	27	174	

b) El rendimiento global se obtiene dividiendo la producción total 174 toneladas, entre las 27 ha de cultivo que hay entre las tres fincas. Es decir:

$$\overline{X} = \frac{174}{27} = 6{,}444 \text{ toneladas por ha.}$$

35. La distribución de las temperaturas máximas en ºC (*X*) alcanzadas en una localidad en 60 días consecutivos viene dada en la tabla de la derecha.

X	f_i
[–10,0)	11
[0, 5)	12
[5, 10)	14
[10, 15)	11
[15, 25)	12

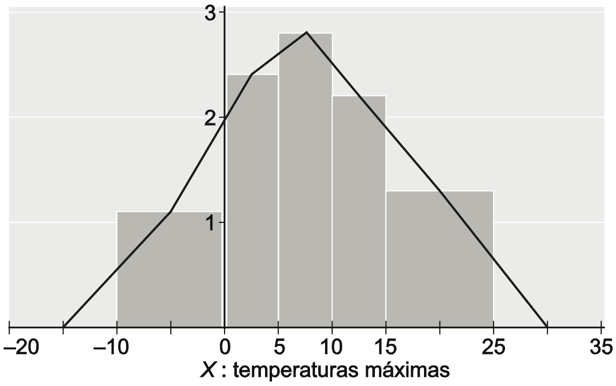
a) Representa gráficamente los datos y dibuja el polígono de frecuencias.

b) Calcula la temperatura media en la localidad de los 60 días y su desviación típica.

c) Determina la temperatura que solo fue superada el 5 % de los días.

a) Se representa la distribución de las temperaturas mediante un diagrama de barras. Se ha tomado 5 como unidad para la base de los rectángulos, de tal manera que las frecuencias de cada clase se corresponden con el área de los rectángulos.

Para dibujar el polígono de frecuencias se añaden dos clases con frecuencia cero al principio y al final de la distribución. La longitud de estas clases es la misma que la de las clases que le siguen o que le preceden respectivamente



b) Se añaden a la tabla las columnas necesarias para el cálculo de la media y de la desviación típica:

Clases	f_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	F_i
[–10,0)	11	–5	–55	275	11
[0, 5)	12	2,5	30	75	23
[5, 10)	14	7,5	105	787,5	37
[10, 15)	11	12,5	137,5	1718,75	48
[15, 25)	12	20	240	4800	60
	60		457,5	7656,25	

De esta manera, la media es: $\bar{X} = \dfrac{457{,}5}{60} = 7{,}625\ ºC$

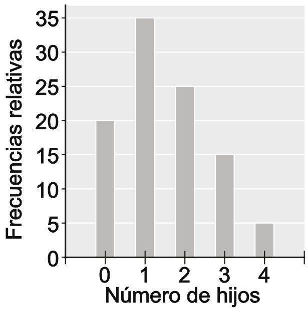
y la varianza y desviación típica son: $s^2 = \dfrac{7656{,}25}{60} - 7{,}625^2 = 69{,}4635 \Rightarrow s = 8{,}3345\ °C$

c) Para determinar esta temperatura, se incluyó en la tabla anterior la columna de las frecuencias absolutas acumuladas. Se trata de encontrar el percentil 95, p_{95}, Como el 95% de 60 observaciones son 57, el percentil 95 se encuentra en el intervalo [15, 25), cuya longitud es 10 y que contiene 12 observaciones. Además antes de este intervalo se tienen acumuladas 48 observaciones. Luego:

$$p_{95} = 15 + \frac{(57-48)10}{12} = 22{,}5\ °C$$

Síntesis

36. El número de hijos (*X*) de una muestra de 100 familias se recoge en el siguiente diagrama de barras.



a) Escribe la tabla de frecuencias y representa la distribución mediante el diagrama de frecuencias relativas acumuladas.

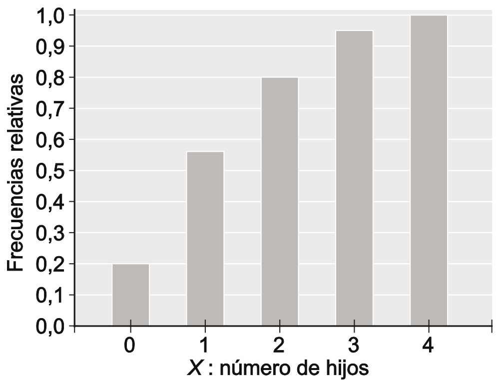
b) Calcula la media, la moda y la mediana.

c) Determina los cuartiles Q1 y Q3.

a) Construimos la tabla a la que se le añaden las columnas de las frecuencias relativas (h_i) y las frecuencias relativas acumuladas (H_i) y las columnas con los productos necesarios para los cálculos posteriores.

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	$f_i x_i$
0	20	20	0,20	0,20	0
1	35	55	0,35	0,55	35
2	25	80	0,25	0,80	50
3	15	95	0,15	0,95	45
4	5	100	0,05	1	20
	100		1		150

Y el diagrama de barras correspondientes es:



b) Para calcular la media y la mediana recurrimos a la tabla de manera que la media es

$$\bar{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5} f_i x_i = \frac{150}{100} = 1{,}5$$

La mediana, se obtiene de la siguiente manera: el 50 % de 100 es 50 y el valor de la variable X que, una vez ordenados los datos de menor a mayor, ocupa el lugar 50–51 (observa que el número de datos es par) es 1.

Por tanto, $M = 1$.

La moda es $M_o = 1$, al ser el valor que aparece más veces (36) en la distribución.

c) Los cuartiles primero y tercero se calculan de forma similar a la mediana (cuartil 2).

Q_1, cuartil 1º. El 25 % de 100 es 25. El valor de la variable que ocupa el lugar 25, ordenados los datos de menor a mayor, es $Q_1 = 1$. Coincide, por tanto con la mediana.

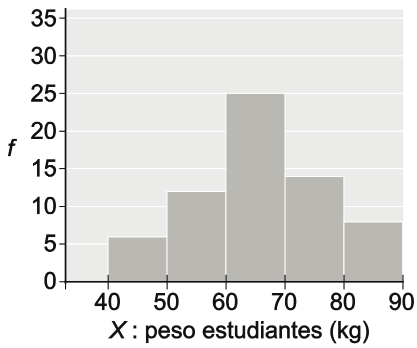
El 75 % de 100 es 75. Por tanto el cuartil Q_3 =2, que es el valor que ocupa el lugar 75 una vez ordenados los datos de menor a mayor.

37. La distribución del peso en kg (*X*) de una muestra de 65 estudiantes de un centro educativo se muestra en el siguiente gráfico:

a) Escribe la tabla de frecuencias y dibuja el polígono de frecuencias relativas acumuladas.

b) Obtén el peso medio y desviación típica.

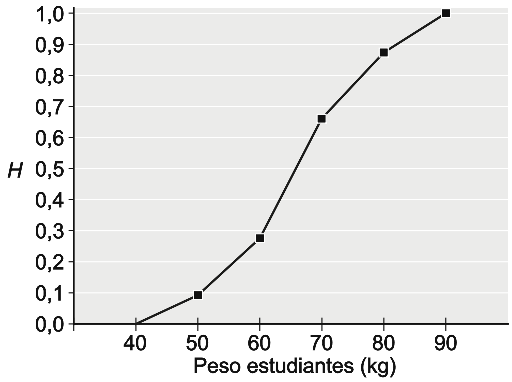
c) Calcula la mediana y los cuartiles primero y tercero.



a) A partir del histograma construimos la tabla de frecuencias ampliada para los cálculos posteriores:

X	f_i	F_i	h_i	H_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[40, 50)	6	6	0,092	0,092	45	270	12 150
[50, 60)	12	18	0,185	0,277	55	660	36 300
[60, 70)	25	43	0,385	0,662	65	1625	105 625
[70, 80)	14	57	0,215	0,877	75	1050	78 750
[80, 90)	8	65	0,123	1	85	680	57 800
	65		1			4285	290 625

A partir de los datos de la tabla se construye el polígono de frecuencias relativas acumuladas.



b) El peso medio de los estudiantes y su desviación típica se calculan a partir de los datos de la tabla

$$\bar{X} = \frac{4285}{65} = 65{,}923 \text{ kg} \qquad s^2 = \frac{290625}{65} - 65{,}923^2 = 125{,}302 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{125{,}302} = 11{,}194 \text{ kg}$$

c) Para el cálculo de los cuartiles se utiliza la columna de las frecuencias absolutas acumuladas.
Cuartil Q_1. El 25 % de 65 es 16,25, que se acumula en el intervalo [50, 60), de longitud 10 y que contiene 12 observaciones. Antes de éste intervalo se tienen acumuladas 6 observaciones, luego:

$$Q_1 = 50 + \frac{10\ .\ (16{,}25 - 6)}{12} = 58{,}542 kg$$

Cuartil Q_2. Es la mediana. El 50 % de 65 es 32,5, que se acumula en el intervalo [60, 70), de longitud 10 y que contiene 25 observaciones. Antes de este intervalo se tienen acumuladas 18 observaciones. Luego

$$M = Q_2 = 60 + \frac{10\ .\ (32{,}5 - 18)}{25} = 65{,}8 \text{ kg}$$

Cuartil Q_3. El 75 % de 65 es 48,75, que se acumula en el intervalo [70, 80), de longitud 10 y que contiene 14 observaciones. Antes de este intervalo se tienen acumuladas 43 observaciones. Luego:

$$Q_3 = 70 + \frac{10 \cdot (48{,}75 - 43)}{14} = 74{,}11 \text{ kg}$$

38. La distribución del número de materias suspendidas (*X*) por 38 alumnos de 1º de bachillerato es:

x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	14	10	6	4	3	1

a) Determina la moda, la mediana y la media ¿Cuál de ellas representa mejor la distribución de los datos?

b) Calcula la desviación absoluta media.

c) ¿Qué porcentaje de datos se encuentran en el intervalo $\left(\bar{x}-2s,\bar{x}+2s\right)$, siendo *s* la desviación típica.

a) Para los cálculos posteriores, se añaden a la tabla las columnas de las frecuencias absolutas acumuladas y las necesarias para hallar la media y la varianza.

x_i	f_i	F_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
0	14	14	0	0
1	10	24	10	10
2	6	30	12	24
3	4	34	12	36
4	3	37	12	48
5	1	38	5	25
	38		51	143

Con los datos y resultados de la tabla, se tiene que:

La moda es $M_o = 0$, que es el número de materias suspendidas que aparece con más frecuencia.

La mediana es $M = 1$, ya que ordenadas de menor a mayor es la calificación que ocupa los lugares 19 y 20.

La media aritmética: $\bar{X}=\dfrac{51}{38}=1{,}342$ asignaturas suspensas

El valor que mejor representa la distribución, dada su asimetría, es la mediana, aunque en este caso el valor de la media no está muy alejado de la mediana.

b) La desviación absoluta media se calcula a partir de su definición:

$$D_x=\frac{1}{38}\sum_{i=1}^{6}f_i\left|x_i-\bar{X}\right|=\frac{44{,}421}{38}=1{,}169\ .$$

c) Se obtiene la desviación típica de la distribución a partir de la última columna de la tabla:

$$s^2=\frac{143}{38}-1{,}342^2=1{,}9619\ \Rightarrow\ s=\sqrt{1{,}9619}=1{,}4007$$

d) De modo que el intervalo:

$$\left(\bar{X}-2s,\ \bar{X}+2s\right)=\left(1{,}342-2{,}8014;\ 1{,}342+2{,}8014\right)=\left(-1{,}4594;\ 4{,}1434\right)$$

incluye 37 observaciones, que representan el 97,37 % de las mismas.

39. En los diez primeros partidos de liga, los goles marcados por dos equipos de fútbol rivales fueron:

Equipo *A*: 0, 2, 1, 5, 1, 4, 3, 0, 2, 1

Equipo *B*: 2, 1, 0, 0, 6, 1, 4, 2, 1, 1

a) Determina la media, moda y mediana del número de goles marcados por cada equipo y compáralas.

b) Halla los cuartiles del número de goles de cada equipo.

c) Dibuja el diagrama de caja de las dos distribuciones. Compáralos.

d) Calcula el coeficiente de variación. ¿Cuál de los dos equipos muestra mayor regularidad?

a) De los datos se obtiene que la media de goles de cada equipo es

$$\bar{x}_A = \frac{0+2+1+5+1+4+3+0+2+1}{10} = 1{,}9 \qquad \bar{x}_B = \frac{2+1+0+0+6+1+4+2+1+1}{10} = 1{,}8$$

Ambos equipos presentan la misma moda $Mo_A = Mo_B = 1$. En el caso del equipo *A*, marcó esa cifra de goles en tres partidos y en el caso del equipo B en cuatro partidos.

Si se ordena de menor a mayor la distribución de los goles en ambos equipos:

Equipo *A*: 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5 Equipo *B*: 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 6

Al tener 10 observaciones (número par), la mediana es cualquier valor comprendido entre los que ocupen las posiciones 5 y 6. Luego la mediana del equipo A es 1 ó 2 (cualquier valor entre estos dos puede considerarse mediana), mientras que la mediana del equipo B es 1. Si se comparan estos valores, se deduce que ambos equipos presentan cifras muy similares.

b) Se deben calcular, para ambas distribuciones, los cuartiles primero y tercero. El segundo cuartil, la mediana, ya ha sido calculado.

Cuartiles de la distribución del equipo *A*: $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1{,}5$ y $Q_3 = 3$ (Para la mediana se ha tomado el punto medio entre 1 y 2).

Luego el rango intercuartílico del equipo *A* es $RIC_A = 3 - 1 = 2$.

Análogamente para la distribución de goles del equipo *B*:

Cuartiles de la distribución del equipo *B*: $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$ y $Q_3 = 2$.

El rango intercuartílico del equipo *B* es $RIC_B = 3 - 1 = 2$.

c) De los resultado del apartado b) resulta que para el equipo *A*, los extremos del diagrama (los bigotes) son:

$Q_3 + 1{,}5\ RIC_A = 3 + 1{,}5 \cdot 2 = 6$. De donde LS_A (mayor de los valores que son menores o iguales que $Q_3 + 1{,}5\ RIC_A$ es 5.

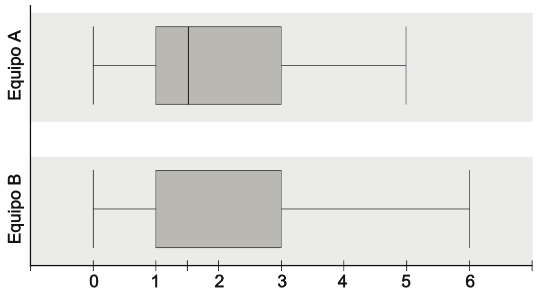
$Q_1 - 1{,}5\ RIC_A = 1 - 1{,}5 \cdot 2 = -2$. De donde LI_A (menor de los valores que son mayores o iguales que $Q_1 - 1{,}5\ RIC_B = 0$.

Y para el equipo B:

$Q_3 + 1{,}5$ RIC $= 3 + 1{,}5 \cdot 2 = 6$. De donde LS_B (mayor de los valores que son menores o iguales que $Q_3 + 1{,}5$ RIC) $= 6$.

$Q_1 - 1{,}5$ RIC $= 1 - 1{,}5 \cdot 2 = -2$. De donde LI_B (menor de los valores que son mayores o iguales que $Q_1 - 1{,}5$ RIC) $= 0$.

Los diagramas de cajas quedan, entonces, así:



d) Para calcular los coeficientes de variación necesitamos las desviaciones típicas:

$$s_A^2=\frac{(0-1{,}9)^2\cdot 2+(1-1{,}9)^2\cdot 3+(2-1{,}9)^2\cdot 2+(3-1{,}9)^2+(4-1{,}9)^2+(5-1{,}9)^2}{10}=2{,}49\Rightarrow s_A=1{,}578$$

$$s_B^2=\frac{(0-1{,}8)^2\cdot 2+(1-1{,}8)^2\cdot 4+(2-1{,}8)^2\cdot 2+(4-1{,}8)^2+(6-1{,}8)^2}{10}=3{,}16\Rightarrow s_B=1{,}778$$

De donde:

$$CV_A=\frac{1{,}578}{1{,}9}=0{,}831;\quad CV_B=\frac{1{,}778}{1{,}8}=0{,}988$$

Parece que el equipo *A* presenta algo menos de variabilidad. Esto también se puede observar en el diagrama de cajas.

CUESTIONES.

40. El valor más pequeño observado de una variable estadística cuantitativa continua es 34,2 y el mayor 43,3. Se dispone de 110 observaciones.

Haz, de forma razonada, al menos dos propuestas para agrupar las observaciones de esta variable en clases.

Como el rango de las observaciones es 43,3 – 34,2 = 9,1; se puede proponer:

a) Dividir el recorrido de la variable en 7 clases de longitud 1,3 cada clase:

[34,2; 35,5); [35,5; 36,8); [36,8; 38,1); [38,1; 39,4); [39,4; 40,7); [40,7; 42,0) y [42,0; 43,3]

Es la propuesta más ajustada y, tal vez, la más recomendable en este caso.

b) Si se propone utilizar 10 clases (por tener más de 100 observaciones), puede hacerse con clases de longitud 1, desde 34 a 44:

[34; 35); [35; 36); [36; 37); [37; 38); [38; 39); [39; 40); [40; 41); [41; 42); [42; 43) y [43; 44]

Aunque en esta propuesta los intervalos inicial y final han quedado algo desequilibrados, ya que se restó 0,2 al primero y se añadió 0,7 al último.

c) Una tercera posibilidad, con 10 intervalos de longitud 1 sería equilibrar lo que se añade y se resta al máximo y al mínimo, respectivamente, de las observaciones:

[33,8; 34,8); [34,8; 35,8); [35,8; 36,8); [36,8; 37,8); [37,8; 38,8); [38,8; 39,8); [39,8; 40,8); [40,8; 41,8); [41,8; 42,8); [42,8; 43,8)

41. Sea una variable estadística *X* que toma valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, con frecuencias $f_1, f_2, \dots, f_n$ y cuya media es $\bar{X}$ Considera la variable aleatoria *Y*, de valores los de la tabla y con frecuencias absolutas $f_1, f_2, \dots, f_n$ iguales a las de los valores correspondientes de *X*.

Calcula la media de *Y*.

Y	f_i
$y_1=x_1-\bar{X}$	f_1
$y_2=x_2-\bar{X}$	f_2
…	…
$y_n=x_n-\bar{X}$	f_n

Se calcula la media de *Y* sustituyendo sus valores en función de *X* y utilizando que $N=\sum_i f_i$ y $\bar{X}=\frac{1}{N}\sum_i f_i x_i$, se obtiene

$$\bar{Y}=\frac{1}{N}\sum_i f_i y_i=\frac{1}{N}\sum_i f_i\left(x_i-\bar{X}\right)=\frac{1}{N}\sum_i f_i x_i-\frac{\bar{X}}{N}\sum_i f_i=\frac{1}{N}\sum_i f_i x_i-\frac{\bar{X}}{\cancel{N}}\cancel{N}=\frac{1}{N}\sum_i f_i x_i-\bar{X}=0$$

Por tanto, $\bar{Y}=0$.

42. De una característica *X* se obtienen las observaciones 1, 5, 7, 3, 7, 11, 1 y 3

a) Calcula la media y la varianza de X.

b) Multiplica los valores anteriores por 2 y obtén ahora su media y su varianza.

a) La media es $\bar{X}=\frac{1+5+7+3+7+11+1+3}{8}=\frac{38}{8}=4,75$ y la varianza:

$$s_x^2=\frac{1^2+5^2+7^2+3^2+7^2+11^2+1^2+3^2}{8}-4,75^2=33-4,75^2=10,4375$$

b) Para la variable $Y=2X$ se obtienen los valores 2, 10, 14, 6, 14, 22, 2, 6.

Entonces: $\bar{Y}=\frac{2+10+14+6+14+22+2+6}{8}=\frac{76}{8}=9,5$; es decir, $\bar{Y}=2\bar{X}$.

La varianza de *Y*: $s_Y^2=\frac{2^2\cdot 2+6^2\cdot 2+10^2+14^2\cdot 2+22^2}{8}-9,5^2=41,75$; es decir, $s_Y^2=2^2 s_X^2$.

43. Sea *X* una variable estadística cuya media aritmética es $\bar{X}$, y su varianza s^2.

A los valores de la variable *X* se les suma la constante *k*, obteniéndose una nueva variable $Y=X+k$ ¿Cuáles serán la media y la varianza de *Y*?

Si *X* es una variable estadística cuya media aritmética es $\bar{X}$, la media aritmética de la variable $Y=X+k$ es:

$$\bar{Y}=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot y_i=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot(x_i+k)=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot x_i+\frac{k}{N}\sum_1^n f_i k=\bar{X}+k$$

y la varianza es: $s_Y^2=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot(y_i-\bar{Y})^2=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot(x_i+k-\bar{X}-k)^2=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot(x_i-\bar{X})^2=s_X^2$.

Es decir, la varianza no cambia pero la media se ve trasladada *k* unidades, por tanto la traslación de los datos no influye en su dispersión alrededor de la media.

44. Sea *X* una variable estadística cuya media aritmética es $\bar{X}$, y su varianza s^2.

Considera ahora la variable *Y*, resultado de multiplicar los valores de *X* por una constante *c*. Calcula la media y la varianza de *Y*.

Si *X* es una variable estadística cuya media aritmética es $\bar{X}$, la media aritmética de la variable $Y=c-X$ es:

$$\bar{Y}=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot y_i=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot c\cdot x_i=\frac{c}{N}\sum_1^n f_i\cdot x_i=c\cdot\bar{X}$$

y la varianza es: $s_Y^2=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot(y_i-\bar{Y})^2=\frac{1}{N}\sum_1^n f_i\cdot(c\cdot x_i-c\cdot\bar{X})^2=\frac{c^2}{N}\sum_1^n f_i\cdot(x_i-\bar{X})^2=c^2\cdot s_X^2$

Es decir, la media queda multiplicada por *c* y la varianza por c^2, por tanto la dilatación de los datos influye en su dispersión alrededor de la media.

45. Si la media, obtenida a partir de una muestra, de una variable estadística cuantitativa es 3 y su varianza 25, ¿se puede decir que la media es representativa del conjunto de datos?

Para estudiar la variabilidad hay que calcular el coeficiente de variación. Si la variable es *X* se tiene:

$$CV(X)=\frac{s}{|\bar{X}|}=\frac{\sqrt{25}}{3}=\frac{5}{3}=1,667$$

Esto indica que los datos no son muy homogéneos y, por tanto, es fácil que la media resulte poco representativa.

46. Si a los valores obtenidos de una variable estadística cuantitativa se les multiplica por una constante *k*, ¿en qué medida cambia el coeficiente de variación? Nota: prueba con los valores 1, 2, 5, 7 y 8; y con *k* = 3.

Si X toma los valores 1, 2, 5, 7 y 8, entonces $Y = 3X$ tomará los valores 3, 6, 15, 21 y 24, de donde:

$$\bar{X} = \frac{1+2+5+7+8}{5} = 4{,}6 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{3+6+15+21+24}{5} = 13{,}8 \Rightarrow \bar{Y} = 3 \cdot \bar{X}$$

Las varianzas y desviaciones típicas son:

$$s_X^2 = \frac{1^2+2^2+5^2+7^2+8^2}{5} - 4{,}6^2 = 7{,}44 \Rightarrow s_X = 2{,}73 \text{ y } s_Y^2 = \frac{3^2+6^2+15^2+21^2+64^2{}'}{5} - 13{,}8^2 = 66{,}96 \Rightarrow s_Y = 8{,}183\ .$$

Por tanto los coeficientes de variación son: $CV_X = \frac{s_x}{\bar{X}} = \frac{2{,}73}{4{,}6} = 0{,}593$ y $CV_Y = \frac{s_y}{\bar{Y}} = \frac{8{,}183}{13{,}8} = 0{,}593$.

Es decir, los coeficientes de variación no cambian ante una dilatación de los datos.

Para el caso general, se pueden aplicar los resultados obtenidos en la cuestión 44. Así, al multiplicar una variable estadística X por una constante k, se obtiene la variable $Y = kX$, cuya media y desviación típica se relacionan con la de X en la forma: $\bar{Y} = k\bar{X}$ y $s_Y = k^2 s_x$. Por tanto, los respectivos coeficientes de variación se relacionan en la forma: $\frac{CV_Y}{CV_X} = \frac{s_Y}{\bar{Y}} : \frac{s_x}{\bar{X}} = \frac{s_Y \cdot \bar{X}}{s_X \cdot \bar{Y}} = \frac{ks_X \cdot \bar{X}}{s_X \cdot k\bar{Y}} = 1 \Rightarrow CV_Y = CV_X$, que confirma el resultado obtenido anteriormente.

PROBLEMAS.

47. En la encuesta del CIS (centro de Investigaciones Sociológicas) correspondiente al primer trimestre de 2013 sobre el nivel de estudios, se obtuvo

Nivel de estudios	f_i
Sin estudios	147
Primaria	1055
Secundaria	319
FP	451
Universitarios Medios	210
Universitarios Superiores	293
No contesta	8
	2483

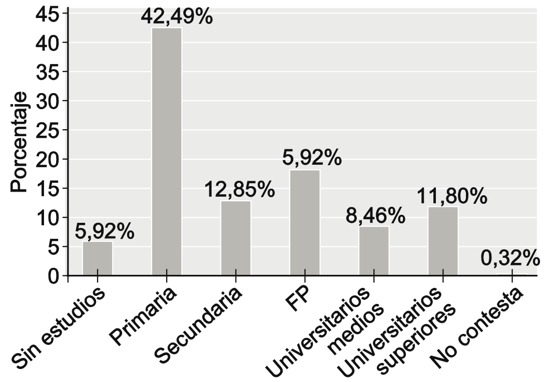
a) Calcula la distribución de frecuencias relativas y de porcentajes.

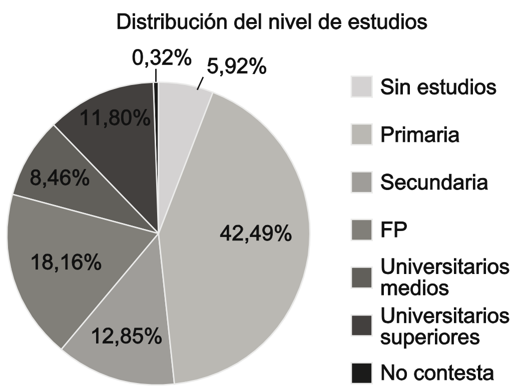
b) Utiliza el gráfico más adecuado para representar la distribución de los porcentajes.

a) A la tabla se le añaden las columnas de las frecuencias relativas y de los porcentajes:

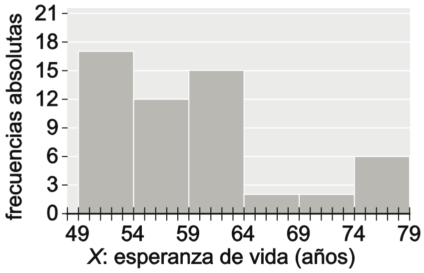
Nivel de estudios	f_i	h_i	Porcentajes
Sin estudios	147	0,0592	5,92%
Primaria	1055	0,4249	42,49%
Secundaria	319	0,1285	12,85%
FP	451	0,1816	18,16%
Universitarios Medios	210	0,0846	8,46%
Universitarios Superiores	293	0,1180	11,80%
No contesta	8	0,0032	0,32%
	2483	1	100%

b) Se propone un gráfico de barras o un diagrama de sectores:





48. La esperanza de vida, con base en 2012, en los países de África se muestra en el siguiente histograma con los países agrupados por intervalos de edad (Fuente: *CIA WorldFactbook*).



a) Construye la tabla de frecuencias.

b) Dibuja el polígono de frecuencias absolutas acumuladas.

c) Calcula la media, mediana y la moda.

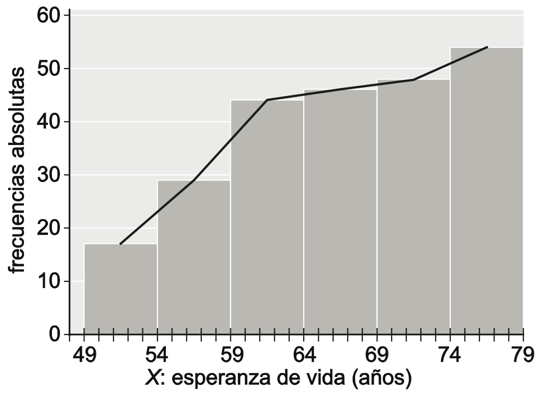
d) Determina la varianza y las desviaciones típica y absoluta media. Compara estas dos últimas.

a) A partir del histograma se recupera y amplía la tabla de frecuencias para los cálculos posteriores:

La última columna se ha escrito aquí por comodidad, aunque para su cálculo se utiliza la media hallada en el apartado c).

Clases	f_i	F_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	$f_i\left\|x_i - \bar{X}\right\|$
[49,54)	17	17	51,5	875,5	45 088,25	135,370
[54,59)	12	29	56,5	678	38 307	35,556
[59,64)	15	44	61,5	922,5	56 733,75	30,556
[64,69)	2	46	66,5	133	8844,5	14,074
[69,74)	2	48	71,5	143	10 224,5	24,074
[74,79]	6	54	76,5	459	35 113,5	102,222
	54			3211	194 311,5	341,852

b) El polígono de frecuencias absolutas acumuladas es:



c) Para los cálculos recurrimos a la tabla:

Media aritmética: $\bar{X} = \dfrac{3211}{54} = 59{,}46$ años

La mediana: el 50% de las 54 observaciones son 27. Ordenadas de menor a mayor y mirando en la tabla la columna de las frecuencias absolutas acumuladas (F_i), la observación que ocupa el lugar 27 se encuentra en el intervalo [54,59), cuya longitud es 5 y que contiene 12 observaciones y antes de este intervalo se han acumulado 17 observaciones. Luego la mediana es: $M = 54 + \dfrac{(27-17)5}{12} = 58{,}17$ años.

El intervalo modal es [49, 54), que contiene 17 observaciones.

d) Con ayuda de la tabla del apartado anterior se obtienen la varianza y las desviación típica y absoluta media.

$$s^2 = \frac{194\,311{,}5}{54} - 59{,}46^2 = 62{,}87 \Rightarrow s = 7{,}93 \text{ años}; \quad D_X = \frac{341{,}852}{54} = 6{,}33 \text{ años}.$$

Se observa que la desviación típica tiene un valor superior al de la desviación absoluta media.

49. En la siguiente tabla se han agrupado las provincias españolas según su tasa de natalidad (*X*: nacidos por 1000 habitantes) en el año 2011 (Fuente INE).

X	f_i
[5,7; 8)	8
[8; 10,3)	24
[10,3; 12,6)	18
[12,6; 14,9)	0
[14,9; 17,2)	1
[17,2; 19,5]	1

a) Halla la tasa media de nacimientos por provincia en el año 2011.

b) Determina la moda y la mediana.

c) Representa los datos.

d) Calcula la varianza y la desviación típica.

e) Determina el coeficiente de variación.

a) Se añaden a la tabla las columnas necesarias para efectuar los cálculos que se piden

X	f_i	F_i	x_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
[5,7; 8)	8	8	6,85	54,8	375,38
[8; 10,3)	24	32	9,15	219,6	2009,34
[10,3; 12,6)	18	50	11,45	206,1	2359,845
[12,6; 14,9)	0	50	13,75	0	0
[14,9; 17,2)	1	51	16,05	16,05	257,6025
[17,2; 19,5]	1	52	18,35	18,35	336,7225
	52			514,9	5338,89

La tasa media de natalidad en el año 2011 fue

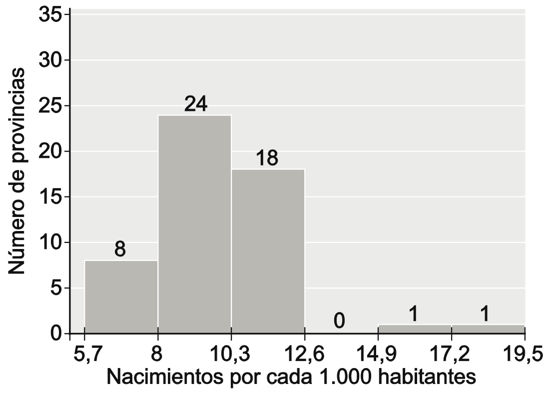
$$\overline{X} = \frac{514,9}{52} = 9,902 \text{ nacimientos por cada 1000 habitantes}$$

b) El intervalo modal es [8; 10,3) y contiene 24 observaciones.

Mediana: el 50% del total 52 son 26 observaciones. De la columna de las frecuencias acumuladas se observa que la observación número 26 (una vez ordenadas de menor a mayor) se encuentra en el intervalo [8; 10,3), de longitud 2,3 y que contiene 24 observaciones. Antes de este intervalo se han acumulado 8 observaciones. Luego

$$M = 8 + \frac{(26-8)2,3}{24} = 9,725 \text{ nacimientos por cada 1000 habitantes}$$

c) El histograma de frecuencias absolutas es:



d) La varianza se obtiene a partir de los resultados de la tabla:

$$s^2 = \frac{5338,89}{52} - 9,902^2 = 4,6229 \Rightarrow s = \sqrt{4,6229} = 2,1501$$

e) El coeficiente de variación es:

$$CV = \frac{s}{\overline{X}} = \frac{2,1501}{9,902} = 0,2171$$

50. La tabla siguiente incluye los porcentajes de gastos de administración (*X*) calculados sobre el total de primas recaudadas (f_i), en millones de euros, por cinco empresas en seguros de hogar.

Empresa	X	f_i
A	11	220
B	15	130
C	14	145
D	12	180
E	11	150

a) Determina el porcentaje medio de gastos.

b) Si se supone que estas cinco empresas cubren todo el mercado de seguros de hogar, calcula el coeficiente de variación y haz una valoración del resultado.

a) Se completa la tabla con las columnas necesarias para el cálculo del porcentaje medio y la varianza de los porcentajes:

Empresa	X	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
A	11	220	2420	26 620
B	15	130	1950	29 250
C	14	145	2030	28 420
D	12	180	2160	25 920
E	11	150	1650	18 150
		825	10 210	128 360

El porcentaje medio de gastos de administración se obtiene a partir de los cálculos de la tabla:

$$\bar{X} = \frac{10210}{825} = 12{,}376\ \%$$

b) Para calcular el coeficiente de variación se necesita la desviación típica:

$s^2 = \frac{128360}{825} - 12{,}376^2 = 2{,}4285 \Rightarrow s = 1{,}5584\%$ y de aquí resulta $CV = \frac{1{,}5584}{12{,}376} = 0{,}1259$

Que informa de la variabilidad en el porcentaje de gastos de administración cobrados por las distintas empresas y, en este caso puede verse que esa variabilidad es relativamente pequeña.

51. Los tiempos de vida (*X,* en horas) de 500 bombillas de una cierta marca se han agrupado en la tabla.

X	f_i
[0, 500)	15
[500, 1000)	56
[1000, 1500)	178
[1500, 2000)	115
[2000, 2500)	84
[2500, 3000)	52

a) Representa el histograma correspondiente, junto con el polígono de frecuencias.

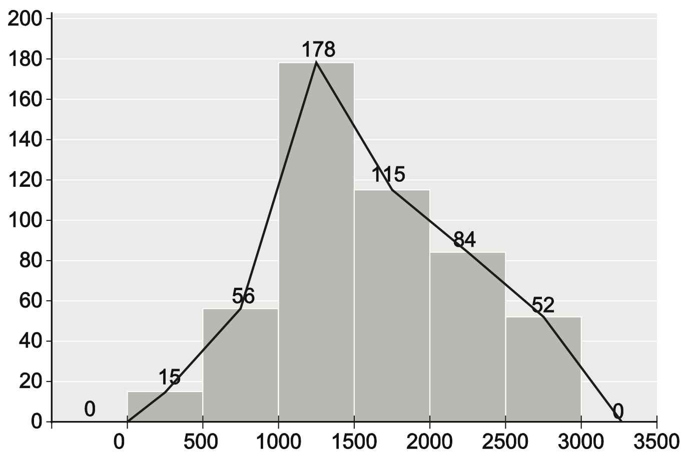
b) Calcula la media, la mediana y el intervalo modal.

c) Determina la desviación absoluta media, la varianza y la desviación típica.

d) Halla los cuartiles.

e) Estudia la variabilidad de la distribución de frecuencias.

a) El histograma y el polígono de frecuencias son:



b) El intervalo modal es el [1000, 1500), que contiene 178 observaciones

c)

Clases	f_i	F_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	$f_i\lvert x_i - \bar{X}\rvert$
[0, 500)	15	15	250	3750	937 500	20 295
[500, 1000)	56	71	750	42 000	31 500 000	47 768
[1000, 1500)	178	249	1250	222 500	278 125 000	62 834
[1500, 2000)	115	364	1750	201 250	352 187 500	16 905
[2000, 2500)	84	448	2250	189 000	425 250 000	54 348
[2500, 3000]	52	500	2750	143 000	393 250 000	59 644
	500			801 500	1 481 250 000	261 794

Para el cálculo de la media y la mediana se añaden a la tabla las columnas necesarias. En la tabla se incluye también la columna necesaria para el cálculo de la varianza.

El tiempo medio de vida de las bombillas es: $\bar{X} = \dfrac{801500}{500} = 1603$ horas.

Mediana del tiempo de vida de las bombillas. El 50 % de 500 es 250 y la observación 250, una vez ordenados los datos queda incluida en el intervalo [1500, 2000), de longitud 500 y que incluye 115 observaciones. Hasta este intervalo se han acumulado 249 observaciones, luego:

$$M = 1500 + \frac{(250-249)500}{115} = 1504{,}3 \text{ horas}$$

d) La desviación absoluta media viene dada por: $D_{\bar{x}} = \dfrac{261794}{500} = 523{,}588 \text{ horas}$

La varianza del tiempo de vida de las bombillas y su desviación típica son:

$$s^2 = \frac{1\,481\,250\,000}{500} - 1603^2 = 392\,891 \Rightarrow s = 626{,}81 \text{ horas.}$$

Como se puede observar, la desviación típica resulta ser más algo superior que la desviación absoluta media.

e) Para determinar los cuartiles se procede como sigue:

El 25% de 500 es 125 y la observación 125, una vez ordenados los datos queda incluida en el intervalo [1000, 1500), de longitud 500 y que incluye 178 observaciones. Hasta este intervalo se han acumulado 71 observaciones, luego:

$$Q_1 = 1000 + \frac{(125-71)500}{178} = 1151{,}69 \text{ horas}$$

Por otro lado $Q_2 = M = \mathbf{1504{,}3}$ **horas**.

Para el tercer cuartil se tiene en cuenta que el 75 % de 500 es 375 y la observación 375, una vez ordenados los datos queda incluida en el intervalo [2000, 2500), de longitud 500 y que incluye 84 observaciones. Hasta este intervalo se han acumulado 364 observaciones, luego:

$$Q_3 = 2000 + \frac{(375-364)500}{84} = 2065{,}48 \text{ horas}$$

f) Para estudiar la variabilidad se determina el coeficiente de variación que resulta:

$$CV = \frac{626{,}81}{1603} = 0{,}391$$

e indica una variabilidad media de los datos.

52. Las temperaturas medias (*X*) registradas a lo largo del mes de mayo en 50 ciudades se presentan agrupadas en la siguiente tabla

X	f_i
[15, 18)	7
[18, 21)	10
[21, 24)	15
[24, 27)	13
[27, 30]	5

a) Representa gráficamente los datos, mediante un histograma y añade el polígono de frecuencias.

b) Determina la media, la mediana y el intervalo modal.

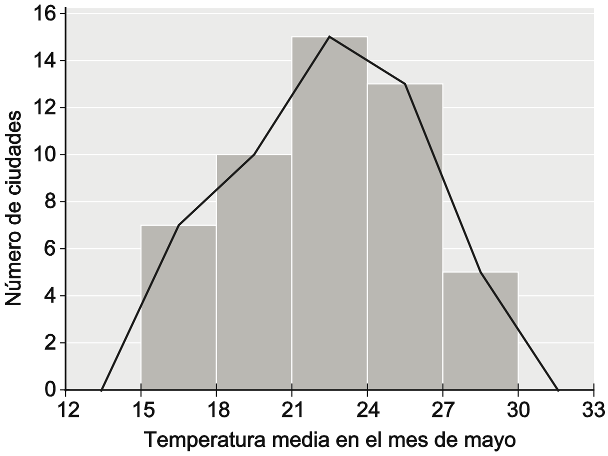
c) Halla los deciles 3 y 8.

d) Calcula las desviaciones absoluta media y la desviación típica. Compáralas.

e) Determina la proporción de variación de la distribución de las temperaturas.

f) ¿Por debajo de qué temperatura se encuentra el 35% de las ciudades con temperatura media más baja?

a) El histograma y el polígono de frecuencias son:



b) Para los cálculos de este apartado y siguientes se amplía la tabla con las columnas necesarias

X	f_i	F_i	x_i	f_ix_i	$f_i\left\|x_i-\bar{X}\right\|$	$f_ix_i^2$
[15, 18)	7	7	16,5	115,5	41,58	1905,75
[18, 21)	10	17	19,5	195	29,4	3802,5
[21, 24)	15	32	22,5	337,5	0,9	7593,75
[24, 27)	13	45	25,5	331,5	39,78	8453,25
[27, 30]	5	50	28,5	142,5	30,3	4061,25
	50			1122	141,96	25 816,5

que la temperatura media es $\bar{X}=\frac{1122}{50}=22{,}44\ °C$

Temperatura mediana: el 50% de las 50 observaciones es 25. La observación que ocupa el lugar 25, ordenadas de menor a mayor, está incluida en el intervalo [21, 24), de longitud 3 y que contiene 15 observaciones. Antes de este intervalo se acumulan 17 observaciones, luego la mediana es:

$$M=21+\frac{(25-17)\,3}{15}=22{,}6\ °C$$

El intervalo modal es [21, 24), ya que es el que contiene mayor número de observaciones,15.

c) Para calcular el decil 3, D_3, se observa que el 30 % de las 50 observaciones es 15. La observación que ocupa el lugar 15, ordenadas de menor a mayor, está incluida en el intervalo [18, 21), de longitud 3 y que contiene 10 observaciones. Antes de este intervalo se acumulan 10 observaciones, luego $D_3=18+\frac{(15-7)3}{10}=20{,}4$ ºC.

Razonando de la misma forma se calcula el decil 8: $D_8=24+\frac{(40-32)3}{13}=25{,}85$ ºC

d) La desviación absoluta media se obtiene a partir de los cálculos de la tabla: $D_X=\frac{141{,}96}{50}=2{,}8392$ °C

Y la varianza y desviación típica: $s^2=\frac{25816{,}5}{50}-22{,}442^2=12{,}7764 \rightarrow s=\sqrt{12{,}7764}=3{,}5744\ °C$.

Se observa que la desviación típica es mayor que la desviación absoluta media.

e) El coeficiente de variación de la distribución de temperaturas es $CV=\frac{3{,}5744}{22{,}44}=0{,}1593$.

f) Para responder a esta cuestión, hay que calcular el percentil 35. Como el 35% de las 50 observaciones es 17,5 que está por encima de 17. La observación que ocupa el lugar 18, una vez ordenadas de menor a mayor, está incluida en el intervalo [21, 24), de longitud 3 y que contiene 15 observaciones. Antes de este intervalo se acumulan 17 observaciones, luego este percentil es: $p_{35}=21+\frac{(17{,}5-17)\,3}{15}=21{,}1\ °C$.

De donde el 35 % de las ciudades con temperatura más baja no superaron los 21,1 ºC.

53. De una muestra de 100 recién nacidos en una clínica de maternidad, se ha obtenido la siguiente tabla de pesos en kg (X) para bebés de entre 3 y 4 kg de peso.

X	f_i
[3,0; 3,2)	27
[3,2; 3,4)	38
[3,4; 3,6)	16
[3,6; 3,8)	10
[3,8; 4,0]	9

a) Dibuja el histograma de la distribución de frecuencias relativas.

b) Encuentra la media, la mediana y el intervalo modal.

c) Determina la varianza y la desviación típica.

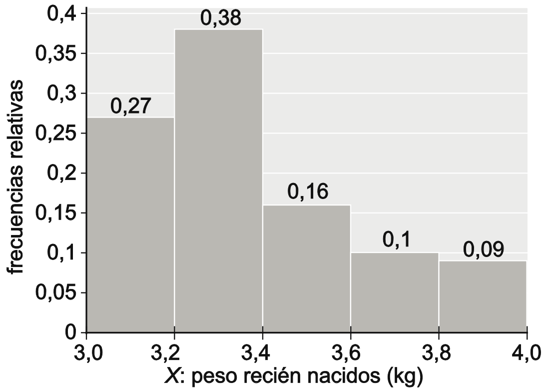
d) ¿Es simétrica la distribución? Justifica la respuesta.

e) Calcula los percentiles 5 y 95. ¿Cuántos bebés se encuentran por encima del 90 % del peso?

Se amplía la tabla con las columnas necesarias para responder a los apartados siguientes

Clases	f_i	F_i	h_i	x_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
[3,0; 3,2)	27	27	0,27	3,1	83,7	259,47
[3,2; 3,4)	38	65	0,38	3,3	125,4	413,82
[3,4; 3,6)	16	81	0,16	3,5	56	196
[3,6; 3,8)	10	91	0,1	3,7	37	136,9
[3,8; 4,0]	9	100	0,09	3,9	35,1	136,89
	100		1		337,2	1143,08

a) El histograma de frecuencias relativas se construye con la columna de las h_i:



b) El intervalo modal es [3,2; 3,4), ya que contiene más observaciones (todos los intervalos son de igual amplitud).

El peso medio de los bebés es $\bar{X} = \dfrac{337,2}{100} = 3,372 \text{ kg}$

La mediana del peso de los bebés se encuentra en el intervalo [3,2; 3,4), puesto que una vez ordenadas las observaciones, buscamos la que ocupa el lugar 50 (50 % de 100 observaciones). En intervalo tiene longitud 0,2 kg e incluye 38 observaciones. Además antes de llegar a este intervalo se acumulan 27 observaciones. Luego:

$$M = 3,2 + \frac{(50-27)0,3}{38} = 3,382 \text{ kg}$$

c) La varianza y la desviación típica vienen dadas por $s^2 = \dfrac{1143,08}{100} - 3,372^2 = 0,0604 \to s = \sqrt{0,0604} = 0,2458$.

d) A la vista del histograma se puede afirmar que la distribución no es simétrica, puesto que las observaciones no se reparten de forma equilibrada a la izquierda y a la derecha de la media..

e) Para calcular los percentiles 5 y 95 se sigue el mismo procedimiento que con la mediana:

El 5 % de 100 observaciones es 5, de modo que el percentil 5 se encuentra en el primer intervalo [3,0; 3,2), que tiene longitud 0,2 y contiene 27 observaciones, luego $p_5 = 3,0 + \dfrac{5 \cdot 0,2}{27} = 3,037 \text{ kg}$.

El 95 % de 100 es 95, de manera que el percentil 95 se encuentra en el intervalo [3,8; 4,0), de longitud 0,2 y que contiene 9 observaciones. Como antes de este intervalo se acumulan 91 observaciones, resulta

$$p_{95} = 3,8 + \frac{(95-91)\cdot 0,2}{9} = 3,889 \text{ kg}.$$

Por encima del 90 % del peso se encuentra el 10 % de los bebés, es decir 10 bebés.

54. Dado el siguiente conjunto de datos, relativos a los vecinos de un inmueble mayores de 40 años.

61	**69**	**42**	**49**	**62**	**66**	**41**	**48**	**43**	**54**
51	**43**	**49**	**42**	**43**	**53**	**44**	**41**	**51**	**51**
54	**59**	**56**	**58**	**64**	**63**	**46**	**52**	**42**	**66**
69	**57**	**48**	**44**	**67**	**69**	**58**	**54**	**66**	**65**
42	**57**	**55**	**53**	**50**	**48**	**63**	**68**	**41**	**70**

a) Para los datos sin agrupar dibuja el diagrama de caja

b) Agrupa los datos en intervalos de longitud 5, por un lado, y de longitud 10 por otro.

c) Representa gráficamente las dos distribuciones

d) Calcula la media, la mediana y el intervalo modal en cada una de las dos distribuciones.

e) Calcula el coeficiente de variación de ambas distribuciones y comenta las diferencias encontradas.

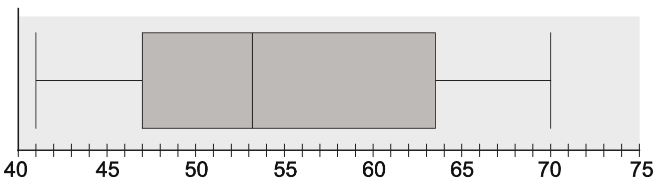
a) Para la representación del diagrama de cajas, ordenamos los 50 datos de menor a mayor.

El valor mínimo es 41 y el máximo es 70.

Como el 25 % de 50 es 12,5; el primer cuartil vendrá dado por la media de los que ocupen las posiciones 12 y 13, estos son los valores 46 y 48 y por tanto $Q_1 = 47$

Del mismo modo, como el 75 % de 50 es 37,5; el tercer cuartil vendrá dado por la media de los que ocupen las posiciones 37 y 38, estos son los valores 62 y 63 y por tanto $Q_3 = 62{,}5$.

La mediana viene dada por el valor intermedio de los que ocupan las posiciones 25 y 26, que son 53 y 54, de donde $M = 53{,}5$.



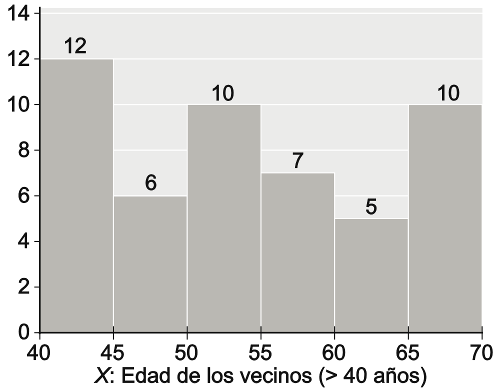
b) Como el máximo de las observaciones es 70 y el mínimo 41, elegimos seis intervalos de longitud 5 y 3 intervalos de longitud 10, empezando en 40 y finalizando en 70. Efectuado el recuento en ambos casos, resulta:

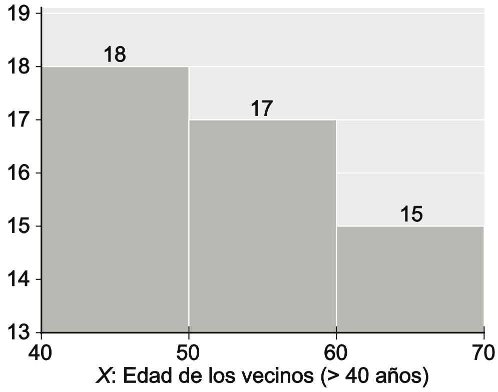
Clases	f_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i$2	F_i
[40, 45)	12	42,5	510	21 675	12
[45, 50)	6	47,5	285	13 537,5	18
[50, 55)	10	52,5	525	27 562,5	28
[55, 60)	7	57,5	402,5	23 143,75	35
[60, 65)	5	62,5	312,5	19 531,25	40
[65, 70]	10	67,5	675	45 562,5	50
	50		2710	151 012,5	

Clases	f_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	F_i
[40, 50)	18	45	810	36450	18
[50, 60)	17	55	935	51425	35
[60, 70]	15	65	975	63375	50
	50		2720	151250	

A las dos tablas se les han añadido las columnas necesarias para los cálculos posteriores.

c) Se dibuja el histograma correspondiente a las dos distribuciones:





Que son dos formas diferentes de representar la misma distribución del número de vecinos mayores de 40 años. La apariencia, como se ve en los histogramas, es claramente distinta.

d) Para cada distribución se calcula la media, la mediana y el intervalo modal

De la primera tabla, la de las clases de longitud 5, se obtiene que la media aritmética es

$$\bar{X} = \frac{2710}{50} = 54{,}2 \text{ años}$$

La mediana se encuentra en el intervalo [50,55), de longitud 5 y que contiene 10 observaciones. Antes de este intervalo se ha acumulado 18 observaciones, luego la mediana es $M = 50 + \frac{(25-18)5}{10} = 53{,}5$ años muy próxima a la media.

El intervalo modal en este caso es [40,45), ya que es el que contiene el mayor número de observaciones (12).

En el caso de la segunda tabla, donde se han agrupado los datos en clases de longitud 10, se tiene que la media aritmética es : $\bar{X} = \frac{2720}{50} = 54{,}4 \text{ años}$, muy similar a la obtenida con las clases de longitud 5.

La mediana se encuentra en el intervalo [50, 60), de longitud 10 y que contiene 17 observaciones. Hasta llegar a este intervalo se acumulan 18 observaciones, de modo que ahora la mediana es $M = 50 + \frac{(25-18)10}{17} = 54{,}12$ años, también cercana a la mediana obtenida con clases de longitud 5.

En cuanto al intervalo modal, en este caso es [40, 50), que incluye el intervalo modal anterior.

e) Se debe obtener la desviación típica de cada una de las agrupaciones:

Para las clases de longitud 5: $s_x^2 = \frac{151012{,}5}{50} - 54{,}2^2 = 82{,}61 \Rightarrow s_x = \sqrt{82{,}61} = 9{,}089 \text{ años}$

Para las clases de longitud 10: $s_y^2 = \frac{151250}{50} - 54{,}4^2 = 65{,}64 \rightarrow s_y = \sqrt{65{,}64} = 8{,}102 \text{ años}$

Entonces, $CV(x) = \frac{9{,}089}{54{,}2} = 0{,}1677$ $\qquad CV(y) = \frac{8{,}102}{54{,}4} = 0{,}1489$

La agrupación en clases de longitud 10 presenta menor variabilidad que la agrupación en clases de longitud 5, como era de esperar, puesto que en el primer caso, en realidad solo se eligen 3 valores distintos para realizar los cálculos (las marcas de clase de las tres clases), mientras que en el segundo caso son 6 los valores elegidos.

55. La siguiente tabla recoge la edad, agrupada en intervalos, de una muestra de 1000 conductores de 14 o más años involucrados en accidentes con víctimas en vía urbana.

Edad	f_i
[14, 18)	16
[18, 25)	149
[25, 45)	526
[45, 65)	255
[65, 75)	36
[75, 90]	18

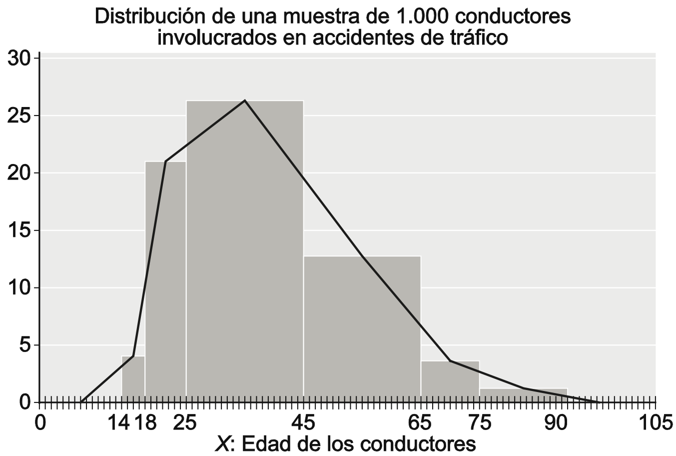
a) Representa la distribución mediante el diagrama de barras y el polígono de frecuencias absolutas.

b) Calcula la media, la mediana y las desviaciones típica y absoluta media.

c) Calcula el coeficiente de variación.

d) Suponiendo que la muestra es representativa de la población objeto de estudio, ¿Qué porcentaje de la misma se encuentra en el intervalo $(\overline{x}-2s, \overline{x}+2s)$.

a) El histograma y el polígono de frecuencias con el número de conductores por intervalos de edad de la muestra de 1000 conductores es



b) Se amplía la tabla con las columnas necesarias para los cálculos de los dos apartados siguientes:

Edad	f_i	F_i	x_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$	$f_i\lvert x_i-\overline{X}\rvert$
[14, 18)	16	16	16	256	4096	382,4
[18, 25)	149	165	21,5	3203,5	68 875,25	2741,6
[25, 45)	526	691	35	18 410	644 350	2577,4
[45, 65)	255	946	55	14 025	771 375	3850,5
[65, 75)	36	982	70	2520	176 400	1083,6
[75, 90]	18	1000	82,5	1485	122 512,5	766,8
	1000			39 899,5	1 787 608,8	11 402,3

La media de la edad de los conductores involucrados en accidentes de tráfico es $\overline{X}=\frac{39899,5}{1000}=39,9$ años.

Es decir, aproximadamente 40 años de edad.

El 50 % de 1000 observaciones es 500. La observación que ocuparía el lugar 500 una vez ordenados los datos de menor a mayor está, por tanto, en el intervalo [25, 45) según se desprende de la columna F_i de la tabla. El intervalo tiene longitud 20 y 526 conductores se encuentran en este intervalo de edad. Las observaciones acumuladas hasta llegar al intervalo [25, 45) son 165. De esta forma, la mediana es:

$$M=25+\frac{(500-165)\cdot 20}{526}=37,7 \text{ años}$$

A partir de los datos de la tabla se calculan la varianza y la desviación típica.

$$s^2 = \frac{1787608{,}8}{1000} - 39{,}9^2 = 195{,}639 \Rightarrow s = 13{,}987 \text{ años}$$

La desviación absoluta media viene dada por:

$$D_x = \frac{1402{,}3}{1000} = 1{,}4023$$

El coeficiente de variación es una medida de la variabilidad de los datos observados:

$$CV = \frac{13{,}987}{39{,}9} = 0{,}3506$$

c) El intervalo $(\bar{X} - 2s, \bar{X} + 2s) = (39{,}9 - 2 \cdot 13{,}987; 39{,}9 + 2 \cdot 13{,}987) = (11{,}93; 67{,}87)$, que contiene todas las observaciones desde 14 hasta 67,87. Antes del intervalo [65, 75) hay 946 observaciones acumuladas. El intervalo [65, 75), de longitud 10, contiene 36 observaciones. Como 67,87–65 = 2,87, resulta que, suponiendo distribuidas de manera uniforme las 36 observaciones en el intervalo, en el intervalo [65; 67,87) se incluyen $\frac{2{,}87 \cdot 36}{10} = 10{,}33$, es decir, 10 observaciones. Luego desde 14 hasta 67,87 se incluyen 946 + 10 = 956 observaciones, que representan el 95,6 % de la población estudiada.

ENTORNO MATEMÁTICO

A la búsqueda de un trabajo.

Mariela y Fernando son dos hermanos a punto de terminar sus estudios universitarios e intentar acceder al mercado laboral, o, como ellos dicen, ponerse a buscar curro.

Están preocupados por el tema, y no hacen más que leer sobre tasas de empleo, tasas de empleo por sexo, o por grupos de edad… y demás términos indescifrables que complican la información de los telediarios.

Sus amigos les dicen que no van a tener las mismas posibilidades aunque han estudiado lo mismo y han sacado notas parecidas.

Y aunque Fernando cree que eso es una leyenda urbana, Mariela piensa que su hermano es un ingenuo y que, posiblemente, sus amigos tengan razón.

Para hacer que su hermano "se caiga del guindo", le propone que investiguen un poco y ya de paso sueñen con lo que pueden llegar a ganar, y dejar así de depender de sus padres. Investigando en el Instituto Nacional de Estadística obtienen la tabla de la Tasa de Paro en España, de los últimos años (en %).

Año	Total	Hombres	Mujeres
2002	11,45	8,30	16,15
2003	11,49	8,50	15,84
2004	10,97	8,26	14,82
2005	9,15	7,14	11,99
2006	8,45	6,35	11,35
2007	8,23	6,41	10,70
2008	11,25	10,05	12,82
2009	17,86	17,65	18,13
2010	19,86	19,57	20,22
2011	21,39	21,05	21,81
2012	24,79	24,58	25.04
2013	26,10	25,60	26,67
2014	24,69	23,87	25,65

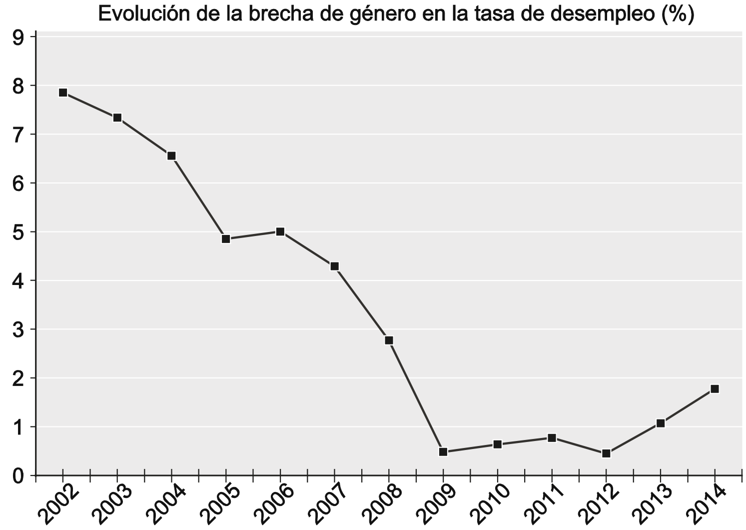
a) ¿Quién tiene razón Mariela o su hermano? Estudia cómo ha evolucionado la brecha de género (diferencia en puntos porcentuales entre la tasa de empleo de los hombres y de las mujeres) a lo largo de los últimos años. ¿Ha aumentado? ¿Ha disminuido?

b) ¿Crees que ha influido la crisis económica en la brecha de género en el empleo?

a) Ampliamos la tabla incluyendo la columna "Brecha de género" que muestra la diferencia entre las tasas de desempleo de mujeres menos la de hombres. En efecto, se observa cómo dicha brecha se redujo de forma significativa hasta 2009 y, desde entonces se ha mantenido hasta un repunte en los últimos años.

Año	Total	Hombres	Mujeres	Brecha de género (M–H)
2002	11,45	8,30	16,15	7,85
2003	11,49	8,50	15,84	7,34
2004	10,97	8,26	14,82	6,56
2005	9,15	7,14	11,99	4,85
2006	8,45	6,35	11,35	5
2007	8,23	6,41	10,70	4,29
2008	11,25	10,05	12,82	2,77
2009	17,86	17,65	18,13	0,48
2010	19,86	19,57	20,22	0,65
2011	21,39	21,05	21,81	0,76
2012	24,79	24,58	25.04	0,46
2013	26,10	25,60	26,67	1,07
2014	24,69	23,87	25,65	1,78

b) Los datos de la tabla parecen confirmar que la crisis ha vuelto a hacer crecer la brecha de género, desde 2012. Esto también se puede observar en el gráfico de la derecha.



El incendio en el pueblo de Anxo

Los campos alrededor del pueblo de Anxo en Galicia se han visto devastados por un feroz incendio. Tan grave fue, que él y sus padres tuvieron que ser evacuados durante los dos días que duraron las labores de extinción.

Anxo está enojado con el mundo porque piensa que han tenido muy mala suerte ya que les ha tenido que tocar precisamente a ellos. Y encima los rumores en el pueblo apuntan a viejas rencillas entre familias, otros dicen que no, que ha sido un accidente, y otros, los menos, que cosas de meigas… bueno, esto último se lo ha oído Anxo solo a uno y Anxo piensa que no está muy bien de la cabeza.

Por desgracia, la realidad es que Anxo y su familia no son los únicos. En las últimas décadas, los incendios forestales se han convertido en uno de los problemas medioambientales más importantes a escala mundial y constituyen un grave problema en España que, debido a los efectos del cambio climático, puede verse considerablemente agravado.

Con el revuelo que se ha montado con el incendio y la cantidad de informaciones que han salido en la prensa acerca de él y de los incendios en general, Anxo se ha enterado de que desde que en España se inicia la recogida de datos en 1961 el número de incendios se ha ido incrementando de manera alarmante. Y lo peor, más del 80 % son provocados por la mano del hombre.

a) Estudia cuál ha sido la distribución de los incendios forestales por comunidades autónomas y represéntala en un diagrama de barras. También puedes representar la distribución de los grandes incendios por año desde el año 1995, por ejemplo, hasta el último año disponible, calcular su número medio y variabilidad.

b) La superficie forestal, en hectáreas, afectada por incendio es otro dato que proporcionan las tablas. ¿Cuál ha sido la evolución a lo largo del tiempo?¿Por término medio cuántas hectáreas se han visto afectadas al año?¿Y en total?¿Ha habido mucha variación en los últimos diez años?

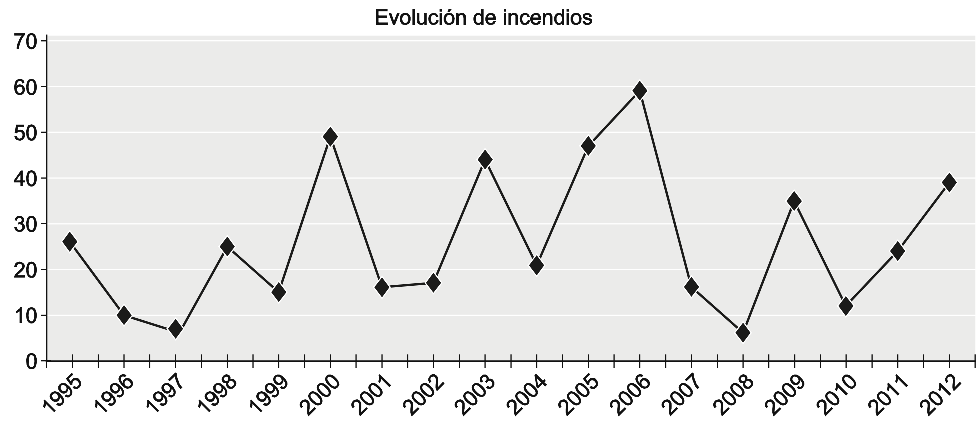
c) ¿Afectan por igual los incendios a los distintos tipos de arbolado?

Los datos se pueden encontrar en el Instituto Nacional de Estadística, en el Ministerio de Agricultura, Alimentación y Medio Ambiente a la que se puede acceder desde smSaviadigital.com

a) En primer lugar se representa la distribución del número de grandes incendios (aquellos en los que la superficie afectada es de más de 500 hectáreas) desde 1995 hasta 2012, teniendo en cuenta que los datos de 2011 y 2012 son provisionales en el momento de la elaboración de esta respuesta. La tabla es:

	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Grandes incendios (1)	26	10	7	25	15	49	16	17	44
	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011 (2)	2012 (2)
	21	47	59	16	6	35	12	24	39

Y el gráfico que informa de la evolución del número de grandes incendios forestales en España es:



De la tabla se puede obtener el número medio de incendios de los 18 años disponible (recuerda que los dos últimos son provisionales) y su variabilidad:

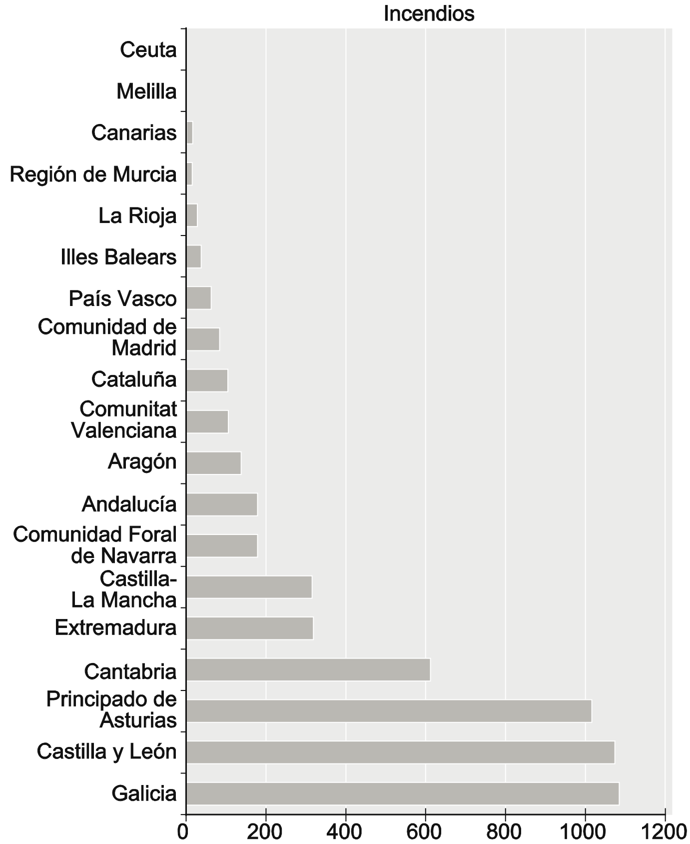
$$\bar{x} = \frac{26+10+\ldots+24+29}{18} = 26, \quad s_x^2 = \frac{26^2+10^2+\ldots+24^2+29^2}{18} - 26^2 = 237{,}667 \Rightarrow s_x = 15{,}416$$

De forma que la variación relativa del número de grandes incendios en estos 18 años es:

$$CV(X)=\frac{15,416}{26}=0,59294$$

En segundo lugar se representa en un diagrama de barras la distribución del número de incendios (aquellos en los que la superficie afectada es de más de 1 hectárea) por comunidades autónomas. Se ha elegido el año 2012, el último del que se dispone de datos definitivos en el momento de elaborar esta respuesta.

	2012	
	Total siniestros	Incendios(1)
TOTAL	15 895	5375
Andalucía	888	179
Aragón	527	138
Asturias, Principado de	2220	1017
Balears, Illes	149	38
Canarias	119	16
Cantabria	728	612
Castilla y León	2611	1074
Castilla–La Mancha	1134	316
Cataluña	730	105
Comunitat Valenciana	502	106
Extremadura	1091	319
Galicia	3798	1085
Madrid, Comunidad de	391	84
Murcia, Región de	128	16
Navarra, Comunidad Foral de	598	179
País Vasco	176	63
Rioja, La	105	28
Ceuta	0	0
Melilla	0	0



b) Respecto a la superficie forestal afectada por los incendios, se tienen datos desde 1995 (INE) y se pueden realizar diferentes tipos de estudios. En la tabla siguiente se recoge la información disponible de la superficie total quemada en España y también desglosada según el tipo de masa forestal afectada (Vegetación leñosa, arbolado, matorral y monte abierto o herbáceos)

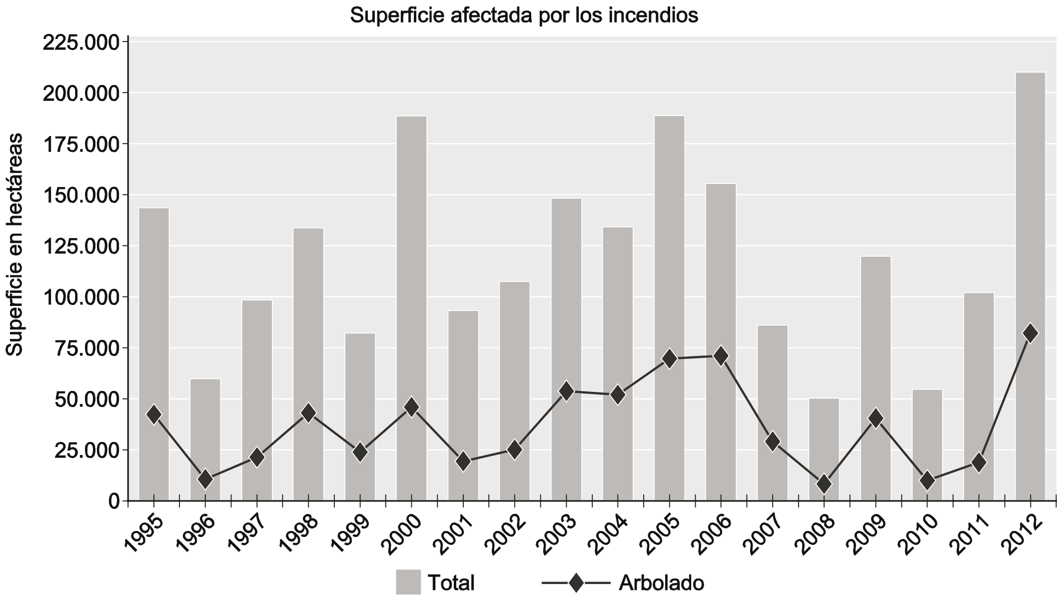
	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
Superficie forestal total	143468	59813,7	98503,2	133643	82217,4	188586	93297,5	107464	148173
Vegetación leñosa	136921	53039,3	94207	126082	76996,5	170532	75710,8	89007,8	124141
Arbolado	42380,3	10530,9	21326,2	42959,3	24034,3	46138,2	19363,4	25196,9	53673
Matorral y monte abierto (3)	94540,7	42508,4	72880,8	83123,1	52962,2	124394	56347,4	63810,9	70467,8
Herbáceos (pastos y dehesas)	6546,8	6774,3	4296,1	7560,3	5221	18053,4	17586,8	18456,2	24031,6
Porcentaje superficie afectada	0,55	0,229	0,378	0,512	0,315	0,723	0,358	0,412	0,568
	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011 (2)	2012 (2)
Superficie forestal total	134193	188698	155363	86112,5	50321,3	119892	54769,9	102161	209855
Vegetación leñosa	108338	175674	143136	71794,1	41289,7	107696	49464,2	91235,3	198937
Arbolado	51732,2	69396,8	71082,9	29402,6	8443,1	40393,3	10184,9	18847,5	82201,4
Matorral y monte abierto (3)	56606,1	106277	72053,3	42391,6	32846,6	67302,7	39279,3	72387,8	116735
Herbáceos (pastos y dehesas)	25854,3	13073,6	12226,7	14318,4	9031,6	12195,7	5305,7	10926	10918,6
Porcentaje superficie afectada	0,515	0,724	0,572	0,333	0,195	0,428	0,198	0,369	0,759

En la tabla debe observarse que:

Superficie forestal total = vegetación leñosa + herbáceos

Vegetación leñosa = arbolado + matorral y monte abierto

A continuación se representa conjuntamente en un diagrama la superficie total y la que corresponde a arbolado (parte de vegetación leñosa):



Puede verse que de unos años a otros, tanto al superficie total afectada como la de arbolado han sufrido notable variaciones desde las 50 321 hectáreas totales del año 2008 a las más de cuatro veces más del año 2012: 209 855 ha (provisional). También la superficie de arbolado ha variado notablemente, en línea con la total afectada.

En la tabla siguiente se presentan los valores medios de superficie quemada desde 1995 hasta 2012 y en los últimos diez años junto con su desviación típica y su coeficiente de variación:

	Media total 1995–2012	Media 10 últimos años 2002–2012	Desviación típica total	Desviación típica últimos 10 años	*CV* total	*CV* últimos 10 años
Superficie forestal total	119807,2	124953,7	45605,82	50368,88	0,3807	0,4031
Vegetación leñosa	107455,7	111170,5	43752,42	48695,60	0,4072	0,4380
Arbolado	37071,5	43535,8	21596,44	25011,04	0,5826	0,5745
Matorral y monte abierto	70384,2	67634,8	25596,20	25937,31	0,3637	0,3835
Herbáceos (pastos y dehesas)	12354,3	13788,2	6185,14	6060,44	0,5006	0,4395

Puede comprobarse que las cifras de las últimos 10 años son en todos los casos más altas que en el total excepto el caso de matorral y monte abierto. También puede verse que la variabilidad más alta corresponde a la superficie arbolada quemada y la más baja a la superficie total.

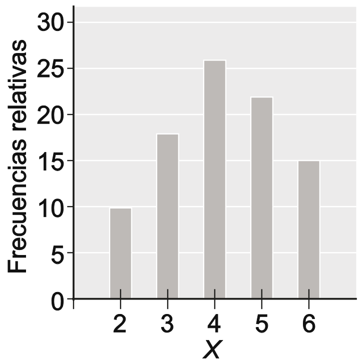
c) Los incendios no afectan por igual a los distintos tipos de superficie. Es claro que la superficie de matorral y monte abierto es la más afectada por los incendios, debido también a que dentro de la superficie forestal es la que ocupa la mayor parte.

NOTA: Los gráficos y resultados presentados son solo una pequeña parte de las posibilidades de análisis que pueden hacerse con los datos disponibles. Quedas invitado a analizar lo que ha pasado en tu comunidad autónoma e incluso en tu provincia y compararlo con lo que ha sucedido en el total del país o con otras comunidades autónomas.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. Dado el siguiente diagrama de barras,



a) Clasifica la variable.

b) Escribe la tabla de frecuencias absolutas, relativas y relativas acumuladas.

c) Calcula la media, la moda y la mediana

d) Calcula la varianza y la desviación típica.

a) La variable es cuantitativa discreta y toma los valores 2, 3, 4, 5 y 6.

b) La tabla que se deduce del diagrama es la siguiente, con las frecuencias absolutas (f_i), las relativas (h_i) y las relativas acumuladas (H_i).

X	f_i	h_i	H_i
2	10	0,11	0,11
3	17	0,19	0,30
4	26	0,29	0,59
5	22	0,24	0,83
6	15	0,17	1
	90	1	

c) Para calcular los valores de este apartado y del siguiente, se construye la tabla con los valores de la variable, las frecuencias absolutas, las absolutas a acumuladas y los productos necesarios:

X	f_i	F_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
2	10	10	20	40
3	17	27	51	153
4	26	53	104	416
5	22	75	110	550
6	15	90	90	540
	90		375	1699

De manera que la media aritmética es $\overline{X} = \dfrac{375}{90} = 4{,}167$.

La moda es $M_o = 4$, ya que es el valor de la variable que más veces aparece en la muestra.

La mediana es $M = 4$, ya que una vez ordenados los 90 datos de menor a mayor, los lugares 45 y 46 están ocupados por el valor 4.

d) La varianza y la desviación típica se obtienen a partir de los resultados de la tabla del apartado anterior:

$$s^2 = \frac{1699}{90} - 4{,}167^2 = 1{,}514 \Rightarrow s = 1{,}23$$

2. El número de hijos de 7 familias es 1, 1, 2, 2, 2, 6, 7. Calcula la media, la moda y la mediana ¿Cuál de las tres es más representativa?

La media, la moda y la mediana son respectivamente $\overline{X} = \dfrac{1+1+2+2+2+6+7}{7} = 3$; $M_o = 2$ y $M = 2$.

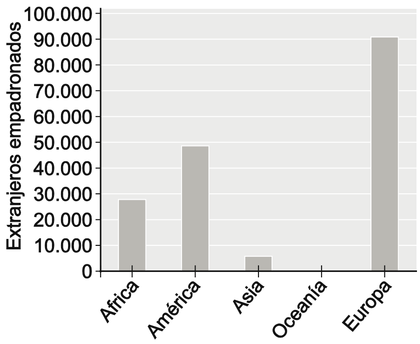
Parece claro que, en este caso, la más representativa de las tres es la mediana (o la moda), puesto que ninguna de las familias tiene 3 hijos. La media es muy sensible a datos extremos.

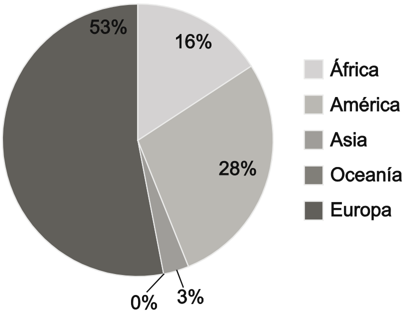
3. El número de extranjeros empadronados en una ciudad, según el continente de procedencia viene dado en la tabla. Describe el tipo de variable y representa adecuadamente los datos

Continente	f_i
África	26 990
América	49 101
Asia	5635
Oceanía	73
Europa	91 000

Se trata de una variable cualitativa.

El tipo de gráfico más apropiado es, bien un diagrama de barras o bien uno de sectores:





4. Una variable estadística *X* tiene la siguiente distribución de frecuencias:

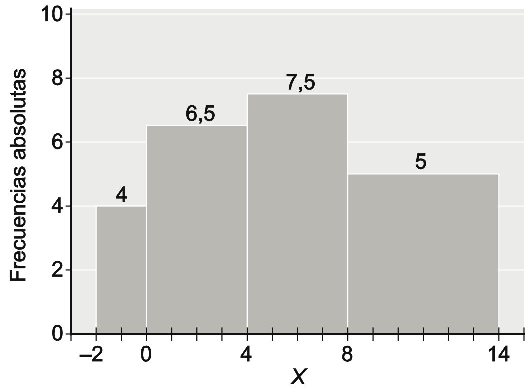
Clase	[–2, 0)	[0, 4)	[4, 8)	[8, 14]
f_i	8	26	30	30

a) Dibuja el histograma

b) Calcula la media, la moda y la mediana

c) Calcula la varianza.

a) Debe tenerse en cuenta que las clases tienen distinta longitud. Tomamos como unidad de base 2; así, la primera clase "mide" 1, la segunda clase "mide" 2, la tercera "mide" 2 y la cuarta "mide" 3.



b) Para calcular las medidas de este apartado y del siguiente se construye la tabla:

Clase	f_i	F_i	x_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
[–2, 0)	8	8	–1	–8	8
[0, 4)	26	34	2	52	104
[4, 8)	30	64	6	180	1080
[8, 14)	30	94	11	330	3630
	94			554	4822

De esta manera, la media aritmética es $\overline{X}=\frac{554}{94}=5{,}8936$.

El intervalo modal es [4,8) como se puede ver en el histograma, ya que es el que tiene mayor densidad de observaciones, puesto que su longitud es 4, mientras que la del intervalo [8, 14) es 6.

El 50 % de 94 es 47, por lo que, observando la columna de las frecuencias acumuladas, la mediana se encuentra en el intervalo [4,8), que tiene longitud 4 y contiene 30 observaciones. Antes de este intervalo se han acumulado 34 observaciones. Luego $M=4+\frac{(47-34)\cdot 4}{30}=5{,}733$.

c) La varianza se obtiene a partir de los resultados de la última columna de la tabla del apartado anterior

$$s^2=\frac{4822}{94}-5{,}8936^2=16{,}563$$

5. Los dos conjuntos siguientes de datos se refieren a la estatura de un grupo de 20 estudiantes, en cm, y a las puntuaciones obtenidas por un grupo de 25 personas en un test psicotécnico.

Estatura (*X*):	**174**	**178**	**165**	**167**	**182**
	172	**185**	**178**	**205**	**180**
	157	**166**	**172**	**190**	**161**
	170	**178**	**183**	**169**	**176**

Puntuación test (*Y*)	**56**	**86**	**70**	**67**	**68**
	76	**68**	**45**	**58**	**74**
	68	**87**	**51**	**27**	**67**
	51	**30**	**58**	**97**	**70**
	47	**76**	**57**	**71**	**56**

a) Determina cuál de los dos conjuntos de datos presenta mayor variabilidad relativa.

b) Calcula los cuartiles de ambos conjuntos de datos.

c) Dibuja el diagrama de caja de cada distribución de datos y señala si existen valores extremos.

a) Para poder comparar la variabilidad hay que conocer los coeficientes de variación.
En el caso de las estaturas, se pueden agrupar los datos en intervalos de amplitud 10.

Estatura	fi	F_i	x_i	f_ix_i	$f_ix_i^2$
[155, 165)	2	2	160	320	51 200
[165, 175)	8	10	170	1360	231 200
[175, 185)	7	17	180	1260	226 800
[185, 195)	2	19	190	380	72 200
[195, 205]	1	20	200	200	40 000
	20			3520	621 400

De donde la media es: $\bar{X} = \dfrac{3520}{20} = 176$.

La varianza y la desviación típica son: $s^2 = \dfrac{621\,400}{20} - 176^2 = 94 \Rightarrow s = \sqrt{94} = 9{,}695$.

El coeficiente de variación es $CV_X = \dfrac{9{,}685}{176} = 0{,}055$.

En el caso de las puntuaciones, los datos se pueden agrupar en intervalos de amplitud 15.

Puntos	f_i	F_i	y_i	f_iy_i	$f_iy_i^2$
[25, 40)	2	2	32,5	65	2112,5
[40, 55)	4	6	47,5	190	9025
[55, 70)	10	16	62,5	625	39 062,5
[70, 85)	6	22	77,5	465	36 037,5
[85, 100]	3	25	92,5	277,5	25 668,75
	25			1622,5	111 906,25

De donde la media es: $\bar{Y} = \dfrac{1622{,}5}{25} = 64{,}9$.

La varianza y la desviación típica son: $s^2 = \dfrac{111906{,}25}{25} - 176^2 = 264{,}24 \Rightarrow s = \sqrt{264{,}24} = 16{,}26$.

El coeficiente de variación es $CV_Y = \dfrac{16{,}26}{64{,}9} = 0{,}25$.

Por tanto las puntuaciones del test presentan mayor variabilidad.

b) Para calcular los cuartiles y los datos necesarios en el siguiente apartado se opera como sigue:

Estaturas

Cuartil Q_1. El 25 % de 20 es 5 que se acumula en el intervalo [165, 175), de longitud 10 y que contiene 8 observaciones. Antes de éste intervalo se tienen acumuladas 2 observaciones, luego:

$$Q_1(X) = 165 + \frac{(5-2)\cdot 10}{8} = 168{,}75cm$$

Cuartil Q_2, la mediana. El 50 % de 20 es 10, que se acumula en el intervalo [165, 175), de longitud 15 y que contiene 10 observaciones. Antes de éste intervalo se tienen acumuladas 2 observaciones, luego:

$$M_X = Q_2(X) = 165 + \frac{(10-2)\cdot 10}{8} = 175\ cm$$

Cuartil Q_3. El 75 % de 20 es 15, que se acumula en el intervalo [175, 185), de longitud 10 y que contiene 7 observaciones. Antes de éste intervalo se tienen acumuladas 10 observaciones, luego:

$$Q_3(X) = 175 + \frac{(15-10)\cdot 10}{7} = 182{,}14cm$$

El rango intercuartílico es $RIC_x = Q_3(X) - Q_1(X) = 182{,}14 - 168{,}75 = 13{,}39$

De donde los límites inferior y superior son:

$LI_X = Q_1(X) - 1{,}5 \cdot RIC_x = 168{,}75 - 1{,}5 \cdot 13{,}39 = 148{,}66$

$LS_X = Q_3(X) + 1{,}5 \cdot RIC_x = 182{,}14 + 1{,}5 \cdot 13{,}39 = 202{,}23$

Tenemos así un valor atípico que es 205 y quedan como máximo y mínimo respectivamente 190 y 157.

Puntos

Cuartil Q_1. El 25 % de 25 es 6,25 que se acumula en el intervalo [55, 70), de longitud 15 y que contiene 10 observaciones. Antes de éste intervalo se tienen acumuladas 6 observaciones, luego:

$$Q_1(Y) = 55 + \frac{(6{,}25-6)15}{10} = 55{,}375$$

Cuartil Q_2, la mediana. El 50 % de 25 es 12,5, que se acumula en el intervalo [55, 70), de longitud 15 y que contiene 10 observaciones. Antes de éste intervalo se tienen acumuladas 6 observaciones, luego:

$$M_Y = Q_2(Y) = 55 + \frac{(12{,}5-6)\cdot 15}{10} = 64{,}75$$

Cuartil Q_3. El 75 % de 25 es 18,75, que se acumula en el intervalo [70, 85), de longitud 15 y que contiene 6 observaciones. Antes de éste intervalo se tienen acumuladas 16 observaciones, luego:

$$Q_3(Y) = 70 + \frac{(18{,}75-16)\cdot 15}{6} = 76{,}875$$

El rango inter cuartílico es $RIC_Y = Q_3(Y) - Q_1(Y) = 76{,}785 - 55{,}375 = 21{,}5$

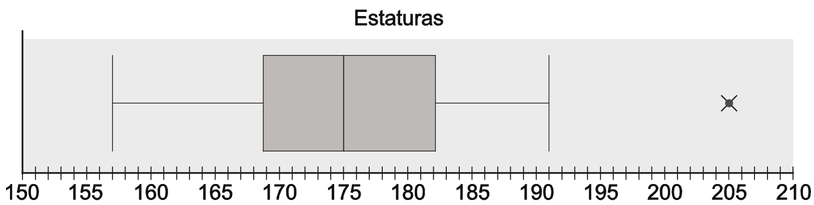
De donde los límites inferior y superior son:

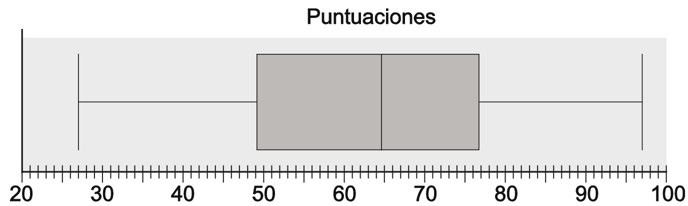
$LI_Y = Q_1(Y) - 1{,}5 \cdot RIC_Y = 55{,}375 - 1{,}5 \cdot 21{,}54 = 23{,}125$

$LS_Y = Q_3(Y) + 1{,}5 \cdot RIC_Y = 76{,}875 + 1{,}5 \cdot 21{,}5 = 109{,}125$

Por tanto no hay valores atípicos.

c) Con estos datos los diagramas de caja son:





Relaciona y contesta

Elije la única respuesta correcta en cada caso

1. En una población de 5200 habitantes mayores de 18 años, 780 son inmigrantes. Una muestra de 200 personas en la que esté representada la población inmigrante, debe constar de:

A. 20 inmigrantes. **B.** 150 nativos **C.** 30 inmigrantes **D.** 100 nativos

Como la proporción de inmigrantes en la muestra debe ser igual que en toda la población, ha de ser:

$\frac{5200}{780} = \frac{200}{x} \Rightarrow x = 30$ inmigrantes debe haber en la muestra. Respuesta C

2. Los datos recogidos de una variable estadística cuantitativa indican que $Q_1 = 14$, $RIC = 9$ y que la distancia entre la mediana y el Q_1 es el doble que entre la mediana y Q_3. Entonces, los valores de la mediana y del Q_3 son:

A. $M = 17, Q_3 = 20$ **B.** $M = 20, Q_3 = 23$ **C.** $M = 23, Q_3 = 20$ **D.** $M = 19, Q_3 = 23$

Por definición es $Q_3 = Q_1 + RIC = 14 + 9 = 23$. Por otra parte el enunciado afirma que $M - Q_1 = 2(Q_3 - M)$, de donde se deduce que $M = 20$. Respuesta B

3. Las observaciones de una variable estadística continua tienen media 5 y varianza 5. Si todas las observaciones se dividen por 2, la nueva media y varianza son:

A. $\bar{Y} = 2{,}5,\ s_Y^2 = 1{,}25$ **B.** $\bar{Y} = 1{,}25,\ s_Y^2 = 2{,}5$ **C.** $\bar{Y} = 1{,}25,\ s_Y^2 = 1{,}25$ **D.** $\bar{Y} = 2{,}5,\ s_Y^2 = 2{,}5$

La media se dividen por 2 y la varianza por $2^2 = 4$ (cuestión 44). Respuesta A

4. El coeficiente de variación de la variable *X* es el triple que el de la variable *Y*. Si la media de *Y* es seis veces mayor que la de *X*,

A. $s_Y^2 = 6s_X^2$ **B.** $s_Y^2 = 2s_X^2$ **C.** $s_Y^2 = 2s_X^2$ **D.** $s_Y^2 = 4s_X^2$

$CV_X = 3CV_Y \Rightarrow \frac{s_X}{\bar{X}} = 3\frac{s_Y}{\bar{Y}} \Rightarrow \frac{s_X}{\bar{X}} = \frac{3s_Y}{6\bar{X}} \Rightarrow s_Y = 2s_X \Rightarrow s_Y^2 = 4s_X^2$ Respuesta D

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

5. En una distribución, $Q_3 = 2Q_1$, entonces:

A. El rango intercuartílico coincide con el primer cuartil.

B. La mediana es la media aritmética de los cuartiles primero y tercero.

C. El límite inferior necesario para calcular el diagrama de caja es negativo.

D. La distancia entre los límites superior e inferior (del diagrama de caja) es cuatro veces el primer cuartil.

A. Cierta. $RIC = Q_3 - Q_1 = 2Q_1 - Q_1 = Q_1$

B. Falso. Por ejemplo en la serie 1, 1, 1, 2, 2, 2, 9, 9, 9, 9 es $Q_1 = 1$; $Q_3 = 9$; $M = 2 \neq \frac{Q_1 + Q_3}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$.

C. Cierto. $LI = Q_1 - 1{,}5RIC = Q_1 - 1{,}5Q_1 = -0{,}5Q_1$.

D. Cierto. $LS - LI = Q_3 + 1{,}5RIC - (Q_1 - 1{,}5RIC) = 2Q_1 - Q_1 + 3\,Q_1 = 4Q_1$ .Respuesta A, C y D

6. **Para medir la dispersión de los datos en torno a la media, se utiliza**

A. Los percentiles de la distribución.

B. La varianza o la desviación típica.

C. La desviación absoluta media.

D. El rango o recorrido de la variable.

La dispersión de los datos se evalúa con las llamadas "medidas de dispersión". De las magnitudes dadas en las soluciones solo los percentiles (A) no pertenecen a a esa categoría. Por tanto las respuestas correctas son B, C y D.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

7. **1. La media de un conjunto de datos es 2 y su varianza 35.**

2. El conjunto de datos es heterogéneo.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. No hay relación entre 1 y 2.

Si por heterogéneo se entiende disperso, entonces la afirmación 1 implica que este conjunto de dato es bastante disperso ya que su coeficiente de variación tiene un valor elevado:

$$CV = \frac{s_X}{\overline{X}} = \frac{\sqrt{35}}{2} = 2{,}96$$

Por tanto $1 \Rightarrow 2$. La relación inversa, $2 \Rightarrow 1$, no es cierta porque saber que un conjunto de datos es más o menos disperso no dice nada respecto a qué valores concretos puedan tener su media y su desviación típica.

En resumen, la respuesta es la A.

11 Distribuciones bidimensionales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En una muestra de 8 ciudades, con aproximadamente la misma población, se ha calculado la temperatura media anual en grados centígrados (*X*) y el gasto medio anual en calefacción por habitante en euros (*Y*). Los resultados se recogen en la tabla siguiente:

Gasto medio (€)	75	140	20	170	52	90	100	125
Temperatura media (ºC)	22	12	24	10	20	18	20	16

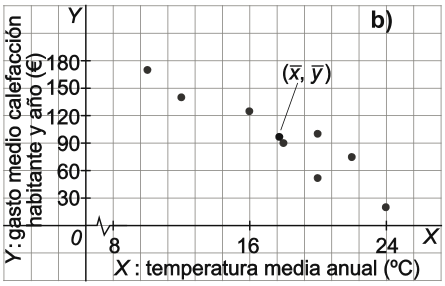
a) Representa gráficamente el conjunto de datos.

b) ¿Observas alguna tendencia en la nube de puntos? ¿De qué tipo?

c) Calcula las medias de la temperatura y del gasto por habitante en las 8 ciudades y sitúalas en el gráfico anterior.

d) ¿Cuál de las dos variables presenta mayor variabilidad? Razona la respuesta.

a)



b) Se observa que si aumenta la temperatura, disminuye el gasto en calefacción. La tendencia es, por tanto, decreciente en Y.

c) Para los cálculos de este apartado y del siguiente se añaden a la tabla las columnas necesarias

	Y	*X*	Y^2	X^2	*Y·X*
	75	22	5625	484	1650
	140	12	19600	144	1680
	20	24	400	576	480
	170	10	28900	100	1700
	52	20	2704	400	1040
	90	18	8100	324	1620
	100	20	10000	400	2000
	125	16	15625	256	2000
SUMA	772	142	90954	2684	12170

$$\bar{Y} = \frac{772}{8} = 96,6 \text{ €};\ \bar{X} = \frac{142}{8} = 17,75 \text{ €}$$

d) Se deben calcular los coeficientes de variación de ambas variables.

$$s_X^2 = \frac{2684}{8} - 17,75^2 = 20,438 \Rightarrow s_x = 4,521 \text{ ºC} \Rightarrow CV(X) = \frac{4,521}{17,75} = 0,2547$$

$$s_Y^2 = \frac{90\,954}{8} - 96,5^2 = 2057 \Rightarrow s_Y = 45,354 \text{ €} \Rightarrow CV(Y) = \frac{45,354}{96,5} = 0,47$$

El gasto medio en calefacción por habitante y año tiene mayor variabilidad que la temperatura media anual.

2. **La siguiente tabla de contingencia da la distribución conjunta del sexo (*X*) y el hábito de correr (*Y*) de una muestra de 250 personas.**

Y / *X*	Corredor	No corredor	Totales *X*
Hombre	**	54	107
Mujer	62	**	**
Totales *Y*	**	**	250

a) Copia y completa la tabla.

b) Indica el porcentaje de no corredores.

c) ¿Cuál es el porcentaje de mujeres corredoras?

d) Dentro de los no corredores, ¿cuál es el porcentaje de mujeres?

e) Dentro de los hombres, ¿cuál es el porcentaje de corredores?

f) ¿Cuál sería el modo más adecuado para representar gráficamente estos datos?

a)

Y / *X*	Corredor	No corredor	Totales *X*
Hombre	53	54	107
Mujer	62	81	143
Totales *Y*	115	135	250

b) $p_{NC} = \frac{135}{250} \cdot 100 = 54\%$

c) $p_{MC} = \frac{62}{250} \cdot 100 = 24,8\%$

d) $p(M \mid NC) = \frac{81}{135} \cdot 100 = 60\%$

e) $p(C \mid H) = \frac{53}{107} \cdot 100 = 49,53\%$

f) Lo más apropiado sería un diagrama de barras acumulados o un diagrama de sectores más adecuados para variables cualitativas.

3. **La tabla adjunta recoge las calificaciones obtenidas por 10 alumnos en la parte escrita (*X*) y en la parte oral (*Y*) de un examen de inglés de la Escuela Oficial de Idiomas.**

X	1,6	7,8	7,1	2,3	5,8	4,2	7,6	9,8	6,4	7,6
Y	2,0	4,0	5,0	5,5	6,0	6,5	7,1	7,6	8,4	9,3

a) Calcula las medias y las varianzas marginales.

b) Representa la nube de puntos.

c) A partir de la nube de puntos, comenta la relación entre las variables y su tendencia.

a) Se amplía la tabla con las columnas necesarias para los cálculos de las medias y las varianzas marginales:

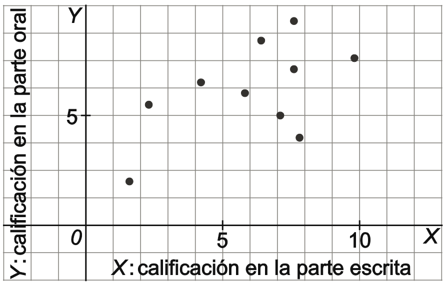
X	Y	X^2	Y^2
1,6	2,0	2,7	4,0
7,8	4,0	61,0	16,0
7,1	5,0	50,8	25,0
2,3	5,5	5,2	30,3
5,8	6,0	33,3	36,0
4,2	6,5	17,3	42,3
7,6	7,1	57,0	50,4
9,8	7,6	95,8	58,2
6,4	8,4	40,8	70,7
7,6	9,3	57,0	85,6
60,1	61,4	421,0	418,4

De esta manera, las medias y las varianzas de la parte escrita (*X*) y la oral (*Y*) son:

$$\overline{X} = \frac{60,1}{10} = 6,01 \qquad s_X^2 = \frac{421}{10} - 6,01^2 = 6,0235$$

$$\overline{Y} = \frac{61,4}{10} = 6,14 \qquad s_Y^2 = \frac{418,4}{10} - 6,14^2 = 4,1544$$

b) La nube de puntos de la variable estadística bidimensional es



c) La relación es directa, a mayor calificación en la parte escrita mayor calificación en la parte oral. Pero la relación no es muy fuerte ya que los puntos no se sitúan próximos a una línea recta.

4. La tabla muestra la puntuación (*Y*) obtenida por 1000 personas en función de su edad (*X*), en un test de nociones básicas de aritmética.

X \ Y	0 – 175	176 – 225	226 – 275	276 – 325	326 – 500
16 – 35	23	62	163	94	28
36 – 55	24	55	159	80	22
55 – 65	33	65	127	53	12

a) Obtén las distribuciones marginales.

b) Halla las medias y las varianzas marginales. Utiliza en los cálculos la marca de clase de cada intervalo.

a) Se amplía la tabla con las filas y columnas de las frecuencias marginales de *X* (f_X) e *Y* (f_Y). También se han añadido las filas y columnas necesarias para los cálculos del apartado b).

X \ Y	0 – 175	176 – 225	226 – 275	276 – 325	326 – 500	f_{xj}	x_j	$f_{Xj}x_j$	$f_{Xj}x_j^2$
16 – 35	23	62	163	94	28	370	25,5	9435	240 592,5
36 – 55	24	55	159	80	22	340	45	15 300	688 500
56 – 75	33	65	127	53	12	290	65	18 850	1 225 250
f_{Yj}	80	182	449	227	62	1000		43 585	2 154 342,5
y_j	87,5	200	250	300	412,5				
$f_{yj}y_j$	7000	36 400	112 250	68 100	25 575	249 325			
$f_{yj}y_j^2$	612 500	7 280 000	28 062 500	20 430 000	10 549 687,5	66 934 687,5			

b) Las medias y varianzas marginales se obtienen a partir de los datos de la tabla de la siguiente manera:

$$\overline{X} = \frac{43585}{1000} = 43,585 \text{ años} \quad ; \quad s_x^2 = \frac{2154342,5}{1000} - 43,585^2 = 254,690$$

$$\overline{Y} = \frac{249325}{1000} = 249,325 \text{ años} \; ; \quad s_Y^2 = \frac{66934687,5}{1000} - 254,59^2 = 4771,732$$

5. Ejercicio resuelto.

6. La distribución de 1163 fumadores según sexo (*X*) y grupo de edad de 15 a 54 años (*Y*), se recoge en la tabla siguiente.

X \ Y	[15, 24]	[25, 34]	[35, 44]	[45, 54]
Hombres	112	178	164	172
Mujeres	105	141	141	150

a) Escribe las distribuciones marginales.

b) Halla les distribuciones de frecuencias relativas de *Y* condicionadas por cada valor de *X*.

c) Halla la media y la varianza de *Y* | hombres.

d) ¿Son dependientes estas variables?

a) La tabla con las distribuciones marginales es:

X \ Y	[15, 24]	[25, 34]	[35, 44]	[45, 54]	f_{x_i}
Hombres	112	178	164	172	626
Mujeres	105	141	141	150	537
f_{Y_j}	217	319	305	322	1163

b) Para hallar las marcas de clase se puede usar el mismo criterio que en el ejercicio 4, la media entre el extremos superior de un intervalo y el superior del siguiente, en este ejercicio se calcula la media entre los extremos del intervalo.

X	$h_{i\|1}$	$h_{i\|2}$	$h_{i\|3}$	$h_{i\|4}$	
Hombres	$h_{1\|1}=\frac{112}{626}\simeq 0,1789$	$h_{1\|2}=\frac{178}{626}\simeq 0,2843$	$h_{1\|3}=\frac{164}{626}\simeq 0,2620$	$h_{1\|4}=\frac{172}{626}\simeq 0,2748$	1
Mujeres	$h_{2\|1}=\frac{105}{537}\simeq 0,1955$	$h_{2\|2}=\frac{141}{537}\simeq 0,2626$	$h_{2\|3}=\frac{141}{537}\simeq 0,2626$	$h_{2\|4}=\frac{150}{537}\simeq 0,2793$	1

c) Para el cálculo de la media y varianza de $Y|_{X=\text{hombres}}$, consideramos la tabla:

$Y\|_{X=\text{hombres}}$	[15 , 24]	[25 , 34]	[35 , 44]	[45 , 54]	
f_j	112	178	164	172	626
$f_j \cdot Y\|_{X=h}$	2184	5251	6478	8514	22 427
$f_j \cdot Y\|_{X=h^2}$	42 588	154 904,5	255 881	421 443	874 816,5

$$\overline{Y}|_{X=h}=\frac{22427}{626}=35,826\text{ años}\ ;\ s^2_{Y|X=h}=\frac{874816,5}{626}-35,826^2=113,98$$

d) La tabla de distribuciones conjuntas y marginales es:

h_{ij}	[15, 24]	[25, 34]	[35, 44]	[45, 54]	h_i
Hombres	0,0963	0,1531	0,1410	0,1479	0,5383
Mujeres	0,0903	0,1212	0,1212	0,1290	0,4617
h_j	0,1866	0,2743	0,2622	0,2769	1

Las variables son estadísticamente dependientes. Se puede comprobar que, por ejemplo $h_{14}\neq h_1\cdot h_4$ $(0,1479 \neq 0,5383\cdot 0,2769 = 0,1491)$.

7. Ejercicio resuelto.

8. Un concesionario de coches contrata empleados para los fines de semana. La tabla muestra los coches vendidos (*Y*) y los vendedores (*X*) en una muestra de 8 fines de semana.

X	6	5	4	4	6	3	5	8
Y	18	20	10	14	15	7	13	21

a) Representa la nube de puntos de la distribución.

b) Escribe la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X

c) Calcula la varianza residual.

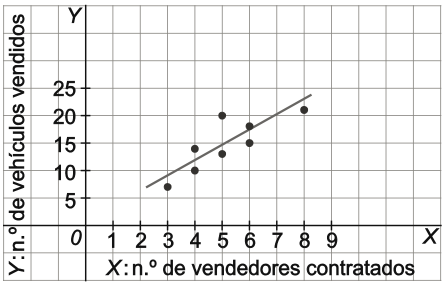
d) Si la empresa decide contratar 8 vendedores, ¿cuántos coches se estima que podría vender?

e) Si contrata 8 vendedores, calcula el residuo correspondiente y valora el resultado obtenido.

a) Se representa la nube de puntos junto con la recta de regresión ajustada de Y sobre X que se obtiene en el apartado b)

b) Para obtener la recta de regresión de Y sobre X, se amplía la tabla dada con las columnas que se necesitan para calcular las medias, las varianzas y la covarianza:

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
6	18	36	324	108
5	20	25	400	100
4	10	16	100	40
4	14	16	196	56
6	15	36	225	90
3	7	9	49	21
5	13	25	169	65
8	21	64	441	168
41	118	227	1904	648



Entonces

$$\overline{X} = \frac{41}{8} = 5{,}125 \text{ vendedores} ; \; s_X^2 = \frac{227}{8} - 5{,}125^2 = 2{,}11 \quad ; \; s_X = 1{,}452 \text{ vendedores}$$

$$\overline{Y} = \frac{118}{8} = 14{,}75 \text{ vehículos} \; ; \; s_Y^2 = \frac{1904}{8} - 14{,}75^2 = 20{,}44 \; ; \; s_Y = 4{,}521 \text{ vehículos}$$

$$s_{XY} = \frac{648}{8} - 5{,}125 \cdot 14{,}75 = 5{,}406$$

De esta forma, la pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión son respectivamente:

$$a = 14{,}75 - 2{,}563 \cdot 5{,}125 = 1{,}615 \quad ; \quad b = \frac{5{,}406}{2{,}11} = 2{,}563$$

La ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es $y = 1{,}615 + 2{,}563x$.

c) La varianza residual o Error Cuadrático Medio es

$$\text{ECM}_{Y|X} = s_Y^2\left(1 - \frac{s_{XY}^2}{s_X^2 s_Y^2}\right) = 20{,}44 \cdot \left(1 - \frac{5{,}406^2}{2{,}11 \cdot 20{,}44}\right) = 6{,}851$$

d) Sustituyendo $x = 8$ en la ecuación de la recta de regresión obtenida en el apartado b), resulta

$$y(8) = 1{,}615 + 2{,}563 \cdot 8 = 22{,}12$$

Se estima que podría vender alrededor de 22 coches.

e) El residuo correspondiente se obtiene mediante la diferencia entre el valor observado para $x = 8$, que es 21, y el valor pronosticado, que es 22,12. Esto es –1,12.
La diferencia entre el valor observado y el estimado (pronosticado) es apenas de 1 vehículo de los más de 20 vendidos. Luego puede considerarse una buena estimación.

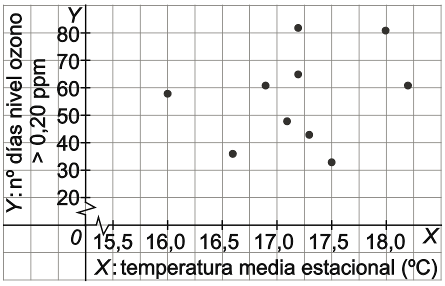
9. La tabla recoge la temperatura media invernal (*X*) en ºC en una ciudad costera y el número de días (*Y*) en que el nivel de ozono superó los 0,20 ppm (partes por millón) durante 10 años.

X	16,0	17,2	18,0	17,2	16,9	17,1	18,2	17,3	17,5	16,6
Y	58	82	81	65	61	48	61	43	33	36

a) Dibuja el diagrama de dispersión.

b) Estima el número de días en los que se superará el nivel de ozono estándar (0,20 ppm) si la temperatura media estacional es de 16º y analiza la precisión de la predicción en función del ECM.

a) El diagrama de dispersión del número de días en que se superó el nivel límite de ozono (*Y*) en función de la temperatura media estacional (*X*) se muestra a la derecha.



b) Para llevar a cabo la estimación pedida, se debe obtener la recta de regresión del número de días (*Y*) sobre la temperatura media estacional (*X*). Para ello, se amplía la tabla de datos con las filas correspondientes para el cálculo de los valores medios, las varianzas y la covarianza:

x_j	16	17,2	18	17,2	16,9	17,1	18,2	17,3	17,5	16,6	172
y_j	58	82	81	65	61	48	61	43	33	36	568
x_j^2	256	295,8	324	295,8	285,6	292,4	331,2	299,3	306,3	275,6	2962,04
y_j^2	3364	6724	6561	4225	3721	2304	3721	1849	1089	1296	34854
y_jx_j	928	1410	1458	1118	1031	820,8	1110	743,9	577,5	597,6	9795,3

$$\overline{X} = \frac{172}{10} = 17{,}2\,^\circ C \quad ; \quad s_X^2 = \frac{2962{,}04}{10} - 17{,}2^2 = 0{,}364$$

$$\overline{Y} = \frac{568}{10} = 56{,}8 \text{ días} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{34854}{10} - 56{,}8^2 = 259{,}16$$

$$s_{XY} = \frac{9795{,}3}{10} - 56{,}8 \cdot 17{,}2 = 2{,}57$$

Los coeficientes de la recta de regresión son $a = 56{,}8 - 7{,}06 \cdot 17{,}2 = -64{,}64 \quad ; \quad b = \frac{2{,}57}{0{,}364} = 7{,}06$.

La recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = -64{,}64 + 7{,}06x$.

Entonces, si $x = 16$ºC, se estima que el número de días en que se superará el límite de ozono es:

$$y = 7{,}06 \cdot 16 - 64{,}4 = 48{,}33 \text{ días}$$

es decir aproximadamente entre 48 y 49 días.
El Error Cuadrático Medio es:

$$\text{ECM}_{Y|X} = s_Y^2\left(1 - \frac{s_{XY}^2}{s_X^2 s_Y^2}\right) = 259{,}16\left(1 - \frac{2{,}57^2}{0{,}364 \cdot 259{,}16}\right) = 259{,}16\left(1 - 0{,}07\right) = 241{,}01$$

El Error Cuadrático Medio es alto e indica que el ajuste de la recta a la nube de puntos no es bueno.

El coeficiente de determinación $\frac{s_{XY}^2}{s_X^2 s_Y^2} = 0{,}07$ y puede decirse que solo el 7 % de la variabilidad observada en el número de días en que se superó el nivel de ozono de 0,20 ppm se explica por la temperatura media estacional.
En definitiva, la relación lineal entre ambas variables es muy débil y, por tanto, las predicciones que se puedan hacer con la recta de regresión estimada en el apartado anterior no son fiables.

10. Ejercicio interactivo.

11. La empresa que distribuye una conocida marca de refrescos ha tomado al azar 10 semanas del pasado año, recogiendo los siguientes datos:

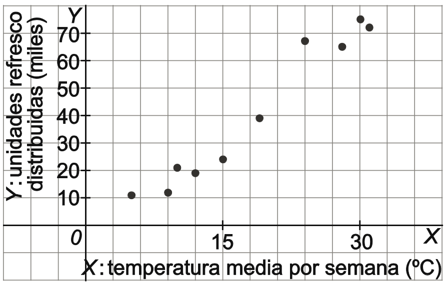
***X*: "temperatura media de cada semana en ºC"**

***Y*:"unidades de refrescos distribuidas en miles"**

X	10	28	12	31	30	19	24	5	9	15
Y	21	65	19	72	75	39	67	11	12	24

Representa la nube de puntos y calcula los coeficientes de determinación y de correlación, interpretando los resultados.

El diagrama de dispersión o nube de puntos de la distribución se muestra a la derecha.



Añadimos las columnas necesarias a la tabla para realizar los cálculos que se piden:

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	y_jx_j
10	21	100	441	210
28	65	784	4225	1820
12	19	144	361	228
31	72	961	5184	2232
30	75	900	5625	2250
19	39	361	1521	741
24	67	576	4489	1608
5	11	25	121	55
9	12	81	144	108
15	24	225	576	360
183	405	4157	22 687	9612

$$\overline{X} = \frac{183}{10} = 18,3\,{}^{\circ}C \quad ; \quad s_x^2 = \frac{4157}{10} - 18,3^2 = 80,81$$

$$\overline{Y} = \frac{405}{10} = 40,5\,\text{unidades} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{22687}{10} - 40,5^2 = 628,45$$

$$s_{XY} = \frac{9612}{10} - 40,5 \cdot 18,3 = 220,05$$

Los coeficientes de determinación y correlación son respectivamente:

$$R^2 = \frac{s_{XY}^2}{s_X^2 s_Y^2} = \frac{220,05^2}{80,81 \cdot 628,45} = 0,9535 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{0,9535} = 0,9765$$

Esto indica que un alto porcentaje, el 95,35 %, de la variabilidad observada en la venta de refrescos es explicada por la variabilidad de la temperatura.

El valor del coeficiente de correlación, $r = 0,9765$, indica que la relación entre la temperatura media semanal y las unidades de refrescos vendidas es lineal y directa y con un elevado nivel de fiabilidad, (alta correlación, próxima a 1).

12. Ejercicio resuelto.

13. Los datos de la siguiente tabla se refieren a una muestra de 10 viviendas en las que se han observado el número de habitaciones (*X*) y el de personas que habitan en la vivienda (*Y*)

X	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5
Y	1	2	2	3	2	4	5	6	4	6

a) Calcula la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

b) Calcula los coeficientes de determinación y de correlación y valora el ajuste de la recta a la nube de puntos.

c) ¿Cuál es el porcentaje de la variabilidad del número de habitantes por vivienda explicado por el número de habitaciones?

d) ¿Cuál es el número estimado de personas que habitan en una vivienda de 3 habitaciones?

a) Con la ayuda de los datos de la tabla siguiente, se calculan las medias, las varianzas y la covarianza de las dos variables

x_i	y_j	x_i^2	y_j^2	x_iy_j
2	1	4	1	2
2	2	4	4	4
3	2	9	4	6
3	3	9	9	9
4	2	16	4	8
4	4	16	16	16
4	5	16	25	20
4	6	16	36	24
5	4	25	16	20
5	6	25	36	30
36	35	140	151	139

$$\overline{X} = \frac{36}{10} = 3,6 \text{ habitaciones/vivienda}; \quad s_X^2 = \frac{140}{10} - 3,6^2 = 1,04$$

$$\overline{Y} = \frac{35}{10} = 3,5 \text{ personas/vivienda}; \quad s_Y^2 = \frac{151}{10} - 3,5^2 = 2,85$$

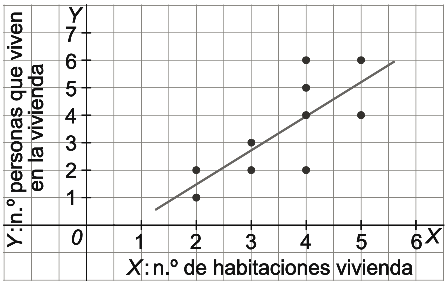
$$s_{XY} = \frac{139}{10} - 3,5 \cdot 3,6 = 1,3$$

La pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión son respectivamente

$$b = \frac{1,3}{1,04} = 1,25 \quad ; \quad a = 3,5 - 1,25 \cdot 3,6 = -1$$

Luego la ecuación de la recta de regresión del número de personas que habitan una vivienda (*Y*) sobre el número de habitaciones (*X*) es: $y = -1 + 1,25x$.

b) La representación gráfica de la recta de regresión estimada sobre las distribución de datos se muestra a la derecha.



A partir de los cálculos efectuados en el apartado anterior, se obtienen los coeficientes de determinación y de correlación:

$$R^2 = \frac{1,3^2}{1,04 \cdot 2,85} = 0,5702 \Rightarrow r = \sqrt{0,5702} = 0,7551$$

El ajuste de la recta de regresión a la nube de puntos es razonablemente aceptable a la vista de la representación gráfica y del valor del coeficiente de correlación lineal.

c) El 57,02 % de la variabilidad observada en el número de personas (*Y*) que habitan en una vivienda es explicado por el número de habitaciones (*X*) que tiene la misma.

d) $y(3) = -1 + 1,25 \cdot 3 = 2,75$ personas.

14. La media de las calificaciones globales (*Y*), obtenidas por 10 alumnos fue 6,8 puntos y sus horas semanales de estudio (*X*) suman 120. Se sabe que el coeficiente de correlación es 0,8 y que las desviaciones típicas de *X* e *Y* coinciden. Con estos datos, ¿puedes estimar la calificación de un alumno que ha estudiado 10 horas semanales?

Sabemos que: $\overline{X} = \frac{120}{10} = 12 \quad ; \quad \overline{Y} = 6,8$.

La pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión: $b = r \cdot \frac{s_Y}{s_X} = 0,8 \cdot 1 = 0,8$; $a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X} = 6,8 - 0,8 \cdot 12 = -2,8$, y la recta de regresión es: $y = -2,8 + 0,8x$.

$y(10) = -2,8 + 0,8 \cdot 10 = 5,2$ puntos. Se trata de un valor fiable, ya que se encuentra dentro del rango de valores empíricos y el coeficiente de correlación es alto (0,8).

15. Los datos de la tabla siguiente se refieren a una muestra de 8 parejas hermano – hermana adultos, en las que se ha observado la estatura del hombre (*Y*) y de la mujer (*X*) en centímetros.

X	164	162	167	168	167	152	160	170
Y	172	171	178	183	166	164	180	169

a) Representa la nube de puntos.

b) Escribe la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

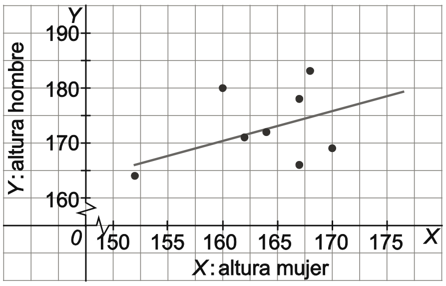
c) Calcula los coeficientes de determinación y de correlación y valora el ajuste de la recta a la nube de puntos

d) ¿Cuál es el porcentaje de variabilidad de la estatura de los hombres explicado por la estatura de los hombres?

e) ¿Cuál es la estatura estimada de un hombre, si su hermana mide 165 cm?

f) ¿Cuál es la estatura estimada de una mujer, si su hermano mide 175 cm?

a) La gráfica de dispersión de la distribución y la recta de regresión calculada en el siguiente apartado se muestra a la derecha.



b) Los cálculos necesarios para obtener la recta de regresión de *Y* (estatura hombres) sobre *X* (estatura mujer) son:

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	y_jx_j
164	172	26 896	29 584	28 208
162	171	26 244	29 241	27 702
167	178	27 889	31 684	29 726
168	183	28 224	33 489	30 744
167	166	27 889	27 556	27 722
152	164	23 104	26 896	24 928
160	180	25 600	32 400	28 800
170	169	28 900	28 561	28 730
1310	1383	214 746	239 411	226 560

$$\overline{X} = \frac{1310}{8} = 163{,}75\,\text{cm} \quad ; \quad s_X^2 = \frac{214746}{8} - 163{,}75^2 = 29{,}1875$$

$$\overline{Y} = \frac{1383}{8} = 172{,}875\text{cm} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{239411}{8} - 172{,}875^2 = 40{,}6094$$

$$s_{XY} = \frac{226560}{8} - 172{,}875 \cdot 163{,}75 = 11{,}7188$$

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{11{,}7188}{29{,}1875} = 0{,}4015 \quad ; \quad a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X} = 172{,}875 - 0{,}4015 \cdot 163{,}75 = 107{,}13$$

Por tanto, la ecuación de la recta de regresión es: $y = 107{,}13 + 0{,}4015x$

c) $$R^2 = \frac{s_{XY}^2}{s_X^2 s_Y^2} = \frac{11{,}7188^2}{29{,}1875 \cdot 40{,}60094} = 0{,}1159 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{0{,}1159} = 0{,}3404$$

El valor $r = 0{,}3404$ indica que la relación lineal entre ambas variables es débil, como se puede observar en el gráfico del apartado a).

d) La simetría de los cálculos indica que solo un 11,59 % de la variabilidad de la estatura de las mujeres es explicada por la variabilidad de la estatura de sus hermanos.

e) $y(165) = 107{,}13 + 0{,}4015 \cdot 165 = 173{,}38$ cm

f) Se sustituye el valor esperado y=175 en la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X* y se despeja el valor de x:

$$175 = 107{,}13 + 0{,}4015 \cdot x \quad \Rightarrow x = 169{,}04\,\text{cm}$$

16. Ejercicio interactivo.

17 a 22. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Variables bidimensionales: nube de puntos y distribuciones marginales.

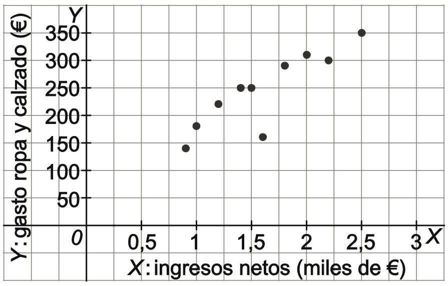
23. En la tabla se dan los ingresos netos en miles de euros (*X*) y el gasto en ropa y calzado (*Y*) en euros de 10 familias en el mes de julio.

X	1,2	2,2	0,9	1,5	1,8	1,4	1,0	2,0	2,5	1,6
Y	220	300	140	250	290	250	180	310	350	160

a) Representa la nube de puntos y comenta cuál es la tendencia observada en la relación entre las dos variables.

b) Calcula las medias y las varianzas marginales.

a) El diagrama de dispersión o nube de puntos de la distribución conjunta de *X* e *Y* se muestra a la derecha..



b)

x_i	y_j	x_i^2	y_j^2
1,2	220	1,44	48 400
2,2	300	4,84	90 000
0,9	140	0,81	19 600
1,5	250	2,25	62 500
1,8	290	3,24	84 100
1,4	250	1,96	62 500
1	180	1	32 400
2	310	4	96 100
2,5	350	6,25	122 500
1,6	160	2,56	25 600
16,1	2450	28,35	643 700

De esta forma, la media y la varianza de cada una de las variables es:

$$\overline{X} = \frac{16,1}{10} = 1,61 \text{ miles de euros} \quad ; \quad s_X^2 = \frac{28,35}{10} - 1,61^2 = 0,2429$$

$$\overline{Y} = \frac{2450}{10} = 245 \text{ euros} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{643700}{10} - 245^2 = 4345$$

24. La tabla muestra el número de hijos (*Y*) que tienen 50 mujeres en función de su edad (*X*).

X \ *Y*	0	1	2	3	*Total Y*
20 – 25	7	2	1	**	10
26 – 30	**	5	3	**	**
31–35	3	**	7	2	**
36–40	1	1	**	2	**
Total X	16	**	14	6	50

a) Copia y completa la tabla.

b) Obtén las distribuciones marginales y sus medias y varianzas.

c) Escribe la distribución del número de hijos si la madre está entre 31 y 35 años. Calcula su media y su varianza.

a) Se completa la tabla con los datos que faltan (en negrita).

X \ *Y*	0	1	2	3	*Total Y*
20 – 25	7	2	1	**0**	10
26 – 30	**5**	5	3	**2**	**15**
31–35	3	**6**	7	2	**18**
36–40	1	1	**3**	2	**7**
Total X	16	**14**	14	6	50

b) Las distribuciones marginales se pueden ver en la última fila (*Y*) y en la última columna (*X*) de la tabla del apartado anterior, no obstante, se pueden escribir:

X	f_X
20 – 25	10
26 – 30	15
31 – 35	18
36 – 40	7

Y	f_Y
0	16
1	14
2	14
3	6

Completando las tablas anteriores con las columnas necesarias y la fila de las sumas tenemos:

Clases	f_j	x_j	$f_j \cdot x_j$	$f_j \cdot x_j^2$
20 – 25	10	23	230	5290
26 – 30	15	28	420	11 760
31 – 35	18	33	594	19 602
36 – 40	7	38	266	10 108
	50		1510	46 760

y_j	f_j	$f_j \cdot yj$	$f_j \cdot y_j^2$
0	16	0	0
1	14	14	14
2	14	28	56
3	6	18	54,0
	50	60	124

Entonces, las medias y las varianzas marginales son:

$$\overline{X} = \frac{1510}{50} = 30,2 \text{ años} \quad ; \; s_x^2 = \frac{46760}{50} - 30,2^2 = 23,16$$

$$\overline{Y} = \frac{60}{50} = 1,2 \text{ hijos} \quad ; \; s_Y^2 = \frac{124}{50} - 1,2^2 = 1,04$$

c) En el caso en que la madre esté entre 31 y 35 años la tabla ampliada es:

Y	0	1	2	3	*Total* $Y\|_{X=[31,\,35]}$
$X = [31,35]$	3	6	7	2	18
$f_j \cdot Y_{j\|X=[31,\,35]}$	0	6	14	6	26
$f_j \cdot Y^2_{j\|X=[31,\,35]}$	0	6	28	18	52

$$\overline{Y}\,\Big|_{X=[31,35]} = \frac{26}{18} = 1,44 \text{ hijos} \quad ; \; s^2_{Y|X=[1,35]} = \frac{52}{18} - 1,44^2 = 0,8025$$

25. El número de unidades producidas al mes en miles (*X*) por una empresa y el número de unidades defectuosas (*Y*) en 6 meses es:

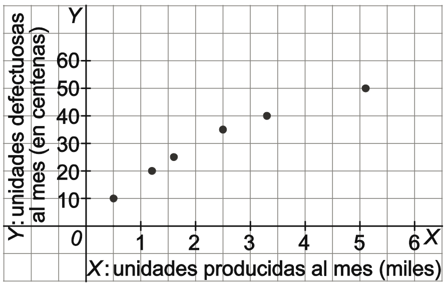
X	0,5	1,2	1,6	2,5	3,3	5,1
Y	10	20	25	35	40	50

a) Representa gráficamente los datos.

b) Calcula los parámetros media y varianza de las distribuciones marginales de *Y* y *X*.

c) ¿Se puede afirmar que la nube de puntos puede ajustarse por una recta? Justifica la respuesta.

a) La nube de puntos de la distribución conjunta se muestra a la derecha.



b)

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2
0,5	10	0,25	100
1,2	20	1,44	400
1,6	25	2,56	625
2,5	35	6,25	1225
3,3	40	10,89	1600
5,1	50	26,01	2500
14,2	180	47,4	6450

$$\overline{X} = \frac{14,2}{6} = 2,367 \text{ miles de uds./mes} \;;\; s_x^2 = \frac{47,4}{6} - 2,367^2 = 2,2989$$

$$\overline{Y} = \frac{180}{6} = 30 \text{ defectuosas/mes} \quad;\quad s_Y^2 = \frac{6450}{6} - 30^2 = 175$$

c) A la vista del diagrama de dispersión, parece claro que el número de unidades defectuosas (*Y*) aumenta con el aumento de la producción (*X*) y que esa relación es aproximadamente lineal. Por ello puede afirmarse que la recta de regresión de *Y* sobre *X* será un buen ajuste lineal a la nube de puntos de la distribución.

Covarianza, regresión lineal y correlación.

26. De las 100 observaciones de la distribución conjunta de la variable bidimensional (*X*,*Y*) se obtiene la siguiente información:

- **Las medias muestrales de *X* e *Y* son 0,9 y 1,2 respectivamente.**
- **Las varianzas muestrales de *X* e *Y* son 10,09 y 13,96 respectivamente.**
- **La covarianza es 8,12.**

Con estos datos:

a) Calcula el coeficiente de correlación lineal y, a la vista del resultado obtenido, razona si es correcto un ajuste lineal entre las dos variables.

b) Calcula el Error Cuadrático Medio del ajuste lineal.

c) Escribe la recta de regresión de *Y* sobre *X* y estima el valor esperado de *Y* cuando la variable *X* tome el valor 1.

a) $R^2 = \dfrac{s_{XY}^2}{s_X^2 s_Y^2} = \dfrac{8,12^2}{10,09 \cdot 13,96} = 0,4333 \Rightarrow r = \sqrt{0,4333} = 0,6583$

Apenas el 43,3 % de la variabilidad de *Y* es explicada por la variabilidad de *X*, lo que arroja un coeficiente de correlación de 0,6583. Puede ajustarse una recta de regresión entre *X* e *Y*, con precauciones si se utiliza la recta para realizar predicciones de una variable en función de los valores de la otra, valorando el error cometido en el valor estimado.

b) $\text{ECM} = s_Y^2(1 - R^2) = 13,96 \cdot (1 - 0,4333) = 7,911$

c) La pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión de *Y* sobre *X* son, respectivamente:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_x^2} = \frac{8,12}{10,9} = 0,745 \quad;\quad a = \overline{Y} - b \cdot \overline{X} = 1,2 - 0,745 \cdot 0,9 = 0,53$$

La recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = 0,53 + 0,745x$
Y si $x = 1$, el valor esperado de *y* es: $y(1) = 0,53 + 0,745 \cdot 1 = 1,275$

27. En una determinada región vinícola se han evaluado las pérdidas en cientos de miles de euros (*Y*) en la producción en función del número de días de lluvia (*X*) de la campaña.

X	87	80	77	75	63	71	76	74
Y	19,5	18,5	14,6	15,5	12,7	14	18,1	15

a) A la vista de la representación gráfica, ¿se puede afirmar que existe una relación lineal?

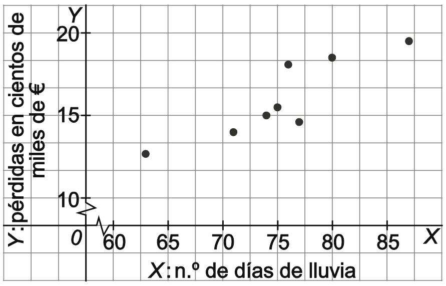
b) Calcula el coeficiente de correlación, ¿Se confirma la impresión anterior?

c) Escribe la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

d) ¿A cuánto ascenderán las pérdidas un año en el que ha habido 83 días de lluvia?

e) Calcula el Error Cuadrático Medio e interpreta el resultado.

a) El diagrama de dispersión se observa a la derecha, (observar la escala de los ejes).
A la vista de la nube de puntos puede afirmarse que existe una relación lineal estadística entre las variables *X* e *Y*.



b)

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
87	19,5	7569	380,25	1696,5
80	18,5	6400	342,25	1480
77	14,6	5929	213,16	1124,2
75	15,5	5625	240,25	1162,5
63	12,7	3969	161,29	800,1
71	14	5041	196	994
76	18,1	5776	327,61	1375,6
74	15	5476	225	1110
603	127,9	45785	2085,81	9742,9

$\overline{X} = \frac{603}{8} = 75{,}375$ días de lluvia ; $s_X^2 = \frac{45785}{8} - 75375^2 = 41{,}7344$

$\overline{Y} = \frac{127{,}9}{8} = 15{,}9875$ cientos de miles de euros ; $s_Y^2 = \frac{2085{,}81}{8} - 15{,}9875^2 = 5{,}1261$

$$s_{XY} = \frac{9742{,}9}{8} - 73{,}375 \cdot 15{,}9875 = 12{,}8047$$

El coeficiente de correlación es: $r = \frac{12{,}8047}{\sqrt{41{,}7344 \cdot 5{,}1261}} = 0{,}8754$, que confirma la impresión del apartado a), respecto a la relación lineal entre las variables *X* e *Y*.

c) La pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión de *Y* sobre *X* son respectivamente:

$$b = \frac{12{,}8047}{41{,}7344} = 0{,}3044 \quad ; \quad a = 15{,}9875 - 0{,}3068 \cdot 75{,}375 = -7{,}1386$$

De manera que la recta de regresión lineal de *Y* sobre *X* es: $y = -7{,}1386 + 0{,}3068x$

d) Se calcula la pérdida esperada sustituyendo $x = 83$ en la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*:

$$y(83) = -7{,}1386 + 0{,}3068 \cdot 83 = 18{,}3258 \text{ cientos de miles de euros}$$

e) El ECM de la recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $\text{ECM} = 5{,}1261 \cdot (1 - 0{,}8754^2) = 1{,}1974$

Que es la media de los cuadrados de los residuos (distancia de cada valor observado a cada valor predicho por la recta de regresión) y que, en este caso es pequeño dado el buen ajuste de la recta de regresión a la distribución conjunta.

28. En un estudio de rendimiento de automóviles, se estudia la relación entre la potencia del motor en CV (*X*) y los kilómetros recorridos por litro de combustible (*Y*). Se recogieron datos de 10 vehículos:

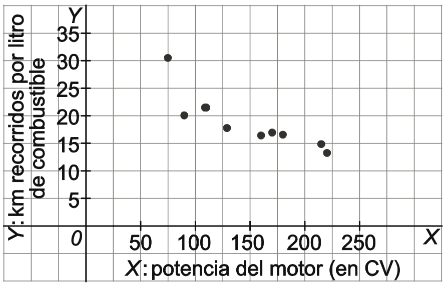
X	170	90	110	75	109	129	215	180	220	160
Y	17,0	20,1	21,5	30,4	21,5	17,8	14,9	16,6	13,3	16,5

a) Representa gráficamente los datos y explica razonadamente si existe relación entre las variables y, caso afirmativo, de qué tipo es.

b) Cuantifica la relación entre la potencia del motor y los km recorridos y explica, justificadamente, el resultado obtenido.

c) Escribe la ecuación de la recta de regresión que explica los km recorridos en función de la potencia del motor. ¿Ajusta bien la recta a la nube de puntos?

a) El diagrama de dispersión de la distribución conjunta de los datos se muestra a la derecha.



Parece que existe una buena relación lineal entre las variables y que es de tendencia decreciente: a más potencia del motor, menos km recorre el vehículo por litro de combustible.

b)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
170	17,0	28 900	289	2890
90	20,1	8100	404,01	1809
110	21,5	12 100	462,25	2365
75	30,4	5625	924,16	2280
109	21,5	11 881	462,25	2343,5
129	17,8	16 641	316,84	2296,2
215	14,9	46 225	222,01	3201,35
180	16,6	32 400	275,56	2986,2
220	13,3	48 400	176,89	2919,4
160	16,5	25 600	272,25	2640
1458,0	189,6	235 872,0	3805,22	25 730,7

$$\overline{X} = \frac{1458}{10} = 145,8\,CV \quad ; \quad s_x^2 = \frac{235\,872}{10} - 145,8^2 = 2329,56$$

$$\overline{Y} = \frac{189,6}{10} = 18,96 \text{ km/L} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{3805,22}{10} - 18,96^2 = 21,04$$

$$s_{XY} = \frac{25\,730,7}{10} - 18,96 \cdot 145,8 = -190,574$$

$$R^2 = \frac{(-190,574)^2}{21,04 \cdot 2329,56} = 0,7410 \Rightarrow r = -\sqrt{0,7393} = -0,8608$$

Es decir, el 73,93 % de la variabilidad observada en los km recorridos por litro de combustible es explicado por la potencia del motor.

c) La pendiente y la ordenada en el origen de la recta de regresión de *Y* (km recorridos) sobre *X* (potencia del motor) son respectivamente

$$b = \frac{-190,754}{2329,54} = -0,082 \qquad a = 18,96 + 0,082 \cdot 145,8 = 30,882$$

La recta de regresión que se pide es: $y = 30,882 - 0,082x$

El coeficiente de correlación obtenido en el apartado anterior, señala un alto nivel de correlación lineal inversa entre ambas variables.

29. La tabla muestra el número de calzado (*Y*) y el peso en kg (*X*) de 8 chicos elegidos al azar en un centro educativo.

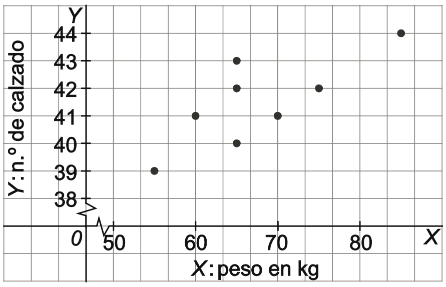
Y	39	40	41	41	42	42	43	44
X	55	65	60	70	65	75	65	85

a) Dibuja la nube de puntos.

b) Calcula los coeficientes de determinación y correlación

c) Valora la relación lineal que explica el número del calzado en función del peso.

a) La nube de puntos o diagrama de dispersión se muestra a la derecha, (obsérvese la escala de los ejes).



b)

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
55	39	3025	1521	2145
65	40	4225	1600	2600
60	41	3600	1681	2460
70	41	4900	1681	2870
65	42	4225	1764	2730
75	42	5625	1764	3150
65	43	4225	1849	2795
85	44	7225	1936	3740
540	332	37 050	13 796	22 490

$$\overline{X} = \frac{540}{8} = 67{,}5\,\text{kg} \quad ; \quad s_X^2 = \frac{37050}{8} - 67{,}5^2 = 75$$

$$\overline{Y} = \frac{332}{8} = 41{,}5 \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{13796}{8} - 41{,}5^2 = 2{,}25$$

$$s_{XY} = \frac{22490}{8} - 41{,}5 \cdot 67{,}5 = 10$$

$$R^2 = \frac{10^2}{2{,}25 \cdot 75} = 0{,}5926 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{0{,}5926} = 0{,}7698$$

c) De los resultados del apartado anterior se infiere que el 59,26 % de la variabilidad de los datos observados en el número del calzado es explicado por la variabilidad en el peso de los individuos.
Ello implica una correlación positiva entre el peso y el número de calzado, cuya intensidad se mide por el coeficiente de correlación lineal r =0,7698; que puede considerarse medio – alto.
En conclusión, se observa una relación lineal moderada – alta entre el peso (*X*) y el número de calzado.

30. La tabla siguiente recoge el diámetro en cm (*Y*) del tronco de una determinada especie de árbol en 5 años (*X*) consecutivos.

X	1	2	3	4	5
Y	6,5	7,5	7,9	8,3	9,1

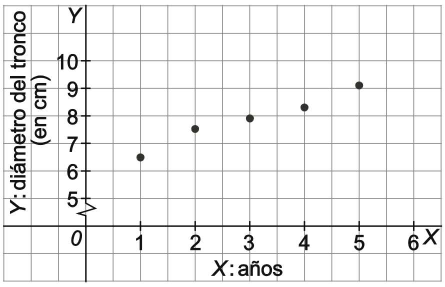
a) Dibuja el diagrama de dispersión y razona la tendencia que observas.

b) Escribe la recta de regresión de *Y* sobre *X* y estima el diámetro del tronco en un árbol en el sexto año.

c) ¿Qué porcentaje de la variabilidad observada en el diámetro se explica por la variabilidad en *X*?

d) Halla el Error Cuadrático Medio e interpreta el resultado.

a) El diagrama de dispersión o nube de puntos de la distribución bidimensional se muestra a la derecha.
Se observa con claridad una tendencia creciente con una asociación lineal fuerte entre ambas variables.



b)

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
1	6,5	1	42,25	6,5
2	7,5	4	56,25	15,0
3	7,9	9	62,41	23,7
4	8,3	16	68,89	33,2
5	9,1	25	82,81	45,5
15	39,3	55	312,61	123,9

$$\overline{X} = \frac{15}{5} = 3 \text{ años} \quad ; \quad s_x^2 = \frac{55}{5} - 3^2 = 2$$

$$\overline{Y} = \frac{39,3}{5} = 7,86 \text{ cm} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{312,61}{5} - 7,86^2 = 0,7424$$

$$s_{XY} = \frac{123,9}{5} - 7,86 \cdot 3 = 1,20$$

Los coeficientes de la recta de regresión son:

$$b = \frac{1,20}{2} = 0,6 \quad ; \quad a = 7,86 - 0,6 \cdot 3 = 7,06$$

Y la recta de regresión tiene por ecuación: $y = 7,06 + 0,6x$.

Se calcula el diámetro esperado sustituyendo el valor $x = 6$ en la ecuación: $Y(6) = 7,06 + 0,6 \cdot 6 = 10,66$ cm.

c) Los coeficientes de determinación de correlación son:

$$R^2 = \frac{s_{XY}^2}{s_Y^2 s_X^2} = \frac{1,2^2}{0,7424 \cdot 2} = 0,9698 \Rightarrow r = \sqrt{0,9698} = 0,9848$$

Es decir, el 96,98 % de la variabilidad observada en el diámetro del tronco de los árboles viene explicada por la edad del árbol. Un porcentaje muy alto que confirma la fuerte relación observada entre ambas variables.

d) Para concluir, el Error Cuadrático Medio vendrá dado por:

$$\text{ECM} = s_Y^2\left(1 - R^2\right) = 0,7424 \cdot \left(1 - 0,9698\right) = 0,0224$$

Su pequeño valor indica un buen ajuste de la recta a la nube de puntos.

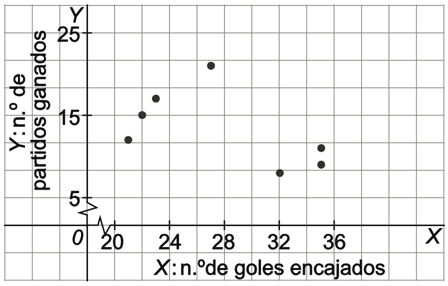
31. El número de partidos ganados por 8 equipos de fútbol (*Y*) y el número de goles encajados por cada uno de ellos (*X*) se recoge en la tabla siguiente.

X	32	22	21	27	23	35	35	21
Y	8	15	12	21	17	9	11	12

a) Representa la nube de puntos y comenta la tendencia que observas justificando la respuesta.

b) Calcula el coeficiente de correlación e interpreta el resultado.

a) La nube de puntos o diagrama de dispersión se muestra a la derecha.
Parece una tendencia decreciente, a medida que aumenta el número de goles encajados (*X*) disminuye el número de partidos ganados (*Y*), si bien la relación que se observa es débil. La nube está claramente dividida en dos grupos y si se separaran las conclusiones no serían las mismas que con el conjunto total.



b)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
32	8	1024	64	256
22	15	484	225	330
21	12	441	144	252
27	21	729	441	567
23	17	529	289	391
35	9	1225	81	315
35	11	1225	121	385
21	12	441	144	252
216	105	6098	1509	2748

$$\overline{X} = \frac{216}{8} = 27 \text{ goles encajados} \quad ; \quad s_X^2 = \frac{6098}{8} - 27^2 = 33{,}25$$

$$\overline{Y} = \frac{105}{8} = 13{,}125 \text{ partidos ganados} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{1509}{8} - 13{,}125^2 = 16{,}3594$$

$$s_{XY} = \frac{2748}{8} - 13{,}125 \cdot 27 = -10{,}875$$

El coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{-10{,}875}{\sqrt{16{,}3594 \cdot 33{,}25}} = -0{,}4663$$

Que confirma la relación negativa (cuando *X* crece, *Y* decrece) entre *X* e *Y*, si bien se trata de una relación lineal débil.

32. La tabla siguiente muestra la edad, en meses (*X*) y la altura en cm (*Y*) de una muestra de 10 niños tomada en una escuela.

X	126	132	116	140	115	135	141	137	119	121
Y	149	148	141	160	137	149	160	151	133	135

a) Representa la nube de puntos.

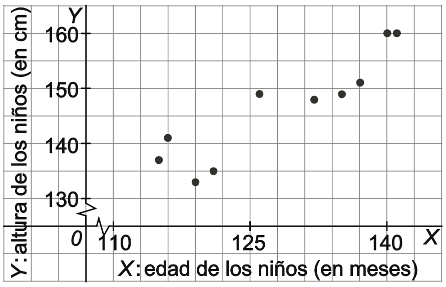
b) Halla la recta de regresión de la altura en función de la edad.

c) Calcula e interpreta el Error Cuadrático Medio.

d) Razona si la recta de regresión obtenida en b) representa adecuadamente los datos.

e) ¿Cuál sería la estatura de un niño de 12 meses?

a) En el diagrama de dispersión de esta distribución bidimensional puede observarse una tendencia creciente que puede ajustarse razonablemente por una recta.



b)

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
126	149	15 876	22 201	18 774
132	148	17 424	21 904	19 536
116	141	13 456	19 881	16 356
140	160	19 600	25 600	22 400
115	137	13 225	18 769	15 755
135	149	18 225	22 201	20 115
141	160	19 881	25 600	22 560
137	151	18 769	22 801	20 687
119	133	14 161	17 689	15 827
121	135	14 641	18 225	16 335
1282	1463	165 258	214 871	188 345

$$\overline{X} = \frac{1282}{10} = 128,2 \text{ meses} \; ; \; s_x^2 = \frac{165258}{10} - 128,2^2 = 90,56$$

$$\overline{Y} = \frac{1463}{10} = 146,3 \text{ cm} \; ; \; s_Y^2 = \frac{214871}{10} - 146,3^2 = 83,41$$

$$s_{XY} = \frac{188345}{10} - 146,3 \cdot 128,2 = 78,84$$

Los coeficientes de la recta de regresión de *Y* sobre *X*:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_x^2} = \frac{78,84}{90,56} = 0,8709 \; ; \; a = \overline{Y} - b\overline{X} = 146,3 - 0,8709 \cdot 128,2 = 34,6913$$

De modo que la recta de regresión de la altura (cm) sobre la edad (meses) es: $y = 34,69 + 0,87x$.

c) El Error cuadrático medio de la regresión lineal de *Y* sobre *X* viene dado por:

$$\text{ECM} = s_Y^2\left(1 - \frac{s_{XY}^2}{s_Y^2 s_X^2}\right) = 83,41\left(1 - \frac{78,84^2}{83,41 \cdot 90,56}\right) = 14,7732$$

d) Los coeficientes de determinación y de correlación lineal son:

$$R^2 = \frac{s_{XY}^2}{s_Y^2 s_X^2} = \frac{78,84^2}{83,41 \cdot 90,56} = 0,8228 \Rightarrow r = \sqrt{0,8228} = 0,9071$$

Un porcentaje alto (82,28 %) de la variabilidad de la altura de los niños viene explicado por su edad, lo que supone un coeficiente de correlación lineal superior a 0,9. Por tanto, se puede afirmar que la recta de regresión se ajusta bastante bien a la nube de puntos y representa adecuadamente los datos.

e) El valor $x = 12$ meses no se encuentra dentro del rango de valores observados de la edad, sino que está muy alejado del mismo, por lo que no se puede hacer predicción de la altura correspondiente a este valor con la recta de regresión obtenida en el apartado b).

33. Como parte de un estudio sociológico, en un barrio de una gran ciudad, se recogieron en una muestra de 8 hogares los porcentajes del presupuesto familiar dedicados a gastos de alojamiento (X) y de ocio (Y).

X	13	15	19	24	14	17	21	17
Y	20	18	16	15	20	17	15	18

a) Determina la recta de regresión de Y sobre X.

b) Calcula el ECM y el coeficiente de correlación e interpreta los resultados.

c) Si se sabe que en un hogar el gasto en alojamiento es del 18 %, ¿Cuál sería el porcentaje de gasto esperado en ocio? Razona la fiabilidad de la predicción.

a) Para obtener la recta de regresión se construye la tabla siguiente:

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
13	20	169	400	260
15	18	225	324	270
19	16	361	256	304
24	15	576	225	360
14	20	196	400	280
17	17	289	289	289
21	15	441	225	315
17	18	289	324	306
140	139	2546	2443	2384

$$\overline{X} = \frac{140}{8} = 17,5\,\% \text{ en alojamiento} \quad ; \quad s_X^2 = \frac{2546}{8} - 17,5^2 = 12$$

$$\overline{Y} = \frac{139}{8} = 17,375\,\% \text{ en ocio} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{2443}{8} - 17,375^2 = 3,484$$

$$s_{XY} = \frac{2384}{8} - 17,5 \cdot 17,375 = -6,0625$$

L coeficientes de la recta de regresión de Y sobre X

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{-6,0625}{12} = -0,5052 \quad ; \quad a = \overline{Y} - b\overline{X} = 17,375 + 0,5052 \cdot 17,5 = 26,2161$$

De modo que la recta de regresión de la altura (cm) sobre la edad (meses) viene dada por: $y = 18,924 - 0,0885x$.

b) El Error cuadrático medio de la regresión lineal de Y sobre X viene dado por

$$\text{ECM} = s_Y^2\left(1 - \frac{s_{XY}^2}{s_Y^2\, s_X^2}\right) = 3,484\left(1 - \frac{(-6,0625)^2}{12 \cdot 3,484}\right) = 0,4212$$

Los coeficientes de determinación y de correlación lineal son:

$$R^2 = \frac{s_{XY}^2}{s_Y^2\, s_X^2} = \frac{(-6,0625)^2}{12 \cdot 3,484} = 0,8791 \Rightarrow r = -\sqrt{0,0270} = -0,9373$$

Un alto porcentaje (87,91 %) de la variabilidad del gasto en ocio viene explicado por el gasto en alojamiento, lo que supone un coeficiente de correlación lineal inversa superior a 0,9. Por tanto, se puede afirmar que la recta de regresión se ajusta bastante bien a la nube de puntos y representa adecuadamente los datos.

c) El gasto esperado en ocio se calcula sustituyendo el valor $x = 18$ % en la ecuación de la recta:

$$y(18) = 18,924 - 0,0885 \cdot 18 = 17,331 \text{ \% de gasto esperado en ocio}$$

Según lo expuesto en el apartado anterior se trata de una estimación altamente fiable.

34. En un control para prevenir la hipertensión en varones jóvenes, se elige una muestra de 8 con edades comprendidas entre 25 y 30 años y se mide su peso en kg (*X*) y su tensión sistólica en Hg/mg (*Y*).

X	74,8	81,6	70,3	95,3	67,6	78,2	76,2	88,5
Y	130	150	128	140	125	153	132	163

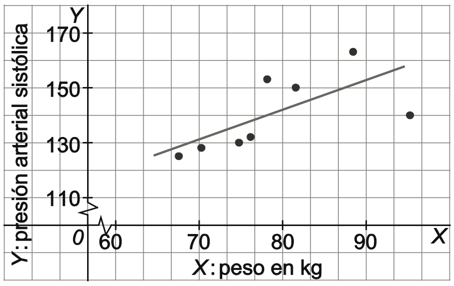
a) Representa gráficamente los datos.

b) Justifica, a la vista de la nube de puntos, que es razonable ajustar una recta regresión de *Y* sobre *X* y calcula los coeficientes de determinación y de correlación.

c) Escribe la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

¿Cuál es la tensión sistólica que se estima que pueda tener un joven con 80 kg de peso?

a) La nube de puntos de la distribución bidimensional junto con la recta de regresión ajustada en el apartado c).



b) A la vista de la nube de puntos, y de la tendencia creciente observada, podrá ajustarse una recta de regresión, si bien el ajuste no es muy bueno, debido sobre todo a la observación (95,3; 140).

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
74,8	130	5595,04	16 900	9724,0
81,6	150	6658,56	22 500	12 240,0
70,3	128	4942,09	16 384	8998,4
95,3	140	9082,09	19 600	13 342,0
67,6	125	4569,76	15 625	8450,0
78,2	153	6115,24	23 409	11 964,6
76,2	132	5806,44	17 424	10 058,4
88,5	163	7832,25	26 569	14 425,5
632,5	1121	50 601,47	158 411	89 202,9

$$\overline{X} = \frac{632,5}{8} = 79,063\,\text{kg} \quad ; \quad \overline{Y} = \frac{1121}{8} = 140,125$$

$$s_X^2 = \frac{50601,47}{8} - 79,063^2 = 74,3048 \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{158411}{8} - 140,125^2 = 166,3594$$

$$s_{XY} = \frac{89202,9}{8} - 140,125 \cdot 79,063 = 71,7297$$

Los coeficientes de determinación y correlación son:

$$R^2 = \frac{s_{XY}^2}{s_Y^2 s_Y^2} = \frac{71,7297^2}{166,3594 \cdot 74,3048} = 0,4162 \Rightarrow r = \sqrt{0,4162} = 0,6452$$

que confirman una relación lineal positiva (tendencia creciente), aunque solo moderada.

c) Con los resultados obtenidos en el apartado anterior, se pueden obtener los coeficientes de la recta de regresión de *Y* (tensión arterial) sobre *X* (peso en kg).

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{71,7297}{74,3048} = 0,9653 \quad ; \quad a = 140,125 - 0,9653 \cdot 79,0625 = 63,8025$$

La ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = 63,8025 + 0,9653x$.

d) Si $x = 80$ kg, como está dentro del rango de valores observados del peso (*X*), se puede utilizar la recta anterior para predecir la tensión arterial correspondiente:

$$y(80) = 63,8025 + 0,9653 \cdot 80 = 141,03$$

35. En la siguiente tabla se muestran las distancias recorridas por un vehículo (*Y*) que se ha movido con aceleración constante durante 10 segundos, en función del tiempo transcurrido (*X*).

X	2	4	6	8	10
Y	25	95	216	530	598

a) Representa gráficamente los datos.

b) Calcula la recta de regresión lineal, el coeficiente de correlación y el Error Cuadrático Medio.

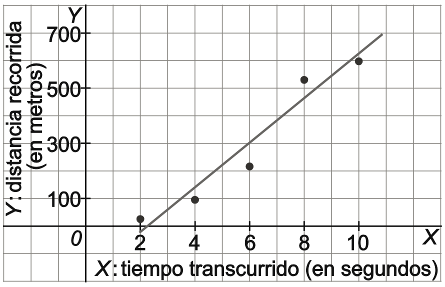
c) Como en el instante cero (*X*=0) el espacio que ha recorrido el vehículo es cero (*Y*=0), ajusta la nube de puntos a una recta que pasa por el origen.

d) Define una nueva variable $Z = X^2$, y realiza ahora el ajuste lineal de *Y* en función de Z, calculando el nuevo coeficiente de correlación.

e) Compara y valora los resultados obtenidos en los apartados b, c y d.

a) Se representa el diagrama de dispersión junto con la recta de regresión que se calcula en el apartado b)

Puede observarse la relación con tendencia creciente entre ambas variables.



b)

x_j (s)	y_j (m)	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
2	25	4	625	50
4	95	16	9025	380
6	216	36	46 656	1296
8	530	64	280 900	4240
10	598	100	357 604	5980
30	1464	220	694 810	11 946

$$\overline{X} = \frac{30}{5} = 6\text{ s.} \quad ; \quad s_X^2 = \frac{220}{5} - 6^2 = 8$$

$$\overline{Y} = \frac{1464}{5} = 292{,}8\text{ m} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{694\,810}{5} - 292{,}8^2 = 53\,230{,}16$$

$$s_{XY} = \frac{11946}{5} - 292{,}8 \cdot 6 = 632{,}4$$

Los coeficientes de la ecuación de regresión son:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{632{,}4}{8} = 79{,}05 \quad ; \quad a = \overline{Y} - b\overline{X} = 292{,}8 - 79{,}05 \cdot 6 = -181{,}5$$

De manera que la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = -181{,}5 + 79{,}05x$.

Debe observarse que esta ecuación de la recta de regresión estima un valor negativo para la distancia recorrida cuando x=2, lo que obviamente no es una buena estimación.
El coeficiente de correlación entre *X* e *Y* es:

$$r_{XY} = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} = \frac{632{,}4}{\sqrt{8 \cdot 53230{,}16}} = 0{,}9691$$

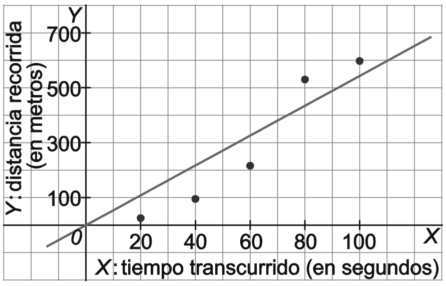
que indica una fuerte relación lineal entre las variables, con el inconveniente señalado antes.

c) El coeficiente de la recta de regresión que pasa por el origen viene dado por:

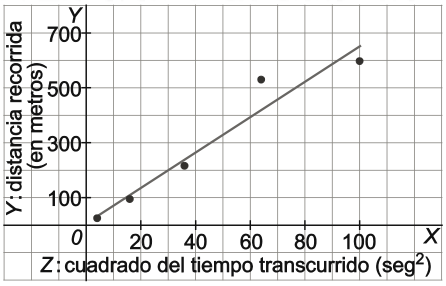
$$b = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} = \frac{11946}{220} = 54{,}3$$

de donde la ecuación de la recta es:

$y = 54{,}3x$



d) Sea $Z = X^2$, entonces el diagrama de dispersión de las variables Z e Y junto con la recta de regresión de Y sobre Z señala que este ajuste mejora el anterior (aunque ligeramente, porque el otro ya es muy bueno).



La tabla con los valores de Y y Z, junto con las columnas necesarias para facilitar los cálculos de varianzas y covarianza es:

y (m)	Z	y^2	z^2	yz
25	4	625	16	100
95	16	9025	256	1520
216	36	46 656	1296	7776
530	64	280 900	4096	33 920
598	100	357 604	10 000	59 800
1464	220	694 810	15 664	103 116

$$\bar{Z} = \frac{220}{5} = 44 \quad ; \quad s_Z^2 = \frac{15664}{5} - 44^2 = 1196,8$$

$$\bar{Y} = \frac{1464}{5} = 292,8 \; ; \quad s_Y^2 = \frac{694\,810}{5} - 292,8^2 = 53\,230,16$$

$$s_{ZY} = \frac{103\,116}{5} - 292,8 \cdot 44 = 7740$$

Los coeficientes de la recta de regresión son:

$$b = \frac{s_{ZY}}{s_Z^2} = \frac{7740}{1196,8} = 6,467 \quad ; \quad a = \bar{Y} - b\bar{Z} = 292,8 - 6,467 \cdot 44 = 8,241$$

De manera que la ecuación de la recta de regresión de Y sobre Z es: $y = 8{,}241 + 6{,}467z$.

Y el coeficiente de correlación entre Z e Y es:

$$r_{ZY} = \frac{s_{ZY}}{\sqrt{s_Z^2 s_Y^2}} = \frac{7740}{\sqrt{1196,8 \cdot 53230,16}} = 0,9697$$ que es prácticamente igual que el de X e Y.

e) Los diagramas de dispersión muestran una buena relación lineal en los tres casos, ligeramente mejor en el caso de la variables Z e Y. Sin embargo, el coeficiente de correlación en el caso de la variables Z e Y, (0,9697), es prácticamente igual que en el caso de las variables X e Y, (0,9691), lo que significa que en los dos caso el ajuste lineal es similar y muy bueno.

Síntesis

36. Con los datos de la tabla siguiente:

X	2	3	6	10	12
Y	150	130	125	120	100

a) Dibuja el diagrama de dispersión.

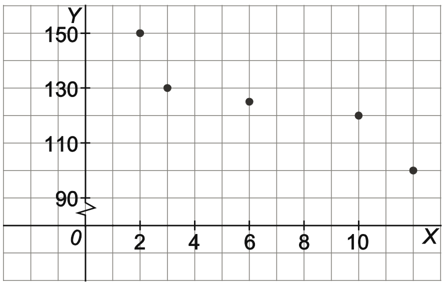
b) Halla la media y la varianza de las distribuciones *X* e *Y*.

c) Obtén la recta de regresión de *Y* sobre *X* y valora la bondad del ajuste.

d) ¿Qué porcentaje de la variabilidad de *Y* viene explicado por la variabilidad de *X*?

e) ¿Qué valor se espera en la variable *Y* si la variable *X* toma el valor $x=5$?

a) Se representa el diagrama de dispersión a la derecha.



b)

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
2	150	4	22500	300
3	130	9	16900	390
6	125	36	15625	750
10	120	100	14400	1200
12	100	144	10000	1200
33	625	293	79425	3840

$$\overline{X}=\frac{33}{5}=6,6 \quad ; \quad s_x^2=\frac{293}{5}-6,6^2=15,04$$

$$\overline{Y}=\frac{625}{5}=125; \quad s_Y^2=\frac{79425}{5}-125^2=260$$

c) Se obtiene, en primer lugar, la covarianza: $s_{XY}=\frac{3840}{5}-125\cdot 6,6=-57$, que junto con los resultados del apartado b) proporcionan los coeficientes de la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

$$b=\frac{s_{XY}}{s_x^2}=\frac{-57}{15,04}=-3,79 \quad ; \quad a=\overline{Y}-b\,\overline{X}=125+3,79\cdot 6,6=150,01$$

La recta de regresión de *Y* sobre *X* viene dada por la ecuación: $y=150,01-3,79x$

La bondad del ajuste se puede valorar mediante el cálculo del coeficiente de correlación lineal

Los coeficientes de determinación y de correlación lineal son:

$$R^2=\frac{s_{XY}^2}{s_Y^2 s_x^2}=\frac{(-57)^2}{260\cdot 15,04}=0,8309 \Rightarrow r=-\sqrt{0,8309}=-0,9115 \quad \text{(idéntico signo que } s_{XY}\text{)}$$

Se trata, por tanto de un muy buen ajuste lineal, que confirma la observación del diagrama de dispersión del apartado a).

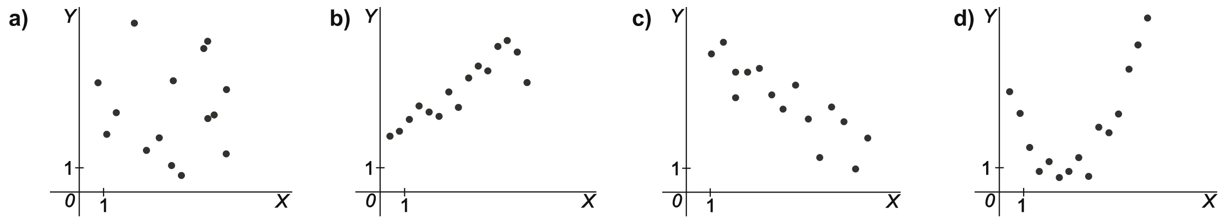
d) Observando el coeficiente de determinación, el 83,09% de la variabilidad observada en la variable *Y* viene dada por la variabilidad de *X*.

e) Por último, para estimar el valor esperado cuando *X* toma el valor $x=5$, se sustituye este valor en la ecuación de la recta de regresión:

$$y=150,01-3,79\cdot 5=131,05$$

CUESTIONES

37. En los siguientes casos, se representa la nube de puntos de una variable bidimensional.



En cada caso indica si existe relación lineal entre las variables y, en caso afirmativo, ¿cuál es el signo de la covarianza y del coeficiente de correlación?

a) En este caso no parece que exista relación lineal entre las variables representadas.

b) Se puede observar una relación lineal directa, cuando una variable crece la otra también, y por lo tanto los signos de la covarianza y del coeficiente de correlación son positivos.

c) Puede observarse una relación lineal con tendencia inversa (cuando una variable crece la otra decrece). En este caso tanto la covarianza como el coeficiente de correlación lineal tienen signo negativo.

d) Parece que existe relación entre ambas variables, pero que esta no es lineal.

38. De una variable bidimensional (*X*,*Y*) se sabe que la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. es $y = 3$. Contesta razonadamente

a) ¿Cuál es la media de *Y*?

b) ¿Cuál es el valor de la covarianza?

c) ¿Cuánto vale el coeficiente de correlación?

d) ¿Qué conclusiones se pueden extraer?

a) Dado que la ecuación de la recta de regresión es $y = \overline{Y} + \dfrac{s_{XY}}{s_X^2}(x - \overline{X})$ y comparando con $y = 3 \Rightarrow \overline{Y} = 3$.

b) La covarianza es $s_{XY} = 0$, porque la pendiente de la recta es $b = \dfrac{s_{XY}}{s_X^2} = 0 \Rightarrow s_{XY} = 0$.

c) El coeficiente de correlación es cero, porque la covarianza es cero y $r = \dfrac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2\ s_X^2}} = 0$.

d) No existe relación lineal entre las variables *X* e *Y*.

39. De dos variable estadísticas, *X* e *Y*, se sabe que:

- **Tienen las varianzas iguales.**
- **La covarianza es 2,8.**
- **El coeficiente de correlación toma el valor 0,8.**
- **La recta de regresión contiene al punto (3, 7).**

Halla la recta de regresión de *Y* sobre *X* y el Error Cuadrático Medio.

Sea $y = a + bx$ la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X*. El objetivo es calcular los coeficientes *a* y *b*.

Como las varianzas de *X* e *Y* son iguales, se tiene que: $s_X^2 = s_Y^2 \Rightarrow r = \dfrac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} = \dfrac{s_{XY}}{\sqrt{s_Y^2 s_Y^2}} = \dfrac{s_{XY}}{s_Y^2} \Rightarrow s_Y^2 = \dfrac{2,8}{0,8} = 3,5$

Además, en este caso: $b = \dfrac{s_{XY}}{s_X^2} = \dfrac{s_{XY}}{s_Y^2} = r = 0,8$

Para calcular la ordenada en el origen, se tiene en cuenta que $y(3) = 7 \Rightarrow 7 = a + 0,8 \cdot 3 \Rightarrow a = 4,6$.

Por lo que la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = 4,6 + 0,8x$.

Para terminar, el ECM viene determinado por: $\text{ECM} = s_Y^2\left(1 - R^2\right) = 3,5\left(1 - 0,8^2\right) = 1,26$.

40. La recta de regresión de una variable *Y* sobre otra variable *X* está dada por la ecuación $y = -2{,}3 + 0{,}15x$. Señala, de forma razonada, cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas

a) El coeficiente de correlación es 0,15.

b) La covarianza entre *X* e *Y* es positiva.

c) La variable *X* no explica en absoluto el comportamiento de la variable *Y*.

d) Estas dos variables están débilmente correlacionadas.

a) De la información obtenida de la recta de regresión: $b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = 0{,}15 \Rightarrow r = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_Y^2 s_X^2}} = \frac{bs_X^2}{\sqrt{s_Y^2 s_X^2}} = 0{,}15\sqrt{\frac{s_X^2}{s_Y^2}}$

Por tanto la afirmación es falsa, salvo que las varianzas de *X* e *Y* sean iguales.

b) Sí, ya que el signo del coeficiente de correlación coincide con el de la covarianza y con el de *b*.

c) Para valorar esta afirmación hay que calcular el coeficiente de determinación (o el de correlación) y, con la información disponible, no se puede obtener. Por lo tanto, la afirmación no es correcta en general.

d) La respuesta es similar a la del apartado c).

41. De la variable estadística bidimensional (*X*, *Y*), se sabe que:

- **Las medias son $\overline{X} = 9{,}2$ e $\overline{Y} = 7{,}5$.**
- **La desviación típica de la variable *Y* es el doble que la de la variable *X*.**
- **El coeficiente de correlación toma el valor 0,7.**

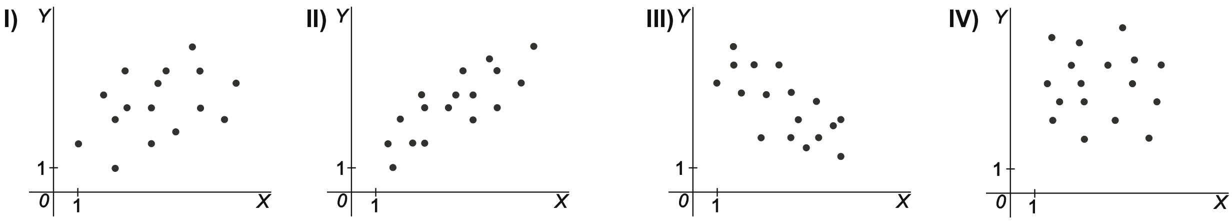
Con estos datos, determina la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

De la información proporcionada se sabe que $s_Y^2 = 2s_X^2 \Rightarrow r = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_Y^2 s_X^2}} = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_X^2}} = \frac{s_{XY}}{s_X^2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \sqrt{2}\,r$

De donde: $b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \sqrt{2}\cdot r = 0{,}7\cdot\sqrt{2} \simeq 0{,}9899$; $a = \overline{Y} - \frac{s_{XY}}{s_x^2}\cdot\overline{X} = 7{,}5 - 0{,}7\cdot\sqrt{2}\cdot 9{,}2 \simeq -1{,}6075$

Por tanto la ecuación de la recta de regresión es: $y = -1{,}6075 + 0{,}9899x$

42. A la vista de las siguientes nubes de puntos de dos distribuciones conjuntas bidimensionales, asigna el coeficiente de correlación que mejor se aproxime a cada una de las distribuciones siguientes:



a) $r = -0{,}04$ **b)** $r = 0{,}4$ **c)** $r = -0{,}7$ **d)** $r = 0{,}8$

a) $r = -0{,}04$ se asigna al diagrama de dispersión IV, puesto que no se observa tendencia en la nube de puntos.

b) $r = 0{,}4$ se asigna al diagrama I, ya que se observa un tendencia creciente, con relación lineal débil entre las variables.

c) $r = -0{,}7$ se asigna al diagrama III, en el que se observa una tendencia decreciente, con relación lineal moderada entre las variables.

d) $r = 0{,}8$ se asigna al diagrama de dispersión II, en el que se observa una tendencia lineal creciente con relación lineal moderada–alta.

PROBLEMAS

43. La tabla recoge la distribución de los alumnos de primero de bachillerato según sexo (*X*) y grupo (*Y*).

X \ Y	Grupo *A*	Grupo *B*	Grupo *C*	Totales *X*
Chicos	**	18	**	49
Chicas	21	**	16	**
Totales *Y*	**	**	32	103

a) Copia y completa la tabla.

b) Dentro del grupo *B*, ¿cuál es el porcentaje de mujeres?

c) Escribe las distribuciones marginales de frecuencias absolutas y relativas.

a) Completamos la tabla con los datos que faltan:

X \ Y	Grupo *A*	Grupo *B*	Grupo *C*	Totales *X*
Chicos	**15**	18	**16**	49
Chicas	21	**17**	16	**54**
Totales *Y*	**36**	**35**	32	103

b) $p(chicas \mid B) = \frac{17}{35} \cdot 100 = 48,57\ \%$

c) Las distribuciones marginales de frecuencias absolutas y relativas se recogen en la tabla

X \ Y	Grupo *A*	Grupo *B*	Grupo *C*	f_{X_i}	h_{X_i}
Chicos	15	18	16	49	0,4757
Chicas	21	17	16	54	0,5243
f_{Y_j}	36	35	32	103	
h_{Y_j}	0,3495	0,3398	0,3107		

44. La tabla muestra los datos de la tasa de mortalidad infantil en tanto por mil (*Y*), y el porcentaje del Producto Interior Bruto dedicado la salud (*X*). La muestra corresponde a 10 países de diferentes continentes y riqueza.

X	5,2	4,5	5,2	6,3	5,4	6,9	3,7	6,7	11,0	9,5
Y	110	94	77	56	36	16	12	8	5	3

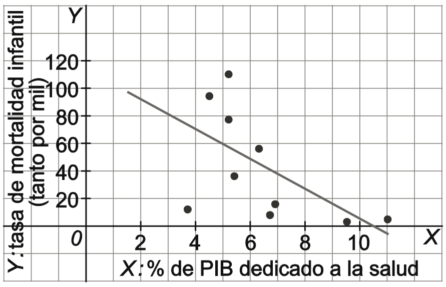
a) Representa la nube de puntos. ¿Existe relación entre ambas variables? ¿De qué tipo?

b) Cuantifica la relación existente y coméntala.

c) Escribe la ecuación de la recta de regresión de la tasa de mortalidad infantil en función del porcentaje del PIB dedicado a sanidad.

d) En un país que invierta un 5 % del PIB en sanidad, ¿Cuál será la tasa de mortalidad infantil esperada? Comenta la fiabilidad de esta estimación.

a) A la derecha se muestra el diagrama de dispersión de la distribución conjunta de ambas variables, junto con la recta de regresión de *Y* sobre *X* obtenida en el apartado c):
Puede verse que existe una relación lineal débil de tendencia decreciente: a mayor porcentaje del PIB dedicado a la salud, menor es la tasa de mortalidad infantil.



b)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
5,2	110	27,0	12100,0	572
4,5	94	20,3	8836,0	423
5,2	77	27,0	5929,0	400,4
6,3	56	39,7	3136,0	352,8
5,4	36	29,2	1296,0	194,4
6,9	16	47,6	256,0	110,4
3,7	12	13,7	144,0	44,4
6,7	8	44,9	64,0	53,6
11,0	5	121,0	25,0	55
9,5	3	90,3	9,0	28,5
64,4	417,0	460,6	31795,0	2234,5

$\overline{X} = \frac{64,4}{10} = 6,44$ % del PIB ; $s_x^2 = \frac{460,6}{10} - 6,44^2 = 4,5884$

$\overline{Y} = \frac{417}{10} = 41,7$ por mil de los habitantes ; $s_Y^2 = \frac{31795}{10} - 41,7^2 = 1440,61$

$s_{XY} = \frac{2234,5}{10} - 41,7 \cdot 6,44 = -45,098$

Los coeficientes de determinación y correlación son:

$$R^2 = \frac{s_{XY}^2}{s_Y^2 s_x^2} = \frac{(-45,098)^2}{1440,61 \cdot 4,5884} = 0,3077 \Rightarrow r = -\sqrt{0,3077} = -0,5547$$

Lo que significa que el 30,77% de la variabilidad observada en la tasa de mortalidad infantil viene explicada por el porcentaje de PIB dedicado a salud (*X*). Se confirma la relación lineal (moderada) con tendencia negativa (inversa) entre ambas variables

c) Con los datos obtenidos en el apartado b), se estiman los coeficiente de la recta de regresión de la tasa de mortalidad infantil (*Y*) en función del porcentaje del PIB dedicado a la salud:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_x^2} = \frac{-45,098}{4,5884} = -9,829 \quad ; \quad a = \overline{Y} - b\overline{X} = 41,7 + 9,829 \cdot 6,44 = 104,997$$

De modo que la recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = 104,997 - 9,829x$

d) Si el porcentaje del PIB dedicado a salud es $x = 5$, entonces, la tasa esperada de mortalidad infantil es

$$y(5) = 104,997 - 9,829 \cdot 5 = 55,85 \text{ por mil habitantes}$$

Predicción de relativa fiabilidad dado que el coeficiente de correlación no es muy alto.

45. Se conoce que el consumo de energía anual por habitante (*Y*, en miles de kWh) está relacionado con la renta per cápita (*X*, en miles de $). Para estudiar cómo funciona esta relación en Centroamérica se han recogido los datos en la siguiente tabla:

X	8647	3708	3178	2246	10047	1578	7498
Y	1855	855	567	671	1990	473	1832

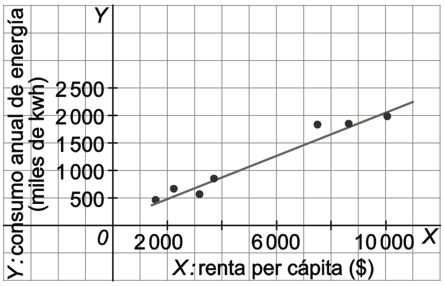
a) Representa el diagrama de dispersión.

b) ¿Puede aproximarse, razonablemente, la nube de puntos por una recta?

c) Escribe la ecuación de la recta de regresión del consumo de energía sobre la renta per cápita.

d) Calcula el porcentaje de variabilidad en el consumo de energía explicada por la renta per cápita. Valora el resultado.

e) Calcula el consumo esperado de energía en un país cuya renta per cápita sea de 5000 $. Justifica la fiabilidad de la predicción.



a) Se dibuja el diagrama de dispersión de la distribución conjunta de ambas variables, junto con la recta de regresión de *Y* sobre *X* obtenida en el apartado c):

b) La nube de puntos parece mostrar una fuerte relación lineal creciente entre la renta per cápita y el consumo de energía.

c)

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	$x_j y_j$
8647	1855	74 770 609	3 441 025	16 040 185
3708	855	13 749 264	731 025	3 170 340
3178	567	10 099 684	321 489	1 801 926
2246	671	5 044 516	450 241	1 507 066
10047	1990	100 942 209	3 960 100	19 993 530
1578	473	2 490 084	223 729	746 394
7498	1832	56 220 004	3 356 224	13 736 336
36 902	8243	263 316 370	12 483 833	56 995 777

$$\overline{X} = \frac{36\,902}{7} = 5271{,}71\ \$ \quad ; \quad s_X^2 = \frac{263\,316\,370}{7} - 5271{,}71^2 = 9\,825\,652{,}775$$

$$\overline{Y} = \frac{8243}{7} = 1177{,}57 \text{ miles de kWh} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{12\,483\,833}{7} - 1177{,}57^2 = 396\,739{,}2449$$

$$s_{XY} = \frac{56\,995\,777}{7} - 5271{,}71 \cdot 1177{,}57 = 1\,934\,446{,}312$$

Los coeficientes de la recta de regresión son:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{1\,934\,446{,}312}{9\,825\,652{,}775} = 0{,}1969 \quad ; \quad a = \overline{Y} - b\overline{X} = 1177{,}57 - 0{,}1969 \cdot 5271{,}71 = 139{,}57$$

De modo que la recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = 139{,}57 + 0{,}1969x$

d) A continuación, se obtienen los coeficientes de determinación y correlación:

$$R^2 = \frac{s_{XY}^2}{s_Y^2 s_X^2} = \frac{1\,934\,446{,}312^2}{396\,730{,}245 \cdot 9\,825\,652{,}775} = 0{,}95997 \Rightarrow r = 0{,}9798$$

Lo que significa que el 95,99 % de la variabilidad observada en el consumo de energía viene explicada por la renta per cápita. Se confirma así la fuerte relación lineal entre ambas variables.

e) Para estimar el consumo esperado de energía en un país cuya renta per cápita sea 5000 $, dato que se encuentra dentro del rango de estudio, evaluamos en la ecuación:

$$y(5000) = 139{,}57 + 0{,}1969 \cdot 5000 = 1124{,}07 \text{ miles de kWh.}$$

Predicción con una alta fiabilidad dado que el coeficiente de correlación es muy alto.

46. La tabla siguiente muestra los datos relativos al número de salas de cine (*X*) y de espectadores en millones (*Y*), en España entre el 2004 y el 2011.

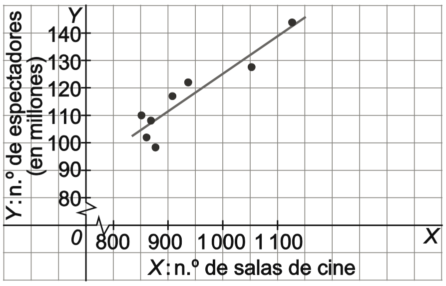
Años	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
X	1126	1052	936	907	868	851	860	876
Y	143,9	127,6	122	117	108	110	102	98,3

a) Mediante la representación gráfica ¿qué relación se observa entre las dos variables?

b) ¿Cuál de las dos variables presenta mayor variabilidad?

c) ¿Cuántos espectadores se esperan si hubiera 1000 salas de cine. Valora la precisión de esta estimación.

a) Se muestra a la derecha el diagrama de dispersión de la distribución bidimensional, junto con la recta de regresión calculada en el apartado c). Se observa un tendencia creciente con fuerte relación lineal.



b)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
1126	143,9	1 267 876	20 707,21	162 031,4
1052	127,6	1 106 704	16 281,76	134 235,2
936	122,0	876 096	14 884,00	114 192,0
907	117,0	822 649	13 689,00	106 119,0
868	108,0	753 424	11 664,00	93 744,0
851	110,0	724 201	12 100,00	93 610,0
860	102,0	739 600	10 404,00	87 720,0
876	98,3	767 376	9662,89	86 110,8
7476,0	928,8	7 057 926,0	109 392,9	877 762,4

$\overline{X} = \dfrac{7476}{8} = 934,5$ salas de cine ; $s_X^2 = \dfrac{7057926}{8} - 934,5^2 = 8950,5 \Rightarrow s_X = 94,6071$

$\overline{Y} = \dfrac{928,8}{8} = 116,1$ millones de espectadores ; $s_Y^2 = \dfrac{109392,9}{8} - 116,1^2 = 194,8975 \Rightarrow s_Y = 13,9606$

Luego, los coeficientes de variación de *X* e *Y* son:

$CV(Y) = \dfrac{s_Y}{\overline{Y}} = \dfrac{13,9606}{116,1} = 0,1202$ $\qquad CV(X) = \dfrac{s_X}{\overline{X}} = \dfrac{94,6071}{934,5} = 0,1012$

Se concluye que el número de espectadores (en millones) presenta una variabilidad ligeramente mayor (aprox. un 18,78 % más) que la del número de salas de cine (*X*).

c) Para estimar el número de espectadores esperado, se calcula la recta de regresión de *Y* sobre *X*:

$s_{XY} = \dfrac{877762,4}{8} - 116,1 \cdot 934,5 = 1224,85 \quad b = \dfrac{1224,85}{8950,5} = 0,1368 \quad a = 116,1 - 0,1368 \cdot 934,5 = -11,7836$

Luego la ecuación de la recta de regresión del número de espectadores (*Y*) en función del número de salas de cine (*X*) es: $y = -11,7836 + 0,1368x$.

Haciendo uso de ella se puede estimar el número de espectadores (*Y*, en millones) si el número de salas de cine fuera x=1000 (dentro del rango de valores observados de *X*):

$$y(1000) = -11,7836 + 0,1368 \cdot 1000 = 125,0635 \text{ millones de espectadores.}$$

Para estimar la precisión calculamos el coeficiente de correlación: $r = \dfrac{s_{XY}}{\sqrt{s_Y^2\, s_X^2}} = \dfrac{1224,85}{94,6071 \cdot 13,9606} = 0,9274$

Por tanto se trata de una estimación bastante fiable.

47. La distribución conjunta de la superficie en metros cuadrados (*Y*) de una vivienda el número de habitaciones (*X*) viene dada en la tabla siguiente:

		Y: Superficie, en m^2			
		[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90,100)
X: Número habitaciones	2	69	12	2	1
	3	464	217	89	26
	4	175	450	212	138

a) Halla las distribuciones marginales.

b) Escribe la distribución de la superficie sabiendo que la vivienda dispone de tres habitaciones. Halla su media y su varianza.

c) Calcula la covarianza e interpreta el resultado.

a) Las tablas con las distribuciones marginales son:

X_j	f_{X_j}	h_{X_j}	$f_{Y_j} \cdot X_j$
2	84	0,0453	168
3	796	0,4291	2388
4	975	0,5256	3900
	1855	1	6456

	Y_j	f_{Y_j}	h_{Y_j}	$f_{Y_j} \cdot Y_j$
[60, 70)	65	708	0,3817	46 020
[70, 80)	75	679	0,3660	50 925
[80, 90)	85	303	0,1633	25 755
[90,100)	95	165	0,0890	15 675
		1855	1	138 375

b) La distribución para una vivienda de 3 habitaciones, ampliada para los cálculos posteriores es:

	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90,100)	
Y_j	65	75	85	95	
$f_{Y_j\|X=3}$	464	217	89	26	796
$f_{Y_j} \cdot Y_j$	30 160	16 275	7565	2470	56 470
$f_{Y_j} \cdot Y_j^2$	1 960 400	1 220 625	643 025	234 650	4 058 700

Por tanto, la media y la varianza serán:

$$\overline{Y}\,\big|_{X=3} = \frac{56470}{796} = 70{,}94\ \text{m}^2 \ ; \ s^2_{Y|X=3} = \frac{4058700}{796} - 70{,}94^2 = 66{,}07$$

c) Construimos una tabla auxiliar con los productos necesarios $f_{ij} \cdot X_i Y_j$:

Y_j	65	65	65	75	75	75	85	85	85	95	95	95	
X_i	2	3	4	2	3	4	2	3	4	2	3	45	
f_{ij}	69	464	175	12	217	450	2	89	212	1	26	138	
$f_{ij}X_iY_j$	8970	90 480	45 500	1800	48 825	135 000	340	22 695	72 080	190	7410	52 440	485 730

Las medias marginales son:

$$\overline{X} = \frac{6456}{1855} = 3{,}48 \quad ; \quad \overline{Y} = \frac{138375}{1855} = 74{,}60$$

de donde la covarianza será:

$$s_{XY} = \frac{485\,730}{1855} - 3{,}48 \cdot 74{,}60 = 2{,}241$$

Al tratarse de una covarianza positiva la relación existente entre ambas variables es directa, es decir, a mayor número de habitaciones, mayor superficie.

48. Las calificaciones (*Y*) de 8 alumnos en Econometría I en el primer curso de Grado en CC. Económicas y las obtenidas en la materia de economía de la empresa en la PAU (*X*), han sido:

Y	5,3	6,2	6,8	7,2	10	5,1	3,8	7,5
X	7,3	5,2	6	7	8,8	4	5,7	8,2

a) ¿Cuál es el grado de correlación entre las dos variables? Valora el resultado.

b) Si un alumno obtuvo 6,5 puntos en el examen de la PAU ¿Qué calificación se espera que obtenga en Econometría I? Comenta la precisión de esta estimación.

a) Se construye la tabla para facilitar los cálculos correspondientes:

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
7,3	5,3	53,29	28,09	38,69
5,2	6,2	27,04	38,44	32,24
6,0	6,8	36,00	46,24	40,80
7,0	7,2	49,00	51,84	50,40
8,8	10,0	77,44	100,00	88,00
4,0	5,1	16,00	26,01	20,40
5,7	3,8	32,49	14,44	21,66
8,2	7,5	67,24	56,25	61,50
52,2	51,9	358,50	361,31	353,69

Se calculan las medias, las varianzas y la covarianza de ambas variables:

$$\overline{X} = \frac{52,2}{8} = 6,53 \quad ; \quad s_X^2 = \frac{358,5}{8} - 6,53^2 = 2,2369$$

$$\overline{Y} = \frac{51,9}{8} = 6,49 \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{361,31}{8} - 6,49^2 = 3,0761$$

$$s_{XY} = \frac{353,69}{8} - 6,49 \cdot 6,53 = 1,8803$$

De donde el coeficiente de correlación lineal es:

$$r = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} = \frac{1,8803}{\sqrt{2,2369 \cdot 3,0761}} = 0,7168$$

que informa de una correlación lineal moderada – alta entre las variables *X* e *Y*.

b) Se debe estimar la recta de regresión de la calificación en Econometría I (*Y*) en función de la calificación en economía de la empresa en la PAU (*X*).

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{1,8803}{2,2369} = 0,8406 \quad ; \quad a = \overline{Y} - b\overline{X} = 6,4875 - 0,8406 \cdot 6,525 = 1,0026$$

De modo que la recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = 1,0026 + 0,8406x$.

Luego: $y(6,5) = 1,0026 + 0,8406 \cdot 6,5 = 6,47$

Que, dado el valor del coeficiente de correlación, puede considerarse una buena estimación de la calificación en Econometría I.

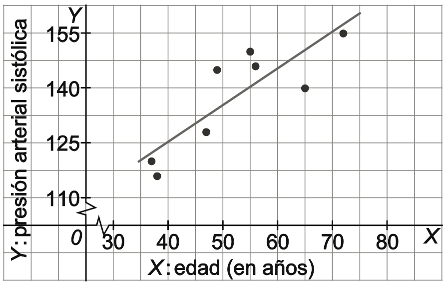
49. La siguiente tabla da la edad (*X*) en años y la tensión sistólica (*Y*) de una muestra de 8 mujeres tomada entre las pacientes de un centro de salud:

X	56	72	37	65	47	55	49	38
Y	146	155	120	140	128	150	145	116

a) Representa gráficamente los datos y la recta de regresión que da la tensión en función de la edad. Valora la tendencia observada.

b) ¿Cuál se espera que sea la tensión de una mujer de 50 años?

a) A la derecha se muestra la nube de puntos junto con la recta de regresión cuya ecuación determinaremos posteriormente.
Se puede observar una relación con tendencia creciente y lo que parece un buen ajuste de la recta de regresión a la nube de puntos.



x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
56	146	3136	21 316	8176
72	155	5184	24 025	11 160
37	120	1369	14 400	4440
65	140	4225	19 600	9100
47	128	2209	16 384	6016
55	150	3025	22 500	8250
49	145	2401	21 025	7105
38	116	1444	13 456	4408
419	1100	22993	152 706	58 655

$$\overline{X} = \frac{419}{8} = 52,375 \text{ años} \quad ; \quad s_x^2 = \frac{22993}{8} - 52,375^2 = 130,9844$$

$$\overline{Y} = \frac{1100}{8} = 137,5 \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{152706}{8} - 137,5^2 = 182,0$$

$$s_{XY} = \frac{58655}{8} - 52,375 \cdot 137,5 = 130,3125$$

Con estos resultados se estiman los coeficientes de la ecuación de regresión:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_x^2} = \frac{130,3125}{130,9844} = 0,9949 \quad ; \quad a = \overline{Y} - b\overline{X} = 137,5 - 0,9949 \cdot 52,375 = 85,3937$$

De manera que la ecuación de la recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = 85,3937 + 0,9949x$.

b) Utilizando la ecuación estimada en al apartado anterior, el valor esperado de la tensión arterial sistólica para una persona de 50 años es :

$$y(50) = 85,3937 + 0,9949 \cdot 50 = 135,14$$

50. En la tabla se presentan los datos de la renta per cápita del año 2012 en miles de dólares (*Y*) y el porcentaje del PIB en el año 2009 destinado a educación (*X*) en diez países de la Unión Europea

X	5,0	5,8	5,9	4,7	5,1	5,6	6,5	8,7	6,8	7,3
Y	30,2	20,7	42,8	33,9	42,6	38,9	45,9	57,6	47,5	57,9

a) Escribe la recta de regresión de *Y* sobre *X*. ¿Qué porcentaje de la variabilidad de la renta per cápita se explica por el gasto en educación?

b) ¿Qué nivel de renta per cápita en 2012 se puede estimar que tendría un país que en 2009 invirtió en educación el 6 % de su PIB? Valora la fiabilidad de la predicción.

a) Se construye la tabla siguiente para facilitar la realización de los cálculos:

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
5,0	30,2	25,0	909,0	150,75
5,8	20,7	33,6	426,9	119,8338
5,9	42,8	34,8	1831,2	252,4787
4,7	33,9	22,1	1152,1	159,5274
5,1	42,6	26,0	1816,9	217,3875
5,6	38,9	31,4	1512,5	217,7896
6,5	45,9	42,3	2102,5	298,0445
8,7	57,6	75,7	3314,5	500,8764
6,8	47,5	46,2	2255,9	322,9728
7,3	57,9	53,3	3358,0	423,0204
61,4	417,9	390,4	18679,5	2662,7

Se calculan las medias y varianzas marginales y la covarianza de las variables *X* e *Y*:

$$\overline{X} = \frac{61,4}{10} = 6,14 \text{ \% del PIB a educación} \quad ; \quad s_X^2 = \frac{390,4}{10} - 6,14^2 = 1,3384$$

$$\overline{Y} = \frac{418}{10} = 41,8 \text{ miles de euros} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{188682,78}{10} - 41,8^2 = 121,0380$$

$$s_{XY} = \frac{2663,15}{10} - 41,8 \cdot 6,14 = 9,6630$$

Con lo que los coeficientes de la ecuación de regresión de *Y* sobre *X* son:

$$b = \frac{9,6630}{1,3384} = 7,22 \qquad a = 41,8 - 7,22 \cdot 6,14 = -2,53$$

Luego, la ecuación de la recta de regresión del precio del alquiler (*Y*) en función del número de habitaciones (*X*) es: $y = -2,5297 + 7,2198x$.

El coeficiente de determinación es: $R^2 = \frac{s_{XY}}{s_Y^2 s_X^2} = \frac{9,6630}{121,0380 \cdot 1,3384} = 0,5764$.

Es decir, el 57,64 % de la variabilidad de la renta per cápita viene explicada por el porcentaje del PIB que se destina a educación.

b) Como $x = 6$, se encuentra dentro del rango de observaciones de la variable *X*, basta con sustituir $x = 6$ en la ecuación obtenida en el aparatado b) para estimar el valor de *Y*:

$$y(6) = -2,5297 + 7,2198 \cdot 6 = 40,789 \text{ miles de euros}$$

51. La evolución de los porcentajes de estudiantes en las áreas de Ciencias Sociales (*Y*) y de Ciencias de la Salud y Servicios Sociales (*X*), desde 2002 hasta 2009, viene recogida en la tabla siguiente.

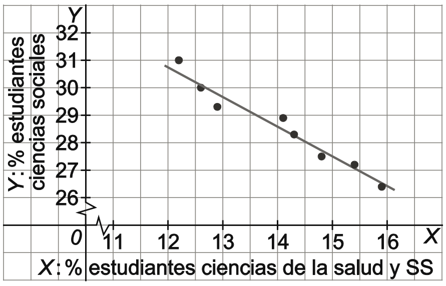
Año	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
X	12,2	12,6	12,9	14,1	14,3	14,8	15,4	15,9
Y	31	30	29,3	28,9	28,3	27,5	27,2	26,4

a) Representa la nube de puntos y comenta la relación que observas entre las dos variables.

b) Escribe la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

c) Calcula el coeficiente de correlación y el Error Cuadrático Medio y valora los resultados.

a) Se representa la nube de puntos junto con la recta de regresión calculada en el apartado b)
Se observa una fuerte relación lineal con tendencia decreciente.



b)

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
12,2	31,0	148,84	961,00	378,20
12,6	30,0	158,76	900,00	378,00
12,9	29,3	166,41	858,49	377,97
14,1	28,9	198,81	835,21	407,49
14,3	28,3	204,49	800,89	404,69
14,8	27,5	219,04	756,25	407,00
15,4	27,2	237,16	739,84	418,88
15,9	26,4	252,81	696,96	419,76
112,2	228,6	1586,32	6548,64	3191,99

$$\overline{X} = \frac{112,2}{8} = 14,025 \text{ \% de CC de la salud} \quad ; \quad s_X^2 = \frac{1586,32}{8} - 14,025^2 = 1,5894$$

$$\overline{Y} = \frac{228,6}{8} = 28,575 \text{ \% de CCSS} \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{6548,64}{8} - 28,575^2 = 2,0494$$

$$s_{XY} = \frac{3191,99}{8} - 28,575 \cdot 14,025 = -1,7656$$

De modo que los coeficientes de la recta de regresión de *Y* sobre *X* son:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{-1,7656}{1,5894} = -1,1109 \quad ; \quad a = \overline{Y} - b\overline{X} = 28,575 + 1,1109 \cdot 14,025 = 44,1553$$

La recta de regresión del porcentaje de estudiantes de Ciencias Sociales (*Y*) en función del porcentaje de estudiantes de Ciencias de la Salud y Servicios Sociales (*X*) es:

$$y = 44,1553 - 1,1109x$$

Con los resultado obtenidos en el apartado b), se tiene que el coeficiente de correlación y el error cuadrático medio son:

$$r = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} = \frac{-1,7656}{\sqrt{1,5859 \cdot 2,0494}} = -0,9783$$

$$\text{ECM} = s_Y^2\left(1 - \frac{s_{XY}^2}{s_X^2 s_Y^2}\right) = 2,0494\left(1 - \frac{1,7656^2}{1,5859 \cdot 2,0494}\right) = 0,0880$$

El valor del coeficiente de correlación, próximo a –1, indica una fuerte relación inversa entre ambas variables y que el ajuste lineal es muy bueno, confirmado por el pequeño valor del error cuadrático medio.

52. La tabla siguiente muestra la distribución de la situación profesional (*X*) y el nivel de estudios (*Y*) en una determinada población.

		Nivel de estudios		
		Básicos	Medios	Altos
Situación profesional (*X*)	Empleado fijo	14	22	18
	Empleado temporal	18	31	21
	Autónomo	12	8	10
	Sin empleo	23	14	9

a) Escribe las distribuciones marginales de frecuencias absolutas y relativas.

b) Halla la distribución de la situación profesional *X*, condicionada al nivel de estudios altos.

c) ¿Son independientes estas variables?

a) Las tablas con las distribuciones de frecuencias marginales son:

	X_i	f_i	h_i
Situación profesional	Empleado fijo	54	0,27
	Empleado temporal	70	0,35
	Autónomo	30	0,15
	Sin empleo	46	0,23
		200	1

	Y_j	f_j	h_j
Nivel de estudios	Básicos	67	0,335
	Medios	75	0,375
	Altos	58	0,29
		200	1

b) La tabla para la distribución de la situación profesional *X*, condicionada al nivel de estudios altos es:

$X\|_{Y=\text{altos}}$	$f_i\|_{Y=\text{altos}}$	$h_i\|_{Y=\text{altos}}$
X_1 = Empleado fijo	18	0,3103
X_2 = Empleado temporal	21	0,3621
X_3 = Autónomo	10	0,1724
X_4 = Sin empleo	9	0,1552
	58	1

c) Para comprobar que NO son independientes basta encontrar un caso en el que $h_{ij} \neq h_i \cdot h_j$, por ejemplo:

$$h_{X=\text{fijo},\,Y=\text{altos}} = 0,3103 \neq h_{X=\text{fijo}}\, h_{Y=\text{altos}} = 0,27 \cdot 0,29 = 0,0783$$

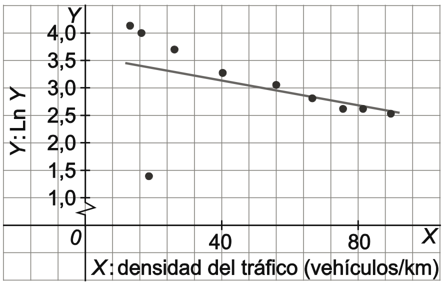
53. Cuantos más coches circulan por una carretera, menor es la velocidad del tráfico. Con el fin de mejorar el transporte, a la entrada de una ciudad se ha tomado una muestra de 10 observaciones de la densidad del tráfico (*X*, n.º de vehículos por km) y de la velocidad en ese instante (*Y*, km/h).

X	13	75,6	81,4	89,6	40,2	26,1	16,5	18,6	56	66,6
Y	62	13,7	13,8	12,6	26,3	40	54,7	4	21,2	16,6

a) Dibuja la nube de puntos *y* calcula el coeficiente de correlación.

b) Transforma la variable *Y* en $Z = \ln Y$. Dibuja la nube de puntos, calcula en nuevo coeficiente de correlación.

c) Escribe la recta de regresión de *Z* sobre *X*.



a) Se representa la nube de puntos con los datos del enunciado. Se observa una relación de tipo inverso, pero también se aprecia una fuerte relación funcional que no parece lineal.

Para determinar el coeficiente de correlación se construye la tabla ampliada:

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
13	62	169	3844	806
75,6	13,7	5715,36	187,69	1035,72
81,4	13,8	6625,96	190,44	1123,32
89,6	12,6	8028,16	158,76	1128,96
40,2	26,3	1616,04	691,69	1057,26
26,1	40	681,21	1600	1044
16,5	54,7	272,25	2992,09	902,55
18,6	4	345,96	16	74,4
56	21,2	3136	449,44	1187,2
66,6	16,6	4435,56	275,56	1105,56
483,6	264,9	31 025,5	10 405,67	9464,97

$$\overline{X} = \frac{483,6}{10} = 48,36 \ ; \ \overline{Y} = \frac{264,9}{10} = 26,49$$

$$s_X^2 = \frac{31025,5}{10} - 48,36^2 = 763,86$$

$$s_Y^2 = \frac{10405,67}{10} - 26,49^2 = 338,847$$

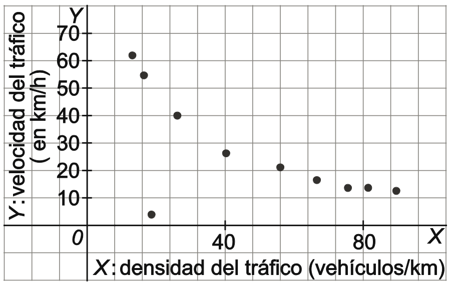
$$s_{XY} = \frac{9464}{10} - 26,49 \cdot 48,36 = -334,656$$

El coeficiente de correlación lineal es: $r = \dfrac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} = \dfrac{-334,656}{\sqrt{763,86 \cdot 338,847}} = 0,6578$.

Informa de una correlación lineal moderada – alta entre las variables *X* e *Y*.

b) Si hacemos la transformación Z =Ln *Y* la distribución que obtenemos es la siguiente:

x_j	z_i=Ln(y_j)	x_j^2	z_j^2	x_jz_j
13	4,13	169	17,03	53,65
75,6	2,62	5715,36	6,85	197,88
81,4	2,62	6625,96	6,89	213,65
89,6	2,53	8028,16	6,42	227,02
40,2	3,27	1616,04	10,69	131,44
26,1	3,69	681,21	13,61	96,28
16,5	4,00	272,25	16,01	66,03
18,6	1,39	345,96	1,92	25,79
56	3,05	3136	9,33	171,02
66,6	2,81	4435,56	7,89	187,11
483,60	30,11	31 025,50	96,65	1369,86



$$\overline{Z} = \frac{30,11}{10} 3,011$$

$$s_z^2 = \frac{96,65}{10} - 3,011^2 = 0,5999 \ ; \ s_{xz} = \frac{1369,86}{10} - 3,011 \cdot 48,36 = -8,6260 \ ; \ r = \frac{s_{xz}}{\sqrt{s_x^2 s_z^2}} = \frac{-8,6260}{\sqrt{763,86 \cdot 0,5999}} = 0,1638$$

c) Los coeficientes de la recta de regresión son:

$$b = \frac{s_{xz}}{s_x^2} = \frac{-8,6260}{763,86} = -0,0113 ; a = \overline{Z} - b\overline{X} = 3,011 + 0,0113 \cdot 48,36 = 3,5571$$

De modo que la recta de regresión de Z sobre *X* es : $z = 3,5571 - 0,0113x$.

ENTORNO MATEMÁTICO

Si eres chico y joven, tienes más probabilidad de sufrir un accidente

Las compañías aseguradoras de autos cobran primas más elevadas por las pólizas de seguros que incluyen conductores menores de 25 años, pues afirman que estos tienen más riesgo de sufrir un accidente que el resto. Además, por la misma razón, los varones pagan más que las mujeres. Esto es lo que encontraron Nicolás y Mercedes cuando, recién sacado el carnet de conducir, fueron a contratar el seguro para su coche. Indignados, decidieron comprobar si la información era cierta. Tras buscar información en la Dirección General de Tráfico (DGT) obtuvieron los siguientes datos del anuario estadístico de accidentes correspondiente a 2013.

Ayuda a Nicolás y Mercedes y, usando una hoja de cálculo, responde:

a) ¿Se puede establecer una relación lineal entre la edad del conductor y el número de accidentes?

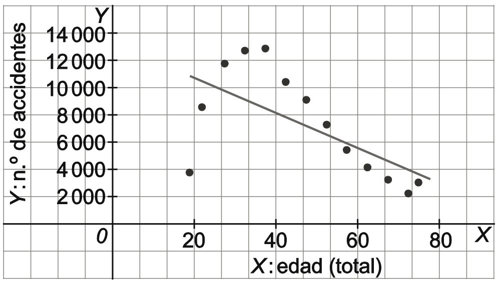
b) Si el conductor es varón, ¿esa relación es distinta que cuando es mujer?

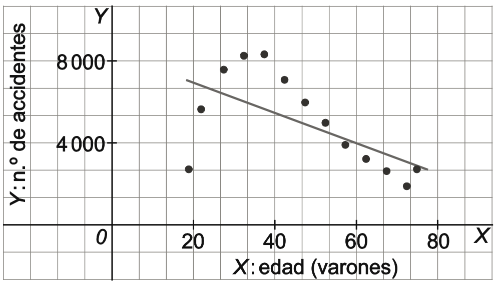
Haz los cálculos para el total de conductores y luego para hombres y mujeres por separado. ¿Cuáles son las conclusiones? ¿Están acertadas las compañías de seguros?

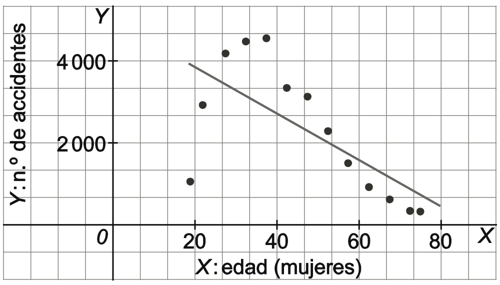
A partir de la tabla de datos podemos dibujar las nubes de puntos correspondientes al total de conductores, a los conductores varones y a las conductoras.

	Varones		total	Mujeres		Total	TOTAL
Edad (años)	En carretera	En zona Urbana	Varones	En carretera	En zona Urbana	Mujeres	
18 a 20	1277	1442	2719	530	532	1062	3781
21 a 24	2529	3110	5639	1460	1467	2927	8566
25 a 29	3429	4151	7580	2061	2128	4189	11769
30 a 34	3663	4586	8249	2193	2281	4474	12723
35 a 39	3816	4506	8322	2150	2408	4558	12880
40 a 44	3228	3849	7077	1246	2095	3341	10418
45 a 49	2680	3299	5979	1400	1738	3138	9117
50 a 54	2255	2736	4991	1024	1274	2298	7289
55 a 59	1743	2175	3918	687	822	1509	5427
60 a 64	1498	1724	3222	413	513	926	4148
65 a 69	1323	1310	2633	283	344	627	3260
70 a 74	993	895	1888	162	184	346	2234
75 ó más	1470	1240	2710	140	191	331	3041
TOTALES	29 904	35 023	64 927	13 749	15 977	29 726	94 653

En los tres casos se observa una dependencia similar del número de accidentes en función de la edad.
Llama la atención el hecho de que entre los 20 y los 30 años la relación es de tipo directo mientras que entre los 40 y los 70 años la relación es de tipo inverso.







Los resultados globales obtenidos en cada caso son:

Considerando todos los conductores:

$\overline{X} = 47,15$; $\overline{Y} = 7281$; $s_{xy} = -576480$; $R^2 = 0,4139$; $r = -0,6434$

recta de regresión: $y = -130 - 13412x$

Considerando solo a los varones:

$\overline{X} = 47,15$; $\overline{Y} = 4994,4$; $s_{xy} = -327411$; $R^2 = 0,3778$; $r = -0,6147$

recta de regresión: $y = 8477 - 74x$

Considerando solo a las mujeres:

$\overline{X} = 47,2$; $\overline{Y} = 2286,6$; $s_{xy} = -249069,6$; $R^2 = 0,4647$; $r = -0,6817$

recta de regresión: $y = 4936 - 56x$

En los tres casos se observa una correlación moderada entre la edad y el número de accidentes considerando todo el rango de edades si bien es mayor en el caso de las mujeres.
Si hacemos el estudio diferenciando dos rangos, uno entre 18 y 40 y otro entre 40 y 80 los resultados son notablemente diferentes:

Entre 18 y 40 años:

Considerando todos los conductores:

$R^2 = 0,7789$; $r = 0,8826$; recta de regresión: $y = -2837,2 + 466,5x$

Considerando solo a los varones:

$R^2 = 0,7860$; $r = 0,8865$; recta de regresión: $y = -1404 + 288,5x$

Considerando solo a las mujeres:

$R^2 = 0,7672$; $r = 0,8759$; recta de regresión: $y = -1433 + 178x$

De esta forma, se detecta una mayor correlación, así como una mayor pendiente en el caso de los varones que en el de las mujeres.

A la luz de estos datos, parece que las compañías no están muy acertadas ya que no es en el rango de edades menores donde se concentran los accidentes sino en la población de mediana edad.

En el siguiente rango de edades, la correlación negativa entre ambas variables asciende hasta el 98,7% en el caso general, 99,7 % en el de los varones y hasta el 98,7 % en el caso de las mujeres.

¿Cuándo nos vamos de viaje?

Aunque los padres de Nicolás y Mercedes no son muy dados a este tipo de premios, sus abuelos han decidido premiarles con un viaje por haber terminado con una buena media académica el Bachillerato.

Los chicos han decidido viajar a Roma, y tienen permiso para hacerlo al mes que deseen durante su primer año de carrera siempre y cuando no se salten ninguna clase.

Con el propósito de asegurarse unas vacaciones con el mejor tiempo posible, ya que no están dispuestos a asarse de calor ni tampoco a estar todo el día con el paraguas, han estado consultando el servicio meteorológico italiano y han obtenido una tabla con la relación entre temperaturas (máxima y mínima de cada mes) y la cantidad de lluvia caída (precipitación) en Roma.

Mientras buscaban la información encontraron la siguiente afirmación: "cuanto más frío es un mes, más lluvioso resulta, y que cuanto más caluroso es el mes, más seco resulta".

Con ayuda de la tabla, responde:

a) ¿Es cierta la afirmación en Roma?

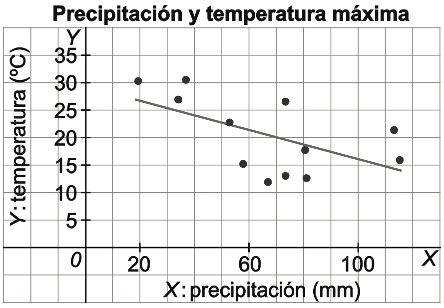
b) ¿Se puede establecer una relación lineal fiable entre la temperatura máxima (o mínima) y la cantidad de lluvia caída en un mes?

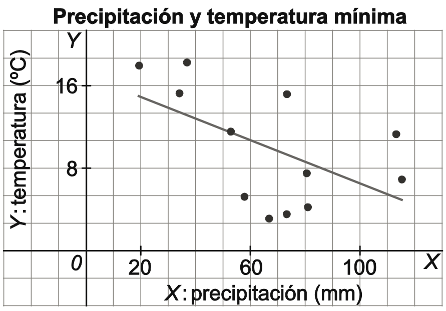
c) ¿Qué porcentaje de la variabilidad observada en las temperaturas a lo largo de un año es explicada por la cantidad de precipitaciones?

d) Busca datos y prueba con una tabla similar en tu ciudad o región.

Para responder a estas preguntas, se puede analizar la relación entre las precipitaciones a lo largo de los doce meses y la temperatura máxima (o mínima) observada en cada uno de esos doce meses. Empezamos por la temperatura máxima:

A la derecha se muestra la gráfica de dispersión de la variable bidimensional (precipitación total; temperatura diaria máxima), junto con la ecuación de la recta de regresión de la temperatura máxima respecto a la precipitación total y se incluye el coeficiente de determinación. Los cálculos se dejan para el estudiante.
Puede observarse una tendencia decreciente, a más precipitación, menor temperatura máxima, aunque no es una relación fuerte.
El coeficiente de determinación señala que el 33,8% de la variabilidad observada en las temperaturas máximas viene explicada por las precipitaciones.





La relación (en Roma) entre las precipitaciones y las temperaturas mínimas mensuales, se muestra en la gráfica de la izquierda.
Se observa que en este caso, la relación también muestra una tendencia decreciente, aún más débil que en el caso anterior, con una coeficiente de determinación que indica que apenas el 29,56% de la variabilidad observada en las temperaturas mínimas mensuales viene explicada por las precipitaciones.

Dada la correlación existente (débil) las ecuaciones de regresión obtenidas no deberían utilizarse para realizar predicciones, y si se usan para este fin, debe hacerse con precaución dada su baja fiabilidad.

AUTOEVALUACIÓN

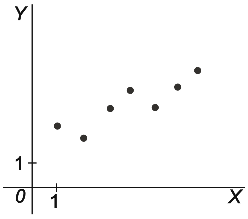
Comprueba qué has aprendido

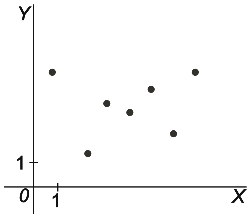
1. El coeficiente de correlación de una variable estadística bidimensional es $r = -0{,}8$ y las medias aritméticas de cada una de las distribuciones marginales son $\overline{x} = 1$ e $\overline{y} = 3$ y=3. Razona cuál de las siguientes cuatro rectas puede ser la recta de regresión de *Y* sobre *X*:

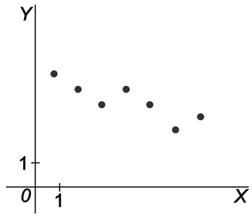
a) $y = -x + 6$ **b)** $y = 2x + 1$ **c)** $y = x + 2$ **d)** $y = -3x + 6$

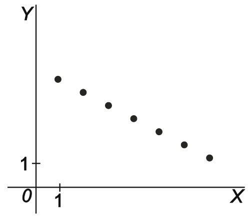
La recta de regresión debe contener el punto (1, 3), por lo tanto queda descartada la recta del apartado a). Las otras tres sí contienen este punto.
El valor negativo del coeficiente de correlación indica que la relación entre las variables es inversa, es decir, que si una crece la otra decrece. Esta situación solo describe la ecuación del apartado d) $y = -3x + 6$.

2. Asigna razonadamente a estos diagramas de dispersión el coeficiente de correlación adecuado.

I)


II)


III)


IV)


a) $r = -0{,}885$ **b)** $r = -1$ **c)** $r = 0{,}885$ **d)** $r = 0{,}119$

I) Correlación positiva: se asigna c).
II) Correlación próxima a cero: se asigna d).
III) correlación negativa: se asigna a).
IV) correlación negativa, buen ajuste lineal: se asigna b).

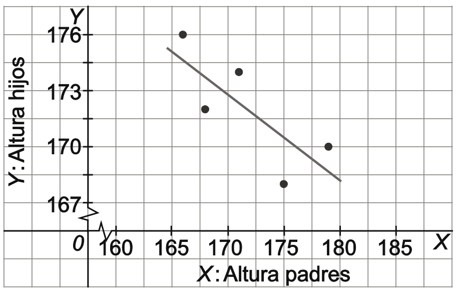
3. Las alturas de 5 padres (*X*) y las de sus hijos (*Y*) se recogen en la tabla siguiente:

X	171	168	175	166	179
Y	174	172	168	176	170

a) Representa gráficamente la nube de puntos. Cuantifica el tipo de relación entre las variables.

b) Escribe la recta de regresión de *Y* (estatura hijos) sobre *X* (estatura padres) y calcula el error cuadrático medio, explicando su significado.

a) La nube de puntos junto con la recta de regresión del apartado b) se muestra en el gráfico de la derecha. Se observa una relación inversa entre las dos variables.



x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
171	174	29 241	30 276	29 754
168	172	28 224	29 584	28 896
175	168	30 625	28 224	29 400
166	176	27 556	30 976	29 216
179	170	32 041	28 900	30 430
859	860	147 687	147 960	147 696

$$\overline{X} = \frac{859}{5} = 171{,}8 \quad ; \quad s_X^2 = \frac{147687}{5} - 171{,}8^2 = 22{,}16 \quad ; \quad \overline{Y} = \frac{860}{5} = 172 \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{147960}{5} - 172^2 = 8$$

$$s_{XY} = \frac{147696}{5} - 171{,}8 \cdot 172 = -10{,}4 \quad ; \quad r = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} = \frac{-10{,}4}{\sqrt{22{,}16 \cdot 8}} = -0{,}7811$$

b) $\text{ECM} = s_Y^2\left(1 - R^2\right) = 8 \cdot \left(1 - (-0{,}7811)^2\right) = 3{,}119$

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{-10{,}4}{22{,}16} = -0{,}4693 \ ; \ a = \overline{Y} - b\overline{X} = 172 + 0{,}4693 \cdot 171{,}8 = 252{,}626$$

La recta de regresión de *Y* sobre *X* es: $y = 14871{,}05 - 0{,}4915x$. Puede considerarse una buena estimación.

4. La distribución de la variable bidimensional (X,Y) viene dada en la siguiente tabla:

X	6	3	4	1	7	9
Y	4	6	5	5	2	7

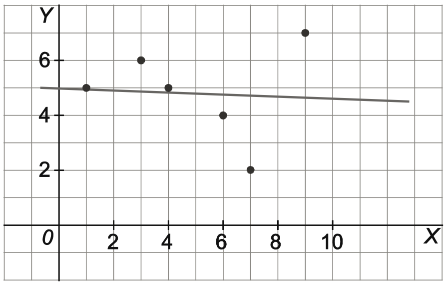
a) Representa gráficamente la distribución.

b) Halla la recta de regresión de Y sobre X.

c) ¿Qué porcentaje de la variabilidad de la variable Y es explicada por el modelo de regresión?

d) Si $X = 5$, ¿cuál es el valor esperado de Y? ¿Y si $X = 15$? Comenta la fiabilidad de ambas predicciones.

a) La nube de puntos junto con la recta de regresión del apartado b) es la del margen, que resulta ser aparentemente muy dispersa y con escasa correlación.



b)

x_j	y_j	x_j^2	y_j^2	x_jy_j
6	4	36	16	24
3	6	9	36	18
4	5	16	25	20
1	5	1	25	5
7	2	49	4	14
9	7	81	49	63
30	29	192	155	144

$$\overline{X} = \frac{30}{6} = 5 \quad ; \quad s_X^2 = \frac{192}{6} - 5^2 = 7$$

$$\overline{Y} = \frac{29}{6} = 4,83 \quad ; \quad s_Y^2 = \frac{139}{6} - 4,83^2 = 2,5$$

$$s_{XY} = \frac{144}{6} - 5 \cdot 4,83 = -0,15$$

Los coeficientes de la recta de regresión son:

$$b = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{-0,15}{7} = -0,0214 \quad ; \quad a = \overline{Y} - b\overline{X} = 4,83 + 0,0214 \cdot 5 = 4,9371$$

La recta de regresión de Y sobre X es: $y = 4,9371 - 0,0214x$.

c) Los coeficientes de correlación y de determinación son:

$$r = \frac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} = \frac{-0,15}{\sqrt{7 \cdot 2,5}} = -0,0359 \Rightarrow R^2 = (-0,0359)^2 = 0,0013$$

Lo que indica que tan solo el 0,13 % de la variabilidad de Y está explicada por la recta de regresión.

d) Para el valor $X = 5$, el valor esperado de Y a través de la recta de regresión, se calcula:
$y(5) = 4,9371 - 0,0214 \cdot 5 = 4,8301$.
La fiabilidad de esta estimación es escasa en virtud del valor del coeficiente de correlación.
En el caso de $X = 15$ se trata de un valor que está fuera del rango del estudio, luego la fiabilidad del cálculo es nula.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. En la recta de regresión de *Y* sobre *X*, se ha obtenido un coeficiente de determinación $R^2 = 0{,}82$, entonces:

A. La relación entre *X* e *Y* es directa.

B. La pendiente de la recta de regresión es 0,82.

C. El 18 % de la variabilidad de *Y* queda sin explicar por el modelo de regresión.

D. Con este dato, no hay relación entre *X* e *Y*.

La respuesta correcta es la C: solo el 82 % de la variabilidad de *Y* queda explicado por el modelo de regresión.

2. Si los datos de una variable estadística bidimensional se multiplican por 3, el coeficiente de correlación:

A. Queda multiplicado por 3.

B. Es igual al anterior elevado al cubo.

C. Es el mismo.

D. Queda dividido por 3.

La respuesta correcta es la C, ya que $r_{3X3Y} = \dfrac{s_{3X3Y}}{\sqrt{s^2_{3X}s^2_{3Y}}} = \dfrac{3^2 s_{XY}}{\sqrt{3^2 s_X^2 3^2 s_Y^2}} = \dfrac{\cancel{3^2} s_{XY}}{\cancel{3^2}\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} = \dfrac{s_{XY}}{\sqrt{s_X^2 s_Y^2}} = r_{XY}$.

3. El 81 % de la variabilidad de *Y* viene explicado por el modelo de regresión. Si la media de la variable *X* es 1 y la recta de regresión de *Y* sobre *X* es $y = 2{,}5 - 1{,}4x$, entonces:

A. $\overline{Y} = 2{,}5,\ r = -0{,}9$

B. $\overline{Y} = 2{,}5,\ r = 0{,}9$

C. $\overline{Y} = 1{,}1,\ r = -0{,}9$

D. $\overline{Y} = 1{,}1,\ r = 0{,}9$

La respuesta correcta es la C. Por ser $R^2 = 0{,}81$ y tener pendiente negativa se tiene que $r = -\sqrt{0{,}81} = -0{,}9$, luego podrían ser A o C. Por otra parte, $\overline{Y} = 2{,}5 - 1{,}4 \cdot 1 = 1{,}1$.

4. De la distribución (*X*,*Y*) se sabe que $S_X = 2$, $S_{XY} = -2$, $\overline{X} = 8$, $\overline{Y} = 10$. Entonces la recta de regresión de *Y* sobre *X* es:

A. $y = 10 - 2x$ **B.** $y = 14 - 0{,}5x$ **C.** $y = 10 + 0{,}5x$ **D.** $y = 8 - 2x$

La respuesta correcta es la B: es suficiente calcular $b = \dfrac{s_{XY}}{s_X^2} = \dfrac{-2}{2^2}$; $a = \overline{Y} - b\overline{X} = 10 + 0{,}5 \cdot 8 = 14$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

5. **De la variable (X, Y) se sabe que $s_{XY} = 2,5$ y que $R^2 = 0,75$. Si $Z = 3X$ y $T = Y + 3$, entonces:**

A. $s_{ZT} = s_{XY} + 3$

B. $R^2_{ZT} = R^2_{XY}$

C. $s_{ZT} = 3s_{XY}$

D. $R^2_{ZT} = 9R^2_{XY}$

Las respuestas correctas son B. y C.

6. **Con el modelo de regresión lineal de Y sobre X, se pueden realizar predicciones razonables sobre Y.**

A. En cualquier caso.

B. Si el valor dado a X se encuentra cerca de la media de X.

C. Solo para valores pequeños de X.

D. Si el valor de X está en el rango de valores de la muestra.

La respuesta correcta es la D, siempre que el coeficiente de correlación sea próximo a 1 o –1

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones

7. **1. La recta de regresión es $y = 2 - x$.** **2. Las medias marginales son $\bar{X} = 1$ e $\bar{Y} = 1$.**

A. $1 \Rightarrow 2$

B. $2 \Rightarrow 1$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

D. $1 \not\Leftrightarrow 2$

La relación correcta es la D. A no es cierta porque con esta recta de regresión las medias de X e Y podrían ser, por ejemplo, 0 y 2. B no es cierta porque con esas medias, la recta de regresión podría ser, por ejemplo $y = x$. Por lo anterior C no puede ser cierta.

12 Combinatoria y probabilidad.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. y 2. Ejercicios resueltos.

3. El dominó es un juego formado por 28 fichas, que combina los puntos 0 (blanca), 1, 2, 3, 4, 5 y 6 de todas las formas posibles (28), con dobles incluidos. Se elige una ficha al azar y se consideran los sucesos *A* = "obtener ficha doble", *B* = "Obtener ficha que sume par" y *C* = "los dos números de la ficha son primos"
Describe el espacio muestral y los sucesos *A*, *B*, y *C* y sus contrarios.

El espacio muestral está compuesto por los pares siguientes:

$$E=\left\{\begin{matrix}(6,6);(0,0);(0,1);(0,2);(0,3);(0,4);(0,5);(0,6);(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6)\\(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,4);(4,5);(4,6);(5,5);(5,6)\end{matrix}\right\}$$

Y los sucesos *A*, *B* y *C* y sus respectivos contrarios están formados por los siguientes sucesos elementales:

$$A=\{(0,0);(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$$

$$\overline{A}=\left\{\begin{matrix}(0,1);(0,2);(0,3);(0,4);(0,5);(0,6);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6)\\(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);(3,4);(3,5);(3,6);(4,5);(4,6);(5,6)\end{matrix}\right\}$$

$$B=\{(0,0);(0,2);(0,4);(0,6);(1,1);(1,3);(1,5);(2,2);(2,4);(2,6);(3,3);(3,5);(4,4);(4,6);(5,5);(6,6)\}$$

$$\overline{B}=\{(0,1);(0,3);(0,5);(1,2);(1,4);(1,6);(2,3);(2,5);(3,4);(3,6);(4,5);(5,6)\}$$

$$C=\{(2,2);(2,3);(2,5);(3,3);(3,5);(5,5)\}$$

$$\overline{C}=\left\{\begin{matrix}(6,6);(0,0);(0,1);(0,2);(0,3);(0,4);(0,5);(0,6);(1,1);(1,2);(1,3);\\(1,4);(1,5);(1,6);(2,4);2,6);(3,4);(3,6);(4,4);(4,5);(4,6);(5,6)\end{matrix}\right\}$$

4. Un estudio ha recogido la evolución de IBEX 35 durante el mes de diciembre de 2014. Elegido un día al azar, se anota el índice. Se consideran los sucesos *A* = "el IBEX está por encima de los 10200 puntos" *B* "el IBEX está por encima de los 10100 puntos pero por debajo de los 10700".

Describe el espacio muestral y los sucesos *A*, *B* y sus contrarios.

En este caso el espacio muestral es la semirrecta [0, infinito).

El suceso *A* y su contrario son:

$$A=(10\,200,+\infty);\ \overline{A}=[0,10\,200]$$

El suceso *B* y su contrario son:

$$B=(10\,100,10\,700);\ \overline{B}=[0,10\,100]\cup[10\,700,+\infty)$$

5. Ejercicio resuelto.

6. **Se lanza un dado blanco y otro verde. Se consideran los sucesos A = "la suma de puntos es 6", B = "obtener el mismo resultado en ambos dados" y C = "obtener par en el dado verde".**

a) Describe el espacio muestral.

b) Escribe los sucesos $\overline{A}, A\cup C, \overline{A}\cap B, (B\cup C)\cap A$ y $(A\cap B)-C$.

a) El espacio muestral viene dado por pares de números del 1 al 6, el primer número de la pareja representa el resultado del dado blanco y el segundo número el resultado del dado verde:

$$E=\left\{\begin{matrix}(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);\\(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6);\\(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6)\end{matrix}\right\}$$

Se describen ahora los sucesos A, B y C.

$$A=\{(1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)\}$$
$$B=\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$$
$$C=\left\{\begin{matrix}(1,2);(1,4);(1,6);(2,2);(2,4);(2,6);(3,2);(3,4);(3,6);\\(4,2);(4,4);(4,6);(5,2);(5,4);(5,6);(6,2);(6,4);(6,6)\end{matrix}\right\}$$

b) Ahora tenemos que:

$$\overline{A}=\left\{\begin{matrix}(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,5);(2,6);\\(3,1);(3,2);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6);\\(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6)\end{matrix}\right\}$$

$$A\cup C=\left\{\begin{matrix}(1,2);(1,4);(1,5);(1,6);(2,2);(2,4);(2,6);(3,2);(3,3);(3,4);\\(3,6);(4,2);(4,4);(4,6);(5,2);(5,4);(5,6);(6,2);(6,4);(6,6)\end{matrix}\right\}$$

$$(A\cap B)=\{(1,1);(2,2);(4,4);(5,5);(6,6)\}$$

$$(B\cup C)\cap A=\{(2,4);(3,3);(4,2)\}$$

$$(A\cap B)-C=\{(3,3)\}$$

7. **Un estudiante está dudando si cursar estudios de grado (*A*), hacer un ciclo formativo de grado (*B*) o trabajar (*C*). Expresa con palabras $A\cup B$, $\overline{A}\cap(B\cup C)$, $A\cap\overline{C}$ y $A\cup(B\cap C)$.**

$A\cup B$: Cursar estudios de grado, hacer un ciclo o tal vez ambas.

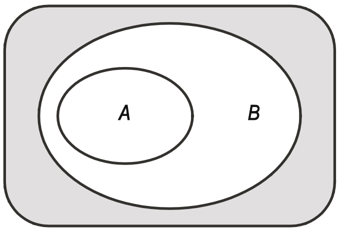
$\overline{A}\cap(B\cup C)$: No cursar estudios de grado y empezar a la vez a trabajar y a hacer un ciclo formativo.

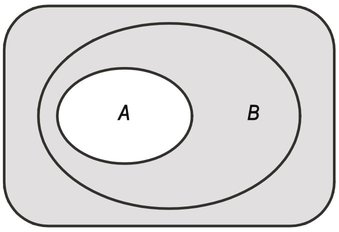
$A\cap\overline{C}$: Cursar estudios de grado y no trabajar.

$A\cup(B\cap C)$: Hacer un ciclo formativo a la vez que trabajar o cursar estudios de grado. Es posible hacer las tres cosas.

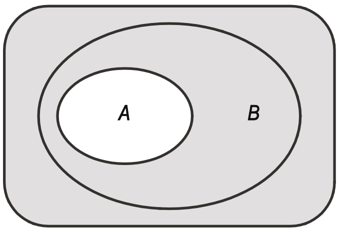
8. Prueba, mediante diagramas de Venn, que si *A* está contenido en *B*, entonces $\overline{A}$ contiene a $\overline{B}$ y $\overline{A}\cap B$ está contenido en $\overline{A\cap B}$.

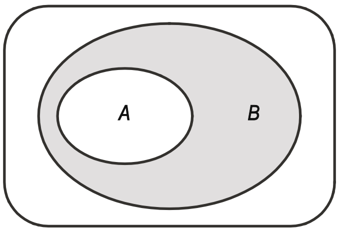
En efecto, si *A* está contenido en *B*, como se ve a continuación en el diagrama de la izquierda, entonces puede verse que el contrario de *B* está contenido en el contrario de *A*





Y, además, si *A* está contenido en *B*, $\overline{A}\cap B\subset\overline{A\cap B}$, como se ve en los dos diagramas siguientes:





9. y 10. Ejercicios resueltos.

11. Usando un ordenador se ha simulado el lanzamiento de dos monedas. La tabla muestra las frecuencias absolutas del suceso *A* = "obtener cara en una moneda y cruz en la otra".

n	10	25	50	100	250	500	750	1000
f(*A*)	3	11	26	55	128	252	373	502

Completa la tabla con las frecuencias relativas y asigna un valor aproximado a la probabilidad de *A*.

La tabla con las frecuencias relativas es:

n	10	25	50	100	250	500	750	1000
f(*A*)	3	11	26	55	128	252	373	502
$h_n(A)$	0,3	0,44	0,52	0,55	0,512	0,504	0,497	0,502

A la vista de las frecuencias relativas, un valor aproximado para la probabilidad del suceso *A* = "obtener cara en una moneda y cruz en la otra" puede ser $P(A) = 0{,}5$.

12. En el último campeonato de Liga de fútbol, de cada cuatro partidos jugados en casa el equipo *A* ha ganado dos, ha empatado uno y ha perdido otro. Si el próximo partido lo debe disputar en casa, ¿Cuál será la probabilidad de que el equipo *A* gane? ¿Y de que empate o pierda?

Sea el suceso *A* = "el siguiente partido lo gana el equipo *A*". Como de los cuatro partidos disputados en casa ha ganado la mitad, entonces la probabilidad del suceso *A* será $P(A) = 0{,}5$.

Razonando de manera similar, la probabilidad del suceso *B* = "el siguiente partido el equipo *A* empata o pierde", es $P(B) = 0{,}5$

13. Si P es una probabilidad definida sobre $E=\{w_1,w_2,w_3,w_4\}$ con $P(w_2)=0{,}1$; $P(w_4)=3P(w_3)$; y $P(w_3)=2P(w_2)$. Halla $P(w_1)$.

De las relaciones dadas en el enunciado obtenemos que:
$P(w_2)=0{,}1$; $P(w_3)=2P(w_2)=2\cdot 0{,}1=0{,}2$; $P(w_4)=3P(w_3)=3\cdot 0{,}2=0{,}6$.
Por otro lado como los cuatro sucesos son incompatibles dos a dos y la unión de todos ellos es el suceso seguro tenemos:
$1=P(E)=P(w_1\cup w_2\cup w_3\cup w_4)=P(w_1)+P(w_2)+P(w_3)+P(w_4)=P(w_1)+0{,}1+0{,}2+0{,}6=P(w_1)+0{,}9$
De donde $P(w_1)=0{,}1$

14. y 15. Ejercicios resueltos.

16. Una bolsa contiene 3 bolas rojas, 2 blancas y 4 verdes. De la bola se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea roja.

b) No sea verde.

c) La bola sea blanca o verde.

Suponiendo que los resultados posibles son equiprobables, se puede aplicar la regla de Laplace.

a) Sea el suceso $R=$ "la bola extraída sea roja",

$$P(R)=\frac{\text{nº de bolas rojas}}{\text{nº total de bolas}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

b) Sea $V=$ "la bola extraída sea verde", en este caso, se debe calcular la probabilidad del contrario de V,

$$P(\overline{V})=P(\overline{V})=1-P(V)=1-\frac{\text{nº de bolas verdes}}{\text{nº total de bolas}}=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

c) En este caso se trata de suceso $B\cup V$, siendo $B=$ "la bola extraída es blanca" con lo que, como se trata de sucesos incompatibles:

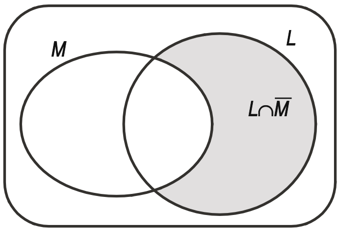
$$P(B\cup V)=P(B)+P(V)=\frac{2}{9}+\frac{4}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

17. La probabilidad de que un estudiante apruebe matemáticas es 0,7; y la de que apruebe lengua es 0,8. Si la probabilidad de que apruebe lengua y no matemáticas es 0,2; halla la probabilidad de que no apruebe ninguna materia.

Sean los sucesos $M=$ "el estudiante apruebe matemáticas" y $L=$ "el estudiante apruebe lengua".

Se tiene que: $P(M)=0{,}7$; $P(L)=0{,}8$; $P(L\cap\overline{M})=0{,}2$.

Gráficamente, este último conjunto lo podemos representar así:



Así se puede observar que: $P(L\cap M)=P(L)-P(L\cap\overline{M})=0{,}8-0{,}2=0{,}6$

De donde $P(L\cup M)=P(L)+P(M)-P(L\cap M)=0{,}8+0{,}7-0{,}6=0{,}9$

Por tanto, la probabilidad de que no apruebe ninguna materia es $P(\overline{L\cup M})=1-P(L\cup M)=1-0{,}9=0{,}1$.

18. Ejercicio interactivo.

19. y 20. Ejercicios resueltos.

21. Resuelve la siguiente ecuación $VR_{x,3} - VR_{x,2} = 2VR_{x,3} - 6x$.

La ecuación propuesta queda escrita como:

$VR_{x,3} - VR_{x,2} = 2VR_{x,3} - 6x \Rightarrow x^3 - x^2 = 2x^3 - 6x \Rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0$

Factorizando el polinomio, se obtiene:

$0 = x^3 + x^2 - 6x \Rightarrow 0 = x(x-2)(x+3)$

Por tanto las soluciones son: $x = -3$; $x = 0$; $x = 2$.

En términos combinatorios la solución 0 es trivial y la solución $x = -3$ no tiene sentido.

22. Se lanzan tres monedas y se observan los resultados obtenidos. Calcula la probabilidad de obtener

a) Tres caras.

b) Al menos dos caras

El número de resultados posibles equiprobables del experimento “lanzar tres monedas” es $VR_{2,3} = 2^3 = 8$.
Y su espacio muestral, si *C* representa “cara” y *X* “cruz” $E = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX\}$

a) En el caso del suceso A = “Obtener tres caras” el número de resultados favorables es 1, de donde $P(A) = \frac{1}{8}$.

b) En el caso del suceso B = “Obtener al menos dos caras” el número de resultados favorables es 4 (obtener 2 o tres caras), de donde $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

23. ¿Cuántas palabras, tengan o no sentido, de 3 letras distintas pueden formarse con las cinco vocales? Calcula la probabilidad de que:

a) La palabra formada acabe en u.

b) La palabra formada empiece por a y acabe en u.

Con las vocales {a, e, i, o, u} se pueden formar $V_{5,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ palabras de letras distintas, ya que una palabra se distingue de otra por las vocales elegidas y por el orden en el que se colocan. De forma que el número de resultados posibles igualmente probables es 60.

a) Si la palabra acaba en u, quedan 4 vocales para elegir 2; es decir $V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$, luego aplicando la regla de Laplace: $P(\text{la palabra acaba en u}) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

b) Si la palabra acaba en u y empieza por a, quedan 3 vocales para elegir 1; es decir $V_{3,1} = \frac{3!}{2!} = 3$, luego:

c) $P(\text{la palabra empieza por a y acaba en u}) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$

24. Ejercicio resuelto.

25. En una estantería se van a ordenar 3 libros de Física, 2 de Filosofía y 2 de Matemáticas. Los libros de cada materia son idénticos entre sí halla la probabilidad de que:

a) Queden juntos los tres de Física.

b) Queden juntos los dos de Matemáticas.

a) El número total de formas distintas de colocar los libros haciendo indistinguibles los libros iguales es:

$$P_7^{3,2,2}=\frac{7!}{3!2!2!}=7\cdot 6\cdot 5=210$$

Para averiguar en cuántas de ellas quedan los tres libros de Física juntos podemos considerar el conjunto de los tres libros como uno solo y ordenar, por tanto, un bloque de Física, dos de Filosofía y 2 de Matemáticas. Luego el número de casos favorables al suceso es: $P_5^{1,2,2}=\frac{5!}{1!2!2!}=5\cdot 3\cdot 2=30$ y la probabilidad pedida es

$$P(\text{" queden juntos los tres de física"})=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}.$$

b) Razonando de manera similar, el número de casos en los que quedan juntos los dos de Matemáticas es: $P_6^{3,2,1}=\frac{6!}{3!2!1!}=5\cdot 4\cdot 3=60$ y la probabilidad pedida es:

$$P(\text{" queden juntos los dos de matemáticas"})=\frac{60}{210}=\frac{2}{7}$$

26. Con todas las letras de la palabra *CASCARRABIAS* ¿cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar?

En la palabra *CASCARRABIAS* tenemos 4 veces la letra *A*, 2 veces la letra *C*, 2 veces la letra *S*, 2 veces la letra *R* y una sola vez cada una de las letra *B* e *I*.
Por tanto el número de palabras distintas será:

$$P_{12}^{4,2,2,2,1,1}=\frac{12!}{4!2!2!2!1!1!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}=2\,494\,800\,.$$

27. Ejercicio interactivo.

28. Ejercicio resuelto.

29. De una urna con 6 bolas blancas y 4 rojas, se extraen sucesivamente al azar dos bolas, calcula la probabilidad de que las dos bolas sean rojas si las extracciones se realizan:

a) Sin reemplazo.

b) Con reemplazo.

Sean los sucesos $R_1=$ "la primera bola extraída es roja" y $R_2=$ "la segunda bola extraída es roja".

a) Si la bola extraída en primer lugar no se devuelve a la urna, resulta:

$$P(R_1\cap R_2)=P(R_1)P(R_2\mid R_1)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$$

b) Si la bola extraída se devuelve a la urna, los sucesos R_1 y R_2 son independientes, con lo que:.

$$P(R_1\cap R_2)=P(R_1)P(R_2)=\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{4}{25}$$

30. El 30 % de los habitantes de un municipio consume habitualmente café y se sabe que el 40 % de los consumidores de café no toma postre en las comidas. Elegido al azar un habitante, calcula la probabilidad de que sea consumidor de café y tome postre.

Sean los sucesos A = "el habitante consume habitualmente café" y B = "el habitante toma postre".

La información proporcionada es $P(A)=0,3$; $P(A)=0,3$; $P(\overline{B} \mid A)=0,4$.

Y, por tanto, se tiene también que $P(B \mid A)=1-P(\overline{B} \mid A)=0,6$.

Se pide la probabilidad del suceso $A \cap B$ = "el habitante consume habitualmente café y toma postre", entonces $P(A \cap B)=P(A)P(B \mid \text{A})=0,3 \cdot 0,6=0,18$.

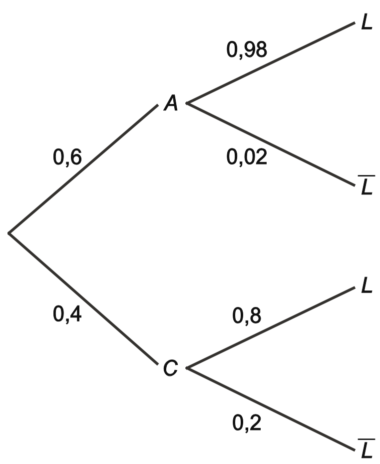
31. Ejercicio resuelto.

32. Para ir a la universidad, Juan coge el autobús el 60 % de los días, el resto prefiere ir andando. Si va en autobús llega puntual con probabilidad 0,98, mientras que si va andando la probabilidad de ser puntual es 0,8. Calcula la probabilidad de que, un día al azar:

a) Llegue puntual a clase.

b) Llegue tarde a clase.

Considera los sucesos A = "Juan coge el autobús", C = "Juan va caminando" y L = "Juan llega puntual".
Se sabe que: $P(A)=0,6$; $P(C)=0,4$; $P(L \mid A)=0,98$; $P(L \mid C)=0,8$.
La situación se puede representar mediante un diagrama de árbol:



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(L)=P(A)P(L \mid A)+P(C)P(L \mid C)=0,6 \cdot 0,98+0,4 \cdot 0,8=0,908.$$

b) como el suceso llegar tarde es el contrario del suceso ser puntual, será:

P("llegar tarde") = 1 – $P(L)$ = 1 – 0,908 = 0,092.

33. Un centro ofrece clases de pilates de tres niveles, inicial, medio y avanzado. El nivel medio lo practican el 45 % de los matriculados, mientras que en el nivel avanzado se encuentran el 24 %. En el nivel inicial hay un 37 % de mujeres, en el medio la cuarta parte son hombres y en el avanzado hay igual número de mujeres que de hombres. Se elige al azar a una persona que practica pilates, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Consideramos los sucesos H = "Es hombre", M = "Es mujer", A = "Está en el nivel inicial", B = "Está en el nivel medio" y C = "Está en el nivel avanzado".

Se sabe que:

$P(B) = 0{,}45$; $P(C) = 0{,}24$; de donde: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - (0{,}45 + 0{,}24) = 0{,}31$.

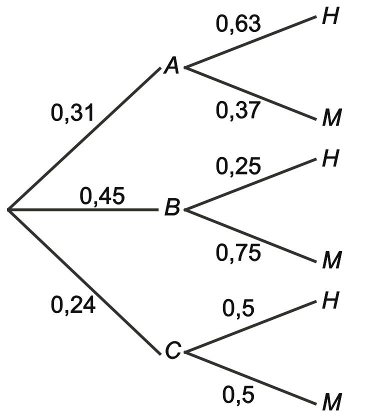
Además:

$$P(M \mid A) = 0{,}37 \Rightarrow P(H \mid A) = 1 - P(M \mid A) = 1 - 0{,}37 = 0{,}63$$

$$P(H \mid B) = \frac{1}{4} = 0{,}25 \Rightarrow P(M \mid B) = 1 - P(H \mid B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

$$P(H \mid C) = P(M \mid C) = 0{,}5$$

El diagrama de árbol es:



Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad pedida es:

$$P(H) = P(A)\,P(H \mid A) + P(B)\,P(H \mid B) + P(C)\,P(H \mid C) = 0{,}31 \cdot 0{,}63 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 + 0{,}24 \cdot 0{,}5 = 0{,}4278$$

34. Ejercicio resuelto

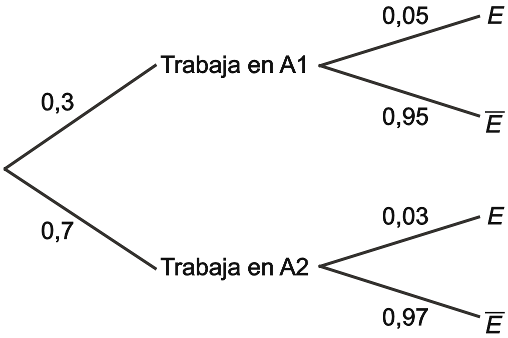
35. Una empresa tiene distribuidos sus centros de producción en dos polígonos industriales A_1 y A_2. En A_1 trabaja un 30 % de la plantilla, el resto lo hace en A_2. En el último mes un 5% de los trabajadores de A_1 padeció algún tipo de enfermedad, mientras que en A_2 ese porcentaje fue del 3%. Se selecciona al azar un trabajador y estuvo enfermo. Calcula la probabilidad de que trabaje en A_1.

Sean los sucesos:

E = "el trabajador ha estado enfermo", A_1 = "el trabajador es del centro A_1" y A_2 = "el trabajador es del centro A_2".

$P(A_1) = 0,3$; $P(A_2) = 0,7$; $P(E \mid A_1) = 0,05$; $P(E \mid A_2) = 0,03$

El diagrama de árbol describe las diferentes posibilidades con las respectivas probabilidades:



La probabilidad de que el trabajador seleccionado trabaje en el centro A_1, sabiendo que ha estado enfermo, se obtiene por el teorema de Bayes.

La probabilidad de que un empleado haya estado enfermo es:

$$P(E) = P(A_1)\,P(E \mid A_1) + P(A_2)\,P(E \mid A_2) = 0,3 \cdot 0,05 + 0,7 \cdot 0,03 = 0,036$$

Y ahora la probabilidad pedida será:

$$. P(A_1 \mid E) = \frac{P(A_1)P(E \mid A_1)}{P(E)} = \frac{0,3 \cdot 0,05}{0,036} = 0,4167$$

36. La alarma de un comercio salta en el 97 % de los atracos, y suena sin motivo un 2 % de las veces. Un 12 % de comercios ha sufrido un atraco. Si ha saltado la alarma, calcula la probabilidad de que el comercio haya sufrido un intento de atraco

Sean los sucesos:

S = “la alarma suena”, $\overline{S}$ = “la alarma no suena”

A= “el comercio ha sufrido un atraco”, $\overline{A}$ = “el comercio no ha sufrido un atraco”

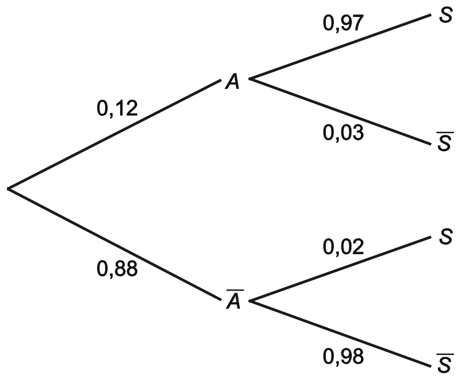
La alarma funciona correctamente cuando suena si se produce un atraco y no suena si no se produce un atraco y, en consecuencia, no funciona correctamente si suena cuando no se produce atraco y no suena cuando se produce un atraco. Es decir:

$$P(S \mid A) = 0{,}97\ ;\ P\left(\overline{S} \mid A\right) == 0{,}03\ ;\ P\left(S \mid \overline{A}\right) = 0{,}02\ ;\ P\left(\overline{S} \mid \overline{A}\right) = 0{,}98$$

Además:

$$P(A) = 0{,}12\ ;\ P(\overline{A}) = 0{,}88$$

En un diagrama de árbol:



La probabilidad de que la alarma suene se calcula con el teorema de la probabilidad total:

$$P(S) = P(A) \cdot P(S \mid A) + P(\overline{A})P\left(S \mid \overline{A}\right) = 0{,}12 \cdot 0{,}97 + 0{,}88 \cdot 0{,}02 = 0{,}134$$

La probabilidad que se pide se obtiene por medio de la regla de Bayes:

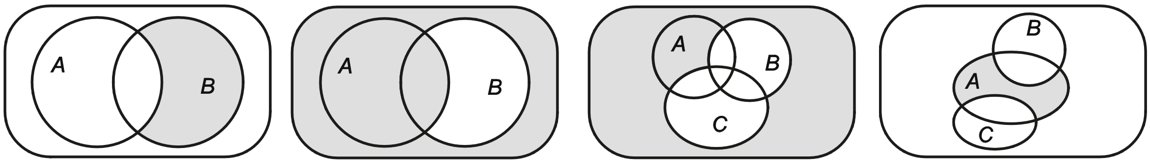
$$P(A \mid S) = \frac{P(A) \cdot P(S \mid A)}{P(S)} = \frac{0{,}12 \cdot 0{,}97}{0{,}134} = 0{,}8687$$

37. a 47. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Experimentos aleatorios. Sucesos

48. En los siguientes diagramas de Venn, indica la parte coloreada mediante operaciones con sucesos:



a) $B-A=B\cap\overline{A}$

b) $\overline{B-A}=A\cup\overline{B}$

c) $\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}$

d) $A-B=\overline{\overline{A}\cup B\cup C}$

49. En un centro educativo se mide la estatura en centímetros de los estudiantes de 1º de Bachillerato y resulta el espacio muestral *E* = [150, 190]. Sean los sucesos *A* = “medir más de 170 cm, pero menos de 180 cm”, *B* = “medir menos de 165 cm”, y *C* = “medir por lo menos 175 cm”, describe los siguientes sucesos.

a) $A\cap B$

b) $\overline{B}$

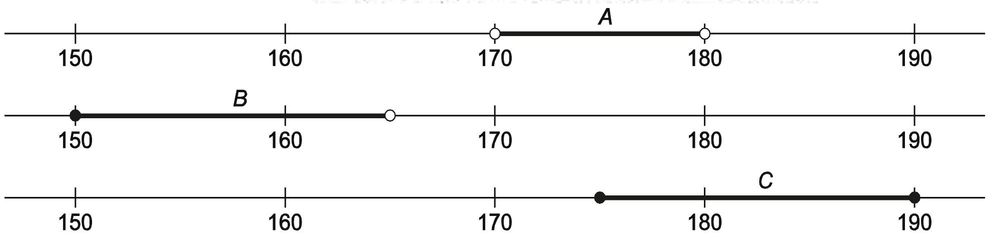
c) $\overline{A}\cap C$

d) $\overline{B}\cap C$

e) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

f) $(B\cap C)\cup A$

Partiendo de los tres conjuntos iniciales $A=(170,180)$; $B=[150,165)$; $C=[175,190]$ y de un gráfico orientativo,



las respuestas son:

a) $A\cap B=\varnothing$ (Medir menos de 165 y más de 170 no es posible)

b) $\overline{B}=[165,190]$ (No medir menos de 165 cm)

c) $\overline{A}\cap C=[180,190]$ (No medir entre 170 y 180 cm y medir más de 175 cm).

d) $\overline{B}\cap C=[175,190]$ (No medir menos de 165 cm y medir por lo menos 175 cm).

e) $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=[165,170]$ (No medir ni entre 170 y 180 cm, ni menos de 165cm ni por lo menos 175 cm).

f) $(B\cap C)\cup A=\varnothing\cup A=(170,180)$ (Medir menos de 165 y por lo menos 175 imposible, por lo que al unir *A*, nos queda solo *A*)

50. De una baraja de 40 cartas se selecciona una al azar. Considera los sucesos A = "obtener un basto", B = "obtener un as", y C = "obtener carta con número menor o igual que 5". Describe el espacio muestral y los sucesos:

a) $A \cap B$ **c)** $\overline{A} \cap B$ **e)** $\overline{A} \cup \overline{B}$

b) $A \cup C$ **d)** $A \cap B \cap C$ **f)** $A \cap \overline{B}$

El espacio muestral está formado por las 40 cartas de la baraja: 10 de oros, 10 de espadas, 10 de copas y 10 de bastos.

a) $A \cap B$ = "Obtener el as de bastos".

b) $A \cup C$ = "Obtener una carta de bastos o menor o igual que 5" = "Las diez cartas del palo de bastos y las cinco cartas del as al 5 de oros, copas y espadas".

c) $\overline{A} \cap B$ = "Obtener un as que NO sea de bastos" = "Obtener el as de oros, el de copas o el de espadas".

d) $A \cap B \cap C$ = "Obtener el as de bastos".

e) $\overline{A} \cup \overline{B}$ = "No obtener un basto o bien no obtener un as".
En este caso, podemos ver que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ = "No obtener el as de bastos".

f) $A \cap \overline{B}$ = "Obtener un basto que no sea el as".

51. En un pequeña ciudad se consideran los sucesos A = "ser socio del equipo de fútbol local", y B = "ser del club de amigos de la música". Escribe simbólicamente los siguientes sucesos:

a) Pertenecer al menos a uno de los dos.

b) No pertenecer a ninguno.

c) Pertenecer como máximo a uno de los dos.

d) Pertenecer a los dos.

a) El suceso "pertenecer al menos a uno de los dos" es el suceso $A \cup B$.

b) El suceso "no pertenecer a ninguno de los dos" es el suceso $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

c) El suceso "pertenecer como máximo a uno de los dos" es el suceso $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

d) El suceso "pertenecer a los dos" es el suceso $A \cap B$.

52. Considera el experimento consistente en lanzar un dado dos veces consecutivas. Describe el espacio muestral. Sean los sucesos *A* = "la suma de los resultados es 7", *B* = "la diferencia de resultados en valor absoluto es 2", y *C* = "el resultado de ambos lanzamientos es par". Escribe los sucesos:

a) $A \cap C$ **c)** $\overline{A} \cap C$ **e)** $B - C$ **g)** $\overline{A \cup B \cup C}$

b) $B \cap C$ **d)** $A - B$ **f)** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ **h)** $(A \cup B) \cap \overline{C}$

El espacio muestral del experimento "lanzar dos veces consecutivas un dado" es:

$$E = \left\{ \begin{array}{c} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6) \end{array} \right\}$$

Los sucesos *A*, *B* y *C* los forman los siguientes sucesos elementales

$$A = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\}$$
$$B = \{(1,3);(2,4);(3,5);(4,6);(3,1);(4,2);(5,3);(6,4)\}$$
$$C = \{(2,2);(2,4);(2,6);(4,2);(4,4);(4,6);(6,2);(6,4);(6,6)\}$$

a) $A \cap C = \varnothing$. Si ambos son pares no pueden sumar 7.

b) $B \cap C = \{(2,4);(4,2);(4,6);(6,4)\}$

c) Es consecuencia de a) anterior ya que *C* debe estar contenido en el contrario de *A*.

$$\overline{A} = \left\{ \begin{array}{l} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);\ (1,5);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2)(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6) \end{array} \right\}$$

$$\overline{A} \cap C = C = \{(2,2);(2,4);(2,6);(4,2);(4,4);(4,6);(6,2);(6,4);(6,6)\}$$

d) $A - B = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\} = A$
La intersección de *A* y *B* es el vacío, de ahí que se obtenga de nuevo *A*.

e) $B - C = \{(1,3);(3,5);(3,1);(5,3)\}$

f) $$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \left\{ \begin{array}{l} (1,1);(1,2);(1,4);(1,5);(2,1);(2,3); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,6);(4,1);(4,5); \\ (5,1);(5,4);(5,5);(5,6);\ (6,3);(6,5) \end{array} \right\}$$

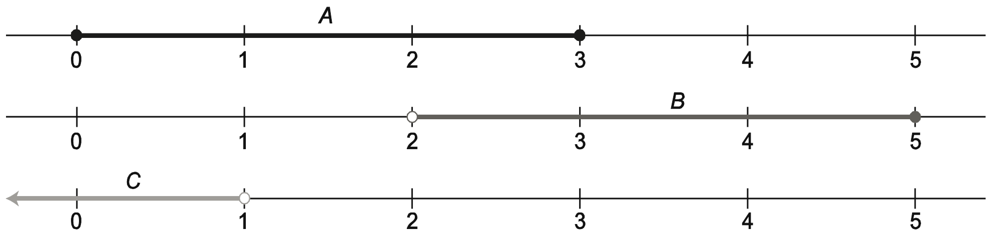
g) $(A \cup B) \cap \overline{C} = \{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1);(1,3);(3,5);(3,1);(5,3)\}$

53. Se elige al azar un número *x* de la recta real. Considera los sucesos *A* = "el número elegido está entre 0 y 3 ambos incluidos", *B* = "el número elegido es mayor que 2 y menor o igual que 5" y *C* = "el número elegido es inferior a 1". Describe los siguientes sucesos:

a) $\overline{A}$ **c)** $B \cup \overline{C}$ **e)** $A - B$ **g)** $A \cap B \cap C$

b) $A \cup C$ **d)** $\overline{A} \cap \overline{C}$ **f)** $B - C$ **h)** $(A \cup B) \cap \overline{C}$

Se determinan los conjuntos dados, para lo que será útil una representación esquemática:
$A = [0, 3]$, $B = [2, 5)$, $C = (-\infty, 1)$



a) $\overline{A} = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

b) $A \cup C = [0, 3] \cup (-\infty, 1) = (-\infty, 3]$

c) $B \cup \overline{C} = (2, 5] \cup [1, \infty) = [1, \infty)$

d) Aplicando las leyes de De Morgan tenemos $\overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A \cup C} = (3, +\infty)$.

e) $A - B = [0, 2]$

f) Como *B* y *C* tienen intersección vacía: $B - C = B = (2, 5]$

g) $A \cap B \cap C = \varnothing$

h) $(A \cup B) \cap \overline{C} = ([0, 3] \cup (2, 5]) \cap [1, \infty) = [0, 5] \cap [1, \infty) = [1, 5]$

54. Seleccionamos una bola al azar de una bolsa que contiene 5 bolas verdes numeradas del 1 al 5 y otras cinco bolas rojas numeradas también del 1 al 5. Sean los sucesos *A* = "la bola seleccionada tiene número par", *B* = "la bola seleccionada tiene número menor que 3", *C* = "la bola seleccionada es roja". Describir el espacio muestral y los sucesos:

a) A **c)** C **e)** $A \cap B \cap C$ **g)** $(A \cap B) \cup C$

b) B **d)** $A \cup B$ **f)** $\overline{A} \cap C$ **h)** $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

Para describir el espacio muestral se nombra cada bola con la inicial de su color seguida de su número. Así:
$E = \{R1, R2, R3, R4, R5, V1, V2, V3, V4, V5\}$, de donde:

a) $A = \{R2, R4, V2, V4\}$

b) $B = \{R1, R2, V1, V2\}$

c) $C = \{R1, R2, R3, R4, R5\}$

d) $A \cup B = \{R1, R2, R4, V1, V2, V4\}$

e) $A \cap B \cap C = \{R2\}$

f) $\overline{A} = \{R1, R3, R5, V1, V3, V5\} \Rightarrow \overline{A} \cap C = \{R1, R3, R5\}$

g) $(A \cap B) \cup C = \{R1, R2, R3, R4, R5, V2\}$

h) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{V3, V5\}$

Probabilidad y propiedades.

55. Sean los sucesos *A*, *B* y *C* asociados a un experimento aleatorio. Si se sabe que *P*(*A*) = 0,6; *P*(*B*) = 0,4 y $P(A \cup B) = 0{,}75$; calcula las siguientes probabilidades:

a) $P(\overline{A})$ **c)** $P(A \cap B)$ **e)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

b) $P(\overline{B})$ **d)** $P(A \cap \overline{B})$ **f)** $P(\underline{A} \cap \overline{B})$

a) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

b) $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

c) Dado que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}75 = 0{,}6 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

d) $P(A \cup \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$

e) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

f) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

56. De los sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio se sabe que *P*(*A*) = 0,35 y *P*(*B*) = 0,6. Calcula la probabilidad del suceso *B* – *A* en cada uno de los casos siguientes:

a) *A* y *B* son incompatibles.

b) *A* está contenido en *B*.

c) $P(A \cap B) = 0{,}2$

d) $P(A \cup B) = 0{,}8$

e) $P(A - B) = 0{,}1$

a) Si *A* y *B* son incompatibles entonces $P(A \cap B) = 0$ de donde $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}6 - 0 = 0{,}6$

b) Si *A* está contenido en *B* entonces $A \cap B = A$ y por tanto: $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = P(B) - P(A) = 0{,}6 - 0{,}35 = 0{,}25$

c) Si $P(A \cap B) = 0{,}2$ entonces $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4$

d) Si $P(A \cup B) = 0{,}8$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}8 = 0{,}35 + 0{,}6 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}15$

Y de ahí: $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}6 - 0{,}15 = 0{,}45$

e) Si $P(A - B) = 0{,}1$, como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}1 = 0{,}35 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}25$

Y de ahí: $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$

57. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Si *P*(*A*) = 0,5, *P*(*B*) = 0,4 y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}2$; calcula la probabilidad de:

a) Que al menos ocurra uno de los dos.

b) Que los dos sucesos ocurran.

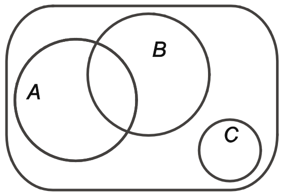
c) Que ocurra solo uno de ellos.

a) Que al menos suceda uno de los dos no es sino la unión de los sucesos por tanto:
$0{,}2 = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0{,}8$

b) Que ocurran los dos no es sino la intersección de los sucesos por tanto:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}8 = 0{,}5 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

c) Que ocurra solo uno de los dos supone que ocurra *A*, o *B* pero no los dos a la vez, es decir:
$P((A \cup B) - (A \cap B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}8 - 0{,}1 = 0{,}7$
Otra forma de verlo es la siguiente:
$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}1 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}7$

58. Dados los sucesos *A*, *B* y *C* asociados a un experimento aleatorio, representados en el diagrama de Venn adjunto: Se sabe que *P*(*A*) = 0,3; *P*(*B*) = 0,4 y *P*(*C*) = 0,1 y $P(A\cap B)=0,2$; calcula la probabilidad de que



a) Solo ocurra *A*.

b) Ocurran los tres.

c) Ocurran dos y solo dos de ellos.

d) Ocurra al menos uno de los tres.

e) No ocurra ninguno de los tres.

f) Como mucho ocurra uno de los tres.

Antes de comenzar los cálculos destaquemos que *C* es incompatible con *A* y con *B*.

a) En este caso, que solo ocurra *A* es *A* □□*B*, de donde $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,3-0,2=0,1$

b) Que ocurran los tres es $A\cap B\cap C=\varnothing \Rightarrow P(A\cap B\cap C)=0$

c) Que ocurran dos y solo dos de ellos es $S=\left(A\cap B-C\right)\cup\left(A\cap C-B\right)\cup\left(B\cap C-A\right)$ pero el primero coincide con $A\cap B$ y los dos últimos son vacíos luego: $P(S)=(A\cap B)=0,2$

d) Que ocurra al menos uno de los tres es la unión de los conjuntos, y como *C* es incompatible con los otros: $P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B)+P(C)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)\Rightarrow 0,3+0,4-0,2+0,1=0,6$

e) Que no ocurra ninguno es el contrario de la unión: $P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)=1-P\left(A\cup B\cup C\right)=1-0,6=0,4$

f) Que como mucho ocurra uno de los tres, al ser *C* incompatible con *A* y *B* resulta ser $T=\left(\left(A\cup B\right)-\left(A\cap B\right)\right)\cup C$ de donde:

$$P(T)=P(A\cup B)-P(A\cap B)+P(C)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)+P(C)=0,3+0,4-2\cdot 0,2+0,1=0,4$$

Asignación de probabilidades. Espacios finitos.

59. Se lanzan dos dados y se observa el resultado obtenido en cada uno de ellos. Calcula la probabilidad de:

a) Obtener al menos un 6.

b) Que la suma sea par y salga al menos un 5.

c) Que la suma sea 7.

Empecemos describiendo el espacio muestral y los sucesos propuestos para aplicar después la regla de Laplace (suponiendo equiprobabilidad)

$$E=\left\{\begin{matrix}(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);\\(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6);\\(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6)\end{matrix}\right\}$$

a) El suceso *A* = “obtener al menos un 6” está formado por los sucesos elementales:

b) $A=\left\{\begin{matrix}(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6)\\(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5)\end{matrix}\right\};\ P(A)=\dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}=\dfrac{11}{36}$

c) El suceso *B* = “Que la suma sea par y salga al menos un 5.” está formado por los sucesos elementales:

$$B=\{(1,5);(3,5);(5,5);(5,3);(5,1)\};\quad P(B)=\frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}=\frac{5}{36}$$

d) El suceso *C* = “que la suma sea 7” está formado por los sucesos elementales:

$$C=\{(1,6);(2,5);(3,4);(4,3);(5,2);(6,1)\};\quad P(C)=\frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

60. Una bolsa contiene 10 bolas blancas y 5 verdes. Se extraen simultáneamente dos bolas al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) las dos sean blancas.

b) sea una de cada color.

c) sean del mismo color.

Al ser la extracción de las bolas simultánea, el orden no influye, por lo que el número de resultados posibles igualmente probables es:

$$C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2} = 105$$

a) Sea el suceso A = "las dos bolas sean blancas". Las dos bolas blancas se deben obtener de las 10 blancas de la bolsa, luego el número de resultados favorables es

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

Y, aplicando la regla de Laplace, $P(A) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{45}{105} = \dfrac{3}{7}$.

b) Sea el suceso B = "sea una bola de cada color". Por cada bola blanca extraída (de las 10) se podrán elegir 5 bolas verdes, de modo que el número de resultados favorables es:

$$C_{10,1} \cdot C_{5,1} = \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} = 10 \cdot 5 = 50$$

Aplicando la regla de Laplace, $P(B) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{50}{105} = \dfrac{10}{21}$.

c) El suceso C = "las dos bolas sean del mismo color" consiste en que "las dos bolas sean blancas" o "las dos bolas sean verdes", cuyo número de resultados favorables es:

$$C_{10,2} + C_{5,2} = \binom{10}{2} + \binom{5}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} = 55$$

Con lo que finalmente: $P(C) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{55}{105} = \dfrac{11}{21}$

61. De una baraja de 40 cartas se extraen dos simultáneamente al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) las dos sean de oros. **b)** las dos sean ases. **c)** al menos una de ellas sea de oros.

En este caso, al ser la extracción de las dos cartas de forma simultánea, el orden no influye y el número de resultados posibles igualmente probables es $C_{40,2} = \binom{40}{2} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$.

a) Sea el suceso A = "las dos cartas sean de oros". El número de resultados favorables al suceso A es, como hay 10 cartas de oros, $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

De manera que aplicando la regla de Laplace: $P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{45}{780} = \frac{3}{52}$

b) Sea el suceso B = "las dos cartas sean ases". Como en la baraja hay 4 ases, el número de resultados favorables al suceso C es $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Y, aplicando la regla de Laplace, resulta: $P(B) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{6}{780} = \frac{1}{130}$.

c) El suceso C = "al menos una de las dos cartas sea de oros", es el suceso contrario de "ninguna de las dos cartas es de oros". El número de resultados favorables al suceso $\overline{C}$ es $C_{30,2} = \binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$.

De modo que la probabilidad del suceso $\overline{C}$ es $P(\overline{C}) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{435}{780} = \frac{29}{52}$.

Y, finalmente, la probabilidad del suceso C es $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{29}{52} = \frac{23}{52}$.

62. Con el fin de recaudar fondos para un viaje, los alumnos de primer curso de bachillerato realizan una rifa de 500 números. Un profesor compra dos números.

a) Si solo hay un premio. ¿Cuál es la probabilidad de que le toque al profesor?

b) Si hay dos premios. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno le toque al profesor?

a) En este caso, la probabilidad se calcula de forma inmediata aplicando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{2}{500} = \frac{1}{250} = 0{,}004$$

b) En este caso, la rifa se compone de 498 bolas blancas (B) y 2 rojas (R). Entonces, si se nombra el suceso B = "al menos uno le toque al profesor", cuyo suceso contrario es $\overline{B}$ = "ninguno de los dos le toque al profesor", el número de resultados favorables al suceso $\overline{B}$ es

$C_{498,2} = \binom{498}{2} = \frac{498 \cdot 497}{2} = 123\,753$, mientras que el número de casos posibles si el profesor compra dos números (no importa el orden en el que lo haya hecho) será $C_{500,2} = \binom{500}{2} = \frac{500 \cdot 499}{2} = 124\,750$, con lo que:

$$P(\overline{B}) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{123\,753}{124\,750} = 0{,}992$$

Y, finalmente, la probabilidad del suceso B es: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}992 = 0{,}008$.

63. En un examen teórico de educación vial hay 14 preguntas sobre normas de circulación, 12 sobre señales y 8 de comportamiento cívico. Si se eligen dos preguntas al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Las dos sean de normas de circulación.

b) Ninguna sea de normas de circulación.

En la elección de las dos preguntas no importa el orden, luego como hay 34 preguntas, el número de resultados posibles es: $C_{34,2} = \binom{34}{2} = \frac{34 \cdot 33}{2} = 561$.

a) Sea A = "las dos preguntas elegidas sean de normas de circulación". Como hay 14 preguntas de circulación, el número de resultados favorables es: $C_{14,2} = \binom{14}{2} = \frac{14 \cdot 13}{2} = 91$.

Y, aplicando la regla de Laplace: $P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{91}{561} = 0{,}16221$.

b) Sea B = "ninguna de las dos sea de normas de circulación". Dado que hay 20 preguntas que no son de circulación, el número de resultados favorables al suceso B es $C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$.

Y, aplicando la regla de Laplace: $P(B) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{190}{561} = 0{,}33868$.

64. Disponemos de las cifras 1, 2, 3, 4 y 5. Con ellas se forman al azar números de dos cifras. Calcula la probabilidad de que el número formado sea par si:

a) Las cifras de cada número deben ser diferentes.

b) Si en cada número puede haber cifras repetidas.

a) Si las cifras deben ser diferentes, el número de resultados posibles es $V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20$, mientras que el número de resultados favorables al suceso A = "el número formado sea par" es $2V_{4,1} = 2 \cdot 4 = 8$, ya que dos son las cifras pares (2 y 4) y queda una a elegir de las cuatro restantes. De modo que la probabilidad del suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

b) En este caso, el número de resultados posibles es $VR_{5,2} = 5^2 = 25$ y el número de resultados favorables al suceso B = "el número formado es par" es $2 \cdot VR_{5,1} = 2 \cdot 5 = 10$. Por tanto:

$$P(B) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

65. Un grupo de 8 amigos y amigas ha conseguido entradas para la final de un torneo de tenis. Si las ocho butacas están en la misma fila y se sientan al azar, calcula la probabilidad de que Andrés y Carmen se sienten en butacas contiguas.

El número de ordenaciones posibles de los ocho amigos y amigas es: $P_8 = 8! = 40\,320$.

Sea A = "Andrés y Carmen se sientan en butacas contiguas"

Si ahora consideramos la pareja Andrés - Ana como un único elemento, el número de formas de ordenar 7 elementos es P_7, pero como además Andrés y Ana podrían intercambiar sus posiciones y seguirían estando juntos, el número de resultados favorables al suceso A es: $P_2P_7 = 2!7! = 10\,080$

Aplicando la regla de Laplace: $P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{10\,800}{40\,320} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

66. Con las letras *AAARRRS* se forman todas las palabras posibles, tengan o no sentido. Calcula la probabilidad de que la palabra formada sea *ARRASAR*.

El número de palabras distintas que se pueden formar con las letras *AAARRRS* es el de permutaciones con repetición de la 7 letras, donde la *A* se repite 3 veces, la *R* otras 3 veces y la *S* una vez. Es decir:

$$PR_7^{3,3,1} = \frac{7!}{3!3!1!} = 140$$

Que son los resultados posibles. Como solo una de esas es la palabra *ARRASAR*, utilizando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{1}{140} = 0,00714$$

67. En una lotería de 100 números se sortean dos premios: un ebook y una tablet. Juan lleva 8 números, halla la probabilidad de que gane:

a) Solo uno de los dos premios.

b) Por lo menos uno de los dos premios.

De los 100 números de la lotería, Juan lleva 8, de manera que en el bombo se tienen 8 números favorables a Juan y 92 números desfavorables.

Del bombo se extraen dos premios, por lo que el número de resultados posibles equiprobables es:

$$C_{100,2} = \binom{100}{2} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$

a) Sea el suceso *A*= "Juan gana solo uno de los dos premios". Para que ocurra el suceso *A*, un número premiado debe ser de los 8 que lleva Juan y el otro de los 92 restantes:

Número de resultados favorables al suceso *A*: $C_{8,1} \cdot C_{92,1} = 8 \cdot 92 = 736$

De modo que la probabilidad de que gane un solo premio es, por la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \frac{736}{4950} = 0,1469$$

b) Sea el suceso *B*= "Juan gana al menos uno de los dos premios". Considera el suceso contrario a *B*:

$\overline{B}$ = "Juan no gana ninguno de los premios"

Número de resultados favorables a $\overline{B}$ (los 2 números premiados son de los 92 que no lleva Juan) :

$$C_{90,2} = \binom{90}{2} = \frac{92 \cdot 91}{2} = 4186 \quad \text{Luego} \quad P(\overline{B}) = \frac{4186}{4950} = 0,8457 \Rightarrow P(B) = 1 - 0,8457 = 0,1543$$

68. Considera las familias con 5 hijos. Suponiendo que la probabilidad de que al nacer el bebé sea niño o niña es la misma, calcula la probabilidad de que una familia elegida al azar tenga:

a) Al menos un niño.

b) Exactamente 3 niñas.

c) Como mucho 4 niños.

d) 2 niñas y tres niños.

En las familias con 5 hijos, el número de resultados posibles igualmente probables (la probabilidad de nacer niño o niña es la misma) es el de variaciones con repetición de orden 5 (los cinco hijos) de los 2 elementos (niño, niña).

Es decir: $VR_{2,5} = 2^5 = 32$

a) Sea el suceso A = "la familia tiene al menos un niño". El suceso contrario de A es $\overline{A}$ = "la familia no tiene ningún niño", con solo un resultado favorable(todas niñas). Por tanto, mediante la regla de Laplace $P(\overline{A}) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{1}{32} \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{32} = \dfrac{31}{32}$

b) Sea el suceso B = "la familia tiene exactamente 3 niñas". El número de resultados favorables al suceso B es el de permutaciones con repetición de 5 elementos (los cinco hijos) donde niña se repite 3 veces y niño 2 veces, luego: $PR_5^{3,2} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$.

De modo que, utilizando la regla de Laplace: $P(B) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{16}$

c) Sea el suceso C = "Como mucho 4 niños". El suceso contrario a C es $\overline{C}$ = "Más de 4 niños", es decir, 5 niños. Y este suceso solo tiene un caso posible, de donde, al igual que en el apartado a) mediante la regla de Laplace $P(\overline{C}) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{1}{32} \Rightarrow P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \dfrac{1}{32} = \dfrac{31}{32}$

d) Sea el suceso D = "2 niñas y tres niños". El número de resultados favorables al suceso B es el de permutaciones con repetición de 5 elementos (los cinco hijos) donde niña se repite 2 veces y niño 3 veces (nótese la simetría con el apartado b)), luego $PR_5^{2,3} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$

De modo que, utilizando la regla de Laplace: $P(D) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{16}$

69. Se lanza un dado dos veces y se consideran los sucesos A = "obtener al menos un 6" y B = "la diferencia de puntuaciones es 1". Calcula la probabilidad del suceso $A \cup B$

El espacio muestral del experimento viene dado por:

$$E = \left\{ \begin{array}{c} (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);(4,1);(4,2);(4,3)(4,4);(4,5);(4,6); \\ (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);(6,1);(6,2);(6,3)(6,4);(6,5);(6,6) \end{array} \right\}$$

que tiene 36 sucesos elementales que suponemos equiprobables.

Los sucesos A y B están formados por los siguientes sucesos elementales:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} (1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6) \\ (6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5) \end{array} \right\} \qquad B = \left\{ \begin{array}{c} (1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,6) \\ (2,1);(3,2);(4,3);(5,4);(6,5) \end{array} \right\}$$

$$A \cup B = \left\{ \begin{array}{l} (1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,6);(4,6);(3,6);(2,6);(1,6);(6,6); \\ (2,1);(3,2);(4,3);(5,4);(6,5);(6,4);(6,3);(6,2);(6,1) \end{array} \right\}$$

De modo que, utilizando la regla de Laplace: $P(A \cup B) = \dfrac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº de casos posibles}} = \dfrac{19}{36}$.

70. En una rifa benéfica, se venden 500 papeletas, de las cuales 150 tienen un premio de 20 euros, 100 tienen un premio de 50 euros y el resto no tiene premio. Si una persona compra una papeleta, calcula la probabilidad de que:

a) Gane un premio de 20 euros.

b) Si la persona compra dos papeletas, gane al menos un premio.

Se supone que los resultados posibles son equiprobables por lo que se utiliza la regla de Laplace.

a) Sea el suceso A = "gane un premio de 20 euros", que tiene 150 papeletas "favorables", luego:

$$P(A) = \frac{150}{500} = \frac{3}{10}$$

b) Si se compran dos papeletas, el número de resultados posibles es: $C_{500,2} = \binom{500}{2} = \frac{500 \cdot 499}{2!} = 124\,750$.

ya que no importa el orden en que se compren las papeletas.

Para calcular la probabilidad del suceso B = "la persona gane al menos un premio", se considera el suceso contrario $\overline{C}$ = "la persona no gane ningún premio" y el número de resultados favorables al suceso $\overline{C}$ es:

$$C_{250,2} = \binom{250}{2} = \frac{250 \cdot 249}{2!} = 31125$$

De modo que, utilizando la regla de

Laplace: $P(\overline{C}) = \frac{31125}{124750} = 0,2495 \Rightarrow P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0,2495 = 0,7505$

71. Disponemos de un dado trucado de modo que la probabilidad de que salga número par es doble que la de obtener impar. Si se lanza el dado una vez, calcula la probabilidad de obtener:

a) Número par.

b) Número impar.

c) Un número menor que 4.

Suponiendo que la probabilidad de obtener cualquier número impar (1, 3 o 5) es la misma, sea p, y que también es la misma la de obtener cualquier número par (2, 4 o 6), es decir $2p$, entonces:

$$p + p + p + 2p + 2p + 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{9}$$

a) La probabilidad del suceso A = "obtener número par" es $P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

b) La probabilidad del suceso B = "obtener número impar" es $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

c) La probabilidad del suceso C = "obtener número menor que 4" $P(C) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

72. Se lanza diez veces una moneda equilibrada. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Dos caras y ocho cruces.

b) Como mucho dos caras.

c) Un número par de caras.

El número de resultados posibles al lanzar 10 veces una moneda equilibrada (*C* y *X* equiprobables) es el de variaciones con repetición de orden 10 (los 10 lanzamientos), de los dos elementos (*C* y *X*), es decir: $VR_{2,10} = 2^{10} = 1024$.

a) Sea el suceso *A* = "obtener 2 caras y 8 cruces". Los resultados favorables a este suceso se pueden contar como permutaciones con repetición o, al tratarse de dos elementos (*C*, *X*) como combinaciones, ya que:

$$PR_{10}^{2,8} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$$

Y, entonces, la probabilidad del suceso *A* es: $P(A) = \frac{45}{1024} = 0,0439$.

b) Sea *B* = "obtener como mucho 2 caras". Este suceso es la unión de 3 sucesos incompatibles:

B_0= "ninguna cara"; Resultados favorables a B_0: 1

B_1= "exactamente 1 cara"; Resultados favorables a B_1: $PR_{10}^{1,9} = \frac{10!}{1!\cdot 9!} = 10$

B_2= "exactamente 2 caras" Resultados favorables a B_2: 45 (calculados en apartado a))

Entonces, $P(B) = P(B_0) + P(B_1) + P(B_2) = \frac{1}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{45}{1024} = \frac{56}{1024} = \frac{7}{128} = 0,0547$

c) Sea *C* = "obtener un número par de caras". Se puede escribir el suceso *C* como unión de los sucesos incompatibles C_j = "obtener *j* caras" con *j* = 0, 2, 4, 6, 8 y 10.

Resultados favorables al suceso C_j : $PR_{10}^{j,10-j} = \frac{10!}{j!(10-j)!}$.

Entonces:

$$P(C) = P(C_0) + P(C_2) + P(C_4) + P(C_6) + P(C_8) + P(C_{10}) = \frac{1}{1024} + \frac{45}{1024} + \frac{210}{1024} + \frac{210}{1024} + \frac{45}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{512}{1024} = 0,5$$

Probabilidad condicionada. Independencia.

73. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que *P*(*A*) = 0,25; *P*(*B*|*A*) = 0,5; *P*(*A*|*B*) = 0,25.

a) ¿Son *A* y *B* incompatibles?

b) ¿Son *A* y *B* independientes?

c) Calcula $P(\overline{A} \mid \overline{B})$.

a) *A* y *B* son incompatibles si $P(A \cap B) = 0$ Como

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B \mid A) \cdot P(A) = 0,5 \cdot 0,25 = 0,125 \neq 0$$, *A* y *B* no son incompatibles.

b) Son independientes si $P(A \cap B) => P(A) \cdot P(B)$ y en este caso, como $P(A \mid B) = 0,25 = P(A)$ sí son independientes. Otra forma de comprobarlo es la siguiente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \mid B)} = \frac{0,125}{0,25} = 0,5 \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,5 = 0,125 = P(A \cap B)$$

c) Como $P(A) = P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(A \mid \overline{B}) \Rightarrow 0,25 = 0,5 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot P(A \mid \overline{B}) \Rightarrow P(A \mid \overline{B}) = 0,25$ se tiene que $P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1 - P(A \mid \overline{B}) = 0,75$

74. Sean *A* y *B* dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que *P*(*A*) = 0,3 y que *P*(*B*) = 0,7. Calcula la probabilidad de que:

a) Ocurra al menos uno de los dos sucesos.

b) Ocurra *A*, si se sabe que al menos uno de los dos ha ocurrido.

c) Ocurra *B*, si se sabe que *A* no ha ocurrido.

a) Que ocurra al menos uno, no es sino la unión de ambos sucesos. Como por ser independientes se tiene que: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$. La probabilidad pedida es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,7 - 0,21 = 0,79$$

b) $P(A \mid (A \cup B)) = \dfrac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \dfrac{P(A)}{P(A \cup B)} = \dfrac{0,3}{0,79} = 0,37975$

c) Se sabe que $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow 0,7 = 0,21 + P(B \cap \overline{A}) \Rightarrow P(B \cap \overline{A}) = 0,49$ por tanto: $P(B \mid \overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \dfrac{P(A)}{1 - P(A)} = \dfrac{0,49}{0,7} = 0,7$

(Nótese que era un resultado inmediato, ya que si *A* y *B* son independientes, $\overline{A}$ y *B* también lo son, por lo que $P\left(B \mid \overline{A}\right) = P(B) = 0,7$).

75. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que *P*(*A*) = 0,5; *P*(*B*) = 0,4 y $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,75$. Calcula:

a) $P(\overline{A} \mid B)$

b) $P(B \mid A)$

a) Como $0,75 = P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,25$

$P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - \dfrac{0,25}{0,4} = 0,375$.

b) $P\left(\overline{B} \mid A\right) = 1 - P(B \mid A) = 1 - \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - \dfrac{0,25}{0,5} = 0,5.$

76. Sean *A* y *B* dos sucesos asociados a un experimento aleatorio, con *P*(*A*) = 0,5; *P*(*B*) = 0,4 y $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,2$.

a) Los sucesos *A* y *B* ¿son independientes?

b) Calcula $P(\overline{B} \mid A)$.

a) Como $0,2 = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cup B) = 0,8$

Ahora como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,8 = 0,5 + 0,4 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,1$

Pero $0,1 = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$ Luego *A* y *B* no son independientes.

b) $P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A) = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \dfrac{0,1}{0,5} = 0,8$

77. Se consideran los sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A)=\frac{1}{3};\ P(B)=\frac{1}{4};\ P(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

a) ¿Son A y B independientes?

b) Calcula las siguientes probabilidades: **i.** $P(\overline{A}\mid\overline{B})$ **ii.** $P(\overline{A}\mid B)$ **iii.** $P(B\mid\overline{A})$

c)

a) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{12}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=P(A)\cdot P(B)$

Por tanto sí son independientes.

b) Recordemos que si A y B son independientes, también lo son A y $\overline{B}$, ya que
$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(A)\cdot P(B)+P(A\cap\overline{B})\Rightarrow$

$\Rightarrow P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A)\cdot P(B)=P(A)\cdot(1-P(B))=P(A)\cdot P(\overline{B})$
por tanto:

i) $P(\overline{A}\mid\overline{B})=1-P(A\mid\overline{B})=1-P(A)=\frac{2}{3}$

ii) $P(\overline{A}\mid B)=1-P(A\mid B)=1-P(A)=\frac{2}{3}$

iii) $P(B\mid\overline{A})=P(B)=\frac{1}{4}$

Probabilidad total y teorema de Bayes.

78. Se lanza una moneda y si el resultado es cara, a continuación se lanzas un dado que tiene 4 caras rojas y dos blancas. En cambio, si sale cruz, se lanza un dado con 2 caras rojas y 4 blancas.

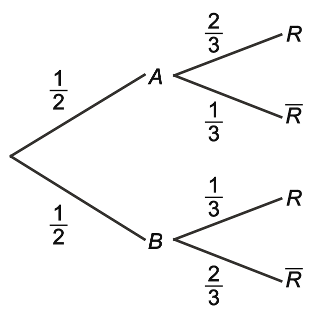
a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una cara roja?

b) Si el resultado del dado fue una cara roja, ¿cuál es la probabilidad de que se obtuviera cara al lanzar la moneda?

Sean los sucesos
A = "lanzar el dado de 4 caras rojas y 2 blancas"
B = "lanzar el dado de 2 caras rojas y 4 blancas"
R = "obtener cara roja".

Se tiene que: $P(A)=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{1}{2};\ P(R\mid A)=\frac{2}{3};\ P(R\mid B)=\frac{1}{3}$

El diagrama de árbol adjunto recoge la situación.



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total: $P(R)=P(A)\cdot P(R\mid A)+P(B)\cdot P(R\mid B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

b) Por el teorema de Bayes: $P(A\mid R)=\dfrac{P(A)\cdot P(R\mid A)}{P(R)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

79. Se tienen tres cajas. Se lanza un dado equilibrado, si sale número par se elige la caja que contiene 3 bolas verdes, 2 blancas y 2 rojas, si el resultado del dado es 1, la caja elegida contiene 4 bolas verdes, 2 blancas y 5 rojas. En otro caso, se elige la caja que contiene 2 bolas verdes, 3 blancas y 1 roja. De la caja elegida se extraen dos bolas. Calcula la probabilidad de que:

a) Las dos bolas extraídas sean verdes.

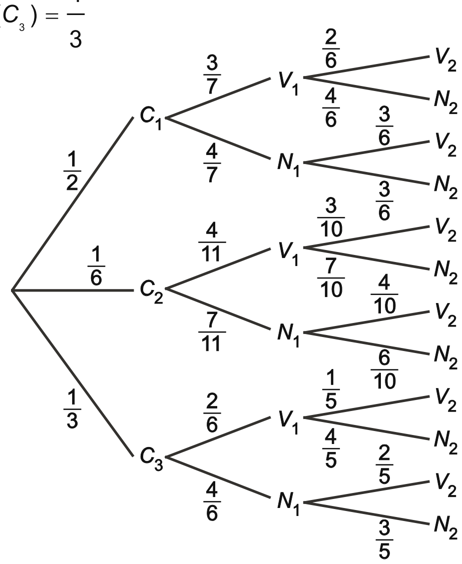
b) Si las dos bolas extraídas son verdes, sean de la caja que solo contiene 2 bolas verdes.

Sean las cajas: $C_1 = \{3V, 2B, 2R\}$; $C_2 = \{4V, 2B, 5R\}$; $C_3 = \{2V, 3B, 1R\}$

La probabilidad de elegir una u otra caja depende del resultado del lanzamiento del dado.

$$P(C_1) = \frac{1}{2};\ P(C_2) = \frac{1}{6};\ P(C_3) = \frac{1}{3}$$

Suponiendo que la extracción es sin reemplazamiento y recogemos las distintas posibilidades de que la extracción sea una bola verde (V) o no lo sea (N) en el diagrama de árbol adjunto:



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(V_1V_2) = P(C_1)\cdot P(V_1 \mid C_1)\cdot P(V_2 \mid (V_1 \cap C_1)) + P(C_2)\cdot P(V_1 \mid C_2)\cdot P(V_2 \mid (V_1 \cap C_2)) +$$

$$+P(C_3)\cdot P(V_1 \mid C_3)\cdot P(V_2 \mid (V_1 \cap C_3)) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{155}{1386} = 0{,}1118$$

b) Por el teorema de Bayes: $P(C_3 \mid V_1V_2) = \dfrac{P(C_3)\cdot P(V_1V_2 \mid C_3)}{P(V_1V_2)} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{155}{1386}} = \dfrac{154}{775} = 0{,}1987$

Síntesis

80. De los sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio se sabe que *P(A)* = 0,3 y *P(B)* = 0,4. Calcula en cada caso la probabilidad del suceso *B* – *A* cuando:

a) *A* y *B* son incompatibles.

b) *A* y *B* son independientes.

c) $P(A \cup B) = 0{,}5$.

a) Si *A* y *B* son incompatibles: $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) = 0{,}4$.

b) Si *A* y *B* son independientes:

$P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12 \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}28$.

c) Si $0{,}5 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}2$.

Por tanto $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

81. Sean *A* y *B* dos sucesos de un espacio muestral, con P(*A*) = 0,55 y P(*B*) = 0,3. Calcula en cada caso las probabilidades de los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$ si:

a) *A* y *B* son incompatibles.

b) Si *A* y *B* son independientes.

c) Si $P(A \mid B) = 0,6$.

a) Si *A* y *B* son incompatibles $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,55 + 0,3 = 0,85$

b) Si *A* y *B* son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,55 \cdot 0,3 = 0,165$

Y por tanto $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,55 + 0,3 - 0,165 = 0,685$

c) Si $0,6 = P(A \mid B) \Rightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{0,3} = 0,6 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,6 \cdot 0,3 = 0,18$

Por tanto $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,55 + 0,3 - 0,18 = 0,67$

CUESTIONES

82. Comprueba que si *A* y *B* son dos sucesos independientes asociados a un experimento aleatorio, se verifica que: $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$

Por ser independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, por tanto:

$$1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - \big((1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))\big) = 1 - \big(1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)\big) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$$

83. Sean *A* y *B* dos sucesos. Considerar el suceso *C*: "solo ocurre uno de los dos", Demuestra que: $P(C) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$

El suceso *C* es $C = (A - B) \cup (B - A)$ siendo estos dos incompatibles, y de aquí:

$$P(C) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$$

84. Sean *A*, *B* y *C* tres sucesos de un espacio muestral tales que:

$$P(A \mid C) \geq P(B \mid C)\ ;\ P(A \mid \overline{C}) \geq P(B \mid \overline{C})\ ;\ P(\overline{C}) > 0\ ;\ P(C) > 0$$

Razona cuál de las siguientes dos afirmaciones es correcta:

a) $P(A) \leq P(B)$

b) $P(B) \leq P(A)$

Dado que ni *C* ni su contrario tienen probabilidad nula, aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(C) \cdot P(A \mid C) + P(\overline{C}) \cdot P(A \mid \overline{C}) \geq P(C) \cdot P(B \mid C) + P(\overline{C}) \cdot P(B \mid \overline{C}) = P(B)$$

Es decir, la afirmación correcta es a).

PROBLEMAS

85. Considera dos urnas, la primera con 5 bolas blancas y 6 verdes y la segunda con 4 bolas blancas y 3 verdes. De la primera urna se extrae una bola al azar y se pasa a la segunda urna. Finalmente, de la segunda urna se extrae una bola al azar. Calcula la probabilidad de que esta sea verde.

Sean $U_1 = \{5B, 6V\}$ y $U_2 = \{4B, 3V\}$ las dos urnas propuestas (B: bola blanca; V: bola verde).

En la primera etapa del experimento, se pasa una bola al azar de la urna U_1 a la U_2, que puede ser blanca o verde, dando lugar respectivamente a las urnas

$U_{21} = \{5B, 3V\}$ o $U_{22} = \{4B, 4V\}$

con las siguientes probabilidades, teniendo en cuenta que, al extraer la bola de U_1, los resultados posibles son equiprobables y se aplica la regla de Laplace:

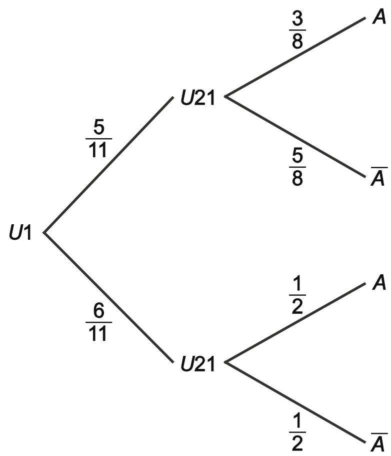
$$P(U_{21}) = \frac{5}{11}; \qquad P(U_{22}) = \frac{6}{11}$$

De la urna formada en la primera etapa se extrae una bola al azar, sea el suceso A = "la bola extraída es verde".

Dependiendo de que la urna formada sea U_{21} o U_{22}, la probabilidad de extraer bola verde es distinta:

$$P(A \mid U_{21}) = \frac{3}{8}; \qquad P(A \mid U_{22}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

En el diagrama de árbol se muestran las dos etapas.



de forma que aplicando el teorema de la probabilidad total, se obtiene:

$$P(A) = P(A \mid U_{21}) \cdot P(U_{21}) + P(A \mid U_{22}) \cdot P(U_{22}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{39}{88} = 0,4432$$

86. En un congreso internacional se consideran oficiales tres idiomas: *A*, *B* y *C*. El 40% de los participantes domina el idioma *A*, el 36 % domina el *B*, el 18 % el *C*, el 30 % domina los idiomas *A* y *B*, el 14% domina los idiomas *A* y *C* y el 12 % *B* y *C*. Finalmente un 8 % de los congresistas domina los tres idiomas. Entre los asistentes se selecciona una persona al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) No domine ninguno de los tres idiomas.

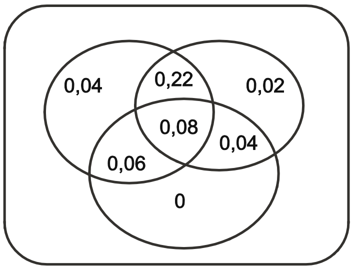
b) Domine solo uno de los tres.

c) Domine el idioma *B* pero no el *C*.

d) Domine exactamente dos de los tres idiomas.

Considera los sucesos

A = "domina el idioma A", B = "domina el idioma B", C = "domina el idioma C"



a) Si una persona es seleccionada al azar:
el suceso "no domine ninguno de los tres idiomas" es el suceso $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$, cuya probabilidad es

$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)=1-P\left(A\cup B\cup C\right)$

Como $P\left(A\cup B\cup C\right)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$

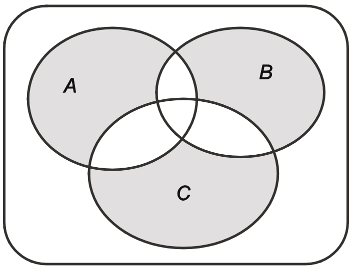
Se tiene que $P\left(A\cup B\cup C\right)=0,40+0,36+0,18-0,30-0,14-0,12+0,08=0,46$

en consecuencia: $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)=1-P\left(A\cup B\cup C\right)=1-0,46=0,54$

b) Sea U = "Domina solo uno de los tres idiomas". Se debe calcular la probabilidad de la unión de los sucesos incompatibles: "solo domina el idioma A", "solo domina el idioma B" y "solo domina el idioma C", que se escriben respectivamente:

$A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$; $\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$; $\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$

Como se muestra en el diagrama siguiente.



$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(A)-P(A\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$

$=0,40-0,30-0,14+0,08=0,04$

$P(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})=P(B)-P(A\cap B)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$

$=0,36-0,30-0,12+0,08=0,02$

$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=P(C)-P(C\cap B)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$

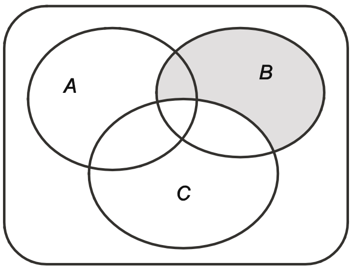
$=0,18-0,14-0,12+0,08=0$

La probabilidad pedida es $P(U)=0,04+0,02=0,06$.

c) La probabilidad del suceso $B-C$ = "domina el idioma B pero no el C",

$P(B-C)=P(B)-P(B\cap C)=0,36-0,12=0,24$

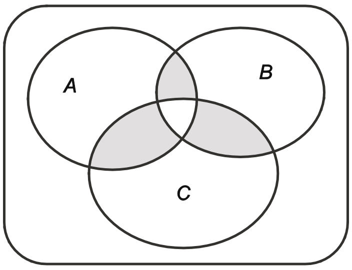
Como se muestra en el diagrama.



d) Sea el suceso D = "domine exactamente 2 de los 3 idiomas" es la unión de los sucesos "domina A y B pero no C", "domina A y C pero no B" y "domina B y C pero no A", que se escriben respectivamente:

$A\cap B\cap\overline{C}$; $A\cap\overline{B}\cap C$; $\overline{A}\cap B\cap C$

que se pueden ver en el diagrama siguiente.



Sus probabilidades son:

$P(A\cap B\cap\overline{C})=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)=0,30-0,08=0,22$

$P(A\cap\overline{B}\cap C)=P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)=0,14-0,08=0,06$

$P(\overline{A}\cap B\cap C)=P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)=0,12-0,08=0,04$

Por tanto: $P(D)=0,22+0,06+0,04=0,32$

87. En las elecciones al Consejo Escolar de un instituto se sabe que la probabilidad de que una madre acuda a votar es 0,28, la probabilidad de que vote el padre es 0,21 y la de que voten los dos 0,15. Calcula la probabilidad de que

a) Al menos uno de los dos vote.

b) No vote ninguno de los dos.

c) Solo vote la madre.

Sean los sucesos: A = "vota la madre" B = "vota el padre". Se sabe que $P(A) = 0,28$; $P(B) = 0,21$; $P(A \cap B) = 0,15$.

a) El suceso "al menos uno de los dos vote" es el suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,28 + 0,21 - 0,15 = 0,34$

b) El suceso "no vote ninguno de los dos" es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$, y su probabilidad es:

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,34 = 0,66.$

c) El suceso "solo vote la madre" es el suceso $A \cap \overline{B} = A - B$ cuya probabilidad es:

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,28 - 0,15 = 0,13$

88. Un estudiante se presenta a una prueba que consta de 20 temas de los cuales ha preparado 10. En la prueba se eligen por sorteo 3 temas de los 20 y debe contestar a uno que él escoja. Calcula la probabilidad de que:

a) Sepa contestar solo uno de los tres temas.

b) Supere la prueba.

Como no importa el orden en el que se elijan los temas, el número de resultados posibles (equiprobables) al extraer 3 temas de los 20, es:

$$C_{20,3} = \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!} = 1140$$

a) Para el estudiante, los 20 temas se dividen en dos grupos: 10 que sabe y 10 que no sabe
Sea el suceso A = "el estudiante sabe contestar solo uno de los tres temas".
El tema que sabe se elige de los 10 que sabe y los otros dos de los 10 que no sabe, luego el número de resultados favorables es:

$$C_{10,1} \cdot C_{10,2} = \frac{10}{1!} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2!} = 450$$

De manera que, aplicando la regla de Laplace, resulta: $P(A) = \frac{450}{1140} = \frac{15}{38} = 0,39474$

b) Sea el suceso B = "el estudiantes supere la prueba" que se puede enunciar "el estudiante sabe al menos uno de los tres temas".
Se considera el suceso contrario de B: $\overline{B}$ = "el estudiante no supera la prueba" que se puede enunciar: "el estudiante no sabe ninguno de los tres temas",
En este caso, los tres temas deben salir de los 10 que no sabe, por lo que el número de resultados favorables al suceso $\overline{B}$ es: $C_{10,3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$

Utilizando la regla de Laplace se tiene: $P(\overline{B}) = \frac{140}{1140} = \frac{2}{19} = 0,10526$

Y finalmente, $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{2}{19} = \frac{17}{19} = 0,89474$

89. En un lote de 100 piezas, se sabe que el 5 % son defectuosas. Del lote se van seleccionando al azar piezas una a una sin reemplazo. Calcula la probabilidad de que la primera pieza defectuosa se obtenga en la tercera extracción.

En el lote hay 95 piezas buenas y 5 defectuosas

Sean los sucesos:

B_1 = "obtener pieza buena en la primera extracción",

B_2 = "obtener pieza buena en la segunda extracción"

D_3 = "obtener pieza defectuosa en la tercera extracción"

Entonces, se pide la probabilidad del suceso $B_1 \cap B_2 \cap D_3$.

$$P(B_1 \cap B_2 \cap D_3) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) \cdot P(D_3 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{5}{98} = 0,04602$$

90. En una ciudad, el 35 % de los ciudadanos utiliza el metro al menos una vez al día, el 24% usa el autobús y un 15% ambos medios de transporte. Se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Use el autobús si se sabe que coge el metro.

b) Sabiendo que monta en metro, no utilice el autobús.

c) No utilice ni metro ni autobús.

Considera los sucesos:

M = "utiliza el metro al menos una vez al día"

A = "utiliza el autobús al menos una vez al día"

Se sabe que si una persona ha sido elegida al azar,

$$P(M) = 0,35 \;\; ; \;\; P(A) = 0,24 \;\; ; \;\; P(M \cap A) = 0,15$$

a) Se trata de calcular la probabilidad de A condicionada por M:

$$P(A \mid M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)} = \frac{0,15}{0,35} = \frac{3}{7} = 0,42857$$

b) En este caso, se debe calcular la probabilidad del suceso $\overline{A}$, contrario de A, condicionado a que ocurre M.

$$P(\overline{A} \mid M) = 1 - P(A \mid M) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} = 0,57143$$

c) Ahora debemos calcular

$$P\left(\overline{M} \cap \overline{A}\right) = P\left(\overline{M \cup A}\right) = 1 - P\left(M \cup A\right) = 1 - \left(P(M) + P(A) - P(M \cap A)\right) = 1 - \left(0,35 + 0,24 - 0,15\right) = 0,56$$

91. En una determinada especie de mamíferos aparecen dos características genéticas *A* y *B* independientes con probabilidades 0,5 y 0,8 respectivamente. Calcula la probabilidad de que un ejemplar de esta especie elegido al azar

a) Presente ambas características.

b) No presente ninguna de las dos características.

c) Presente solo una de las dos.

d) Presente la característica *A* si se sabe que tiene la *B*.

Considera los sucesos:

A = "el mamífero presenta la característica genética *A*";

B = "el mamífero presenta la característica genética *B*"

Ambos son independientes con $P(A) = 0{,}5$ y $P(B) = 0{,}8$

a) El suceso "el mamífero presenta ambas características" se puede escribir $A \cap B$, y su probabilidad es $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4$

b) El suceso "el mamífero no presente ninguna de las dos características" se escribe $\overline{A} \cap \overline{B}$, cuya probabilidad es $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \left(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right) = 1 - (0{,}5 + 0{,}8 - 0{,}4) = 0{,}1$

c) El suceso "el mamífero presente solo una de las dos características" se puede escribir como unión de dos sucesos incompatibles $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$, cuya probabilidad es:

$$P\left((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\right) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}5 - 0{,}4 + 0{,}8 - 0{,}4 = 0{,}5$$

d) En este caso, se pide la probabilidad siguiente:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}5$$

Otra forma de verlo es que por ser independientes $P(A \mid B) = P(A) = 0{,}5$

92. Una vacuna se administra en 2 dosis, si el paciente tiene reacción alérgica a la 1ª dosis no se le administra la 2ª. El 30 % de la población presenta reacción a la 1ª dosis y, de los que reciben la 2ª dosis, el 10% presenta reacción alérgica. De la población se elige un individuo al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) No presente reacción alérgica.

b) Presente reacción alérgica a la 2ª dosis.

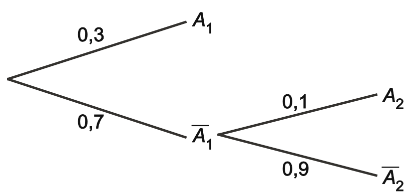
Considera los sucesos:

A_1 = "el paciente presenta reacción alérgica a la 1ª dosis"

A_2 = "el paciente presenta reacción alérgica a la 2ª dosis"

Se sabe que: $P(A_1) = 0{,}3$; $P(A_2 \mid \overline{A}_1) = 0{,}1$ y, a partir de estas, que $P(\overline{A}_1) = 0{,}7$ y $P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) = 0{,}9$.

A la derecha se muestra el diagrama de árbol con los posibles caminos y sus probabilidades



a) El suceso "el paciente no presente reacción alérgica" se puede escribir: $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$, y su probabilidad es:

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63$$

b) En este caso, se pide la probabilidad de $P(\overline{A}_1 \cap A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2 \mid \overline{A}_1) = 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}07$.

93. En una atracción de feria, se lanza un dardo a un blanco y si se acierta en uno de dos lanzamientos se consigue premio. En cada lanzamiento la probabilidad de acertar es 0,3. Calcula la probabilidad de:

a) Llevarse el premio.

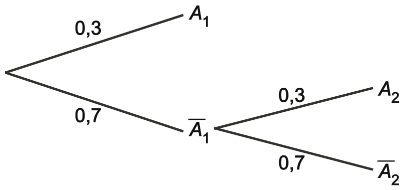
b) Llevarse el premio en el segundo intento.

Se entiende que si se acierta en el primer lanzamiento ya no se realiza el segundo y que los lanzamientos son independientes.

Sean los sucesos:

A_1 = "llevarse el premio en el primer lanzamiento" y A_2 = "llevarse el premio en el segundo lanzamiento"

El diagrama de árbol siguiente muestra las distintas posibilidades del juego y sus probabilidades:



a) El suceso "llevarse el premio" se puede escribir $\overline{A}_1 \cup (\overline{A}_1 \cap A_2)$ es decir "acertar en el primer lanzamiento o no acertar en el primero y sí en el segundo". La probabilidad es, entonces:

$$P\left(A_1 \cup \left(\overline{A}_1 \cap A_2\right)\right) = P\left(A_1\right) + P\left(\left(\overline{A}_1 \cap A_2\right)\right) = P\left(A_1\right) + P\left(\overline{A}_1\right) \cdot \left(A_2\right) = 0,3 + (1 - 0,3) \cdot 0,3 = 0,51$$

b) El suceso "llevarse el premio en el segundo lanzamiento" es el suceso $(\overline{A}_1 \cap A_2)$.

Entonces: $P\left(\overline{A}_1 \cap A_2\right) = P\left(\overline{A}_1\right) \cdot \left(A_2\right) = (1 - 0,3) \cdot 0,3 = 0,21$

94. Una caja con una docena de huevos tiene 3 rotos. De la caja se extraen 2 huevos uno a uno sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que:

a) Los dos huevos estén en buen estado.

b) Uno de los dos esté roto.

Sean los sucesos:

$B1$ = "el primer huevo está en buen estado"

$B2$ = "el segundo huevo está en buen estado"

$R1$ = "el primer huevo está roto"

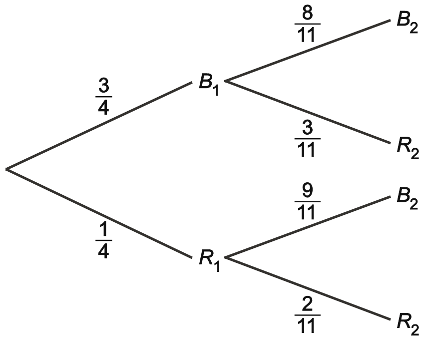
$R2$ = "el segundo huevo está roto"

Las probabilidades de cada suceso en la primera extracción y la de los sucesos de la segunda extracción dependiendo de lo que haya sucedido en la primera son:

$P(B1) = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$; $P(R1) = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$;

$P(B2 \mid B1) = \dfrac{8}{11}$; $P(R2 \mid B1) = \dfrac{3}{11}$;

$P(B2 \mid R1) = \dfrac{9}{11}$; $P(R2 \mid R1) = \dfrac{2}{11}$



a) Se pide la probabilidad del suceso $B1 \cap B2$

$$P\left(B1 \cap B2\right) = P(B1) \cdot P(B2 \mid B1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{11} = \frac{6}{11}$$

b) En este caso, se debe calcular la probabilidad del suceso $\left(B1 \cap R2\right) \cup \left(R1 \cap B2\right)$, unión de dos sucesos incompatibles:

$$P\left(\left(B1 \cap R2\right) \cup \left(R1 \cap B2\right)\right) = P\left(B1 \cap R2\right) + P\left(R1 \cap B2\right) =$$

$$= P(B1) \cdot P(R2 \mid B1) + P(R1) \cdot P(B2 \mid R1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{11} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{11} = \frac{9}{22}$$

95. En un juego en el que se lanzan a la vez 6 monedas equilibradas, en uno de los lanzamientos alguien informa que han aparecido al menos dos caras. Calcula la probabilidad de que el número de caras haya sido exactamente tres.

El número de resultados posibles equiprobables del experimento consistente en lanzar seis monedas equilibradas (C y X equiprobables) es el mismo que el de las variaciones con repetición de orden 6 (los lanzamientos) de dos elementos (C y X); esto es: $VR_{2,6} = 2^6 = 64$.

Sean los sucesos: A = "obtener al menos dos caras y $B3$ = "obtener exactamente tres caras"

Debe calcularse la probabilidad de $B3$, sabiendo que ha ocurrido A, es decir: $P(B3 \mid A) = \dfrac{P(B3 \cap A)}{P(A)}$.

Sea el suceso contrario de A, $\overline{A}$ = "obtener menos de dos caras", es decir una cara o ninguna, que se puede escribir $\overline{A} = B0 \cup B1$ donde $B0$ = "no obtener caras" y $B1$ = "obtener exactamente una cara".

Número de resultados favorables a $B0$ (6 cruces): 1

Número de resultados favorables a $B1$ (1 cara y 5 cruces): $PR_6^{1,5} = \dfrac{6!}{1!\cdot 5!} = 6$

De modo que la probabilidad del suceso $\overline{A}$ es: $P(\overline{A}) = P(B0) + P(B1) = \dfrac{1}{64} + \dfrac{6}{64} = \dfrac{7}{64} = 0,1094$.

Con lo que $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{7}{64} = \dfrac{57}{64} = 0,8906$

Y, como el número de resultados favorables al suceso $B3$ (3 C y 3 X) es $PR_6^{3,3} = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$

la probabilidad de $B3$ es: $P(B3) = \dfrac{20}{64} = \dfrac{5}{16} = 0,3125$. Como $B3$ está contenido en A, probabilidad pedida es:

$$P(B3 \mid A) = \frac{P(B3 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B3)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{57}{64}} = \frac{20}{57} = 0,3509$$

96. Se lanza un dado que está trucado de modo que la probabilidad de obtener una cara es proporcional al número de la misma. Calcula la probabilidad de que:

a) Se obtenga número impar.

b) Se obtenga el 3 si se sabe que salió impar.

c) Salga par si se sabe que salió mayor que 3.

Si la probabilidad de obtener un número es proporcional a dicho número y se supone que la constante de proporcionalidad es k, entonces $P(1) = k$; $P(2) = 2k$; $P(3) = 3k$; $P(4) = 4k$; $P(5) = 5k$; $P(6) = 6k$

Y como $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1 \Rightarrow k = \dfrac{1}{21}$ por tanto $P(x) = \dfrac{x}{21}$ para $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

a) Sea el suceso A = "obtener número impar", su probabilidad es: $P(1) + P(3) + P(5) = \dfrac{1}{21} + \dfrac{3}{21} + \dfrac{5}{21} = \dfrac{9}{21} = \dfrac{3}{7}$

b) Sea B = "obtener el número 3". Como $A \cap B = B$, resulta: $P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{21}}{\frac{3}{7}} = \dfrac{1}{3}$

c) Sean C = "obtener número par" y D = "obtener número mayor que 3". En este caso, el suceso $C \cap D = \{2, 6\}$

$P(C) = P(2) + P(4) + P(6) = \dfrac{12}{21} = \dfrac{4}{7}$; $P(D) = P(4) + P(5) + P(6) = \dfrac{15}{21} = \dfrac{5}{7}$; $P(C \cap D) = P(4) + P(6) = \dfrac{10}{21}$ D

e manera que $P(C \mid D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(D)} = \dfrac{\frac{10}{21}}{\frac{5}{7}} = \dfrac{2}{3}$

97. De una baraja española de 40 cartas se extraen sucesivamente 3 cartas al azar. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Tres reyes.

b) Una figura en la primera carta, un cinco en la segunda y un as en la tercera.

c) Dos ases y un rey.

Sean los sucesos $R1$ = "extraer rey en la 1.ª", $R2$ = "extraer rey en la 2.ª" y $R3$ = "extraer rey en la 3.ª".

a) El suceso " obtener tres reyes" se puede escribir $R1 \cap R2 \cap R3$, y su probabilidad es:

$$P(R1 \cap R2 \cap R3) = P(R1) \cdot P(R2 \mid R1) \cdot P(R3 \mid R1 \cap R2) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = 0,000405$$

b) En este caso, sean $F1$ = "obtener figura en la 1ª", $C2$ = "obtener 5 en la 2ª" y $A3$ = "obtener as en la 3ª"; entonces:

$$P(F1 \cap C2 \cap A3) = P(F1) \cdot P(C2 \mid F1) \cdot P(A3 \mid F1 \cap C2) = \frac{12}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{4}{38} = 0,003239$$

c) Dos ases y un rey se pueden extraer de tres formas distintas (as, as, rey), (as, rey, as) y (rey, as, as). En cada caso la probabilidad es la misma, luego:

$$P(\text{dos ases y un rey}) = 3 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{4}{38} = 0,002429$$

98. Se lanzan dos dados, uno blanco y otro verde. Considera los sucesos *A* ="obtener 5 en el dado blanco" y *B* ="la suma de los resultados de los dados es 7". Calcula la probabilidad de ambos sucesos y determina si son o no independientes.

El conjunto de resultados posibles al lanzar dos dados, $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ se puede representar mediante la tabla siguiente poniendo en filas los resultados del dado blanco (por ejemplo) y en columnas los del dado verde. Observado la tabla, puede verificarse que:

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \ ; \ P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Además, el suceso $A \cap B = \{5,2\}$, con lo que: $P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$

Y, por tanto, los sucesos *A* y *B* son independientes.

99. En una ciudad el 46 % de sus habitantes ve televisión más de dos horas diarias, un 33 % visita centros comerciales más de dos veces por semana y un 15% realiza ambas actividades. De la ciudad se elige una persona al azar, Calcula la probabilidad de que:

a) No realice ninguna de las actividades señaladas.

b) Vea televisión más de dos horas pero no visite centros comerciales más de dos veces a la semana.

Considera los sucesos:

A = "ver televisión más de dos horas diarias",

B = "visitar centros comerciales más de dos veces por semana"

Elegida una persona al azar, se tiene que $P(A) = 0,46$; $P(B) = 0,33$ y $P(A \cap B) = 0,15$

a) El suceso "la persona elegida no realice ninguna de las actividades" es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$, cuya probabilidad es

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \big(P(A) + P(B) - P(A \cap B)\big) = 1 - \big(0,46 + 0,33 - 0,15\big) = 0,36$$

b) El suceso "la persona elegida ve TV más de dos horas pero no visita centros comerciales más de dos veces a la semana" es el suceso $A \cap \overline{B}$, y su probabilidad es $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,46 - 0,15 = 0,31$

100. En un test con dos problemas, la probabilidad de resolver el primero es 0,55, la de resolver el segundo 0,45 y la de resolver al menos uno de los dos 0,7. Calcula la probabilidad de:

a) Resolver ambos.

b) Resolver el primero si se ha resuelto el segundo.

c) De no resolver ninguno.

Sean los sucesos A_1 = "resolver el primer problema" y A_2 = "resolver el segundo problema".
El suceso "resolver al menos uno de los dos" es el suceso $A_1 \cup A_2$. Se sabe que:

$$P(A_1) = 0,55 \ ; \ P(A_2) = 0,45 \ ; \ P(A_1 \cup A_2) = 0,7$$

a) El suceso "resolver ambos" es el suceso intersección $A_1 \cap A_2$, cuya probabilidad es:

$$P(A_1 \cap B_2) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,55 + 0,45 - 0,7 = 0,3$$

b) En este caso, se trata de calcular la probabilidad del suceso A_1, condicionado a que ha ocurrido el suceso A_2, es decir $P(A_1 \mid A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{0,3}{0,45} = \dfrac{2}{3} = 0,6667$

c) El suceso "no resolver ninguno" es el suceso $\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$, cuya probabilidad es:

$$P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = P(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - 0,7 = 0,3$$

101. En un centro educativo en el que el 60% de los alumnos son chicas, participan en actividades deportivas el 30 % de los chicos y el 20 % de las chicas. Si se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea chico y no participe en actividades deportivas.

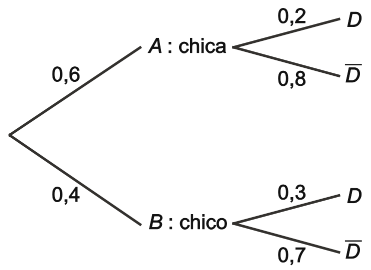
b) Participe en actividades deportivas.

c) Sea chica si se sabe que participa en actividades deportivas.

Sean los sucesos: A = "chica" B = "chico" D = "participa en actividades deportivas".
Se tiene que

$$P(A) = 0,6\ ;\ P(B) = 0,4\ ;\ P(D \mid A) = 0,2\ ;\ P(D \mid B) = 0,3$$

Las diferentes posibilidades con sus respectivas probabilidades se recogen en el diagrama de árbol siguiente:



a) El suceso "sea chico y no participe en actividades deportivas" se puede escribir $B \cap \overline{D}$, y su probabilidad se puede calcular por dos vías (al menos):

En primer lugar, como $P(\overline{D} \mid B) = 1 - P(D \mid B) = 1 - 0,3 = 0,7$, resulta:
$P(B \cap \overline{D}) = P(B) \cdot P(\overline{D} \mid B) = 0,4 \cdot 0,7 = 0,28$

O también, calculando previamente la probabilidad del suceso $B \cap D$,
$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D \mid B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$ y de ahí $P(B \cap \overline{D}) = P(B) - P(B \cap D) = 0,4 - 0,12 = 0,28$

b) Por el teorema de la probabilidad total: $P(D) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) = 0,6 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 = 0,24$

c) En este caso, por el teorema de Bayes: $P(A \mid D) = \dfrac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} = \dfrac{0,6 \cdot 0,2}{0,24} = 0,5$

Otra forma de plantearlo podría ser usando la definición de probabilidad condicionada y ver que como:

$$P(A \cap D) = P(A) \cdot P(D \mid A) = 0,6 \cdot 0,2 = 0,12 \Rightarrow P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,12}{0,24} = 0,5$$

102. Tres máquinas *A*, *B* y *C* fabrican tornillos. En una hora, la máquina *A* produce 600 tornillos de los cuales el 1% es defectuoso; la máquina *B* produce 300 y el 2% es defectuoso; y la máquina *C* produce 100, de ellos el 3% defectuoso. En cada hora se juntan todos los tornillos producidos y se elige uno al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea defectuoso.

b) Haya sido fabricado por la máquina *C* sabiendo que es defectuoso.

Sean los sucesos

A = “el tornillo ha sido producido por la máquina *A*”,

B = “el tornillo ha sido producido por la máquina *B*”,

C = “el tornillo ha sido producido por la máquina *C*”, y

D = “el tornillo es defectuoso”

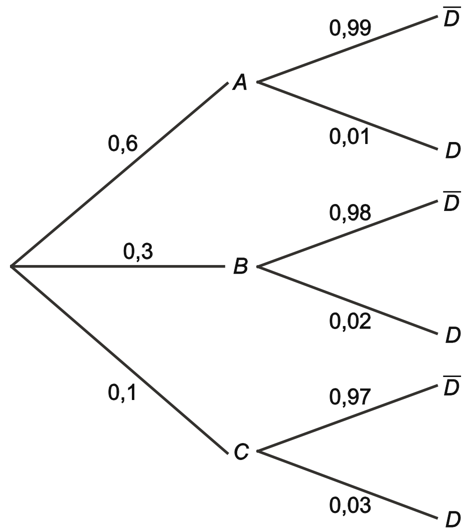
Con los datos proporcionados, si se elige un tornillo al azar, la probabilidad de que haya sido producido por cada una de las máquinas es:

$$P(A) = 0{,}6 \ ; \quad P(B) = 0{,}3 \ ; \quad P(C) = 0{,}1$$

Y las probabilidades de que sea defectuoso dependiendo de la máquina que lo haya producido son:

$$P(D \mid A) = 0{,}01 \ ; \quad P(D \mid B) = 0{,}02 \ ; \quad P(D \mid C) = 0{,}03$$

El diagrama de árbol representa gráficamente la situación:



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) + P(C) \cdot P(D \mid C) = 0{,}6 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}03 = 0{,}015$$

b) Mediante el teorema de Bayes:

$$P(C \mid D) = \frac{P(C) \cdot P(D \mid C)}{P(D)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}03}{0{,}015} = 0{,}2$$

Nótese que una vez que se comprueba que el tornillo seleccionado es defectuoso, la probabilidad final (a posteriori) de que haya sido producido por la máquina *C* es el doble que la probabilidad inicial.

103. Un grupo de amigos acude habitualmente a dos lugares de ocio, *A* y *B*, de su ciudad de forma independiente. Las probabilidades de acudir un día cualquiera al *A* o al *B* son 0,4 y 0,3 respectivamente. Halla la probabilidad de que un día cualquiera dicho grupo

a) Vaya solo a uno de los lugares

b) Vaya al menos a uno de los lugares

Sean los sucesos A = "el grupo acude al lugar *A*" y B = "el grupo acude al lugar *B*".
Elegido un día la azar, $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,3$. Además, como *A* y *B* son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

a) Entonces, el suceso "el grupo vaya solo a uno de los lugares" que se escribe como unión de dos suceso incompatibles $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ tiene probabilidad:

$$P\left((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\right) = P\left(\overline{A} \cap B\right) + P\left(A \cap \overline{B}\right) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0,4 \cdot (1 - 0,3) + (1 - 0,4) \cdot 0,3 = 0,46$$

Puesto que si dos sucesos *A* y *B* son independientes, también los son A con $\overline{B}$ y $\overline{A}$ con B

b) El suceso "el grupo vaya al menos a uno de los lugares" es el suceso $A \cup B$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,12 = 0,58$

104. En una población que dispone de dos bibliotecas públicas *A* y *B* se sabe que el 15% de la población suele acudir a la biblioteca *A*, el 20 % a la *B* y, además, un 5 % visita las dos bibliotecas. De la población se elige una persona al azar. Calcula la probabilidad de que el ciudadano elegido sea usuario:

a) De al menos una de las dos bibliotecas.

b) De ninguna de ellas.

c) Solo de la biblioteca *B*.

Sean los sucesos A = "el ciudadano es usuario de la biblioteca *A*" y B = "el ciudadano es usuario de la biblioteca *B*"
Si se elige un ciudadano al azar: $P(A) = 0,15$; $P(B) = 0,2$ y $P(A \cap B) = 0,05$

a) El suceso "sea usuario de al menos una de las bibliotecas" es el suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,15 + 0,2 - 0,05 = 0,3$

b) El suceso "no sea usuario de ninguna de ellas", es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$, y su probabilidad es:
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,3 = 0,7$

c) El suceso "sea usuario solo de la biblioteca *B*", es el suceso $\overline{A} \cap B$, cuya probabilidad es:
$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,2 - 0,05 = 0,15$

105. En una población, el 50 % de los hogares tiene contratado el acceso a internet, el 25% tiene contratado el servicio de televisión por cable y el 20 % dispone de ambos servicios. De la población se selecciona un hogar. Calcula la probabilidad de que:

a) Tenga contratado al menos uno de los dos servicios.

b) No tenga contratado ninguno de estos dos servicios.

Sean los sucesos A = "tener contratado el acceso a internet" y B = "tener contratado el servicio de televisión por cable".

Elegido un hogar al azar, se tiene que $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,25$ y $P(A \cap B) = 0,2$

a) El suceso "tener contratado al menos uno de los dos servicios" es el suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,25 - 0,2 = 0,55$

b) El suceso "no tener contratado ninguno de los dos servicios" es el suceso $\overline{A} \cap \overline{B}$, y su probabilidad es:
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,55 = 0,45$

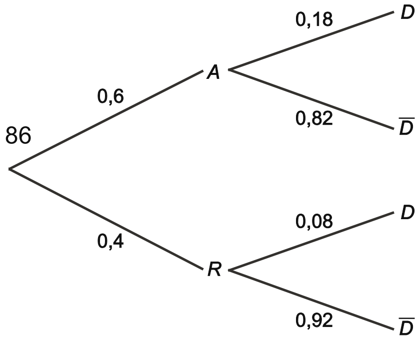
106. Una fábrica produce rotuladores azules y rojos en proporción de 3 a 2. Debido a problemas en el proceso de fabricación de una remesa, algunos rotuladores han salido con la tinta del otro color. En el control de calidad se detecta que el 82 % de rotuladores azules lleva tinta azul, mientras que el 92 % de rotuladores rojos lleva tinta roja. Si se elige un rotulador al azar, calcula la probabilidad de que:

a) No sea defectuoso.

b) Escriba de color rojo si se sabe que es defectuoso.

Considera los sucesos A = "el rotulador sea azul" R = "el rotulador sea rojo" D= "el rotulador sea defectuoso"
Elegido un rotulador al azar, se tiene que

$$P(A) = \frac{3}{5}\ ;\ P(R) = \frac{2}{5}\ ;\ P(D \mid A) = 1 - 0,82 = 0,18 \quad \text{y} \quad P(D \mid R) = 1 - 0,92 = 0,08$$



a) El suceso "el rotulador no sea defectuoso" es el suceso contrario a D, luego, por el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{D}) = P(A) \cdot P(\overline{D} \mid A) + P(R) \cdot P(\overline{D} \mid R) = 0,6 \cdot 0,82 + 0,4 \cdot 0,92 = 0,86$$

b) Si se sabe que defectuoso, para que escriba en rojo ha de ser de los azules. Llamando R' al suceso "el rotulador escribe en rojo", resulta:

$$P(R' \mid D) = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} = \frac{0,6 \cdot 0,18}{0,14} = 0,771$$

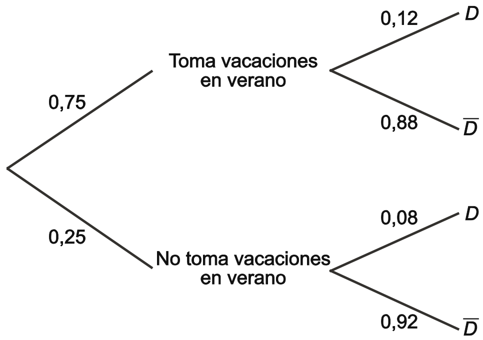
107. En una ciudad el 75 % de sus habitantes toma sus vacaciones en verano, de los cuales el 12 % viaja al extranjero. El 92 % de los que no toman las vacaciones en verano elige un destino nacional. Si se elige un ciudadano al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Viaje al extranjero en verano.

b) Esté de vacaciones en verano, si se sabe que viajó al extranjero.

Supondremos que todos los ciudadanos toman vacaciones, ya sea en verano o en otra época del año.
Sean los sucesos: A = "el ciudadano sale de vacaciones en verano" , D = "el ciudadano sale al extranjero"
y sus contrarios $\overline{A}$ = "el ciudadano no sale de vacaciones en verano", $\overline{D}$ = "el ciudadano no sale al extranjero".

Elegido un ciudadano al azar se tiene que:
$$P(A) = 0,75\ ;\ P(D \mid A) = 0,12\ ;\ P(\overline{A}) = 0,25\ ;\ P(\overline{D} \mid \overline{A}) = 0,92$$



a) El suceso "salir al extranjero en verano" es el suceso $A \cap D$ cuya probabilidad es:
$P(A \cap D) = P(D \mid A) \cdot P(A) = 0,12 \cdot 0,75 = 0,09$

b) Empecemos calculando la probabilidad de que un ciudadano viaje al extranjero en vacaciones usando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(D \mid \overline{A}) = 0,75 \cdot 0,12 + 0,25 \cdot 0,08 = 0,11$$

Empleando ahora el teorema de Bayes:

$$P(A \mid D) = \frac{P(A) \cdot P(D \mid A)}{P(D)} = \frac{0,75 \cdot 0,12}{0,11} = 0,8182$$

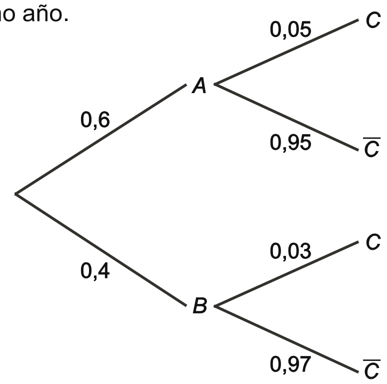
108. La probabilidad de que una persona sobreviva un año tras un trasplante de corazón es 0,8. Y la probabilidad de que sobreviva dos años es 0,75. Calcula la probabilidad de que una persona que ha sobrevivido al primer año de trasplante sobreviva al segundo año

Sean los sucesos A = "el paciente sobrevive al primer año" y B = "el paciente sobrevive dos años".
Naturalmente B está contenido en A, ya que si sobrevive 2 años ha tenido necesariamente que sobrevivir el primero, por tanto $A \cap B = B \Rightarrow P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{0,75}{0,8} = 0,9375$.

109. Los trabajadores de una empresa se distribuyen en dos áreas de trabajo *A* y *B*. En el cómputo del último año, el absentismo laboral de los trabajadores del área *A* fue del 5 % y el del área *B* del 3 %. Si en *A* trabaja el 60 % de la plantilla, y de la empresa se elige un trabajador al azar, calcula la probabilidad las siguientes probabilidades:

a) De que el trabajador haya estado de baja en algún momento del último año.

b) Sea del área B, si se sabe que estuvo de baja en algún momento del último año.



Sean los sucesos
A = "el trabajador es del área A
B = "el trabajador es del área B"
C = "el trabajador ha estado de baja en algún momento del último año"
Si se elige un trabajador al azar, se tiene que:
$P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$; $P(C \mid A) = 0,05$; $P(C \mid B) = 0,03$

a) Por el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(A) \cdot P(C \mid A) + P(B) \cdot P(C \mid B) = 0,6 \cdot 0,05 + 0,4 \cdot 0,03 = 0,042$$

b) Mediante el teorema de Bayes:

$$P(B \mid C) = \frac{P(B) \cdot P(C \mid B)}{P(C)} = \frac{0,4 \cdot 0,03}{0,042} = 0,28571$$

110. Con el fin de estudiar la eficacia de un nuevo test en el diagnóstico de un tipo concreto de cáncer que afecta al 1,5 % de las personas de edad avanzada, se aplica a un grupo de enfermos que padece este tipo de cáncer y a otro grupo de personas sanas. En el primer caso el 88 % dio positivo en el test, mientras que en el segundo caso dio positivo el 3 %. Si se aplica el test a una persona de edad avanzada elegida al azar

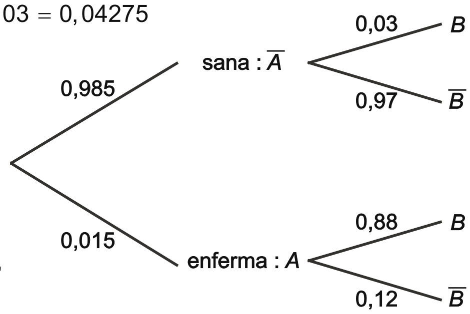
a) calcula la probabilidad de que el test de positivo.

b) si en una persona el test da positivo ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

c) calcula la probabilidad de acertar en el diagnóstico.

Seleccionada al azar una persona de edad avanzada, sean los sucesos
A = "está enferma" y B = "da positivo en el test" y sus contrarios $\overline{A}$ = "está sana" y $\overline{B}$ = "da negativo en el test".
$P(A) = 0,015$; $P(\overline{A}) = 0,985$; $P(B \mid A) = 0,88$; $P(\overline{B} \mid A) = 0,12$; $P(B \mid \overline{A}) = 0,03$; $P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0,97$

a) Por el teorema de la probabilidad total:
$P(B) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(B \mid \overline{A}) == 0,015 \cdot 0,88 + 0,985 \cdot 0,03 = 0,04275$



b) Utilizando el teorema de Bayes:
$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)} = \frac{0,015 \cdot 0,88}{0,04275} = 0,30877$$

c) El suceso C: "acertar en el diagnóstico" se puede escribir como unión de dos sucesos incompatibles:
$A \cap B$ = "la persona seleccionada está enferma y el test da positivo"
$\overline{A} \cap \overline{B}$ = "la persona está sana y el test da negativo"
$P(C) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(B \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} \mid \overline{A}) = 0,015 \cdot 0,88 + 0,9875 \cdot 0,97 = 0,96875$

111. Un paciente acude a su médico al encontrarse enfermo desde hace varios días y tras haber estado en contacto con una persona a la que le ha sido diagnosticada tuberculosis. Después de un cuidadoso análisis preliminar, el médico duda al 50 % de si el paciente tendrá o no tuberculosis, por lo que le prescribe una prueba específica.

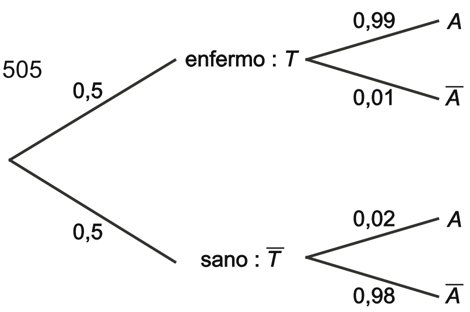
La prueba consiste en un análisis de sangre que da positivo si el paciente tiene la enfermedad en el 99 % de los casos y da negativo si el paciente no tiene la enfermedad en el 98 % de los casos. Si se sabe que la probabilidad de contagio de la tuberculosis es de un 50 % si se ha estado en contacto con una persona que ha desarrollado la enfermedad, calcula la probabilidad de que nuestro paciente:

a) Dé positivo en el test.

b) No esté realmente enfermo de tuberculosis, si la el test da resultado positivo.

c) Esté realmente enfermo de tuberculosis, si el test da resultado negativo.

Sean los sucesos T = "el paciente tiene tuberculosis", A = "el test da resultado positivo"
y sus respectivos contrarios, $\overline{T}$ = "el paciente no tiene tuberculosis", $\overline{A}$ = "el test da resultado negativo".
$P(T) = 0,5$; $P(\overline{T}) = 0,5$; $P(A \mid T) = 0,99$; $P(\overline{A} \mid T) = 0,01$; $P(A \mid \overline{T}) = 0,02$; $P(\overline{A} \mid \overline{T}) = 0,98$



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:
$P(A) = P(T) \cdot P(A \mid T) + P(\overline{T}) \cdot P(A \mid \overline{T}) = 0,5 \cdot 0,99 + 0,5 \cdot 0,02 = 0,505$

b) La probabilidad de que no esté enfermo si el test da positivo es, por el teorema de Bayes:

$$P(\overline{T} \mid A) = \frac{P(\overline{T}) \cdot P(A \mid \overline{T})}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,02}{0,505} = 0,0198$$

c) La probabilidad de que tenga tuberculosis si el test da negativo es, por el teorema de Bayes:

$$P(T \mid \overline{A}) = \frac{P(T) \cdot P(\overline{A} \mid T)}{P(\overline{A})} = \frac{0,5 \cdot 0,01}{(1 - 0,505)} = 0,0101$$

112. Una empresa tiene actualmente dos negocios en marcha, *A* y *B*. El negocio *A* puede llegar a ser más rentable, pero en la cuarta parte de los balances tiene pérdidas. Por el contrario, el negocio *B* parece ser menos rentable pero sus pérdidas llegan solo al 7 % de los casos. En la actualidad, el conjunto de operaciones del negocio *B* es doble que en el negocio *A*.

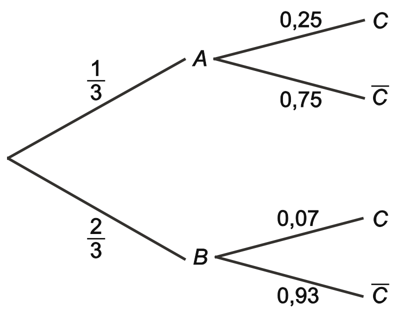
De la empresa se elige al azar una operación que tiene pérdidas. Calcula la probabilidad de que sea de una operación del negocio *B*.

Sean los sucesos:

A = "la operación es del negocio A"

B = "la operación es del negocio B" y

C = "la operación tiene pérdidas"



Como dos de cada tres operaciones son del negocio B se tienen las siguientes probabilidades que se pueden representar en un diagrama de árbol:

$P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{2}{3}$; $P(C \mid A) = 0,25$;

$P(\overline{C} \mid A) = 0,75$; $P(C \mid B) = 0,07$; $P(\overline{C} \mid B) = 0,93$

Se calcula la probabilidad de tener pérdidas aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(C) = P(A) \cdot P(C \mid A) + P(B) \cdot P(C \mid B) = \frac{1}{3} \cdot 0,25 + \frac{2}{3} \cdot 0,07 = 0,13$$

Ahora, aplicando el teorema de Bayes, la probabilidad de que una operación con pérdidas sea de B es:

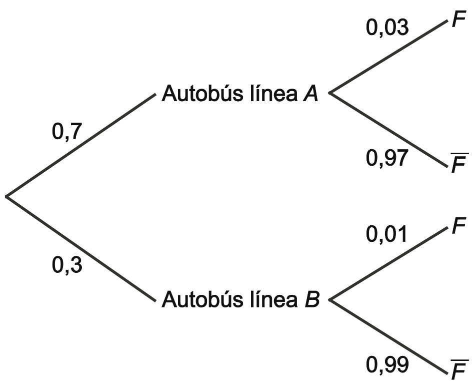
$$P(B \mid C) = \frac{P(B) \cdot P(C \mid B)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,07}{0,13} = 0,35897$$

113. Una empresa de transporte público de una determinada ciudad tiene adjudicado el servicio de dos líneas *A* y *B*. La empresa asigna el 70 % de sus autobuses a la línea *A* y el 30 % a la línea *B*. Por las características de los trayectos, el porcentaje diario de averías es el 3 % en la línea *A* y el 1 % en la *B*. Calcula la probabilidad de que, en un día elegido al azar,

a) Un autobús de esta empresa tenga una avería.

b) Si un autobús se ha averiado, sea de la línea *A*.

c) Si un autobús no se ha averiado, sea de la línea *B*.



Sean los sucesos:

A = "autobús de la línea A" y B = "autobús de la línea B"
F = "el autobús seleccionado tiene una avería";
$\overline{F}$ = "el autobús seleccionado no tiene avería"

Elegida una línea al azar se tiene que:

$P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,3$; $P(F \mid A) = 0,03$;

$P(\overline{F} \mid A) = 0,97$; $P(F \mid B) = 0,01$; $P(\overline{F} \mid B) = 0,99$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, se calcula la probabilidad de que el día elegido, un autobús de esta empresa tenga avería
$P(F) = P(A) \cdot P(F \mid A) + P(B) \cdot P(F \mid B) = 0,7 \cdot 0,03 + 0,3 \cdot 0,01 = 0,024$

b) Mediante el teorema de Bayes, se calcula la probabilidad de que, sabiendo que se ha producido una avería, el autobús averiado sea de la línea *A*.

$$P(A \mid F) = \frac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{P(F)} = \frac{0,7 \cdot 0,03}{0,024} = 0,875$$

c) Del mismo modo, mediante el teorema de Bayes, se calcula la probabilidad de que, sabiendo que no se ha producido una avería, el autobús sea de la línea *B*.

$$P(B \mid \overline{F}) = \frac{P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B)}{P(\overline{F})} = \frac{0,3 \cdot 0,99}{1 - 0,024} = 0,3043$$

114. El 40 % de la población activa de un cierto país son mujeres. Los datos de la encuesta de población activa señalan que el 30 % de las mujeres y 22 % de los hombres está en paro. Si se elige una persona al azar de la población activa de ese país, calcula la probabilidad de que:

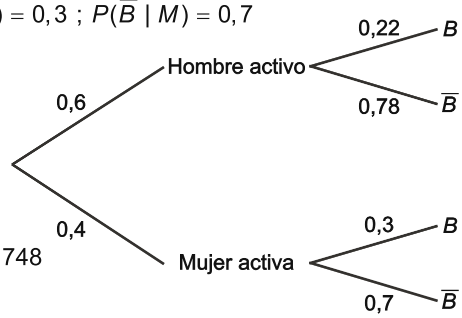
a) No tenga empleo y sea mujer.

b) Tenga empleo.

c) Sea hombre si se sabe que tiene empleo.

Sean los sucesos: H = "Hombre activo", M = "Mujer activa", B = "La persona seleccionada está en paro",
$\overline{B}$ = "La persona seleccionada tiene empleo"

Elegida una persona al azar se tiene que:
$P(H) = 0,6$; $P(M) = 0,4$; $P(B \mid H) = 0,22$; $P(\overline{B} \mid H) = 0,78$; $P(B \mid M) = 0,3$; $P(\overline{B} \mid M) = 0,7$



a) El suceso "que no tenga empleo y sea mujer" es el suceso $M \cap B$ cuya probabilidad es
$P(M \cap B) = P(M) \cdot P(B \mid M) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12$

b) Utilizando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga empleo es
$P(\overline{B}) = P(H) \cdot P(\overline{B} \mid H) + P(M) \cdot P(\overline{B} \mid M) = 0,6 \cdot 0,78 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,748$

c) Mediante el teorema de Bayes; la probabilidad de que la persona seleccionada sea hombre sabiendo que tiene empleo es:

$$P(H \mid \overline{B}) = \frac{P(H) \cdot P(\overline{B} \mid H)}{P(\overline{B})} = \frac{0,6 \cdot 0,78}{0,748} = 0,6257$$

115. En una determinada granja hay 200 patos de dos tipos: unos tienen el pico rojo y otros el pico amarillo. El 40 % son machos con el pico amarillo, el 20 % de todos los patos tienen el pico rojo, mientras que el 65 % de los patos que tienen el pico rojo son hembras. Elegido un pato al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea macho.

b) Sea macho y tenga el pico rojo.

c) Tenga el pico rojo sabiendo que ha sido hembra.

d) Sea hembra sabiendo que tiene el pico amarillo.

Sean los sucesos:

A = "pato con el pico amarillo"; R = "pato con el pico rojo"; M = "pato macho"; H= "pato hembra"

De los datos del enunciado se desprende que

$P(M \cap A) = 0,4$; $P(R) = 0,2$; $P(H \mid R) = 0,65 \Rightarrow P(M \mid R) = 1 - 0,65 = 0,35$

a) La probabilidad de que un pato sea macho y con el pico rojo es
$P(M \cap R) = P(R) \cdot P(M \mid R) = 0,2 \cdot 0,35 = 0,07$
Entonces, como se puede escribir $M = (M \cap R) \cup (M \cap A)$ como unión de sucesos incompatibles, la probabilidad de que el pato elegido al azar sea macho se obtiene
$P(M) = P(M \cap R) + P(M \cap A) = 0,4 + 0,07 = 0,47$

b) La probabilidad de que sea macho y con el pico rojo se ha calculado como parte del apartado anterior.

c) Mediante el teorema de Bayes, se obtiene $P(R \mid H) = \dfrac{P(R) \cdot P(H \mid R)}{P(H)} = \dfrac{0,2 \cdot 0,65}{1 - 0,47} = 0,2453$.

d) $P(H \mid A)1 - P(M \mid A) = 1 - \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = 1 - \dfrac{0,4}{0,8} = 0,5.$

116. En la sección de lácteos de un supermercado se venden al público yogures de tres clases *A*, *B* y *C*. La mitad son de la marca *A* y la otra mitad se la reparten por igual las marcas *B* y *C*. En 1 -% de los yogures de la marca *A*, el 2 % de la *B* y el 3 % de la *C* ha caducado. Un cliente elige un yogur al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) El yogur esté caducado.

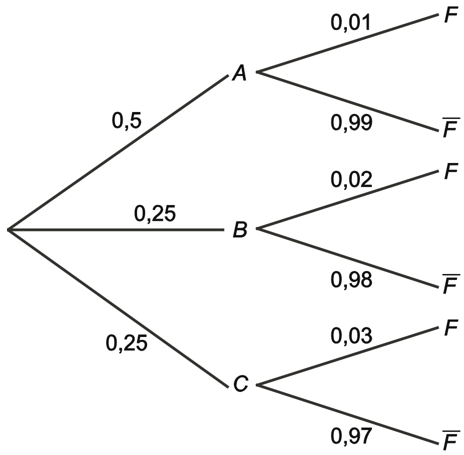
b) Si se sabe que el yogur está caducado, sea de la marca *A*.

Sean los sucesos:

A ="yogur de la marca A"
B = "yogur de la marca B"
C = "yogur de la marca C"
F = "el yogur está caducado"
$\overline{F}$ = "el yogur no está caducado"

Elegido al azar un yogur, se tiene que:
$P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,25$; $P(C) = 0,25$;

$P(F \mid A) = 0,01$; $P(F \mid B) = 0,02$; $P(F \mid C) = 0,03$



a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, se calcula la probabilidad de que el yogur esté caducado.
$P(F) = P(A) \cdot P(F \mid A) + P(B) \cdot P(F \mid B) + P(C) \cdot P(F \mid C) = 0,5 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,03 = 0,0175$

b) Mediante el teorema de Bayes, sabiendo que el yogur está caducado, se calcula la probabilidad de que sea de la marca A.

$$P(A \mid F) = \frac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{P(F)} = \frac{0,5 \cdot 0,01}{0,0175} = 0,2857$$

117. La probabilidad de que en una central nuclear se produzca un incidente es 0,01. El 99% de los casos en que se produce un incidente suena la alarma, que con probabilidad 0,001 suena aunque no se haya producido incidente (falsa alarma). Elegido un día al azar, calcula la probabilidad de que:

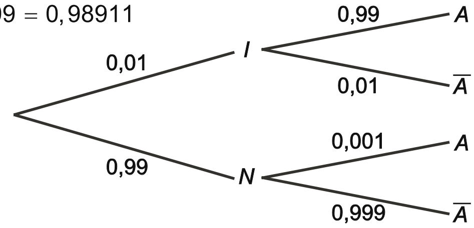
a) No suene la alarma.

b) Suponiendo que la alarma haya sonado, no se haya producido ningún incidente.

Sean los sucesos:
I = "se ha producido un incidente" ; $\overline{I} = N$ = "no se ha producido un incidente";
A = "suena la alarma"; $\overline{A}$ = "la alarma no suena".
Elegido un caso al azar, del enunciado se deduce que:

$P(I) = 0{,}01$; $P(N) = 0{,}99$; $P(A \mid I) = 0{,}99$; $P(\overline{A} \mid I) = 0{,}01$; $P(A \mid N) = 0{,}001$; $P(\overline{A} \mid N) = 0{,}999$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que en un día elegido al azar no suene la alarma es:
$P(\overline{A}) = P(I)\cdot P(\overline{A} \mid I) + P(N)\cdot P(\overline{A} \mid N) = 0{,}01\cdot 0{,}01 + 0{,}99\cdot 0{,}999 = 0{,}98911$



b) Mediante el teorema de Bayes, se calcula la probabilidad de que no se haya producido ningún incidente cuando haya sonado la alarma.

$$P(N \mid A) = \frac{P(N)\cdot P(A \mid N)}{P(A)} = \frac{0{,}99\cdot 0{,}001}{1-0{,}98911} = 0{,}09091$$

118. En una población el 40 % son hombres y el 60 % mujeres. El 80 % de los hombres y el 20% de las mujeres son aficionados al fútbol. Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Sea aficionada al fútbol.

b) No sea aficionada al fútbol.

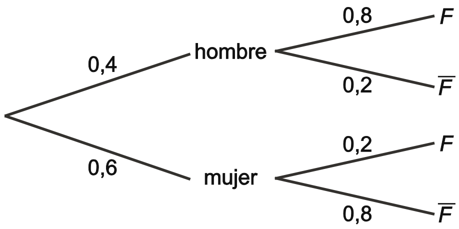
c) Sea hombre y no le guste el fútbol.

d) Sea mujer si se sabe que es aficionada al fútbol.

Si en la población, se selecciona una persona al azar, sean los sucesos:

H ="la persona seleccionada es hombre"; M = "la persona seleccionada es mujer"
F = "la persona es aficionada al fútbol", $\overline{F}$ = "la persona no es aficionada al fútbol"

De los porcentajes del enunciado, se deducen las probabilidades siguientes:
$P(H) = 0{,}4$; $P(M) = 0{,}6$; $P(F \mid H) = 0{,}8$; $P(\overline{F} \mid H) = 0{,}2$; $P(F \mid M) = 0{,}2$; $P(\overline{F} \mid M) = 0{,}8$



a) La probabilidad del suceso F se calcula utilizando el teorema de la probabilidad total:
$P(F) = P(H)\cdot P(F \mid H) + P(M)\cdot P(F \mid M) = 0{,}4\cdot 0{,}8 + 0{,}6\cdot 0{,}2 = 0{,}44$

b) La probabilidad de que no sea aficionada al fútbol es, por tanto, $P(\overline{F}) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$.

c) La probabilidad de que sea hombre y no le guste el fútbol es la probabilidad del suceso $H \cap \overline{F}$.
Es decir: $P(H \cap \overline{F}) = P(H)\cdot P(\overline{F} \mid H) = 0{,}4\cdot 0{,}2 = 0{,}08$

d) Mediante el teorema de Bayes se obtiene: $$P(M \mid F) = \frac{P(M)\cdot P(F \mid M)}{P(F)} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}2}{0{,}44} = 0{,}273$$

119. En una localidad funcionan dos agencias de alquiler de coches. La agencia *A* controla el 60% del mercado local y la empresa *B* el resto. El 9 % de los coches de la agencia *A* y el 20 % de la empresa *B* necesitan revisión mecánica. Calcula la probabilidad de que un coche de alquiler elegido al azar

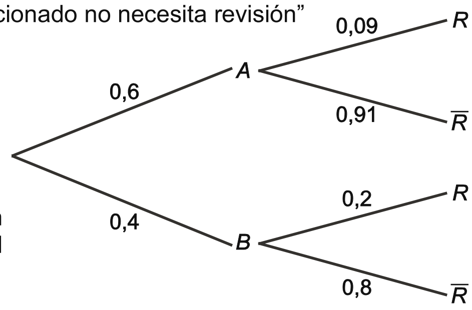
a) Necesite revisión mecánica.

b) Sea de la agencia *B* si se sabe que necesita revisión.

c) Sea de la agencia *A* si se sabe que no necesita revisión.

Sean los sucesos:

A = "el coche seleccionado es de la agencia A"; B = "el coche seleccionado es de la agencia B"
R = "el coche seleccionado necesita revisión" ; $\overline{R}$ = "el coche seleccionado no necesita revisión"



Elegido un coche al azar se tiene que:
$P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,4$; $P(R \mid A) = 0,09$;
$P(\overline{R} \mid A) = 0,91$; $P(R \mid B) = 0,2$; $P(\overline{R} \mid B) = 0,8$

a) La probabilidad de que le coche seleccionado necesite revisión mecánica se calcula utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(A) \cdot P(R \mid A) + P(B) \cdot P(R \mid B) = 0,6 \cdot 0,09 + 0,4 \cdot 0,2 = 0,134$$

b) Empleando el teorema de Bayes: $P(B \mid R) = \dfrac{P(B) \cdot P(R \mid B)}{P(R)} = \dfrac{0,4 \cdot 0,2}{0,134} = 0,597$

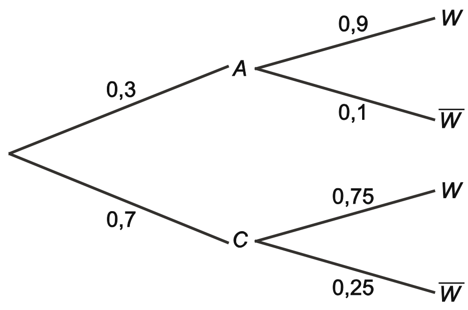
c) Por último, A sabiendo que no necesita revisión es: $P(A \mid \overline{R}) = \dfrac{P(A) \cdot P(\overline{R} \mid A)}{P(\overline{R})} = \dfrac{0,6 \cdot 0,91}{1 - 0,134} = 0,63$.

120. Tras atracar un establecimiento, los asaltantes tienen solo dos posibles vías de escape: por la avenida principal o por las calles adyacentes. Con probabilidad 0,3 intentarán escapar por la avenida, en cuyo caso la policía los atrapará con probabilidad 0,9. Mientras que si huyen por las calles adyacentes la probabilidad de que consigan fugarse es de 0,25. Calcula la probabilidad de que:

a) Los ladrones consigan escapar.

b) Los ladrones eligieran la vía principal si es que consiguieron escapar.

c) Los ladrones eligieran las vías adyacentes para escapar, si se sabe que han sido alcanzados por la policía.



Sean los sucesos:

A = "Los asaltantes huyen por la avenida principal"

C = "Los asaltantes huyen por las calles adyacentes"

W = "La policía atrapa a los asaltantes"

$\overline{W}$ = "la policía no detiene a los asaltantes"

Del enunciado se deduce que:
$P(A) = 0,3$; $P(C) = 0,7$; $P(W \mid A) = 0,9$;

$P(\overline{W} \mid A) = 0,1$; $P(W \mid C) = 0,75$; $P(\overline{W} \mid C) = 0,25$

a) Utilizando el teorema de la probabilidad total, se calcula la probabilidad de que los ladrones consigan escapar:
$$P(\overline{W}) = P(A) \cdot P(\overline{W} \mid A) + P(C) \cdot P(\overline{W} \mid C) = 0,3 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,25 = 0,205$$

b) Mediante el teorema de Bayes, se calcula la probabilidad de que los ladrones huyan por la avenida principal, sabiendo que han conseguido escapar:
$$P(A \mid \overline{W}) = \frac{P(A) \cdot P(\overline{W} \mid A)}{P(\overline{W})} = \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,205} = 0,1463$$

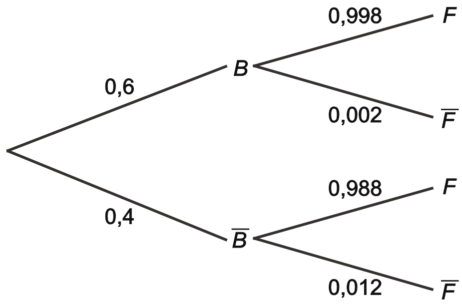
c) Por último: $P(C \mid W) = \dfrac{P(C) \cdot P(W \mid C)}{P(W)} = \dfrac{0,7 \cdot 0,75}{1 - 0,205} = 0,6604$

121. Con buen tiempo un avión tiene un aterrizaje feliz en el 99,8 % de los casos. Si el tiempo es malo, la probabilidad de accidente al aterrizar es 0,012. En una ciudad en la que el 60 % de los días hace buen tiempo, calcula la probabilidad de que en un día y un vuelo elegidos al azar:

a) Se produzca un accidente en el aterrizaje.

b) Que haga buen tiempo ese día si se ha producido un accidente al aterrizar.

Sean los sucesos:
B = "El tiempo es bueno" ; $\overline{B}$ = "el tiempo no es bueno";
F = "aterrizaje feliz" ; $\overline{F}$ = "ha ocurrido un accidente al aterrizar"



De los datos del enunciado se desprende que las probabilidades de los sucesos implicados son:

$P(B) = 0,6$; $P(\overline{B}) = 0,4$; $P(F \mid B) = 0,998$;

$P(\overline{F} \mid B) = 0,002$; $P(F \mid \overline{B}) = 0,988$; $P(\overline{F} \mid \overline{B}) = 0,012$

a) La probabilidad de que se produzca un accidente en el aterrizaje (aterrizaje no feliz), se calcula mediante el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{F}) = P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(\overline{F} \mid B) = 0,6 \cdot 0,002 + 0,4 \cdot 0,012 = 0,006$$

b) Por último, utilizando el teorema de Bayes se obtiene: $P(B \mid \overline{F}) = \dfrac{P(B) \cdot P(\overline{F} \mid B)}{P(\overline{F})} = \dfrac{0,6 \cdot 0,002}{0,006} = 0,2$

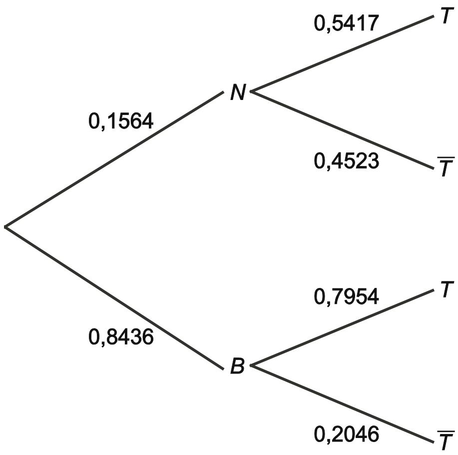
122. En un juicio por discriminación racial en unos exámenes para promoción interna de una institución, de las 307 personas que se presentaron al test 48 eran personas de raza negra (N) y el resto blancos (*B*). De las personas de raza negra, 26 aprobaron el test, mientras que de los de raza blanca aprobaron 206. ¿En qué cálculos debe basarse el jurado para emitir sentencia favorable o desfavorable a la demanda por discriminación racial? ¿Hubo realmente discriminación en este caso?

Sean los sucesos N = "persona de raza negra"; B= "persona de raza blanca"
T = "aprobar el test"; $\overline{T}$ = "no aprobar el test"
Las probabilidades de los diferentes sucesos, estimadas mediante las frecuencias observadas, son:

$P(N) = \dfrac{48}{307} = 0,1564$; $P(B) = \dfrac{259}{307} = 0,8436$;

$P(T \mid N) = \dfrac{26}{48} = 0,5417$; $P(\overline{T} \mid B) = \dfrac{22}{48} = 0,4523$;

$P(T \mid B) = \dfrac{206}{259} = 0,7954$; $P(\overline{T} \mid B) = \dfrac{53}{259} = 0,2046$



Dado que la probabilidad de aprobar el test es mayor para los blancos que para las personas de raza negra:

$$P(T \mid B) = 0,7954 > P(T \mid N) = 0,5417 ,$$

se puede concluir que sí pudo haber discriminación racial.

Otra forma de llegar a la misma conclusión sería comparar la probabilidad de ser de raza negra entre los candidatos presentados a la prueba, con la probabilidad de ser de la misma raza si se ha aprobado el test.

$$P(N \mid T) = \frac{P(N)P(T \mid N)}{P(T)} = \frac{0,1564 \cdot 0,5417}{0,1564 \cdot 0,5417 + 0,8436 \cdot 0,7954} = 0,1121 < P(N) = 0,1564$$

Verificándose también en este caso que la probabilidad de ser de raza negra habiendo aprobado es claramente inferior a la proporción de personas de raza negra entre los aspirantes.

ENTORNO MATEMÁTICO

Un problema de contaminación. Ojo con las probabilidades a priori (iniciales).

Como cada año en verano Andrea pasa unos días en el pequeño pueblo del que son sus padres. Este año, nada más llegar, se entera de que hay problemas con la contaminación del agua por arsénico en toda la zona aunque el alcalde presume de que el agua de su pueblo procede de un magnífico manantial y de que la posibilidad de que esté contaminada es solo 1 entre 100.

Andrea, que ha estudiado probabilidad, pregunta a Ventura, farmacéutico "de toda la vida", que se encarga de realizar el test, cuál es la probabilidad de que este dé positivo (agua contaminada) aún cuando realmente el agua no lo esté. La respuesta es que según las especificaciones de la prueba, el 5 % de las veces el test da un falso positivo, pero que, argumenta el farmacéutico, el 99 % de las veces que el agua está contaminada el test da positivo.

Realizada la prueba del agua, con gran expectación, esta da positivo. En el pueblo cunde el desánimo, hasta que Andrea, con unos cálculos sencillos muestra que la probabilidad de que el agua esté contaminada es apenas un poco más del 15% y, que para asegurarse realmente hay que volverla a repetir.

¿En qué se basa Andrea para realizar esta afirmación? ¿Dónde está realmente el problema?

Si se repite el test ¿Qué probabilidades habría que tomar como iniciales?

Consideremos los siguientes sucesos: C ="el agua está contaminada"; T = "el test da positivo"
y sus contrarios, $\overline{C}$ = "el agua no está contaminada" y $\overline{T}$ = "el test da negativo".

Según la información que proporciona el alcalde: $P(C) = 0,01 \quad ; \quad P(\overline{C}) = 0,99$

El 5 % de las veces el test da un falso positivo, es decir, aunque el agua no esté contaminada, el test da positivo, y por tanto el 95 % de las veces el test da negativo cuando el agua no está contaminada. Luego:

$$P(T \mid \overline{C}) = 0,05 \quad ; \quad P(\overline{T} \mid \overline{C}) = 0,95$$

Por otro lado, el 99 % de las veces que el agua está contaminada el test da positivo y, por tanto, el 1 % el test da negativo cuando el agua está realmente contaminada. Es decir,

$$P(T \mid C) = 0,99 \quad ; \quad P(\overline{T} \mid C) = 0,01$$

La probabilidad de que el test dé positivo viene dada por el teorema de la probabilidad total:

$$P(T) = P(C)\cdot P(T \mid C) + P(\overline{C})\cdot P(T \mid \overline{C}) = 0,01\cdot 0,99 + 0,99\cdot 0,05 = 0,0594$$

Si efectuado un test al agua, este da positivo, la probabilidad final de que el agua esté contaminada se calcula utilizando el teorema de Bayes, esto es:

$$P(C \mid T) = \frac{P(C)\cdot P(T \mid C)}{P(T)} = \frac{0,01\cdot 0,99}{0,0594} = 0,1667$$

De modo que, la afirmación de Andrea se basa en la probabilidad final calculada por el teorema de Bayes de que el agua esté realmente contaminada, que es $P(C \mid T) = 0,1667$ (algo más del 15%).

El problema real se encuentra en las probabilidades iniciales, facilitadas por el alcalde. En efecto, ya que si ahora se repitiese el test, tomando como probabilidades iniciales las probabilidades finales del primer test, resultaría:

$$P(C) = 0,1667 \quad ; \quad P(\overline{C}) = 0,8333$$

En cuyo caso, la probabilidad de que el test de negativo en este segundo intento es:

$$P(\overline{T}) = P(C)\cdot P(\overline{T} \mid C) + P(\overline{C})\cdot P(\overline{T} \mid \overline{C}) = 0,1667\cdot 0,01 + 0,8333\cdot 0,95 = 0,7933$$

Y, por tanto, la probabilidad de que el agua esté contaminada si este segundo test ha dado negativo es:

$$P(C \mid \overline{T}) = \frac{P(C)\cdot P(\overline{T} \mid C)}{P(\overline{T})} = \frac{0,1667\cdot 0,01}{0,7933} = 0,0021$$

Es decir, se puede afirmar que el agua no está contaminada.

En cambio, la probabilidad de que el test de positivo en este segundo intento es:

$$P(T) = P(C)\cdot P(T \mid C) + P(\overline{C})\cdot P(T \mid \overline{C}) = 0,1667\cdot 0,99 + 0,8333\cdot 0,05 = 0,2067$$

Y la probabilidad de que el agua esté contaminada si el segundo test ha dado positivo es:

$$P(C \mid T) = \frac{P(C)\cdot P(T \mid C)}{P(T)} = \frac{0,1667\cdot 0,99}{0,2067} = 0,7984$$

Lo que quiere decir que si este segundo test da positivo, la probabilidad de que el agua esté contaminada es alta, casi un 80 %.

¿Tienes coche? Si eres joven y varón pagas más seguro.

Marcos está a punto de cumplir 21 años y sus padres van a regalarle su primer coche, con la condición de que el seguro lo tiene que pagar él cada año. Por eso ha estado investigando en las distintas compañías, y esto es lo que ha descubierto:

- **Además del tipo de póliza y del valor del vehículo, la edad, el sexo, el estado civil del conductor y su historial (si está convicto por accidente de tráfico) son variables que las compañías de seguros utilizan para determinar la prima que una persona debe pagar por el seguro de su vehículo.**
- **A igualdad de las otras condiciones, los jóvenes de 25 o menos años pagan más por las primas de seguros y, entre estos los hombres pagan más que las mujeres.**

Marcos, completamente indignado, quiere indagar la causa de esta aparente "injusticia". Tras varias incursiones por internet averigua que de la población de personas de 25 años o menos con permiso de conducir, el 51 % son hombres y el 49 % mujeres. Y que la tasa de accidentes en este colectivo es 0,006.

Además ha conseguido averiguar que, entre los jóvenes de 25 o menos años, en el 70% de los casos de accidente está involucrado un hombre y en el 30% una mujer.

Los datos se recogen en la tabla, donde:

$$\boldsymbol{P(\text{Accidente} \cap \text{Mujer}) = P(\text{Accidente}) \cdot P(\text{Mujer} \mid \text{Accidente}) = 0,006 \cdot 0,30 = 0,0018}$$

	Accidente	No accidente	
Hombre			0,51
Mujer	0,0018		
	0,006		1

Con estos datos, ¿es posible dar una explicación al hecho de que las compañías de seguros cobren más a los jóvenes varones que a las mujeres? ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un accidente un hombre joven? ¿Y una mujer joven? Compáralos

En primer lugar, una vez calculada la probabilidad del suceso "Tener un accidente y ser mujer" completamos la tabla de contingencia, con las siguientes probabilidades:

	Accidente	No accidente	
Hombre	0,0042	0,5058	0,51
Mujer	0,0018	0,4882	0,49
	0,006	0,994	1

Es decir, como:

$$P(\text{Accidente}) = 0,006 \quad ; \quad P(\text{Hombre}|\text{accidente}) = 0,7 \quad ; \quad P(\text{Mujer} \mid \text{Accidente}) = 0,30$$

Se tiene que:

$$P(\text{Accidente} \cap \text{Hombre}) = P(\text{Accidente}) \cdot P(\text{Hombre} \mid \text{Accidente}) = 0,006 \cdot 0,70 = 0,0042$$

Con estas dos probabilidades, ya se observa que es menos probable encontrase una mujer involucrada en un accidente que un hombre. Sin embargo la relación definitiva la proporciona el cociente de probabilidades finales y para ello:

$$P(\text{Accidente} \mid \text{Hombre}) = \frac{P(\text{Accidente} \cap \text{Hombre})}{P(\text{Hombre})} = \frac{0,0042}{0,51} = 0,00824$$

$$P(\text{Accidente} \mid \text{Mujer}) = \frac{P(\text{Accidente} \cap \text{Mujer})}{P(\text{Mujer})} = \frac{0,0018}{0,49} = 0,00367$$

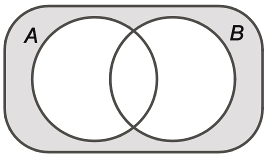
de donde: $\dfrac{P(\text{Accidente} \mid \text{Hombre})}{P(\text{Accidente} \mid \text{Mujer})} = \dfrac{0,00824}{0,00367} = 2,242$

Con lo que es casi dos veces y cuarto más probable que se produzca un accidente cuando el que conduce es un hombre, por lo que las compañías tienden a aplicar primas de seguro más altas a los hombres jóvenes que a las mujeres jóvenes.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Escribe, mediante operaciones con sucesos, la parte coloreada del siguiente diagrama de Venn.



La zona coloreada es el contrario de la unión de los sucesos A y B, esto es $\overline{A \cup B}$

2. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio E tales que:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = 0,7, P(A - B) = 0,3 \text{ y } P(B - A) = 0,2.}$$

a) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos y la de su intersección.

b) Los sucesos A y B ¿son independientes?

a) Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$; $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B - A) \Rightarrow 0,7 = P(A) + 0,2 \Rightarrow P(A) = 0,5$,

y de ahí $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,3 = 0,5 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,2$.

Por tanto: $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B) = 0,2 + 0,2 = 0,4$

b) Los sucesos A y B son independientes ya que $P(A \cap B) = 0,2 = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$

3. Una bolsa contiene 5 bolas blancas y 3 verdes. De la bolsa se extraen dos bolas. Calcula la probabilidad de que sean una de cada color si:

a) La extracción es una a una sin reemplazamiento.

b) Las dos bolas se extraen simultáneamente.

a) Sea el suceso A: “obtener una bola de cada color”. En ambos casos se considera que los resultados posibles son equiprobables y se utiliza la regla de Laplace.

Si la extracción se realiza una a una sin reemplazamiento, el suceso A se puede poner como unión de dos sucesos incompatibles:

$A_{BV} =$ “la primera es blanca y la segunda verde” ; $A_{VB} =$ “la primera es verde y la segunda blanca”

$$P(A_{BV}) = P(1^{\text{a}} \text{ blanca}) \cdot P(2^{\text{a}} \text{ verde} \mid 1^{\text{a}} \text{ blanca}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

$$P(A_{VB}) = P(1^{\text{a}} \text{ verde}) \cdot P(2^{\text{a}} \text{ blanca} \mid 1^{\text{a}} \text{ verde}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

Por lo que: $P(A) = P(A_{VB}) + P(A_{BV}) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

b) Si la extracción de las dos bolas se realiza simultáneamente tenemos exactamente la misma situación anterior pero lo podemos plantear de otro modo, el número de resultados posibles equiprobables al extraer dos bolas de una bolsa que contiene 8 bolas es: $C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$.

El número de resultados favorables al suceso A, es: $C_{5,1} \cdot C_{3,1} = \binom{5}{1} \cdot \binom{3}{1} = 5 \cdot 3 = 15$. $P(A) = \frac{15}{28}$

4. Una entidad bancaria dispone de dos sistemas de alarma independientes. El sistema *A* se dispara en el 90% de las veces de intento de atraco; mientras que el sistema *B* lo hace en el 85%. Si se produce un atraco calcula la probabilidad de que:

a) Funcionen los dos sistemas.

b) Funcione solo el sistema *A*.

c) Funcione al menos uno de los dos sistemas.

Sean los sucesos: *A*: "funcione el sistema *A*"; *B*: "funcione el sistema *B*"

a) El suceso "que funcionen los dos sistemas" es la intersección de ambos y como se tiene que :

$P(A) = 0,9$; $P(B) = 0,85$ podemos deducir que $P(A \cap B) = 0,9 \cdot 0,85 = 0,765$ por ser independientes.

b) El suceso "funcione solo el sistema *A*", es el suceso $A \cap \overline{B} = A - B$ cuya probabilidad se puede calcular de dos formas (al menos):

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,9 - 0,765 = 0,135$$

o bien, puesto que los sucesos A y $\overline{B}$ también son independientes.

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0,9 \cdot 0,15 = 0,135$$

c) El suceso "funcione al menos uno de los dos sistemas" es el suceso $A \cup B$, cuya probabilidad es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9 + 0,85 - 0,765 = 0,985$$

5. De un grupo de 100 estudiantes, 80 estudian inglés, 30 francés y 15 ambos idiomas. Del grupo se selecciona un estudiante al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que no estudie ninguno de los dos idiomas?

Considera los sucesos: *I* = "estudia inglés", *F*= "estudia francés"

De las frecuencias observadas, se puede inferir que las probabilidades de los sucesos son:

$$P(I) = 0,8 \quad ; \quad P(F) = 0,3 \quad ; \quad P(I \cap F) = 0,15$$

El suceso "no estudie ninguno de los dos idiomas" se puede escribir $\overline{I} \cap \overline{F} = \overline{I \cup F}$, luego:

$$P\left(\overline{I} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{I \cup F}\right) = 1 - P(I \cup F) = 1 - = 1 - (0,8 + 0,3 - 0,15) = 1 - 0,95 = 0,05$$

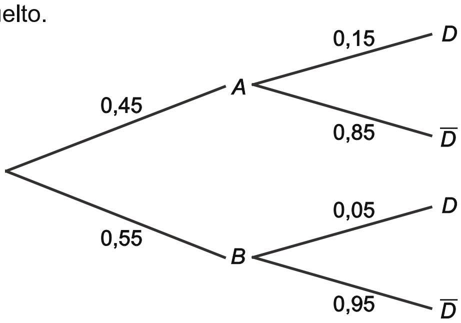
6. Una empresa comercializa dos productos *A* y *B*. El 45 % de sus ventas corresponde al producto *A* y el resto al *B*. El 15 % de las ventas correspondientes al producto *A* es objeto de devolución; mientras que ese porcentaje es solo el 5 % de las ventas de *B*. Un cliente compra un artículo de esta empresa. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea devuelto.

b) Sea de la clase *B* si se sabe que el artículo comprado ha sido devuelto.

Una vez comprado un artículo, sean los sucesos:
A = "el artículo es del tipo *A*", *B* = "el artículo es del tipo *B*"
D = "el artículos se devuelve", $\overline{D}$ = "el artículo no es devuelto"

Del enunciado, se tienen las siguientes probabilidades:



$P(A) = 0,45$; $P(B) = 0,55$; $P(D \mid A) = 0,15$;

$P(\overline{D} \mid A) = 0,85$; $P(D \mid B) = 0,05$; $P(\overline{D} \mid B) = 0,95$

a) La probabilidad de que el artículo sea devuelto se calcula utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D \mid A) + P(B) \cdot P(D \mid B) = 0,45 \cdot 0,15 + 0,55 \cdot 0,05 = 0,095$$

b) Si se sabe que el artículo ha sido devuelto, la probabilidad de que sea de la clase *B* se calcula mediante el teorema de Bayes:

$$P(B \mid D) = \frac{P(B) \cdot P(D \mid B)}{P(D)} = \frac{0,55 \cdot 0,05}{0,095} = 0,2895$$

7. Una ferretería tiene en su almacén bombillas de bajo consumo: 500 bombillas de 20 W, 300 de 15 W y 200 de 12 W. Los controles de calidad realizados por la empresa que fabrica las bombillas han permitido determinar las probabilidades de fallo de cada tipo de producto durante la primera hora de encendido, siendo 0,03 para las bombillas de 20 W, de 0,02, para las de 15 W y de 0,01 para las bombillas de 12 W.

c) Si se elige al azar una bombilla del almacén, ¿cuál es la probabilidad de que se produzca un fallo durante la primera hora de encendido?

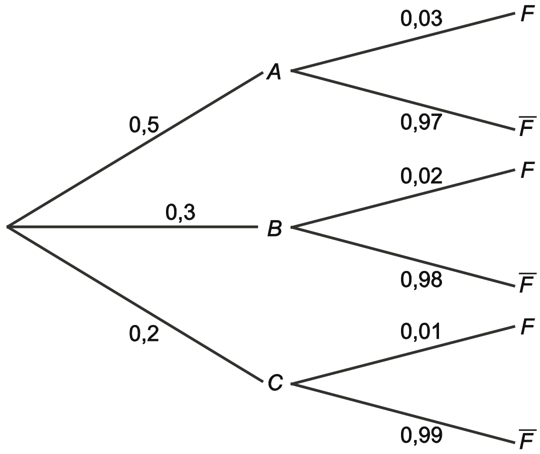
d) Se somete al control de calidad una bombilla del almacén elegida al azar y falla en su primera hora de encendido, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bombilla de 20 W?

Elegida una bombilla, sean los sucesos:
A = "Es de 20 W", B = "es de 15 W", C = "es de 12 W"
F = "la bombilla falla en la primera hora de encendido", $\overline{F}$ = "la bombilla no falla en la primera hora de encendido"

Del enunciado, se tienen las siguientes probabilidades:

$$P(A)=\frac{500}{1000}=0,5 \quad ; \quad P(B)=\frac{300}{1000}=0,3 \quad ; \quad P(C)=\frac{200}{1000}=0,2 \quad ;$$

$$P(F \mid A)=0,03 \quad ; \quad P(F \mid B)=0,02 \quad ; \quad P(F \mid C)=0,01$$



a) La probabilidad de que la bombilla falle se calcula utilizando el teorema de la probabilidad total:

$$P(F)=P(A)\cdot P(F \mid A)+P(B)\cdot P(F \mid B)+P(C)\cdot P(F \mid C)=$$
$$=0,5\cdot 0,03+0,3\cdot 0,02+0,2\cdot 0,01=0,023$$

b) Si se sabe que la bombilla ha fallado, la probabilidad de que sea de 20 W se calcula mediante el teorema de Bayes:

$$P(A \mid D)=\frac{P(A)\cdot P(F \mid A)}{P(F)}=\frac{0,5\cdot 0,03}{0,023}=0,6522$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. Sean *A* y *B* sucesos incompatibles asociados a un espacio muestral *E*. Entonces, $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son incompatibles:

A. En cualquier caso.

B. Nunca.

C. Solo si *A* y *B* son independientes.

D. Si *A* es el contrario de *B*.

Solución: D

2. Dos sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio son independientes si:

A. Cuando ocurre, por ejemplo, *A* entonces *B* no ocurre.

B. Cuando uno de ellos ocurre, el otro ya no puede ocurrir.

C. *A* y *B* tienen la misma probabilidad.

D. La probabilidad de *A*, por ejemplo, no se ve modificada por el hecho de que *B* ocurra.

Solución: D.

3. Si *A* y *B* son dos sucesos asociados a un espacio muestral *E*, con $P(A \cup \overline{B}) = P(A)$ y $P(B) > 0$, entonces:

A. Siempre que ocurre *A*, ocurre *B*.

B. Los sucesos son incompatibles.

C. Los sucesos *A* y *B* son independientes.

D. Ninguna de las anteriores es cierta.

Solución: D.

Señala en cada caso las respuestas correctas

4. Sean *A* y *B* sucesos asociados a un experimento, con $P(A) = 0$ entonces:

A. $P(A \cup B) = P(B)$

B. $P(A \cap B) = 0$

C. El suceso *B* contiene al *A*.

D. *A* y *B* son independientes.

Soluciones: Todas son correctas.

5. Si *A* y *B* son dos sucesos asociados a un espacio muestral *E*, y $P(A \mid B) = 0$ entonces:

A. $P(A - B) = P(B)$

B. $P(\overline{A} \mid B) = 1$

C. *A* y *B* son independientes.

D. *A* y *B* son incompatibles.

Soluciones: B y D.

Señala el dato innecesario para contestar

6. **De los sucesos *A, B* y *C* se sabe que *A* y *B* son independientes. Para calcular la probabilidad de la unión de los tres se necesita:**

A. $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$

B. $P(C \mid A \cap B)$

C. $P(A \mid B)$, $P(B \mid C)$

D. $P(A \cap C)$ y $P(B \cap C)$

Solución: D, que se obtiene de A y D.

7. **Si *A*, *B* y *C* forman una partición del espacio muestral *E*, y *H* es un suceso cualquiera, para calcular $P(B \mid H)$ se precisa:**

A. $P(H \mid A)$ y $P(H \mid C)$

B. $P(A \cup B)$ y $P(B \cup C)$

C. $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$

D. $P(H \mid B)$

Solución: B y C se deducen una de la otra.

13 Distribución binomial

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Se lanzan dos dados y se considera la variable *X*:"suma de las puntuaciones obtenidas".

a) Escribe su función de masa de probabilidad.

b) Representa el diagrama de barras correspondiente.

c) Halla la probabilidad de que *X* tome un valor mayor que 5 pero menor o igual que 7.

a) Los 36 resultados posibles equiprobables en el lanzamiento de dos dados se pueden recoger en una tabla:

	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5	5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6	6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6·6

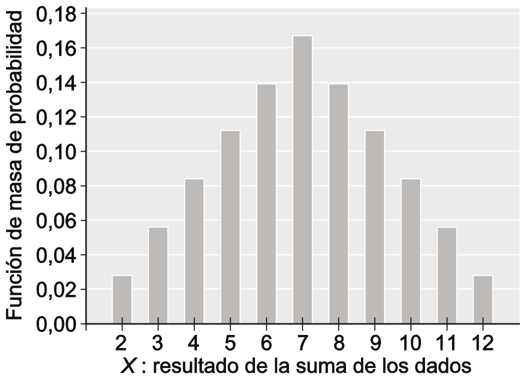
Se considera la variable *X*: "suma de las puntuaciones obtenidas", su función de masa de probabilidad se puede recoger en la tabla siguiente:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Donde, por ejemplo:

$$P(X = 6) = P(51) + P(42) + P(33) + P(24) + P(15) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

b) El diagrama de barras correspondiente a la función de masa de probabilidad de *X* es:



c) La probabilidad pedida es $P(5 < X \le 7) = P(X = 6) + P(X = 7) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{11}{36}$.

4. Sea *X* una variable aleatoria cuya función de masa de probabilidad viene dada en la tabla siguiente.Calcula el valor de *m*.

x_j	–2	0	4	6	8
p_i	0,2	0,3	m	0,1	0,15

El resultado es consecuencia de que la suma de todas ellas debe ser igual a la probabilidad del suceso seguro.

$$\sum_i p_i = 1 \Rightarrow 0,2 + 0,3 + m + 0,1 + 0,15 = 1 \Rightarrow m = 1 - 0,75 \Rightarrow m = 0,25$$

5 y 6. Ejercicios resueltos.

7. Una bolsa contiene 3 bolas: 1 bola blanca, 1 roja y 1 verde. De la bolsa se extraen al azar 2 bolas una a una con reemplazo. Sea la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes extraídas".

a) Escribe su función de masa de probabilidad y dibuja el diagrama de barras correspondiente.

b) Calcula su esperanza, su varianza y su mediana.

c) Halla el coeficiente de variación.

a) Sea la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes extraídas". Como se verá más adelante,su distribución de probabilidad es $X \sim \text{Bin}\left(n = 2\ ;\ p = \frac{1}{3}\right)$, pues la probabilidad de obtener bola verde en cada extracción es $p = \frac{1}{3}$.

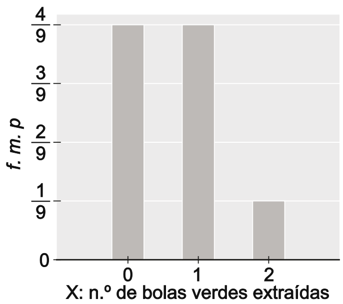
La variable aleatoria *X* puede tomar los valores 0, 1 y 2, con las siguientes probabilidades resumidas en la tabla.

$$P(X=0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1\cdot 1\cdot\frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1 = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=2) = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1\cdot\frac{1}{9}\cdot 1 = \frac{1}{9}$$

X	0	1	2
$P(X = x_j)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$



b) Al tratarse de una variable aleatoria binomial, el valor esperado y su desviación típica son:

$$E[X] = np = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\quad \text{Var}(X) = npq = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}\ \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

También se puede hacer el cálculo directamente organizando las operaciones en una tabla:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \frac{8}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

X	p_i	$x_i p_i$	$x^2_i p_i$
0	$\frac{4}{9}$	0	0
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
Suma		$\mu = E[X] = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$

La mediana de *X* es *M*= 1 ya que

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \ge 0{,}5$$

$$P(X \ge 1) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \ge 0{,}5$$

c) El coeficiente de variación es: $CV(X) = \frac{\sigma}{|\mu|} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$

8. Un jugador lanza un dado equilibrado y si el resultado es 1 o 2, pierde lo que ha apostado, si sale 3 ó 4 pierde la mitad de lo apostado, si sale 5 no gana ni pierde nada y si sale 6 gana el triple de lo que haya apostado. Si apuesta *c* euros, ¿cuál es el valor esperado de su ganancia? ¿y la desviación típica?

Sea la variable aleatoria *X*: "ganancia del jugador".

Los resultados posibles y equiprobables en lanzamiento del dado son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Con probabilidad $P(1)+P(2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ pierde lo apostado (*c* euros).

Con probabilidad $P(3)+P(4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ pierde la mitad ($\frac{c}{2}$ euros) de lo apostado.

Con probabilidad $P(5)=\frac{1}{6}$ ni pierde ni gana.

Con probabilidad $P(6)=\frac{1}{6}$ gana el triple (3*c* euros) de lo apostado.

La función de masa de probabilidad de*X* se puede resumir en la tabla adjunta.
De manera que el valor esperado de la ganancia y su desviación típica son:

X	$P(X=x)$
$-c$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{c}{2}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$
$3c$	$\frac{1}{6}$
	1

$$E[X]=-c\cdot\frac{1}{3}-\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{6}+3c\cdot\frac{1}{6}=0$$

$$\operatorname{Var}(X)=\sigma^2=(-c)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(-\frac{c}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+0^2\cdot\frac{1}{6}+(3c)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{23}{12}\cdot c^2 \Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{23}{12}}\,c$$

9. Ejercicio interactivo.

10. Simplifica la expresión $\dfrac{\left[\binom{12}{3}+\binom{12}{9}\right]\cdot 4!}{40}$.

$$\frac{\left[\binom{12}{3}+\binom{12}{9}\right]\cdot 4!}{40}=\frac{\left[\frac{12!}{3!\cdot 9!}+\frac{12!}{3!\cdot 9!}\right]\cdot 4!}{40}=\frac{\left[2\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3!}}\right]\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{40}=\frac{2\cdot 12\cdot 11\cdot\cancel{10\cdot 4}}{\cancel{40}}=264$$

11. Halla el desarrollo de $(2x^2-5y)^4$.

$$(2x^2-5y)^4=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(2x^2)^i(-5y)^{4-i}=\binom{4}{0}(-5y)^4+\binom{4}{1}(2x^2)(-5y)^3+\binom{4}{2}(2x^2)^2(-5y)^2+\binom{4}{3}(2x^2)^3(-5y)+\binom{4}{4}(2x^2)^4=$$
$$=625y^4-1000x^2y^3+600x^4y^2-160x^6y+16x^8$$

12. Determina el valor de *m* en la expresión $\binom{2m}{3}=\binom{2m}{m+3}$.

Sabiendo que $2m\geq m+3\Rightarrow m\geq 3$ se puede encontrar una solución forzando a que

$$\begin{cases}\text{o bien } 2m-(m+3)=3\Rightarrow m=6\\ \text{o bien } m+3=3\Rightarrow m=0\end{cases}$$

La segunda posibilidad contradice la primera condición. De modo quela solución correcta es$m$=6.

13. Halla el término independiente de $\left(2x^3 - \dfrac{1}{x}\right)^8$.

En el desarrollo de $\left(2x^3 - \dfrac{1}{x}\right)^8$ los términos que aparecen tienen la forma $\binom{8}{i}(2x^3)^i \cdot \left(\dfrac{-1}{x}\right)^{8-i}$. Por tanto, el término independiente debe verificar que $3i = 8 - i \Rightarrow i = 2$ para poder simplificar las potencias de x y que el término no dependa de x.

Por tanto la respuesta es $\binom{8}{2}(2x^3)^2\left(\dfrac{-1}{x}\right)^{8-2} = \dfrac{8!}{2!\cdot 6!}\cdot 2^2 \cdot (-1)^6 = 112$.

14. Ejercicio resuelto.

15. En una agencia de viajes saben que el 65% de los circuitos son por Europa. Se pregunta a un cliente si va a realizar un tour por Europa. Se considera la variable aleatoria que da valor 1 si viaja por Europa y el valor 0 en caso contrario. Halla la esperanza y la desviación típica de la variable.

Se trata de una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro $p = 0{,}65$, cuya función de masa de probabilidad es:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0{,}65^x \cdot 0{,}35^{1-x} & \text{si } x = 0 \text{ o } 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La esperanza de X es $E[X] = 0{,}65$ y su varianza es $\mathrm{Var}(X) = 0{,}65 \cdot 0{,}35 = 0{,}2275$ y $\sigma \simeq 4770$.

16. Se ha detectado que 4 de cada 100 enfermos cardiacos padecen cefalea después de tomar un nuevo fármaco. Si se elige un enfermo al azar para ver si tiene cefalea o no. Halla la esperanza y la varianza de la variable que vale 1 si el paciente tiene dolor de cabeza y 0 si no lo tiene.

Se trata de una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro $p = \dfrac{4}{100} = 0{,}04$, cuya función de masa de probabilidad es:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0{,}96^{1-x} \cdot 0{,}04^x & \text{si } x = 0 \text{ o } 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La esperanza de X es $E[X] = 0{,}04$ y su varianza es $\mathrm{Var}(X) = 0{,}04 \cdot 0{,}96 = 0{,}0384$.

17. Ejercicio resuelto.

18. En un grupo de 7 amigos, considera la variable *Y*: “número de ellos que han nacido en verano”. Si la probabilidad de que una persona nazca es la misma en cualquier estación del año, calcula:

a) Número esperado de amigos que han nacido en verano y su varianza.

b) Probabilidad de que exactamente 3 hayan nacido en verano.

c) Probabilidad de que como mucho 2 hayan nacido en verano.

Se supone que los 7 amigos se han seleccionado al azar y que la probabilidad de elegir cada uno de los 7 es la misma.

a) La variable *Y*: "número de amigos, de los 7, que ha nacido en verano", tiene una distribución binomial de parámetros $n = 7$ y $p = 0,25$, ya que 7 son los amigos y 0,25 la probabilidad de que cualquiera de ellos haya nacido en verano (una de las cuatro estaciones del año). Es decir, $Y \sim \text{Bin}(n = 7; p = 0,25)$.

Al tratarse de una variable aleatoria binomial, su esperanza y su varianza son:

$E[Y] = np = 7 \cdot 0,25 = 1,75$ $\qquad$ $\text{Var}(Y) = npq = 7 \cdot 0,25 \cdot 0,75 = 1,3125$

b) La probabilidad de que exactamente 3 hayan nacido en verano es $P(X = 3) = \binom{7}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^4 = 0,17303$.

c) La probabilidad de que como mucho dos de ellos hayan nacido en verano es:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{7}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,25^1 \cdot 0,75^6 + \binom{7}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^5 =$$

$$= 0,13348 + 0,31146 + 0,31146 = 0,7564$$

19. Un proveedor suministra lotes de materia prima de los que el 5% resulta defectuoso. De una gran partida se seleccionan al azar 6 lotes uno a uno con reemplazamiento, calcula:

a) Probabilidad de que al menos 1 sea defectuoso.

b) La varianza del número de lotes defectuosos, para una partida de 200 lotes.

Sea la variable aleatoria *X*: “número de lotes defectuosos de los 6”, cuya distribución de probabilidad es binomial con $n = 6$, número de los lotes suministrados, y $p = 0,05$, probabilidad de que, en cada elección, un lote sea defectuoso. Es decir $X \sim \text{Bin}\ (n = 6;\ p = 0,05)$.

a) La probabilidad de que por lo menos un lote sea defectuoso es:

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^6 = 1 - 0,73509 = 0,26491$$

b) Si la partida consta de $n = 200$ lotes y se considera la variable Y: “número de lotes defectuosos de los 200”, su distribución de probabilidad es $\text{Bin}(n = 200;\ p = 0,05)$, por lo que su esperanza y su varianza son:

$$E[Y] = 200 \cdot 0,05 = np = 200 \cdot 0,05 = 10 \quad \text{Var}(Y) = np(1 - p) = 200 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 9,5$$

20. Ejercicio interactivo.

21. Ejercicio resuelto.

22. En 40 días, el médico de guardia de un centro de salud ha tenido que realizar las siguientes visitas a domicilio que se recogen en la tabla siguiente: en 6 días no realizó ninguna visita, en 17 días tuvo que hacer una visita, etc.

x_j	0	1	2	3
f_j	6	17	13	4

a) Ajusta una distribución binomial a este conjunto de datos.

b) Calcula las frecuencias ajustadas y compáralas con las observadas.

c) Dibuja el diagrama de barras de ambas frecuencias.

Se considera la variable X: "número de visitas realizadas". X toma los valores 0, 1, 2, y 3.

a) Para ajustar una variable aleatoria con distribución binomial, $Y \sim \text{Bin}(n; p)$, a la variable estadística X, se observa que $n = 3$, y se calcula la media de la distribución de frecuencias, para estimar el parámetro p.

x_j	frecuencias observadas	$x_j f_j$
0	6	0
1	17	17
2	13	26
3	4	12
	40	55

De la tablase obtiene la media de la variable X: $\overline{X} = \frac{55}{40} = 1{,}375$

que se iguala a la esperanza de Y, para obtener p.

$$E[Y] = np = 3p = 1{,}375 \Rightarrow p = \frac{1{,}375}{3} = 0{,}458$$

De manera que a la variable estadística X se le ajusta una variable aleatoria Y con distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 3; p = 0{,}458)$.

b) Con la variable aleatoria Yse calculan las frecuencias ajustadas, obteniendo en primer lugar la probabilidad (ajustada) de cada uno de los valores:

$$P(Y = 0) = \binom{3}{0} 0{,}542^3 = 0{,}15922 \qquad P(Y = 1) = \binom{3}{1} 0{,}458^1 \cdot 0{,}542^2 = 0{,}40363$$

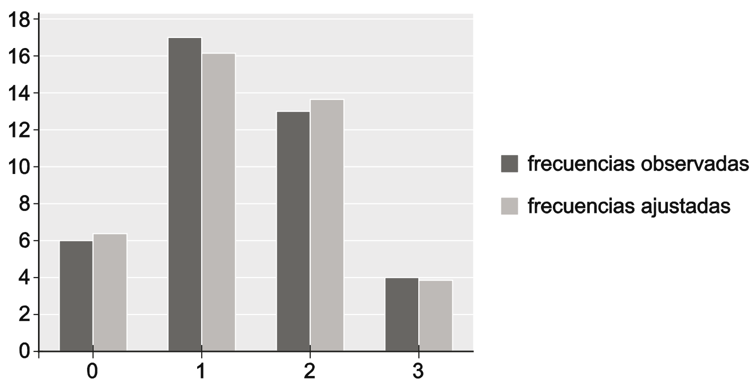
$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} 0{,}458^2 \cdot 0{,}542^1 = 0{,}34108 \qquad P(Y = 3) = \binom{3}{3} 0{,}458^3 = 0{,}09607$$

Estos valores se muestran en la tabla siguiente, junto con las frecuencias ajustas (las probabilidades ajustadas multiplicadas por 40).

Se puede apreciar, comparando las frecuencias observadas con las ajustadas, que el ajuste realizado es muy bueno.

x_j	frecuencias observadas	probabilidad ajustada	frecuencias ajustadas
0	6	0,15922	6,37
1	17	0,40363	16,15
2	13	0,34108	13,64
3	4	0,09607	3,84
	40	1	40

c) En el gráfico de diagramas de barras de las frecuencias ajustadas y observadas se puede ver también que el ajuste de la distribución estadística medianteuna distribución binomial es muy bueno.



23. En 300 familias con hijos menores de edad de un barrio de una gran ciudad se ha contabilizado el número de niñas (*X*). Los datos se recogen en la tabla.

x_j	0	1	2
f_j	75	180	45

a) Ajusta una distribución binomial a este conjunto de datos.

b) Calcula las frecuencias ajustadas y compáralas con las observadas. ¿Es razonable el ajuste?

c) Dibuja el diagrama de barras de ambas frecuencias.

La variable estadística *X:* "número de niñas", toma los valores 0, 1 y 2.

a) Si se desea ajustar una distribución binomial, $Y \sim \text{Bin}(n; p)$, a la distribución de frecuencias observadas, en este caso $n = 2$. Para estimar el parámetro p se calcula la media de la variable estadística: $\overline{X} = \frac{270}{300} = 0,9$

x_j	frecuencias observadas	$x_j f_j$
0	75	0
1	180	180
2	45	90
	300	270

Igualando este valor a la esperanza de la variable binomial, permite estimar el valor de p

$$E[Y] = 2p = 0,9 \Rightarrow p = \frac{0,9}{2} = 0,45$$

La distribución binomial que se ajusta a este conjunto de datos es $Y \sim \text{Bin}(n = 2; p = 0,45)$.

b) Se calculan, en primer lugar, las probabilidades estimadas para cada valor posible de la variable *Y*:

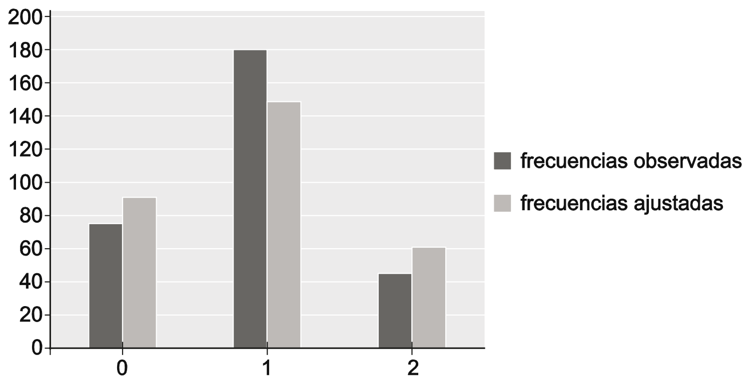
$$P(Y = 0) = \binom{2}{0} 0,55^2 = 0,3025\,;\; P(Y = 1) = \binom{2}{1} 10,45^1 \cdot 0,55^1 = 0,4950\;\;;\; P(Y = 2) = \binom{2}{2} 0,45^2 = 0,2025$$

que se incluyen en la tabla siguiente, junto con las frecuencias ajustas (las probabilidades ajustadas multiplicadas por 300):

xj	frecuencias observadas	probabilidad estimada	frecuencias ajustadas
0	75	0,3025	90,75
1	180	0,4950	148,5
2	45	0,2025	60,75
	300	1	300

Donde se puede observar que el ajuste realizado no es bueno, dada la diferencia entre las frecuencias ajustadas y las observadas.

c) La aproximación realizada mediante la distribución binomial a la distribución empírica del número de niñas, puede verse en el siguiente gráfico:



24 a 32. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Variable aleatoria discreta

33. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada en la tabla siguiente:

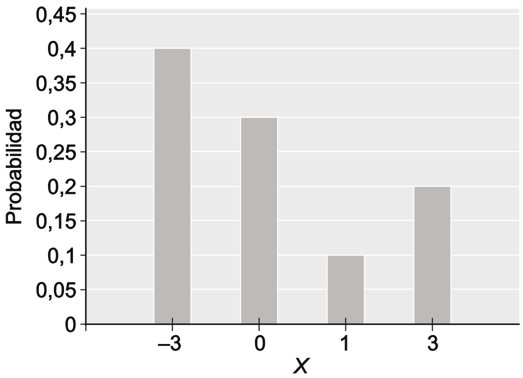
x_j	–3	0	1	3
p_j	0,4	0,3	0,1	0,2

a) Representa gráficamente la distribución.

b) Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica.

c) Calcula $P(1 < X < 2{,}5)$ y $P(X < 1)$.

a) Se representa la distribución de probabilidad discreta mediante un diagrama de barras:



b) Para los cálculos se amplía la tabla con las columnas necesarias:

x_j	p_j	x_jp_j	$x_j^2p_j$
–3	0,4	–1,2	3,6
0	0,3	0	0
1	0,1	0,1	0,1
3	0,2	0,6	1,8
	1	–0,5	5,5

$$E[X] = \sum_{j=1}^{4} p_j x_j = -0{,}5$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{j=1}^{4} p_j x_j^2 - E[X]^2 = 5{,}5 - (-0{,}5)^2 = 5{,}25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5{,}25} = 2{,}2913$$

c) A partir de la función de masa de probabilidad:

$P(1 < X < 2{,}5) = 0$

$P(X < 1) = P(x = -3) + P(X = 0) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

34. Sea *X* una variable que toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4 con probabilidades 0,2; *k*; 0,3; 0,15 y 0,1.

a) Determina *k*.

b) Halla $P(X > 1)$.

a) La suma de todas las probabilidades de los sucesos elementales es 1 luego:

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}2 + k + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}1 = k + 0{,}75 = 1 \Rightarrow k = 0{,}25$

b) $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}55$

35. Sea X una variable aleatoria con función de masa de probabilidad $P(X=k)=\dfrac{k}{x+1}$ para $x=0,1,2,3$.

a) Calcula el valor de la constante k.

b) Representa gráficamente la función de masa de probabilidad.

c) Calcula la esperanza y la varianza de X.

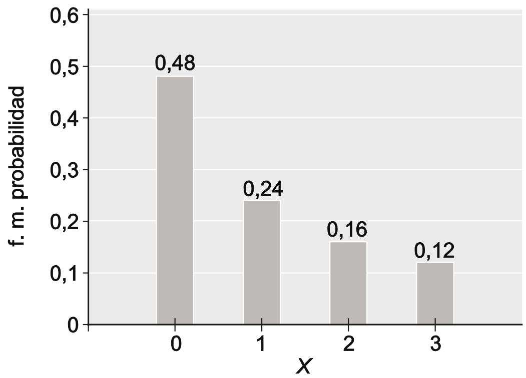
a) Como las probabilidades de los valores de la variable deben sumar 1:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1 \Rightarrow k+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}=1 \Rightarrow \frac{25\cdot k}{12}=1 \Rightarrow k=\frac{12}{25}=0,48$$

La función de masa de probabilidad de la variable X se muestra en la tabla siguiente:

x_j	0	1	2	3
p_j	0,48	0,24	0,16	0,12

b) El diagrama de barras de la distribución de probabilidad de X es:

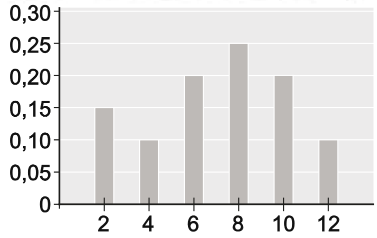


c) La esperanza y la varianza de la variable se calculan a partir de los resultados de la tabla siguiente:

x_j	p_j	$p_j x_j$	$p_j x_j^2$
0	0,48	0	0
1	0,24	0,24	0,24
2	0,16	0,32	0,64
3	0,12	0,36	1,08
	1	0,92	1,96

$$E[X]=\sum_{j=1}^{4} p_j x_j=0,92 \quad \text{Var}(X)=\sum_{j=1}^{4} p_j x_j^2-E[X]^2=1,96-(0,92)^2=1,1136$$

36. Sea una variable aleatoria *X* cuya función de masa de probabilidad viene dada por diagrama adjunto:



a) Comprueba que se trata de una función de masa de probabilidad.

b) Calcula su esperanza y su varianza.

c) Calcula la probabilidad de que el valor de la variable sea menor o igual que 6. ¿Y mayor que 9?

a) La tabla siguiente recoge los valores de la variable aleatoria *X*, con sus respectivas probabilidades:

x_j	2	4	6	8	10	12
p_j	0,15	0,1	0,2	0,25	0,2	0,1

Se trata de una distribución de probabilidad porque:

$p_j \geq 0$, para todo $j = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 y además $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 0,15 + 0,1 + 0,2 + 0,25 + 0,2 + 0,1 = 1$

b) Para calcular la esperanza y la varianza se amplía la tabla de la distribución de *X* con las columnas necesarias:

x_j	p_j	p_jx_j	$p_jx_j^2$
2	0,15	0,3	0,6
4	0,1	0,4	1,6
6	0,2	1,2	7,2
8	0,25	2	16
10	0,2	2	20
12	0,1	1,2	14,4
	1	7,1	59,8

De modo que la esperanza y la varianza de la variable aleatoria *X* son respectivamente:

$$E[X] = \sum_{j=1}^{6} p_j x_j = 7,1$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{j=1}^{6} p_j x_j^2 - E[X]^2 = 59,8 - 7,1^2 = 9,39$$

c) $P(X \leq 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,45$

$P(X > 9) = P(X = 10) + P(X = 12) = p_5 + p_6 = 0,3$

37. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta *X* viene dada en la tabla siguiente:

x_j	1	2	3	4	5
p_j	0,07	*a*	0,2	*b*	0,33

Además, $P(X \leq 4) = 0,67$ **y** $P(X \geq 4) = 0,6$ **. Calcula:**

a) Los valores de *a* y *b* para completar la tabla.

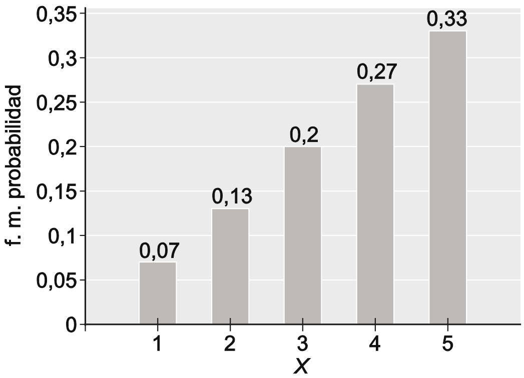
b) Dibuja la gráfica de la función de masa de probabilidad de *X*.

a) Teniendo en cuenta que $P(X \geq 4) = 0,6$, se tiene que: $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = b + 0,33 = 0,6 \Rightarrow b = 0,27$

Y como $P(X \leq 4) = 0,67$, resulta:

$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,07 + a + 0,2 + 0,27 = 0,67 \Rightarrow a = 0,13$

b) El diagrama de barras de la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria *X* es:



38. La esperanza de una variable aleatoria X es 7. Se sabe que X puede tomar el valor 4 con probabilidad 0,2; el valor –1 con probabilidad p y el valor a con probabilidad 0,5.

a) Calcula los valores de a y p.

b) Calcula la desviación típica de X.

c) Halla el coeficiente de variación de X.

a) La tabla de la derecha recoge la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.Como las probabilidades deben sumar 1, se tiene que: $p+0,2+0,5=1 \Rightarrow p=0,3$

Y, dado que: $E[X]=7 \Rightarrow 0,3\cdot(-1)+0,2\cdot 4+0,5\cdot a=7 \Rightarrow a=13$

x_j	p_j
–1	p
4	0,2
a	0,5

b) Para el cálculo de la varianza y de la desviación típica, se añade a la tabla de la distribución la columna correspondientey por lo tanto:

$$\sigma^2=\text{Var}(X)=\sum_{j=1}^{3}p_jx_j^2-E[X]^2=88-7^2=39 \Rightarrow \sigma=\sqrt{39}=6,2450$$

x_j	p_j	$p_jx_j^2$
–1	0,3	0,3
4	0,2	3,2
13	0,5	84,5
	1	88

El coeficiente de variación es entonces: $CV(X)=\dfrac{\sigma}{|\mu|}=\dfrac{6,2450}{7}=0,89214$

39. De una bolsa que contiene 4 bolas blancas y 3 verdes se extraen una a una sin reemplazamiento 2 bolas. Considera la variable aleatoria X: número de bolas verdes extraídas.

a) Halla su distribución de probabilidad y dibuja el diagrama de barras.

b) Calcula su esperanza y su varianza.

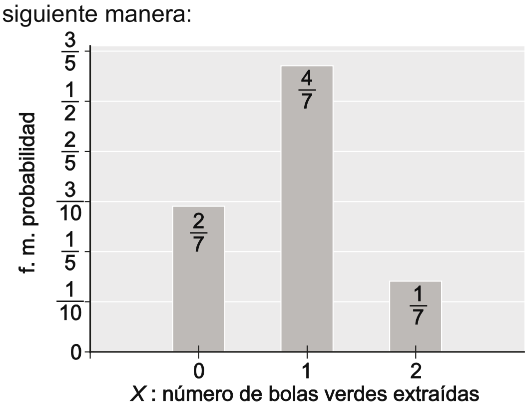
Como lo que interesa es el número de bolas verdes y no el orden en el que se han obtenido, se puede considerar que las bolas se extraen simultáneamente. De esta manera, el número de resultados posibles (igualmente probables) al extraer dos bolas de la bolsa es el número de combinaciones de orden 2 (las dos bolas que se extraen) de 7 elementos (las siete bolas de la bolsa): $C_{7,2}=\dfrac{7\cdot 6}{2}=21$.

La probabilidad de la variable X: “número de bolas verdes extraídas” se obtiene por la regla de Laplace:

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{2}}{21}=\frac{2}{7} \qquad P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}}{21}=\frac{4}{7} \qquad P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}}{21}=\frac{1}{7}$$

a) De modo que la distribución de probabilidad de X se puede escribir de la siguiente manera:

$X=x_j$	0	1	2
$P(X=x_j)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$



b) La esperanza y la varianza se calculan así:

$$E[X]=\sum_{j=1}^{3}p_jx_j=\frac{6}{7} \qquad \sigma^2=\text{Var}(X)=\sum_{j=1}^{3}p_jx_j^2-E[X]^2=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$$

Números combinatorios. Binomio de Newton.

40. Calcula aplicando las propiedades de los números combinatorios:

a) $\binom{252}{250}$ **b)** $\binom{25}{3}+\binom{25}{4}$ **c)** $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ **d)** $\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n-1}$

a) $\binom{252}{250}=\frac{252!}{250!\cdot 2!}=\frac{252\cdot 251}{2}=31626$

b) $\binom{25}{3}+\binom{25}{4}=\binom{25+1}{4}=\binom{26}{4}=\frac{26!}{4!\cdot 22!}=\frac{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=14\,950$

c) Como $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4\Rightarrow\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=2^4-\binom{4}{4}=16-1=15$

d) $\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n-1}=\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n+2-(n-1)}=\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{3}=\binom{n+2+1}{3}=\binom{n+3}{3}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$

41. Halla el valor de *x* en las siguientes expresiones.

a) $\binom{x}{2}=45$ **b)** $\binom{20}{x-1}=\binom{20}{2x+3}$ **c)** $\binom{x}{6}=\binom{x}{9}$ **d)** $\binom{8x}{x+2}=\binom{8x}{6x+3}$

a) $\binom{x}{2}=45\Rightarrow\frac{x\cdot(x-1)}{2}=45\Rightarrow x^2-x-90=0\Rightarrow x=-9\vee x=10$ (–9 no tiene sentido en términos combinatorios).

b) Como $\binom{n}{x}=\binom{n}{y}\Rightarrow x=n-y$ entonces $\binom{20}{x-1}=\binom{20}{2x+3}\Rightarrow x-1=20-(2x+3)\Rightarrow x=6$

c) $\binom{x}{6}=\binom{x}{9}\Rightarrow 6=x-9\Rightarrow x=15$

d) $\binom{8x}{x+2}=\binom{8x}{6x+3}\Rightarrow x+2=8x-(6x+3)\Rightarrow x=5$

42. Realiza los desarrollos de los siguientes binomios.

a) $(2+x)^4$ **b)** $\left(2-\frac{x}{3}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}\right)^5$ **d)** $\left(1+2\sqrt{2}\right)^5$ **e)** $\left(2-3\sqrt{3}\right)^6$ **f)** $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4$

a) $(2+x)^4=\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}\cdot 2^j x^{4-j}=\binom{4}{0}\cdot 2^4+\binom{4}{1}\cdot 2^3 x+\binom{4}{2}\cdot 2^2 x^2+\binom{4}{3}\cdot 2x^3+\binom{4}{4}\cdot x^4=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$

b) $\left(2-\frac{x}{3}\right)^3=\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\cdot 2^j\left(\frac{-x}{3}\right)^{4-j}=\binom{3}{0}\cdot 2^3+\binom{3}{1}\cdot 2^2\left(\frac{-x}{3}\right)+\binom{3}{2}\cdot 2\left(\frac{-x}{3}\right)^2+\binom{3}{3}\left(\frac{-x}{3}\right)^3=8-4x+\frac{2x^2}{3}-\frac{x^3}{27}$

c) $\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}\right)^5=\left(\frac{x^3+4}{2x^2}\right)^5=\left(x^3+4\right)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}\cdot\left(x^3\right)^j(4)^{5-j}=$

$=\frac{1}{32x^{10}}\left[\binom{5}{0}\cdot x^{15}+\binom{5}{1}\cdot x^{12}\cdot 4+\binom{5}{2}\cdot x^9\cdot 4^2+\binom{5}{3}\cdot x^6\cdot 4^3+\binom{5}{4}\cdot x^3\cdot 4^4+\binom{5}{5}\cdot 4^5\right]=$

$=\frac{1}{32x^{10}}\left[x^{15}+20x^{12}+160x^9+640x^6+1280x^3+1024\right]=\frac{1}{32}x^5+\frac{5}{8}x^2+\frac{5}{x}+\frac{20}{x^4}+\frac{40}{x^7}+\frac{32}{x^{10}}$

d) $\left(1+2\sqrt{2}\right)^5=\left(1+2^{\frac{3}{2}}\right)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}\cdot 1^j 2^{\frac{3(5-j)}{2}}=\binom{5}{0}\cdot 2^{\frac{15}{2}}+\binom{5}{1}\cdot 2^6+\binom{5}{2}\cdot 2^{\frac{9}{2}}+\binom{5}{3}\cdot 2^3+\binom{5}{4}\cdot 2^{\frac{3}{2}}+\binom{5}{5}=$

$=128\sqrt{2}+320+160\sqrt{2}+80+10\sqrt{2}+1=401+298\sqrt{2}$

e) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^6=\left(2-3^{\frac{3}{2}}\right)^6=\sum_{j=0}^{6}\binom{6}{j}\cdot 2^j\left(-3^{\frac{3(6-j)}{2}}\right)=\binom{6}{0}\cdot(-3)^9+\binom{6}{1}\cdot 2^1\cdot(-3)^{\frac{15}{2}}+\binom{6}{2}\cdot 2^2\cdot(-3)^6+\binom{6}{3}\cdot 2^3\cdot(-3)^{\frac{9}{2}}+$

$+\binom{6}{4}\cdot 2^4\cdot(-3)^3+\binom{6}{5}\cdot 2^5\cdot(-3)^{\frac{3}{2}}+\binom{6}{6}\cdot 2^6=2^6-576\sqrt{3}+6480-12\,960\sqrt{34}+43\,740-26\,224\sqrt{3}+19\,683=$

$=69\,967-39\,760\sqrt{3}$

f) $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4=\left(2\sqrt{2}\right)^4=16\cdot 4=64$

Variables aleatorias binomiales.

43. La variable aleatoria *X* tiene una distribución binomial de parámetros *n*= 8 y *p*= 0,6. Calcula:

a) La esperanza y la varianza de X **b)** $P(X<6)$, $P(X\geq 5)$ y $P(3\leq x<5)$

La distribución de la variable aleatoria es $X\sim\text{Bin}(n=8;p=0,6)$.

a) La esperanza y la varianza de X son respectivamente:

$E[X]=np=8\cdot 0,6=4,8$ $\sigma^2=\text{Var}(X)=npq=8\cdot 0,6\cdot 0,4=1,92$

b) Las probabilidades se pueden obtener mediante el uso de la fórmula $P(X=x)=\binom{n}{x}0,6^x\,0,4^{n-x}$, o bien de la tabla de la distribución binomial, teniendo en cuenta que en la tabla se tienen las probabilidades de la variable $Y\sim\text{Bin}(n=8;p=0,4)$ y que $P(X=x)=P(Y=n-x)$.

$P(X<6)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$
$=P(Y=8)+P(Y=7)+P(Y=6)+P(Y=5)+P(Y=4)+P(Y=3)=$
$=0,0007+0,0079+0,0413+0,1239+0,2322+0,2787=0,6847$

$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=P(Y=3)+P(Y=2)+P(Y=1)+P(Y=0)=$
$=0,2787+0,2090+0,0896+0,0168=0,5941$

$\text{P}(3\leq X<5)=P(X=3)+P(X=4)=P(Y=5)+P(Y=4)=0,1239+0,2322=0,3561$

44. Se lanzan 5 dados equilibrados y sea *Y*: "número de unos conseguidos en los 5 lanzamientos". Calcula la probabilidad de obtener:

a) Más de un uno.

b) Al menos cuatro unos.

c) Exactamente dos unos.

La variable aleatoria *Y* tiene distribución $\text{Bin}\left(n=5,\ p=\frac{1}{6}\right)$. Las probabilidades se obtienen a partir de la fórmula, ya que no se encuentran en las tablas.

a) $P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5-\binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4=1-0,40188-0,40188=0,19624$

b) $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0=0,00322+0,00013=0,00335$

c) $P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=0,16075$

45. De una urna que contiene 4 bolas verdes y 6 rojas se extraen sucesivamente y con reemplazamiento 6 bolas. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Exactamente 3 bolas verdes. **b)** Más de 4 bolas verdes. **c)** Más de 2 pero menos de 5 bolas verdes.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes obtenidas en las 6 extracciones", cuya distribución es $\text{Bin}(n=6;\ p=0,4)$.

Las probabilidades que se piden se pueden obtener directamente de las tablas de la distribución binomial o utilizar la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial:

a) $P(X=3)=0,2765$

b) $P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)=0,0369+0,0041=0,0410$

c) $P(2<X<5)=P(X=3)+P(X=4)=0,2765+0,1382=0,4147$

46. Una moneda está trucada de modo que la probabilidad de obtener cara es 0,6. Si se lanza 10 veces la moneda, calcula:

a) La probabilidad de obtener al menos 8 caras.

b) La probabilidad de obtener menos de 5 caras.

c) El número medio de caras y la desviación típica de la variable número de caras en los 10 lanzamientos.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de caras obtenidas en los diez lanzamientos", cuya distribución es $\text{Bin}(n=10;\ p=0,6)$.

a) $P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{8}0,6^8\,0,4^2+\binom{10}{9}0,6^9\,0,4^1+\binom{10}{10}0,6^{10}=$

$=0,1209+0,0403+0,0060=0,1672$

b) $P(X<5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$

$=\binom{10}{0}0,4^{10}+\binom{10}{1}0,6^1\cdot 0,4^9+\binom{10}{2}0,6^2\cdot 0,4^8+\binom{10}{3}0,6^3\cdot 0,4^7+\binom{10}{4}0,6^4\cdot 0,4^6=$

$=0,0001+0,0016+0,0106+0,0425+0,1115=0,1663$

c) $E[X]=np=10\cdot 0,6=6$ $\sigma^2=\text{Var}(X)=np(1-p)=10\cdot 0,6\cdot 0,4=2,4$ $\sigma=\sqrt{\text{Var}(X)}=\sqrt{2,4}\simeq 1,55$

47. La probabilidad de obtener un seis al lanzar un dado trucado es 0,4. Si se lanza el dado 10 veces, calcula la probabilidad de obtener:

a) Exactamente 5 seises.

b) Más de la mitad de las veces un seis.

c) Un número par de seises.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de seises obtenidos al lanzar 10 veces el dado". La distribución de la variable *X* es $\text{Bin}\ (n=10, p=0{,}4)$.

a) $P(X=5)=\binom{10}{5}0{,}4^5 0{,}6^5=0{,}2007$

b) $P(X>5)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$

$=\binom{10}{6}0{,}4^6\cdot 0{,}6^4+\binom{10}{7}0{,}4^7\cdot 0{,}6^3+\binom{10}{8}0{,}4^8\cdot 0{,}6^2+\binom{10}{9}0{,}4^9\cdot 0{,}6^1+\binom{10}{10}0{,}4^{10}=$

$=0{,}1115+0{,}0425+0{,}0106+0{,}0016+0{,}0001=0{,}1663$

c) $P(X=\text{PAR})=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)+P(X=8)+P(X=10)=$

$=\binom{10}{2}0{,}4^2\cdot 0{,}6^8+\binom{10}{4}0{,}4^4\cdot 0{,}6^6+\binom{10}{6}0{,}4^6\cdot 0{,}6^8+\binom{10}{8}0{,}4^8\cdot 0{,}6^2+\binom{10}{10}0{,}4^{10}=$

$=0{,}1209+0{,}2508+0{,}1115+0{,}0106+0{,}0001=0{,}4939$

Ajuste de una distribución binomial.

48. En una población se han investigado las alergias a cuatro tipos de medicamentos. Para ello, se ha observado mediante pruebas la reacción de 500 personas a los cuatro medicamentos y los resultados se han recogido en la tabla siguiente: 141 no han presentado ningún tipo de alergia, 205 presentaron alergia a uno de los medicamentos, etc.

x_j	0	1	2	3	4
f_j	141	205	120	14	20

a) Ajusta una distribución binomial a los datos.

b) Representa gráficamente las distribuciones de frecuencias observadas y ajustadas y comenta la precisión del ajuste.

a) La variable es X: "n.º de medicamentos a los que se presenta alergia". Esta variable, toma los valores: $0, 1, 2, 3$ y 4, de forma que si se desea ajustar una distribución $\text{Bin}(n, p)$, el parámetro $n = 4$ y se debe estimar el parámetro p.

x_j	f_j	x_jf_j
0	141	0
1	205	205
2	120	240
3	14	42
4	20	80
	500	567

La media de la distribución de frecuencias es $\overline{X} = \dfrac{567}{500} = 1{,}134$.

La esperanza de la binomial es $E[X] = np = 4p$, igualando resulta: $4p = 1{,}134 \Rightarrow p = 0{,}2835$

De manera que la distribución binomial que se ajusta a los datos es $X \sim \text{Bin}\ (n = 4;\ p = 0{,}2835)$.

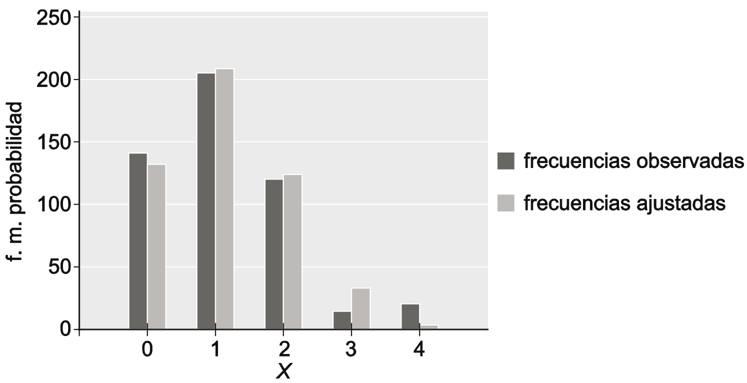
$$P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}2835^0 \cdot 0{,}7165^4 = 0{,}26355 \qquad P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot 0{,}2835^1 \cdot 0{,}7165^3 = 0{,}41712$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}2835^2 \cdot 0{,}7165^2 = 0{,}24757 \qquad P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}2835^3 \cdot 0{,}7165^1 = 0{,}06530$$

$$P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}2835^4 \cdot 0{,}7165^0 = 0{,}00646$$

b) La distribución de frecuencias ajustadas frente a las observadas se muestra en la tabla y en el gráfico siguientes:

x_j	frecuencias Observadas f_j	probabilidades ajustadas $P(X=x_j)$	frecuencias Ajustadas
0	141	0,26355	131,78
1	205	0,41712	208,56
2	120	0,24757	123,78
3	14	0,06530	32,65
4	20	0,00646	3,23
	500	1	500



En el gráfico, puede observarse que el ajuste es razonablemente bueno en su conjunto, si bien las frecuencias ajustadas a los dos valores más altos, $x = 3$ y $x = 4$, quedan lejos de las frecuencias observadas.

Síntesis

49. La función de masa de probabilidad del número de vehículos que se venden en un concesionario de coches es:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	0,04	0,04	m	0,12	0,3	0,25	0,1	0,05

a) Hallar el valor de m.

b) Dibuja el diagrama de barras de la función de masa de probabilidad.

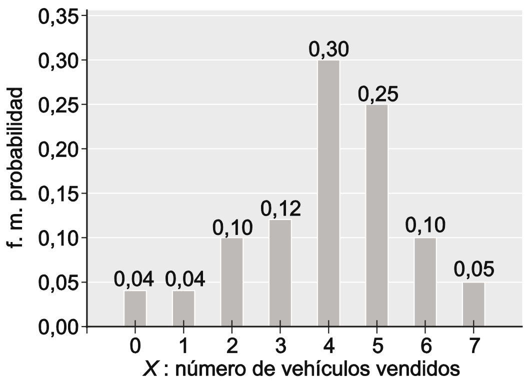
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el concesionario se vendan más de dos coches pero menos de seis?

d) Si se sabe que en una semana se han vendido más de 3 coches, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan vendido menos de 7?

a) Como la suma de las probabilidades debe ser la unidad:

$$\sum_{j=1}^{8} p_j = 1 \Rightarrow 0,04+0,04+m+0,12+0,3+0,25+0,1+0,05=1 \Rightarrow m=0,1$$

b) El diagrama de barras de la función de masa de probabilidad es:



c) $P(2<X<6)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$
$=0,12+0,3+0,25=0,67$

d) $P(3<X<7)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$
$=0,3+0,25+0,1=0,65$
$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=$
$=0,30+0,25+0,10+0,05=0,7$
Se tiene que: $P(X<7|X>3)=\dfrac{P(3<X<7)}{P(X>3)}=\dfrac{0,65}{0,7}=0,9286$.

50. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\binom{2x+1}{x-1}=\binom{2x+1}{2x-7}$ **b)** $\binom{x}{2}-x=\binom{x-2}{2}+3$

a) $\binom{2x+1}{x-1}=\binom{2x+1}{2x-7} \Rightarrow \begin{cases} x-1=2x+1-(2x-7) \Rightarrow x-1=8 \Rightarrow x=9 \\ x-1=2x-7 \Rightarrow x=6 \end{cases}$

b) $\binom{x}{2}-x=\binom{x-2}{2}+3 \Rightarrow \dfrac{x!}{2!(x-2)!}-x=\dfrac{(x-2)!}{2!(x-4)!}+3 \Rightarrow \dfrac{x(x-1)}{2}-x=\dfrac{(x-2)(x-3)}{2}+3$
$\Rightarrow \dfrac{x^2-x-2x}{2}=\dfrac{x^2-5x+12}{2} \Rightarrow x=6$

51. Una variable aleatoria X, tiene una distribución binomial donde la probabilidad del éxito es $p=0,36$ y la desviación típica es $\sigma=2,4$ Halla la probabilidad de que la variable tome un valor igual que su media.

La distribución de la variable aleatoria es $X \sim \text{Bin}(n;\, p=0,36)$, con $q=1-0,36=0,64$, de la expresión de la varianza se tiene:
$\sigma^2=\text{Var}(X)=npq \Rightarrow 2,4^2=n\cdot 0,36\cdot 0,64=5,76 \Rightarrow n=25$

La esperanza será entonces $E[X]=np=25\cdot 0,36=9$, de donde $P(X=9)=\binom{25}{9}0,36^9\cdot 0,64^{16}=0,164\,386$.

52. Considera las variables binomiales $X \sim \text{Bin}(n = 24; p = 0,2)$ e $Y \sim \text{Bin}(n = 12; p = 0,4)$.

a) Comprueba que tienen la misma media.

b) ¿Cuál de las dos distribuciones tienen los datos más agrupados en torno a la media?

c) Halla las siguientes probabilidades:

i) $P(X = 12)$ **ii)** $P(Y = 6)$

a) Por tratarse de distribuciones binomiales:

$E[X] = n_X \cdot p_X = 24 \cdot 0,2 = 4,8$

$E[Y] = n_Y \cdot p_Y = 12 \cdot 0,4 = 4,8$

b) Para responder a esta cuestión, se calculan los coeficientes de variación.

$$\sigma_X^2 = Var[X] = n_X \cdot p_X \cdot q_X = 24 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 3,84 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3,84} = 1,959592 \Rightarrow CV(X) = \frac{\sigma_X}{|\mu_X|} = \frac{1,959592}{4,8} = 0,40825$$

$$\sigma_Y^2 = Var[X] = n_Y \cdot p_Y \cdot q_Y = 12 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 2,88 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2,88} = 1,697056 \Rightarrow CV(X) = \frac{\sigma_Y}{|\mu_Y|} = \frac{1,697056}{4,8} = 0,35355$$

La variable Y tiene los datos más agrupados alrededor de la media.

c) $P(X = 12) = \binom{24}{12} 0,2^{12} \cdot 0,8^{12} = 0,000761$ $\quad P(Y = 6) = \binom{12}{6} 0,4^{6} \cdot 0,6^{6} = 0,17658$

CUESTIONES

53. Con la ayuda del desarrollo del binomio $(1+1)^n$, demuestra que se verifica la igualdad:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Es suficiente con expresar 2 como suma de 1+1 y desarrollar la potencia del binomio:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^j \cdot 1^{n-j} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

54. Encuentra dos distribuciones binomiales con la misma esperanza, de modo que el número de ensayos realizados en una de ellas sea el triple que en la otra.

Se busca $X \sim \text{Bin}(n, p_1)$ e $Y \sim \text{Bin}(3n, p_2)$ tales que: $E[X] = np_1 = 3np_2 = E[Y] \Rightarrow p_1 = 3p_2$

Sirven, por tanto, cualquier par que cumplan esta condición, es decir $X \sim \text{Bin}(n, 3p_2)$ e $Y \sim \text{Bin}(3n, p_2)$ lo que obliga a que $3p_2 \leq 1 \Rightarrow p_2 \leq \frac{1}{3}$.

Por ejemplo $X \sim \text{Bin}(n; 0,6)$ e $Y \sim \text{Bin}(3n; 0,2)$

PROBLEMAS

55. Un sistema eléctrico está formado por 6 componentes independientes. La probabilidad de que falle uno cualquiera de los componentes es 0,15. Calcula la probabilidad de que:

a) No falle ninguno.

b) Fallen exactamente 3 componentes.

c) Fallen como mucho 2 componentes.

d) Fallen al menos dos componentes si se sabe que ya ha fallado al menos uno.

La variable aleatoria es$X$: "número de componentes que fallan de las 6". La distribución de X es $\text{Bin}(n=6;\ p=0{,}15)$

a) $P(X=0)=\binom{6}{0}\cdot 0{,}15^0\cdot 0{,}85^6=0{,}85^6=0{,}3771$

b) $P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot 0{,}15^3\cdot 0{,}85^3=0{,}85^6=0{,}04145$

c) $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}3771+0{,}3993+0{,}1762=0{,}9526$

d) En este caso, se trata de una probabilidad condicionada: $P(X\ge 2|X\ge 1)=\frac{P(X\ge 2,\ X\ge 1)}{P(X\ge 1)}=\frac{P(X\ge 2)}{P(X\ge 1)}$

$P(X\ge 2)=1-P(X=1)-P(X=0)=1-(0{,}3771+0{,}3993)=0{,}2236$

$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0{,}3771=0{,}6229$ $P(X\ge 2|X\ge 1)=\frac{P(X\ge 2)}{P(X\ge 1)}=\frac{0{,}2236}{0{,}6229}=0{,}3590$

56. En el último mes, un vendedor de periódicos ha devuelto por término medio el 30% de los ejemplares diarios que le han servido del periódico A. Si un día concreto, elegido al azar, le sirven 15 unidades, calcula la probabilidad de que

a) Devuelva por lo menos 4.

b) Venda todos los periódicos.

c) Venda más de 12, si se sabe que al menos ha vendido 10.

Sea la variable aleatoria X: "número de ejemplares devueltos, de los 15".La distribución es $X\sim\text{Bin}(n=15;\ p=0{,}3)$

a) $P(X=0)=\binom{15}{0}\cdot 0{,}7^{15}=0{,}00475$ $P(X=1)=\binom{15}{1}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^{14}=0{,}03052$

$P(X=2)=\binom{15}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^{13}=0{,}09156$ $P(X=3)=\binom{15}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^{12}=0{,}17004$

$P(X\ge 4)=1-P(X\le 3)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right]=0{,}70313$

b) En este caso, no devolvería ninguno, $X=0$, de modo que, del apartado anterior: $P(X=0)=0{,}00475$.

c) Se trata de una probabilidad condicionada, teniendo en cuenta, que vender más de12 ejemplares, significa devolver menos de 3 y vender al menos 10 es equivalente a devolver como mucho 5.

$P(X<3\,|\,X\le 5)=\frac{P(X<3\wedge X\le 5)}{P(X\le 5)}=\frac{P(X<3)}{P(X\le 5)}=\frac{0{,}12683}{0{,}72162}=0{,}17576$

$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}00475+0{,}03052+0{,}09156=0{,}12683$

$P(X=4)=\binom{15}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}7^{11}=0{,}21862$ $P(X=5)=\binom{15}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{10}=0{,}20613$

$P(X\le 5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$
$=0{,}00475+0{,}03052+0{,}09156+0{,}17004+0{,}21862+0{,}20613=0{,}72162$

57. En un examen tipo test se debe responder a 10 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 posibles respuestas solo una de las cuales es correcta. Para aprobar es preciso contestar correctamente al menos a 6 preguntas. Calcula la probabilidad de que un estudiante apruebe si:

a) Contesta al azar a todas las preguntas. **b)** Domina la mitad de la asignatura.

Sea la variable aleatoria X: "numero de respuestas correctas, de las 10".

En este caso, como la respuesta a cada pregunta es al azar y se dispone de 4 posibles respuestas, la probabilidad de acertar cada pregunta es $p = 0{,}25$ y, en consecuencia, la variable X tiene distribución $\text{Bin}\,(n = 10; p = 0{,}25)$.

a) De manera que la probabilidad de contestar correctamente al menos a 6 preguntas (para aprobar) es:

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$
$$= 0{,}0162 + 0{,}0031 + 0{,}0004 + 0{,}0000 + 0{,}0000 = 0{,}0197$$

Donde cada probabilidad se puede obtener de la tabla de la binomial o se calcula mediante:

$$P(X = k) = \binom{05}{k} \cdot 0{,}25^k \cdot 0{,}75^{10-k}$$

b) Si domina la mitad de la asignatura, entonces la probabilidad de acertar cada pregunta es $p = 0{,}5$ y, por tanto, la distribución de la variable X es $\text{Bin}\,(n = 10,\ p = 0{,}5)$:

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$
$$= 0{,}2051 + 0{,}1172 + 0{,}0439 + 0{,}0098 + 0{,}0010 = 0{,}377$$

58. En el control de calidad del proceso de fabricación de baterías de litio de una determinada marca, el 15% de las unidades es rechazado. De la producción de un día determinado se eligen al azar 8 baterías. Calcula la probabilidad de que:

a) Al menos una de las baterías sea rechazada.

b) Las ocho pasen el control de calidad.

c) ¿Cuál es el número mínimo de baterías que debe ser inspeccionado para que se rechace por lo menos una de las bateríascon probabilidad mayor de 0,9 ?

Sea la variable aleatoria X: "número de baterías que son rechazadas, de las 8 seleccionadas". La variable X tiene distribución de probabilidad $\text{Bin}\,(n = 8;\ p = 0{,}15)$:

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}85^8 = 1 - 0{,}2725 = 0{,}7275$

b) La probabilidad de que no sea rechazada ninguna (las 8 pasen el control) es $P(X = 0) = 0{,}85^8 = 0{,}2725$.

c) Si se examinan k baterías elegidas al azar, la probabilidad de que se rechace al menos una de ellas es:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{k}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^k = 1 - 0{,}85^k$$

Para que esta probabilidad sea superior a 0,9 se tienen que cumplir que $1 - 0{,}85^k > 0{,}9$.

Despejando y tomando logaritmos (o tanteando) se obtiene:

$1 - 0{,}85^k > 0{,}9 \Rightarrow 0{,}1 > 0{,}85^k \Rightarrow \log 0{,}1 > \log 0{,}85^k = k \cdot \log 0{,}85$ y por ser $\log 0{,}85$ negativo: $k > \dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}85} \simeq 14{,}17$

Como k debe ser entero, dando valores a k, se obtiene quedeben examinarse por lo menos 15 baterías para que, con probabilidad superior a 0,9, al menos una de ellas sea rechazada.

59. En la consulta de un médico especialista 3 de cada 10 pacientes son diagnosticados con una enfermedad grave. Si se eligen 8 pacientes al azar de esta consulta, calcula la probabilidad de que hayan sido diagnosticados con enfermedad grave:

a) Como máximo 3 pacientes.
b) Más de 2 pacientes.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de pacientes, de los 8 elegidos, diagnosticados con una enfermedad grave". La variable *X* tiene una distribución $\text{Bin}\,(n=8;\ p=0{,}3)$.

Usando la tabla de la distribución binomial tenemos los siguientes resultados:

a) $P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}0576+0{,}1977+0{,}2965+0{,}2541=0{,}8059$

b) $P(X>2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=1-0{,}0576-0{,}1977-0{,}2965=0{,}4482$

60. En un barrio de una gran ciudad se ha realizado un estudio acerca del número de personas que viven en cada hogar. En la tabla se recogen los resultados de una muestra de 200 hogares.

N.º personas	0	1	2	3	4	5
N.º hogares	6	24	52	64	42	12

a) Ajusta una distribución binomial al conjunto de datos.

b) Calcula las frecuencias ajustadas.

c) Dibuja los diagramas de frecuencias observadas y ajustadas.

d) Comenta la precisión del ajuste realizado.

e) Elegido un hogar al azar, ¿cuál es la probabilidad de que en él vivan menos de 3 personas?

a) La variable es *X*: "n.º de personas que viven en cada hogar". Esta variable, toma los valores: 0,1, 2, 3, 4 y 5, de forma que si se desea ajustar una distribución $\text{Bin}(n, p)$, el parámetro $n=5$ y se debe estimar el parámetro p. Para ello se calcula la media de la distribución de frecuencias y se iguala a la esperanza de la distribución binomial.

x_j	f_j	x_jf_j
0	6	0
1	24	24
2	52	104
3	64	192
4	42	168
5	12	60
	200	548

La media de la distribución de frecuencias es $\bar{X}=\dfrac{548}{200}=2{,}74$.

Y como la esperanza de la binomial es $E[X]=np=5p$, igualando resulta: $5p=2{,}74\ \Rightarrow\ p=0{,}548$.

De manera que la distribución binomial que se ajusta a los datos es $X \sim \text{Bin}\,(n=5;\ p=0{,}548)$.

b) $P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0{,}548^0\cdot 0{,}452^5=0{,}01887$

$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}548^1\cdot 0{,}452^4=0{,}11437$

$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}548^2\cdot 0{,}452^3=0{,}27732$

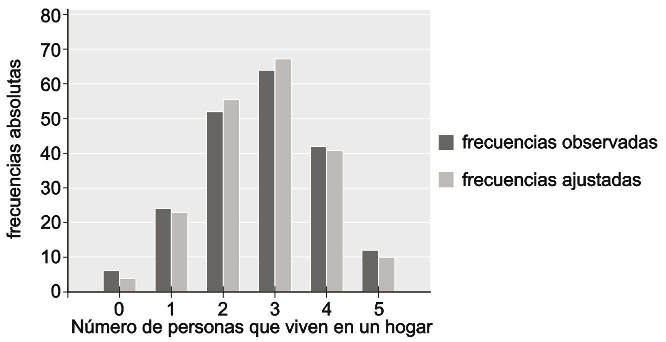
$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}548^3\cdot 0{,}452^2=0{,}33622$

$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot 0{,}548^4\cdot 0{,}452^1=0{,}20381$

$P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0{,}548^5\cdot 0{,}452^0=0{,}04942$

c)

x_j	Frecuencia observada f_j	Probabilidad. ajustada $P(X=x_j)$	Frecuencia ajustada $200\cdot P(X=x_j)$
0	6	0,01887	3,77
1	24	0,11437	22,87
2	52	0,27732	55,46
3	64	0,33622	67,24
4	42	0,20381	40,76
5	12	0,04942	9,88
	200	1	200



d) El ajuste es bastante bueno, ya que las frecuencias ajustadas se aproximan razonablemente a las observadas.

e) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}01887+0{,}11437+0{,}27732=0{,}41056$

61. Una granja envasa todos los huevos que produce en cajas de 12 unidades. En el proceso de transporte se rompen el 10% de los huevos envasados. Un cliente compra en el supermercado una caja de esta granja, calcula la probabilidad de que:

a) No tenga ningún huevo roto.

b) Haya exactamente un huevo roto.

c) Por lo menos uno de los huevos de la caja esté roto.

Suponiendo que la caja ha sido elegida al azar, Sea la variable aleatoria *X*: "número de huevos rotos, de los 12 que contiene la caja". La variable *X* tiene una distribución $\text{Bin}\ (n = 12;\ p = 0{,}10)$.

a) $P(X = 0) = \binom{12}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{12} = 0{,}28243$

b) $P(X = 1) = \binom{12}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{11} = 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}31381 = 0{,}37657$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}28243 = 0{,}71757$

62. En un centro educativo, el 25% de los alumnos está inscrito en alguna actividad extraescolar. Si elegimos al azar 15 alumnos de este centro, calcula la probabilidad de que

a) Ninguno participe en actividades extraescolares.

b) Entre 6 y 8 participen en actividades extraescolares.

c) Como mucho 4 participen en actividades extraescolares.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de alumnos, de los 15 seleccionados, inscritos en actividades extraescolares". La distribución de probabilidad de la variable *X* es $\text{Bin}\ (n = 15;\ p = 0{,}25)$.

a) $P(X = 0) = \binom{15}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{15} = 0{,}01336$

b) $P(6 \leq X \leq 8) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) = \binom{15}{6} \cdot 0{,}25^6 \cdot 0{,}75^9 + \binom{15}{7} \cdot 0{,}25^7 \cdot 0{,}75^8 + \binom{15}{8} \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^7 =$

$= 0{,}09175 + 0{,}03932 + 0{,}01311 = 0{,}14418$

c) $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$

$= \binom{15}{0} 0{,}75^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^{13} + \binom{15}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^{12} + \binom{15}{3} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^{11} =$

$= 0{,}01336 + 0{,}06682 + 0{,}15591 + 0{,}2250 + 0{,}22520 = 0{,}68649$

63. De las dos situaciones siguientes, ¿cuál es la que tiene mayor probabilidad de ocurrir?

a) Obtener al menos dos seises al lanzar seis dados.

b) Obtener al menos 7 caras al lanzar una moneda 10 veces.

a) Sea la variable aleatoria X: "número de ases en el lanzamiento de seis dados" (equivale a lanzar un dado seis veces), cuya distribución de probabilidad es $X \sim \text{Bin}\left(n=6;\ p=\frac{1}{6}\right)$.

La probabilidad de obtener al menos dos seises se calcula de la siguiente forma:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^6 - \binom{6}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 =$$

$$= 1 - 0{,}33490 - 0{,}40188 = 0{,}26322$$

b) Sea la variable Y: "n.º de caras al lanzar una moneda 10 veces", cuya distribución es $Y \sim \text{Bin}(n=10;\ p=0{,}5)$

La probabilidad de obtener al menos 7 caras es:

$$P(Y \geq 7) = P(Y=7) + P(Y=8) + P(Y=9) + P(Y=10) = \binom{15}{7}0{,}5^{10} + \binom{15}{8}0{,}5^{10} + \binom{15}{9}0{,}5^{10} + \binom{10}{10}0{,}5^{10} =$$

$$= 0{,}11719 + 0{,}04394 + 0{,}00977 + 0{,}00098 = 0{,}17188$$

Luego es más probable obtener al menos dos seises al lanzar seis dados.

64. Según los datos del organismo correspondiente el 80% de los incendios que se producen en la época de calor son provocados. Si de todos los incendios que se han producido en una determinada región se eligen 12 al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Más de 10 hayan sido provocados.

b) Como mucho 3 hayan sido accidentales.

Sea la variable aleatoria X: "número de incendios no provocados, de los 12 seleccionados". La variable X tiene una distribución de probabilidad $\text{Bin}\ (n=12;\ p=0{,}2)$.

a) $P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{12}{0}\cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{12} + \binom{12}{1}\cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{11} == 0{,}06872 + 0{,}20616 = 0{,}27488$

b) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$

$$= 0{,}06872 + 0{,}20616 + \binom{12}{2}\cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{10} + \binom{12}{3}\cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^9 = 0{,}79\,457$$

65. Según una encuesta, el 52% de los hogares europeos tiene contratados servicios de Internet.

a) Si se seleccionan 20 hogares al azar, ¿cuál es la probabilidad de que más de 17 tengan contratados servicios de Internet?

b) Si se elige una muestra de 1200 hogares, ¿cuál es el número esperado de hogares que tendrán contratados servicios de Internet?

Sea la variable aleatoria X: "número de hogares europeos, de los 20 seleccionados, que tienen contratados servicios de Internet". La variable X tiene distribución de probabilidad binomial $X \sim \text{Bin}\ (n=20,\ p=0{,}52)$

a) La probabilidad de que en más de 17 hogares haya Internet, entre los 20 seleccionados, es:

$$P(X>17) = P(X=18) + P(X=19) + P(X=20) = \binom{20}{18}\cdot 0{,}52^{18}\cdot 0{,}48^2 + \binom{20}{19}\cdot 0{,}52^{19}\cdot 0{,}48^1 + \binom{20}{20}\cdot 0{,}52^{20}\cdot 0{,}48^0 =$$

$$= 0{,}0003383 + 0{,}0000386 + 0{,}0000021 = 0{,}0003790$$

b) Si la muestra consiste en 1500 hogares, la distribución sería $X \sim \text{Bin}\ (n=1200,\ p=0{,}52)$, por lo que el número esperado de hogares que tendrán servicios de Internet sería: $E[X] = np = 1200 \cdot 0{,}52 = 624$.

66. Una empresa comercializa 3 productos y, le interesa saber si, tras una campaña de publicidad, ha tenido éxito en darlos a conocer. Los resultados de una encuesta realizada a 400 personas acerca de su conocimiento de estos productos se recogen en la tabla siguiente: 35 encuestados no conocen ninguno de los productos, 130 conocen solo 1, etc.

x_j	0	1	2	3
f_j	35	130	170	65

a) Ajusta una distribución binomial al conjunto de datos.

b) Contrasta el ajuste realizado y representa gráficamente las distribuciones de frecuencias observadas y ajustadas.

La variable X: "n.º de productos, de los tres elegidos, que se conocen tras la campaña de publicidad".
Esta variable, toma los valores: 0,1, 2 y 3, de forma que si se desea ajustar una distribución $\text{Bin}(n;\, p)$, el parámetro $n = 3$ y se debe estimar el parámetro p.

a) Para ello se calcula la media de la distribución de frecuencias y se iguala a la esperanza de la distribución binomial.

x_j	f_j	$x_j f_j$
0	35	0
1	130	130
2	170	340
3	65	195
	400	665

La media de la distribución de frecuencias es $\bar{X} = \dfrac{665}{400} = 1{,}6625$.

La esperanza de la binomial es $E[X] = np = 3p$, igualando resulta: $3p = 1{,}6625 \;\Rightarrow\; p = 0{,}5542$

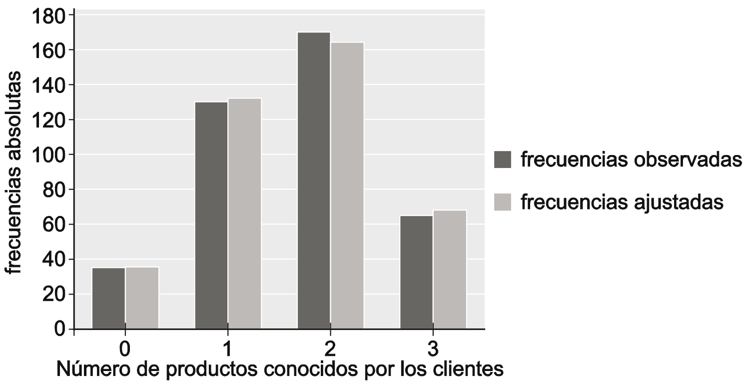
De manera que la distribución binomial que se ajusta a los datos es: X ~Bin $(n = 3;\; p = 0{,}5542)$

b) Una vez ajustada la distribución binomial a la distribución de frecuencias dada, se calculan las frecuencias ajustadas. La probabilidad de cada valor de la variable ajustada es:

$P(X=0) = \binom{3}{0} \cdot 0{,}5542^0 \cdot 0{,}4458^3 = 0{,}08860$ $\qquad$ $P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}5542^1 \cdot 0{,}4458^2 = 0{,}33042$

$P(X=2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}5542^2 \cdot 0{,}4458^1 = 0{,}41077$ $\qquad$ $P(X=3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}5542^3 \cdot 0{,}4458^0 = 0{,}17022$

x_j	frecuencias observadas x_j	probabilidades ajustadas $P(X=x_j)$	frecuencias ajustadas
0	35	0,08860	35,44
1	130	0,33042	132,17
2	170	0,41077	164,31
3	65	0,17022	68,09
	400	1	400



Como se puede observar en la tabla y en el gráfico el ajuste de la distribución de frecuencias por la distribución binomial es muy bueno.

67. Los datos de una reciente encuesta aseguran que el 46% de los jubilados de una determinada localidad camina al menos una hora diaria por prescripción médica. Del colectivo de jubilados se eligen 12 personas al azar:

a) Determina la distribución de la variable X: "número de jubilados de los 12 que camina al menos una hora diaria".

b) Calcula la probabilidad de que más de la mitad de los jubilados seleccionados camine al menos una hora diaria.

La elección se supone con reemplazamiento para que la probabilidad de elegir, en cada paso, uno de los jubilados sea la misma.

a) La variable aleatoria X: "número de jubilados, de los 12, que camina al menos una hora diaria" es binomial:

$X \sim \text{Bin}(n = 12;\ p = 0,46)$.

b) $P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) =$

$$= \binom{12}{7} \cdot 0,46^7 \cdot 0,54^5 + \binom{12}{8} \cdot 0,46^8 \cdot 0,54^4 + \binom{12}{9} \cdot 0,46^9 \cdot 0,54^3 \binom{12}{10} \cdot 0,46^{10} \cdot 0,54^2 \binom{12}{11} \cdot 0,46^{11} \cdot 0,54^1 \binom{12}{12} \cdot 0,46^{12} =$$

$$= 0,158\,49 + 0,08438 + 0,03195 + 0,00816 + 0,00126 + 0,00009 = 0,28433$$

68. El 60% de los pacientes que atiende la consulta de un médico supera los niveles máximos de glucosa en sangre. Si de la consulta se eligen 6 pacientes al azar:

a) ¿Cuál es la distribución de la variable X: "número de pacientes que supera el nivel máximo de glucosa"?

b) Calcula la probabilidad de que al menos dos pacientes superen los niveles de glucosa.

c) Si se sabe que al menos un paciente supera el nivel máximo de glucosa, ¿Cuál es la probabilidad de que sean menos de 5 los que lo superen?

a) La distribución de probabilidad de la variable X: "número de pacientes, de los 6 elegidos, que supera el nivel máximo de glucosa" es binomial $X \sim \text{Bin}(n = 6; p = 0,6)$.

b) La probabilidad de que al menos dos de los seis pacientes superen los niveles de glucosa es:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0,4^6 - \binom{6}{1} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^5 = 1 - 0,00410 - 0,03686 = 0,95904$$

También se puede resolver este apartado, utilizando la variable Y: " número de pacientes, de los 6, que no supera el nivel máximo de glucosa", puesto que $Y \sim \text{Bin}(n = 6;\ p = 0,4)$, en cuyo caso $P(X = k) = P(Y = n - k)$

Las probabilidades de Y pueden obtenerse la tabla de la binomial. Entonces:

$$P(X \geq 2) = P(Y \leq 4) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 4) =$$
$$= 0,04666 + 0,18662 + 0,31104 + 0,27648 + 0,13824 = 0,95904$$

c) Se trata de una probabilidad condicionada: $P(X < 5 \mid X \geq 1) = \dfrac{P(1 \leq X < 5)}{P(X \geq 1)} = \dfrac{0,76262}{0,99590} = 0,76576$

$$P(1 \leq X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3 + P(X = 4) = 0,03686 + 0,13824 + 0,27648 + 0,31104 = 0,76262$$
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,00410 = 0,99590$$

69. El 10% de las botellas de 1 litro de aceite de oliva llenadas por una máquina envasadora contienen, realmente, una cantidad inferior al litro. Un cliente compra una caja de 12 botellas envasadas en esta máquina:

a) Determina la distribución de la variable *Y*: “número de botellas de la caja con una cantidad inferior al litro de aceite”.

b) ¿Cuál es el número esperado de botellas de la caja que contienen una cantidad inferior al litro? ¿Y su desviación típica?

c) Calcula la probabilidad de que la caja contenga dos botellas con menos de 1 litro de aceite.

d) Calcula la probabilidad de que en la caja haya al menos dos botellas con menos de un litro de aceite?

Se entiende que, dado el volumen de producción de la máquina, las botellas han sido elegidas de forma independiente.

a) La variable *Y*: “número de botellas de la caja con una cantidad inferior al litro de aceite” tiene una distribución de probabilidad binomial $X \sim \text{Bin}\ (n = 12;\ p = 0{,}1)$.

b) La esperanza y la desviación típica de la variable aleatoria *Y* son, respectivamente:

$E[Y] = np = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = np(1-p) = 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 1{,}08 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1{,}08} = 1{,}0392$

c) La probabilidad de que la caja contenga exactamente dos botellas con menos de 1 litro de aceite es:

$$P(Y = 2) = \binom{12}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}23013$$

d) La probabilidad de que en la caja haya al menos dos botellas con menos de un litro de aceite es:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{12}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{11} = 1 - 0{,}28243 - 0{,}37657 = 0{,}341$$

70. En la segunda vuelta de las elecciones presidenciales, el candidato A obtuvo el 52% de los votos emitidos. El resto votó a otro candidato o lo hizo en blanco.

Si de la población que ha participado en la votación se elige una muestra aleatoria de 10 personas, calcula la probabilidad de que entre estos:

a) Más del 60% haya votado al candidato A.

b) Menos de la mitad haya votado al candidato A.

c) Más del 60% haya votado al candidato A si se sabe que por lo menos la mitad le votó.

NOTA: Se supone que en cada elección, de las 10, la probabilidad de que la persona seleccionada haya votado al candidato a es la misma, porque la elección se haga con reemplazo o porque el tamaño de la muestra es muy pequeño respecto al de la población.

Sea *X*: “número de personas, de las 10 seleccionadas, que han votado al candidato A”.

La distribución de probabilidad de *X* es $X \sim \text{Bin}(n = 10;\ p = 0{,}52)$.

a) $P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$

$= \binom{10}{7} \cdot 0{,}52^7 \cdot 0{,}48^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}52^8 \cdot 0{,}48^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}52^9 \cdot 0{,}48 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}52^{10} =$

$= 0{,}13644 + 0{,}05543 + 0{,}01334 + 0{,}00145 = 0{,}20665$

b) $P(X < 5) = 1 - P(X = 5) - P(X = 6) - P(X > 6) = 1 - \binom{10}{5} \cdot 0{,}52^5 \cdot 0{,}48^5 - \binom{10}{6} \cdot 0{,}52^6 \cdot 0{,}48^4 - 0{,}20665 =$

$= 1 - 0{,}24413 - 0{,}22040 - 0{,}20665 = 0{,}32882$

c) $P(X > 6 \mid X \geq 5) = \dfrac{P(X > 6)}{P(X \geq 5)} = \dfrac{0{,}20665}{1 - 0{,}32882} = 0{,}30789$

71. Sea la variable aleatoria *X*: "número de caras obtenido al lanzar 6 veces una moneda trucada de tal manera que la probabilidad de obtener cara es 0,25".

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como mucho una cara en 6 lanzamientos?

b) Calcula el valor esperado de caras en los 100 lanzamientos.

c) ¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos que habría que realizar para que se obtenga al menos una cara con probabilidad superior a 0,5?

La variable aleatoria *X*: "número de caras obtenido al lanzar seis veces la moneda" ; $X \sim \text{Bin}(n=6;\ p=0,25)$.

a) Puesto que la moneda está trucada y la probabilidad de obtener cara en un ensayo es 0,25.La probabilidad de obtener como mucho una cara es $P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,1780 + 0,3560 = 0,534$.

b) Si la moneda se lanza 100 veces, la variable *Y*: "número de caras en los cien lanzamientos", tiene una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n=100,\ p=0,25)$ de modo que su esperanza es $E[Y] = np = 100 \cdot 0,25 = 25$.

c) Como la probabilidad de obtener cara en cada lanzamiento es 0,25, si el experimento se repite *k* veces, la probabilidad de obtener al menos una cara es:

$P(X \ge 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{k}{0} \cdot 0,25^0 \cdot 0,75^k = 1 - 0,75^k$ y debe ser superior a 0,5.

$$1 - 0,75^k > 0,5 \Rightarrow 0,5 > 0,75^k \Rightarrow \log 0,5 > \log 0,75^k = k \log 0,75 \Rightarrow \frac{\log 0,5}{\log 0,75} < k \Rightarrow k > 2,41$$

Por lo que el experimento debe repetirse al menos 3 tres veces para obtener al menos una cara con probabilidad superior a 0,5.

72. La mitad de los vehículos que cruzan una pequeña población supera los límites de velocidad permitidos. En un día elegido al azar se seleccionan, también al azar, 20 vehículos que cruzaron la población. Halla el número esperado de vehículos que superen la velocidad permitida y calcula la probabilidad de que:

a) Más de 15 vehículos superen el límite de velocidad permitido.

b) Todos los vehículos crucen correctamente la población.

c) ¿Cuál es el número esperado de vehículos que infringirán la norma de limitación de velocidad?

d) ¿Cuántos vehículos deben pasar, como mínimo, para que con probabilidad superior a 0,8, por lo menos dos infrinjan la limitación de velocidad?

El reemplazamiento asegura la independencia de las observaciones. La variable aleatoria es *X*: "número de vehículos, de los 20 elegidos, que supera los límites de velocidad permitidos", y tiene una distribución de probabilidad $\text{Bin}(n=20;\ p=0,5)$.

Por tanto, el número esperado de vehículos que supera los límites de velocidad será: $E[X] = np = 20 \cdot 0,5 = 10$.

a) $P(X>15) = P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) + P(X=19) + P(X=20) =$

$$= \binom{20}{16} \cdot 0,5^{16} \cdot 0,5^4 + \binom{20}{17} \cdot 0,5^{17} \cdot 0,5^3 + \binom{20}{18} \cdot 0,5^{18} \cdot 0,5^2 + \binom{20}{19} \cdot 0,5^{19} \cdot 0,5^1 + \binom{20}{20} \cdot 0,5^{20} =$$

$$= 0,00462 + 0,00109 + 0,00018 + 0,00002 + 0,00000 = 0,00591$$

b) $P = \binom{20}{0} \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^{20} = 0,000000954$

c) Es la esperanza matemática de la variable *X* que ya estaba calculada $E[X] = 10$.

d) Si k es el número de vehículos seleccionados, la distribución de la variable *X* es $\text{Bin}(n=k; p=0,5)$.

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{k}{0} 0,5^k - \binom{k}{1} 0,5^k = 1 - 0,5^k - k0,5^k = 1 - (1+k)0,5^k \Rightarrow 0,5^k = 1 - (1+k)0,5^k$$

Y debe elegirse el primer valor de *k* de tal manera que $1 - (1+k)0,5^k > 0,8$;que puede calcularse tanteando con valores, por ejemplo, a partir de $k = 3$. El primer valor que cumple esta condición es *k*= 5.De modo que deben pasar al menos 5 coches para asegurar que con probabilidad superior a 0,8 al menos dos de ellos superarán el límite de velocidad establecido.

73. El 15% de los instrumentos de una orquesta es de viento. Se eligen al azar 4 músicos de la orquesta.

a) Escribe la función de masa de probabilidad de la variable *X*: "número de músicos que tocan instrumentos de viento, de los 4 seleccionados" y dibuja su diagrama de barras.

b) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

c) Calcula la probabilidad de que al menos uno de los 4 seleccionados toque un instrumento de viento.

d) ¿Cuántos músicos habría que seleccionar para que con probabilidad superior a 0,8 al menos uno toque un instrumento de viento?

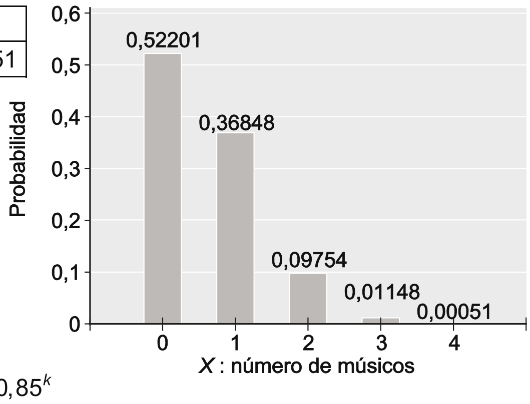
Se entiende que la elección es con reemplazo, es decir, que en cada elección la probabilidad de elegir un músico que toque un instrumento de viento es la misma.

a) La distribución de la variable aleatoria *X*: "número de músicos que tocan instrumentos de viento, de los 4 seleccionados" es binomial $X \sim \text{Bin}(4;\ 0{,}15)$

Teniendo que su función de masa de probabilidad tiene la forma: $P(X = x) = \binom{4}{x} \cdot 0{,}15^x \cdot 0{,}85^{4-x}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$

En la tabla siguiente se recogen los valores de la variable y sus probabilidades:

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,52201	0,36848	0,09754	0,01148	0,00051



b) $E[X] = np = 4 \cdot 0{,}15 = 0{,}60$

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = np(1-p) = 4 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85 = 0{,}51$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}52201 = 0{,}47799$

d) Si se seleccionan *k* músicos de la orquesta, la probabilidad de que al menos uno de ellos toque un instrumento de viento es:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}85^k \Rightarrow 1 - 0{,}85^k > 0{,}8 \Rightarrow 0{,}2 > 0{,}85^k$

$\Rightarrow \log 0{,}2 > \log 0{,}85^k = k \cdot \log 0{,}85 \Rightarrow \dfrac{\log 0{,}2}{\log 0{,}85} < k \Rightarrow k > 9{,}9$

Luego deben elegirse al menos 10 músicos para que con probabilidad mayor de 0,8 al menos uno toque un instrumento de viento.

74. Un examen de tipo test consta de 12 preguntas, cada una de ellas con cuatro posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Al realizar el examen solo debe marcarse una y solo una de las cuatro respuestas posibles.

Si es obligatorio contestar a todas las preguntas y cada respuesta acertada suma un punto y cada respuesta fallada resta 0,5 puntos y para aprobar hay que obtener al menos 6 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que una persona apruebe respondiendo al azar?

Sea la variable aleatoria *X*: "número de preguntas contestadas correctamente por el alumno, de las 12 del examen".

La variable *X* sigue una distribución $\text{Bin}\ (n = 12; p = 0{,}25)$, al considerarse que las preguntas se contestan de forma independiente y que si se responde al azar, la probabilidad de acertar cada pregunta es $p = 0{,}25$.

Para aprobar, el alumno tiene que obtener 6 o más puntos. Es decir, según el sistema de puntuación, debe tener al menos 8 aciertos, ya que 8 aciertos y 4 fallos suponen $1 \cdot 8 - 0{,}5 \cdot 4 = 6$ puntos.

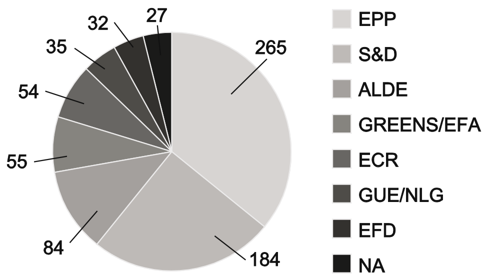
La probabilidad de que el alumno conteste correctamente al menos 8 de las 12 preguntas (si responde al azar) es:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) =$$

$$= \binom{12}{8} \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^5 + \binom{12}{9} \cdot 0{,}25^9 \cdot 0{,}75^3 + \binom{12}{10} \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^2 + \binom{12}{11} \cdot 0{,}25^{11} \cdot 0{,}75^1 + \binom{12}{12} \cdot 0{,}25^{12} =$$

$$= 0{,}002390 + 0{,}000354 + 0{,}000035 + 0{,}000002 + 0{,}00000 = 0{,}002781$$

75. El gráfico siguiente muestra la composición del parlamento europeo en el periodo 2009– 2014.



Si de los 736 miembros del parlamento se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 10:

a) Describe la distribución de la variable aleatoria *X*: "número de miembros del grupo EPP".

b) Describe la distribución de la variable aleatoria *Y*: "número de miembros del grupo S&P".

c) ¿Cuál es la distribución de la variable *W*= *X*+*Y*: "número de parlamentarios de los grupos EPP y S&P"?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que entre los 10 parlamentarios elegidos al azar no haya ninguno de los grupos EPP y S&P?

NOTA: se supone que la elección es uno a uno con reemplazo, de manera que en cada elección, la probabilidad de elegir un parlamentario de un grupo concreto es la misma.

a) La variable aleatoria *X*: "número de miembros del grupo EPP, de los 10 seleccionados", tiene una distribución binomial $X \sim \text{Bin}\left(n = 10,\ p = \frac{265}{736} = 0{,}36\right)$.

b) La variable aleatoria *Y*: "número de miembros del grupo S&D, de los 10 seleccionados", tiene una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}\left(n = 10;\ p = \frac{184}{736} = 0{,}25\right)$.

c) La variable aleatoria *W*: "número de parlamentarios de los grupos EPP y S&P, de los 10 seleccionados":

$$W \sim \text{Bin}\left(n = 10;\quad p = \frac{265 + 184}{736} = 0{,}61\right)$$

d) La probabilidad de que entre los 10 parlamentarios seleccionados no haya ninguno de los grupos EPP y S&P es $P(W = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}61^0 \cdot 0{,}39^{10} = 0{,}000\,081\,4$.

76. Un pequeño hotel familiar cuenta con 12 habitaciones. En temporada alta, la petición de reservas supera la capacidad del hotel. Además por diferentes motivos el 2% de las reservas se anulan a última hora.

Si los propietarios deciden admitir hasta 14 reservas para una noche cuando la demanda lo permita, calcula la probabilidad de que:

a) En un día elegido al azar se presentan más clientes que habitaciones disponibles.

b) Sobren habitaciones.

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de cancelaciones de reservas en el hotel". La variable *X* sigue una distribución $\text{Bin}\ (n = 14;\ p = 0{,}02)$.

a) Si se presentan más clientes que habitaciones disponibles es porque el número de cancelaciones, de las 14 reservas, es inferior a 2 y su probabilidad es:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{14}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{14} + \binom{14}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{13} = 0{,}75364 + 0{,}21533 = 0{,}96897$$

b) Sobrarán habitaciones si el número de cancelaciones es superior a 2, cuya probabilidad es:

$$P(X > 2) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{14} - \binom{14}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{13} - \binom{14}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{12} =$$

$$= 1 - 0{,}75364 - 0{,}21533 - 0{,}02856 = 0{,}00247$$

77. Demuestra la expresión: $\binom{m-1}{n}+\binom{m-1}{n-1}=\binom{m}{n}$.

Si se hace uso de la propiedad: $\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}=\binom{m+1}{n}$ y en lugar de m, se considera el caso (m– 1), se tiene directamente que: $\binom{m-1}{n}+\binom{m-1}{n-1}=\binom{m-1+1}{n}=\binom{m}{n}$

También podemos hacer uso del desarrollo de los números combinatorios.

ENTORNO MATEMÁTICO

¿Contrato el seguro?

La compañía de seguros Mondosegu está llevando a cabo una agresiva campaña de publicidad en los medios de comunicación con el fin de captar clientes para sus pólizas de seguros de vida.

El padre de Andrés, estudiante de 1º de Bachillerato, comenta en casa la posibilidad de contratar una de estas pólizas y está preocupado porque no le timen con la cuota de 250 € que debe pagar. Andrés, que acaba de estudiar los temas relativos a estadística y probabilidad se decide a investigar cuál puede ser el coste para la compañía de una póliza de las que anuncia en su publicidad.

Este tipo de pólizas solo producen gastos (significativos) cuando la compañía debe pagar una indemnización. Por información histórica se sabe que en Mondosegu:

- **1 de cada 10 000 pólizas da lugar a una indemnización de 250 000 €.**
- **1 de cada 5000 pólizas da lugar a una indemnización de 150 000 €.**
- **1 de cada 1000 pólizas da lugar a una indemnización de 50 000 €.**
- **1 de cada 500 pólizas da lugar a una indemnización de 25 000 €.**
- **1 de cada 100 pólizas da lugar a una indemnización de 5000 €.**

a) ¿Cuál es el coste esperado de la póliza?

b) Lo que pide la compañía, ¿es adecuado desde el punto de vista empresarial?

(adaptado de “El hombre anumérico”, John Allen Paulos)

Se entiende que la proporción restante, hasta llegar al 100% no implica indemnización, o que esta no es relevante, o que se ha contabilizado de forma genérica en las anteriores ofrecidas en el enunciado.
Se recoge la información en una tabla del siguiente modo:

x_j	250 000	150 000	50 000	25 000	5000	0	
p_j	0,0001	0,0002	0,001	0,002	0,01	0,9867	
x_jp_j	25	30	50	50	50	0	205

En estas condiciones, el gasto medio esperado por póliza suscrita es $E[X]=205$.

Cada póliza supone un gasto esperado de 205 € para la compañía, por tanto la cuota supone $\frac{250}{205}\cdot 100=121{,}951\ \%$ de los costes esperados, es decir un beneficio esperado de cerca de un 22 %.

¿Cuándo nos vamos de viaje?

Ana y Juan quedan para ver las fotografías que tomaron en su última salida extraescolar en la que hicieron un reportaje de plantas. En primer lugar ven las 30 que hizo Ana y un rato más tarde, cuando están viendo las de Juan, Ana comenta:

– "Esa es igual que la que hice yo";

– "No, no es igual, solo parecida", afirma Juan.

–"¡Qué va!, es idéntica, tu no recuerdas la mía" sentencia Ana.

La discusión prosigue y Ana pregunta ¿Cuántas fotos de las mías podrías recordar? Se proponen hacer la experiencia con algunos amigos:

1.ºLes muestran 15 imágenes no habituales en las que no aparecen personas durante un tiempo máximo de 5 segundos cada una.

2.ºMezclan al azar las 15 imágenes "antiguas" con 15 "nuevas" y se las muestran a los amigos. Cada uno debe anotar, sin comentar con los demás, si la diapositiva es antigua o nueva.

¿Cuántas diapositivas acertó cada participante? ¿El número de aciertos se debe al azar? ¿Realmente tienen una buena memoria gráfica? ¿Cómo se podría saber?

Repite con tus amigos el experimento de Ana y Juan e intenta responder a las preguntas anteriores. Ten en cuenta que si alguien contestó al azar, el experimento se puede comparar con el lanzamiento de una moneda: cara (acertar), cruz (fallar) y por lo tanto estaríamos ante una variable binomial $\text{Bin}\,(n = 30; p = 0,5)$. En este caso, si por ejemplo un amigo acertó 25 imágenes, ¿pudo haber contestado al azar? ¿Cuántas debería acertar para estar seguros de que no ha contestado al azar?

(adaptado de "El hombre anumérico", John Allen Paulos)

Si el amigo contestó al azar, el número de diapositivas que acierta (X), tiene una distribución binomial de parámetros: n=30 y p= 0,5, de manera que la probabilidad de que acierte 25 diapositivas es:

$$P(X = 25) = \binom{30}{25} \cdot 0,5^{30} = 0,00013$$

Una probabilidad realmente muy pequeña.

Es más, la probabilidad de que, habiendo contestado al azar, acierte 20 o más diapositivas es también muy pequeña, ya que $P(X \geq 20) = 0,04937$

Es decir, la probabilidad acertar 20 o más diapositivas es menor que 0,05. Luego el amigo no ha contestado al azar.

El número de aciertos esperado contestando al azar es $E[X] = np = 30 \cdot 0,5 = 15$, pero, como se ha visto antes, la probabilidad de acertar muchos más de esa cantidad contestando al azar se reduce drásticamente.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido.

1. Si la esperanza de una variable aleatoria *X* ~ Bin(*n*, *p*) es 5 y su varianza 4, calcula los valores de *n* y *p*.

Igualando la esperanza y la varianza de una variable aleatoria binomial a sus valores y resolviendo el sistema se obtienen los parámetros:

$$\begin{cases} np = 5 \\ np(1-p) = 4 \end{cases} \Rightarrow 5(1-p) = 4 \Rightarrow p = 0{,}2 \qquad n \cdot 0{,}2 = 5 \Rightarrow n = 25$$

2. En una comunidad de vecinos, el 60% de las veces que un vecino llega a su portal no encuentra el ascensor en la planta baja. Si de la comunidad se eligen 7 vecinos al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente 2 encuentren el ascensor en la planta baja

b) Por lo menos 3 encuentren el ascensor en la planta baja.

c) Ninguno encuentre el ascensor.

Se supone que la elección de los vecinos es uno a uno con reemplazo.Sea *X*: "número de vecinos, de los 7, que encuentran el ascensor en la planta baja". La distribución de *X* es $X \sim \text{Bin}(n = 7; p = 0{,}4)$.

a) La probabilidad de que sean exactamente 2 los vecinos que encuentren el ascensor en la planta baja es:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}26127$$

b) La probabilidad de que sean al menos 3 los que se encuentren el ascensor en la planta baja, puede calcularse utilizando el complementario, es decir, que menos de tres se encuentren el ascensor en la planta baja, es:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0{,}6^7 - \binom{7}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^6 - \binom{7}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^5 =$$

$$= 1 - 0{,}02799 - 0{,}13064 - 0{,}26127 = 0{,}59119$$

c) La probabilidad de que ninguno encuentre el ascensor es $P(X = 0) = \binom{7}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}02799$.

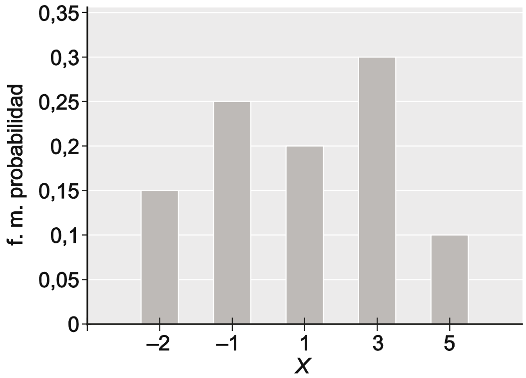
3. Una variable aleatoria *X* toma los valores –2, –1, 1, 3 y 5 con probabilidades respectivas 0,15; 0,25; 0,2; 0,3 y 0,1.

a) Representa gráficamente la distribución de probabilidad.

b) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

c) Halla $P(-1 < X \le 4)$.

a) Podemos organizar los datos en una tabla y ampliarla para los cálculos posteriores al tiempo que representamos el diagrama de barras de la distribución:



x_j	p_j	$p_j x_j$	$p_j x_j^2$
–2	0,15	–0,3	0,6
–1	0,25	–0,25	0,25
1	0,2	0,2	0,2
3	0,3	0,9	2,7
5	0,1	0,5	2,5
	1	1,05	6,25

b) La esperanza de *X* y su varianza son respectivamente:

$$E[X] = \sum_{j=1}^{5} p_j x_j = 1{,}05 \qquad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{j=1}^{5} p_j \cdot x_j^2 - E[X]^2 = 6{,}25 - 1{,}05^2 = 5{,}1475$$

c) $P(-1 < X \le 4) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$

4. De una baraja de 40 cartas se extraen 15 cartas una a una con reemplazo. Sean las variables aleatorias *X*: número de reyes extraídos. Se pide:

a) Probabilidad de que *X* sea mayor que 2.

b) Número esperado de reyes.

La distribución de $X \sim \text{Bin}(n = 15; p = 0{,}1)$, pues el número de reyes extraídos, en las 15 cartas, pueden ser 0, 1,…, 15, y en cada extracción la probabilidad de obtener un rey es $p = \dfrac{4}{40} = 0{,}1$ (4 reyes en las 40 cartas).

a) La probabilidad de que *X* sea mayor que 2 viene dada por:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$$
$$= 1 - \binom{15}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{15} - \binom{15}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{14} - \binom{15}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{13} = 1 - 0{,}20589 - 0{,}34315 - 0{,}26690 = 0{,}18406$$

b) La esperanza de la variableXes $E[X] = 15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$.

5. 30 estudiantes respondieron al azar a un test de 5 preguntas con 4 posibles respuestas, de las cuales solo una era correcta. El número de preguntas acertadas se recoge en la tabla siguiente:

x_j	0	1	2	3	4	5	
f_j	6	13	6	3	2	0	30

a) Ajusta una distribución binomial a este conjunto de datos.

b) Compara analítica y gráficamente las frecuencias observadas y ajustadas.

c) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya contestado correctamente 3 preguntas?

a) Se calcula, en primer lugar, la media de la distribución de frecuencias de la variable X: "nº de preguntas acertadas".

La tabla adjunta, contiene los datos para el cálculo de la media. De manera que la media de la distribución de frecuencias observadas es $\bar{X} = \frac{42}{30} = 1{,}4$.

x_j	f_j: obser.	$f_j x_j$
0	6	0
1	13	13
2	6	12
3	3	9
4	2	8
5	0	0
	30	42

Si se quiere ajustar una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 5;\, p)$, para calcular el parámetro p, se iguala la media de la distribución de frecuencias observadas a la esperanza de la binomial:

$$5p = 1{,}4 \Rightarrow p = \frac{1{,}4}{5} = 0{,}28$$

Luego, debe ajustarse una distribución: $Y \sim \text{Bin}(n = 5;\, p = 0{,}28)$.

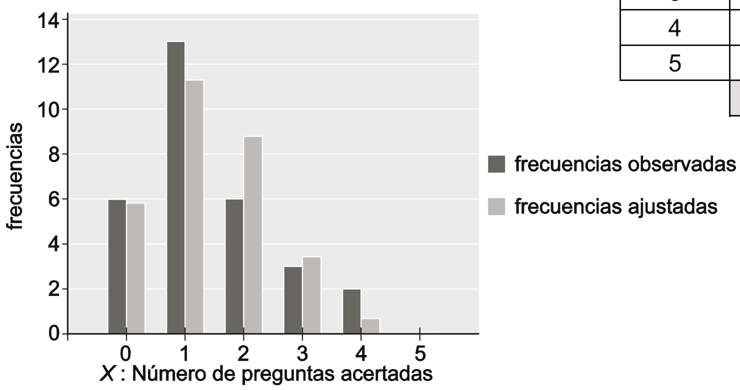
b) Se calculan, en primer lugar las probabilidades de la distribución "ajustada":

$$P(Y=0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}72^5 \qquad P(Y=1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}28^1 \cdot 0{,}72^4 \qquad P(Y=2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}28^2 \cdot 0{,}72^3$$

$$P(Y=3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}28^3 \cdot 0{,}72^2 \qquad P(Y=4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}28^4 \cdot 0{,}72^1 \qquad P(Y=5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}28^5$$

que se resumen en la tabla siguiente, junto con las frecuencias esperadas (estimadas)
Se puede observar que la aproximación es razonablemente buena comparando la columna de las frecuencias observadas con la de las frecuencias esperadas, una vez ajustada la distribución binomial.

x_j	f_j: obser.	$f_j x_j$	$P(Y=x)$	fr.esper.
0	6	0	0,1935	5,8048
1	13	13	0,3762	11,2870
2	6	12	0,2926	8,7788
3	3	9	0,1138	3,4140
4	2	8	0,0221	0,6638
5	0	0	0,0017	0,0516
	30	42	1	30



6. Desarrolla la potencia $\left(x^2y - 2xy^2\right)^5$.

$$\left(x^2y - 2xy^2\right)^5 = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} (x^2y)^j \cdot (-2xy^2)^{5-j} = \sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} 2^{5-j} x^{j+5} y^{10-j} (-1)^{5-j} =$$

$$= -\binom{5}{0} 2^5 x^5 y^{10} + \binom{5}{1} 2^4 x^6 y^9 - \binom{5}{2} 2^3 x^7 y^8 + \binom{5}{3} 2^2 x^8 y^7 - \binom{5}{4} 2x^9 y^6 + \binom{5}{5} x^{10} y^5 =$$

$$= -32x^5y^{10} + 80x^6y^9 - 80x^7y^8 + 40x^8y^7 - 10x^9y^6 + x^{10}y^5$$

7. En una población de cada 2 adultos mayores de 24 años solo uno tiene estudios posteriores a la ESO. Elegidas 8 personas mayores de 24 años, calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente 4 tengan solo estudios de ESO.

b) Al menos dos tengan estudios posteriores a la ESO.

Sea la variable aleatoria*X*: “número de personas, de las 8, que solo tienen estudios de ESO”.

a) La distribución de probabilidad de la variable $X \sim \text{Bin}(n = 8;\, p = 0{,}5)$, de modo que la probabilidad de que tome exactamente el valor 4 es:

$$P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot 0{,}5^4 \cdot (1 - 0{,}5)^4 = 0{,}27344$$

b) Que “al menos dos tengan estudios posteriores” es lo mismo que “A lo sumo uno tiene sólo estudios de ESO”, por tanto la probabilidad pedida es:

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{8}{0} \cdot 0{,}5^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}5^8 = 0{,}03516$$

Relaciona y contesta

Elije la única respuesta correcta en cada caso

1. La variable aleatoria discreta *X* toma los valores 2, 4, 6 y 8 con probabilidades respectivas c, $c+1$, $c+2$ y $c+3$. El valor de *c* es:

A. 4 **B.** 1,25 **C.** –1,25 **D.** No existe valor para c.

Solución: D.(La suma debería ser 1, lo que fuerza a que c valga –1,25 y por tanto 2 y 4 tendrían probabilidad negativa).

2. La variable aleatoria *Y* tiene una distribución de probabilidad Bin(*n*, 0,2) y se sabe que su varianza es 8. Entonces:

A. *n*= 10 **B.** *n*= 48 **C.** *n*= 50 **D.** *n*= 100

Solución: C.

3. Para intentar ajustar una distribución binomial a un conjunto de datos.

A. Basta conocer el parámetro *n*.

B. Es preciso obtener la media de los datos observados e identificar *p*.

C. El valor estimado de *p* debe ser aproximadamente 0,5.

D. Se necesitan las frecuencias relativas.

Solución: B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. La distribución binomial modeliza situaciones en las que:

A. Están implicados muchos sucesos.

B. Solo importa si un suceso ocurre o no.

C. Se miden magnitudes.

D. Se cuenta las veces que ocurre un determinado suceso.

Soluciones: B y D.

5. Dada una variable aleatoria binomial $X \sim \text{Bin}(n; p)$, con n fijado, su variabilidad:

A. Es más grande si p está cerca de 1.

B. Es más pequeña si p está próximo a 0.

C. Es máxima si $p=0,5$.

D. No está influenciada por el valor de p.

Soluciones: B y C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones

Sea la variable aleatoria $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. $E[X] = \mu$, $\text{Var}(X) = 0,2\mu$ **2.** $p = 0,8$ y $n = 1,25\mu$

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son independientes una de otra.

Solución: A.

Señala el dato innecesario para contestar

Para calcular la probabilidad $P(-1 < X < 2)$ siendo $X \sim \text{Bin}(n, p)$ es necesario conocer:

A. Solo *n.*

B. Solo *p.*

C. Tanto *n* como *p.*

D. No hace falta conocer ningún dato.

Solución: C.

13 Distribución binomial

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Se lanzan dos dados y se considera la variable *X*:"suma de las puntuaciones obtenidas".

a) Escribe su función de masa de probabilidad.

b) Representa el diagrama de barras correspondiente.

c) Halla la probabilidad de que *X* tome un valor mayor que 5 pero menor o igual que 7.

a) Los 36 resultados posibles equiprobables en el lanzamiento de dos dados se pueden recoger en una tabla:

	1	2	3	4	5	6
1	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4	4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5	5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6	6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6·6

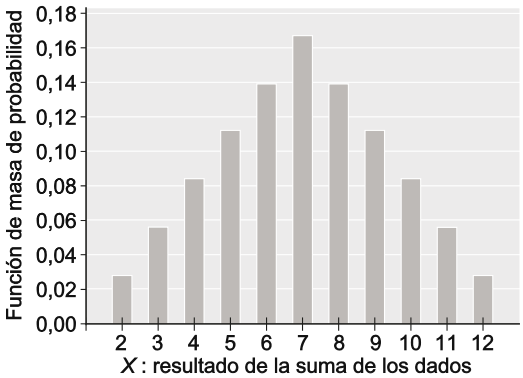
Se considera la variable *X*: "suma de las puntuaciones obtenidas", su función de masa de probabilidad se puede recoger en la tabla siguiente:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Donde, por ejemplo:

$$P(X=6)=P(51)+P(42)+P(33)+P(24)+P(15)=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$$

b) El diagrama de barras correspondiente a la función de masa de probabilidad de *X* es:



c) La probabilidad pedida es $P(5 < X \le 7) = P(X=6) + P(X=7) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{11}{36}$.

4. Sea *X* una variable aleatoria cuya función de masa de probabilidad viene dada en la tabla siguiente.Calcula el valor de *m*.

x_j	–2	0	4	6	8
p_i	0,2	0,3	m	0,1	0,15

El resultado es consecuencia de que la suma de todas ellas debe ser igual a la probabilidad del suceso seguro.

$$\sum_i p_i = 1 \Rightarrow 0,2+0,3+m+0,1+0,15=1 \Rightarrow m = 1-0,75 \Rightarrow m = 0,25$$

5 y 6. Ejercicios resueltos.

7. Una bolsa contiene 3 bolas: 1 bola blanca, 1 roja y 1 verde. De la bolsa se extraen al azar 2 bolas una a una con reemplazo. Sea la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes extraídas".

a) Escribe su función de masa de probabilidad y dibuja el diagrama de barras correspondiente.

b) Calcula su esperanza, su varianza y su mediana.

c) Halla el coeficiente de variación.

a) Sea la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes extraídas". Como se verá más adelante,su distribución de probabilidad es $X \sim \text{Bin}\left(n=2\ ;\ p=\frac{1}{3}\right)$, pues la probabilidad de obtener bola verde en cada extracción es $p=\frac{1}{3}$.

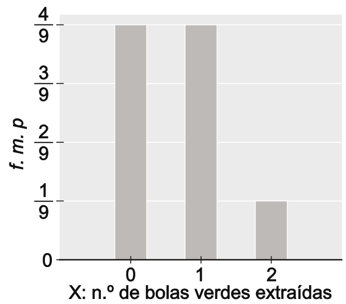
La variable aleatoria *X* puede tomar los valores 0, 1 y 2, con las siguientes probabilidades resumidas en la tabla.

$$P(X=0)=\binom{2}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^2=1\cdot1\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=1)=\binom{2}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=\binom{2}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\cdot\frac{1}{9}\cdot1=\frac{1}{9}$$

X	0	1	2
$P(X=x_j)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$



b) Al tratarse de una variable aleatoria binomial, el valor esperado y su desviación típica son:

$$E[X]=np=2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\quad \text{Var}(X)=npq=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}\ \Rightarrow\ \sigma=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

También se puede hacer el cálculo directamente organizando las operaciones en una tabla:

$$\sigma^2=\text{Var}(X)=\frac{8}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

La mediana de *X* es *M*= 1 ya que

$$P(X\le1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}\ge0{,}5$$

$$P(X\ge1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{4}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}\ge0{,}5$$

X	p_i	$x_i p_i$	$x^2_i p_i$
0	$\frac{4}{9}$	0	0
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$
Suma		$\mu=E[X]=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$

c) El coeficiente de variación es: $CV(X)=\frac{\sigma}{|\mu|}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=1$

8. Un jugador lanza un dado equilibrado y si el resultado es 1 o 2, pierde lo que ha apostado, si sale 3 ó 4 pierde la mitad de lo apostado, si sale 5 no gana ni pierde nada y si sale 6 gana el triple de lo que haya apostado. Si apuesta *c* euros, ¿cuál es el valor esperado de su ganancia? ¿y la desviación típica?

Sea la variable aleatoria X: "ganancia del jugador".

Los resultados posibles y equiprobables en lanzamiento del dado son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Con probabilidad $P(1)+P(2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ pierde lo apostado (c euros).

Con probabilidad $P(3)+P(4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ pierde la mitad ($\frac{c}{2}$ euros) de lo apostado.

Con probabilidad $P(5)=\frac{1}{6}$ ni pierde ni gana.

Con probabilidad $P(6)=\frac{1}{6}$ gana el triple ($3c$ euros) de lo apostado.

La función de masa de probabilidad de X se puede resumir en la tabla adjunta.
De manera que el valor esperado de la ganancia y su desviación típica son:

X	$P(X=x)$
$-c$	$\frac{1}{3}$
$-\frac{c}{2}$	$\frac{1}{3}$
0	$\frac{1}{6}$
$3c$	$\frac{1}{6}$
	1

$$E[X]=-c\cdot\frac{1}{3}-\frac{c}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{6}+3c\cdot\frac{1}{6}=0$$

$$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2=(-c)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(-\frac{c}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+0^2\cdot\frac{1}{6}+(3c)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{23}{12}\cdot c^2\ \Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{23}{12}}\,c$$

9. Ejercicio interactivo.

10. Simplifica la expresión $\dfrac{\left[\binom{12}{3}+\binom{12}{9}\right]\cdot 4!}{40}$.

$$\frac{\left[\binom{12}{3}+\binom{12}{9}\right]\cdot 4!}{40}=\frac{\left[\frac{12!}{3!\cdot 9!}+\frac{12!}{3!\cdot 9!}\right]\cdot 4!}{40}=\frac{\left[2\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10}{\cancel{3!}}\right]\cdot 4\cdot\cancel{3!}}{40}=\frac{2\cdot 12\cdot 11\cdot\cancel{10\cdot 4}}{\cancel{40}}=264$$

11. Halla el desarrollo de $(2x^2-5y)^4$.

$$(2x^2-5y)^4=\sum_{i=0}^{4}\binom{4}{i}(2x^2)^i(-5y)^{4-i}=\binom{4}{0}(-5y)^4+\binom{4}{1}(2x^2)(-5y)^3+\binom{4}{2}(2x^2)^2(-5y)^2+\binom{4}{3}(2x^2)^3(-5y)+\binom{4}{4}(2x^2)^4=$$
$$=625y^4-1000x^2y^3+600x^4y^2-160x^6y+16x^8$$

12. Determina el valor de *m* en la expresión $\binom{2m}{3}=\binom{2m}{m+3}$.

Sabiendo que $2m\geq m+3\Rightarrow m\geq 3$ se puede encontrar una solución forzando a que

$$\begin{cases}\text{o bien } 2m-(m+3)=3\Rightarrow m=6\\ \text{o bien } m+3=3\Rightarrow m=0\end{cases}$$

La segunda posibilidad contradice la primera condición. De modo que la solución correcta es $m=6$.

13. Halla el término independiente de $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^8$.

En el desarrollo de $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^8$ los términos que aparecen tienen la forma $\binom{8}{i}(2x^3)^i \cdot \left(\frac{-1}{x}\right)^{8-i}$. Por tanto, el término independiente debe verificar que $3i = 8 - i \Rightarrow i = 2$ para poder simplificar las potencias de x y que el término no dependa de x.

Por tanto la respuesta es $\binom{8}{2}(2x^3)^2\left(\frac{-1}{x}\right)^{8-2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot 2^2 \cdot (-1)^6 = 112$.

14. Ejercicio resuelto.

15. En una agencia de viajes saben que el 65% de los circuitos son por Europa. Se pregunta a un cliente si va a realizar un tour por Europa. Se considera la variable aleatoria que da valor 1 si viaja por Europa y el valor 0 en caso contrario. Halla la esperanza y la desviación típica de la variable.

Se trata de una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro $p = 0,65$, cuya función de masa de probabilidad es:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,65^x \cdot 0,35^{1-x} & \text{si } x = 0 \text{ o } 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La esperanza de X es $E[X] = 0,65$ y su varianza es $\text{Var}(X) = 0,65 \cdot 0,35 = 0,2275$ y $\sigma \simeq 4770$.

16. Se ha detectado que 4 de cada 100 enfermos cardiacos padecen cefalea después de tomar un nuevo fármaco. Si se elige un enfermo al azar para ver si tiene cefalea o no. Halla la esperanza y la varianza de la variable que vale 1 si el paciente tiene dolor de cabeza y 0 si no lo tiene.

Se trata de una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro $p = \frac{4}{100} = 0,04$, cuya función de masa de probabilidad es:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0,96^{1-x} \cdot 0,04^x & \text{si } x = 0 \text{ o } 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La esperanza de X es $E[X] = 0,04$ y su varianza es $\text{Var}(X) = 0,04 \cdot 0,96 = 0,0384$.

17. Ejercicio resuelto.

18. En un grupo de 7 amigos, considera la variable *Y*: “número de ellos que han nacido en verano”. Si la probabilidad de que una persona nazca es la misma en cualquier estación del año, calcula:

a) Número esperado de amigos que han nacido en verano y su varianza.

b) Probabilidad de que exactamente 3 hayan nacido en verano.

c) Probabilidad de que como mucho 2 hayan nacido en verano.

Se supone que los 7 amigos se han seleccionado al azar y que la probabilidad de elegir cada uno de los 7 es la misma.

a) La variable *Y*: "número de amigos, de los 7, que ha nacido en verano", tiene una distribución binomial de parámetros $n = 7$ y $p = 0{,}25$, ya que 7 son los amigos y 0,25 la probabilidad de que cualquiera de ellos haya nacido en verano (una de las cuatro estaciones del año). Es decir, $Y \sim \text{Bin}(n = 7;\ p = 0{,}25)$.

Al tratarse de una variable aleatoria binomial, su esperanza y su varianza son:

$E[Y] = np = 7 \cdot 0{,}25 = 1{,}75$ $\qquad$ $\text{Var}(Y) = npq = 7 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 1{,}3125$

b) La probabilidad de que exactamente 3 hayan nacido en verano es $P(X = 3) = \binom{7}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^4 = 0{,}17303$.

c) La probabilidad de que como mucho dos de ellos hayan nacido en verano es:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \binom{7}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^6 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^5 =$$
$$= 0{,}13348 + 0{,}31146 + 0{,}31146 = 0{,}7564$$

19. Un proveedor suministra lotes de materia prima de los que el 5% resulta defectuoso. De una gran partida se seleccionan al azar 6 lotes uno a uno con reemplazamiento, calcula:

a) Probabilidad de que al menos 1 sea defectuoso.

b) La varianza del número de lotes defectuosos, para una partida de 200 lotes.

Sea la variable aleatoria *X*: “número de lotes defectuosos de los 6”, cuya distribución de probabilidad es binomial con $n = 6$, número de los lotes suministrados, y $p = 0{,}05$, probabilidad de que, en cada elección, un lote sea defectuoso. Es decir $X \sim \text{Bin}\ (n = 6;\ p = 0{,}05)$.

a) La probabilidad de que por lo menos un lote sea defectuoso es:

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^6 = 1 - 0{,}73509 = 0{,}26491$$

b) Si la partida consta de $n = 200$ lotes y se considera la variable Y: “número de lotes defectuosos de los 200”, su distribución de probabilidad es $\text{Bin}(n = 200;\ p = 0{,}05)$, por lo que su esperanza y su varianza son:

$$E[Y] = 200 \cdot 0{,}05 = np = 200 \cdot 0{,}05 = 10 \quad \text{Var}(Y) = np(1-p) = 200 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 9{,}5$$

20. Ejercicio interactivo.

21. Ejercicio resuelto.

22. En 40 días, el médico de guardia de un centro de salud ha tenido que realizar las siguientes visitas a domicilio que se recogen en la tabla siguiente: en 6 días no realizó ninguna visita, en 17 días tuvo que hacer una visita, etc.

x_j	0	1	2	3
f_j	6	17	13	4

a) Ajusta una distribución binomial a este conjunto de datos.

b) Calcula las frecuencias ajustadas y compáralas con las observadas.

c) Dibuja el diagrama de barras de ambas frecuencias.

Se considera la variable *X*: "número de visitas realizadas". X toma los valores 0, 1, 2, y 3.

a) Para ajustar una variable aleatoria con distribución binomial, $Y \sim \text{Bin}(n; p)$, a la variable estadística *X*, se observa que $n = 3$, y se calcula la media de la distribución de frecuencias, para estimar el parámetro p.

x_j	frecuencias observadas	$x_j f_j$
0	6	0
1	17	17
2	13	26
3	4	12
	40	55

De la tablase obtiene la media de la variable *X*: $\overline{X} = \dfrac{55}{40} = 1{,}375$

que se iguala a la esperanza de *Y*, para obtener p.

$$E[Y] = np = 3p = 1{,}375 \Rightarrow p = \frac{1{,}375}{3} = 0{,}458$$

De manera que a la variable estadística *X* se le ajusta una variable aleatoria *Y* con distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 3;\ p = 0{,}458)$.

b) Con la variable aleatoria *Y*se calculan las frecuencias ajustadas, obteniendo en primer lugar la probabilidad (ajustada) de cada uno de los valores:

$$P(Y=0) = \binom{3}{0} 0{,}542^3 = 0{,}15922 \qquad P(Y=1) = \binom{3}{1} 0{,}458^1 \cdot 0{,}542^2 = 0{,}40363$$

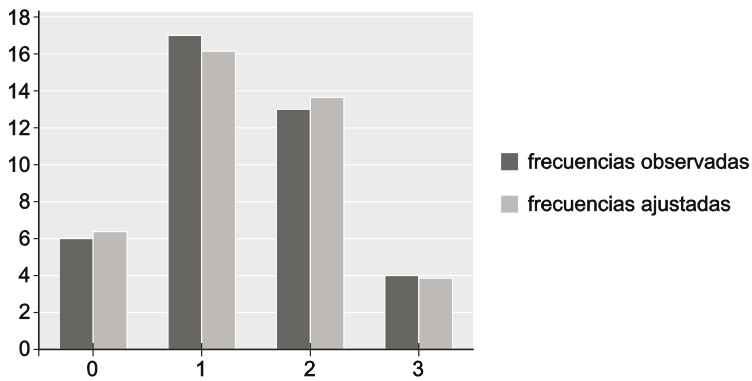
$$P(Y=2) = \binom{3}{2} 0{,}458^2 \cdot 0{,}542^1 = 0{,}34108 \qquad P(Y=3) = \binom{3}{3} 0{,}458^3 = 0{,}09607$$

Estos valores se muestran en la tabla siguiente, junto con las frecuencias ajustas (las probabilidades ajustadas multiplicadas por 40).

Se puede apreciar, comparando las frecuencias observadas con las ajustadas, que el ajuste realizado es muy bueno.

x_j	frecuencias observadas	probabilidad ajustada	frecuencias ajustadas
0	6	0,15922	6,37
1	17	0,40363	16,15
2	13	0,34108	13,64
3	4	0,09607	3,84
	40	1	40

c) En el gráfico de diagramas de barras de las frecuencias ajustadas y observadas se puede ver también que el ajuste de la distribución estadística medianteuna distribución binomial es muy bueno.



23. En 300 familias con hijos menores de edad de un barrio de una gran ciudad se ha contabilizado el número de niñas (*X*). Los datos se recogen en la tabla.

x_j	0	1	2
f_j	75	180	45

a) Ajusta una distribución binomial a este conjunto de datos.

b) Calcula las frecuencias ajustadas y compáralas con las observadas. ¿Es razonable el ajuste?

c) Dibuja el diagrama de barras de ambas frecuencias.

La variable estadística *X:* "número de niñas", toma los valores 0, 1 y 2.

a) Si se desea ajustar una distribución binomial, $Y \sim \text{Bin}(n; p)$, a la distribución de frecuencias observadas, en este caso $n = 2$. Para estimar el parámetro p se calcula la media de la variable estadística: $\overline{X} = \dfrac{270}{300} = 0{,}9$

x_j	frecuencias observadas	$x_j f_j$
0	75	0
1	180	180
2	45	90
	300	270

Igualando este valor a la esperanza de la variable binomial, permite estimar el valor de p

$$E[Y] = 2p = 0{,}9 \Rightarrow p = \frac{0{,}9}{2} = 0{,}45$$

La distribución binomial que se ajusta a este conjunto de datos es $Y \sim \text{Bin}(n = 2; p = 0{,}45)$.

b) Se calculan, en primer lugar, las probabilidades estimadas para cada valor posible de la variable *Y*:

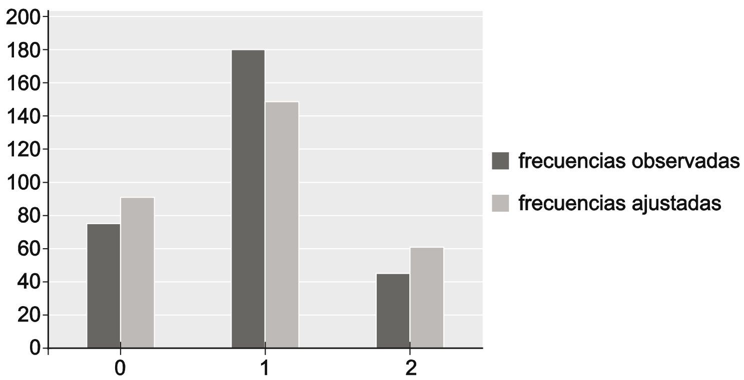
$$P(Y=0) = \binom{2}{0} 0{,}55^2 = 0{,}3025\,;\ P(Y=1) = \binom{2}{1} 10{,}45^1 \cdot 0{,}55^1 = 0{,}4950\ \ ;\ P(Y=2) = \binom{2}{2} 0{,}45^2 = 0{,}2025$$

que se incluyen en la tabla siguiente, junto con las frecuencias ajustas (las probabilidades ajustadas multiplicadas por 300):

xj	frecuencias observadas	probabilidad estimada	frecuencias ajustadas
0	75	0,3025	90,75
1	180	0,4950	148,5
2	45	0,2025	60,75
	300	1	300

Donde se puede observar que el ajuste realizado no es bueno, dada la diferencia entre las frecuencias ajustadas y las observadas.

c) La aproximación realizada mediante la distribución binomial a la distribución empírica del número de niñas, puede verse en el siguiente gráfico:



24 a 32. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Variable aleatoria discreta

33. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada en la tabla siguiente:

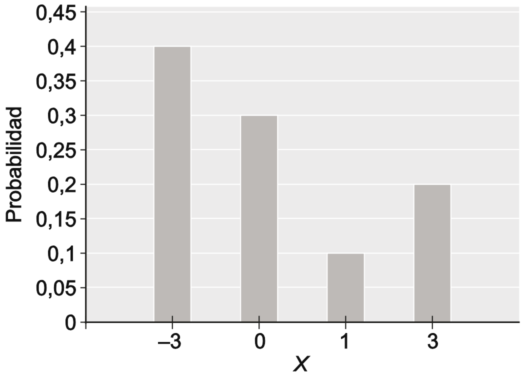
x_j	–3	0	1	3
p_j	0,4	0,3	0,1	0,2

a) Representa gráficamente la distribución.

b) Calcula la esperanza, la varianza y la desviación típica.

c) Calcula $P(1 < X < 2{,}5)$ y $P(X < 1)$.

a) Se representa la distribución de probabilidad discreta mediante un diagrama de barras:



b) Para los cálculos se amplía la tabla con las columnas necesarias:

x_j	p_j	x_jp_j	$x_j^2p_j$
–3	0,4	–1,2	3,6
0	0,3	0	0
1	0,1	0,1	0,1
3	0,2	0,6	1,8
	1	–0,5	5,5

$$E[X] = \sum_{j=1}^{4} p_j x_j = -0{,}5$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{j=1}^{4} p_j x_j^2 - E[X]^2 = 5{,}5 - (-0{,}5)^2 = 5{,}25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{5{,}25} = 2{,}2913$$

c) A partir de la función de masa de probabilidad:

$P(1 < X < 2{,}5) = 0$

$P(X < 1) = P(x = -3) + P(X = 0) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

34. Sea *X* una variable que toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4 con probabilidades 0,2; *k*; 0,3; 0,15 y 0,1.

a) Determina k.

b) Halla $P(X > 1)$.

a) La suma de todas las probabilidades de los sucesos elementales es 1 luego:

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}2 + k + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}1 = k + 0{,}75 = 1 \Rightarrow k = 0{,}25$

b) $P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}55$

35. Sea X una variable aleatoria con función de masa de probabilidad $P(X=k)=\dfrac{k}{x+1}$ para $x=0, 1, 2, 3$.

a) Calcula el valor de la constante k.

b) Representa gráficamente la función de masa de probabilidad.

c) Calcula la esperanza y la varianza de X.

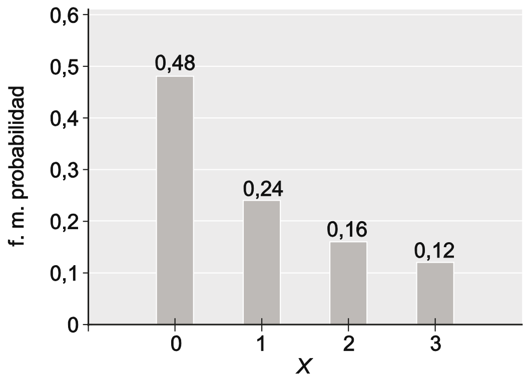
a) Como las probabilidades de los valores de la variable deben sumar 1:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1 \Rightarrow k+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}=1 \Rightarrow \frac{25\cdot k}{12}=1 \Rightarrow k=\frac{12}{25}=0,48$$

La función de masa de probabilidad de la variable X se muestra en la tabla siguiente:

x_j	0	1	2	3
p_j	0,48	0,24	0,16	0,12

b) El diagrama de barras de la distribución de probabilidad de X es:

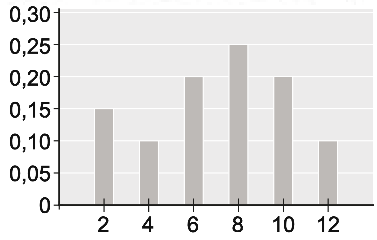


c) La esperanza y la varianza de la variable se calculan a partir de los resultados de la tabla siguiente:

x_j	p_j	$p_j x_j$	$p_j x_j^2$
0	0,48	0	0
1	0,24	0,24	0,24
2	0,16	0,32	0,64
3	0,12	0,36	1,08
	1	0,92	1,96

$$E[X]=\sum_{j=1}^{4} p_j\, x_j = 0,92 \quad \mathrm{Var}(X)=\sum_{j=1}^{4} p_j x_j^2 - E[X]^2 = 1,96-(0,92)^2 = 1,1136$$

36. Sea una variable aleatoria *X* cuya función de masa de probabilidad viene dada por diagrama adjunto:



a) Comprueba que se trata de una función de masa de probabilidad.

b) Calcula su esperanza y su varianza.

c) Calcula la probabilidad de que el valor de la variable sea menor o igual que 6. ¿Y mayor que 9?

a) La tabla siguiente recoge los valores de la variable aleatoria *X*, con sus respectivas probabilidades:

x_j	2	4	6	8	10	12
p_j	0,15	0,1	0,2	0,25	0,2	0,1

Se trata de una distribución de probabilidad porque:

$p_j \geq 0$, para todo $j = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 y además $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}1 = 1$

b) Para calcular la esperanza y la varianza se amplía la tabla de la distribución de *X* con las columnas necesarias:

x_j	p_j	$p_j x_j$	$p_j x_j^2$
2	0,15	0,3	0,6
4	0,1	0,4	1,6
6	0,2	1,2	7,2
8	0,25	2	16
10	0,2	2	20
12	0,1	1,2	14,4
	1	7,1	59,8

De modo que la esperanza y la varianza de la variable aleatoria *X* son respectivamente:

$$E[X] = \sum_{j=1}^{6} p_j x_j = 7{,}1$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{j=1}^{6} p_j x_j^2 - E[X]^2 = 59{,}8 - 7{,}1^2 = 9{,}39$$

c) $P(X \leq 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}45$

$P(X > 9) = P(X = 10) + P(X = 12) = p_5 + p_6 = 0{,}3$

37. La función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta *X* viene dada en la tabla siguiente:

x_j	1	2	3	4	5
p_j	0,07	*a*	0,2	*b*	0,33

Además, $P(X \leq 4) = 0{,}67$ **y** $P(X \geq 4) = 0{,}6$ **. Calcula:**

a) Los valores de *a* y *b* para completar la tabla.

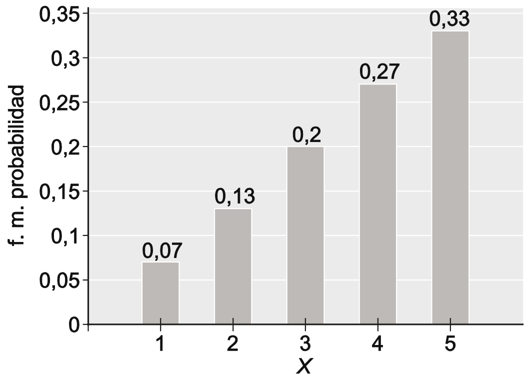
b) Dibuja la gráfica de la función de masa de probabilidad de *X*.

a) Teniendo en cuenta que $P(X \geq 4) = 0{,}6$, se tiene que: $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = b + 0{,}33 = 0{,}6 \Rightarrow b = 0{,}27$

Y como $P(X \leq 4) = 0{,}67$, resulta:

$P(X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}07 + a + 0{,}2 + 0{,}27 = 0{,}67 \Rightarrow a = 0{,}13$

b) El diagrama de barras de la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria *X* es:



38. La esperanza de una variable aleatoria *X* es 7. Se sabe que *X* puede tomar el valor 4 con probabilidad 0,2; el valor –1 con probabilidad *p* y el valor *a* con probabilidad 0,5.

a) Calcula los valores de *a* y *p*.

b) Calcula la desviación típica de *X*.

c) Halla el coeficiente de variación de *X*.

a) La tabla de la derecha recoge la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X*.Como las probabilidades deben sumar 1, se tiene que: $p+0,2+0,5=1 \Rightarrow p=0,3$

Y, dado que: $E[X]=7 \Rightarrow 0,3\cdot(-1)+0,2\cdot 4+0,5\cdot a=7 \Rightarrow a=13$

x_j	p_j
–1	p
4	0,2
a	0,5

b) Para el cálculo de la varianza y de la desviación típica, se añade a la tabla de la distribución la columna correspondientey por lo tanto:

$$\sigma^2=\text{Var}(X)=\sum_{j=1}^{3}p_jx_j^2-E[X]^2=88-7^2=39 \Rightarrow \sigma=\sqrt{39}=6,2450$$

El coeficiente de variación es entonces: $CV(X)=\dfrac{\sigma}{|\mu|}=\dfrac{6,2450}{7}=0,89214$

x_j	p_j	$p_jx_j^2$
–1	0,3	0,3
4	0,2	3,2
13	0,5	84,5
	1	88

39. De una bolsa que contiene 4 bolas blancas y 3 verdes se extraen una a una sin reemplazamiento 2 bolas. Considera la variable aleatoria *X*: número de bolas verdes extraídas.

a) Halla su distribución de probabilidad y dibuja el diagrama de barras.

b) Calcula su esperanza y su varianza.

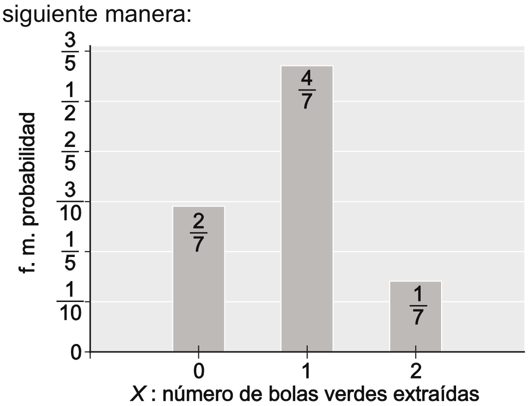
Como lo que interesa es el número de bolas verdes y no el orden en el que se han obtenido, se puede considerar que las bolas se extraen simultáneamente. De esta manera, el número de resultados posibles (igualmente probables) al extraer dos bolas de la bolsa es el número de combinaciones de orden 2 (las dos bolas que se extraen) de 7 elementos (las siete bolas de la bolsa): $C_{7,2}=\dfrac{7\cdot 6}{2}=21$.

La probabilidad de la variable *X*: "número de bolas verdes extraídas" se obtiene por la regla de Laplace:

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{2}}{21}=\frac{2}{7} \qquad P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}}{21}=\frac{4}{7} \qquad P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}}{21}=\frac{1}{7}$$

a) De modo que la distribución de probabilidad de *X* se puede escribir de la siguiente manera:

$X=x_j$	0	1	2
$P(X=x_j)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$



b) La esperanza y la varianza se calculan así:

$$E[X]=\sum_{j=1}^{3}p_jx_j=\frac{6}{7} \qquad \sigma^2=\text{Var}(X)=\sum_{j=1}^{3}p_jx_j^2-E[X]^2=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$$

Números combinatorios. Binomio de Newton.

40. Calcula aplicando las propiedades de los números combinatorios:

a) $\binom{252}{250}$ **b)** $\binom{25}{3}+\binom{25}{4}$ **c)** $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ **d)** $\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n-1}$

a) $\binom{252}{250}=\frac{252!}{250!\cdot 2!}=\frac{252\cdot 251}{2}=31626$

b) $\binom{25}{3}+\binom{25}{4}=\binom{25+1}{4}=\binom{26}{4}=\frac{26!}{4!\cdot 22!}=\frac{26\cdot 25\cdot 24\cdot 23}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=14\,950$

c) Como $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4\Rightarrow\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}=2^4-\binom{4}{4}=16-1=15$

d) $\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n-1}=\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{n+2-(n-1)}=\binom{n+2}{2}+\binom{n+2}{3}=\binom{n+2+1}{3}=\binom{n+3}{3}=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$

41. Halla el valor de *x* en las siguientes expresiones.

a) $\binom{x}{2}=45$ **b)** $\binom{20}{x-1}=\binom{20}{2x+3}$ **c)** $\binom{x}{6}=\binom{x}{9}$ **d)** $\binom{8x}{x+2}=\binom{8x}{6x+3}$

a) $\binom{x}{2}=45\Rightarrow\frac{x\cdot(x-1)}{2}=45\Rightarrow x^2-x-90=0\Rightarrow x=-9\vee x=10$ (–9 no tiene sentido en términos combinatorios).

b) Como $\binom{n}{x}=\binom{n}{y}\Rightarrow x=n-y$ entonces $\binom{20}{x-1}=\binom{20}{2x+3}\Rightarrow x-1=20-(2x+3)\Rightarrow x=6$

c) $\binom{x}{6}=\binom{x}{9}\Rightarrow 6=x-9\Rightarrow x=15$

d) $\binom{8x}{x+2}=\binom{8x}{6x+3}\Rightarrow x+2=8x-(6x+3)\Rightarrow x=5$

42. Realiza los desarrollos de los siguientes binomios.

a) $(2+x)^4$ **b)** $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^3$ **c)** $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^5$ **d)** $\left(1+2\sqrt{2}\right)^5$ **e)** $\left(2-3\sqrt{3}\right)^6$ **f)** $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4$

a) $(2+x)^4=\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}\cdot 2^j x^{4-j}=\binom{4}{0}\cdot 2^4+\binom{4}{1}\cdot 2^3 x+\binom{4}{2}\cdot 2^2x^2+\binom{4}{3}\cdot 2x^3+\binom{4}{4}\cdot x^4=16+32x+24x^2+8x^3+x^4$

b) $\left(2-\dfrac{x}{3}\right)^3=\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\cdot 2^j\left(\dfrac{-x}{3}\right)^{4-j}=\binom{3}{0}\cdot 2^3+\binom{3}{1}\cdot 2^2\left(\dfrac{-x}{3}\right)+\binom{3}{2}\cdot 2\left(\dfrac{-x}{3}\right)^2+\binom{3}{3}\left(\dfrac{-x}{3}\right)^3=8-4x+\dfrac{2x^2}{3}-\dfrac{x^3}{27}$

c) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x^2}\right)^5=\left(\dfrac{x^3+4}{2x^2}\right)^5=\left(x^3+4\right)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}\cdot\left(x^3\right)^j(4)^{5-j}=$

$=\dfrac{1}{32x^{10}}\left[\binom{5}{0}\cdot x^{15}+\binom{5}{1}\cdot x^{12}\cdot 4+\binom{5}{2}\cdot x^9\cdot 4^2+\binom{5}{3}\cdot x^6\cdot 4^3+\binom{5}{4}\cdot x^3\cdot 4^4+\binom{5}{5}\cdot 4^5\right]=$

$=\dfrac{1}{32x^{10}}\left[x^{15}+20x^{12}+160x^9+640x^6+1280x^3+1024\right]=\dfrac{1}{32}x^5+\dfrac{5}{8}x^2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{20}{x^4}+\dfrac{40}{x^7}+\dfrac{32}{x^{10}}$

d) $\left(1+2\sqrt{2}\right)^5=\left(1+2^{\frac{3}{2}}\right)^5=\sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}\cdot 1^j 2^{\frac{3(5-j)}{2}}=\binom{5}{0}\cdot 2^{\frac{15}{2}}+\binom{5}{1}\cdot 2^6+\binom{5}{2}\cdot 2^{\frac{9}{2}}+\binom{5}{3}\cdot 2^3+\binom{5}{4}\cdot 2^{\frac{3}{2}}+\binom{5}{5}=$

$=128\sqrt{2}+320+160\sqrt{2}+80+10\sqrt{2}+1=401+298\sqrt{2}$

e) $\left(2-3\sqrt{3}\right)^6=\left(2-3^{\frac{3}{2}}\right)^6=\sum_{j=0}^{6}\binom{6}{j}\cdot 2^j\left(-3^{\frac{3(6-j)}{2}}\right)=\binom{6}{0}\cdot(-3)^9+\binom{6}{1}\cdot 2^1\cdot(-3)^{\frac{15}{2}}+\binom{6}{2}\cdot 2^2\cdot(-3)^6+\binom{6}{3}\cdot 2^3\cdot(-3)^{\frac{9}{2}}+$

$+\binom{6}{4}\cdot 2^4\cdot(-3)^3+\binom{6}{5}\cdot 2^5\cdot(-3)^{\frac{3}{2}}+\binom{6}{6}\cdot 2^6=2^6-576\sqrt{3}+6480-12\,960\sqrt{34}+43\,740-26\,224\sqrt{3}+19\,683=$

$=69\,967-39\,760\sqrt{3}$

f) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^4=\left(2\sqrt{2}\right)^4=16\cdot 4=64$

Variables aleatorias binomiales.

43. La variable aleatoria *X* tiene una distribución binomial de parámetros *n*= 8 y *p*= 0,6. Calcula:

a) La esperanza y la varianza de X **b)** $P(X<6)$, $P(X\geq 5)$ y $P(3\leq x<5)$

La distribución de la variable aleatoria es $X\sim \text{Bin}(n=8;p=0,6)$.

a) La esperanza y la varianza de X son respectivamente:

$E[X]=np=8\cdot 0,6=4,8$ $\sigma^2=\text{Var}(X)=npq=8\cdot 0,6\cdot 0,4=1,92$

b) Las probabilidades se pueden obtener mediante el uso de la fórmula $P(X=x)=\binom{n}{x}0,6^x\,0,4^{n-x}$, o bien de la tabla de la distribución binomial, teniendo en cuenta que en la tabla se tienen las probabilidades de la variable $Y\sim\text{Bin}(n=8;p=0,4)$ y que $P(X=x)=P(Y=n-x)$.

$P(X<6)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$
$=P(Y=8)+P(Y=7)+P(Y=6)+P(Y=5)+P(Y=4)+P(Y=3)=$
$=0,0007+0,0079+0,0413+0,1239+0,2322+0,2787=0,6847$

$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=P(Y=3)+P(Y=2)+P(Y=1)+P(Y=0)=$
$=0,2787+0,2090+0,0896+0,0168=0,5941$

$\text{P}(3\leq X<5)=P(X=3)+P(X=4)=P(Y=5)+P(Y=4)=0,1239+0,2322=0,3561$

44. Se lanzan 5 dados equilibrados y sea *Y*: "número de unos conseguidos en los 5 lanzamientos". Calcula la probabilidad de obtener:

a) Más de un uno.

b) Al menos cuatro unos.

c) Exactamente dos unos.

La variable aleatoria *Y* tiene distribución $\text{Bin}\left(n=5,\ p=\dfrac{1}{6}\right)$. Las probabilidades se obtienen a partir de la fórmula, ya que no se encuentran en las tablas.

a) $P(X>1)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5-\binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4=1-0,40188-0,40188=0,19624$

b) $P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0=0,00322+0,00013=0,00335$

c) $P(X=2)=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=0,16075$

45. De una urna que contiene 4 bolas verdes y 6 rojas se extraen sucesivamente y con reemplazamiento 6 bolas. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Exactamente 3 bolas verdes. **b)** Más de 4 bolas verdes. **c)** Más de 2 pero menos de 5 bolas verdes.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de bolas verdes obtenidas en las 6 extracciones", cuya distribución es $\text{Bin}(n=6;\ p=0,4)$.

Las probabilidades que se piden se pueden obtener directamente de las tablas de la distribución binomial o utilizar la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial:

a) $P(X=3)=0,2765$

b) $P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)=0,0369+0,0041=0,0410$

c) $P(2<X<5)=P(X=3)+P(X=4)=0,2765+0,1382=0,4147$

46. Una moneda está trucada de modo que la probabilidad de obtener cara es 0,6. Si se lanza 10 veces la moneda, calcula:

a) La probabilidad de obtener al menos 8 caras.

b) La probabilidad de obtener menos de 5 caras.

c) El número medio de caras y la desviación típica de la variable número de caras en los 10 lanzamientos.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de caras obtenidas en los diez lanzamientos", cuya distribución es $\text{Bin}(n=10;\ p=0,6)$.

a) $P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=\binom{10}{8}0,6^8\,0,4^2+\binom{10}{9}0,6^9\,0,4^1+\binom{10}{10}0,6^{10}=$

$=0,1209+0,0403+0,0060=0,1672$

b) $P(X<5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$

$=\binom{10}{0}0,4^{10}+\binom{10}{1}0,6^1\cdot 0,4^9+\binom{10}{2}0,6^2\cdot 0,4^8+\binom{10}{3}0,6^3\cdot 0,4^7+\binom{10}{4}0,6^4\cdot 0,4^6=$

$=0,0001+0,0016+0,0106+0,0425+0,1115=0,1663$

c) $E[X]=np=10\cdot 0,6=6$ $\quad\sigma^2=\text{Var}(X)=np(1-p)=10\cdot 0,6\cdot 0,4=2,4$ $\quad\sigma=\sqrt{\text{Var}(X)}=\sqrt{2,4}\simeq 1,55$

47. La probabilidad de obtener un seis al lanzar un dado trucado es 0,4. Si se lanza el dado 10 veces, calcula la probabilidad de obtener:

a) Exactamente 5 seises.

b) Más de la mitad de las veces un seis.

c) Un número par de seises.

Sea la variable aleatoria X: "número de seises obtenidos al lanzar 10 veces el dado". La distribución de la variable X es $\text{Bin}\ (n = 10, p = 0{,}4)$.

a) $P(X = 5) = \binom{10}{5} 0{,}4^5 0{,}6^5 = 0{,}2007$

b) $P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$

$= \binom{10}{6} 0{,}4^6 \cdot 0{,}6^4 + \binom{10}{7} 0{,}4^7 \cdot 0{,}6^3 + \binom{10}{8} 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^2 + \binom{10}{9} 0{,}4^9 \cdot 0{,}6^1 + \binom{10}{10} 0{,}4^{10} =$

$= 0{,}1115 + 0{,}0425 + 0{,}0106 + 0{,}0016 + 0{,}0001 = 0{,}1663$

c) $P(X = \text{PAR}) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) =$

$= \binom{10}{2} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^8 + \binom{10}{4} 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^6 + \binom{10}{6} 0{,}4^6 \cdot 0{,}6^8 + \binom{10}{8} 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^2 + \binom{10}{10} 0{,}4^{10} =$

$= 0{,}1209 + 0{,}2508 + 0{,}1115 + 0{,}0106 + 0{,}0001 = 0{,}4939$

Ajuste de una distribución binomial.

48. En una población se han investigado las alergias a cuatro tipos de medicamentos. Para ello, se ha observado mediante pruebas la reacción de 500 personas a los cuatro medicamentos y los resultados se han recogido en la tabla siguiente: 141 no han presentado ningún tipo de alergia, 205 presentaron alergia a uno de los medicamentos, etc.

x_j	0	1	2	3	4
f_j	141	205	120	14	20

a) Ajusta una distribución binomial a los datos.

b) Representa gráficamente las distribuciones de frecuencias observadas y ajustadas y comenta la precisión del ajuste.

a) La variable es X: "n.º de medicamentos a los que se presenta alergia". Esta variable, toma los valores: $0, 1, 2, 3$ *y* 4, de forma que si se desea ajustar una distribución $\text{Bin}(n, p)$, el parámetro $n = 4$ y se debe estimar el parámetro p.

x_j	f_j	$x_j f_j$
0	141	0
1	205	205
2	120	240
3	14	42
4	20	80
	500	567

La media de la distribución de frecuencias es $\overline{X} = \dfrac{567}{500} = 1{,}134$.

La esperanza de la binomial es $E[X] = np = 4p$, igualando resulta: $4p = 1{,}134 \Rightarrow p = 0{,}2835$

De manera que la distribución binomial que se ajusta a los datos es $X \sim \text{Bin}\ (n = 4;\ p = 0{,}2835)$.

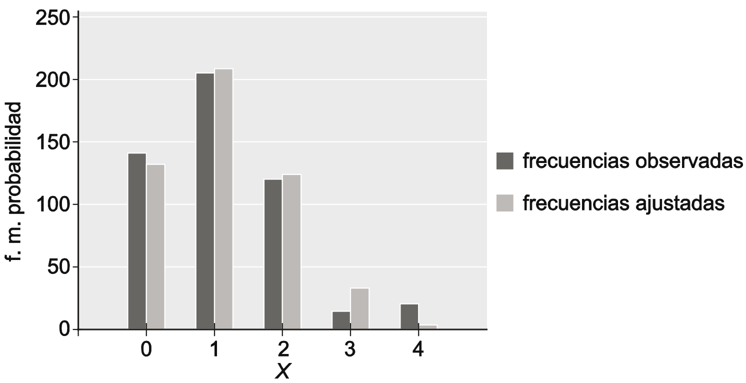
$$P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}2835^0 \cdot 0{,}7165^4 = 0{,}26355 \qquad P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot 0{,}2835^1 \cdot 0{,}7165^3 = 0{,}41712$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}2835^2 \cdot 0{,}7165^2 = 0{,}24757 \qquad P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}2835^3 \cdot 0{,}7165^1 = 0{,}06530$$

$$P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot 0{,}2835^4 \cdot 0{,}7165^0 = 0{,}00646$$

b) La distribución de frecuencias ajustadas frente a las observadas se muestra en la tabla y en el gráfico siguientes:

x_j	frecuencias Observadas f_j	probabilidades ajustadas $P(X=x_j)$	frecuencias Ajustadas
0	141	0,26355	131,78
1	205	0,41712	208,56
2	120	0,24757	123,78
3	14	0,06530	32,65
4	20	0,00646	3,23
	500	1	500



En el gráfico, puede observarse que el ajuste es razonablemente bueno en su conjunto, si bien las frecuencias ajustadas a los dos valores más altos, $x = 3$ y $x = 4$, quedan lejos de las frecuencias observadas.

Síntesis

49. La función de masa de probabilidad del número de vehículos que se venden en un concesionario de coches es:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=x)$	0,04	0,04	m	0,12	0,3	0,25	0,1	0,05

a) Hallar el valor de m.

b) Dibuja el diagrama de barras de la función de masa de probabilidad.

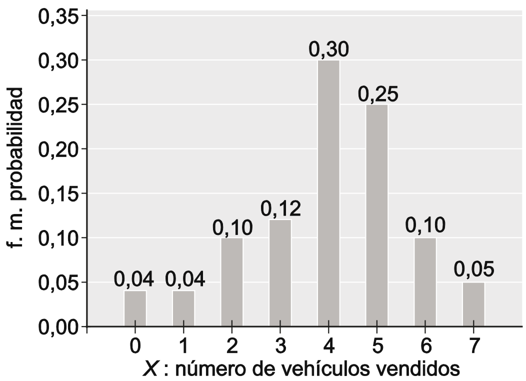
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el concesionario se vendan más de dos coches pero menos de seis?

d) Si se sabe que en una semana se han vendido más de 3 coches, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan vendido menos de 7?

a) Como la suma de las probabilidades debe ser la unidad:

$$\sum_{j=1}^{8} p_j = 1 \Rightarrow 0{,}04 + 0{,}04 + m + 0{,}12 + 0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}1 + 0{,}05 = 1 \Rightarrow m = 0{,}1$$

b) El diagrama de barras de la función de masa de probabilidad es:



c) $P(2 < X < 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) =$
$= 0{,}12 + 0{,}3 + 0{,}25 = 0{,}67$

d) $P(3 < X < 7) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) =$
$= 0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}1 = 0{,}65$
$P(X > 3) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) =$
$= 0{,}30 + 0{,}25 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}7$

Se tiene que: $P(X < 7 | X > 3) = \dfrac{P(3 < X < 7)}{P(X > 3)} = \dfrac{0{,}65}{0{,}7} = 0{,}9286$.

50. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\binom{2x+1}{x-1} = \binom{2x+1}{2x-7}$ **b)** $\binom{x}{2} - x = \binom{x-2}{2} + 3$

a) $\binom{2x+1}{x-1} = \binom{2x+1}{2x-7} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2x+1-(2x-7) \Rightarrow x-1 = 8 \Rightarrow x = 9 \\ x-1 = 2x-7 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$

b) $\binom{x}{2} - x = \binom{x-2}{2} + 3 \Rightarrow \dfrac{x!}{2!(x-2)!} - x = \dfrac{(x-2)!}{2!(x-4)!} + 3 \Rightarrow \dfrac{x(x-1)}{2} - x = \dfrac{(x-2)(x-3)}{2} + 3$

$\Rightarrow \dfrac{x^2 - x - 2x}{2} = \dfrac{x^2 - 5x + 12}{2} \Rightarrow x = 6$

51. Una variable aleatoria X, tiene una distribución binomial donde la probabilidad del éxito es $p = 0{,}36$ y la desviación típica es $\sigma = 2{,}4$ Halla la probabilidad de que la variable tome un valor igual que su media.

La distribución de la variable aleatoria es $X \sim \text{Bin}(n;\, p = 0{,}36)$, con $q = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$, de la expresión de la varianza se tiene:
$\sigma^2 = \text{Var}(X) = npq \Rightarrow 2{,}4^2 = n \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}64 = 5{,}76 \Rightarrow n = 25$

La esperanza será entonces $E[X] = np = 25 \cdot 0{,}36 = 9$, de donde $P(X=9) = \binom{25}{9} 0{,}36^9 \cdot 0{,}64^{16} = 0{,}164\,386$.

52. Considera las variables binomiales $X \sim \text{Bin}(n = 24; p = 0,2)$ e $Y \sim \text{Bin}(n = 12; p = 0,4)$.

a) Comprueba que tienen la misma media.

b) ¿Cuál de las dos distribuciones tienen los datos más agrupados en torno a la media?

c) Halla las siguientes probabilidades:

i) $P(X = 12)$ **ii)** $P(Y = 6)$

a) Por tratarse de distribuciones binomiales:
$E[X] = n_X \cdot p_X = 24 \cdot 0,2 = 4,8$
$E[Y] = n_Y \cdot p_Y = 12 \cdot 0,4 = 4,8$

b) Para responder a esta cuestión, se calculan los coeficientes de variación.

$$\sigma_X^2 = Var[X] = n_X \cdot p_X \cdot q_X = 24 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 3,84 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3,84} = 1,959592 \Rightarrow CV(X) = \frac{\sigma_X}{|\mu_X|} = \frac{1,959592}{4,8} = 0,40825$$

$$\sigma_Y^2 = Var[X] = n_Y \cdot p_Y \cdot q_Y = 12 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 2,88 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2,88} = 1,697056 \Rightarrow CV(X) = \frac{\sigma_Y}{|\mu_Y|} = \frac{1,697056}{4,8} = 0,35355$$

La variable Y tiene los datos más agrupados alrededor de la media.

c) $P(X = 12) = \binom{24}{12} 0,2^{12} \cdot 0,8^{12} = 0,000761$ $P(Y = 6) = \binom{12}{6} 0,4^6 \cdot 0,6^6 = 0,17658$

CUESTIONES

53. Con la ayuda del desarrollo del binomio $(1+1)^n$, demuestra que se verifica la igualdad:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Es suficiente con expresar 2 como suma de 1+1 y desarrollar la potencia del binomio:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 1^j \cdot 1^{n-j} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

54. Encuentra dos distribuciones binomiales con la misma esperanza, de modo que el número de ensayos realizados en una de ellas sea el triple que en la otra.

Se busca $X \sim \text{Bin}(n, p_1)$ e $Y \sim \text{Bin}(3n, p_2)$ tales que: $E[X] = np_1 = 3np_2 = E[Y] \Rightarrow p_1 = 3p_2$

Sirven, por tanto, cualquier par que cumplan esta condición, es decir $X \sim \text{Bin}(n, 3p_2)$ e $Y \sim \text{Bin}(3n, p_2)$ lo que obliga a que $3p_2 \leq 1 \Rightarrow p_2 \leq \frac{1}{3}$.

Por ejemplo $X \sim \text{Bin}(n; 0,6)$ e $Y \sim \text{Bin}(3n; 0,2)$

PROBLEMAS

55. Un sistema eléctrico está formado por 6 componentes independientes. La probabilidad de que falle uno cualquiera de los componentes es 0,15. Calcula la probabilidad de que:

a) No falle ninguno.

b) Fallen exactamente 3 componentes.

c) Fallen como mucho 2 componentes.

d) Fallen al menos dos componentes si se sabe que ya ha fallado al menos uno.

La variable aleatoria es X: "número de componentes que fallan de las 6". La distribución de X es $\text{Bin}(n=6;\ p=0{,}15)$

a) $P(X=0)=\binom{6}{0}\cdot 0{,}15^0\cdot 0{,}85^6=0{,}85^6=0{,}3771$

b) $P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot 0{,}15^3\cdot 0{,}85^3=0{,}85^6=0{,}04145$

c) $P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}3771+0{,}3993+0{,}1762=0{,}9526$

d) En este caso, se trata de una probabilidad condicionada: $P(X\ge 2|X\ge 1)=\dfrac{P(X\ge 2,\ X\ge 1)}{P(X\ge 1)}=\dfrac{P(X\ge 2)}{P(X\ge 1)}$

$P(X\ge 2)=1-P(X=1)-P(X=0)=1-(0{,}3771+0{,}3993)=0{,}2236$

$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-0{,}3771=0{,}6229$ $P(X\ge 2|X\ge 1)=\dfrac{P(X\ge 2)}{P(X\ge 1)}=\dfrac{0{,}2236}{0{,}6229}=0{,}3590$

56. En el último mes, un vendedor de periódicos ha devuelto por término medio el 30% de los ejemplares diarios que le han servido del periódico A. Si un día concreto, elegido al azar, le sirven 15 unidades, calcula la probabilidad de que

a) Devuelva por lo menos 4.

b) Venda todos los periódicos.

c) Venda más de 12, si se sabe que al menos ha vendido 10.

Sea la variable aleatoria X: "número de ejemplares devueltos, de los 15". La distribución es $X\sim\text{Bin}(n=15;\ p=0{,}3)$

a) $P(X=0)=\binom{15}{0}\cdot 0{,}7^{15}=0{,}00475$ $\quad P(X=1)=\binom{15}{1}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^{14}=0{,}03052$

$P(X=2)=\binom{15}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^{13}=0{,}09156$ $\quad P(X=3)=\binom{15}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^{12}=0{,}17004$

$P(X\ge 4)=1-P(X\le 3)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right]=0{,}70313$

b) En este caso, no devolvería ninguno, $X=0$, de modo que, del apartado anterior: $P(X=0)=0{,}00475$.

c) Se trata de una probabilidad condicionada, teniendo en cuenta, que vender más de 12 ejemplares, significa devolver menos de 3 y vender al menos 10 es equivalente a devolver como mucho 5.

$P(X<3\,|\,X\le 5)=\dfrac{P(X<3\wedge X\le 5)}{P(X\le 5)}=\dfrac{P(X<3)}{P(X\le 5)}=\dfrac{0{,}12683}{0{,}72162}=0{,}17576$

$P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}00475+0{,}03052+0{,}09156=0{,}12683$

$P(X=4)=\binom{15}{4}\cdot 0{,}3^4\cdot 0{,}7^{11}=0{,}21862$ $\quad P(X=5)=\binom{15}{5}\cdot 0{,}3^5\cdot 0{,}7^{10}=0{,}20613$

$P(X\le 5)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$
$=0{,}00475+0{,}03052+0{,}09156+0{,}17004+0{,}21862+0{,}20613=0{,}72162$

57. En un examen tipo test se debe responder a 10 preguntas, cada una de las cuales tiene 4 posibles respuestas solo una de las cuales es correcta. Para aprobar es preciso contestar correctamente al menos a 6 preguntas. Calcula la probabilidad de que un estudiante apruebe si:

a) Contesta al azar a todas las preguntas.

b) Domina la mitad de la asignatura.

Sea la variable aleatoria *X*: "numero de respuestas correctas, de las 10".

En este caso, como la respuesta a cada pregunta es al azar y se dispone de 4 posibles respuestas, la probabilidad de acertar cada pregunta es $p = 0,25$ y, en consecuencia, la variable *X* tiene distribución $\text{Bin}\ (n = 10; p = 0,25)$.

a) De manera que la probabilidad de contestar correctamente al menos a 6 preguntas (para aprobar) es:

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$
$$= 0,0162 + 0,0031 + 0,0004 + 0,0000 + 0,0000 = 0,0197$$

Donde cada probabilidad se puede obtener de la tabla de la binomial o se calcula mediante:

$$P(X = k) = \binom{05}{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{10-k}$$

b) Si domina la mitad de la asignatura, entonces la probabilidad de acertar cada pregunta es $p = 0,5$ y, por tanto, la distribución de la variable *X* es $\text{Bin}\ (n = 10,\ p = 0,5)$:

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$$
$$= 0,2051 + 0,1172 + 0,0439 + 0,0098 + 0,0010 = 0,377$$

58. En el control de calidad del proceso de fabricación de baterías de litio de una determinada marca, el 15% de las unidades es rechazado. De la producción de un día determinado se eligen al azar 8 baterías. Calcula la probabilidad de que:

a) Al menos una de las baterías sea rechazada.

b) Las ocho pasen el control de calidad.

c) ¿Cuál es el número mínimo de baterías que debe ser inspeccionado para que se rechace por lo menos una de las bateríascon probabilidad mayor de 0,9 ?

Sea la variable aleatoria *X*: "número de baterías que son rechazadas, de las 8 seleccionadas". La variable *X* tiene distribución de probabilidad $\text{Bin}\ (n = 8;\ p = 0,15)$:

a) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,85^8 = 1 - 0,2725 = 0,7275$

b) La probabilidad de que no sea rechazada ninguna (las 8 pasen el control) es $P(X = 0) = 0,85^8 = 0,2725$.

c) Si se examinan k baterías elegidas al azar, la probabilidad de que se rechace al menos una de ellas es:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{k}{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^k = 1 - 0,85^k$$

Para que esta probabilidad sea superior a 0,9 se tienen que cumplir que $1 - 0,85^k > 0,9$.

Despejando y tomando logaritmos (o tanteando) se obtiene:

$1 - 0,85^k > 0,9 \Rightarrow 0,1 > 0,85^k \Rightarrow \log 0,1 > \log 0,85^k = k \cdot \log 0,85$ y por ser $\log 0,85$ negativo: $k > \dfrac{\log 0,1}{\log 0,85} \simeq 14,17$

Como *k* debe ser entero, dando valores a *k*, se obtiene quedeben examinarse por lo menos 15 baterías para que, con probabilidad superior a 0,9, al menos una de ellas sea rechazada.

59. En la consulta de un médico especialista 3 de cada 10 pacientes son diagnosticados con una enfermedad grave. Si se eligen 8 pacientes al azar de esta consulta, calcula la probabilidad de que hayan sido diagnosticados con enfermedad grave:

a) Como máximo 3 pacientes.

b) Más de 2 pacientes.

Sea la variable aleatoria X: "número de pacientes, de los 8 elegidos, diagnosticados con una enfermedad grave".
La variable X tiene una distribución $\text{Bin}\,(n=8;\ p=0{,}3)$.

Usando la tabla de la distribución binomial tenemos los siguientes resultados:

a) $P(X \leq 3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 0{,}0576+0{,}1977+0{,}2965+0{,}2541 = 0{,}8059$

b) $P(X>2) = 1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right] = 1-0{,}0576-0{,}1977-0{,}2965 = 0{,}4482$

60. En un barrio de una gran ciudad se ha realizado un estudio acerca del número de personas que viven en cada hogar. En la tabla se recogen los resultados de una muestra de 200 hogares.

N.º personas	0	1	2	3	4	5
N.º hogares	6	24	52	64	42	12

a) Ajusta una distribución binomial al conjunto de datos.

b) Calcula las frecuencias ajustadas.

c) Dibuja los diagramas de frecuencias observadas y ajustadas.

d) Comenta la precisión del ajuste realizado.

e) Elegido un hogar al azar, ¿cuál es la probabilidad de que en él vivan menos de 3 personas?

a) La variable es X: "n.º de personas que viven en cada hogar". Esta variable, toma los valores: 0,1, 2, 3, 4 y 5, de forma que si se desea ajustar una distribución $\text{Bin}(n, p)$, el parámetro $n=5$ y se debe estimar el parámetro p. Para ello se calcula la media de la distribución de frecuencias y se iguala a la esperanza de la distribución binomial.

x_j	f_j	$x_j f_j$
0	6	0
1	24	24
2	52	104
3	64	192
4	42	168
5	12	60
	200	548

La media de la distribución de frecuencias es $\bar{X} = \dfrac{548}{200} = 2{,}74$.

Y como la esperanza de la binomial es $E[X] = np = 5p$, igualando resulta:

$5p = 2{,}74 \Rightarrow p = 0{,}548$.

De manera que la distribución binomial que se ajusta a los datos es $X \sim \text{Bin}\,(n=5;\ p=0{,}548)$.

b) $P(X=0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}548^0 \cdot 0{,}452^5 = 0{,}01887$

$P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}548^1 \cdot 0{,}452^4 = 0{,}11437$

$P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}548^2 \cdot 0{,}452^3 = 0{,}27732$

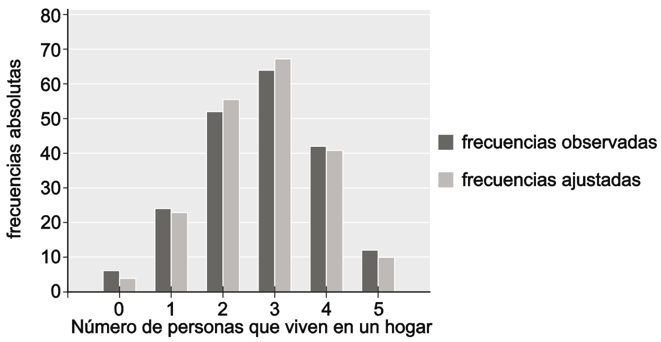
$P(X=3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}548^3 \cdot 0{,}452^2 = 0{,}33622$

$P(X=4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}548^4 \cdot 0{,}452^1 = 0{,}20381$

$P(X=5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}548^5 \cdot 0{,}452^0 = 0{,}04942$

c)

x_j	Frecuencia observada f_j	Probabilidad. ajustada $P(X=x_j)$	Frecuencia ajustada $200 \cdot P(X=x_j)$
0	6	0,01887	3,77
1	24	0,11437	22,87
2	52	0,27732	55,46
3	64	0,33622	67,24
4	42	0,20381	40,76
5	12	0,04942	9,88
	200	1	200



d) El ajuste es bastante bueno, ya que las frecuencias ajustadas se aproximan razonablemente a las observadas.

e) $P(X<3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = 0{,}01887+0{,}11437+0{,}27732 = 0{,}41056$

61. Una granja envasa todos los huevos que produce en cajas de 12 unidades. En el proceso de transporte se rompen el 10% de los huevos envasados. Un cliente compra en el supermercado una caja de esta granja, calcula la probabilidad de que:

a) No tenga ningún huevo roto.

b) Haya exactamente un huevo roto.

c) Por lo menos uno de los huevos de la caja esté roto.

Suponiendo que la caja ha sido elegida al azar, Sea la variable aleatoria *X*: "número de huevos rotos, de los 12 que contiene la caja". La variable *X* tiene una distribución $\text{Bin}\ (n = 12;\ p = 0{,}10)$.

a) $P(X=0)=\binom{12}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^{12}=0{,}28243$

b) $P(X=1)=\binom{12}{1}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^{11}=12\cdot 0{,}1\cdot 0{,}31381=0{,}37657$

c) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-0{,}28243=0{,}71757$

62. En un centro educativo, el 25% de los alumnos está inscrito en alguna actividad extraescolar. Si elegimos al azar 15 alumnos de este centro, calcula la probabilidad de que

a) Ninguno participe en actividades extraescolares.

b) Entre 6 y 8 participen en actividades extraescolares.

c) Como mucho 4 participen en actividades extraescolares.

Sea la variable aleatoria *X*: "número de alumnos, de los 15 seleccionados, inscritos en actividades extraescolares". La distribución de probabilidad de la variable *X* es $\text{Bin}\ (n = 15;\ p = 0{,}25)$.

a) $P(X=0)=\binom{15}{0}\cdot 0{,}25^0\cdot 0{,}75^{15}=0{,}01336$

b) $P(6\leq X\leq 8)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=\binom{15}{6}\cdot 0{,}25^6\cdot 0{,}75^9+\binom{15}{7}\cdot 0{,}25^7\cdot 0{,}75^8+\binom{15}{8}\cdot 0{,}25^8\cdot 0{,}75^7=$

$=0{,}09175+0{,}03932+0{,}01311=0{,}14418$

c) $P(X\leq 4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$

$=\binom{15}{0}0{,}75^{15}+\binom{15}{1}\cdot 0{,}25^1\cdot 0{,}75^{14}+\binom{15}{2}\cdot 0{,}25^2\cdot 0{,}75^{13}+\binom{15}{3}\cdot 0{,}25^3\cdot 0{,}75^{12}+\binom{15}{3}\cdot 0{,}25^4\cdot 0{,}75^{11}=$

$=0{,}01336+0{,}06682+0{,}15591+0{,}2250+0{,}22520=0{,}68649$

63. De las dos situaciones siguientes, ¿cuál es la que tiene mayor probabilidad de ocurrir?

a) Obtener al menos dos seises al lanzar seis dados.

b) Obtener al menos 7 caras al lanzar una moneda 10 veces.

a) Sea la variable aleatoria X: "número de ases en el lanzamiento de seis dados" (equivale a lanzar un dado seis veces), cuya distribución de probabilidad es $X \sim \text{Bin}\left(n = 6;\ p = \dfrac{1}{6}\right)$.

La probabilidad de obtener al menos dos seises se calcula de la siguiente forma:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{6}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^6 - \binom{6}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^5 =$$

$$= 1 - 0{,}33490 - 0{,}40188 = 0{,}26322$$

b) Sea la variable Y: "n.º de caras al lanzar una moneda 10 veces", cuya distribución es $Y \sim \text{Bin}(n = 10;\ p = 0{,}5)$

La probabilidad de obtener al menos 7 caras es:

$$P(Y \geq 7) = P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) = \binom{15}{7}0{,}5^{10} + \binom{15}{8}0{,}5^{10} + \binom{15}{9}0{,}5^{10} + \binom{10}{10}0{,}5^{10} =$$

$$= 0{,}11719 + 0{,}04394 + 0{,}00977 + 0{,}00098 = 0{,}17188$$

Luego es más probable obtener al menos dos seises al lanzar seis dados.

64. Según los datos del organismo correspondiente el 80% de los incendios que se producen en la época de calor son provocados. Si de todos los incendios que se han producido en una determinada región se eligen 12 al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Más de 10 hayan sido provocados.

b) Como mucho 3 hayan sido accidentales.

Sea la variable aleatoria X: "número de incendios no provocados, de los 12 seleccionados". La variable X tiene una distribución de probabilidad $\text{Bin}\ (n = 12;\ p = 0{,}2)$.

a) $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{12}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{12} + \binom{12}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{11} == 0{,}06872 + 0{,}20616 = 0{,}27488$

b) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$

$$= 0{,}06872 + 0{,}20616 + \binom{12}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{10} + \binom{12}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^9 = 0{,}79\,457$$

65. Según una encuesta, el 52% de los hogares europeos tiene contratados servicios de Internet.

a) Si se seleccionan 20 hogares al azar, ¿cuál es la probabilidad de que más de 17 tengan contratados servicios de Internet?

b) Si se elige una muestra de 1200 hogares, ¿cuál es el número esperado de hogares que tendrán contratados servicios de Internet?

Sea la variable aleatoria X: "número de hogares europeos, de los 20 seleccionados, que tienen contratados servicios de Internet". La variable X tiene distribución de probabilidad binomial $X \sim \text{Bin}\ (n = 20,\ p = 0{,}52)$

a) La probabilidad de que en más de 17 hogares haya Internet, entre los 20 seleccionados, es:

$$P(X > 17) = P(X = 18) + P(X = 19) + P(X = 20) = \binom{20}{18} \cdot 0{,}52^{18} \cdot 0{,}48^2 + \binom{20}{19} \cdot 0{,}52^{19} \cdot 0{,}48^1 + \binom{20}{20} \cdot 0{,}52^{20} \cdot 0{,}48^0 =$$

$$= 0{,}0003383 + 0{,}0000386 + 0{,}0000021 = 0{,}0003790$$

b) Si la muestra consiste en 1500 hogares, la distribución sería $X \sim \text{Bin}\ (n = 1200,\ p = 0{,}52)$, por lo que el número esperado de hogares que tendrán servicios de Internet sería: $E[X] = np = 1200 \cdot 0{,}52 = 624$.

66. Una empresa comercializa 3 productos y, le interesa saber si, tras una campaña de publicidad, ha tenido éxito en darlos a conocer. Los resultados de una encuesta realizada a 400 personas acerca de su conocimiento de estos productos se recogen en la tabla siguiente: 35 encuestados no conocen ninguno de los productos, 130 conocen solo 1, etc.

x_j	0	1	2	3
f_j	35	130	170	65

a) Ajusta una distribución binomial al conjunto de datos.

b) Contrasta el ajuste realizado y representa gráficamente las distribuciones de frecuencias observadas y ajustadas.

La variable X: "n.º de productos, de los tres elegidos, que se conocen tras la campaña de publicidad".
Esta variable, toma los valores: 0,1, 2 y 3, de forma que si se desea ajustar una distribución $\text{Bin}(n; p)$, el parámetro $n = 3$ y se debe estimar el parámetro p.

a) Para ello se calcula la media de la distribución de frecuencias y se iguala a la esperanza de la distribución binomial.

x_j	f_j	x_jf_j
0	35	0
1	130	130
2	170	340
3	65	195
	400	665

La media de la distribución de frecuencias es $\bar{X} = \frac{665}{400} = 1{,}6625$.

La esperanza de la binomial es $E[X] = np = 3p$, igualando resulta: $3p = 1{,}6625 \Rightarrow p = 0{,}5542$

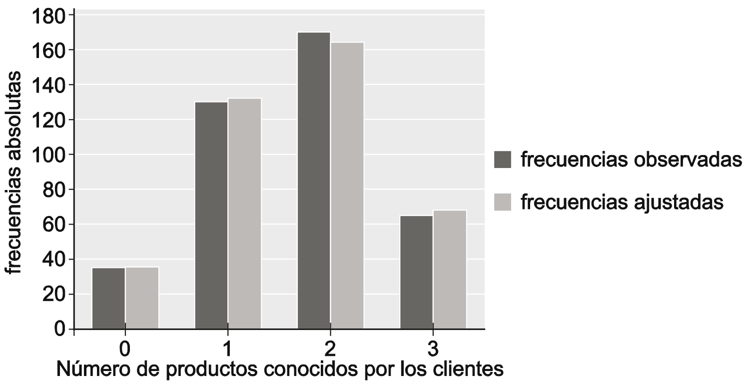
De manera que la distribución binomial que se ajusta a los datos es: $X \sim \text{Bin}\,(n = 3;\ p = 0{,}5542)$

b) Una vez ajustada la distribución binomial a la distribución de frecuencias dada, se calculan las frecuencias ajustadas. La probabilidad de cada valor de la variable ajustada es:

$P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0{,}5542^0 \cdot 0{,}4458^3 = 0{,}08860$ $\qquad P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}5542^1 \cdot 0{,}4458^2 = 0{,}33042$

$P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}5542^2 \cdot 0{,}4458^1 = 0{,}41077$ $\qquad P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}5542^3 \cdot 0{,}4458^0 = 0{,}17022$

x_j	frecuencias observadas x_j	probabilidades ajustadas $P(X=x_j)$	frecuencias ajustadas
0	35	0,08860	35,44
1	130	0,33042	132,17
2	170	0,41077	164,31
3	65	0,17022	68,09
	400	1	400



Como se puede observar en la tabla y en el gráfico el ajuste de la distribución de frecuencias por la distribución binomial es muy bueno.

67. Los datos de una reciente encuesta aseguran que el 46% de los jubilados de una determinada localidad camina al menos una hora diaria por prescripción médica. Del colectivo de jubilados se eligen 12 personas al azar:

a) Determina la distribución de la variable X: "número de jubilados de los 12 que camina al menos una hora diaria".

b) Calcula la probabilidad de que más de la mitad de los jubilados seleccionados camine al menos una hora diaria.

La elección se supone con reemplazamiento para que la probabilidad de elegir, en cada paso, uno de los jubilados sea la misma.

a) La variable aleatoria X: "número de jubilados, de los 12, que camina al menos una hora diaria" es binomial:

$X \sim \text{Bin}(n = 12;\ p = 0{,}46)$.

b) $P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) =$

$= \binom{12}{7} \cdot 0{,}46^7 \cdot 0{,}54^5 + \binom{12}{8} \cdot 0{,}46^8 \cdot 0{,}54^4 + \binom{12}{9} \cdot 0{,}46^9 \cdot 0{,}54^3 \binom{12}{10} \cdot 0{,}46^{10} \cdot 0{,}54^2 \binom{12}{11} \cdot 0{,}46^{11} \cdot 0{,}54^1 \binom{12}{12} \cdot 0{,}46^{12} =$

$= 0{,}158\,49 + 0{,}08438 + 0{,}03195 + 0{,}00816 + 0{,}00126 + 0{,}00009 = 0{,}28433$

68. El 60% de los pacientes que atiende la consulta de un médico supera los niveles máximos de glucosa en sangre. Si de la consulta se eligen 6 pacientes al azar:

a) ¿Cuál es la distribución de la variable X: "número de pacientes que supera el nivel máximo de glucosa"?

b) Calcula la probabilidad de que al menos dos pacientes superen los niveles de glucosa.

c) Si se sabe que al menos un paciente supera el nivel máximo de glucosa, ¿Cuál es la probabilidad de que sean menos de 5 los que lo superen?

a) La distribución de probabilidad de la variable X: "número de pacientes, de los 6 elegidos, que supera el nivel máximo de glucosa" es binomial $X \sim \text{Bin}(n = 6; p = 0{,}6)$.

b) La probabilidad de que al menos dos de los seis pacientes superen los niveles de glucosa es:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{6}{0} \cdot 0{,}4^6 - \binom{6}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^5 = 1 - 0{,}00410 - 0{,}03686 = 0{,}95904$$

También se puede resolver este apartado, utilizando la variable Y: " número de pacientes, de los 6, que no supera el nivel máximo de glucosa", puesto que $Y \sim \text{Bin}(n = 6;\ p = 0{,}4)$, en cuyo caso $P(X = k) = P(Y = n - k)$

Las probabilidades de Y pueden obtenerse la tabla de la binomial. Entonces:

$$P(X \geq 2) = P(Y \leq 4) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 4) =$$
$$= 0{,}04666 + 0{,}18662 + 0{,}31104 + 0{,}27648 + 0{,}13824 = 0{,}95904$$

c) Se trata de una probabilidad condicionada: $P(X < 5 \mid X \geq 1) = \dfrac{P(1 \leq X < 5)}{P(X \geq 1)} = \dfrac{0{,}76262}{0{,}99590} = 0{,}76576$

$P(1 \leq X < 5) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3 + P(X = 4) = 0{,}03686 + 0{,}13824 + 0{,}27648 + 0{,}31104 = 0{,}76262$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}00410 = 0{,}99590$

69. El 10% de las botellas de 1 litro de aceite de oliva llenadas por una máquina envasadora contienen, realmente, una cantidad inferior al litro. Un cliente compra una caja de 12 botellas envasadas en esta máquina:

a) Determina la distribución de la variable *Y*: "número de botellas de la caja con una cantidad inferior al litro de aceite".

b) ¿Cuál es el número esperado de botellas de la caja que contienen una cantidad inferior al litro? ¿Y su desviación típica?

c) Calcula la probabilidad de que la caja contenga dos botellas con menos de 1 litro de aceite.

d) Calcula la probabilidad de que en la caja haya al menos dos botellas con menos de un litro de aceite?

Se entiende que, dado el volumen de producción de la máquina, las botellas han sido elegidas de forma independiente.

a) La variable *Y*: "número de botellas de la caja con una cantidad inferior al litro de aceite" tiene una distribución de probabilidad binomial $X \sim \text{Bin}\ (n = 12;\ p = 0{,}1)$.

b) La esperanza y la desviación típica de la variable aleatoria *Y* son, respectivamente:

$E[Y] = np = 12 \cdot 0{,}1 = 1{,}2$

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = np(1-p) = 12 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 1{,}08 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1{,}08} = 1{,}0392$

c) La probabilidad de que la caja contenga exactamente dos botellas con menos de 1 litro de aceite es:

$$P(Y = 2) = \binom{12}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{10} = 0{,}23013$$

d) La probabilidad de que en la caja haya al menos dos botellas con menos de un litro de aceite es:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{12}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{12} - \binom{12}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{11} = 1 - 0{,}28243 - 0{,}37657 = 0{,}341$$

70. En la segunda vuelta de las elecciones presidenciales, el candidato A obtuvo el 52% de los votos emitidos. El resto votó a otro candidato o lo hizo en blanco.

Si de la población que ha participado en la votación se elige una muestra aleatoria de 10 personas, calcula la probabilidad de que entre estos:

a) Más del 60% haya votado al candidato A.

b) Menos de la mitad haya votado al candidato A.

c) Más del 60% haya votado al candidato A si se sabe que por lo menos la mitad le votó.

NOTA: Se supone que en cada elección, de las 10, la probabilidad de que la persona seleccionada haya votado al candidato a es la misma, porque la elección se haga con reemplazo o porque el tamaño de la muestra es muy pequeño respecto al de la población.

Sea *X*: "número de personas, de las 10 seleccionadas, que han votado al candidato A".

La distribución de probabilidad de *X* es $X \sim \text{Bin}(n = 10;\ p = 0{,}52)$.

a) $P(X > 6) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$

$= \binom{10}{7} \cdot 0{,}52^7 \cdot 0{,}48^3 + \binom{10}{8} \cdot 0{,}52^8 \cdot 0{,}48^2 + \binom{10}{9} \cdot 0{,}52^9 \cdot 0{,}48 + \binom{10}{10} \cdot 0{,}52^{10} =$

$= 0{,}13644 + 0{,}05543 + 0{,}01334 + 0{,}00145 = 0{,}20665$

b) $P(X < 5) = 1 - P(X = 5) - P(X = 6) - P(X > 6) = 1 - \binom{10}{5} \cdot 0{,}52^5 \cdot 0{,}48^5 - \binom{10}{6} \cdot 0{,}52^6 \cdot 0{,}48^4 - 0{,}20665 =$

$= 1 - 0{,}24413 - 0{,}22040 - 0{,}20665 = 0{,}32882$

c) $P(X > 6 \mid X \geq 5) = \dfrac{P(X > 6)}{P(X \geq 5)} = \dfrac{0{,}20665}{1 - 0{,}32882} = 0{,}30789$

71. Sea la variable aleatoria *X*: “número de caras obtenido al lanzar 6 veces una moneda trucada de tal manera que la probabilidad de obtener cara es 0,25”.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como mucho una cara en 6 lanzamientos?

b) Calcula el valor esperado de caras en los 100 lanzamientos.

c) ¿Cuál es el número mínimo de lanzamientos que habría que realizar para que se obtenga al menos una cara con probabilidad superior a 0,5?

La variable aleatoria *X*: “número de caras obtenido al lanzar seis veces la moneda” ; $X \sim \text{Bin}(n=6;\ p=0,25)$.

a) Puesto que la moneda está trucada y la probabilidad de obtener cara en un ensayo es 0,25.La probabilidad de obtener como mucho una cara es $P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=0,1780+0,3560=0,534$.

b) Si la moneda se lanza 100 veces, la variable *Y*: “número de caras en los cien lanzamientos”, tiene una distribución binomial $Y\sim\text{Bin}(n=100,\ p=0,25)$ de modo que su esperanza es $E[Y]=np=100\cdot 0,25=25$.

c) Como la probabilidad de obtener cara en cada lanzamiento es 0,25, si el experimento se repite *k* veces, la probabilidad de obtener al menos una cara es:

$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\binom{k}{0}\cdot 0,25^0\cdot 0,75^k=1-0,75^k$ y debe ser superior a 0,5.

$$1-0,75^k>0,5\Rightarrow 0,5>0,75^k\Rightarrow \log 0,5>\log 0,75^k=k\log 0,75\Rightarrow \frac{\log 0,5}{\log 0,75}<k\Rightarrow k>2,41$$

Por lo que el experimento debe repetirse al menos 3 tres veces para obtener al menos una cara con probabilidad superior a 0,5.

72. La mitad de los vehículos que cruzan una pequeña población supera los límites de velocidad permitidos. En un día elegido al azar se seleccionan, también al azar, 20 vehículos que cruzaron la población. Halla el número esperado de vehículos que superen la velocidad permitida y calcula la probabilidad de que:

a) Más de 15 vehículos superen el límite de velocidad permitido.

b) Todos los vehículos crucen correctamente la población.

c) ¿Cuál es el número esperado de vehículos que infringirán la norma de limitación de velocidad?

d) ¿Cuántos vehículos deben pasar, como mínimo, para que con probabilidad superior a 0,8, por lo menos dos infrinjan la limitación de velocidad?

El reemplazamiento asegura la independencia de las observaciones. La variable aleatoria es *X*: “número de vehículos, de los 20 elegidos, que supera los límites de velocidad permitidos”, y tiene una distribución de probabilidad $\text{Bin}(n=20;\ p=0,5)$.

Por tanto, el número esperado de vehículos que supera los límites de velocidad será: $E[X]=np=20\cdot 0,5=10$.

a) $P(X>15)=P(X=16)+P(X=17)+P(X=18)+P(X=19)+P(X=20)=$

$$=\binom{20}{16}\cdot 0,5^{16}\cdot 0,5^4+\binom{20}{17}\cdot 0,5^{17}\cdot 0,5^3+\binom{20}{18}\cdot 0,5^{18}\cdot 0,5^2+\binom{20}{19}\cdot 0,5^{19}\cdot 0,5^1+\binom{20}{20}\cdot 0,5^{20}=$$

$$=0,00462+0,00109+0,00018+0,00002+0,00000=0,00591$$

b) $P=\binom{20}{0}\cdot 0,5^0\cdot 0,5^{20}=0,000000954$

c) Es la esperanza matemática de la variable *X* que ya estaba calculada $E[X]=10$.

d) Si k es el número de vehículos seleccionados, la distribución de la variable *X* es $\text{Bin}(n=k;p=0,5)$.

$$P(X\ge 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{k}{0}0,5^k-\binom{k}{1}0,5^k=1-0,5^k-k0,5^k=1-(1+k)0,5^k\Rightarrow 0,5^k=1-(1+k)0,5^k$$

Y debe elegirse el primer valor de *k* de tal manera que $1-(1+k)0,5^k>0,8$;que puede calcularse tanteando con valores, por ejemplo, a partir de $k=3$. El primer valor que cumple esta condición es *k*= 5.De modo que deben pasar al menos 5 coches para asegurar que con probabilidad superior a 0,8 al menos dos de ellos superarán el límite de velocidad establecido.

73. El 15% de los instrumentos de una orquesta es de viento. Se eligen al azar 4 músicos de la orquesta.

a) Escribe la función de masa de probabilidad de la variable X: "número de músicos que tocan instrumentos de viento, de los 4 seleccionados" y dibuja su diagrama de barras.

b) Calcula la esperanza y la varianza de X.

c) Calcula la probabilidad de que al menos uno de los 4 seleccionados toque un instrumento de viento.

d) ¿Cuántos músicos habría que seleccionar para que con probabilidad superior a 0,8 al menos uno toque un instrumento de viento?

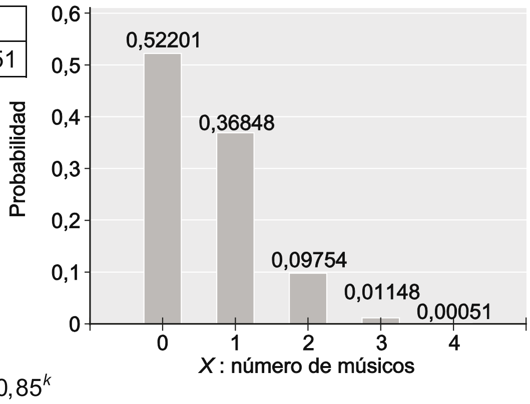
Se entiende que la elección es con reemplazo, es decir, que en cada elección la probabilidad de elegir un músico que toque un instrumento de viento es la misma.

a) La distribución de la variable aleatoria X: "número de músicos que tocan instrumentos de viento, de los 4 seleccionados" es binomial $X \sim \text{Bin}(4;\ 0{,}15)$

Teniendo que su función de masa de probabilidad tiene la forma: $P(X = x) = \binom{4}{x} \cdot 0{,}15^x \cdot 0{,}85^{4-x}, \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$

En la tabla siguiente se recogen los valores de la variable y sus probabilidades:

x	0	1	2	3	4
$P(X= x)$	0,52201	0,36848	0,09754	0,01148	0,00051



b) $E[X] = np = 4 \cdot 0{,}15 = 0{,}60$

$\sigma^2 = \text{Var}(X) = np(1-p) = 4 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}85 = 0{,}51$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}52201 = 0{,}47799$

d) Si se seleccionan k músicos de la orquesta, la probabilidad de que al menos uno de ellos toque un instrumento de viento es:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}85^k \Rightarrow 1 - 0{,}85^k > 0{,}8 \Rightarrow 0{,}2 > 0{,}85^k$

$\Rightarrow \log 0{,}2 > \log 0{,}85^k = k \cdot \log 0{,}85 \Rightarrow \dfrac{\log 0{,}2}{\log 0{,}85} < k \Rightarrow k > 9{,}9$

Luego deben elegirse al menos 10 músicos para que con probabilidad mayor de 0,8 al menos uno toque un instrumento de viento.

74. Un examen de tipo test consta de 12 preguntas, cada una de ellas con cuatro posibles respuestas, de las cuales solo una es correcta. Al realizar el examen solo debe marcarse una y solo una de las cuatro respuestas posibles.

Si es obligatorio contestar a todas las preguntas y cada respuesta acertada suma un punto y cada respuesta fallada resta 0,5 puntos y para aprobar hay que obtener al menos 6 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que una persona apruebe respondiendo al azar?

Sea la variable aleatoria X: "número de preguntas contestadas correctamente por el alumno, de las 12 del examen".

La variable X sigue una distribución $\text{Bin}\,(n = 12; p = 0{,}25)$, al considerarse que las preguntas se contestan de forma independiente y que si se responde al azar, la probabilidad de acertar cada pregunta es $p = 0{,}25$.

Para aprobar, el alumno tiene que obtener 6 o más puntos. Es decir, según el sistema de puntuación, debe tener al menos 8 aciertos, ya que 8 aciertos y 4 fallos suponen $1 \cdot 8 - 0{,}5 \cdot 4 = 6$ puntos.

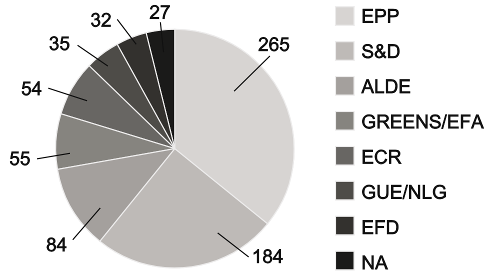
La probabilidad de que el alumno conteste correctamente al menos 8 de las 12 preguntas (si responde al azar) es:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) =$$

$$= \binom{12}{8} \cdot 0{,}25^8 \cdot 0{,}75^5 + \binom{12}{9} \cdot 0{,}25^9 \cdot 0{,}75^3 + \binom{12}{10} \cdot 0{,}25^{10} \cdot 0{,}75^2 + \binom{12}{11} \cdot 0{,}25^{11} \cdot 0{,}75^1 + \binom{12}{12} \cdot 0{,}25^{12} =$$

$$= 0{,}002390 + 0{,}000354 + 0{,}000035 + 0{,}000002 + 0{,}00000 = 0{,}002781$$

75. El gráfico siguiente muestra la composición del parlamento europeo en el periodo 2009– 2014.



Si de los 736 miembros del parlamento se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 10:

a) Describe la distribución de la variable aleatoria *X*: "número de miembros del grupo EPP".

b) Describe la distribución de la variable aleatoria *Y*: "número de miembros del grupo S&P".

c) ¿Cuál es la distribución de la variable *W*= *X*+*Y*: "número de parlamentarios de los grupos EPP y S&P"?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que entre los 10 parlamentarios elegidos al azar no haya ninguno de los grupos EPP y S&P?

NOTA: se supone que la elección es uno a uno con reemplazo, de manera que en cada elección, la probabilidad de elegir un parlamentario de un grupo concreto es la misma.

a) La variable aleatoria *X*: "número de miembros del grupo EPP, de los 10 seleccionados", tiene una distribución binomial $X \sim \text{Bin}\left(n = 10,\ p = \dfrac{265}{736} = 0{,}36\right)$.

b) La variable aleatoria *Y*: "número de miembros del grupo S&D, de los 10 seleccionados", tiene una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}\left(n = 10;\ p = \dfrac{184}{736} = 0{,}25\right)$.

c) La variable aleatoria *W*: "número de parlamentarios de los grupos EPP y S&P, de los 10 seleccionados":

$$W \sim \text{Bin}\left(n = 10;\quad p = \frac{265 + 184}{736} = 0{,}61\right)$$

d) La probabilidad de que entre los 10 parlamentarios seleccionados no haya ninguno de los grupos EPP y S&P es $P(W = 0) = \binom{10}{0} \cdot 0{,}61^0 \cdot 0{,}39^{10} = 0{,}000\,0814$.

76. Un pequeño hotel familiar cuenta con 12 habitaciones. En temporada alta, la petición de reservas supera la capacidad del hotel. Además por diferentes motivos el 2% de las reservas se anulan a última hora.

Si los propietarios deciden admitir hasta 14 reservas para una noche cuando la demanda lo permita, calcula la probabilidad de que:

a) En un día elegido al azar se presentan más clientes que habitaciones disponibles.

b) Sobren habitaciones.

Se considera la variable aleatoria *X*: "número de cancelaciones de reservas en el hotel". La variable *X* sigue una distribución $\text{Bin}\ (n = 14;\ p = 0{,}02)$.

a) Si se presentan más clientes que habitaciones disponibles es porque el número de cancelaciones, de las 14 reservas, es inferior a 2 y su probabilidad es:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{14}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{14} + \binom{14}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{13} = 0{,}75364 + 0{,}21533 = 0{,}96897$$

b) Sobrarán habitaciones si el número de cancelaciones es superior a 2, cuya probabilidad es:

$$P(X > 2) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1 - \binom{14}{0} \cdot 0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{14} - \binom{14}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{13} - \binom{14}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{12} =$$

$$= 1 - 0{,}75364 - 0{,}21533 - 0{,}02856 = 0{,}00247$$

77. Demuestra la expresión: $\binom{m-1}{n}+\binom{m-1}{n-1}=\binom{m}{n}$.

Si se hace uso de la propiedad: $\binom{m}{n}+\binom{m}{n-1}=\binom{m+1}{n}$ y en lugar de m, se considera el caso (m– 1), se tiene directamente que: $\binom{m-1}{n}+\binom{m-1}{n-1}=\binom{m-1+1}{n}=\binom{m}{n}$

También podemos hacer uso del desarrollo de los números combinatorios.

ENTORNO MATEMÁTICO

¿Contrato el seguro?

La compañía de seguros Mondosegu está llevando a cabo una agresiva campaña de publicidad en los medios de comunicación con el fin de captar clientes para sus pólizas de seguros de vida.

El padre de Andrés, estudiante de 1º de Bachillerato, comenta en casa la posibilidad de contratar una de estas pólizas y está preocupado porque no le timen con la cuota de 250 € que debe pagar. Andrés, que acaba de estudiar los temas relativos a estadística y probabilidad se decide a investigar cuál puede ser el coste para la compañía de una póliza de las que anuncia en su publicidad.

Este tipo de pólizas solo producen gastos (significativos) cuando la compañía debe pagar una indemnización. Por información histórica se sabe que en Mondosegu:

- **1 de cada 10 000 pólizas da lugar a una indemnización de 250 000 €.**
- **1 de cada 5000 pólizas da lugar a una indemnización de 150 000 €.**
- **1 de cada 1000 pólizas da lugar a una indemnización de 50 000 €.**
- **1 de cada 500 pólizas da lugar a una indemnización de 25 000 €.**
- **1 de cada 100 pólizas da lugar a una indemnización de 5000 €.**

a) ¿Cuál es el coste esperado de la póliza?

b) Lo que pide la compañía, ¿es adecuado desde el punto de vista empresarial?

(adaptado de “El hombre anumérico”, John Allen Paulos)

Se entiende que la proporción restante, hasta llegar al 100% no implica indemnización, o que esta no es relevante, o que se ha contabilizado de forma genérica en las anteriores ofrecidas en el enunciado.
Se recoge la información en una tabla del siguiente modo:

x_j	250 000	150 000	50 000	25 000	5000	0	
p_j	0,0001	0,0002	0,001	0,002	0,01	0,9867	
x_jp_j	25	30	50	50	50	0	205

En estas condiciones, el gasto medio esperado por póliza suscrita es $E[X]=205$.

Cada póliza supone un gasto esperado de 205 € para la compañía, por tanto la cuota supone $\frac{250}{205}\cdot 100=121{,}951\ \%$ de los costes esperados, es decir un beneficio esperado de cerca de un 22 %.

¿Cuándo nos vamos de viaje?

Ana y Juan quedan para ver las fotografías que tomaron en su última salida extraescolar en la que hicieron un reportaje de plantas. En primer lugar ven las 30 que hizo Ana y un rato más tarde, cuando están viendo las de Juan, Ana comenta:

– **"Esa es igual que la que hice yo";**

– **"No, no es igual, solo parecida", afirma Juan.**

–**"¡Qué va!, es idéntica, tu no recuerdas la mía" sentencia Ana.**

La discusión prosigue y Ana pregunta ¿Cuántas fotos de las mías podrías recordar? Se proponen hacer la experiencia con algunos amigos:

1.ºLes muestran 15 imágenes no habituales en las que no aparecen personas durante un tiempo máximo de 5 segundos cada una.

2.ºMezclan al azar las 15 imágenes "antiguas" con 15 "nuevas" y se las muestran a los amigos. Cada uno debe anotar, sin comentar con los demás, si la diapositiva es antigua o nueva.

¿Cuántas diapositivas acertó cada participante? ¿El número de aciertos se debe al azar? ¿Realmente tienen una buena memoria gráfica? ¿Cómo se podría saber?

Repite con tus amigos el experimento de Ana y Juan e intenta responder a las preguntas anteriores. Ten en cuenta que si alguien contestó al azar, el experimento se puede comparar con el lanzamiento de una moneda: cara (acertar), cruz (fallar) y por lo tanto estaríamos ante una variable binomial $\text{Bin}\,(n = 30; p = 0,5)$. En este caso, si por ejemplo un amigo acertó 25 imágenes, ¿pudo haber contestado al azar? ¿Cuántas debería acertar para estar seguros de que no ha contestado al azar?

(adaptado de "El hombre anumérico", John Allen Paulos)

Si el amigo contestó al azar, el número de diapositivas que acierta (X), tiene una distribución binomial de parámetros: n=30 y p= 0,5, de manera que la probabilidad de que acierte 25 diapositivas es:

$$P(X = 25) = \binom{30}{25} \cdot 0,5^{30} = 0,00013$$

Una probabilidad realmente muy pequeña.

Es más, la probabilidad de que, habiendo contestado al azar, acierte 20 o más diapositivas es también muy pequeña, ya que $P(X \geq 20) = 0,04937$

Es decir, la probabilidad acertar 20 o más diapositivas es menor que 0,05. Luego el amigo no ha contestado al azar.

El número de aciertos esperado contestando al azar es $E[X] = np = 30 \cdot 0,5 = 15$, pero, como se ha visto antes, la probabilidad de acertar muchos más de esa cantidad contestando al azar se reduce drásticamente.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido.

1. Si la esperanza de una variable aleatoria X ~ Bin(n, p) es 5 y su varianza 4, calcula los valores de n y p.

Igualando la esperanza y la varianza de una variable aleatoria binomial a sus valores y resolviendo el sistema se obtienen los parámetros:

$$\begin{cases} np = 5 \\ np(1-p) = 4 \end{cases} \Rightarrow 5(1-p) = 4 \Rightarrow p = 0,2 \qquad n \cdot 0,2 = 5 \Rightarrow n = 25$$

2. En una comunidad de vecinos, el 60% de las veces que un vecino llega a su portal no encuentra el ascensor en la planta baja. Si de la comunidad se eligen 7 vecinos al azar, calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente 2 encuentren el ascensor en la planta baja

b) Por lo menos 3 encuentren el ascensor en la planta baja.

c) Ninguno encuentre el ascensor.

Se supone que la elección de los vecinos es uno a uno con reemplazo.Sea X: "número de vecinos, de los 7, que encuentran el ascensor en la planta baja". La distribución de X es $X \sim \text{Bin}(n = 7; p = 0,4)$.

a) La probabilidad de que sean exactamente 2 los vecinos que encuentren el ascensor en la planta baja es:

$$P(X = 2) = \binom{7}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^5 = 0,26127$$

b) La probabilidad de que sean al menos 3 los que se encuentren el ascensor en la planta baja, puede calcularse utilizando el complementario, es decir, que menos de tres se encuentren el ascensor en la planta baja, es:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0,6^7 - \binom{7}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^6 - \binom{7}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^5 =$$

$$= 1 - 0,02799 - 0,13064 - 0,26127 = 0,59119$$

c) La probabilidad de que ninguno encuentre el ascensor es $P(X = 0) = \binom{7}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^7 = 0,02799$.

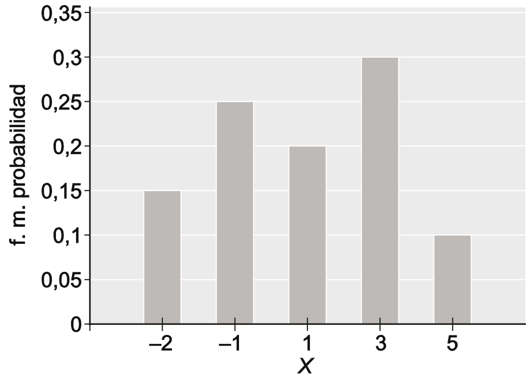
3. Una variable aleatoria *X* toma los valores –2, –1, 1, 3 y 5 con probabilidades respectivas 0,15; 0,25; 0,2; 0,3 y 0,1.

a) Representa gráficamente la distribución de probabilidad.

b) Calcula la esperanza y la varianza de *X*.

c) Halla $P(-1 < X \leq 4)$.

a) Podemos organizar los datos en una tabla y ampliarla para los cálculos posteriores al tiempo que representamos el diagrama de barras de la distribución:



x_j	p_j	p_jx_j	$p_jx_j^2$
–2	0,15	–0,3	0,6
–1	0,25	–0,25	0,25
1	0,2	0,2	0,2
3	0,3	0,9	2,7
5	0,1	0,5	2,5
	1	1,05	6,25

b) La esperanza de *X* y su varianza son respectivamente:

$$E[X] = \sum_{j=1}^{5} p_j x_j = 1{,}05 \qquad \sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{j=1}^{5} p_j \cdot x_j^2 - E[X]^2 = 6{,}25 - 1{,}05^2 = 5{,}1475$$

c) $P(-1 < X \leq 4) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$

4. De una baraja de 40 cartas se extraen 15 cartas una a una con reemplazo. Sean las variables aleatorias *X*: número de reyes extraídos. Se pide:

a) Probabilidad de que *X* sea mayor que 2.

b) Número esperado de reyes.

La distribución de $X \sim \text{Bin}(n = 15; p = 0{,}1)$, pues el número de reyes extraídos, en las 15 cartas, pueden ser 0, 1,…, 15, y en cada extracción la probabilidad de obtener un rey es $p = \frac{4}{40} = 0{,}1$ (4 reyes en las 40 cartas).

a) La probabilidad de que *X* sea mayor que 2 viene dada por:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) =$$
$$= 1 - \binom{15}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{15} - \binom{15}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{14} - \binom{15}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{13} = 1 - 0{,}20589 - 0{,}34315 - 0{,}26690 = 0{,}18406$$

b) La esperanza de la variableXes $E[X] = 15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$.

5. 30 estudiantes respondieron al azar a un test de 5 preguntas con 4 posibles respuestas, de las cuales solo una era correcta. El número de preguntas acertadas se recoge en la tabla siguiente:

x_j	0	1	2	3	4	5	
f_j	6	13	6	3	2	0	30

a) Ajusta una distribución binomial a este conjunto de datos.

b) Compara analítica y gráficamente las frecuencias observadas y ajustadas.

c) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya contestado correctamente 3 preguntas?

a) Se calcula, en primer lugar, la media de la distribución de frecuencias de la variable X: "nº de preguntas acertadas".

La tabla adjunta, contiene los datos para el cálculo de la media. De manera que la media de la distribución de frecuencias observadas es $\bar{X} = \frac{42}{30} = 1{,}4$.

x_j	f_j: obser.	f_jx_j
0	6	0
1	13	13
2	6	12
3	3	9
4	2	8
5	0	0
	30	42

Si se quiere ajustar una distribución binomial $Y \sim \text{Bin}(n = 5;\, p)$, para calcular el parámetro p, se iguala la media de la distribución de frecuencias observadas a la esperanza de la binomial:

$$5p = 1{,}4 \Rightarrow p = \frac{1{,}4}{5} = 0{,}28$$

Luego, debe ajustarse una distribución: $Y \sim \text{Bin}(n = 5;\, p = 0{,}28)$.

b) Se calculan, en primer lugar las probabilidades de la distribución "ajustada":

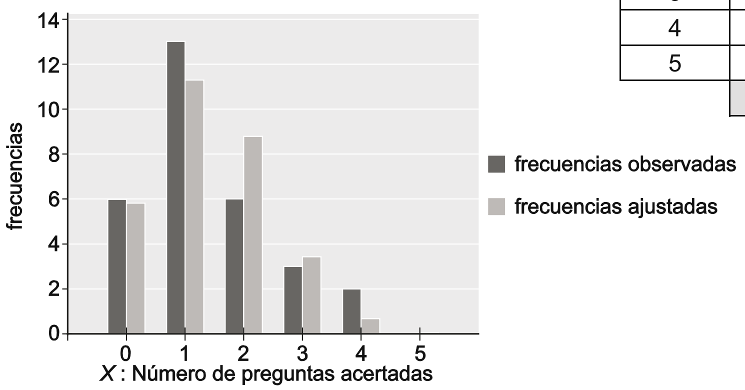
$$P(Y = 0) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}72^5 \qquad P(Y = 1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}28^1 \cdot 0{,}72^4 \qquad P(Y = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}28^2 \cdot 0{,}72^3$$

$$P(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0{,}28^3 \cdot 0{,}72^2 \qquad P(Y = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}28^4 \cdot 0{,}72^1 \qquad P(Y = 5) = \binom{5}{5} \cdot 0{,}28^5$$

que se resumen en la tabla siguiente, junto con las frecuencias esperadas (estimadas)

Se puede observar que la aproximación es razonablemente buena comparando la columna de las frecuencias observadas con la de las frecuencias esperadas, una vez ajustada la distribución binomial.

x_j	f_j: obser.	f_jx_j	$P(Y=x)$	fr.esper.
0	6	0	0,1935	5,8048
1	13	13	0,3762	11,2870
2	6	12	0,2926	8,7788
3	3	9	0,1138	3,4140
4	2	8	0,0221	0,6638
5	0	0	0,0017	0,0516
	30	42	1	30



6. Desarrolla la potencia $\left(x^2y - 2xy^2\right)^5$.

$$\left(x^2y - 2xy^2\right)^5 = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}(x^2y)^j \cdot (-2xy^2)^{5-j} = \sum_{j=0}^{5}\binom{5}{j}2^{5-j}x^{j+5}y^{10-j}(-1)^{5-j} =$$

$$= -\binom{5}{0}2^5x^5y^{10} + \binom{5}{1}2^4x^6y^9 - \binom{5}{2}2^3x^7y^8 + \binom{5}{3}2^2x^8y^7 - \binom{5}{4}2x^9y^6 + \binom{5}{5}x^{10}y^5 =$$

$$= -32x^5y^{10} + 80x^6y^9 - 80x^7y^8 + 40x^8y^7 - 10x^9y^6 + x^{10}y^5$$

7. En una población de cada 2 adultos mayores de 24 años solo uno tiene estudios posteriores a la ESO. Elegidas 8 personas mayores de 24 años, calcula la probabilidad de que:

a) Exactamente 4 tengan solo estudios de ESO.

b) Al menos dos tengan estudios posteriores a la ESO.

Sea la variable aleatoria*X*: "número de personas, de las 8, que solo tienen estudios de ESO".

a) La distribución de probabilidad de la variable $X \sim \text{Bin}(n = 8;\ p = 0{,}5)$, de modo que la probabilidad de que tome exactamente el valor 4 es:

$$P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot 0{,}5^4 \cdot (1 - 0{,}5)^4 = 0{,}27344$$

b) Que "al menos dos tengan estudios posteriores" es lo mismo que "A lo sumo uno tiene sólo estudios de ESO", por tanto la probabilidad pedida es:

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{8}{0} \cdot 0{,}5^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}5^8 = 0{,}03516$$

Relaciona y contesta

Elije la única respuesta correcta en cada caso

1. La variable aleatoria discreta *X* toma los valores 2, 4, 6 y 8 con probabilidades respectivas c, $c+1$, $c+2$ y $c+3$. El valor de *c* es:

A. 4 **B.** 1,25 **C.** –1,25 **D.** No existe valor para c.

Solución: D.(La suma debería ser 1, lo que fuerza a que c valga –1,25 y por tanto 2 y 4 tendrían probabilidad negativa).

2. La variable aleatoria *Y* tiene una distribución de probabilidad Bin(*n*, 0,2) y se sabe que su varianza es 8. Entonces:

A. $n = 10$ **B.** $n = 48$ **C.** $n = 50$ **D.** $n = 100$

Solución: C.

3. Para intentar ajustar una distribución binomial a un conjunto de datos.

A. Basta conocer el parámetro *n*.

B. Es preciso obtener la media de los datos observados e identificar *p*.

C. El valor estimado de *p* debe ser aproximadamente 0,5.

D. Se necesitan las frecuencias relativas.

Solución: B.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. La distribución binomial modeliza situaciones en las que:

A. Están implicados muchos sucesos.

B. Solo importa si un suceso ocurre o no.

C. Se miden magnitudes.

D. Se cuenta las veces que ocurre un determinado suceso.

Soluciones: B y D.

5. Dada una variable aleatoria binomial *X* ~ Bin(*n*; *p*), con *n* fijado, su variabilidad:

A. Es más grande si p está cerca de 1.

B. Es más pequeña si p está próximo a 0.

C. Es máxima si p=0,5.

D. No está influenciada por el valor de p.

Soluciones: B y C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones

Sea la variable aleatoria *X* ~ Bin(*n*, *p*). Se consideran las siguientes afirmaciones:

1. $E[X] = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = 0{,}2\mu$ **2.** $p = 0{,}8$ y $n = 1{,}25\mu$

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. 1 y 2 son independientes una de otra.

Solución: A.

Señala el dato innecesario para contestar

Para calcular la probabilidad $P(-1 < X < 2)$ siendo *X* ~ Bin(*n*, *p*) es necesario conocer:

A. Solo *n.*

B. Solo *p.*

C. Tanto *n* como *p.*

D. No hace falta conocer ningún dato.

Solución: C.

1 Números reales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Calcula la expresión decimal o fraccionaria según corresponda.

a) $\frac{23}{25}$ **b)** $\frac{22}{12}$ **c)** $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ **d)** $45,\widehat{55}$ **e)** $45,1\widehat{5}$

a) 0,92

b) $1,8\widehat{3}$

c) $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}=1,\widehat{6}$

d) $N=45,\widehat{55}=45,\widehat{5}=45,555...\Rightarrow\begin{cases}10N=455,555...\\N=45,555...\end{cases}\Rightarrow 9N=410\Rightarrow N=\frac{410}{9}$

e) $N=45,1\widehat{5}=45,1555...\Rightarrow\begin{cases}100N=4515,555...\\10N=451,555...\end{cases}\Rightarrow 90N=4064\Rightarrow N=\frac{4064}{90}=\frac{2032}{45}$

4. Indica, para cada número, si es racional o irracional.

a) 1,234 44… **c)** –3, 010 010 001… **e)** $2-\sqrt{49}$

b) 1,232 323… **d)** $1+\sqrt{2}$ **f)** $-\sqrt{2+\sqrt{4}}$

a) Racional, es un número decimal periódico.

b) Racional, es un número decimal periódico.

c) Irracional, es un número decimal no periódico.

d) Irracional

e) Racional, $2-\sqrt{49}=2-7=-5$.

f) Racional, $-\sqrt{2+\sqrt{4}}=-\sqrt{2+2}=-\sqrt{4}=-2$.

5. Calcula los dos valores de *x* que cumplen la siguiente condición: $3x-\frac{1}{2}-4|x-3|=5$.

$$3x-\frac{1}{2}-4|x-3|=\begin{cases}3x-\frac{1}{2}-4(-(x-3)) & \text{si } x-3<0\\ 3x-\frac{1}{2}-4(x-3) & \text{si } x-3\geq 0\end{cases}=\begin{cases}7x-\frac{25}{2} & \text{si } x<3\\ -x+\frac{23}{2} & \text{si } x-3\geq 0\end{cases}$$

Si $x<3$, tenemos $7x-\frac{25}{2}=5\Rightarrow x=\frac{35}{14}=\frac{5}{2}$, que es una solución válida.

Si $x\geq 3$, tenemos $-x+\frac{23}{2}=5\Rightarrow x=\frac{13}{2}$, que es una solución válida.

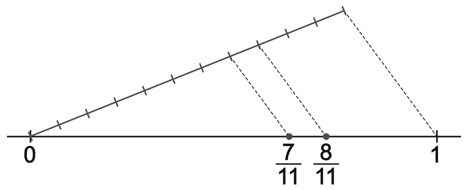
6. Un informe sobre el uso de bicicletas en la población juvenil de una localidaddice que exactamente el $45,\overset{\frown}{45}$ % de los jóvenes utilizan la bicicleta por lo menos un día a la semana. Sabiendo que la población juvenil de esa localidad es menor que 10 000 y mayor que 9990, ¿cuántos exactamente utilizan la bicicleta?

$$45,\overset{\frown}{45} = \frac{4545-45}{99} = \frac{4500}{99} = \frac{500}{11} \Rightarrow \frac{45,\overset{\frown}{45}}{100} = \frac{5}{11}$$

Los $\frac{5}{11}$ de los jóvenes de la localidad usan la bicicleta por lo menos un día a la semana, por tanto, el número de jóvenes de la localidad debe ser múltiplo de 11. El único número entre 9 990 y 10 000 que es múltiplo de 11 es 9999, con lo que hay 9999 jóvenes en la localidad y 4545 contestaron que usan la bicicleta.

7. Ejercicio resuelto.

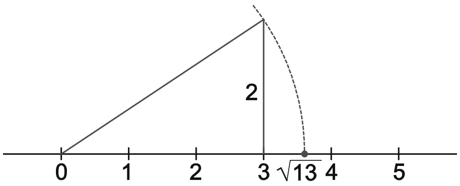
8. Representa $\frac{7}{11}$ y $\frac{8}{11}$. Halla tres números fraccionarios comprendidos entre ellos.



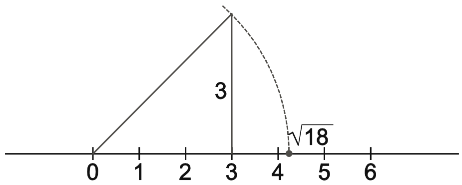
$\frac{7}{11} = \frac{28}{44}$ y $\frac{8}{11} = \frac{32}{44}$, por tanto, entre ellos están $\frac{29}{44}$, $\frac{30}{44} = \frac{15}{22}$ y $\frac{31}{44}$.

9. Escribe los números 13 y 18 como suma de dos cuadrados y representa $\sqrt{13}$ y $\sqrt{18}$ en la recta real.

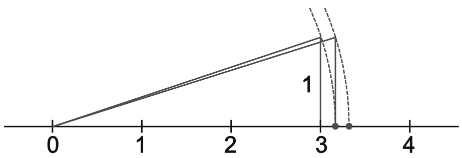
$13 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{2^2+3^2}$



$18 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow \sqrt{18} = \sqrt{3^2+3^2}$



10. ¿Qué números reales son los representados en la figura?



$x = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ e $y = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

11. Ejercicio resuelto.

12. Da las aproximaciones por defecto y por exceso y redondea los siguientes números con dos, tres y cuatro cifras decimales.

a) $\frac{12}{7}$ **b)** $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a)

Aprox. defecto	Aprox. exceso	Redondeo
1,71	1,72	1,71
1,714	1,715	1,714
1,7142	1,7143	1,7143

b)

Aprox. defecto	Aprox. exceso	Redondeo
1,55	1,56	1,55
1,553	1,554	1,554
1,5537	1,5538	1,5538

c)

Aprox. defecto	Aprox. exceso	Redondeo
1,61	1,62	1,62
1,618	1,619	1,618
1,6180	1,6181	1,6180

13. Acota el error relativo cometido al aproximar $\sqrt{3}$ por 1,73.

$E_r = \frac{\left|\sqrt{3}-1{,}73\right|}{\sqrt{3}} < \frac{1{,}74-1{,}73}{1{,}73} \simeq 0{,}006$. La cota del error relativo es del orden del 0,6 %.

14. Calcula el error absoluto y la cota del error relativo al redondear e^{π} a las milésimas.

El valor redondeado es $e^{\pi} \simeq 23{,}141$, que coincide con la aproximación por exceso.

El error absoluto es $E_a = \left|e^{\pi} - 23{,}141\right| = \left|23{,}140\,069... - 23{,}141\right| = 0{,}000\,307...$

La cota del error relativo es $E_r = \frac{E_a}{e^{\pi}} < \frac{0{,}000\,307...}{23{,}140} = 0{,}000\,013...$, es decir, del orden del 0,001 %.

15 y 16. Ejercicios resueltos.

17. Calcula aproximaciones de tres cifras por exceso y por defecto de 2*a*+ 3*b* – 5 sabiendo que:

$2{,}023 < a < 2{,}024$ y $-0{,}251 < b < -0{,}250$

Aproximación por defecto: $2 \cdot 2{,}023 + 3(-0{,}251) - 5 = -1{,}707$

Aproximación por exceso: $2 \cdot 2{,}024 + 3(-0{,}250) - 5 = -1{,}702$

18. Con la calculadora halla aproximaciones, por defecto y por exceso, con tres y cuatro cifras decimales, para los números $\sqrt{3\sqrt{2}}$ y $1+2\sqrt{3}$, así como para su suma, diferencia, producto y cociente.

	Calculadora	Aprox. defecto 3 decimales	Aprox. exceso 3 decimales	Aprox. defecto 4 decimales	Aprox. exceso 4 decimales
$\sqrt{3\sqrt{2}}$	2,059 767…	2,059	2,060	2,059 7	2,059 8
$1+2\sqrt{3}$	4,644 101…	4,464	4,465	4,464 1	4,464 2
$\sqrt{3\sqrt{2}}+\left(1+2\sqrt{3}\right)$	6,523 868…	6,523	6,524	6,523 8	6,523 9
$\sqrt{3\sqrt{2}}-\left(1+2\sqrt{3}\right)$	–2,404 334…	–2,405	–2,404	–2,404 4	–2,404 3
$\sqrt{3\sqrt{2}}\left(1+2\sqrt{3}\right)$	9,195 009…	9,195	9,196	9,195 0	9,195 1
$\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{1+2\sqrt{3}}$	0,461 406…	0,461	0,462	0,461 4	0,461 5

19. Se quiere vallar un campo rectangular siendo $\sqrt{2}$ el cociente de sus dimensiones.

a) ¿Cuánto vale el cociente entre la diagonal y el lado menor?

b) La diagonal mide 48 m. Calcula el precio que se deberá pagar si cada metro de valla cuesta 25 €.

a) Si *a* es el lado mayor y *b* el menor, se sabe que $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}$.

La diagonal es $D=\sqrt{a^2+b^2}$, por tanto, el cociente entre la diagonal y el lado menor es

$$\frac{D}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$$

b) Tenemos $\dfrac{D}{b}=\sqrt{3}\Rightarrow b=\dfrac{D}{\sqrt{3}}=\dfrac{48}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}b=\dfrac{48\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, por tanto, el perímetro del campo es $P=2a+2b=\dfrac{96+96\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ y el coste del vallado será $C=25P=25\cdot\dfrac{96+96\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\simeq 3345$ €.

20. Simplifica el valor de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{(-2)^{40}(-6)^{-15}}{(-18)^{35}}$ **b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\dfrac{1}{8}$

a) $\dfrac{(-2)^{40}(-6)^{-15}}{(-18)^{35}}=\dfrac{2^{40}\left(-6^{-15}\right)}{-18^{35}}=\dfrac{2^{40}}{6^{15}\cdot 18^{35}}=\dfrac{2^{40}}{(2\cdot 3)^{15}\left(2\cdot 3^2\right)^{35}}=\dfrac{2^{40}}{2^{15}\cdot 3^{15}\cdot 2^{35}\cdot 3^{70}}=\dfrac{2^{40}}{2^{50}\cdot 3^{85}}=\dfrac{1}{2^{10}\cdot 3^{85}}$

b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2^4}\cdot\dfrac{3^2}{2}\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{3^2}{2^8}$

21. Determina si las igualdades son verdaderas o falsas.

a) $\dfrac{3^{-3}-5^{-1}}{7^{-2}-5^{-3}}=-\dfrac{13475}{1026}$ **b)** $\dfrac{x^2y^{-1}}{x^3y^2}=\dfrac{1}{xy^3}$

a) $\dfrac{3^{-3}-5^{-1}}{7^{-2}-5^{-3}}=\dfrac{\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{49}-\dfrac{1}{125}}=\dfrac{-\dfrac{22}{135}}{\dfrac{76}{6125}}=-\dfrac{22}{135}\cdot\dfrac{6125}{76}=-\dfrac{134750}{10260}=-\dfrac{13475}{1026}$, la igualdad es verdadera.

b) $\dfrac{x^2y^{-1}}{x^3y^2}=\dfrac{x^2}{x^3y^2y}=\dfrac{1}{xy^3}$, la igualdad es verdadera.

22. Realiza las siguientes operaciones.

a) $2^2+(-2)^3-2^{-2}+(-2)^{-3}-2^0$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^2 5^{-1}$

c) $16^{\frac{1}{4}}+27^{\frac{1}{3}}-25^{\frac{1}{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt[5]{a^{-3}}\cdot a^{-2}}{a\sqrt[3]{a}}$

a) $2^2+(-2)^3-2^{-2}+(-2)^{-3}-2^0=4-8-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-1=-\frac{43}{8}s$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^2 5^{-1}=\frac{8}{125}-\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{125}-\frac{1}{125}=\frac{7}{125}$

c) $16^{\frac{1}{4}}+27^{\frac{1}{3}}-25^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{27}-\sqrt{25}=2+3-5=0$

d) $\dfrac{\sqrt[5]{a^{-3}}\cdot a^{-2}}{a\sqrt[3]{a}}=\dfrac{a^{-\frac{3}{5}}\cdot a^{-2}}{a\cdot a^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{-\frac{13}{5}}}{a^{\frac{4}{3}}}=a^{-\frac{59}{15}}=\dfrac{1}{\sqrt[15]{a^{59}}}$

23 y 24. Ejercicios resueltos.

25. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\sqrt{8}\sqrt{27}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{200}}$

c) $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{392}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{2187}}{\sqrt{108}}$

e) $\left(\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{32}}\right)\sqrt[6]{2}$

f) $\dfrac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{8}\right)}{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt{8}\sqrt{27}=\sqrt{2^3\cdot 3^3}=2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}=6\sqrt{6}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{200}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^9}{2^3\cdot 5^2}}=\sqrt[3]{\dfrac{2^6}{5^2}}=\dfrac{2^2}{\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}\sqrt[3]{5}}=\dfrac{4\sqrt[3]{5}}{5}$

c) $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{392}=\sqrt[3]{2^2}\sqrt[5]{2^3\cdot 7^2}=\sqrt[15]{2^{10}}\sqrt[15]{2^9\cdot 7^6}=\sqrt[15]{2^{19}\cdot 7^6}=2\sqrt[15]{2^4\cdot 7^6}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{2187}}{\sqrt{108}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt{2^2\cdot 3^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[4]{2^4\cdot 3^6}}=\sqrt[4]{\dfrac{3}{2^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{3}}{2}$

e) $\left(\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{32}}\right)\sqrt[6]{2}=\left(\dfrac{\sqrt{2^2\cdot 3}}{\sqrt[3]{2^5}}\right)\sqrt[6]{2}=\left(\dfrac{\sqrt[6]{2^6\cdot 3^3}}{\sqrt[6]{2^{10}}}\right)\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{\dfrac{3^3}{2^3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

f) $\dfrac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{8}\right)}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt{2^{-1}}\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^{-6}}\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}=\sqrt[12]{2^{-5}}=\dfrac{1}{\sqrt[12]{2^5}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^7}}{\sqrt[12]{2^5}\sqrt[12]{2^7}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^7}}{2}$

26. Opera y simplifica las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{8}}$ **b)** $\left[\left(\sqrt{2^4\sqrt[3]{2^8}}\right)^2\right]^3$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{8}} = \dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[6]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt[16]{2^8\cdot 2^4\cdot 2^2\cdot 2}}{\sqrt[4]{2^2\cdot 2}} = \dfrac{\sqrt[16]{2^{15}}}{\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[16]{\dfrac{2^{15}}{2^{12}}} = \sqrt[16]{2^3}$

b) $\left[\left(\sqrt{2^4\sqrt[3]{2^8}}\right)^2\right]^3 = \left[\left(\sqrt[6]{2^{12}\cdot 2^8}\right)^2\right]^3 = \left(\sqrt[6]{2^{20}}\right)^6 = 2^{20}$

27. Extrae de la raíz todos los factores que sea posible.

a) $\sqrt{2^8\cdot 3^5\cdot 5^7}$ **b)** $\sqrt[3]{a^5b^{12}c^7}$ **c)** $\sqrt[5]{\dfrac{2^6\cdot 3^{12}}{5^{20}}}$

a) $\sqrt{2^8\cdot 3^5\cdot 5^7} = 2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\sqrt{3\cdot 5}$ **b)** $\sqrt[3]{a^5b^{12}c^7} = ab^4c^2\sqrt[3]{a^2c}$ **c)** $\sqrt[5]{\dfrac{2^6\cdot 3^{12}}{5^{20}}} = \dfrac{2\cdot 3^2}{5^4}\sqrt[5]{2\cdot 3^2}$

28. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt[3]{24} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{32}$ **c)** $6\sqrt{200} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18}$

b) $\sqrt{50} - \sqrt{\dfrac{18}{4}} + \sqrt{\dfrac{72}{25}}$ **d)** $\sqrt{5a^2} - \sqrt{80a^2} + \sqrt{20a^4}$

a) $\sqrt[3]{24} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{32} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + \sqrt{2^5} = 2\sqrt[3]{3} - \sqrt{2} - 6\sqrt[3]{3} + 4\sqrt{2} = -4\sqrt[3]{3} + 3\sqrt{2}$

b) $\sqrt{50} - \sqrt{\dfrac{18}{4}} + \sqrt{\dfrac{72}{25}} = \sqrt{2\cdot 5^2} - \sqrt{\dfrac{2\cdot 3^2}{2^2}} + \sqrt{\dfrac{2^3\cdot 3^2}{5^2}} = 5\sqrt{2} - \dfrac{3}{2}\sqrt{2} + \dfrac{6}{5}\sqrt{2} = \dfrac{47}{10}\sqrt{2}$

c) $6\sqrt{200} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} = 6\sqrt{2^3\cdot 5^2} + 2\sqrt{2\cdot 5^2} - 3\sqrt{2\cdot 3^2} = 60\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 61\sqrt{2}$

d) $\sqrt{5a^2} - \sqrt{80a^2} + \sqrt{20a^4} = \sqrt{5a^2} - \sqrt{2^4\cdot 5a^2} + \sqrt{2^2\cdot 5a^4} = a\sqrt{5} - 4a\sqrt{5} + 2a^2\sqrt{5} = \left(2a^2 - 3a\right)\sqrt{5} = a(2a-3)\sqrt{5}$

29. Realiza las siguientes operaciones.

a) $2\sqrt{180} + \dfrac{3}{5}\sqrt{125} + \sqrt{5}$ **b)** $\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{6}{5}}}$ **c)** $2187^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{2}}$

a) $2\sqrt{180} + \dfrac{3}{5}\sqrt{125} + \sqrt{5} = 2\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5} + \dfrac{3}{5}\sqrt{5^3} + \sqrt{5} = 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 16\sqrt{5}$

b) $\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{6}{5}}} = \dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{18}{5}}} = 2^{-\frac{53}{30}} = \dfrac{1}{\sqrt[30]{2^{53}}} = \dfrac{1}{2\sqrt[30]{2^{23}}} = \dfrac{\sqrt[30]{2^7}}{2\sqrt[30]{2^{23}}\sqrt[30]{2^7}} = \dfrac{\sqrt[30]{2^7}}{4}$

c) $2187^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3^7} + \sqrt{3^3} = 27\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$

30. Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{6}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{3}{5\sqrt[5]{81}}$ **c)** $\dfrac{2}{1+2\sqrt{3}}$ **d)** $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{8}}$

a) $\dfrac{6}{2\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\dfrac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$

b) $\dfrac{3}{5\sqrt[5]{81}}=\dfrac{3}{5\sqrt[5]{3^4}}=\dfrac{3\sqrt[5]{3}}{5\sqrt[5]{3^4}\sqrt[5]{3}}=\dfrac{3\sqrt[5]{3}}{15}=\dfrac{\sqrt[5]{3}}{5}$

c) $\dfrac{2}{1+2\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(1-2\sqrt{3}\right)}{\left(1+2\sqrt{3}\right)\left(1-2\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2\left(1-2\sqrt{3}\right)}{1-12}=-\dfrac{2-4\sqrt{3}}{11}=\dfrac{4\sqrt{3}-2}{11}$

d) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{8}}=\dfrac{10\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}=\dfrac{10\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}{12-8}=\dfrac{5\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}{2}=\dfrac{10\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2}=\dfrac{10\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{3}+\sqrt{2}$

31. Ejercicio interactivo.

32. Ejercicio resuelto.

33. Calcula $A\cup B$ y $A\cap B$ siendo:

a) $A=(-1,4)$ y $B=[0,5]$ **b)** $A=(2,+\infty)$ y $B=(-\infty,3]$

a) $A\cup B=(-1,5]$ y $A\cap B=[0,4)$ **b)** $A\cup B=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$ y $A\cap B=(2,3]$

34. Expresa, si es posible, mediante un único entorno abierto cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $(-2,10)$ **b)** $-3\le x\le 7$ **c)** $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$ **d)** $(-a,a)$

a) Se puede expresar como el entorno abierto de centro $\dfrac{-2+10}{2}=4$ y radio $10-4=6$, es decir, $E(4,6)$.

b) Se trata del intervalo cerrado [–3, 7], por lo que no se puede expresar mediante un entorno abierto. Sí se puede expresar mediante el entorno cerrado $E[2,5]$.

c) Se trata de un intervalo cerrado, por lo que no se puede expresar mediante un entorno abierto. Sí se puede expresar mediante el entorno cerrado $E\left[\dfrac{7}{4},\dfrac{5}{4}\right]$.

d) Se puede expresar como el entorno abierto $E(0,a)$.

35. Expresa mediante entornos los siguientes conjuntos.

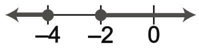
a) $\{x\in\mathbb{R}$ tales que $|x|<5\}$ **b)** $\{x\in\mathbb{R}$ tales que $|x+2|<4\}$

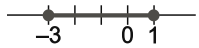
a) $\{x\in\mathbb{R}$ tales que $|x|<5\}=E(0,5)$ **b)** $\{x\in\mathbb{R}$ tales que $|x+2|<4\}=E(-2,4)$

36. Representa y expresa como intervalos los siguientes conjuntos de números reales.

a) $|x-2|<2$ **b)** $|x+3|\geq 1$ **c)** $|x+1|\leq 2$

a) $(0,4)$ **b)** $(-\infty,-4]\cup[-2,+\infty)$ **c)** $[-3,1]$





37. Ejercicio resuelto.

38. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado en notación científica.

a) 0,000 025 · 0,003 2 **b)** 0,002 5 : 12 500 000 **c)** $0{,}000\,000\,000\,012^{20}$ **d)** $2{,}4\cdot 10^{21}+33{,}2\cdot 10^{22}$

a) $0{,}000\,025\cdot 0{,}003\,2 = 2{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 3{,}2\cdot 10^{-3} = 8\cdot 10^{-8}$

b) $0{,}002\,5 : 12\,500\,000 = 2{,}5\cdot 10^{-3} : 1{,}25\cdot 10^{7} = 2\cdot 10^{-10}$

c) $0{,}000\,000\,000\,012^{20} = \left(1{,}2\cdot 10^{-11}\right)^{20} \simeq 38{,}337\,6\cdot 10^{-220} = 3{,}833\,76\cdot 10^{-219}$

d) $2{,}4\cdot 10^{21}+33{,}2\cdot 10^{22} = 2{,}4\cdot 10^{21}+332\cdot 10^{21} = 334{,}4\cdot 10^{21} = 3{,}344\cdot 10^{23}$

39. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado con la precisión adecuada.

a) 25,35 + 7723,1 + 2,035 – 222,256 **b)** 2,25 · 1,237 – 230,40 · 0,024 + 15,01 · 23,11

a) $25{,}35+7723{,}1+2{,}035-222{,}256 = 7528{,}229 \simeq 7528{,}2$

b) $2{,}25\cdot 1{,}237-230{,}40\cdot 0{,}024+15{,}01\cdot 23{,}11 = 2{,}78-5{,}53+346{,}88 = 344{,}13$

40. Indica en cada caso el número de cifras significativas.

a) 2,035 **b)** 0,000 607 **c)** 505,000 75

a) 4 cifras significativas **b)** 3 cifras significativas **c)** 8 cifras significativas

41. Se quiere medir el total del área de dos parcelas, una rectangular de dimensiones 123,2 m y 98 m, y otra circular de radio 44,6 m. Estima el área con la precisión que consideres adecuada.

$123{,}2\cdot 98+44{,}6^2\pi \simeq 12\,074+6249 = 18\,323\ \text{m}^2.$

42. Ejercicio interactivo.

43 a 54. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Números racionales e irracionales

55. Di si los siguientes números son naturales, enteros, racionales o reales.

a) $\frac{28}{7}$ c) $-\frac{1}{25}$ e) 19

b) -12 d) $\frac{1+\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$ f) $-\frac{1}{\sqrt{24}}$

a) $\frac{28}{7}=4$ Natural y, por tanto, entero, racional y real.

b) -12 Entero y, por tanto, racional y real. No es natural.

c) $-\frac{1}{25}$ Racional y, por tanto, real. No es natural ni entero.

d) $\frac{1+\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$ Racional y, por tanto, real. No es natural ni entero.

e) 19 Natural y, por tanto, entero, racional y real.

f) $-\frac{1}{\sqrt{24}}$ Real. No es natural, ni entero ni racional.

56. Calcula las expresiones decimales de los siguientes números racionales.

$\frac{13}{25}$ $\frac{125}{9}$ $\frac{5}{18}$ $\frac{4}{7}$

$\frac{13}{25}=0,52$ $\frac{125}{9}=13,\widehat{8}$ $\frac{5}{18}=0,2\widehat{7}$ $\frac{4}{7}=0,\widehat{571428}$

57. Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales.

$\frac{4}{5}$ $\frac{19}{24}$ $\frac{10}{11}$ $\frac{7}{8}$

Realiza el ejercicio de dos formas diferentes:

a) Calculando las expresiones decimales de los números racionales y comparándolas.

b) Calculando expresiones fraccionarias equivalentes a las dadas con igual denominador y comparándolas.

a) $\frac{4}{5}=0,8$; $\frac{19}{24}=0,791\widehat{6}$; $\frac{10}{11}=0,\widehat{90}$ y $\frac{7}{8}=0,875 \Rightarrow \frac{19}{24}<\frac{4}{5}<\frac{7}{8}<\frac{10}{11}$

b) $\frac{4}{5}=\frac{1056}{1320}$; $\frac{19}{24}=\frac{1045}{1320}$; $\frac{10}{11}=\frac{1200}{1320}$ y $\frac{7}{8}=\frac{1155}{1320} \Rightarrow \frac{19}{24}<\frac{4}{5}<\frac{7}{8}<\frac{10}{11}$

58. Halla dos números racionales comprendidos entre $\frac{21}{31}$ y $\frac{22}{31}$.

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\frac{21}{31}=\frac{63}{93}$ y $\frac{22}{31}=\frac{66}{93}$, por lo que, entre ellos están $\frac{64}{93}$ y $\frac{65}{93}$.

59. Calcula las expresiones fraccionarias de los siguientes números racionales.

a) 21,333…

b) 10,101 010…

c) 21,125

d) 5,812 512 512 5…

a) $21,\widehat{3}=\frac{213-21}{9}=\frac{192}{9}=\frac{64}{3}$

b) $10,\widehat{10}=\frac{1010-10}{99}=\frac{1000}{99}$

c) $21{,}125=\frac{21125}{1000}=\frac{169}{8}$

d) $5,8\widehat{125}=\frac{58125-58}{9990}=\frac{58067}{9990}$

60. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales. Para los racionales, indica su expresión mediante una fracción irreducible.

a) 12,121 314 15…

b) 12,121 212…

c) 12,012 121 2…

d) 1,010 010 001…

e) 1,123 123 123…

f) 0,001 002 003…

a) Irracional

b) Racional, $12,\widehat{12}=\frac{1200}{99}=\frac{400}{33}$

c) Racional, $12,0\widehat{12}=\frac{11892}{990}=\frac{1982}{165}$

d) Irracional

e) Racional, $1,\widehat{123}=\frac{1122}{999}=\frac{374}{333}$

f) Irracional

61. Calcula de forma exacta el resultado de:

$$\mathbf{0,\widehat{12}-2\left(0,\widehat{1}-0,0\widehat{20}\right)+0,0\widehat{3}}$$

$0,\widehat{12}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$; $0,\widehat{1}=\frac{1}{9}$; $0,0\widehat{20}=\frac{20}{990}=\frac{2}{99}$ y $0,0\widehat{3}=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$, por tanto, tenemos:

$$0,\widehat{12}-2\left(0,\widehat{1}-0,0\widehat{20}\right)+0,0\widehat{3}=\frac{4}{33}-2\left(\frac{1}{9}-\frac{2}{99}\right)+\frac{1}{30}=\frac{4}{33}-\frac{2}{11}+\frac{1}{30}=-\frac{3}{110}$$

Valor absoluto

62. Calcula el valor de las siguientes expresiones en los puntos que se indican.

a) $2+|2x-3|-|x-1|$ en $x=2$

b) $2x-2-|2x-5|$ en $x=-3$

c) $\frac{2x-3|3x-1|+|2x-3|}{2|x|-3|x-4|}$ en $x=-1$

a) $2+|2\cdot 2-3|-|2-1|=2+1-1=2$

b) $2(-3)-2-|2(-3)-5|=-6-2-11=-19$

c) $\frac{2(-1)-3|3(-1)-1|+|2(-1)-3|}{2|-1|-3|-1-4|}=\frac{-2-3\cdot 4+5}{2-3\cdot 5}=\frac{-9}{-13}=\frac{9}{13}$

63. Desarrolla el valor de las siguientes expresiones omitiendo los valores absolutos.

a) $|2x-4|+x$ **b)** $x+|2x|$ **c)** $|x-1|+x$ **d)** $(x-2)^2-|x-2|$

a) $|2x-4|+x=\begin{cases}-2x+4+x & \text{si } 2x-4<0\\ 2x-4+x & \text{si } 2x-4\geq 0\end{cases}=\begin{cases}4-x & \text{si } x<2\\ 3x-4 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

b) $x+|2x|=\begin{cases}x-2x & \text{si } 2x<0\\ x+2x & \text{si } 2x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ 3x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

c) $|x-1|+x=\begin{cases}-x+1+x & \text{si } x-1<0\\ x-1+x & \text{si } x-1\geq 0\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{si } x<1\\ 2x-1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

d) $(x-2)^2-|x-2|=\begin{cases}x^2-4x+4+x-2 & \text{si } x-2<0\\ x^2-4x+4-x+2 & \text{si } x-2\geq 0\end{cases}=\begin{cases}x^2-3x+2 & \text{si } x<2\\ x^2-5x+6 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

64. Calcula los valores de *x* que satisfacen las siguientes igualdades.

a) $|2x-1|-x=2$ **b)** $|3x-1|-2x=11$ **c)** $\left|x-\frac{1}{2}\right|+2x=\frac{1}{2}$ **d)** $|x-2|+|x-3|=9$

a) $|2x-1|-x=2\Rightarrow\begin{cases}-2x+1-x=2 & \text{si } 2x-1<0\\ 2x-1-x=2 & \text{si } 2x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{3} & \text{si } x<\frac{1}{2}\\ x=3 & \text{si } x\geq\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{1}{3},\ x=3$

b) $|3x-1|-2x=11\Rightarrow\begin{cases}-3x+1-2x=11 & \text{si } 3x-1<0\\ 3x-1-2x=11 & \text{si } 3x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2 & \text{si } x<\frac{1}{3}\\ x=12 & \text{si } x\geq\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow x=-2,\ x=12$

c) $\left|x-\frac{1}{2}\right|+2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}-x+\frac{1}{2}+2x=\frac{1}{2} & \text{si } x-\frac{1}{2}<0\\ x-\frac{1}{2}+2x=\frac{1}{2} & \text{si } x-\frac{1}{2}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{si } x<\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{3} & \text{si } x\geq\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=0$

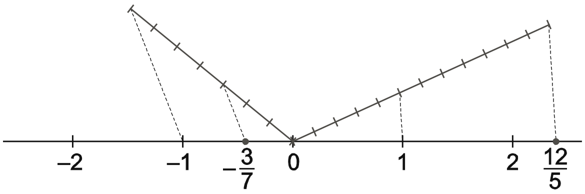
d) $|x-2|+|x-3|=9\Rightarrow\begin{cases}-x+2-x+3=9 & \text{si } x<2\\ x-2-x+3=9 & \text{si } 2\leq x<3\\ x-2+x-3=9 & \text{si } x\geq 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2 & \text{si } x<2\\ 0=8 & \text{si } 2\leq x<3\\ x=7 & \text{si } x\geq 3\end{cases}\Rightarrow x=-2,\ x=7$

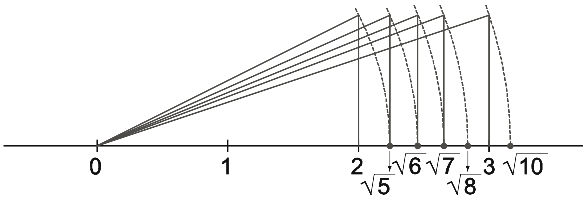
Representación de números reales

65. Representa los siguientes números reales.

a) $\frac{12}{5}$ **c)** $-\frac{3}{7}$ **e)** $\sqrt{10}$

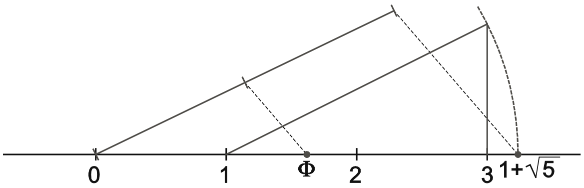
b) $\sqrt{6}$ **d)** $\sqrt{7}$ **f)** $\sqrt{8}$





66. Representa el número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Representamos primero $1+\sqrt{5}$ y a continuación dividimos el segmento de longitud $1+\sqrt{5}$ en dos partes iguales.



Aproximaciones y errores

67. Da la expresión aproximada que se indica en cada uno de los siguientes casos.

a) $\frac{13}{11}$ aproximando por exceso con dos cifras decimales.

b) $\sqrt{123}$ aproximando por defecto con tres cifras decimales.

c) $\pi + \pi^2$ redondeando con tres cifras decimales.

a) $\frac{13}{11} \simeq 1{,}19$ **b)** $\sqrt{123} \simeq 11{,}090$ **c)** $\pi + \pi^2 \simeq 13{,}011$

68. Escribe aproximaciones por exceso y por defecto con tres cifras decimales de los números.

a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2\sqrt{2}}$ **c)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ **d)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$	$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$
Exceso	1,415	1,682	1,835	1,916
Defecto	1,414	1,681	1,834	1,915

69. Indica el número de cifras significativas en cada caso.

a) 22,3 **b)** 0,045 **c)** 1,002 **d)** 230,025

a) Tres **b)** Dos **c)** Cuatro **d)** Seis

70. Halla los siguientes redondeos.

a) $\frac{3}{46}$ con tres cifras significativas

b) $\sqrt{17}$ con cuatro cifras significativas

c) $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ con cuatro cifras significativas

a) $\frac{3}{46} \simeq 0{,}0652$ **b)** $\sqrt{17} \simeq 4{,}123$ **c)** $\sqrt{2}+2\sqrt{3} \simeq 4{,}878$

71. Calcula y da el resultado de acuerdo con las cifras significativas de las cantidades que intervienen.

a) 12,3 + 0,34 – 14,25

b) 0,453 · 32,42

c) 0,003 4 · 0,000 045

d) 10,5 · 23,33– 5,003 · 10,15

e) 2,34 – 5,007 · 2,75

f) 15,03 : 2,6

a) 12,3 + 0,34 – 14,25= –1,6

b) 0,453 · 32,42 = 14,7

c) 0,003 4 · 0,000 045 = 0,000 000 15

d) 10,5 · 23,33– 5,003 · 10,15= 194

e) 2,34 – 5,007 · 2,75 = –11,4

f) 15,03 : 2,6 = 5,8

72. Calcula los errores absoluto y relativo que se cometen al tomar 3,29 como valor de $\frac{23}{7}$.

$$E_a = \left|\frac{23}{7} - 3{,}29\right| = \left|\frac{23}{7} - \frac{329}{100}\right| = \frac{3}{700} \text{ y } E_r = \frac{E_a}{\frac{23}{7}} = \frac{3}{2300} \simeq 0{,}0013$$

73. Calcula los errores absoluto y relativo cometidos al tomar como valor de $\frac{120}{11}$ la aproximación 10,91.

$$E_a = \left|\frac{120}{11} - 10{,}91\right| = \left|\frac{120}{11} - \frac{1091}{100}\right| = \frac{1}{1100}$$

$$E_r = \frac{E_a}{\frac{120}{11}} = \frac{1}{12000}$$

74. Acota el error relativo que se comete al tomar como valor de $\sqrt{5}$ la aproximación 2,236.

$$E_r = \frac{\left|\sqrt{5} - 2{,}236\right|}{\sqrt{5}} < \frac{2{,}237 - 2{,}236}{2{,}236} \simeq 0{,}0004$$. La cota es del orden del 0,04 %.

75. Acota el error relativo que se comete al tomar $\sqrt{15}$ con tres cifras significativas.

$$\sqrt{15} \simeq 3{,}87 \Rightarrow E_r = \frac{\left|\sqrt{15} - 3{,}87\right|}{\sqrt{15}} < \frac{3{,}88 - 3{,}87}{3{,}87} \simeq 0{,}0026$$. La cota es del orden del 2,6 %.

Potencias y radicales

76. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a) $4\left(2\cdot 3^{-2}\right)^{-2}$ **c)** $\dfrac{2\cdot 3^2+3\cdot 2^2}{3^{-2}+6^{-1}}$ **e)** $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4}\cdot 3^{-3}}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ **d)** $\left(2^6\right)^{\frac{1}{2}}$ **f)** $(-2)^0+(-2)^1+...+(-2)^8$

a) $4\left(2\cdot 3^{-2}\right)^{-2}=4\cdot 2^{-2}\cdot 3^4=\dfrac{4\cdot 81}{4}=81$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=2^2-2\cdot\dfrac{3^2}{2^2}=4-\dfrac{9}{2}=-\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{2\cdot 3^2+3\cdot 2^2}{3^{-2}+6^{-1}}=\dfrac{18+12}{\frac{1}{9}+\frac{1}{6}}=\dfrac{30}{\frac{5}{18}}=108$

d) $\left(2^6\right)^{\frac{1}{2}}=2^3=8$

e) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4}\cdot 3^{-3}}=\dfrac{2^2}{3^2}\cdot\dfrac{3^3}{2^6}\cdot 2^4\cdot 3^3=3^4=81$

f) $(-2)^0+(-2)^1+...+(-2)^8=1-2+4-16+32-64+128-256+512=171$

77. Halla las siguientes multiplicaciones y divisiones con radicales.

a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{8}$ **b)** $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x^3}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{81}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}\sqrt[6]{2^4}\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^{10}}=\sqrt[3]{2^5}=2\sqrt[3]{2^2}=2\sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x^3}=\sqrt[12]{x^6}\sqrt[12]{x^4}\sqrt[12]{x^9}=\sqrt[12]{x^{19}}=x\sqrt[12]{x^7}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{81}}=\dfrac{\sqrt[12]{3^6}\sqrt[12]{3^9}}{\sqrt[12]{3^{16}}}=\sqrt[12]{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[12]{3}}=\dfrac{\sqrt[12]{3^{11}}}{\sqrt[12]{3}\sqrt[12]{3^{11}}}=\dfrac{\sqrt[3]{3^{11}}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{\sqrt[12]{x^9}}{\sqrt[12]{x^4}}=\sqrt[12]{x^5}$

78. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt[3]{81a^3}+2a\sqrt[3]{24}$ **c)** $\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{12}$ **d)** $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{24}-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}$

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}=\sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2^5}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{81a^3}+2a\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3^4a^3}+2a\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=3a\sqrt[3]{3}+4a\sqrt[3]{3}=7a\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{12}=\sqrt{3}+2\sqrt{3^3}-\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{3}+6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

d) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{24}-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3\cdot 5^3}=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3}=\dfrac{29}{6}\sqrt[3]{3}$

79. Simplifica el valor de las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}$

c) $\left(a(a)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$

e) $\sqrt[4]{390\,625a^5b^{16}}$

f) $16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{3}{2}}$

g) $2\left(3-2\sqrt{2}\right)^2$

h) $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2-\frac{1}{2}}\right)^2$

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=\sqrt[8]{3^4\cdot 3^2\cdot 3}=\sqrt[8]{3^7}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^3\cdot 2^4}}=\sqrt[18]{2^7}$

c) $\left(a(a)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$

d) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{2+3}{\sqrt{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

e) $\sqrt[4]{390\,625a^5b^{16}}=\sqrt[4]{5^8a^5b^{16}}=5^2ab^4\sqrt[4]{a}=25ab^4\sqrt[4]{a}$

f) $16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{3}{2}}=\sqrt{16}+\sqrt{729}=4+27=31$

g) $2\left(3-2\sqrt{2}\right)^2=2\left(9-12\sqrt{2}+8\right)=34-24\sqrt{2}$

h) $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{6}+6}{4}=\frac{7-2\sqrt{6}}{4}=\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}$

80. Opera y simplifica las siguientes expresiones.

a) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

b) $\left(1+\sqrt{2}\right)^3-\left(1-\sqrt{2}\right)^3$

c) $\frac{3}{4}\sqrt{18}-\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$

d) $2\left(2-3\sqrt{2}\right)^2+\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$

e) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{5}$

a) $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}-3-4+2\sqrt{3}=-7+4\sqrt{3}$

b) $\left(1+\sqrt{2}\right)^3-\left(1-\sqrt{2}\right)^3=\left(1+3\cdot 1\cdot\sqrt{2}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3\right)-\left(1-3\cdot 1\cdot\sqrt{2}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^3\right)=$

$=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}-1+3\sqrt{2}-6+2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

c) $\frac{3}{4}\sqrt{18}-\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2=\frac{3}{4}\sqrt{2\cdot 3^2}-12-4\sqrt{2\cdot 3^2}-6=-18+\left(\frac{9}{4}-12\right)\sqrt{2}=-18-\frac{39}{4}\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

d) $2\left(2-3\sqrt{2}\right)^2+\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)=2\left(4-12\sqrt{2}+18\right)+(4-18)=30-24\sqrt{2}$

e) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{5}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{2^4\cdot 5}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{3^4\cdot 5}-\sqrt[4]{5}=\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\frac{3}{2}\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}=-\frac{11}{6}\sqrt[4]{5}$

81. Racionaliza los denominadores de las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ **c)** $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}$ **d)** $\dfrac{x+1}{2\sqrt{x+1}}$ **f)** $\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\dfrac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}=\dfrac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2y}=\dfrac{3\sqrt[5]{y^3}}{2}$

c) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{2\sqrt{18}+2\sqrt{12}}{3-2}=2\sqrt{2\cdot 3^2}+2\sqrt{2^2\cdot 3}=6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

d) $\dfrac{x+1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{(x+1)\sqrt{x+1}}{2(x+1)}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-2}=2-\sqrt{2}$

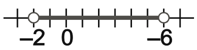
f) $\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{6}\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}=\dfrac{12\sqrt{18}-18\sqrt{12}}{12-18}=\dfrac{12\sqrt{2\cdot 3^2}-18\sqrt{2^2\cdot 3}}{-6}=\dfrac{36\sqrt{2}-36\sqrt{3}}{-6}=6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

Intervalos y entornos

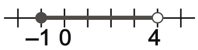
82. Dados los intervalos *A*= (–2, 4) y *B*=[–1, 6) calcula y representa:

a) $A\cup B$ **b)** $A\cap B$

a) $A\cup B=(-2,\ 6)$



b) $A\cap B=[-1,\ 4)$



83. Dados los conjuntos $A=[-1,+\infty)$, $B=(-\infty,\ 0)$ y $C=[-1,\ 1]$, calcula:

a) $A\cup B$ **c)** $A\cap B\cap C$ **e)** $(A\cup B)\cap\overline{C}$

b) $A\cup B\cup C$ **d)** $A\cup(B\cap C)$ **f)** $\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap C$

a) $A\cup B=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ **c)** $A\cap B\cap C=[-1,\ 0)$ **e)** $(A\cup B)\cap\overline{C}=\overline{C}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

b) $A\cup B\cup C=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ **d)** $A\cup(B\cap C)=A=[-1,+\infty)$ **f)** $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\varnothing\Rightarrow\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap C=\varnothing$

84. Expresa en forma de intervalo y de entorno los siguientes conjuntos de números reales.

a) $|x-3|<5$ **c)** $\left|x+\frac{1}{2}\right|\le\frac{3}{4}$ **e)** $|x-3|\ge 7$

b) $|x+3|\le 0,25$ **d)** $|x+2|<\frac{2}{3}$ **f)** $\left|x+\frac{2}{5}\right|>10$

a) $E(3,\,5)=(3-5,\,3+5)=(-2,\,8)$

b) $E[-3;\,0,25]=[-3-0,25;-3+0,25]=[-3,25;\,-2,75]$

c) $E\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]=\left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]=\left[-\frac{5}{4},\frac{1}{4}\right]$

d) $E\left(-2,\,\frac{2}{3}\right)=\left(-2-\frac{2}{3},\,-2+\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{8}{3},\,-\frac{4}{3}\right)$

e) No se puede expresar ni en forma de intervalo ni de entorno, pero sí se puede expresar como unión de intervalos: $(-\infty,\,-4)\cup(10,\,+\infty)$.

f) No se puede expresar ni en forma de intervalo ni de entorno, pero sí se puede expresar como unión de intervalos: $\left(-\infty,\,-\frac{52}{5}\right]\cup\left[\frac{48}{5},\,+\infty\right)$.

Notación científica

85. Escribe en notación científica los siguientes números.

a) 12 345 678 **c)** 0,000 000 000 331 **e)** $0,0097\cdot 10^{23}$

b) Sesenta billones **d)** $967\cdot 10^{-25}$ **f)** –0,000 000 001 23

a) $12\,345\,678 = 1,234\,567\,8\cdot 10^{7}$

b) Sesenta billones: $6\cdot 10^{13}$

c) $0,000\,000\,000\,331 = 3,31\cdot 10^{-10}$

d) $967\cdot 10^{-25} = 9,67\cdot 10^{-23}$

e) $0,0097\cdot 10^{23} = 9,7\cdot 10^{20}$

f) $-0,000\,000\,001\,23 = -1,23\cdot 10^{-9}$

86. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado en notación científica.

a) $250\,000\cdot 5,5\cdot 10^{5}$ **b)** $\frac{0,00016\left(25\cdot 10^{3}+2000\right)}{0,0025}$ **c)** 0,000 001 5 : 0,000 03 **d)** $\frac{10^{23}\cdot 5,6\cdot 10^{-12}}{3,5\cdot 10^{22}+4,3\cdot 10^{21}}$

a) $250\,000\cdot 5,5\cdot 10^{5}=2,5\cdot 10^{5}\cdot 5,5\cdot 10^{5}=13,75\cdot 10^{10}=1,375\cdot 10^{11}$

b) $\frac{0,00016\left(25\cdot 10^{3}+2000\right)}{0,0025}=\frac{1,6\cdot 10^{-4}\left(2,7\cdot 10^{4}\right)}{2,5\cdot 10^{-3}}=1,728\cdot 10^{3}$

c) $0,0000015:0,00003=1,5\cdot 10^{-6}:3\cdot 10^{-5}=0,5\cdot 10^{-1}=5\cdot 10^{-2}$

d) $\frac{10^{23}\cdot 5,6\cdot 10^{-12}}{3,5\cdot 10^{22}+4,3\cdot 10^{21}}=\frac{5,6\cdot 10^{11}}{3,93\cdot 10^{22}}\simeq 1,425\cdot 10^{-11}$

87. Halla las siguientes sumas y restas dando el resultado en notación científica.

a) $0,32\cdot 10^{14}+7,128\cdot 10^{12}$ **b)** $4,88\cdot 10^{-14}+7,921\cdot 10^{-12}$

a) $0,32\cdot 10^{14}+7,128\cdot 10^{12}=32\cdot 10^{12}+7,128\cdot 10^{12}=39,128\cdot 10^{12}=3,9128\cdot 10^{13}$

b) $4,88\cdot 10^{-14}+7,921\cdot 10^{-12}=4,88\cdot 10^{-14}+792,1\cdot 10^{-14}=796,98\cdot 10^{-14}=7,9698\cdot 10^{-12}$

CUESTIONES

88. Da un ejemplo de número irracional que esté comprendido entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$.

Por ejemplo $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$. Este número es irracional, ya que si fuera racional, también lo sería $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y, por tanto, también sería racional $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$, de donde se deduciría que también sería racional $\sqrt{6}$, lo que sabemos no es cierto.

89. Explica un método para representar el número real $\sqrt{n+1}$ en la recta real si se conoce la representación de $\sqrt{n}$.

Solo hay que observar que $\sqrt{n+1}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{n}$ y 1.

90. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.

b) La suma de dos números racionales puede ser irracional.

c) El conjunto numérico más amplio al que pertenece el número –2 es el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$.

d) Existe un índice *n* tal que la raíz enésima del número –122 es un número real positivo.

e) Todos los números enteros son reales pero no todos los números reales son enteros.

f) Algunos números decimales son irracionales.

a) Falso, por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son irracionales pero su suma $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$ es racional.

b) Falso, ya que la suma de dos fracciones siempre es una fracción.

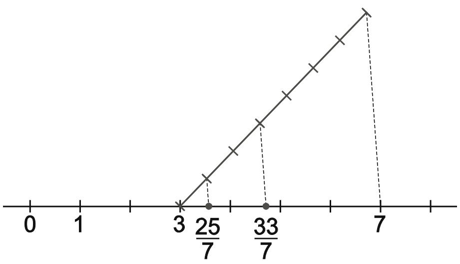
c) Falso, el conjunto numérico más amplio al que pertenece el número –2 es el conjunto de los números reales.

d) Falso, si el índice *n* es par la raíz no existe, y si es impar la raíz es negativa.

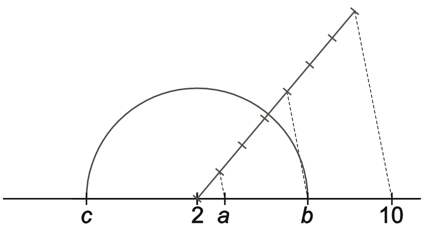
e) Verdadero, el conjunto de los números enteros está contenido en el de los números reales, pero, por ejemplo, 0,5 es un número real que no es entero.

f) Verdadero, por ejemplo π o cualquier número decimal no periódico.

91. Divide gráficamente el intervalo [3, 7] en tres partes de forma que la segunda sea el doble de la primera y la tercera el doble de la segunda. Indica los números fraccionarios que determinan de forma exacta las divisiones realizadas.



92. Calcula los valores de *a*, *b* y *c* en la siguiente figura.



$a=2+\frac{8}{7}=\frac{22}{7}$ $b=2+4\cdot\frac{8}{7}=\frac{46}{7}$ $c=2-4\cdot\frac{8}{7}=-\frac{18}{7}$

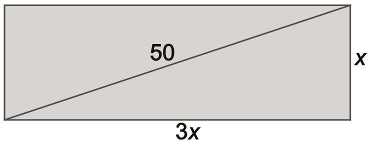
PROBLEMAS

93. Se quiere vallar el perímetro de un campo rectangular del que sabemos que uno de sus lados mide el triple que el otro y que su diagonal es de 50 m.

a) Determina la superficie que ocupa dicha parcela.

b) Calcula el precio que hay que pagar si cada metro de valla cuesta 15 €. Expresa el resultado en forma de radical y después aproxima a los céntimos de euro.

a) Sean x y $3x$ las dimensiones, en metros, del campo. Tenemos $x^2+(3x)^2=50^2 \Rightarrow 10x^2=2500 \Rightarrow x^2=250 \Rightarrow x=\sqrt{250}=5\sqrt{10}$ m, por tanto, la superficie de la parcela es $S=x\cdot 3x=3x^2=750$ m^2.



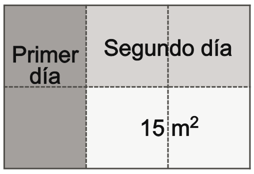
b) El perímetro del campo es $P=2(x+3x)=8x=40\sqrt{10}$ m, por tanto, hay que pagar $15\cdot 40\sqrt{10}=600\sqrt{10}$ € $\simeq 1897{,}37$ €.

94. Una habitación con forma de ortoedro de base cuadrada y altura de la mitad del lado de la base, se pintó en tres días. Se pintaron las cuatro paredes y el techo. En el primer día se pintó la tercera parte de la superficie; en el segundo, la mitad de lo que quedaba, y en el tercero se pintaron los 15 m^2 que faltaban para acabar el trabajo.

a) Calcula la superficie total de la habitación y la superficie que se hizo cada día.

b) Calcula las medidas de cada una de las paredes y el volumen con la precisión que consideres adecuada.

a) Observemos que si el primer día se pintó la tercera parte de la superficie, aún quedaban por pintar dos terceras partes. El segundo día se pinta la mitad de estas dos terceras partes, es decir, otra tercera parte, y el último día la tercera parte restante. Por tanto, los tres días se pintó la misma superficie, 15 m^2, siendo la superficie total 45 m^2.



b) Si $2a$ es el lado de la base y a la altura, tenemos: $4\cdot 2a\cdot a+2a\cdot 2a=8a^2+4a^2=12a^2=45 \Rightarrow a=1{,}94$ m.

Por tanto, cada pared mide 3,88 m de largo y 1,94 m de alto, siendo el volumen de la habitación $V=2a\cdot 2a\cdot a=4a^3=29{,}21$ m^3.

95. Con el propósito de mejorar las ayudas sociales y el gasto en cultura de los presupuestos de un ayuntamiento, se llevó a cabo una encuesta sobre las actividades culturales que interesan a los adolescentes entre 16 y 20 años. Sabiendo que el 81,8181...% contestó que le interesaba el cine y que el 14,58333...% contestó que no le interesaban las conferencias de divulgación científica, ¿qué puedes decir acerca del número de personas que contestaron la encuesta?

$$\frac{81{,}8181...}{100}=0{,}818181...=0{,}\widehat{81}=\frac{81}{99}=\frac{9}{11}$$

$$\frac{14{,}58333...}{100}=0{,}1458333...=0{,}1458\hat{3}=\frac{14\,583-1458}{90\,000}=\frac{13125}{90\,000}=\frac{7}{48}$$

A $\frac{9}{11}$ de los encuestados les interesa el cine y a $\frac{7}{48}$ no les interesa las conferencias de divulgación científica, por tanto, el número de encuestados debe ser múltiplo de 11 y de 48, es decir, múltiplo de 528.

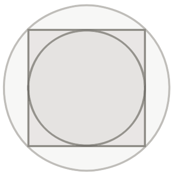
Así, no se puede conocer con certeza el número de encuestados, solo podemos deducir que es múltiplo de 528, pueden ser 528, 1056,…

96. El área de un cuadrado mide 10,25 m^2. Calcula, aproximando a los decímetros:

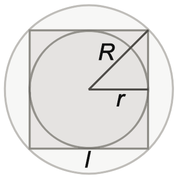
a) La diagonal del cuadrado.

b) El área del círculo inscrito.

c) El área del círculo circunscrito.



Sean *R*, *r* y *l*, respectivamente, el radio del círculo circunscrito, el radio del círculo inscrito y el lado del cuadrado.



a) $l^2 = 10,25 \Rightarrow l = \sqrt{10,25} \simeq 3,2 \text{ m}$.

Por tanto, la diagonal del cuadrado es $D = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2 \cdot 10,25} \simeq 4,5 \text{ m} = 45 \text{ dm}$.

b) $r = \dfrac{l}{2} = 1,6 \text{ m}$

Por tanto, el área del círculo inscrito es $S_1 = \pi \cdot r^2 \simeq 8,04 \text{ m}^2 = 804 \text{ dm}^2$

c) $R = \dfrac{D}{2} = 2,25 \text{ m}$

Por tanto, el área del círculo circunscrito es $S_2 = \pi \cdot R^2 \simeq 15,90 \text{ m}^2 = 1590 \text{ dm}^2$

97. Una entidad bancaria cambia euros por dólares cobrando, además del valor correspondiente a dichos dólares, una comisión que depende de la cantidad que se quiere cambiar según la tabla siguiente.

Cantidad de dólares que se compran	Comisión en euros
Menos o igual que 200	10
Entre 200 y 500	12
Entre 500 y 1000	14
Más o igual que 1000	15

Se sabe que por comprar 300 \$ se han debido pagar 251,16€.

a) Calcula, con cuatro cifras decimales significativas, el precio del dólar en euros y el precio del euro en dólares sin tener en cuenta la comisión.

b) Calcula los dólares que se han conseguido si se han pagado 750 €.

c) Calcula los euros que se deberían pagar para recibir al cambio 150 \$.

d) Calcula los euros que se deberían pagar por 1400 \$. ¿Y si se compraran en siete paquetes de 200 \$?

a) Sin tener en cuenta la comisión, 300 \$ equivalen a $251,16 - 12 = 239,16$ €. Por tanto, también sin comisión, un dólar equivale a $\dfrac{239,16}{300} = 0,7972$ €, y un euro equivale a $1,2544$ \$.

b) $(750 - 14) \cdot 1,2544 = 923,24$ \$

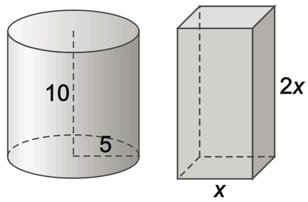
c) $150 \cdot 0,7972 + 10 = 129,58$ €

d) $1400 \cdot 0,7972 + 15 = 1131,08$ €

Si se compran en siete grupos de 200 \$: $7 \cdot (200 \cdot 0,7972 + 10) = 1186,08$ €.

98. Una empresa elabora latas de conserva con forma cilíndrica y cuyas dimensiones son: 5 cm de radio de la base y 10 cm de altura. Tras un estudio de mercado, decide cambiar la forma de las latas: serán ortoedros de base cuadrada y de altura el doble que el lado de la base.

¿Cuáles serán las dimensiones de la nueva forma si la capacidad debe ser la misma? Establece la solución con la aproximación que consideres más adecuada.



El volumen de las latas es $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 785{,}4 \text{ cm}^3$, por tanto tenemos:

$$2x^3 = 785{,}4 \Rightarrow x = 7{,}32 \text{ cm}$$

Es decir, las nuevas latas deben medir 7,32 cm de lado de la base y 14,64 cm de altura.

99. En una población de 145 340 habitantes hay 42 310 menores de 18 años. ¿Qué errores absoluto y relativo se cometen si se toma como porcentaje de menores de edad el 29 %?

Estamos aproximando $\frac{42\,310}{145\,340} = \frac{4\,231}{14\,534} \simeq 0{,}2911105$ por $\frac{29}{100} = 0{,}29$, por tanto, los errores cometidos son:

$$E_a = \left|\frac{4\,231}{14\,534} - \frac{29}{100}\right| = \frac{807}{726\,700} \simeq 0{,}0011105 \qquad E_r = \frac{E_a}{\frac{42\,310}{14\,534}} = \frac{807}{211\,550} \simeq 0{,}0038156$$

100. El radio de una circunferencia se ha medido con un error menor de 0,1 cm, obteniéndose 10,2 cm.

Utiliza la aproximación de π que consideres adecuada de acuerdo con los datos del problema.

a) Calcula los valores máximo y mínimo de la longitud de dicha circunferencia así como del área del círculo limitado por la misma.

b) Calcula los valores máximo y mínimo de la longitud que se recorrerá al dar exactamente 5000 vueltas.

a) Si *r* es el radio de la circunferencia, tenemos $10{,}1 < r < 10{,}3$, por tanto, aproximando π por 3,14 obtenemos:

$$2\pi \cdot 10{,}1 < 2\pi r < 2\pi \cdot 10{,}3 \Rightarrow 63{,}43 \text{ cm} < \text{longitud} < 64{,}68 \text{ cm}$$

$$\pi \cdot 10{,}1^2 < \pi r^2 < \pi \cdot 10{,}3^2 \Rightarrow 320{,}31 \text{ cm}^2 < \text{área} < 333{,}12 \text{ cm}^2$$

b) 5000 · 63,43 < longitud de 5000 vueltas <5000· 64,68 $\Rightarrow$ 317 150 cm <recorrido< 323 400 cm

101. La escala cromática está formada por las doce notas (doce semitonos) que aparecen en la figura.

El número de vibraciones por segundo de cada nota es igual al producto del número de vibraciones de la nota anterior por el número irracional $\sqrt[12]{2}$.

Suponiendo que el número de vibraciones por segundo correspondientes a la nota La es 440, calcula, con la aproximación de números enteros:

a) Las vibraciones por segundo que corresponden a la nota La sostenido.

b) Las vibraciones por segundo que corresponden a la nota La bemol.

c) Escribe las vibraciones por segundo correspondientes a cada uno de los doce semitonos.

a) Vibraciones por segundo de La sostenido: $440 \cdot \sqrt[12]{2} = 466{,}16 \simeq 466$

b) Vibraciones por segundo de La bemol: $\frac{440}{\sqrt[12]{2}} = 415{,}3 \simeq 415$

c)

Do	Do sostenido	Re	Mi bemol	Mi	Fa	Fa sostenido	Sol	La bemol	La	Si bemol	Si
262	277	294	311	330	349	370	392	415	440	466	494

102. Una empresa cobra por el alquiler de una furgoneta 80 € diarios. Otra empresa cobra por el mismo alquiler 60 € al día, pero a esta cantidad se le deben añadir 200 € independientemente del tiempo que se contrate.

¿A partir de cuántos días es más económica la segunda empresa? Escribe la solución en forma de desigualdad y de intervalo.

Si se alquila la furgoneta *n* días, la primera empresa cobra 80*n* y la segunda 60*n*+ 200. La segunda empresa será más económica cuando $60n + 200 < 80n \Rightarrow n > 10$ días $\Rightarrow (10, +\infty)$

103. Al medir la altura de una persona de 180 cm se ha obtenido 178. Al medir la altura de un edificio de 39 m se han obtenido 40 m. Calcula los errores absoluto y relativo de cada medida e indica razonadamente cuál de las dos es más precisa.

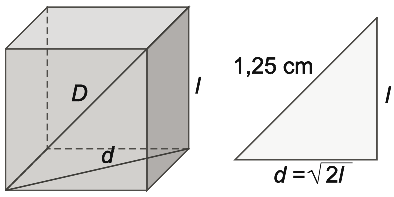
Errores en la medición de la persona: $E_a = |180 - 178| = 2$ cm y $E_r = \frac{2}{180} = 0{,}011$

Errores en la medición del edificio: $E_a = |39 - 40| = 1$ m y $E_r = \frac{1}{39} = 0{,}026$

Al ser el error relativo menor en la medición de la persona, es más precisa dicha medición.

104. La diagonal de un cubo mide exactamente 1,252 cm. Halla la superficie del cubo aproximando su diagonal por 1,25 cm. Calcula la cota del el error relativo.

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2}l \Rightarrow D = \sqrt{d^2 + l^2} = \sqrt{2l^2 + l^2} = \sqrt{3}l \Rightarrow l = \frac{D}{\sqrt{3}}$$



Superficie del cubo: $6l^2 = 6\frac{D^2}{3} = 2D^2$

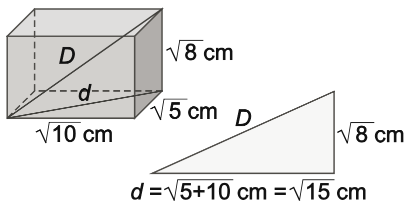
La superficie real del cubo es $2 \cdot 1{,}252^2 = 3{,}135\,008$, la aproximamos por $2 \cdot 1{,}25^2 = 3{,}125$, por tanto, el error relativo es:

$$E_r = \frac{|3{,}135\,008 - 3{,}125|}{3{,}135\,008} \simeq 0{,}0032$$

105. Calcula la medida de la diagonal de un paralelepípedo cuyos lados miden $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{5}$ cm, respectivamente. ¿Qué tipo de número es el resultado?

Aproxima el resultado redondeando a dos decimales y calcula los errores absoluto y relativo cometidos. Acota el error relativo.

$d = \sqrt{5 + 10} = \sqrt{15}$ cm $\Rightarrow D = \sqrt{15 + 8} = \sqrt{23}$ cm .



La diagonal es un número irracional, que aproximamos por 4,80 cm, por tanto:

$$E_a = \left|\sqrt{23} - 4{,}80\right| = |4{,}795\,58 - 4{,}80| = 0{,}004\,17$$

$$E_r = \frac{E_a}{\sqrt{23}} < \frac{0{,}004\,17}{4{,}79} = 0{,}000\,87$$

106. Un jardín cuadrado tiene 50 m de lado. Dos personas pasean a la misma velocidad, una por el perímetro del cuadrado y la otra recorriendo una diagonal. Si parten simultáneamente de la misma esquina del parque, ¿volverán a encontrarse?

Si se encuentran lo harán en la esquina opuesta, en este caso, como van a la misma velocidad, deben haber recorrido el mismo espacio.

Ahora bien, el espacio recorrido por la persona que avanza por el perímetro es 100 m y el recorrido por la persona que va por la diagonal es $50\sqrt{2} \simeq 70{,}71\,\text{m}$, con lo que no se encontrarán.

Nos podemos preguntar si terminarán encontrándose si siguen paseando ininterrumpidamente, uno siguiendo el perímetro y otro recorriendo una y otra vez la diagonal.

Para resolver este problema observemos que si se encuentran lo harán en una de las esquinas de la diagonal que recorre la segunda persona y, como caminan a la misma velocidad, habrán recorrido la misma distancia.

Ahora bien, la persona que va por el perímetro habrá recorrido 100a metros para algún entero positivo$a$, mientras que la persona que avanza por la diagonal habrá recorrido $50\sqrt{2}b$ metros para algún entro positivo b.

Por tanto, obtendríamos $100a = 50\sqrt{2}b \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{2a}{b}$, es decir, $\sqrt{2}$ sería racional, lo que sabemos no es cierto.

Deducimos entonces que los caminantes no se encontrarán nunca, aunque paseen indefinidamente.

107. Un determinado tipo de protozoo tiene un diámetro de $2 \cdot 10^{-5}$ m. Calcula cuántos protozoos habría que situar, uno a continuación de otro, para alcanzar una longitud de 1 cm.

$0{,}01 : (2 \cdot 10^{-5}) = 500$ protozoos

108. Sabiendo que la velocidad de la luz es de 300 000 km/s, calcula el tiempo que tardaría en llegar a la Tierra la luz emitida por una hipotética estrella que se encontrara a 12 000 000 000 km de distancia.

Expresa el resultado con la precisión que consideres adecuada.

$$t = \frac{1{,}2 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^5} = 0{,}4 \cdot 10^5 = 4 \cdot 10^4 = 40\,000 \text{ segundos} = 11 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s}$$

109. El diámetro de una molécula de agua mide aproximadamente $3 \cdot 10^{-10}$ m.

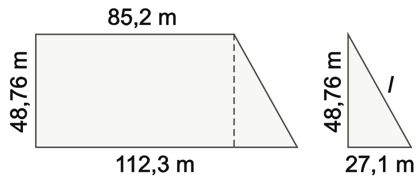
a) Calcula el volumen de una molécula de agua suponiendo que su forma es aproximadamente esférica. Expresa el resultado en notación científica.

b) Calcula el número de moléculas de agua que hay en una gota de 3 mm de diámetro, expresando el resultado en notación científica.

a) $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{3}{2}\cdot 10^{-10}\right)^3 = \dfrac{9}{2}\pi \cdot 10^{-30} = 14{,}14 \cdot 10^{-30} = 1{,}414 \cdot 10^{-29}\ \text{m}^3 = 1{,}414 \cdot 10^{-20}\ \text{mm}^3$

b) El volumen de la gota es $\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{9}{2}\pi = 14{,}14\ \text{mm}^3$, por tanto, contiene $\dfrac{14{,}14}{1{,}414 \cdot 10^{-20}} = 10^{21}$ moléculas de agua.

110. Las bases de un trapecio rectángulo miden 85,2 y 112,3 m, respectivamente. La longitud del lado perpendicular a las bases se conoce previamente y con una precisión mayor: es de 48,76 m. Calcula, con la precisión adecuada, el área y el perímetro.



$l = \sqrt{48,76^2 + 27,1^2} = 55,8$ m

Perímetro: $85,2 + 48,76 + 112,3 + 55,8 = 302,1$ m

Área: $\dfrac{(112,3 + 85,2) \cdot 48,76}{2} = 4815,1 \text{ m}^2$

111. Desarrolla el valor de la expresión $|x+1| + |x-3|$ eliminando los valores absolutos. Para ello, realiza los siguientes pasos:

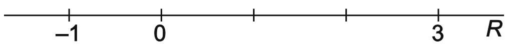
1.º Calcula los valores reales x que anulan lo valores absolutos que intervienen en la expresión; es decir, $|x+1|$ y $|x-3|$.

2.º Representa en la recta real las soluciones obtenidas en el apartado anterior. La recta queda dividida en tres intervalos o zonas.

3.º Para cada uno de los intervalos anteriores y con la ayuda de valores representantes, estudia el signo del interior de los dos valores absolutos y obtén la expresión solicitada en cada caso.

1.º Los valores absolutos se anulan si $x = -1$ o $x = 3$

2.º



3.º

	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$x + 1$	Negativo	Positivo	Positivo
$x - 3$	Negativo	Negativo	Positivo

Por tanto, $|x+1| + |x-3| = \begin{cases} -(x+1)-(x-3) & \text{si} \quad x \le -1 \\ x+1-(x-3) & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ x+1+x-3 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x+2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 4 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

112. Siguiendo el procedimiento explicado en el ejercicio anterior, desarrolla el valor de las siguientes expresiones omitiendo los valores absolutos.

a) $|x-1| + |x+1|$

b) $x + |x| + |x-2|$

a) Los valores absolutos se anulan si $x = -1$ o $x = 1$, obteniéndose:

	$X < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$x + 1$	Negativo	Positivo	Positivo
$x - 1$	Negativo	Negativo	Positivo

Por tanto, $|x-1| + |x+1| = \begin{cases} -(x-1)-(x+1) & \text{si} \quad x \le -1 \\ -(x-1)+x+1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x-1+x+1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x \le -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

b) Los valores absolutos se anulan si $x = 0$ o $x = 2$, obteniéndose:

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
x	Negativo	Positivo	Positivo
$x - 2$	Negativo	Negativo	Positivo

Por tanto, $x + |x| + |x-2| = \begin{cases} x-x-(x-2) & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+x-(x-2) & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x+x+x-2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+2 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 3x-2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

113. ¿Es $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ un número entero? Calcula su cuadrado y observa el resultado.

$$\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)=6+4\sqrt{2}+6-4\sqrt{2}+2\sqrt{36-32}=$$

$=12+4=16\Rightarrow\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{16}=4$, es decir, $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ sí es un número entero.

114. Simplifica la expresión $\sqrt{59+30\sqrt{2}}$ escribiéndola como la suma de un número entero y la raíz cuadrada de un número natural. Para ello, intenta expresar el radicando como el cuadrado perfecto de un binomio.

$$\sqrt{59+30\sqrt{2}}=\sqrt{9+50+2\cdot3\cdot5\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3+5\sqrt{2}\right)^2}=3+5\sqrt{2}$$

115. a) Demuestra que $0,\widehat{9}=1$.

b) Calcula el valor de $0,\widehat{9}+0,0\widehat{9}+0,00\widehat{9}$

a) $A=0,\widehat{9}=0,999...\Rightarrow\begin{cases}10A=9,999\\A=0,999...\end{cases}\Rightarrow 9A=9\Rightarrow A=1$

b) $0,\widehat{9}=1;\ 0,0\widehat{9}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}=0,1$ y $0,00\widehat{9}=\dfrac{9}{900}=\dfrac{1}{100}=0,01\Rightarrow 0,\widehat{9}+0,0\widehat{9}+0,00\widehat{9}=1+0,1+0,01=1,11$

ENTORNO MATEMÁTICO

Compras a plazos

Ignacio trabaja en una multinacional y le han trasladado a una sede situada en un parque industrial a 50 km de su domicilio habitual, en una localidad de su misma comunidad. Además, para hacer su vida aún más cómoda, al menos dos tardes por semana tiene que ir a reuniones a la oficina anterior.

En la red de trasportes de su comunidad, Ignacio ha investigado como poder ir en trasporte público a su trabajo, y ahorrarse los temidos atascos, pero le ha surgido un problema. Si quiere llegar a tiempo a las reuniones, ¡Ignacio se tiene que comprar un coche!, pero no puede permitirse comprarlo al contado.

Afortunadamente para Ignacio, en la mayoría de los concesionarios que ha consultado, le han ofrecido un plan de plazos para adquirir el coche.

El precio total se realizará en varios pagos.

- **El primer pago será igual a las dos quintas partes del precio total.**
- **Un pago mensual, durante 40 meses, que cubra cinco sextas partes de lo que queda.**
- **Un último pago de 1200 € al cabo de los 40 meses.**

A la administración del concesionario se le ha olvidado, inexplicablemente, indicar el precio total del vehículo.

a) ¿Tiene Ignacio suficientes datos para calcular el precio total del vehículo? Si es así, ¿cómo debe hallarlo?

b) Calcula el dinero que ha de pagar Ignacio como entrada, en el primer pago.

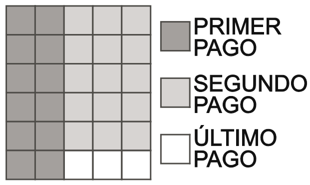
c) ¿Cuánto ha de pagar en total durante los 40 meses? ¿Y cada mes?

d) Ignacio tiene ahorrados 5000 €. ¿Tendrá suficiente para pagar el primer plazo?

a) Se puede calcular el precio total del vehículo del siguiente modo:

El primer pago supone $\frac{2}{5}$ del precio total, por lo que aún quedarían por pagar $\frac{3}{5}$ del precio total.

Durante 40 meses se pagan $\frac{5}{6}$ de lo que queda, es decir, el segundo pago supone $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$ del precio total, por lo que ya se habrían pagado $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$, quedando por pagar $\frac{1}{10}$ del precio del vehículo, lo que equivale a 1200€.



En la figura tenemos un razonamiento alternativo que prueba que el segundo plazo equivale a $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ del precio total y el tercer pago, 1200 €, equivale a $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ del precio total.

Por tanto el precio del vehículo es $10\cdot 1200=12\,000$ €.

b) Ignacio debe pagar como entrada $\frac{2}{5}\cdot 12\,000=4\,800$ €.

c) En los siguientes 40 meses pagará $\frac{1}{2}\cdot 12\,000=6\,000$ €, es decir, $6\,000:40=150$ € cada mes.

d) Sí tendrá suficiente para afrontar el primer pago.

Formatos de papel DIN

Casi todos los estándares de fabricación se rigen por normas y convenios internacionales. Uno de ellos es el formato DIN, para la elaboración de papel y que es seguido por una gran parte de los fabricantes mundiales. Como curiosidad, este formato sigue la norma ISO 216 que se basa en la DIN 476 que data nada más y nada menos que de … ¡1922! Y que sigue las siguientes reglas:

- **El formato A0 es un rectángulo con 1 m^2 de área.**
- **El formato A0 es tal que si se dobla por la mitad se obtiene el siguiente formato, el A1. De la misma forma, al doblar el formato A1 por la mitad, se obtiene el siguiente formato, el A2. Esta regla se sigue de forma sucesiva para obtener todos los formatos: A3, A4, A5, etc.**
- **Todos los formatos son rectángulos cuyas dimensiones guardan la misma proporción. Es decir, en cualquier formato el cociente de sus dimensiones es siempre el mismo.**

a) Comprueba que la razón entre la dimensión mayor y la menor en cualquier formato es $\sqrt{2}$.

b) Comprueba que las dimensiones del formato A0 son $a = \sqrt[4]{2}$ y $b = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ m.

c) Elabora una tabla con una hoja de cálculo en la que aparezcan las dimensiones, redondeadas a los milímetros, de los diferentes formatos A0, A1, A2, A3, A4, etc.

a) Sean a_n y b_n la dimensión mayor y menor, respectivamente, del rectángulo de formato A_n. Tenemos:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_n}{\frac{a_n}{2}} \Rightarrow \frac{a_n^{\ 2}}{2} = b_n^{\ 2} \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$$

b) $$\begin{cases} a_0 \cdot b_0 = 1 \\ \dfrac{a_0}{b_0} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}b_0 \cdot b_0 = 1 \Rightarrow b_0^{\ 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b_0 = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ y } a_0 = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2} \text{ m.}$$

c)

	Dimensión mayor (m)	Dimensión menor (m)	Área (m^2)
A0	"=2^(1/4)"	"=B2/(2^(1/2))"	"=B2*C2"
A1	"=C2"	Copiar C2	Copiar D2
A2			
A3			
A4			
	…		

	Dimensión mayor (m)	Dimensión menor (m)	Área (m^2)
A0	1,189	0,841	1
A1	0,841	0,595	0,5
A2	0,595	0,420	0,25
A3	0,420	0,297	0,125
A4	0,297	0,210	0,0625
	…		

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Indica el conjunto numérico más pequeño al que pertenecen:

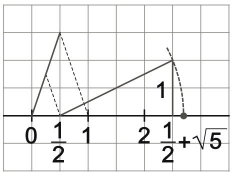
a) $-\frac{15}{7}$ **c)** 1,151515… **e)** 10,15161718…

b) $1+\sqrt{2}$ **d)** $\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}$ **f)** $\sqrt[3]{8}-\sqrt[4]{81}$

a) Racionales **c)** Racionales **e)** Reales

b) Reales **d)** Reales **f)** Enteros

2. Representa en la recta real el número irracional $\frac{1}{2}+\sqrt{5}$.

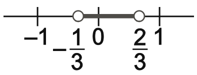


3. Aproxima hasta las centésimas por exceso y por defecto los números $\sqrt{2}$ y 2π. ¿Cuáles son las aproximaciones por defecto y por exceso del producto $2\pi\sqrt{2}$?

	$\sqrt{2}$		2π		$2\pi\sqrt{2}$	
Exceso	1,5	1,42	6,3	6,29	9,45	8,9318
Defecto	1,4	1,41	6,2	6,28	8,68	8,8548

4. Dibuja en la recta real la zona de valores reales *x* tales que $\left|2x-\frac{1}{3}\right|<1$ y determínala mediante un intervalo.

$$\left|2x-\frac{1}{3}\right|<1 \Rightarrow \left|x-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow E\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2},\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$



5. Calcula los errores absoluto y relativo que se cometen al tomar 1,86 como valor de $\frac{13}{7}$.

Error absoluto: $E_a=\left|\frac{13}{7}-1{,}86\right|=\left|\frac{13}{7}-\frac{186}{100}\right|=\frac{1}{350}$

Error relativo: $E_r=\dfrac{\frac{1}{350}}{\frac{13}{7}}=\frac{1}{650}$

6. **Calcula el valor de:**

a) $2\sqrt{x^3y}-\frac{1}{5}\sqrt{25xy}$ b) $b\sqrt[3]{a^4}+2a\sqrt[3]{ab^3}-b\sqrt[3]{192}$

a) $2\sqrt{x^3y}-\frac{1}{5}\sqrt{25xy}=2x\sqrt{xy}-\frac{1}{5}\sqrt{5^2xy}=2x\sqrt{xy}-\sqrt{xy}=(2x-1)\sqrt{xy}$

b) $b\sqrt[3]{a^4}+2a\sqrt[3]{ab^3}-b\sqrt[3]{192}=ab\sqrt[3]{a}+2ab\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{2^6\cdot 3}=3ab\sqrt[3]{a}-4b\sqrt[3]{3}$

7. **Simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{2^{-3}\cdot 6^{-2}}{18^{-3}}$ b) $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}$ c) $(3-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2$ d) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}}}$

a) $\dfrac{2^{-3}\cdot 6^{-2}}{18^{-3}}=\dfrac{18^3}{2^3\cdot 6^2}=\dfrac{(2\cdot 3^2)^3}{2^3\cdot(2\cdot 3)^2}=\dfrac{2^3\cdot 3^6}{2^3\cdot 2^2\cdot 3^2}=\dfrac{3^4}{2^2}=\dfrac{81}{4}$

b) $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}}=\sqrt[12]{2^3\cdot 3^2}=\sqrt[12]{72}$

c) $(3-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2=(3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}-3-\sqrt{2})=6(-2\sqrt{2})=-12\sqrt{2}$

También podríamos haber calculado: $(3-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2=(9-6\sqrt{2}+2)-(9+6\sqrt{2}+2)=-12\sqrt{2}$.

8. **La máxima distancia de la Tierra a la Luna es de $4{,}07\cdot 10^8$ m y el radio de la Luna mide 1737 km. Calcula la distancia de la Tierra a la Luna tomando como unidad el diámetro de la Luna.**

Diámetro de la Luna: 3474 km

Distancia máxima de la Tierra a la Luna: $4{,}07\cdot 10^8\text{ m}=4{,}07\cdot 10^5\text{ km}=\dfrac{4{,}07\cdot 10^5}{3474}\simeq 117{,}156$ diámetros lunares

9. **Racionaliza los denominadores y simplifica todo lo que puedas las expresiones resultantes:**

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{54}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{54}}$ c) $\dfrac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3}-1}$

a) $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{54}}=\dfrac{(2\sqrt{3}-1)\sqrt{54}}{54}=\dfrac{2\sqrt{3\cdot 54}-\sqrt{54}}{54}=\dfrac{2\sqrt{2\cdot 3^4}-\sqrt{2\cdot 3^3}}{54}=\dfrac{2\cdot 3^2\sqrt{2}-3\sqrt{2\cdot 3}}{54}=\dfrac{6\sqrt{2}-\sqrt{6}}{18}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{54}}=\dfrac{\sqrt[4]{54^3}}{54}=\dfrac{\sqrt[4]{2^3\cdot 3^9}}{54}=\dfrac{3^2\sqrt[4]{2^3\cdot 3}}{54}=\dfrac{\sqrt[4]{24}}{6}$

c) $\dfrac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{54}\,(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2\sqrt{54\cdot 3}+\sqrt{54}}{12-1}=\dfrac{2\sqrt{2\cdot 3^4}+\sqrt{2\cdot 3^3}}{11}=\dfrac{2\cdot 3^2\sqrt{2}+3\sqrt{2\cdot 3}}{11}=\dfrac{18\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{11}$

10. Dados $A = 2{,}3 \cdot 10^{-12}$ y $B = 1{,}15 \cdot 10^{-11}$. Calcula:

a) $A + B$ **b)** $A - B$ **c)** AB **d)** $\frac{A}{B}$

a) $A + B = 2{,}3 \cdot 10^{-12} + 1{,}15 \cdot 10^{-11} = 0{,}23 \cdot 10^{-11} + 1{,}15 \cdot 10^{-11} = 1{,}38 \cdot 10^{-11}$

b) $A - B = 2{,}3 \cdot 10^{-12} - 1{,}15 \cdot 10^{-11} = 0{,}23 \cdot 10^{-11} - 1{,}15 \cdot 10^{-11} = -0{,}92 \cdot 10^{-11} = -9{,}2 \cdot 10^{-12}$

c) $AB = 2{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}15 \cdot 10^{-11} = 2{,}645 \cdot 10^{-23}$

d) $\frac{A}{B} = \frac{2{,}3 \cdot 10^{-12}}{1{,}15 \cdot 10^{-11}} = 2 \cdot 10^{-1}$

11. Averigua las vueltas que debe dar la rueda de una bicicleta para recorrer 1 500 m sabiendo que el radio de la rueda es de 0,25 m. Expresa el resultado con la mejor aproximación al número de vueltas exactas.

$\frac{1500}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}25} \simeq 955$ vueltas

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. El inverso del número irracional $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ es:

A. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

B. $\sqrt{2}-1$

C. $\sqrt{2}+1$

D. Los números irracionales no tienen inverso.

Obviamente, el inverso de $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ es $1+\sqrt{2}$, es decir, la respuesta C.

2. La diferencia entre los números racionales $A = 1{,}1\widehat{21}$ y $B = 1{,}\widehat{12}$ es:

A. 0

B. 0,1

C. 0,9

D. 0,09

$A - B = 1{,}1\widehat{21} - 1{,}\widehat{12} = \frac{1121-11}{990} - \frac{112-1}{99} = \frac{1110}{990} - \frac{111}{99} = \frac{37}{33} - \frac{37}{33} = 0$, la respuesta A.

3. **Dados los valores 12,25 y 0,025 considerando que la última cifra escrita puede no ser cierta. El valor que se ha de tomar como suma de los dos números es:**

A. 12,275

B. 12,27

C. 12,28

D. 12,3

Los valores dados son aproximaciones de las medidas reales, por tanto, la primera de las medidas está entre 12,24 y 12,26 y la segunda entre 0,024 y 0,026.

Así, la suma está entre 12,264 y 12,286, por lo que hay que tomar como suma el valor 12,3, la respuesta D.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Indica cuales de los siguientes números son racionales.**

A. 0,12122122212222…

B. 0,123412341234…

C. 0,112233445566…

D. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}$

A y C son irracionales, ya que no son periódicos. En cambio B es racional, ya que es periódico. Finalmente, $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2-2}{\sqrt{2}}=0$ es racional. Por tanto, las respuestas correctas son B y D.

5. **Las siguientes igualdades son ciertas para cualesquiera valores reales estrictamente positivos:**

A. $a^{\left(b^c\right)}=\left(a^b\right)^c$

B. $a^{bc}=\left(a^b\right)^c$

C. $\left(a^b\right)^c=\left(a^c\right)^b$

D. $a^{\left(b^c\right)}=a^b$

$\left(a^b\right)^c=a^{bc}=\left(a^c\right)^b$, por lo que B y C son ciertas.En cambio A y D son falsas, por ejemplo, $2^{\left(2^3\right)}=2^8=256$ no coincide con $\left(2^2\right)^3=4^3=64$ ni con $2^2=4$. Por tanto, las respuestas correctas son B y C.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Dados P y Q números reales. Se consideran las afirmaciones:

1. Al menos uno de los dos números reales P y Q es irracional.
2. $P+Q$ es irracional.

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. 1 y 2 son excluyentes entre sí.

D. Nada de lo anterior.

1 no implica 2, por ejemplo, si P es irracional y $Q = -P$, tendríamos $P + Q = 0$ racional.

En cambio 2 sí implica 1, si $P + Q$ es irracional al menos uno de los dos números reales P y Q es irracional, ya que si ambos fueran racionales también lo sería $P + Q$.

Por tanto, la relación correcta es la dada en B.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Con los siguientes datos:

1. $B = [0, 6)$ **2.** $A \cup B = (-2, 6)$ **3.** $A \cap B = [0, 5)$

¿Cuál es exactamente el subconjunto de números reales A?

A. Puede eliminarse el dato 1.

B. Puede eliminarse el dato 3.

C. Se puede eliminar cualquiera de los tres datos.

D. No puede eliminarse ningún dato.

No puede eliminarse ningún dato, respuesta D, son necesarios los tres para deducir que $A = (-2, 5)$.

2 Matemática financiera

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 a 5. Ejercicios resueltos.

6. Halla el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 \sqrt[3]{2}$ **c)** $\log_{0,001} 10^6$ **e)** $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{8}$ **g)** $\log_{\sqrt{e}} e$ **i)** $\log_7 49^{-1}$

b) $\log \sqrt{10}$ **d)** $\ln \sqrt[3]{e}$ **f)** $\log_5 25^3$ **h)** $\log_5 0,2$

a) $\log_2 \sqrt[3]{2} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

b) $\log \sqrt{10} = x \Rightarrow 10^x = \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

c) $\log_{0,001} 10^6 = x \Rightarrow 0,001^x = 10^6 \Rightarrow 10^{-3x} = 10^6 \Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2$

d) $\ln \sqrt[3]{e} = x \Rightarrow e^x = \sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

e) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{8} = x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = \sqrt[4]{8} \Rightarrow 4^{-x} = 8^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{3}{4}} \Rightarrow -2x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow x = -\dfrac{3}{8}$

f) $\log_5 25^3 = x \Rightarrow 5^x = 25^3 = 5^6 \Rightarrow x = 6$

g) $\log_{\sqrt{e}} e = x \Rightarrow \left(\sqrt{e}\right)^x = e \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} = e \Rightarrow \dfrac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2$

h) $\log_5 0,2 = x \Rightarrow 5^x = 0,2 = \dfrac{1}{5} = 5^{-1} \Rightarrow x = -1$

i) $\log_7 49^{-1} = x \Rightarrow 7^x = 49^{-1} = \left(7^2\right)^{-1} = 7^{-2} \Rightarrow x = -2$

7. Halla el valor de *x* en las siguientes expresiones.

a) $\log_7 x = 3$ **b)** $\log_x \dfrac{1}{7} = -3$ **c)** $\log_{\frac{1}{7}} x = 3$ **d)** $\log_x 7 = 3$

a) $\log_7 x = 3 \Rightarrow 7^3 = x \Rightarrow x = 343$

c) $\log_{\frac{1}{7}} x = 3 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{7}\right)^3 = x \Rightarrow x = \dfrac{1}{343}$

b) $\log_x \dfrac{1}{7} = -3 \Rightarrow x^{-3} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow x^3 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{7}$

d) $\log_x 7 = 3 \Rightarrow x^3 = 7 \Rightarrow x = \sqrt[3]{7}$

8. Toma logaritmos en la expresión: $T = \dfrac{2x^2y^3}{z^2}$.

$$T = \frac{2x^2y^3}{z^2} \Rightarrow \log T = \log\left(\frac{2x^2y^3}{z^2}\right) = \log\left(2x^2y^3\right) - \log\left(z^2\right) = \log 2 + 2\log x + 3\log y - 2\log z$$

9. Considerando log 2 = 0,301 y log 3 = 0,477, calcula:

a) log 12 **b)** log 15 **c)** $\log\frac{1}{144}$

a) $\log 12 = \log\left(2^2 \cdot 3\right) = 2\log 2 + \log 3 = 2 \cdot 0{,}301 + 0{,}477 = 1{,}079$

b) $\log 15 = \log\left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) = \log 3 + \log 10 - \log 2 = 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}176$

c) $\log\frac{1}{144} = \log\frac{1}{2^4 \cdot 3^2} = \log 1 - 4\log 2 - 2\log 3 = 0 - 4 \cdot 0{,}301 - 2 \cdot 0{,}477 = -2{,}158$

10. Halla con la calculadora los siguientes logaritmos y exprésalos redondeando a las milésimas.

a) $\log_3 21$ **b)** $\log_{0,01} 12$ **c)** $\log_{\sqrt{3}} 19$

a) $\log_3 21 = \frac{\log 21}{\log 3} = 2{,}771$ **b)** $\log_{0,01} 12 = \frac{\log 12}{\log 0{,}01} = -0{,}540$ **c)** $\log_{\sqrt{3}} 19 = \frac{\log 19}{\log\sqrt{3}} = 5{,}360$

11 a 13. Ejercicios resueltos.

14. El precio de la vivienda subió durante el año pasado un 7% y durante este ha bajado un 2,5 %. ¿Cuánto cuesta hoy una casa que hace dos años costaba 210 000 €? ¿Cuánto costaba hace dos años una casa que hoy cuesta 208 650 €?

Una casa que hace dos años costaba 210 000 €, ahora cuesta 210 000 · 1,07 · 0,975 = 219 082,50 €.

Una casa que ahora cuesta 208 650 €, hace dos años costaba $\frac{208\,650}{1{,}07 \cdot 0{,}975} = 200\,000$ €.

15. ¿Qué porcentaje representan las 42 mujeres asistentes a un congreso si el total de asistentes es de 96? ¿Cuántas mujeres más tendrían que asistir para igualar los porcentajes de ambos sexos? ¿Y para que el porcentaje de mujeres sea del 60%?

Si x % es el porcentaje de mujeres tenemos $96 \cdot \frac{x}{100} = 42 \Rightarrow 0{,}96x = 42 \Rightarrow x = 43{,}75$, es decir, las 42 mujeres representan el 43,75 % de los asistentes.

Para igualar el porcentaje de hombres y mujeres deberían asistir el mismo número de hombres que de mujeres. Teniendo en cuenta que asisten 54 hombres, deberían asistir 12 mujeres más para igualar los porcentajes.

Llamemos a al número de mujeres que deberían asistir para que el porcentaje de mujeres sea del 60%. Como asisten 54 hombres, tendríamos $(a + 54) \cdot \frac{60}{100} = a \Rightarrow 0{,}6(a + 54) = a \Rightarrow 0{,}4a = 32{,}4 \Rightarrow a = 81$. Es decir, deberían asistir 39 mujeres más.

16. Ejercicio resuelto.

17. **a)** Escribe, redondeando a las centésimas, los cuatro primeros términos de una progresión geométrica en la que el quinto término es 15 953,52, y la razón, 1,05.

b) Escribe el término general de la progresión.

c) Calcula la suma de los 10 primeros términos.

a) $a_1 = 13\ 125$; $a_2 = 13\ 781,25$; $a_3 = 14\ 470,31$; $a_4 = 15\ 193,83$

b) $a_n = 13125 \cdot 1{,}05^{n-1}$

c) $S_{10} = \dfrac{a_1\left(r^{10}-1\right)}{r-1} = \dfrac{13125\cdot\left(1{,}05^{10}-1\right)}{0{,}05} = 165\,084{,}84$

18. **Halla la razón, el séptimo término y la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:**

a) $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\dots$

b) $20, 20(1+r), 20(1+r)^2\dots$

a) $r = -\dfrac{1}{2}$ $\quad a_7 = 2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{32}$ $\quad S_{10} = \dfrac{2\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1} = \dfrac{\frac{1}{512}-2}{-\frac{3}{2}} = \dfrac{341}{256}$

b) Razón: $1+r$ $\quad a_7 = 20(1+r)^6$ $\quad S_{10} = \dfrac{20\left((1+r)^{10}-1\right)}{r}$

19. **Dada la progresión geométrica de primer término 120 y de tercer término 126,075:**

a) Calcula la razón y determina su término general.

b) Calcula la suma de sus diez primeros términos.

c) ¿Cuántos términos se han sumado si el resultado de dicha suma es 1982,27?

a) Razón: $a_3 = a_1 r^2 \Rightarrow 126{,}075 = 120\cdot r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{126{,}075}{120}} = 1{,}025$ $\qquad$ Término general: $a_n = 120\cdot 1{,}025^{n-1}$

b) $S_{10} = \dfrac{120\cdot\left(1{,}025^{10}-1\right)}{0{,}025} = 1344{,}406$

c) $S_n = \dfrac{120\cdot\left(1{,}025^{n}-1\right)}{0{,}025} = 1982{,}27 \Rightarrow 1{,}025^n = 1{,}413 \Rightarrow n\log 1{,}025 = \log 1{,}413 \Rightarrow n = \dfrac{\log 1{,}413}{\log 1{,}025} = 14$

20. **Ejercicio interactivo.**

21 y 22. **Ejercicios resueltos.**

23. **Calcula los intereses que generarán 4500 € depositados a un interés simple del 6 % durante:**

a) Dos años $\quad$ **b)** Dos años y medio $\quad$ **c)** Tres años

a) $I = C_i r t = 4500\cdot 0{,}06\cdot 2 = 540$ €

b) $I = C_i r t = 4500\cdot 0{,}06\cdot 2{,}5 = 675$ €

c) $I = C_i r t = 4500\cdot 0{,}06\cdot 3 = 810$ €

24. Halla el capital inicial que colocado a un interés simple del 5% durante 3 años genera un capital final de 3162,5 €.

Los datos son: $C_f = 3162,5$ € $t = 5$ años $r = 0,05$

$$C_f = C_i\left(1+rt\right) \Rightarrow C_i = \frac{C_f}{1+rt} = \frac{3162,5}{1+0,05\cdot 3} = 2750 \text{ €}$$

25. Un capital de 6500 € se quiere aumentar en un 20%. Para ello se coloca a interés simple del 4% anual. ¿Cuánto tiempo debe permanecer depositado este capital?

Los datos son: $C_i = 6500$ € $C_f = 6500\cdot 1,20 = 7800$ € $I = C_f - C_i = 1300$ € $r = 0,04$

$$I = C_i rt \Rightarrow t = \frac{I}{C_i r} = \frac{1300}{6500\cdot 0,04} = 5 \text{ años}$$

26. ¿A qué interés se han colocado 8000 € que durante 3 años han generado 90 € de intereses trimestrales?

Los datos son: $C_i = 8000$ € $t = 3$ años $I = 90\cdot 4 = 360$ €

$$I = C_i rt \Rightarrow r = \frac{I}{C_i t} = \frac{360}{8000\cdot 3} = 0,015 = 1,5 \text{ \% anual.}$$

27 y 28. Ejercicios resueltos.

29. Un capital colocado al 4,25 % anual de interés compuesto se ha convertido en seis años en 6418,39 €. ¿De qué capital inicial se trata?

Los datos son: $C_f = 6418,39$ € $t = 6$ años $r = 0,0425$

$$C_f = C_i\left(1+r\right)^t \Rightarrow C_i = \frac{C_f}{\left(1+r\right)^t} = \frac{6418,39}{\left(1+0,0425\right)^6} = 5000 \text{ €}$$

30. Se depositan 2500 € a un interés compuesto del 3,75% anual durante 2 años. Calcula el capital final si el período de capitalización es cada seis meses.

Los datos son: $C_i = 2500$ € $r = 0,0375$ $t = 2$ años Período de capitalización: semestral ($k = 2$)

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = 2500\left(1+\frac{0,0375}{2}\right)^4 = 2692,84 \text{ €}$$

31 y 32. Ejercicios resueltos.

33. Calcula el capital con el que se contará al final de una operación financiera que consiste en ingresar 300 € al trimestre, durante 16 años y a un tipo de interés del 6,25 %.

Los datos son: $a = 300$ € $r = 0,0625$ $t = 16$ años Período de capitalización: trimestral ($k = 4$)

$$C = \frac{a\left(1+\frac{r}{k}\right)\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}-1\right]}{\frac{r}{k}} = \frac{300\left(1+\frac{0,0625}{4}\right)\left[\left(1+\frac{0,0625}{4}\right)^{4\cdot 16}-1\right]}{\frac{0,0625}{4}} = 33098,23 \text{ €}$$

34. ¿Durante cuántos años se deberán ingresar anualidades de 3500 € para que, a un interés del 8%, se consiga juntar el 12 % del precio de una vivienda que se estima será de 265 000 €?

Los datos son: $a = 3500$ € $r = 0{,}08$ $C = 0{,}12 \cdot 265\,000 = 31800$ €.

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow 31800 = \frac{3500 \cdot 1{,}08 \cdot \left[1{,}08^t - 1\right]}{0{,}08} \Rightarrow 1{,}08^t = \frac{31800 \cdot 0{,}08}{3500 \cdot 1{,}08} + 1 = 1{,}673 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 1{,}08^t = \log 1{,}673 \Rightarrow t \log 1{,}08 = \log 1{,}673 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}673}{\log 1{,}08} = 6{,}69 \text{ años}$$

Es decir, habrá que ingresar anualidades durante 7 años.

35. Ejercicio resuelto.

36. Una entidad bancaria ofrece dos posibilidades para un préstamo de 6000 €. La modalidad *A*consiste en un préstamo a 5 años con cuotas semestrales y a un interés del 8 %. La modalidad *B* consiste en pagar una cuota fija de 1300 € durante los 5 años. ¿Cuál de las dos es mejor?

Modalidad *A*: $C = 6000$ € $r = 0{,}08$ $t = 5$ años Pago: Semestral ($k = 2$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} = \frac{6000 \cdot \frac{0{,}08}{2} \cdot \left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{10}}{\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{10} - 1} = 739{,}75 \text{ €}$$

Con esta modalidad pagamos al banco un total de 739,75 · 10 = 7397,50 €.

Modalidad *B*: Con esta modalidad pagamos al banco un total de 1300 · 5= 6500€.

Es mejor la modalidad *B*.

37. Un banco nos presta el dinero al 7 % para un crédito a 10 años pagadero trimestralmente. ¿Cuál es la cantidad máxima que podemos pedir si no queremos pagar más de 600 € trimestrales? ¿Y si se hacen los pagos cuatrimestrales sin superar los 500 € en cada pago?

En el primer caso: $a = 600$ € $r = 0{,}07$ $t = 10$ años Pago: Trimestral ($k = 4$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} \Rightarrow C = \frac{a\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1\right]}{\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}} = \frac{600\left[\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{4\cdot 10} - 1\right]}{\frac{0{,}07}{4}\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{4\cdot 10}} = 17\,156{,}54 \text{ €}$$

En el segundo caso: $a = 500$ € $r = 0{,}07$ $t = 10$ años Pago: Cuatrimestral ($k = 3$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} \Rightarrow C = \frac{a\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1\right]}{\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}} = \frac{500\left[\left(1+\frac{0{,}07}{3}\right)^{3\cdot 10} - 1\right]}{\frac{0{,}07}{3}\left(1+\frac{0{,}07}{3}\right)^{3\cdot 10}} = 10\,701{,}54 \text{ €}$$

38. Calcula la TAE correspondiente a un 4% anual con capitalización:

a) Mensual **b)** Trimestral **c)** Semestral

a) $\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1\right]\cdot 100 = \left[\left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 = 4{,}0742\ \%$

b) $\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^4 - 1\right]\cdot 100 = 4{,}0604\ \%$

c) $\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{0{,}04}{2}\right)^2 - 1\right]\cdot 100 = 4{,}04\ \%$

39. Calcula el IDH de Grecia en el año 2012 si los valores asignados para los indicadores son:

***IEV*= 0,947 *IE*= 0,856 *II*= 0,786**

$\text{IDH} = \sqrt[3]{IEV\cdot IE\cdot II} = \sqrt[3]{0{,}947\cdot 0{,}856\cdot 0{,}786} = 0{,}860$

40. Calcula los números índice correspondientes al PIB per cápita en un país, tomando como base 1980 y 2000.

Año	1980	1990	2000	2010
Renta per cápita ($)	9203	12 055	14 413	21 735

Año	1980	1990	2000	2010
Índice (base 1980)	100	130,99	156,61	236,17
Índice (base 2000)	63,85	83,64	100	150,8

41. Ejercicio interactivo.

42 a 52. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Logaritmos

53. Aplicando directamente la definición, calcula el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 \frac{1}{27}$ **c)** $\log 10\,000$ **e)** $\log 0{,}001$ **g)** $\log_{\sqrt{8}}\left(2\sqrt{2}\right)$ **i)** $\log_{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}\right)^2$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{9}$ **d)** $\log \frac{1}{1000}$ **f)** $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27}$ **h)** $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{81}\right)$ **j)** $\ln\left(e\sqrt[3]{e}\right)$

a) $\log_3 \frac{1}{27} = x \Rightarrow 3^x = \frac{1}{27} = 3^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{9} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^{-3x} = 3^{-2} \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

c) $\log 10\,000 = x \Rightarrow 10^x = 10\,000 = 10^4 \Rightarrow x = 4$

d) $\log \frac{1}{1000} = x \Rightarrow 10^x = \frac{1}{1000} = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

e) $\log 0{,}001 = x \Rightarrow 10^x = 0{,}001 = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

f) $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt{27} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt{27} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

g) $\log_{\sqrt{8}}\left(2\sqrt{2}\right) = x \Rightarrow \sqrt{8}^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

h) $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{81}\right) = x \Rightarrow \sqrt{3}^x = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-4} \Rightarrow \frac{x}{2} = -4 \Rightarrow x = -8$

i) $\log_{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}\right)^2 = x \Rightarrow \sqrt{3}^x = \left(3\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^3 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow x = 6$

j) $\ln\left(e\sqrt[3]{e}\right) = x \Rightarrow e^x = e\sqrt[3]{e} = e^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

54. Calcula el valor de *x* en cada una de las siguientes expresiones logarítmicas.

a) $\log_x 8 = -3$ **b)** $\log_3 x = -1$ **c)** $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -3$ **d)** $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$

a) $\log_x 8 = -3 \Rightarrow x^{-3} = 8 = 2^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_3 x = -1 \Rightarrow 3^{-1} = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} x = -3 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3} = x \Rightarrow x = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

d) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2 \Rightarrow a^{-x} = a^2 \Rightarrow x = -2$

55. Toma logaritmos decimales en las siguientes igualdades.

a) $P = 10x^3yz^3$ **b)** $Q = \dfrac{100x^2}{x+y}$ **c)** $R = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2y^5}{3z^3}}$ **d)** $S^2 = \dfrac{1+x^3}{xy^2z^{-3}}$

a) $\log P = \log 10 + 3\log x + \log y + 3\log z = 1 + 3\log x + \log y + 3\log z$

b) $\log Q = \log 100 + 2\log x - \log(x+y) = 2 + 2\log x - \log(x+y)$

c) $\log R = \dfrac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

d) $2\log S = \log\left(1+x^3\right) - \log x - 2\log y + 3\log z$

56. Escribe el valor de *E* en cada uno de los siguientes casos. En las expresiones obtenidas no deben aparecer logaritmos.

a) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z$

b) $\log E = 3\log(x-2y) + \log(x+2y)$

c) $\log E = 3\log(x+10) - \log\dfrac{(2x+20)}{3} + \log\dfrac{3}{2}$

a) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z = \log\dfrac{2^3y^3}{x^4z^2} \Rightarrow E = \dfrac{8y^3}{x^4z^2}$

b) $\log E = 3\log(x-2y) + \log(x+2y) = \log\left[(x-2y)^3(x+2y)\right] \Rightarrow E = (x-2y)^3(x+2y)$

c) $\log E = 3\log(x+10) - \log\dfrac{(2x+20)}{3} + \log\dfrac{3}{2} = \log\dfrac{(x+10)^3\cdot\dfrac{3}{2}}{\dfrac{2x+20}{3}} = \log\dfrac{9(x+10)^3}{4(x+10)} = \log\dfrac{9(x+10)^2}{4} \Rightarrow E = \dfrac{9(x+10)^2}{4}$

57. Sabiendo que el logaritmo decimal de 2 es 0,301 y que el logaritmo decimal de 3 es 0,477, calcula, sin utilizar las teclas de funciones logarítmicas de la calculadora, los siguientes logaritmos.

a) log 250 **c)** $\log\sqrt{18}$ **e)** log 45

b) log 5,4 **d)** log 270 **f)** $\log\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{1}{6}}}$

a) $\log 250 = \log\dfrac{1000}{4} = \log 1000 - \log 4 = 3 - \log 2^2 = 3 - 2\log 2 = 3 - 2\cdot 0{,}301 = 2{,}398$

b) $\log 5{,}4 = \log\dfrac{54}{10} = \log 54 - \log 10 = \log 2\cdot 3^3 - 1 = \log 2 + 3\log 3 - 1 = 0{,}301 + 3\cdot 0{,}477 - 1 = 0{,}732$

c) $\log\sqrt{18} = \dfrac{1}{2}\log 2\cdot 3^2 = \dfrac{\log 2 + 2\log 3}{3} = \dfrac{0{,}301 + 2\cdot 0{,}477}{2} = 0{,}6275$

d) $\log 270 = \log(27\cdot 10) = \log 27 + \log 10 = \log 3^3 + 1 = 3\log 3 + 1 = 3\cdot 0{,}477 + 1 = 2{,}431$

e) $\log 45 = \log\dfrac{90}{2} = \log 90 - \log 2 = \log\left(3^2\cdot 10\right) - \log 2 = 2\log 3 + \log 10 - \log 2 = 2\cdot 0{,}477 + 1 - 0{,}301 = 1{,}653$

f) $\log\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{1}{6}}} = \log\sqrt[6]{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{\log 1 - \log 6}{6} = \dfrac{0 - \log(2\cdot 3)}{6} = -\dfrac{\log 2 + \log 3}{6} = -\dfrac{0{,}301 + 0{,}477}{6} = -0{,}129$

58. Sabiendo que $\log_3 2 = 0{,}631$ y que $\log_3 5 = 1{,}465$, halla, sin utilizar la calculadora, el valor de $\log_3 150$.

$$\log_3 150 = \log_3\left(2\cdot 3\cdot 5^2\right) = \log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5 = 0{,}631 + 1 + 2\cdot 1{,}465 = 4{,}561$$

59. Con la ayuda de la calculadora, obtén aproximaciones decimales hasta las milésimas de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 20$ **b)** $\log_{\sqrt{2}} 3$ **c)** $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7}{5}$ **d)** $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

a) $\log_3 20 = \dfrac{\log 20}{\log 3} = 2{,}727$

b) $\log_{\sqrt{2}} 3 = \dfrac{\log 3}{\log\sqrt{2}} = 3{,}170$

c) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7}{5} = \dfrac{\log\frac{7}{5}}{\log\frac{1}{4}} = -0{,}243$

d) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \dfrac{\log\sqrt{3}}{\log\sqrt{2}} = 1{,}585$

60. Con la ayuda de los logaritmos, calcula el valor de *t* en los siguientes casos.

a) $1{,}025^t = 2{,}45$ **b)** $1{,}025^t = 2$ **c)** $2500 = 2000\cdot 1{,}03^t$ **d)** $120 = 100\left(1+\dfrac{0{,}03}{12}\right)^{12t}$

a) $1{,}025^t = 2{,}45 \Rightarrow t\log 1{,}025 = \log 2{,}45 \Rightarrow t = \dfrac{\log 2{,}45}{\log 1{,}025} = 36{,}29$

b) $1{,}025^t = 2 \Rightarrow t\log 1{,}025 = \log 2 \Rightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}025} = 28{,}07$

c) $2500 = 2000\cdot 1{,}03^t \Rightarrow 1{,}03^t = 1{,}25 \Rightarrow t\log 1{,}03 = \log 1{,}25 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}25}{\log 1{,}03} = 7{,}55$

d) $120 = 100\left(1+\dfrac{0{,}03}{12}\right)^{12t} \Rightarrow 1{,}2 = 1{,}0025^{12t} \Rightarrow 12t\log 1{,}0025 = \log 1{,}2 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1{,}2}{12\cdot\log 1{,}0025} = 6{,}085$

Porcentajes

61. De una cantidad se sabe que el 22 % es 275. ¿Cuál es esa cantidad?

Si x es la cantidad buscada, tenemos: $0{,}22x = 275 \Rightarrow x = \dfrac{275}{0{,}22} = 1250$

62. ¿Qué porcentaje representan 26 unidades de un total de 48? ¿Y 90 unidades de un total de 48?

$\dfrac{26}{48}\cdot 100 = 54{,}17\ \%$ $\dfrac{90}{48}\cdot 100 = 187{,}5\ \%$

63. Aumenta las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

a) 1350 en un 13%
b) 1250 en un 2,25%
c) 3500 en un 122%
d) 450 en un 200%

a) $1350 \cdot 1{,}13 = 1525{,}5$
b) $1250 \cdot 1{,}0225 = 1278{,}125$
c) $3500 \cdot 2{,}22 = 7770$
d) $450 \cdot 3 = 1350$

64. Disminuye las siguientes cantidades en los porcentajes que se indican.

a) 2650 en un 13 %

b) 3100 en un 2 %

c) 475 en un 20 %

d) 1025 en un 2,25 %

a) $2650 \cdot 0{,}87 = 2305{,}5$

b) $3100 \cdot 0{,}98 = 3038$

c) $475 \cdot 0{,}8 = 380$

d) $1025 \cdot 0{,}9775 = 1001{,}9375$

65. Una cantidad aumentada en un 21 % vale 1694. ¿Cuál es dicha cantidad?

Si x es la cantidad buscada, tenemos: $1{,}21x = 1694 \Rightarrow x = \frac{1694}{1{,}21} = 1400$

66. Una cantidad disminuida en un 12 % vale 22. ¿Cuál es dicha cantidad?

Si x es la cantidad buscada, tenemos: $0{,}88x = 22 \Rightarrow x = \frac{22}{0{,}88} = 25$

Progresiones geométricas

67. Indica cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, di el valor de la razón.

a) 5, 10, 20, 30, 40,…

b) 3, 15, 75, 375, 1875,…

c) 2, –2, 2, –2, 2,…

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10},...$

e) $30, 10, \frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \frac{10}{27},...$

f) 1, 5, 26, 127, 626

a) $\frac{10}{5} = 2; \frac{20}{10} = 2; \frac{30}{20} = 1{,}5 \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

b) $\frac{15}{3} = \frac{75}{15} = \frac{375}{75} = \frac{1875}{375} = 5 \Rightarrow$ Es una progresión geométrica de razón $r = 5$.

c) $\frac{-2}{2} = \frac{2}{-2} = \frac{-2}{2} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow$ Es una progresión geométrica de razón $r = -1$.

d) $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

e) $\frac{10}{30} = \frac{\frac{10}{3}}{10} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{10}{3}} = \frac{\frac{10}{27}}{\frac{10}{9}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$.

f) $\frac{5}{1} = 5; \frac{26}{5} = 5{,}2 \Rightarrow$ No es una progresión geométrica.

68. Calcula el término undécimo de una progresión geométrica cuyo primer término es igual a 1 y cuya razón es 2.

$a_{11} = a_1 r^{10} = 1 \cdot 2^{10} = 1024$

69. Halla la suma de los diez primeros términos de la progresión cuyo término general es $\frac{1}{2^n}$.

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$, por tanto:

$$S_{10} = \frac{a_1\left(r^{10} - 1\right)}{r-1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

70. Para cada una de las siguientes progresiones geométricas, calcula su término general, su décimo término y la suma de los diez primeros términos.

a) 5, 15, 45, 135, 405,…

b) 3, –3, 3, –3, 3,…

c) 1,04; $1{,}04^2$; $1{,}04^3$; $1{,}04^4$;…

d) $\left(1+\frac{0{,}8}{4}\right)$, $\left(1+\frac{0{,}8}{4}\right)^2$, $\left(1+\frac{0{,}8}{4}\right)^3$, $\left(1+\frac{0{,}8}{4}\right)^4$,…

a) El primer término es $a_1 = 5$ y la razón es $r = 3$, por tanto, el término general es $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$, el décimo término es $a_{10} = 5 \cdot 3^9 = 98\,415$ y la suma de los diez primeros términos es $S_{10} = \frac{5\left(3^{10} - 1\right)}{3-1} = 147\,620$.

b) El primer término es $a_1 = 3$ y la razón es $r = -1$, por tanto, el término general es $a_n = 3(-1)^{n-1}$, el décimo término es $a_{10} = 3 \cdot (-1)^9 = -3$ y la suma de los diez primeros términos es $S_{10} = \frac{3\left((-1)^{10} - 1\right)}{-1-1} = 0$.

c) El primer término es $a_1 = 1{,}04$ y la razón es $r = 1{,}04$, por tanto, el término general es $a_n = 1{,}04 \cdot 1{,}04^{n-1} = 1{,}04^n$, el décimo término es $a_{10} = 1{,}04^{10} = 1{,}4802$ y la suma de los diez primeros términos es $S_{10} = \frac{1{,}04\left(1{,}04^{10} - 1\right)}{1{,}04 - 1} = = 12{,}4864$.

d) El primer término es $a_1 = \left(1+\frac{0{,}8}{4}\right) = 1{,}2$ y la razón es $r = \left(1+\frac{0{,}8}{4}\right) = 1{,}2$, por tanto, el término general es $a_n = 1{,}2 \cdot 1{,}2^{n-1} = 1{,}2^n$, el décimo término es $a_{10} = 1{,}2^{10} = 6{,}1917$ y la suma de los diez primeros términos es $S_{10} = \frac{1{,}2\left(1{,}2^{10} - 1\right)}{1{,}2 - 1} = 31{,}1504$.

71. ¿Cuántos términos se han de sumar en la progresión geométrica cuyos tres primeros términos son 2; 2,5 y 3,125 para obtener un total de 276,217?

Tenemos $a_1 = 2$ y $r = 1{,}25$, por tanto, tenemos:

$$S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r-1} = \frac{2\left(1{,}25^n - 1\right)}{1{,}25 - 1} = 8\left(1{,}25^n - 1\right) = 276{,}217 \Rightarrow 1{,}25^n = 35{,}527125 \Rightarrow n\log 1{,}25 = \log 35{,}527125 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n = \frac{\log 35{,}527125}{\log 1{,}25} = 16$, es decir, hay que sumar 16 términos.

Interés simple y compuesto

72. Calcula el capital final obtenido al depositar las siguientes cantidades a interés simple anual y durante el tiempo indicado en cada apartado.

a) 100 € al 5 % durante 2 años.

b) 100 000 € al 4 % durante 7 años.

c) 1 € al 6 % durante 5 años.

a) $C_f = 100(1+0{,}05\cdot 2) = 110 \ €$

b) $C_f = 100\,000(1+0{,}04\cdot 7) = 128\,000 \ €$

c) $C_f = 1(1+0{,}06\cdot 5) = 1{,}3 \ €$

73. Calcula a qué interés simple anual se ha depositado un capital de 5000 € sabiendo que en 10 años se ha convertido en 7000 €.

Datos: $C_i = 5000 \ €$ $\quad C_f = 7000 \ €$ $\quad I = 2000 \ €$ $\quad t = 10$ años

$$I = C_i rt \Rightarrow r = \frac{I}{C_i t} = \frac{2000}{5000\cdot 10} = 0{,}04 \Rightarrow r = 4 \ \%$$

74. Se coloca un capital de 100 000 € a un interés compuesto anual del 6 % durante 10 años. Calcula el capital final que se obtendrá en el caso de que el período de capitalización sea de:

a) Un año **b)** Un semestre **c)** Un trimestre **d)** Un mes

a) $C_f = 100\,000(1+0{,}06)^{10} = 179\,084{,}77 \ €$

b) $C_f = 100\,000\left(1+\dfrac{0{,}06}{2}\right)^{2\cdot 10} = 180\,611{,}12 \ €$

c) $C_f = 100\,000\left(1+\dfrac{0{,}06}{4}\right)^{4\cdot 10} = 181\,401{,}84 \ €$

d) $C_f = 100\,000\left(1+\dfrac{0{,}06}{12}\right)^{12\cdot 10} = 181\,939{,}67 \ €$

75. Completa la siguiente tabla con los datos que faltan. En todos los casos se trata de interés compuesto.

C_i (€)	C_f (€)	r(%)	t (años)	Capitalización
	2000	5	8	anual
6000		3,5	5	mensual
3000	5000		10	trimestral
500	800	6		semestral

Primera fila: $C_i = \dfrac{2000}{(1+0{,}05)^8} = 1353{,}68$

Segunda fila: $C_f = 6000\left(1+\dfrac{0{,}035}{12}\right)^{12\cdot 5} = 7145{,}66 \ €$

Tercera fila: $r = 4\left(\sqrt[40]{\dfrac{5}{3}}-1\right) = 0{,}0514;\ r = 5{,}14 \ \%$

Cuarta fila: $t = \dfrac{\log 1{,}6}{2\cdot \log 1{,}03} = 7{,}95$ años

C_i (€)	C_f (€)	r(%)	t (años)	Capitalización
1353,68	2000	5	8	anual
6000	7145,66	3,5	5	mensual
3000	5000	5,14	10	trimestral
500	800	6	8	semestral

76. **a)** ¿Qué capital inicial será necesario ingresar en una cuenta para que después de estar colocado durante 3 años a un interés compuesto del 3,5% se convierta en 2400 €?

b) ¿Y si el período de capitalización es mensual y no anual?

a) Datos: $C_f = 2400$ € $r = 0{,}035$ $t = 3$ años $\Rightarrow C_f = C_i(1+r)^t \Rightarrow C_i = \dfrac{C_f}{(1+r)^t} = \dfrac{2400}{(1+0{,}035)^3} = 2164{,}66$ €

b) Si el periodo de capitalización es mensual ($k = 12$): $C_i = \dfrac{C_f}{\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^{kt}} = \dfrac{2400}{\left(1+\dfrac{0{,}035}{12}\right)^{36}} = 2161{,}11$ €.

Anualidades

77. **Calcula el capital final del que se dispondrá dentro de 5 años si se depositan 300 € al comienzo de cada año a un interés compuesto anual del 6 %.**

Datos: $a = 300$ € $r = 0{,}06$ $t = 5$ años $\Rightarrow C = \dfrac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} = \dfrac{300(1+0{,}06)\left[(1+0{,}06)^5 - 1\right]}{0{,}06} = 1792{,}60$ €

78. **¿Qué anualidad debe ingresarse al principio de cada año al 6,25 % para reunir un capital de 70 000 € en 10 años?**

Datos: $C = 70\,000$ € $r = 0{,}0625$ $t = 10$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow a = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]} = \frac{70\,000 \cdot 0{,}0625}{(1+0{,}0625)\left[(1+0{,}0625)^{10} - 1\right]} = 4939{,}98 \text{ €}$$

79. **¿Durante cuántos años se deben entregar 450 € mensuales para que colocados al 5,75% de interés compuesto se obtenga un capital final de 12 500 €?**

Datos: $a = 450$ € $r = 0{,}0575$ $C = 12\,500$ € Período de capitalización: mensual ($k = 12$)

$$C = \frac{a\left(1+\frac{r}{k}\right)\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1\right]}{\frac{r}{k}} \Rightarrow 70\,000 = \frac{450\left(1+\frac{0{,}0575}{12}\right)\left[\left(1+\frac{0{,}0575}{12}\right)^{12t} - 1\right]}{\frac{0{,}0575}{12}} \Rightarrow \left(1+\frac{0{,}0575}{12}\right)^{12t} =$$

$$= \frac{70\,000 \cdot \frac{0{,}0575}{12}}{450\left(1+\frac{0{,}0575}{12}\right)} + 1 \Rightarrow 1{,}00479^{12t} = 1{,}74182 \Rightarrow 12t\log 1{,}00479 = \log 1{,}74182 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}74182}{12\log 1{,}00479} = 9{,}68 \text{ años.}$$

Es decir, habrá que ingresar anualidades durante 9 años y 8 meses.

80. **¿Qué capital final se obtiene si se depositan semestralmente 2500 € a un interés compuesto anual del 4,25 % durante cuatro años?**

Datos: $a = 2500$ € $r = 0{,}0425$ $t = 4$ años Período de capitalización: semestral ($k = 2$)

$$C = \frac{a\left(1+\frac{r}{k}\right)\left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1\right]}{\frac{r}{k}} = \frac{2500\left(1+\frac{0{,}0425}{2}\right)\left[\left(1+\frac{0{,}0425}{2}\right)^{2\cdot 4} - 1\right]}{\frac{0{,}0425}{2}} = 22010{,}42 \text{ €}$$

81. ¿Qué interés anual tiene un depósito bancario que con aportaciones periódicas de 500 € cada año se ha trasformado al cabo de 2 años en un capital de 1 076,25 €?

Datos: $a = 500$ € $\quad C = 1076,25$ € $\quad t = 2$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow 1076,25 = \frac{500(1+r)\left[(1+r)^2 - 1\right]}{r}$$, haciendo $x = 1 + r$ obtenemos:

$$1076,25(x-1) = 500x\left(x^2 - 1\right) \Rightarrow (x-1)\left(500x^2 + 500x - 1076,25\right) = 0$$

La solución $x = 1 \Rightarrow r = 0$ no tiene sentido, por tanto, $x = \frac{-500 \pm 1550}{1000} = \begin{cases} x = 1,05 \Rightarrow r = 0,05 \\ x = -2,05 \text{ no válida} \end{cases}$.

Así, el depósito tiene un interés anual del 5%.

82. Un préstamo de 120 000 € al 5 % se devuelve en 20 años en pagos mensuales. Halla la mensualidad de amortización.

Datos: $C = 120\,000$ € $\quad r = 0,05$ $\; t = 20$ años $\quad$ Período de pago: mensual ($k = 12$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} = \frac{120\,000 \cdot \frac{0,05}{12}\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{12\cdot 20}}{\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{12\cdot 20} - 1} = 791,95 \text{ €}$$

83. ¿Qué deuda se habrá amortizado mediante el pago de 6 anualidades de 5000 € al 7 % anual?

Datos: $a = 5000$ € $\quad r = 0,07$ $\; t = 6$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \Rightarrow C = \frac{a\left[(1+r)^t - 1\right]}{r(1+r)^t} = \frac{5000\left(1,07^6 - 1\right)}{0,07 \cdot 1,07^6} = 23\,832,70 \text{ €}$$

84. ¿Cuánto tiempo se tardará en devolver una hipoteca de 300 000 € al 4 % si la cuota mensual es fija e igual a 2200 €?

Datos: $C = 300\,000$ € $\quad a = 2\,200$ € $\quad r = 0,04$ Período de pago: mensual ($k = 12$)

$$a = \frac{C\frac{r}{k}\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} \Rightarrow 2\,200 = \frac{300\,000 \cdot \frac{0,04}{12} \cdot \left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\frac{0,04}{12}\right)^{12t} - 1} \Rightarrow 2\,200 \cdot 1,0033^{12t} - 2\,200 = 1000 \cdot 1,0033^{12t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1200 \cdot 1,0033^{12t} = 2200 \Rightarrow 1,0033^{12t} = 1,8333 \Rightarrow 12t \log 1,0033 = \log 1,8333 \Rightarrow t = \frac{\log 1,8333}{12 \cdot \log 1,0033} = 15,33 \text{ años}$$

Se tardan 15 años y 4 meses

85. Calcula a cuántos años se debe solicitar un préstamo de 4500 € al 7,15 % anual para que la anualidad que resulte sea de 915 €.Ten en cuenta que los cálculos debes realizarlos considerando interés compuesto.

Datos: $C = 4500$ € $\quad a = 915$ € $\quad r = 0,0715$

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} \Rightarrow 915 = \frac{4500 \cdot 0,0715 \cdot (1+0,0715)^t}{(1+0,0715)^t - 1} \Rightarrow 915 \cdot 1,0715^t - 915 = 321,75 \cdot 1,0715^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 593,25 \cdot 1,0715^t = 915 \Rightarrow 1,0715^t = 1,54235 \Rightarrow t \log 1,0715 = \log 1,54235 \Rightarrow t = \frac{\log 1,54235}{\log 1,0715} = 6,27 \text{ años}$$

Se debe solicitar a 6 años y 3 meses

86. ¿Cuánto tiempo debe estar depositado un capital a un interés compuesto del 8 % para triplicarse si la capitalización es mensual?

Datos: $C_f = 3C_i$ € $r = 0{,}08$ Período de capitalización: mensual ($k = 12$)

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} \Rightarrow 3 = \left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{12t} \Rightarrow 12t\log 1{,}00667 = \log 3 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{12\log 1{,}00667} = 13{,}77 \text{ años.}$$

Debe estar 13 años y 9 meses.

Parámetros económicos y sociales

87. Calcula la TAE correspondiente al 6% anual con período de capitalización:

a) Semestral **b)** Trimestral **c)** Mensual

a) $\text{TAE} = \left[\left(1+\dfrac{0{,}06}{2}\right)^{2} - 1\right]\cdot 100 = 6{,}09\ \%$

b) $\text{TAE} = \left[\left(1+\dfrac{0{,}06}{4}\right)^{4} - 1\right]\cdot 100 = 6{,}14\ \%$

c) $\text{TAE} = \left[\left(1+\dfrac{0{,}06}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 = 6{,}17\ \%$

88. En la tabla aparecen los precios en 2012 y 2013 de los cuatro grupos de productos de la cesta de la compra tipo en un país y sus ponderaciones.

Grupo	2012	2013	Pond.
1	100	101	30%
2	106	105	25%
3	106	108	20%
4	120	130	25%

Calcula el IPC del año 2013 tomando como base el año 2012.

$$\text{IPC} = \frac{101\cdot 0{,}3 + 105\cdot 0{,}25 + 108\cdot 0{,}2 + 130\cdot 0{,}25}{100\cdot 0{,}3 + 106\cdot 0{,}25 + 106\cdot 0{,}2 + 120\cdot 0{,}25} = \frac{110{,}65}{107{,}7} = 1{,}0274$$

En el país considerado, los precios aumentaron un 2,74 % en el año 2013.

89. Determina el IDH de cada uno de los siguientes países y ordénalos según el grado de desarrollo.

País	*IEV*	*IE*	*II*
A	0,954	0,946	0,959
B	0,792	0,837	0,703
C	0,890	0,993	0,994

País *A*: $\text{IDH}_A = \sqrt[3]{0{,}954\cdot 0{,}946\cdot 0{,}959} = 0{,}953$

País *B*: $\text{IDH}_B = \sqrt[3]{0{,}792\cdot 0{,}837\cdot 0{,}703} = 0{,}775$

País *C*: $\text{IDH}_C = \sqrt[3]{0{,}890\cdot 0{,}993\cdot 0{,}994} = 0{,}958$

Por tanto, *C* > *A* > *B*, es decir, el país con mayor grado de desarrollo es *C*, seguido de *A*, y por último, *B*.

CUESTIONES

90. Si una cantidad se aumenta en un 5% y el resultado se disminuye también en un 5%, ¿cuál es el porcentaje de variación total?

$1{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975 \Rightarrow$ Baja en un 0,25%

91. Indica en cada caso la razón por la que las siguientes expresiones no tienen sentido.

a) $\log_1 2 = x$ **b)** $\log_3 -81 = x$ **c)** $\log_{-3} x = 9$ **d)** $\log_x \sqrt{2} = 0$

a) La base de un logaritmo tiene que ser estrictamente positiva y diferente de 1.

b) No existen los logaritmos de los números negativos.

c) La base debe ser estrictamente positiva y diferente de 1.

d) Si el resultado de un logaritmo, en cualquier base, es cero, dicho número vale 1.

92. Justifica cuál de los dos procedimientos siguientes es correcto para calcular el precio inicial de unos pantalones que han sido rebajados en un 15% y se ha pagado finalmente 23,45 €:

A. $\dfrac{23{,}45}{0{,}85} = 27{,}59$ € **B.** $23{,}45 \cdot 1{,}15 = 26{,}98$ €

Si llamamos x al precio inicial de los pantalones tenemos $0{,}85x = 23{,}45$, luego $x = \dfrac{23{,}45}{0{,}85} = 27{,}59$ €, es decir, el procedimiento correcto es el A.

93. Dada la progresión geométrica de primer término 50 y razón 0,75, calcula la suma de:

a) Sus 10 primeros términos

b) Sus 20 primeros términos

c) Sus 100 primeros términos

d) Sus 1000 primeros términos

¿Puedes indicar alguna conclusión interesante?

La suma de los primeros$n$ términos es $S_n = \dfrac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \dfrac{50(0{,}75^n - 1)}{-0{,}25} = 200(1 - 0{,}75^n)$, así:

a) $S_{10} = 200(1 - 0{,}75^{10}) = 188{,}74$

b) $S_{20} = 200(1 - 0{,}75^{20}) = 199{,}37$

c) $S_{100} = 200(1 - 0{,}75^{100}) = 200$

d) $S_{1000} = 200(1 - 0{,}75^{1000}) = 200$

La suma se aproxima cada vez más a 200 y nunca supera esta cifra.

94. Calcula el capital en que se convierte 1 € al cabo de un año colocado al 1% anual de interés compuesto durante un año si la capitalización es de:

a) Un año

b) Un trimestre

c) Un mes

d) Un día

e) Una hora

f) Un minuto

a) $C_f = 1 \cdot (1 + 0{,}01)^1 = 1{,}01$ €

b) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}01}{4}\right)^4 = 1{,}010038$ €

c) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}01}{12}\right)^{12} = 1{,}010046$ €

d) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}01}{365}\right)^{365} = 1{,}010050$ €

e) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}01}{365 \cdot 24}\right)^{365 \cdot 24} = 1{,}010050$ €

f) $C_f = 1 \cdot \left(1 + \dfrac{0{,}01}{365 \cdot 24 \cdot 60}\right)^{365 \cdot 24 \cdot 60} = 1{,}010050$ €

95. La TAE correspondiente a un interés nominal anual con periodo de capitalización semestral es del 8,16%. Hallala TAE para eses mismo interés nominal anual pero para un periodo de capitalización mensual.

$$\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{r}{2}\right)^2 - 1\right]\cdot 100 = 8{,}16 \Rightarrow \left(1+\frac{r}{2}\right)^2 = 1{,}0816 \Rightarrow 1+\frac{r}{2} = 1{,}04 \Rightarrow r = 0{,}08$$

$$\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 = 8{,}3\ \%$$

PROBLEMAS

96. Eva ha pagado 18,75 € por una falda, 22,25 €, por un pantalón, 19,50 €, por una camisa, y, por último, 29,15 €, por una chaqueta. El dueño del comercio consiente en rebajarle el precio de forma que le perdona los céntimos que marca cada una de las prendas. ¿Qué porcentaje de rebaja ha supuesto?

$$\frac{0{,}75+0{,}25+0{,}5+0{,}15}{18{,}75+22{,}25+19{,}5+29{,}15} = 0{,}018 \Rightarrow \text{Le rebaja el } 1{,}8\%.$$

97. Una cooperativa recibe un depósito de 2000 € de cada uno de sus socios y se compromete a devolverlo trascurridos 3 años y 4 meses, junto con un interés simple del 5% anual. ¿Qué cantidad devolverá a cada socio?

Datos: $C_i = 2000$ $r = 0{,}05$ $t = 3{,}3333$ años

$C_f = C_i\left(1+rt\right) = 2000\cdot\left(1+0{,}05\cdot 3{,}3333\right) = 2333{,}33$ €. La cooperativa devuelve 2333,33 € a cada socio.

98. El precio de la gasolina ha variado en las últimas 3 quincenas. En la primera subió un 3 %, en la segunda bajó un 2% y en la tercera volvió a subir un 4%. Después de las 3 quincenas, el precio del litro es de 145 CENT.

a) ¿Cuál era el precio antes de las tres variaciones?

b) ¿Cuál es el porcentaje de variación global del precio en las tres quincenas?

a) Si *x* es el precio del litro hace 3 quincenas, tenemos $1{,}03\cdot 0{,}98\cdot 1{,}04x = 145 \Rightarrow x = 138{,}12$ CENT.

b) $1{,}03\cdot 0{,}98\cdot 1{,}04 = 1{,}0498 \Rightarrow$ La gasolina ha subido un 4,98 %.

99. Se colocan 6000 € al 4 % anual de interés compuesto durante cinco años. La entidad carga 1 céntimo de euro cada vez que tiene que calcular los intereses generados y acumularlos al capital.

a) Calcula el capital final si el período de capitalización es de un año, un trimestre, un mes y un día.

b) ¿Cuál de los períodos de capitalización indicados favorece más al cliente?

a) Período de capitalización anual: $C_f = 6000\cdot\left(1+0{,}04\right)^5 - 0{,}01\cdot 5 = 7299{,}92 - 0{,}05 = 7299{,}87$ €

Período de capitalización trimestral: $C_f = 6000\cdot\left(1+\dfrac{0{,}04}{4}\right)^{20} - 0{,}01\cdot 20 = 7321{,}14 - 0{,}2 = 7320{,}94$ €

Período de capitalización mensual: $C_f = 6000\cdot\left(1+\dfrac{0{,}04}{12}\right)^{60} - 0{,}01\cdot 60 = 7325{,}98 - 0{,}6 = 7325{,}38$ €

Período de capitalización diario: $C_f = 6000\cdot\left(1+\dfrac{0{,}04}{365}\right)^{1825} - 0{,}01\cdot 1825 = 7328{,}34 - 18{,}25 = 7310{,}09$ €

b) El mejor periodo de capitalización en estas condiciones es el mensual.

100. Se ingresan 1050 € en una cuenta remunerada al 3,25 % de interés compuesto durante dos años. ¿Cuáles son los intereses producidos si se considera que el periodo de capitalización es el año? ¿Y si es el mes?

Datos: $C_i = 1050$ € $\quad r = 0{,}0325 \ t = 2$ años

Si el periodo de capitalización es anual, los intereses producidos son:

$$C_f - C_i = C_i(1+r)^t - C_i = 1050(1+0{,}0325)^2 - 1050 = 1119{,}36 - 1050 = 69{,}36 \text{ €}$$

Si el periodo de capitalización es mensual ($k = 12$), los intereses producidos son:

$$C_f - C_i = C_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - C_i = 1050\left(1+\frac{0{,}0325}{12}\right)^{24} - 1050 = 1120{,}42 - 1050 = 70{,}42 \text{ €}$$

101. El crecimiento de una población de bacterias sigue el mismo modelo que el crecimiento de un capital colocado a interés compuesto.

Calcula el número de bacterias de un determinado cultivo después de 84 días si se sabe que el número inicial era de 24 000 bacterias y que cada semana aumenta la población en un 5%.

Datos: $P_i = 24\,000$ bacterias $\quad$ Ritmo de crecimiento: $r = 0{,}05 \ t = \frac{84}{7} = 12$ semanas

$$P_f = P_i(1+r)^t = 24\,000(1+0{,}05)^{12} = 43\,100{,}55 \simeq 43\,101 \text{ bacterias}$$

102. El número de habitantes de una ciudad crece en un período de 3 años de acuerdo a una ley igual a la del interés compuesto. Si inicialmente la ciudad tenía 75 000 habitantes y el ritmo de crecimiento fue del 0,5% mensual, ¿cuál será la población al final de los 3 años?

Datos: $P_i = 75\,000$ habitantes $\quad$ Ritmo de crecimiento (mensual): $r = 0{,}005 \ t = 3$ años

$$P_f = P_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = 75\,000\left(1+0{,}005\right)^{36} = 89\,751 \text{ habitantes.}$$

103. Ana contrató un plan de pensiones a los 30 años en el que ha depositado 400 € cada año, a un tipo del 6,5 % anual.

a) Si ahora tiene 45 años, ¿qué cantidad recibiría si decidiera cancelar el plan?

b) ¿Con qué cantidad se encontrará cuando se jubile a los 67 años?

a) Datos: $a = 400 \ r = 0{,}065 \ t = 45 - 30 = 15$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} = \frac{400(1+0{,}065)\left[(1+0{,}065)^{15} - 1\right]}{0{,}065} = 10\,301{,}60 \text{ €}$$

b) Datos: $a = 400 \ r = 0{,}065 \ t = 67 - 30 = 37$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} = \frac{400(1+0{,}065)\left[(1+0{,}065)^{37} - 1\right]}{0{,}065} = 60\,810{,}75 \text{ €}$$

104. El precio de un ordenador se devalúa en un 25 % nada más comprarlo y después, cada año su valor baja un 4 % con respecto al valor del año anterior.

El ordenador que compró Miguel hace dos años está tasado en 897,87 €, ¿qué precio pagó Miguel por el ordenador cuando lo compró?

Si P_i es el precio original del ordenador, tras *t* años el precio será $P_f = 0{,}75P_i\left(1-0{,}04\right)^t$, por tanto, tenemos:

$$897{,}87 = 0{,}75P_i\left(1-0{,}04\right)^2 \Rightarrow P_i = \frac{897{,}87}{0{,}75\left(1-0{,}04\right)^2} = 1299 \text{ €.}$$

105. ¿Qué cantidad deberá entregar Pedro como anualidad a su plan de jubilación para que al cabo de 15 años haya conseguido un capital de 20 000 €? El tipo de interés es del 5,25 %.

Datos: $C = 20000$ € $\quad r = 0{,}0525 \quad t = 15$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow a = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]} = \frac{20000 \cdot 0{,}0525}{(1+0{,}0525)\left[(1+0{,}0525)^{15} - 1\right]} = 864{,}17 \text{ €}$$

106. Calcula la anualidad que se debe pagar para saldar una deuda de 12 000 € al 5,5% anual si:

a) El plazo es de 5 años. **b)** El plazo es de 10 años.

¿Por qué no se paga justo la mitad cuando el plazo para devolver la deuda es el doble?

a) Datos: $C = 12000$ € $\quad r = 0{,}055 \quad t = 5$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{12000 \cdot 0{,}055 \cdot (1+0{,}055)^5}{(1+0{,}055)^5 - 1} = 2810{,}12 \text{ €}$$

b) Datos: $C = 12000$ € $\quad r = 0{,}055 \quad t = 10$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{12000 \cdot 0{,}055 \cdot (1+0{,}055)^{10}}{(1+0{,}055)^{10} - 1} = 1592{,}01 \text{ €}$$

Al haber contraído una deuda con un plazo doble de largo se pagan más del doble de intereses.

107. Los pisos de una inmobiliaria cuestan 100 000 €. La forma de pago es la siguiente: 20 000 € a la entrega de llaves, y el resto, a pagar en 20 años con un interés del 3,25 %. Si los pagos se realizan al final de cada año:

a) ¿Cuánto se deberá pagar anualmente?

b) ¿Cuánto se habrá pagado en total por el piso cuando hayan transcurrido los 20 años?

a) Datos: $C = 80000$ € $\quad r = 0{,}0325 \quad t = 20$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{80000 \cdot 0{,}0325 \cdot (1+0{,}0325)^{20}}{(1+0{,}0325)^{20} - 1} = 5502{,}31 \text{ €}$$

b) $20000 + 20 \cdot 5502{,}31 = 130046{,}20$ €

108. Para adquirir un coche que cuesta 16 000 €, una persona entrega su coche anterior, valorado en 2000 €, y para el resto pide un préstamo a pagar en 3 años y a un interés compuesto del 8,5%. ¿Cuánto debe pagar anualmente?

Datos: $C = 14000$ € $\quad r = 0{,}085 \quad t = 3$ años $\Rightarrow a = \dfrac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \dfrac{14000 \cdot 0{,}085(1+0{,}085)^3}{(1+0{,}085)^3 - 1} = 5481{,}55$ €

109. En un folleto de propaganda de un banco se anuncia que un 1 € se convierte en 10 años en 1,5162 €.

a) Calcula el rédito que ofrece el banco.

b) Calcula la anualidad que se deberá pagar si se solicita un préstamo de 10 000 € a pagar en 10 años y al mismo tipo de interés que ofrece el banco en la propaganda.

a) Datos: $C_i = 1$ € $\quad C_f = 1{,}5162$ € $\quad t = 10$ años

$$C_f = C_i(1+r)^t \Rightarrow 1{,}5162 = 1 \cdot (1+r)^{10} \Rightarrow r = \sqrt[10]{1{,}5162} - 1 = 0{,}0425 \Rightarrow 4{,}25 \text{ \%}$$

b) Datos: $C = 10000$ € $\quad r = 0{,}0425$ € $\quad t = 10$ años

$$a = \frac{Cr(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{10000 \cdot 0{,}0425 \cdot (1+0{,}0425)^{10}}{(1+0{,}0425)^{10} - 1} = 1248{,}30 \text{ €}$$

110. En las siguientes operaciones el interés nominal es del 5 %. Calcula la TAE correspondiente.

a) Depósito de 1000 € con capitalización mensual a 10 años.

b) Depósito de 2000 € con capitalización mensual a 15 años.

c) Depósito de 3000 € con capitalización mensual a 20 años.

Los tres casos dan el mismo resultado:

$$TAE = \left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1\right]\cdot 100 = \left[\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 = 5{,}116\ \%$$

111. Un posible cliente solicita información en un banco sobre el tipo de interés que ofrecen en los depósitos. Le indican que la TAEde un depósito a 1 año es del 1,75 % y que las de un depósito a 5 años es de 2,15 %. Si el período de capitalización es el mes, ¿cuál es el tipo de interés nominal anual en cada caso?

En el primer caso tenemos:

$$TAE = \left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1\right]\cdot 100 \Rightarrow 1{,}75 = \left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 \Rightarrow \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} = 1{,}0175 \Rightarrow r = 12\left(\sqrt[12]{1{,}0175} - 1\right) = 0{,}0174$$

En el segundo caso tenemos:

$$TAE = \left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1\right]\cdot 100 \Rightarrow 2{,}15 = \left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} - 1\right]\cdot 100 \Rightarrow \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} = 1{,}0215 \Rightarrow r = 12\left(\sqrt[12]{1{,}0215} - 1\right) = 0{,}0213$$

Así, el interés nominal anual en el primer caso es del 1,74 % y en el segundo caso del 2,13 %.

112. En la tabla aparece el PIB (producto interior bruto) de un país en millones de euros y para los años que se indican. Calcula la tabla de números índice tomando como base los años 2007 y 2010.

Año	PIB
2007	14 080
2008	14 220
2009	14 500
2010	14 850
2011	15 120
2012	14 990
2013	14 850
2014	15 200

Año	Índice (base 2007)	Índice (base 2010)
2007	100	94,81
2008	100,99	95,76
2009	102,98	97,64
2010	105,47	100
2011	107,39	101,81
2012	106,46	100,94
2013	105,47	100
2014	107,95	102,36

113. En la tabla aparecen los productos, que componen una cesta de la compra tipo en un país, clasificados en grupos, su precio en los años 2013 y 2014, y su ponderación. Calcula el IPC de ese país en 2014 tomando como base el año 2013.

Grupo	2013	2014	Ponderación
Alimentos	118,2	119,0	28
Vestido	115,4	116,0	12
Vivienda	132,5	130,5	13
Medicina	123,0	122,3	4
Educación	122,0	123,1	8
Otros	130,1	131,2	35

$$\text{IPC} = \frac{119,0\cdot 28 + 116,0\cdot 12 + 130,5\cdot 13 + 122,3\cdot 4 + 123,1\cdot 8 + 131,2\cdot 35}{118,2\cdot 28 + 115,4\cdot 12 + 132,5\cdot 13 + 123,0\cdot 4 + 122,0\cdot 8 + 130,1\cdot 35} = \frac{12486,5}{12438,4} = 1,0039$$

114. Mediante dos anualidades de capitalización anual de 2000 € se forma un capital de 4212,40 €.Calcula el tipo de interés de la operación.

Datos: $a = 2000$ € $C = 4212,40$ € $t = 2$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow 4212,4 = \frac{2000(1+r)\left[(1+r)^2 - 1\right]}{r}$$, haciendo $x = 1+r$ obtenemos:

$$4212,4(x-1) = 2000x\left(x^2-1\right) = 2000x(x+1)(x-1) \Rightarrow (x-1)\left(2000x^2 + 2000x - 4212,4\right) = 0$$

La solución $x = 1 \Rightarrow r = 0$ no tiene sentido, por tanto, $x = \dfrac{-2000 \pm 6140}{4000} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,035 \Rightarrow r = 0,035 \\ x = -2,035 \text{ no válida} \end{cases}$.

Así, el interés anual es del 3,5 %.

115. La siguiente tabla muestra el importe, el plazo en años, y el interés medio de las hipotecas concedidas en España desde julio de 2007 ajulio de 2014.

	Capital	Plazo	Interés
2007	149 807,31	27	4,68
2008	139 675,85	24	5,27
2009	115 489,51	21	4,36
2010	121 561,61	23	3,77
2011	110 485,40	22	4,27
2012	99 364,93	22	4,24
2013	101 121,66	20	4,23
2014	100 865,90	21	3,90

a) Calcula para cada año la mensualidad a pagar.

b) Halla, para cada una de las hipotecas medias, el pago final que tiene que asumir el consumidor.

Para calcular la mensualidad a pagar en cada caso usamos la fórmula:

$$a = \frac{C\frac{r}{12}\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12t} - 1}$$

Donde$C$ es el capital, t es el plazo y r el interés (en tanto por uno).

Para calcular el pago total que asumen los consumidores multiplicamos cada mensualidad por 12 y por el plazo correspondiente.

Obtenemos así los valores de la tabla adjunta.

	Mensualidad	Pago total
2007	815,23	264 133,51
2008	855,62	246 417,54
2009	700,45	176 513,86
2010	659,30	181 966,70
2011	646,10	170 571,02
2012	579,45	152 974,56
2013	625,10	150 024,47
2014	586,91	147 901,50

116. En el recibo correspondiente a una mensualidad de un crédito hipotecario que el banco envía al interesado aparecen los siguientes datos.

- **Importe inicial: 72 121,45 €**
- **Deuda pendiente antes del pago: 48 633,01 €**
- **Tipo de interés: 4,564% anual**
- **Períodos pendientes: 85**
- **Mensualidad: 670,69 €**

a) Comprueba que la mensualidad es correcta.

b) Calcula qué parte de la mensualidad corresponde a los intereses y qué parte a la amortización de capital.

c) Calcula la deuda pendiente después de pagar la mensualidad.

d) En la siguiente cuota, el interesado ingresa6000 € más en concepto de adelanto de capital y opta por reducir la cuota manteniendo el número de pagos pendientes. ¿Cuál será la nueva cuota?

a) $a = \dfrac{C\dfrac{r}{12}\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}-1} = \dfrac{48\,633{,}01\cdot\dfrac{0{,}04564}{12}\left(1+\dfrac{0{,}04564}{12}\right)^{85}}{\left(1+\dfrac{0{,}04564}{12}\right)^{85}-1} = 670{,}69$ €

b) Intereses: $48633{,}01\cdot\dfrac{0{,}04564}{12} = 184{,}97$ € Amortización: $670{,}69-184{,}97 = 485{,}72$ €

c) Deuda pendiente: $48633{,}01-485{,}72 = 48147{,}29$ €

d) En la siguiente cuota la deuda pendiente es 48 147,29 € y se paga una mensualidad de 670,69 €, de la cual la parte correspondiente a los intereses es $48147{,}29\cdot\dfrac{0{,}04564}{12} = 183{,}12$ € y la parte correspondiente a la amortización del capital es $670{,}69-183{,}12 = 487{,}57$ €.

Como además se amortizan 6000 € más, la nueva deuda será $48147{,}29-487{,}57-6000 = 41659{,}72$ € y, puesto que quedarían 83 pagos pendientes, la nueva cuota será de:

$$a = \dfrac{C\dfrac{r}{12}\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\dfrac{r}{12}\right)^{12t}-1} = \dfrac{41659{,}72\cdot\dfrac{0{,}04564}{12}\cdot\left(1+\dfrac{0{,}04564}{12}\right)^{83}}{\left(1+\dfrac{0{,}04564}{12}\right)^{83}-1} = 586{,}25 \text{ €}$$

117. **En la tabla se recoge el precio medio en euros por metro cuadrado de la vivienda.**

Enero	205 400
Febrero	206 600
Marzo	206 900
Abril	207 700
Mayo	211 000
Junio	211 200
Julio	212 400
Agosto	212 500
Septiembre	212 800
Octubre	213 500
Noviembre	214 000
Diciembre	214 600

Calcula los números índice para las referencias de enero, por una parte, y de comienzo de trimestre, por otra.

Referencia de enero

Enero	205 400	100
Febrero	206 600	100,58
Marzo	206 900	100,73
Abril	207 700	101,12
Mayo	211 000	102,73
Junio	211 200	102,82
Julio	212 400	103,41
Agosto	212 500	103,46
Septiembre	212 800	103,60
Octubre	213 500	103,94
Noviembre	214 000	104,19
Diciembre	214 600	104,48

Referencia de comienzo de trimestre

Enero	205 400	100
Febrero	206 600	100,58
Marzo	206 900	100,73
Abril	207 700	100
Mayo	211 000	101,59
Junio	211 200	101,69
Julio	212 400	100
Agosto	212 500	100,05
Septiembre	212 800	100,19
Octubre	213 500	100
Noviembre	214 000	100,23
Diciembre	214 600	100,52

ENTORNO MATEMÁTICO

El premio

Raquel es una gran estudiosa. Le gusta la literatura, la historia, la geografía, el arte, le gusta la política, la economía, la sociología, le gusta la ciencia, el cine y le gusta leer… ¡le gusta estudiar! Pero, sobre todo, le gusta ¡¡la música clásica!! Ha escuchado tanta música que, la mayoría de las veces, identifica una pieza con solo oír sus primeros compases. Raquel es una gran melómana.

Un día, escuchando la radio, oye que se va a iniciar un nuevo concurso televisivo con grandes premios para aquellos que tengan conocimientos de música clásica. El premio máximo asciende a ¡200 000 €! para el que consiga llegar a la final y conteste acertadamente a las 25 piezas musicales que se le propondrá. Debe acertar tanto el título de la obra como el autor. Raquel decide presentarse y… ¡consigue ganar el premio!

¿Qué se puede hacer con 200 000 €? –se pregunta Raquel. Tal vez, este dinero le diera para una buena temporada sin preocupaciones y poder dedicarse a sus numerosas aficiones intelectuales.

En el banco, le proponen ingresar el dinero con un interés anual del 6%. Raquel podrá sacar una cantidad fija cada mes para sus gastos hasta que se acabe el dinero depositado y los intereses generados (en realidad, es como si Raquel fuera el banco y el banco un cliente que pide un préstamo de 200 000 € a Raquel).

a) Si Raquel quiere tener dinero para 15 años, ¿cuánto podrá sacar cada mes?

b) Si Raquel quiere disponer de 3000 € cada mes, ¿para cuántos meses tendrá dinero?

c) Si Raquel quiere que nunca se agote el dinero, ¿cuánto podrá sacar como máximo cada mes? En este caso y si decide retirar todo el dinero al cabo de 10 años, ¿cuánto le quedará?

d) Durante los dos primeros años ha estado sacando 1500 € mensuales. Pasado este tiempo decide sacar 1000 € mensuales, ¿cuántos años podrá contar con esa mensualidad?

Raquel quiere controlar la evolución de su inversión y para ello elabora una hoja de cálculo:

	A	B	C	D	E	F
1	Periodo	Mensualidad	Queda antes	Intereses	Gastado	Queda después
2	1		200 000			
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					
8	7					
9	8					
10	…					

Raquel introduce en la casilla B2 la mensualidad que quiere sacar.

e) ¿Qué fórmula debe introducir en la casilla D2 sabiendo que el interés anual es del 6% y la capitalización mensual?

f) ¿Qué fórmula debe introducir en la casilla E2? ¿Y en la F2?

g) ¿Qué fórmulas debe introducir en la segunda fila B3-F3?

A partir de la siguiente fila, simplemente tiene que copiar las casillas correspondientes de la fila anterior para poder estudiar la evolución del préstamo.

Una vez elaborada la tabla:

h) Investiga la evolución del préstamo introduciendo diferentes opciones.

i) Contesta a las preguntas de los apartados a, b, c y d de esta misma página.

a) $m = \dfrac{200\,000 \cdot \dfrac{0,06}{12} \cdot \left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12\cdot 15}}{\left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12\cdot 15} - 1} = 1687,71$ €

b) $3000 = \dfrac{200\,000 \cdot \dfrac{0,06}{12} \cdot \left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12t} - 1} = \dfrac{1000 \cdot 1,005^{12t}}{1,005^{12t} - 1} \Rightarrow 3000 \cdot 1,005^{12t} - 3000 = 1000 \cdot 1,005^{12t} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2000 \cdot 1,005^{12t} = 3000 \Rightarrow 1,005^{12t} = 1,5 \Rightarrow t = \dfrac{\log 1,5}{12 \cdot \log 1,005} = 6,77$ años $\simeq 81$ meses

c) Para que nunca se agote el dinero, Raquel debe sacar justo los intereses producidos en un mes, es decir, $200\,000 \cdot \dfrac{0,06}{12} = 1000$ €.En este caso, en cualquier momento dispondrá de los 200 000 € iniciales.

d) Contestaremos esta pregunta al final, ayudados de la hoja de cálculo.

e) D2→=C2*0,06/12

f) E2→=B2–D2 y F2→=C2–E2

g) En B3 debe introducir la mensualidad que desea sacar en ese periodo, si suponemos que siempre saca la misma mensualidad podemos poner B3→=B2.

En C3 hay que poner la cantidad que aparece en F2, es decir, C3→=F2

En D3, E3 y F3 podemos copiar las fórmulas de D2, E2 y F2 respectivamente, es decir, D3→=C3*0,06/12; E3→=B3–D3y F3→=C3–E3.

i) Podemos contestar ahora los apartados a, b, c y d ayudados de la hoja de cálculo. En particular responderemos al apartado d.

Si introducimos una mensualidad de 1500 € durante 24 periodos (dos años) obtenemos que el capital que queda tras esos dos primeros años es 187 284,02 €, por tanto, el dinero todavía durará:

$$1000 = \dfrac{187\,284,02 \cdot \dfrac{0,06}{12} \cdot \left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12t}}{\left(1+\dfrac{0,06}{12}\right)^{12t} - 1} = \dfrac{936,42 \cdot 1,005^{12t}}{1,005^{12t} - 1} \Rightarrow 1000 \cdot 1,005^{12t} - 1000 = 936,42 \cdot 1,005^{12t} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 63,5799 \cdot 1,005^{12t} = 1000 \Rightarrow 1,005^{12t} = 15,7282 \Rightarrow t = \dfrac{\log 15,7282}{12 \cdot \log 1,005} = 46,04 \simeq 46$ años

	A	B	C	D	E	F
1	Periodo	Mensualidad	Queda antes	Intereses	Gastado	Queda después
2	1	1500,00	200000,00	1000,00	500,00	199500,00
3	2	1500,00	199500,00	997,50	502,50	198997,50
4	3	1500,00	198997,50	994,99	505,01	198492,49
5	4	1500,00	198492,49	992,46	507,54	197984,95
6	5	1500,00	197984,95	989,92	510,08	197474,87
…	…	…	…	…	…	…
21	20	1500,00	190060,14	950,30	549,70	189510,44
22	21	1500,00	189510,44	947,55	552,45	188957,99
23	22	1500,00	188957,99	944,79	555,21	188402,78
24	23	1500,00	188402,78	942,01	557,99	187844,80
25	24	1500,00	187844,80	939,22	560,78	187284,02

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Calcula el valor del logaritmo $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{9}$

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{9} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[4]{9} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{9} = -\frac{1}{2}$$

2. Elimina los logaritmos en la siguiente expresión y calcula el valor de *a*:

$$-1 + \log a = \log 2 + 3\log 3$$

$$-1 + \log a = \log 2 + 3\log 3 \Rightarrow \log a = 1 + \log 2 + \log 3^3 = \log\left(10 \cdot 2 \cdot 3^3\right) \Rightarrow a = 10 \cdot 2 \cdot 3^3 = 540$$

3. Sabiendo que $\log 3 = 0{,}477$. Calcula, sin utilizar la calculadora, $\log 0{,}090$.

$$\log 0{,}090 = \log\frac{9}{100} = \log 9 - \log 100 = \log 3^2 - 2 = 2\log 3 - 2 = 2 \cdot 0{,}477 - 2 = -1{,}046$$

4. El precio de una *tablet* pierde un 40 % de su valor al comprarla y después cada año que pasa pierde un 5% del valor que tenía el año inmediatamente anterior. Una *tablet* con tres años vale 90 €, ¿cuánto costó al comprarla?

Si P_i es el precio original de la *tablet*, tras *t* años el precio será $P_f = 0{,}6P_i\left(1 - 0{,}05\right)^t$, por tanto, tenemos:

$$90 = 0{,}6P_i\left(1 - 0{,}05\right)^3 \Rightarrow P_i = \frac{90}{0{,}6 \cdot 0{,}95^3} = 174{,}95 \text{ €}$$

5. Calcula la suma de los 15 primeros términos de la progresión: 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$,…

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 9$ y $r = \frac{1}{3}$, por tanto:

$$S_{15} = \frac{a_1\left(r^{15} - 1\right)}{r - 1} = \frac{9\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{15} - 1\right]}{\frac{1}{3} - 1} = 13{,}5$$

6. Calcula la diferencia de intereses ganados al colocar 1250 € al 5% de interés anual durante 3 años si el interés aplicado es simple o compuesto con capitalización anual.

Datos: $C_i = 1250$ € $\quad r = 0{,}05 \;\; t = 3$ años

<u>Interés simple</u>: $I = C_i rt = 1250 \cdot 0{,}05 \cdot 3 = 187{,}5$ €

<u>Interés compuesto</u>: $I = C_i\left(1 + r\right)^t = 1250 \cdot (1 + 0{,}05)^3 - 1250 = 197{,}03$ €

Por tanto, la diferencia de intereses es $197{,}03 - 187{,}5 = 9{,}53$ €

7. **¿Qué anualidad ha de entregarse al principio de cada año para reunir un capital de 15 000 € después de 8 años a un interés del 5%?**

Datos: $C = 15000$ € $r = 0{,}05$ $t = 8$ años

$$C = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]}{r} \Rightarrow a = \frac{Cr}{(1+r)\left[(1+r)^t - 1\right]} = \frac{15000 \cdot 0{,}05}{(1+0{,}05)\left[(1+0{,}05)^8 - 1\right]} = 1496{,}03 \text{ €}$$

8. **¿Qué anualidad ha de entregarse al principio de cada mes para saldar una deuda inicial de 25 000 € en 6 años a un interés anual del 4 %?**

Datos: $C = 25000$ € $r = 0{,}04$ $t = 6$ años Pagos: Mensuales ($k = 12$)

$$a = \frac{C \cdot \frac{r}{k} \cdot \left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} - 1} = \frac{25000 \cdot \frac{0{,}04}{12} \cdot \left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{72}}{\left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{72} - 1} = 391{,}13 \text{ €}$$

9. **Calcula el TAE correspondiente al 7,5 % anual con periodo de capitalización cuatrimestral.**

$$\text{TAE} = \left[\left(1+\frac{r}{k}\right)^k - 1\right] \cdot 100 = \left[\left(1+\frac{0{,}075}{3}\right)^3 - 1\right] \cdot 100 = 7{,}69\,\%$$

10. **Calcula el número de años necesarios para que se triplique una cantidad colocada al 10 % anual con capitalización mensual.**

Datos: $C_f = 3C_i$ € $r = 0{,}1$ Periodo de capitalización: Mensual ($k = 12$)

$$C_f = C_i\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} \Rightarrow 3C_i = C_i\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{12t} \Rightarrow \left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{12t} = 3 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{12\log\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)} = 11{,}03 \text{ años}$$

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Una cantidad se aumenta en un 12% y, después, el resultado se disminuye también en un 12%. El valor de la cantidad final es:**

A. Superior a la inicial
B. Inferior a la inicial
C. Igual que la inicial
D. Ninguna de las anteriores

$1{,}12 \cdot 0{,}88 = 0{,}9856$, por tanto, el precio inicial ha disminuido un 1,44 %, la respuesta B.

2. **La suma de las 10 primeras potencias de 2 (contando que la primera es 2^0) es:**

A. $2^{10}-2$
B. $2^9 - 2$
C. $2^9 + 2$
D. Ninguna de las anteriores

Se trata de una progresión geométrica con $a_1 = 1$ y $r = 2$, por tanto:

$$S_{10} = \frac{a_1\left(r^{10}-1\right)}{r-1} = \frac{1\cdot\left(2^{10}-1\right)}{2-1} = 2^{10} - 1$$, la respuesta D.

3. **Si por unos pantalones se han pagado 27 € habiendo sufrido dos rebajas consecutivas en su precio del 20 % y del 25 %, su precio inicial era:**

A. 39,15 € **B.** 40,50 € **C.** 45 € **D.** 49,09 €

Si x es el precio inicial de los pantalones, tenemos:

$0,75 \cdot 0,8x = 27 \Rightarrow x = \dfrac{27}{0,75 \cdot 0,8} = 45$ €, la respuesta C.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:**

A. La TAE es igual al interés nominal cuando el periodo de capitalización es anual.

B. Las progresiones geométricas son siempre crecientes.

C. Las cuatro quintas partes de una cantidad equivalen al 80% de esta cantidad.

D. El tipo de interés compuesto no puede ser inferior al 1% anual.

Las afirmaciones A y C son verdaderas.

La afirmación B es falsa, basta considerar cualquier progresión geométrica de razón $r < 1$.

D también es falsa, nada impide que, por ejemplo, $r = 0,5$ % anual

5. **Para un cliente que acude a una entidad financiera, el tipo de interés indicado en *A* es preferible al tipo de interés indicado en *B*.**

A. *A*: Simple al 4 % anual

B: Compuesto al 4 % anual

B. *A*: Compuesto al 4 % anual con capitalización anual

B: Compuesto al 4 % anual con capitalización mensual

C. *A*: Compuesto al 4 % anual con capitalización mensual

B: TAE 4,075

D. *A*: Compuesto al 4 % anual con capitalización diaria

B: TAE 4,075

Depende de a qué acude, suponiendo que es a realizar un depósito:

A es falso, ya que con interés compuesto, los intereses generados se acumulan para generar nuevos intereses, por lo que la opción *A* nunca será mejor que la *B*.

B también es falsa, en la opción *B* vamos generando intereses mensualmente, que se acumulan generando nuevos intereses mes a mes, por lo que esta opción es mejor que la opción *A*.

C también es falsa, ya que la opción *A* equivale a un

$$\text{TAE} = \left[\left(1 + \frac{0,04}{12}\right)^{12} - 1\right] \cdot 100 = 4,074 \ \%$$

D es verdadera, ya que la opción *A* equivale a un

$$\text{TAE} = \left[\left(1 + \frac{0,04}{365}\right)^{365} - 1\right] \cdot 100 = 4,081 \ \%$$

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. Se está calculando el $\log_a 2$. Se consideran las afirmaciones:

1. La base *a* es positiva e inferior a la unidad.

2. El resultado es un número real negativo.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

C. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

D. Nada de lo anterior.

$\log_a 2 = \dfrac{\log 2}{\log a}$ y $\log 2 > 0$, por tanto, si $0 < a < 1$ tenemos $\log a < 0$ y así $\log_a 2 < 0$; recíprocamente, si $\log_a 2 < 0$ tenemos $\log a < 0$ y así $0 < a < 1$. Por tanto, la relación correcta es A.

Señala el dato innecesario para contestar

7. Se quiere calcular la TAE correspondiente a un interés nominal anual. Para ello se dan los siguientes datos:

1. El *r* % anual

2. El capital invertido

3. El tiempo que dura la inversión

4. El tipo de capitalización

A. Sobran los datos 1 y 2.

B. Sobran los datos 2 y 3.

C. Sobran los datos 3 y 4.

D. El primer dato es innecesario.

Como $\text{TAE} = \left[\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^k - 1\right]\cdot 100$, donde *r* es el interés anual en tanto por uno y *k* el tipo de capitalización, la respuesta correcta es B.