10 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE DISCRETA. LA BINOMIAL

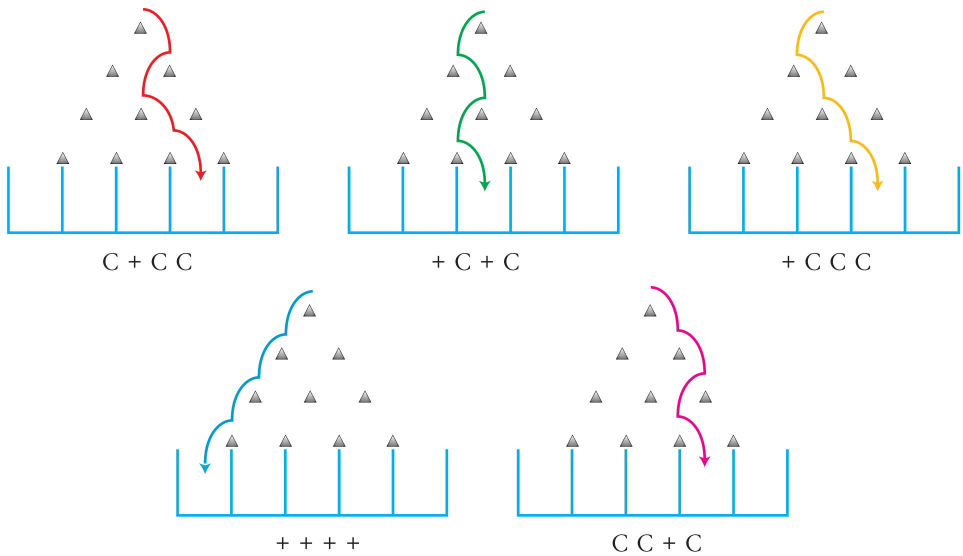
Página 243

REFLEXIONA Y RESUELVE

Recorrido de un perdigón

■ **Dibuja los recorridos correspondientes a:**

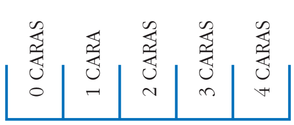
C + C C, + C + C, + C C C, + + + +, C C + C



■ ***Observa que todos los recorridos que constan de 3 CARAS y 1 CRUZ llegan al mismo casillero.***

Comprueba que ocurre lo mismo en los recorridos que tienen 2 CARAS y 2 CRUCES o bien 1 CARA y 3 CRUCES.

Por eso, cada uno de los cinco casilleros queda caracterizado por el número de CARAS que se necesitan para llegar a él.



Dos caras y dos cruces significaría ir dos veces a la derecha y dos a la izquierda.

Una cara y tres cruces es una vez a la derecha y tres a la izquierda.

¿Cuántos perdigones en cada casillero?

- **¿Cuáles son las probabilidades de que un perdigón caiga en cada uno de los 6 casilleros en un aparato de Galton con 5 filas de topes?**

  Fila 5.ª → 1 5 10 10 5 1

- **¿Y en un aparato de Galton con 6 filas?**

  Fila 6.ª → 1 6 15 20 15 6 1

Página 246

1. En una bolsa hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar tres de ellas, las tres sean impares?

a) Si las extracciones son con reemplazamiento.

b) Si las extracciones son sin reemplazamiento.

a) $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$

b) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$

Página 249

1. Completa la siguiente tabla y halla los parámetros μ y σ:

x_i	0	10	50	100
p_i	0,9	0,06		0,01

$P[50] = 1 - (0,9 + 0,06 + 0,01) =$

$= 1 - 0,97 = 0,03$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,90	0	0
10	0,06	0,6	6
50	0,03	1,5	75
100	0,01	1	100
	1,00	3,1	181

$\mu = \Sigma p_i x_i = 3,1$

$\sigma = \sqrt{\Sigma p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{181 - 3,1^2} = 13,09$

2. **Describe, mediante una tabla x_i, p_i, la distribución del "número de caras" al lanzar 3 monedas. Halla los parámetros μ y σ.**

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	1/8	0	0
1	3/8	3/8	3/8
2	3/8	6/8	12/8
3	1/8	3/8	9/8
	8/8 = 1	12/8 = 1,5	24/8 = 3

$\mu = \Sigma p_i x_i = 1{,}5$

$\sigma = \sqrt{\Sigma p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{3 - 1{,}5^2} = 0{,}87$

3. **En una lotería de 1 000 números se reparten los premios siguientes:**

- **A un número elegido al azar, 5 000 €.**
- **Al anterior y al posterior, 1 000 €.**
- **A los 99 que terminan en la misma cifra que el ganador, 10 €.**
- **Al resto de números, nada.**

a) Haz la tabla con los valores 0, 10, 1 000 y 5 000 con sus correspondientes probabilidades.

b) Calcula los parámetros μ y σ.

a) No ganan nada 1 000 – 3 – 99 = 898

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
0	0,898	0	0
10	0,099	0,99	9,9
1 000	0,002	2	2 000
5 000	0,001	5	25 000
	1,000	7,99	27 009,9

b) $\mu = \Sigma p_i x_i = 7{,}99$

$\sigma = \sqrt{\Sigma p_i x_i^2 - \mu^2} = \sqrt{27\,009{,}9 - 7{,}99^2} = 164{,}15$

Página 251

1. ¿Qué valores puede tomar la variable x en cada distribución de los ejemplos 1, 2, 3, 5 y 7 anteriores?

Ejemplo 1 $\to$ $x = 0, 1, 2, \dots, 10$

Ejemplo 2 $\to$ $x = 0, 1, 2, \dots, 6$

Ejemplo 3 $\to$ $x = 0, 1, \dots, 100$

Ejemplo 5 $\to$ $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Ejemplo 7 $\to$ $x = 0, 1, \dots, 100$

2. Inventa experiencias parecidas a las de los ejemplos 4 y 6, pero que sí sean binomiales.

Por ejemplo:

4. Extraemos una carta de una baraja, vemos si es o no OROS y la devolvemos al mazo. Barajamos y extraemos otra carta. Repetimos la experiencia cinco veces.

   $n = 5;\ p = 0{,}1 \quad \to \quad B(5;\ 0{,}1)$

6. Nos preguntamos cuántos partidos ganará un equipo A que juega con un equipo B, de modo que la probabilidad de ganar se mantenga constante los 6 partidos consecutivos que jugarán.

   $n = 6;\ p = 0{,}5 \quad \to \quad B(6;\ 0{,}5)$

Página 253

1. En una distribución binomial $B(10;\ 0{,}4)$, halla $P[x = 0]$, $P[x = 3]$, $P[x = 5]$, $P[x = 10]$ y el valor de cada uno de los parámetros μ y σ.

$P[x = 0] = 0{,}6^{10} = 0{,}006047$

$P[x = 3] = \binom{10}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 120 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}215$

$P[x = 5] = \binom{10}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 = 252 \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}201$

$P[x = 10] = 0{,}4^{10} = 0{,}000105$

$\mu = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

$\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{2{,}4} = 1{,}55$

2. Lanzamos 7 monedas. Calcula las probabilidades de 3 caras, 5 caras y 6 caras. Halla los valores de μ y σ.

Se trata de una distribución binomial con $n = 7$ y $p = 0{,}5 \quad \to \quad B(7;\ 0{,}5)$

$P[x = 3] = \binom{7}{3} \cdot (0{,}5)^3 \cdot (0{,}5)^4 = 35 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}0625 \approx 0{,}273$

$P[x = 5] = \binom{7}{5} \cdot (0{,}5)^5 \cdot (0{,}5)^2 = 21 \cdot 0{,}03125 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}164$

$P[x = 6] = \binom{7}{6} \cdot (0{,}5)^6 \cdot (0{,}5) = 7 \cdot 0{,}015625 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}0547$

$\mu = n\,p = 7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$

$\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} \approx 1{,}323$

Página 255

1. Un profesor de idiomas tiene una clase con cuatro alumnos adultos. De los 100 días de clase, asisten 4, 3, 2, 1 o ninguno de ellos, según la tabla adjunta. Ajusta los datos a una distribución binomial y di si te parece que el ajuste es bueno o no.

x_i	4	3	2	1	0
f_i	23	48	17	9	3

La media es $\bar{x} = 2{,}79$.

Como $n = 4$, $\bar{x} = np \to 2{,}79 = 4p \to p = 0{,}6975$

Si fuera una binomial, $p = 0{,}6975$ sería la probabilidad de que uno cualquiera de los alumnos asistiera un día a clase. $q = 0{,}3025$.

Con este valor de p se obtiene la siguiente tabla:

x_i	$p_i = P[x = x_i]$	$100 \cdot p_i$	VALORES ESPERADOS	VALORES OBSERVADOS	|DIFERENCIAS|
0	$q^4 = 0{,}008$	0,8	1	3	2
1	$4\,p\,q^3 = 0{,}077$	7,7	8	9	1
2	$6\,p^2\,q^2 = 0{,}267$	26,7	27	17	10
3	$4\,p^3\,q = 0{,}411$	41,1	41	48	7
4	$p^4 = 0{,}237$	23,7	24	23	1

La mayor de las diferencias es 10. Es demasiado grande en comparación con el total, 100. Hemos de rechazar la hipótesis de que se trata de una binomial.

Página 259

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Cálculo de probabilidades

1 **Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) 2 ases.

b) Ningún as.

c) Algún as.

a) $\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$

b) $\frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$

c) $1 - \frac{21}{26} = \frac{5}{26}$

2 **Se lanzan tres monedas y se cuenta el número de caras que salen. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) Una cara.

b) Más de una cara.

a) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$

b) $P[\text{dos caras}] + P[\text{tres caras}] = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

3 **En un examen hay que contestar a 2 temas elegidos al azar entre 30. Un alumno ha estudiado solo 12 de los 30 temas. Halla la probabilidad de que:**

a) El alumno haya estudiado los dos temas elegidos.

b) Solo haya estudiado uno de los dos temas elegidos.

c) No haya estudiado ninguno de los dos temas elegidos.

a) $P[\text{sepa el 1.° y el 2.°}] = P[\text{sepa el 1.°}] \cdot P[\text{sepa el 2.°/sabía el 1.°}] =$

$$= \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{22}{145} = 0{,}15$$

b) $P[\text{solo uno}] = 2 \cdot P[\text{sepa el 1.° y no el 2.°}] = 2 \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{18}{29} = \frac{72}{145} = 0{,}50$

c) $P[\text{ninguno}] = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{51}{145} = 0{,}35$

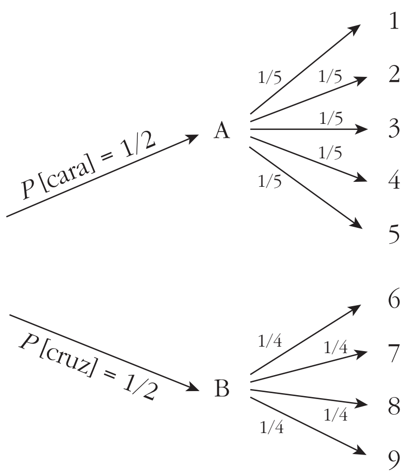
4 **En una urna A hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y en otra urna B hay 4 bolas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda: si sale cara, se extrae una bola de la urna A, y si sale cruz, se extrae una bola de la urna B. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea:**

a) La que lleva el número 5.

b) La que lleva el número 8.

c) Una que lleve un número par.

Hacemos un diagrama en árbol para calcular fácilmente las probabilidades:



a) $P[5] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

b) $P[8] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

c) $P[\text{par}] = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{5} + 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{20} = 0{,}45$

5 **Extraemos al azar una ficha de un dominó normal (28 fichas) y sumamos los puntos de sus dos mitades.**

Calcula la probabilidad de que la suma de puntos sea 6.

Hay 4 fichas en las que la suma de puntos es 6:

0–6   1–5   2–4   3–3

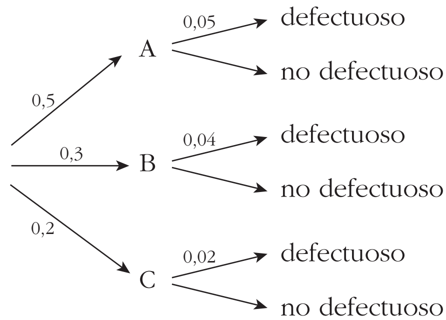
El total de fichas es 28, luego la probabilidad pedida es:

$$\frac{4}{28} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14$$

6 **Una fábrica tiene tres máquinas que fabrican tornillos. La máquina A produce el 50% del total de tornillos; la máquina B, el 30%, y la C, el 20%. De la máquina A salen un 5% de tornillos defectuosos; de la B, un 4%, y de la C, un 2%.**

Calcula la probabilidad de que un tornillo elegido al azar sea defectuoso.

Hacemos un diagrama en árbol:



$$P\,[\text{defectuoso}] = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}2 \cdot 0{,}02 = 0{,}041$$

Distribuciones de probabilidad

7 **Completa la siguiente tabla de probabilidades y calcula sus parámetros:**

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	…	0,1

$0{,}1 + 0{,}3 + P[2] + 0{,}1 = 1 \;\rightarrow\; P[2] = 0{,}5$

x_i	p_i	$x_i\, p_i$	$p_i\, x_i^2$
0	0,1	0	0
1	0,3	0,3	0,3
2	0,5	1	2
3	0,1	0,3	0,9
		$\Sigma x_i\, p_i = 1{,}6$	$\Sigma p_i\, x_i^2 = 3{,}2$

$\mu = \Sigma\, x_i\, p_i = 1{,}6$

$\sigma = \sqrt{3{,}2 - 1{,}6^2} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8$

8 **Sacamos dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases (0, 1 ó 2).**

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcula la media y la desviación típica.

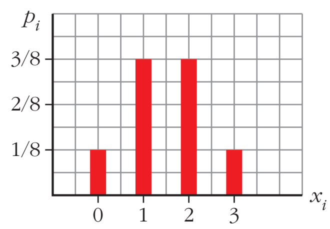
a)

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39}$	$2 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{36}{39}$	$\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39}$

b) $\mu = 0{,}2$; $\sigma = 0{,}42$

9 **Se lanzan tres monedas y se cuenta el número de caras obtenidas. Haz una tabla con las probabilidades, represéntala gráficamente y calcula la media y la desviación típica.**

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



$\mu = 1{,}5$; $\sigma = 0{,}87$

10 **Recuerda cuáles son las puntuaciones de las 28 fichas de un dominó. Si en cada una de ellas sumamos los puntos de sus dos mitades, obtenemos las posibles sumas 0, 1, 2, …, 10, 11 y 12 con probabilidades distintas. Haz la tabla con la distribución de probabilidades y calcula μ y σ.**

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{2}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

$\mu = 6$; $\sigma = 3$

11 **Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Se hacen dos extracciones sin reemplazamiento y se anota el número de bolas rojas extraídas.**

a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.

b) Haz otra tabla suponiendo que hay reemplazamiento.

a)

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$	$2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9}$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9}$

b)

x_i	0	1	2
p_i	$\left(\frac{7}{10}\right)^2$	$2 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}$	$\left(\frac{3}{10}\right)^2$

12 **En una urna A hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y en otra urna B hay 4 bolas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda: si sale cara, se saca una bola de A, y si sale cruz, se saca de B. Se observa el número que tiene la bola.**

a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.

b) Represéntala gráficamente.

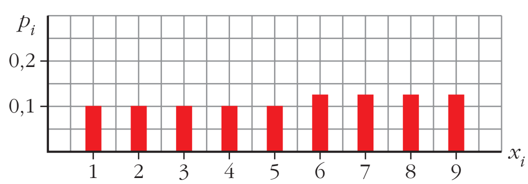
c) Calcula μ y σ.

a)

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}1$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = 0{,}1$

x_i	6	7	8	9
p_i	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}125$	0,125	0,125	0,125

b)



c) $\mu = 5{,}25$; $\sigma = 2{,}59$

13 **En las familias con 4 hijos e hijas, nos fijamos en el número de hijas.**

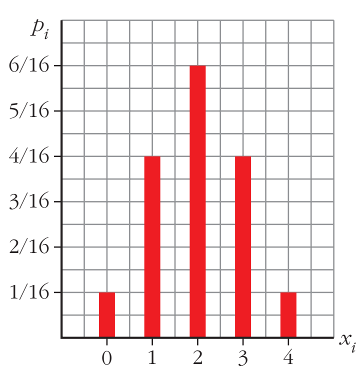
a) Haz la tabla con las probabilidades suponiendo que la probabilidad de que nazca un niño o una niña es la misma.

b) Represéntala gráficamente y halla la media y la desviación típica.

a)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

b)



$\mu = 2$

$\sigma = 1$

Página 260

Distribución binomial

14 **Reconoce en cada uno de los siguientes ejercicios una distribución binomial y di los valores de n, p, μ y σ.**

a) Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con tres respuestas, de las que solo una es correcta. Se responde al azar. ¿Cuál es el número de preguntas acertadas?

b) En el examen descrito en el apartado anterior, un alumno conoce las respuestas de 20 preguntas y responde las restantes al azar. Nos preguntamos cuántas de ellas acertará.

c) Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.

d) El 11% de los billetes de lotería reciben algún tipo de premio, aunque sea el reintegro. En una familia juegan a 46 números.

e) El 1% de ciertas soldaduras son defectuosas y revisamos mil de ellas. Número de soldaduras defectuosas que habrá.

a) $B\left(50; \dfrac{1}{3}\right)$; $\mu = \dfrac{50}{3} = 16{,}67$; $\sigma = 3{,}33$

b) $B\left(30; \dfrac{1}{3}\right)$; $\mu = 10$; $\sigma = 2{,}58$ relativo a las que contesta al azar

c) $B\left(400; \dfrac{1}{2}\right)$; $\mu = 200$; $\sigma = 10$

d) $B(46; 0{,}11)$; $\mu = 5{,}06$; $\sigma = 2{,}12$

e) $B(1\,000; 0{,}01)$; $\mu = 10$; $\sigma = 3{,}15$

15 **En una distribución binomial $B(7; 0{,}4)$ calcula:**

a) $P[x = 2]$ **b) $P[x = 5]$** **c) $P[x = 0]$**

d) $P[x > 0]$ **e) $P[x > 3]$** **f) $P[x < 5]$**

a) $\binom{7}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}261$

b) $\binom{7}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}077$

c) $0{,}6^7 = 0{,}028$

d) $1 - P[x = 0] = 0{,}972$

e) 0,290

f) 0,904

16 **En una distribución binomial $B(9; 0{,}2)$ calcula:**

a) $P[x < 3]$ **b) $P[x \geq 7]$** **c) $P[x \neq 0]$** **d) $P[x \leq 9]$**

a) $P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] = 0{,}738$

b) $P[x = 7] + P[x = 8] + P[x = 9] = 0{,}000314$

c) $1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}134 = 0{,}866$

d) 1

17 **Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente 4 preguntas?

b) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?

c) Calcula la probabilidad de que conteste mal a todas las preguntas.

x es $B\left(10; \frac{1}{4}\right)$

a) $P[x = 4] = \binom{10}{4} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^6 = 0{,}146$

b) $P[x > 2] = 1 - P[x \le 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) =$

$= 1 - (0{,}056 + 0{,}188 + 0{,}282) = 1 - 0{,}526 = 0{,}474$

c) $P[x = 0] = 0{,}75^{10} = 0{,}056$

18 **La probabilidad de que un aparato de televisión, antes de revisarlo, sea defectuoso, es 0,2. Si se revisan cinco aparatos, calcula:**

a) *P*[ninguno defectuoso].

b) *P*[alguno defectuoso].

x es $B(5; 0{,}2)$

a) $P[x = 0] = 0{,}8^5 = 0{,}328$

b) $P[x \ne 0] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}328 = 0{,}672$

PARA RESOLVER

19 **Tenemos una moneda defectuosa para la cual la probabilidad de obtener cruz en un lanzamiento es 0,4. La lanzamos cinco veces y anotamos el número de cruces.**

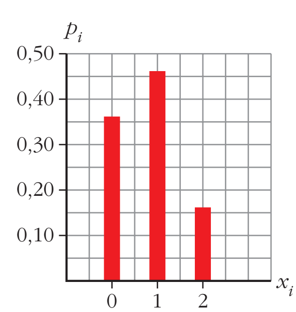
Haz una tabla con la distribución de probabilidad, represéntala gráficamente y calcula su media y su desviación típica.

x es $B(2; 0{,}4)$

x_i	0	1	2
p_i	0,36	0,48	0,16

$\mu = 0{,}8$

$\sigma = 0{,}69$



20 **Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Hacemos 2 extracciones con reemplazamiento. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) Dos verdes.

b) Ninguna verde.

c) Una verde.

Repite el problema con extracciones sin reemplazamiento.

Con reemplazamiento:

a) $\frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0{,}04$ b) $\frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0{,}64$ c) $2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} = 0{,}32$

Sin reemplazamiento:

a) $\frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0{,}0\widehat{2}$ b) $\frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} = 0{,}6\widehat{2}$ c) $2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = 0{,}3\widehat{5}$

21 **Una urna contiene 3 bolas rojas y 7 verdes. Se saca una al azar, se anota su color y se devuelve a la urna. Si esta experiencia se repite 5 veces, calcula la probabilidad de obtener:**

a) Tres rojas. **b) Menos de tres rojas.**

c) Más de tres rojas. **d) Alguna roja.**

Si consideramos éxito = "sacar roja", x es $B(5;\ 0{,}3)$

a) $P[x = 3] = \binom{5}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}1323$

b) $P[x < 3] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] =$

$= 0{,}16807 + 0{,}36015 + 0{,}3087 = 0{,}83692 \approx 0{,}8369$

c) $P[x > 3] = 1 - P[x \le 3] = 1 - (0{,}1323 + 0{,}8369) = 0{,}0308$

d) $P[x \ne 0] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}7^5 = 0{,}8319$

22 **En un proceso de fabricación de tornillos, se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Calcula la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:**

a) Ninguno. **b) Uno.** **c) Más de dos.**

¿Cuántos tornillos defectuosos habrá, por término medio, en cada caja?

x es $B(50;\ 0{,}02)$

a) $P[x = 0] = 0{,}98^{50} = 0{,}364$

b) $P[x = 1] = 50 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{49} = 0{,}372$

c) $P[x > 2] = 1 - P[x \le 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]) =$

$= 1 - (0{,}364 + 0{,}372 + 0{,}186) = 1 - 0{,}922 = 0{,}078$

Por término medio, habrá $\mu = 50 \cdot 0{,}02 = 1$ tornillo defectuoso en cada caja.

23 **Un tipo de piezas requiere de 4 soldaduras. Se hace un control de calidad a mil de esas piezas y se obtienen los siguientes resultados:**

SOLDADURAS DEFECTUOSAS	0	1	2	3	4
PIEZAS	603	212	105	52	28

¿Se ajustan estos datos a una binomial?

La media de la muestra es $\bar{x} = 0,69$.

Si las cuatro soldaduras tuvieran la misma probabilidad, p, de ser defectuosa y fueran independientes, el número, x, de soldaduras defectuosas en cada pieza seguiría una distribución binomial $B(4, p)$, por lo cual:

$$\bar{x} = 4 \cdot p \ \rightarrow \ 0,69 = 4p \ \rightarrow \ p = 0,1725$$

Veamos cómo se comportaría, teóricamente, esta binomial con 1 000 individuos y comparémoslo con los resultados de la muestra:

x_i	$p_i = P[x = x_i]$	$1\,000 \cdot p_i$	VALORES ESPERADOS	VALORES OBSERVADOS	|DIFERENCIAS|
0	0,4689	468,9	469	603	134
1	0,3910	391,0	391	212	179
2	0,1223	122,3	122	105	17
3	0,0170	17,0	17	52	35
4	0,0009	0,9	1	28	27

Las diferencias son enormes. Se rechaza la hipótesis de que “el número de soldaduras defectuosas en una pieza” siga una distribución binomial.

Página 261

24 **La probabilidad de que un torpedo lanzado por un submarino dé en el blanco es 0,4. Si se lanzan 6 torpedos, halla la probabilidad de que:**

a) Solo uno dé en el blanco.

b) Al menos uno dé en el blanco.

x es $B(6; 0,4)$

a) $P[x = 1] = \binom{6}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^5 = 0,1866$

b) $P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0,6^6 = 0,9533$

CUESTIONES TEÓRICAS

25 **En una distribución $B(4; 0,25)$ comprueba que:**

$$\boldsymbol{P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] + P[x = 3] + P[x = 4] = 1}$$

$0,75^4 + 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75^3 + 6 \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^2 + 4 \cdot 0,25^3 \cdot 0,75 + 0,25^4 = 1$

26 **Un ajedrecista se enfrenta con otro de igual maestría.**

¿Qué es más probable, que gane 2 de 4 partidas o 3 de 6 partidas?

(Los empates no se toman en consideración).

La probabilidad de que el ajedrecista gane a su contrincante es de $\frac{1}{2}$.

- Si juegan 4 partidas:

  Es una binomial $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Así:

  $$P[x = 2] = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

- Si juegan 6 partidas:

  Es una binomial $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$. Así:

  $$P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{5}{16}$$

Como $\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$, tenemos que es más fácil ganar 2 de 4 partidas que 3 de 6.

27 **Compara la media de las distribuciones binomiales $B(200; 0,2)$ y $B(30; 0,4)$. ¿Cuál de ellas tiene mayor dispersión?**

☛ ***Halla el coeficiente de variación de cada una.***

Recuerda: C.V. = $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ sirve para comparar las dispersiones de distintas poblaciones.

$B(200; 0,2) \to \mu = 40;\ \sigma = 5,66 \to$ C.V. $= 0,1415$

$B(30; 0,4) \to \mu = 12;\ \sigma = 2,68 \to$ C.V. $= 0,2233$

Tiene mayor dispersión la segunda, $B(30; 0,4)$.

28 **En una bolsa hay 5 bolas blancas, 7 rojas y 8 negras. Extraemos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Queremos calcular la probabilidad de que, al hacer tres extracciones, las tres bolas sean de distinto color. ¿Es una distribución binomial? Justifica tu respuesta.**

$P[\text{B, R y N}] = 6 \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{7}{20} \cdot \frac{8}{20} = 0,21$

No es una binomial, porque no hay solo dos posibilidades.

29 **En una mano de póker se dan 5 cartas a cada jugador. Nos preguntamos por la probabilidad de que un jugador tenga k figuras (k = 0, 1, 2, 3, 4 ó 5). ¿Por qué no es una distribución binomial?**

Cada vez que se extrae una carta de la baraja, varía la composición de ésta. Por tanto, la probabilidad de "FIGURA" no es constante para cada una de las cinco cartas.

AUTOEVALUACIÓN

1. **Tenemos dos urnas:**

A ● ○ ○ ○ B ● ● ○ ○

Consideramos tres supuestos:

I. Sacamos una bola de A y, después, una bola de B.

II. Mezclamos las bolas de las dos urnas y sacamos dos bolas.

III. Sacamos una bola de A, la echamos en B, removemos y sacamos una bola de B.

Para cada uno de los tres casos, calcula las probabilidades siguientes:

a) Las dos bolas son negras.

b) Las dos bolas son blancas.

c) La primera es blanca, y la segunda, negra.

I. a) $P[\bullet \text{ en A y } \bullet \text{ en B}] = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

b) $P[\circ \text{ en A y } \circ \text{ en B}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

c) $P[\circ \text{ en A y } \bullet \text{ en B}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{8}$

II. Las mezclamos ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○

a) $P[\bullet \text{ y } \bullet] = P[1.^a\ \bullet] \cdot P[2.^a\ \bullet \ / \ 1.^a\ \bullet] = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$

b) $P[\circ \text{ y } \circ] = P[1.^a\ \circ] \cdot P[2.^a\ \circ \ / \ 1.^a\ \circ] = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

c) $P[1.^a\ \circ \text{ y } 2.^a\ \bullet] = P[1.^a\ \circ] \cdot P[2.^a\ \bullet \ / \ 1.^a\ \circ] = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$

III. A ● ○ ○ ○ $\longrightarrow$ B ● ● ○ ○

a) $P[\bullet \text{ y } \bullet] = P[\bullet \text{ en A}] \cdot P[\bullet \text{ en B} \ / \ \bullet \text{ en A}] = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$

b) $P[\circ \text{ y } \circ] = P[\circ \text{ en A}] \cdot P[\circ \text{ en B} \ / \ \circ \text{ en A}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$

c) $P[1.^a\ \circ \text{ y } 2.^a\ \bullet] = P[\circ \text{ en A}] \cdot P[\bullet \text{ en B} \ / \ \circ \text{ en A}] = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

2. **La siguiente tabla corresponde a una distribución de probabilidad de variable discreta:**

x_i	5	6	7	8	9	10
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	…

Complétala y calcula μ y σ.

$P[10] = 1 - (0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0,1) = 1 - 0,8 = 0,2$

x_i	p_i	$p_i x_i$	$p_i x_i^2$
5	0,1	0,5	2,5
6	0,3	1,8	10,8
7	0,2	1,4	9,8
8	0,1	0,8	6,4
9	0,1	0,9	8,1
10	0,2	2	20
	1,00	7,4	57,6

$\mu = 7,4$

$\sigma = \sqrt{57,6 - 7,4^2} = 1,69$

3. **¿Cuáles de las siguientes distribuciones son binomiales?:**

I. Sacamos seis cartas de una baraja y nos preguntamos por el número de OROS.

II. En una clase hay 10 chicos y 20 chicas. Elegimos 6 al azar. ¿Cuántos son chicos?

III. Lanzamos un dado 20 veces. Nos preguntamos por la cantidad de "cincos".

IV. El 3% de los coches producidos en una factoría tienen algún defecto de fábrica. Cada día se producen 200. Nos preguntamos por la probabilidad de que haya *k* defectuosos.

En cada binomial, identifica *n* y *p* y calcula μ y σ.

I. No es binomial, porque al sacar cada carta cambia la composición de la baraja y, por tanto, la probabilidad de que la siguiente sea OROS.

II. No es binomial. Al haber solo 30 personas, cada una que se extrae modifica la probabilidad CHICO-CHICA de las restantes. Es decir, es un caso similar al I.

III. En cada lanzamiento del dado, $P[⚄] = \frac{1}{6}$. Por tanto, la distribución de probabilidades del "número de cincos" es binomial, con $n = 20$, $p = \frac{1}{6}$.

En una distribución $B\left(20, \frac{1}{6}\right)$:

$$\mu = n\,p = \frac{20}{6} = 3,3; \qquad \sigma = \sqrt{20 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{100}{36}} = \frac{10}{6} = 1,67$$

IV. El “número de coches defectuosos” en los 200 producidos en un día es una distribución binomial con $n = 200$ y $p = 0{,}03$.

En una distribución $B(200;\ 0{,}03)$:

$\mu = 200 \cdot 0{,}03 = 6,\quad \sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97} = 2{,}41$

4. **Con un cierto tipo de chinchetas se dan las siguientes probabilidades al dejarlas caer:**

P[] = 0,3 **P[] = 0,7**

Dejamos caer 6 chinchetas. Calcula:

a) P[2  y 4 ]

b) P[alguna ]

El número de chinchetas que caen así  se distribuye $B(6;\ 0{,}3)$.

a) $P[x = 2] = \binom{6}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^4 = 15 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^4 = 0{,}32$

b) Empezamos calculando $P[x = 0] = \binom{6}{0} \cdot 0{,}3^0\ 0{,}7^6 = 0{,}7^6 = 0{,}12$

P[alguna ] = 1 – P[ninguna ] = 1 – $P[x = 0] = 1 - 0{,}12 = 0{,}88$