11 Cuerpos geométricos

ANALIZA Y CONTESTA

¿Qué cuerpos geométricos tridimensionales conoces?

Respuesta libre.

¿Cuáles relacionarías con los huesos en forma de barra y el Toblerone que se mencionan en el texto?

El hueso de barra se relaciona con el ortoedro, y el Toblerone, con el prisma triangular.

En el texto se afirma que solo existen cinco cuerpos geométricos con caras idénticas formadas por polígonos regulares. ¿Sabes cuáles son?

Los cinco cuerpos geométricos con caras idénticas formadas por polígonos regulares son los poliedros regulares o sólidos platónicos: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Observa los dados de la imagen. ¿Crees que son sólidos platónicos? ¿Por qué?

Los dados de la imagen no son sólidos platónicos porque todas sus caras no son polígonos regulares e idénticos.

INVESTIGA Y PON EN COMÚN

Muchos juegos utilizan dados para poder jugar como en el juego de Ur. ¿Lo conoces? ¿Cómo se utiliza el dado en ese juego?

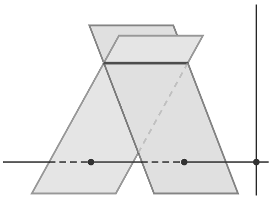
En el juego de Ur se utilizan tres dados con forma de tetraedro, cada uno de ellos con dos vértices marcados y dos vértices sin marcar. En cada tirada, la cantidad de vértices marcados que quedan hacia arriba determina la puntuación.

¿Existen juegos actuales en los que se usen dados especiales con formas distintas de la del clásico dado cúbico?

Respuesta modelo: en los juegos de rol.

Actividades propuestas

1. **Identifica en el siguiente dibujo los elementos geométricos que aparecen.**



Aparecen dos planos secantes y una recta que los corta. Además hay dos rectas perpendiculares.

2. **Indica si los siguientes elementos determinan un único plano del espacio.**

   a) **Tres puntos alineados.**

   b) **Los tres vértices de un triángulo.**

   c) **Cuatro puntos cualesquiera.**

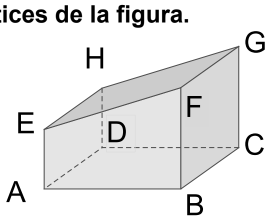
   a) Por tres puntos alineados pasan infinitos planos.

   b) Tres puntos no alineados determinan un único plano.

   c) Cuatro puntos en el espacio no siempre son coplanarios y, por tanto, no siempre determinan un plano.

3. Actividad resuelta.

4. Nombra tres caras, tres aristas y tres vértices de la figura.



Indica las posiciones relativas:

a) Entre las aristas señaladas.

b) Entre las caras señaladas.

c) Entre las aristas y las caras señaladas.

Caras: *ABFE*, *EFGH*, *HDCG* Aristas: *EA*, *AB*, *BF* Vértices: *A*, *B*, *C*

a) *EA* y *AB* son perpendiculares, *EA* y *BF* son paralelas y *AB* y *BF* son perpendiculares.

b) *ABFE* y *EFGH* son secantes, *ABFE* y *HDCG* son paralelas y *EFGH* y *HDCG* son secantes.

c) *EA*, *AB* y *BF* están contenidas en *ABFE*, cortan al plano que contiene a la cara *EFGH* y son paralelas a *HDCG*.

5. Actividad resuelta.

6. Dibuja ángulos diedros con las siguientes amplitudes.

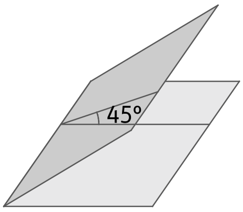
a) 45º

b) 135º

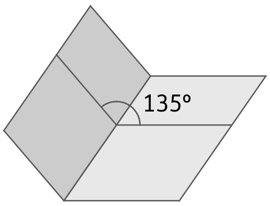
c) 180º

d) 330º

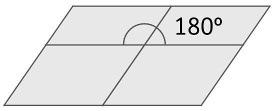
a)



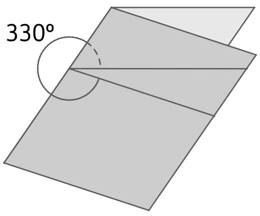
b)



c)



d)



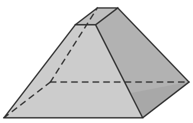
7. Calcula los ángulos complementario y suplementario de un ángulo diedro de 78º 35' de amplitud.

Complementario: 90º – 78º 35' = 11º 25' Suplementario: 180º – 78º 35' = 101º 25'

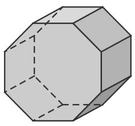
8. Actividad interactiva.

9. Cuenta las caras, aristas y vértices de los siguientes poliedros y comprueba que cumplen el teorema de Euler.

a)



b)



a) 6 caras, 12 aristas y 8 vértices ⇒ Se cumple el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 14$.

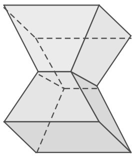
b) 10 caras, 24 aristas y 16 vértices ⇒ Se cumple el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 26$.

10. Comprueba que los poliedros regulares verifican el teorema de Euler.

Poliedros regulares	Caras C	Aristas A	Vértices V	$C + V$	$A + 2$
Tetraedro	4	6	4	8	8
Hexaedro o cubo	6	12	8	14	14
Octaedro	8	12	6	14	14
Dodecaedro	12	30	20	32	32
Icosaedro	20	30	12	32	32

Todos los poliedros regulares verifican el teorema de Euler porque $C + V = A + 2$.

11. ¿El siguiente poliedro es convexo? Comprueba si cumple el teorema de Euler.



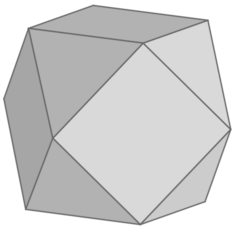
El poliedro es cóncavo.

Tiene 10 caras, 20 aristas y 12 vértices. Por tanto, verifica el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 22$.

12. Dibuja un cuboctaedro cortando las esquinas de un cubo por los planos que definen los puntos medios de los tres lados que concurren en cada vértice.

a) ¿Cómo son las caras del cuboctaedro?

b) ¿Es un poliedro arquimediano?

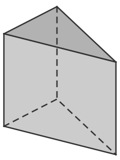


a) El cuboctaedro tiene 14 caras: 6 cuadrados y 8 triángulos equiláteros.

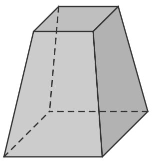
b) El cuboctaedro es un poliedro semirregular o arquimediano porque sus caras son polígonos regulares, aunque no todos iguales, y en todos sus vértices concurren los mismos polígonos en el mismo orden.

13. Di cuáles de los siguientes poliedros son prismas y, en caso afirmativo, clasifícalos.

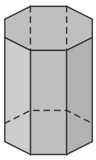
a)



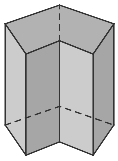
b)



c)



d)



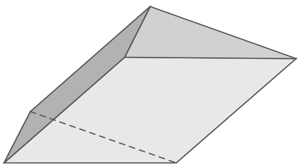
a) Prisma triangular recto, convexo e irregular.

b) No es un prisma.

c) Prisma octogonal recto, convexo y regular.

d) Prisma hexagonal recto, cóncavo e irregular.

14. Dibuja en tu cuaderno un prisma triangular oblicuo e irregular.



15. Calcula el área total y el volumen de un prisma regular hexagonal de 6 cm de altura, sabiendo que el lado de la base mide 4 cm, y su apotema, 3,5 cm.

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = p \cdot h + p \cdot a_b = 4 \cdot 6 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 3{,}5 = 228\ \text{cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \dfrac{4 \cdot 6 \cdot 3{,}5}{2} \cdot 6\ = 252\ \text{cm}^3$

16. Halla el área total y lateral de un cubo de arista *a* cm.

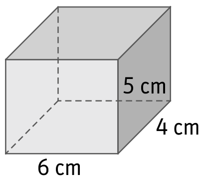
$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 4 \cdot a \cdot a + 2a^2 = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2\ \text{cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = a^2 \cdot a = a^3\ \text{cm}^3$

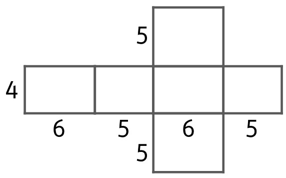
17. Dibuja un ortoedro de dimensiones 4, 5 y 6 cm.

a) Dibuja su desarrollo plano indicando las dimensiones del mismo.

b) Calcula sus áreas lateral y total.



a)

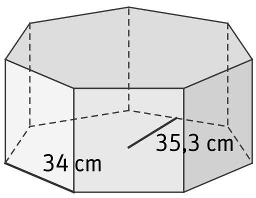


b) $A_{lateral} = 2 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 = 100\ \text{cm}^2$

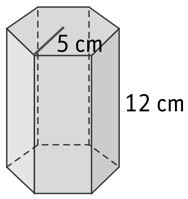
$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 100 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 148\ \text{cm}^2$

18. Calcula el volumen de los siguientes prismas.

a)



b)



a) $A_{base} = \dfrac{7 \cdot 34 \cdot 35{,}3}{2} = 4200{,}7\ \text{cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = 4200{,}7 \cdot 34 = 142\,823{,}8\ \text{cm}^3$

b) Para hallar el área de la base, calculamos la apotema de la base utilizando el teorema de Pitágoras, y aplicando que en un hexágono regular el radio mide lo mismo que el lado:

$a_b^2 = 5^2 - 2{,}5^2 = 18{,}75 \Rightarrow a_b = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33\ \text{cm}$

$A_{base} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95\ \text{cm}^2 \Rightarrow V = A_{base} \cdot h = 64{,}95 \cdot 12 = 779{,}4\ \text{cm}^3$

19. Una piscina de 10 m x 6 m se ha cubierto con una capa de hielo de 3 cm de espesor. ¿Cuántos litros de hielo hay?

$V = 10 \cdot 6 \cdot 0{,}03 = 1{,}8\ \text{m}^3 = 1800\ \text{dm}^3 = 1800\ \text{L}$

20. Una empresa fabrica envases de medio litro de base cuadrada. ¿Cuánto cartón se necesita para cada envase?

0,5 L = 0,5 dm^3 = 500 cm^3

Llamamos *a* a la medida del lado de la base, en centímetros, y *h* a la altura del envase, en centímetros.

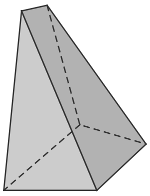
$V = a^2 \cdot h = 500 \text{ cm}^3 \Rightarrow h = \dfrac{500}{a^2}$

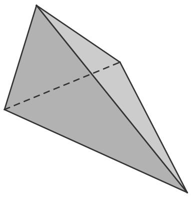
La cantidad de cartón necesaria para cada envase es:

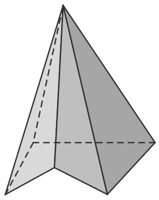
$A_{total} = 2a^2 + 4ah = 2a^2 + 4a \cdot \dfrac{500}{a^2} = 2a^2 + \dfrac{2000}{a} = \dfrac{2a^3 + 2000}{a} \text{ cm}^2$

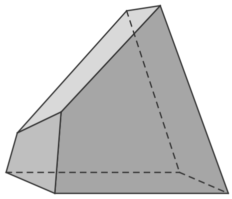
21. Actividad interactiva.

22. Di cuáles de los siguientes poliedros son pirámides y, en caso afirmativo, clasifícalas.

a)


b)


c)


d)


a) No es una pirámide.

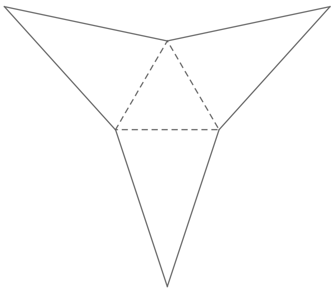
b) Pirámide triangular recta, convexa y regular.

c) Pirámide pentagonal recta, cóncava e irregular.

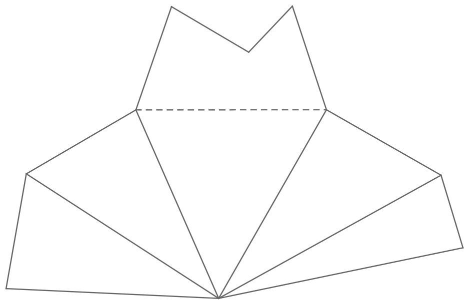
d) No es una pirámide.

23. Dibuja en tu cuaderno el desarrollo plano de las pirámides de la actividad anterior.

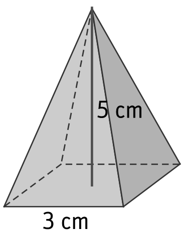
Pirámide triangular

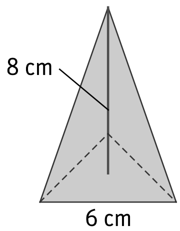


Pirámide pentagonal



24. Calcula el área total y el volumen de estas pirámides.

a)


b)


a) Para hallar el área lateral, calculamos la apotema de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras:

$a_p^2 = 5^2 + 1{,}5^2 = 27{,}25 \Rightarrow a_p = \sqrt{27{,}25} = 5{,}22 \text{ cm}$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5{,}22 + 3^2 = 40{,}32 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{9 \cdot 5}{3} = 15 \text{ cm}^3$

b) Para hallar el área de la base, calculamos la altura de la base utilizando el teorema de Pitágoras:

$h_b^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow h_b = \sqrt{27} = 5{,}2 \text{ cm} \Rightarrow A_{base} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6 \text{ cm}^2$

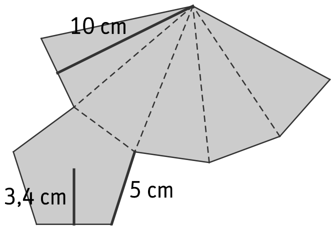
Para hallar el área lateral, calculamos la apotema de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras, y sabiendo que la apotema de un triángulo equilátero de lado 6 cm mide $a_b = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6 = 1{,}73 \text{ cm}$:

$a_p^2 = 8^2 + 1{,}73^2 = 67 \Rightarrow a_p = \sqrt{67} = 8{,}19 \text{ cm}$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8{,}19 + 15{,}6 = 89{,}31 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{15{,}6 \cdot 8}{3} = 41{,}6 \text{ cm}^3$

25. Calcula el área total y el volumen de esta pirámide.



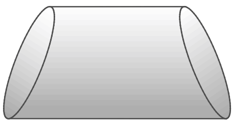
$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 + \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 3{,}4}{2} = 167{,}5 \text{ cm}^2$

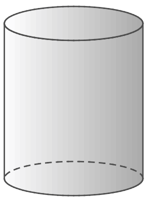
Para hallar el volumen, calculamos la altura de la pirámide aplicando el teorema de Pitágoras:

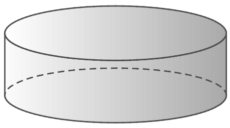
$h^2 = 10^2 - 3{,}4^2 = 88{,}44 \text{ cm}^2 \Rightarrow h = \sqrt{88{,}44} = 9{,}4 \text{ cm}$

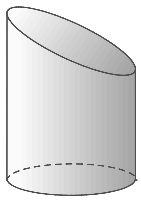
El volumen de la pirámide es: $V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{42{,}5 \cdot 9{,}4}{3} = 133{,}17 \text{ cm}^3$.

26. Indica cuáles de las siguientes figuras son cilindros y, en caso afirmativo, señala sus elementos.

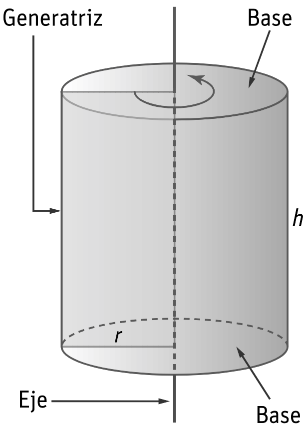
a) 

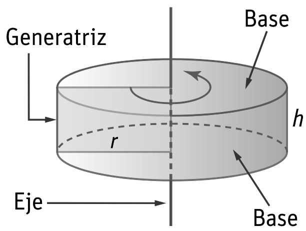
b) 

c) 

d) 

a) No es un cilindro. **b)** Cilindro recto **c)** Cilindro recto **d)** No es un cilindro.

b) 

c) 

27. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) La superficie lateral de un cilindro es un rectángulo.

b) Los cilindros oblicuos son cuerpos de revolución.

c) Los cilindros son poliedros de tres caras.

d) Las bases de los cilindros siempre son círculos.

e) La generatriz siempre es igual a la altura.

a) Falsa. Por ejemplo, la superficie lateral de un cilindro oblicuo no es un rectángulo.

b) Falsa. Un cilindro oblicuo es el resultado de cortar un cilindro recto por dos planos paralelos entre sí y que no sean perpendiculares ni paralelos al eje del cilindro recto.

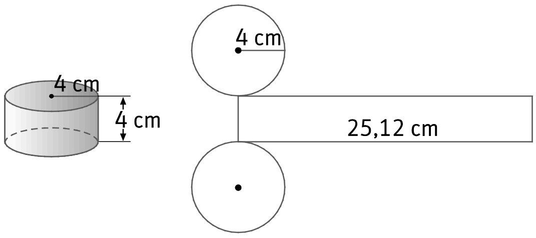
c) Falsa. Un cilindro es un cuerpo redondo, no un poliedro.

d) Falsa. Por ejemplo, las bases de un cilindro oblicuo son elipses.

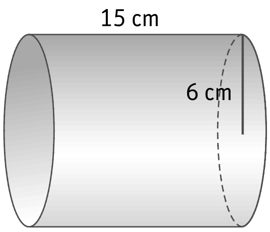
e) Verdadera.

28. Dibuja en tu cuaderno un cilindro cuyo radio de la base y altura midan 4 cm. Dibuja también su desarrollo calculando, previamente, las dimensiones del rectángulo que representa su superficie lateral.

La altura del rectángulo de la base es $h = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 25{,}12$ cm.



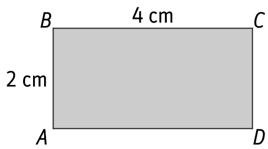
29. Calcula el área total y el volumen de este cilindro.



$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot 15 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6^2 = 791{,}28 \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 6^2 \cdot 15 = 1695{,}6 \text{ cm}^3$

30. Calcula el área lateral de los cilindros que se generan al girar el rectángulo alrededor del lado *AB* y alrededor del lado *AD*. ¿Son iguales? ¿Y sus volúmenes?



Alrededor del lado *AB*:

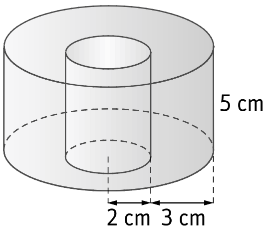
$A_{lateral} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 2 = 16\pi \text{ cm}^2$ y $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 128\pi \text{ cm}^3$

Alrededor del lado *AD*:

$A_{lateral} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4 = 16\pi \text{ cm}^2$ y $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi \text{ cm}^3$

Las áreas laterales de los cilindros que se generan en ambos casos son iguales. Los volúmenes son distintos, ya que el volumen del cilindro que se genera al girar el rectángulo alrededor del lado *AB* es 8 veces mayor que el volumen del cilindro que se genera al girar el rectángulo alrededor del lado *AD*.

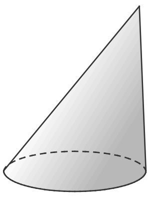
31. Calcula el volumen de esta arandela.



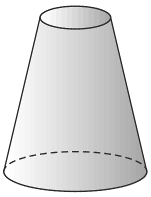
$V_{arandela} = V_{cilindro\ grande} - V_{\text{cilindro pequeño}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 - \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 105 \cdot 3{,}14 = 329{,}7\ \text{cm}^3$

32. Indica cuáles de las siguientes figuras son conos y, en caso afirmativo, señala sus elementos.

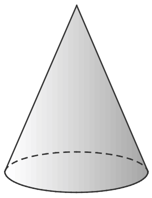
a)



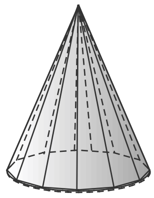
b)



c)

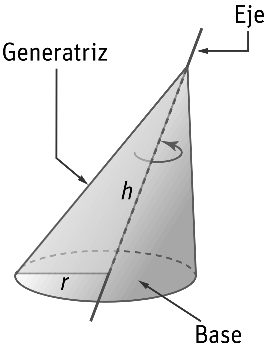


d)

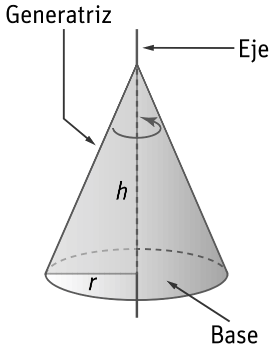


a) Cono oblicuo. **b)** Tronco de cono. **c)** Cono recto. **d)** No es un cono.

a)



c)



33. Di si son verdaderas o falsas estas afirmaciones.

a) La superficie lateral de un cono es un triángulo.

b) Los conos son poliedros de dos caras.

c) Con un mismo triángulo rectángulo se pueden obtener dos conos distintos.

a) Falsa. La superficie lateral de un cono recto es un sector circular.

b) Falsa. Un cono es un cuerpo redondo, no un poliedro.

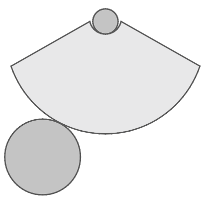
c) Verdadera. Al girar, sobre cada cateto, un triángulo rectángulo cuyos catetos sean distintos, se generan dos conos diferentes.

34. Calcula el radio de la base de un cono si su altura mide 4 cm, y su generatriz, 5 cm.

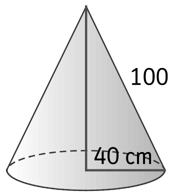
Llamando r al radio de la base, y aplicando el teorema de Pitágoras:

$r^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow r = \sqrt{9} = 3$ cm

35. Dibuja el desarrollo de un tronco de cono de 4 cm de altura, 3 cm de radio mayor y 1 cm de radio menor.



36. Calcula el área total y el volumen del siguiente cono.



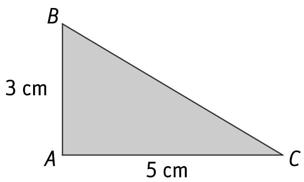
$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi rg + \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 40 \cdot 100 + 3{,}14 \cdot 40^2 = 17\,584\ \text{cm}^2$

Para calcular el volumen, hallamos la altura del cono aplicando el teorema de Pitágoras:

$h^2 = 100^2 - 40^2 = 8400 \Rightarrow h = \sqrt{8400} = 91{,}65$ cm

El volumen del cono es $V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{\pi \cdot 40^2 \cdot 91{,}65}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 1600 \cdot 91{,}65}{3} = 153\,483{,}2\ \text{cm}^3$.

37. Halla el área lateral, el área total y el volumen del cono que se genera al girar el triángulo rectángulo alrededor del cateto *AB*.

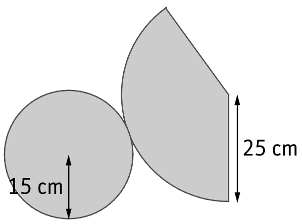


Hallamos la generatriz, g, del cono aplicando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow g = \sqrt{34} = 5{,}83$ cm

$A_{lateral} = \pi rg = 3{,}14 \cdot 5 \cdot 5{,}83 = 91{,}53\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 91{,}53 + \pi \cdot 5^2 = 91{,}53 + 3{,}14 \cdot 5^2 = 170{,}03\ \text{cm}^2$

El volumen del cono es $V = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 3}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 25 \cdot 3}{3} = 78{,}5\ \text{cm}^3$.

38. Calcula el área lateral y el volumen del cono correspondiente a este desarrollo plano.



$A_{lateral} = \pi rg = 3{,}14 \cdot 15 \cdot 25 = 1177{,}5\ \text{cm}^2$

Hallamos la altura, h, del cono aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 25^2 - 15^2 = 400 \Rightarrow h = \sqrt{400} = 20$ cm.

El volumen del cono es $V = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 20}{3} = \dfrac{3{,}14 \cdot 225 \cdot 20}{3} = 4710\ \text{cm}^3$.

39. Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) La esfera es un poliedro de una sola cara.

b) El radio del ecuador coincide con el radio de la esfera.

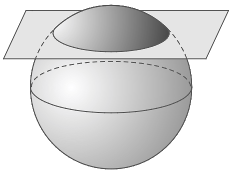
c) Si una circunferencia gira alrededor de uno de sus diámetros, genera una superficie esférica.

a) Falsa. La esfera es un cuerpo redondo.

b) Verdadera.

c) Verdadera.

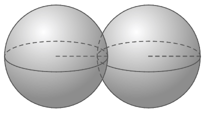
40. Dibuja un plano que corte a una esfera. ¿Qué figura geométrica determina la intersección? ¿En qué partes queda dividida la esfera?



La intersección del plano y la esfera determinan un círculo.

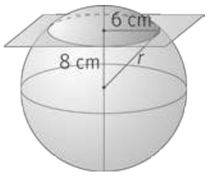
La esfera queda dividida en dos casquetes esféricos.

41. Dibuja dos superficies esféricas ambas de radio 5 cm y tales que sus centros disten 8 cm. ¿Qué línea determina su intersección?



La intersección de las dos superficies esféricas es una circunferencia.

42. Halla el radio de esta superficie esférica.



Aplicando el teorema de Pitágoras: $r^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow r = \sqrt{100} = 10$ cm.

43. Calcula el área de las esferas cuyo radio se indica.

a) **2 cm** **b)** **4,75 dm** **c)** **0,5 m**

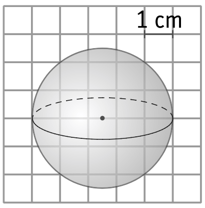
a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^2 = 50{,}24$ cm^2

b) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}75^2 = 283{,}4$ dm^2

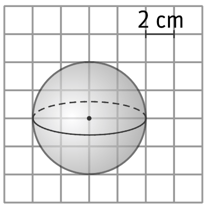
c) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5^2 = 3{,}14$ m^2

44. Halla el área de las siguientes superficies esféricas.

a)



b)



a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 = 78{,}5$ cm^2

b) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 200{,}96$ cm^2

45. Calcula la superficie de la cáscara de una naranja de diámetro 4,5 cm.

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}25^2 = 63{,}585$ cm^2

46. Calcula el volumen del cuerpo geométrico que se genera al girar un semicírculo de radio 3 cm alrededor de su diámetro.

Se genera una esfera de radio 3 cm $\Rightarrow V = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 3^3}{3} = 113{,}04$ cm^3.

47. Calcula la superficie y el volumen de una esfera de diámetro 8 centímetros.

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 200{,}96$ cm^2 y $V = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 4^3}{3} = 268$ cm^3.

48. Halla el volumen de una semiesfera de radio 3 metros.

$V = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3\cdot 2} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 3^3}{6} = 56{,}52$ cm^3.

49. El diámetro del planeta Marte mide 6795 km.

a) ¿Cuánto mide su superficie?

b) ¿Cuál es su volumen?

a) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 3397{,}5^2 = 144\,980\,158{,}5$ km^2

b) $V = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 3397{,}5^3}{3} = 1{,}64 \cdot 10^{11}$ km^3

50. Actividad resuelta.

51. Si una pelota de tenis tiene un radio de 3,3 cm y una pelota de baloncesto tiene un diámetro de 24 cm, ¿cuántas veces es mayor el volumen de la pelota de baloncesto que el de la de tenis?

Calculamos el volumen de cada cuerpo:

$V_{tenis} = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 3{,}3^3}{3} = 150{,}46$ cm^3 y $V_{baloncesto} = \dfrac{4\cdot\pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 12^3}{3} = 7234{,}56$ cm^3

Como $\dfrac{7234{,}56}{150{,}46} = 48{,}08$, el volumen de la pelota de baloncesto es aproximadamente 48,08 veces el de la pelota de tenis.

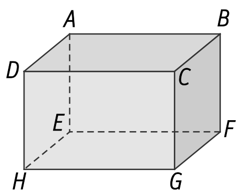
52. La superficie de la Tierra se divide en 24 husos horarios imaginarios. Halla el área de un huso horario terrestre. El radio medio de la Tierra es de 6370 kilómetros.

La superficie de la Tierra es $A_{\text{Tierra}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 6370^2 = 510\,000\,000$ km^2.

Por tanto, la superficie de cada huso será de $\dfrac{510\,000\,000}{24} = 21\,250\,000$ km^2.

53. Actividad interactiva.

54. Observa la figura e indica:



a) Dos planos paralelos y dos planos secantes.

b) Dos rectas paralelas, dos rectas secantes y dos rectas que se crucen.

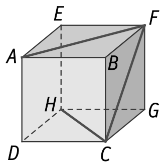
c) Una recta paralela a un plano y una recta secante a un plano.

a) Los planos determinados por *ABCD* y *EFGH* son paralelos, y los determinados por *ABFE* y *ABCD* son secantes.

b) *AB* y *CD* son rectas paralelas, *AB* y *BF* son rectas secantes y *AB* y *FG* son rectas que se cruzan.

c) La recta *BC* es paralela al plano *EFGH*, y la recta *BF* corta en *F* al plano *EFGH*.

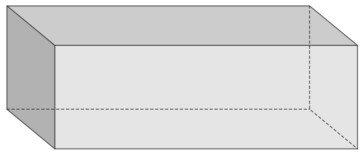
55. En el cubo de vértices *ABCDEFGH* se consideran las diagonales *AF*, *FC* y *CH* de tres de sus caras.



Indica la posición relativa de dichas diagonales con la cara determinada por los vértices *C*, *H* y *G*.

AF es paralela a *CHG*, *FC* corta a *CHG* en *C*, y *CH* está contenida en *CHG*.

56. ¿Cuántos ángulos diedros tiene el ortoedro de la figura? ¿Cuánto miden?



Un poliedro tiene tantos ángulos diedros como aristas.

Por tanto, el ortoedro tiene 12 ángulos diedros. Todos ellos son de 90º.

57. Sabiendo que las amplitudes de los ángulos diedros $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ son $\widehat{A}$ = 30º 25' 20'', $\widehat{B}$ = 45º 35' 40'', $\widehat{C}$ = 20º 15' 30'', calcula:

a) $\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C}$ **b)** $2\widehat{A}-\widehat{B}+\widehat{C}$ **c)** $3\widehat{A}-\widehat{B}+4\widehat{C}$ **d)** $4\widehat{A}-2\widehat{B}-\widehat{C}$

a) $\widehat{A}+\widehat{B}-\widehat{C}=$ 30º 25' 20'' + 45º 35' 40'' – 20º 15' 30'' = 55º 45' 30''

b) $2\widehat{A}-\widehat{B}+\widehat{C}$ = 2 · (30º 25' 20'') – 45º 35' 40'' + 20º 15' 30'' = 35º 30' 30''

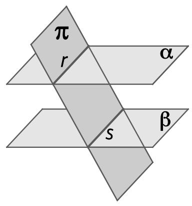
c) $3\widehat{A}-\widehat{B}+4\widehat{C}$ = 3 · (30º 25' 20'') – 45º 35' 40'' + 4 · (20º 15' 30'') = 126º 42' 20''

d) $4\widehat{A}-2\widehat{B}-\widehat{C}$ = 4 · (30º 25' 20'') – 2 · (45º 35' 40'') 4 – 20º 15' 30'' = 10º 14' 30''

58. Dibuja dos planos paralelos y un tercer plano que corte los dos primeros en sendas rectas *r* y *s*.

a) ¿Cómo son entre sí las rectas *r* y *s*?

b) ¿Cómo son los ángulos diedros que se forman?



a) Las rectas *r* y *s* son paralelas.

b) Los ángulos diedros que se forman son iguales.

59. Se sabe que los planos α y β son paralelos, que la recta *r* pertenece al plano α y que la recta *s* pertenece al plano β.

a) ¿Son necesariamente paralelas las rectas *r* y *s*?

b) ¿Puede haber algún caso en el que las rectas *r* y *s* sean secantes?

a) Las rectas *r* y *s* no son necesariamente paralelas; pueden ser dos rectas que se cruzan.

b) Para las rectas *r* y *s* solo pueden darse dos casos: o son paralelas o son rectas que se cruzan.
En ningún caso pueden ser rectas secantes, ya que el punto de corte pertenecería a los dos planos, y estos son paralelos.

60. Completa la siguiente tabla, en la que aparece el número de caras, vértices y aristas de varios poliedros convexos.

	Caras	Aristas	Vértices
Poliedro 1	8	12	•••
Poliedro 2	•••	30	20
Poliedro 3	4	•••	4

	Caras	Aristas	Vértices
Poliedro 1	8	12	6
Poliedro 2	12	30	20
Poliedro 3	4	6	4

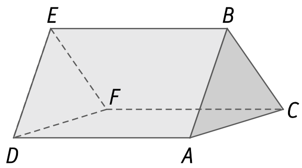
61. Si se denomina el orden de un vértice en un poliedro al número de aristas que concurren en él, copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

	Caras	Orden de los vértices
Tetraedro	4	•••
Cubo	•••	3
Octaedro	•••	•••
Dodecaedro	•••	•••
Icosaedro	•••	•••

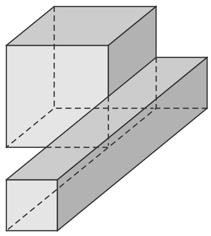
	Caras	Orden de los vértices
Tetraedro	4	3
Cubo	6	3
Octaedro	8	4
Dodecaedro	12	3
Icosaedro	20	5

62. Dibuja, de forma aproximada, un poliedro en el que tres de los ángulos diedros sean de 60º.

Se trata de un prisma triangular recto cuyas bases son triángulos equiláteros.



63. Cuenta el número de caras, de vértices y de aristas del poliedro de la figura.



¿Verifica el teorema de Euler?

El poliedro tiene 10 caras, 15 vértices y 21 aristas.

No verifica el teorema de Euler porque $C + V = 25 \neq A + 2 = 23$.

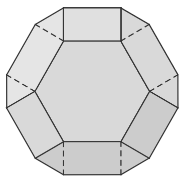
64. Si se considera un octaedro y los puntos que dividen sus lados en tres partes iguales, se corta mediante planos determinados por estos puntos y se prescinde de las esquinas formadas, se obtiene el poliedro denominado octaedro truncado.

a) ¿Qué polígonos forman sus caras?

b) ¿Por qué se trata de un poliedro semirregular?

c) ¿Se trata de un poliedro cóncavo o convexo?

d) Comprueba que verifica el teorema de Euler.



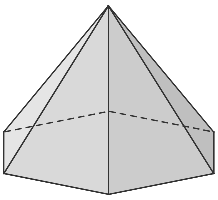
a) El octaedro truncado tiene 14 caras: 8 hexágonos regulares y 6 cuadrados.

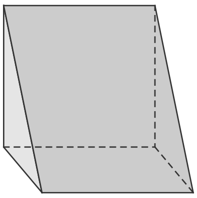
b) El octaedro truncado es un poliedro semirregular o arquimediano porque sus caras son polígonos regulares, aunque no todos iguales, y en todos sus vértices concurren los mismos polígonos en el mismo orden.

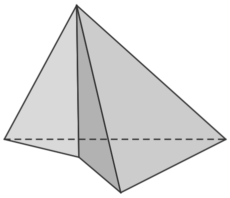
c) El octaedro truncado es un poliedro convexo.

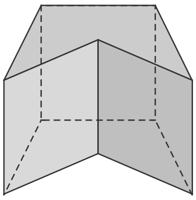
d) El poliedro tiene 14 caras, 24 vértices y 36 aristas. Verifica el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 38$.

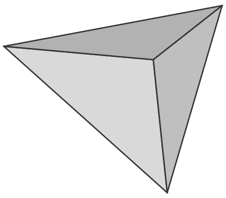
65. Clasifica los siguientes prismas y pirámides.

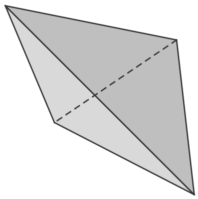
a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

f) 

a) Pirámide hexagonal recta, convexa e irregular.

b) Prisma pentagonal recto, cóncavo e irregular.

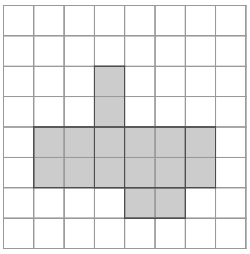
c) Prisma triangular recto, convexo e irregular.

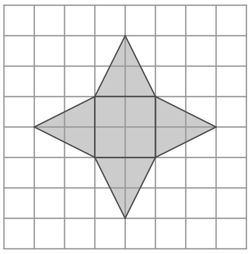
d) Pirámide triangular recta, convexa y regular.

e) Pirámide cuadrangular oblicua, cóncava e irregular.

f) Pirámide triangular oblicua, convexa e irregular.

66. Clasifica las figuras correspondientes a los siguientes desarrollos.

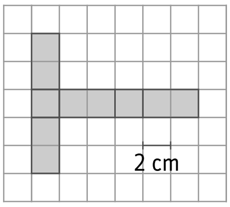
a) 

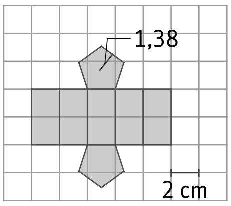
b) 

a) Ortoedro

b) Pirámide cuadrangular regular

67. Calcula el área total de los cuerpos geométricos que admiten los siguientes desarrollos planos.

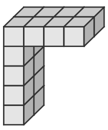
a) 

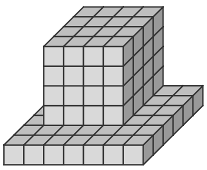
b) 

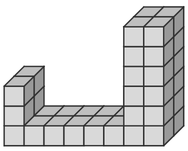
a) $A_{total} = 10 \cdot 2^2 = 40 \text{ cm}^2$

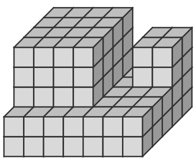
b) $A_{total} = 2 \cdot \dfrac{5 \cdot 2 \cdot 1{,}38}{2} + 10 \cdot 4 = 53{,}8 \text{ cm}^2$

68. Los siguientes cuerpos geométricos están formados por bloques cúbicos de 1 cm de arista. Calcula el volumen de cada uno de ellos.

a) 

c) 

b) 

d) 

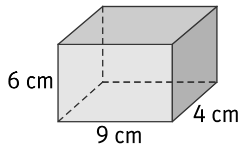
a) $V = 16 \text{ cm}^3$

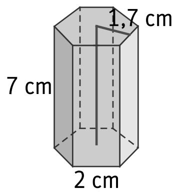
b) $V = 6 + 10 + 24 = 40 \text{ cm}^3$

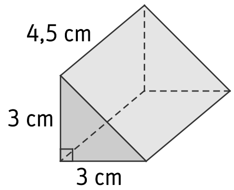
c) $V = 42 + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 42 + 64 = 106 \text{ cm}^3$

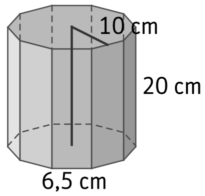
d) $V = 7 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 70 + 8 + 48 = 126 \text{ cm}^3$

69. Calcula el área total y el volumen de los siguientes prismas.

a)


b)


c)


d)


a) $A_{total} = 2 \cdot 9 \cdot 4 + 2 \cdot 9 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 4 = 228\text{ cm}^2$

$V = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216\text{ cm}^3$

b) $A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = p \cdot h + p \cdot a_b = 2 \cdot 6 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \cdot 1{,}7 = 104{,}4\text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \dfrac{2 \cdot 6 \cdot 1{,}7}{2} \cdot 7 = 71{,}4\text{ cm}^3$

c) Calculamos el lado desconocido de la base, x, aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 3^2 + 3^2 = 18\text{ cm} \Rightarrow x = \sqrt{18} = 4{,}24\text{ cm}$

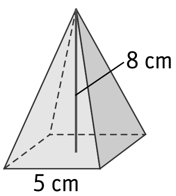
$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = (3 + 3 + 4{,}24) \cdot 4{,}5 + 2 \cdot \dfrac{3 \cdot 3}{2} = 55{,}08\text{ cm}^2$

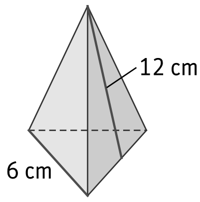
$V = A_{base} \cdot h = \dfrac{3 \cdot 3}{2} \cdot 4{,}5 = 20{,}25\text{ cm}^3$

d) $A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = p \cdot h + p \cdot a_b = 6{,}5 \cdot 10 \cdot 20 + 6{,}5 \cdot 10 \cdot 10 = 1950\text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = \dfrac{6{,}5 \cdot 10 \cdot 10}{2} \cdot 20 = 6500\text{ cm}^3$

70. Calcula el área total y el volumen de las siguientes pirámides.

a)


b)


a) Para hallar el área lateral, calculamos la apotema de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras:

$a_p^2 = 8^2 + 2{,}5^2 = 70{,}25 \Rightarrow a_p = \sqrt{70{,}25} = 8{,}38\text{ cm}$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8{,}38 + 5^2 = 108{,}8\text{ cm}^2$

$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{5^2 \cdot 8}{3} = 66{,}67\text{ cm}^3$

b) Para hallar el área de la base, calculamos la altura de la base utilizando el teorema de Pitágoras:

$h_b^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow h_b = \sqrt{27} = 5{,}2\text{ cm} \Rightarrow A_{base} = \dfrac{6 \cdot 5{,}2}{2} = 15{,}6\text{ cm}^2$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 12 + 15{,}6 = 123{,}6\text{ cm}^2$

Para hallar el volumen, calculamos la altura de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras, y sabiendo que la apotema de un triángulo equilátero de lado 6 cm mide $a_b = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6 = 1{,}73\text{ cm}$:

$h^2 = 12^2 - 1{,}73^2 = 141 \Rightarrow h = \sqrt{141} = 11{,}87\text{ cm}$

$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{15{,}6 \cdot 11{,}87}{3} = 61{,}72\text{ cm}^3$

71. Calcula el volumen de una pirámide de altura 3 cm cuya base es un cuadrado de lado 4 cm.

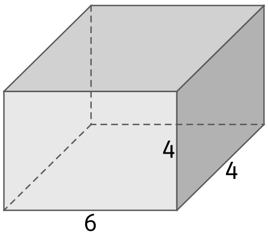
$V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{4^2 \cdot 3}{3} = 16\ \text{cm}^3$

72. Dibuja en tu cuaderno un paralelepípedo de dimensiones de la base 4 y 6 cm, y 4 cm de altura.

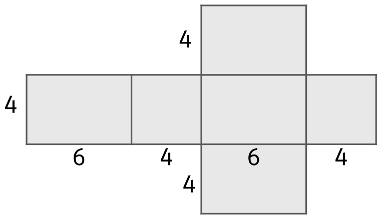
a) Dibuja su desarrollo plano indicando las dimensiones del mismo.

b) Calcula el área lateral y total.

c) Calcula su volumen.



a)



b) $A_{lateral} = 2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 80 \Rightarrow A_{total} = 80 + 2 \cdot 4 \cdot 6 = 128\ \text{cm}^2$

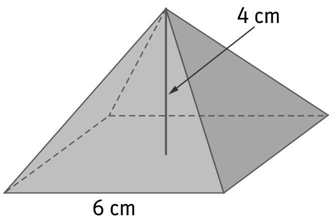
c) $V = 4 \cdot 4 \cdot 6 = 96\ \text{cm}^3$

73. Dibuja una pirámide regular con base un cuadrado de lado 6 cm y de altura 4 cm.

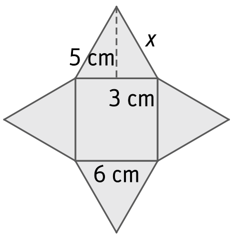
a) Dibuja su desarrollo plano indicando las dimensiones del mismo.

b) Calcula el área lateral y total.

c) Calcula su volumen.



a)



b) Para hallar el área lateral, calculamos la apotema de la pirámide utilizando el teorema de Pitágoras:

$a_p^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow a_p = \sqrt{25} = 5\ \text{cm} \Rightarrow A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 5 + 6^2 = 96\ \text{cm}^2$

c) $V = \dfrac{A_{base} \cdot h}{3} = \dfrac{6^2 \cdot 4}{3} = 48\ \text{cm}^3$

74. Calcula el área total y el volumen de un cubo sabiendo que el perímetro de la base es de 24 dm.

El lado del cubo mide $a = \dfrac{24}{4} = 6$ dm. Por tanto, $A_{total} = 6 \cdot 6^2 = 216$ dm^3 y $V = 6^3 = 216$ dm^3.

75. La base de un ortoedro es un rectángulo de 18 dm de perímetro, siendo sus medidas una el doble de la otra. La tercera medida del ortoedro es igual al triple de la menor de la base. A partir de estos datos, calcula el volumen del ortoedro.

Llamamos x y $2x$ a las medidas del rectángulo de la base:

$2x + 2 \cdot 2x = 18 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$

El rectángulo de la base tiene dimensiones 3 x 6 cm. Y, por tanto, la tercera medida del ortoedro es 9 cm.

El ortoedro tiene dimensiones 3 cm, 6 cm y 9 cm.

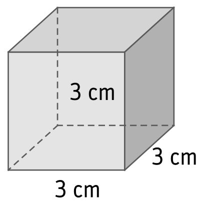
Por tanto, el volumen del ortoedro es $V = 3 \cdot 6 \cdot 9 = 162$ cm^3.

76. Dibuja en tu cuaderno e indica las dimensiones en cada caso:

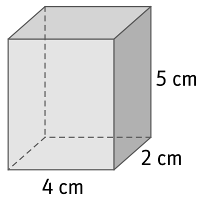
a) Un cubo de 27 cm^3 de volumen.

b) Un ortoedro de 40 cm^3 de volumen.

a) La medida del lado es $a = \sqrt[3]{27} = 3$ cm.



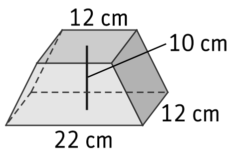
b) Ortoedro de dimensiones 2 cm, 4 cm y 5 cm.



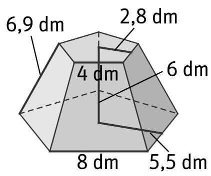
77. Actividad resuelta.

78. Halla el área total y el volumen de los siguientes troncos de pirámide.

a)



b)



a) Calculamos el fondo de la base superior, x, puesto que las dos bases son semejantes:

$$\frac{22}{12} = \frac{12}{x} \Rightarrow 22x = 144 \Rightarrow x = \frac{144}{22} = 6{,}55 \text{ cm}$$

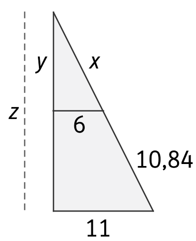
Hallamos la medida de la arista lateral, a, aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 = 10^2 + 5^2 \Rightarrow a = 11{,}18$ cm.

Calculamos la altura, h, de las caras laterales cuyas bases miden 12 cm y 6,55 cm, aplicando el teorema de Pitágoras: $11{,}18^2 = h^2 + 2{,}73^2 \Rightarrow h = 10{,}84$ cm.

$$A_{total} = A_{base\ superior} + A_{base\ inferior} + A_{lateral} = 12 \cdot 6{,}55 + 22 \cdot 12 + 2 \cdot \frac{(22+12)\cdot 10}{2} + 2 \cdot \frac{(12+6{,}55)\cdot 10{,}84}{2} =$$

$= 78{,}6 + 264 + 340 + 201{,}08 = 883{,}68$ cm^2

Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen de la pirámide completa.



Para hallar la altura de la pirámide, utilizamos la semejanza de triángulos.

$$\frac{x}{6} = \frac{x + 10{,}84}{11} \Rightarrow 11x = 6x + 65{,}04 \Rightarrow 5x = 65{,}04 \Rightarrow x = 13 \text{ cm}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, $y^2 = 13^2 - 6^2 \Rightarrow y = 11{,}53$ cm.

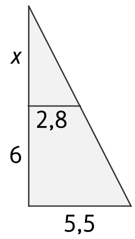
Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras, $z^2 = (10{,}84 + 13)^2 - 11^2 \Rightarrow z = 21{,}15$ cm.

Por tanto, $V_{tronco} = \dfrac{22 \cdot 12 \cdot 21{,}15}{3} - \dfrac{12 \cdot 6{,}55 \cdot 11{,}53}{3} = 1559{,}11$ cm^3

b) Calculamos la altura de la cara lateral, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 6{,}9^2 - 2^2 \Rightarrow h = 6{,}6$ dm.

$A_{total} = A_{base\ superior} + A_{base\ inferior} + A_{lateral} = \dfrac{4\cdot 5\cdot 2{,}8}{2} + \dfrac{8\cdot 5\cdot 5{,}5}{2} + \dfrac{(8+4)\cdot 6{,}6}{2}\cdot 5 = 28 + 110 + 198 = 336$ dm^2

Para hallar el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen de la pirámide completa.



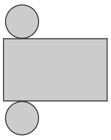
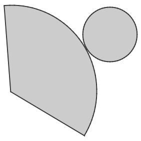
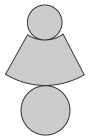
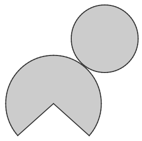
Para hallar la altura de la pirámide, utilizamos la semejanza de triángulos.

$\dfrac{x}{2{,}8} = \dfrac{x+6}{5{,}5} \Rightarrow 5{,}5x = 2{,}8x + 16{,}8 \Rightarrow 2{,}7x = 16{,}8 \Rightarrow x = 6{,}22$ dm

Por tanto, la altura de la pirámide completa es de 12,22 dm.

$V_{tronco} = \dfrac{110\cdot 12{,}22}{3} - \dfrac{28\cdot 6{,}22}{3} = 390$ dm^3

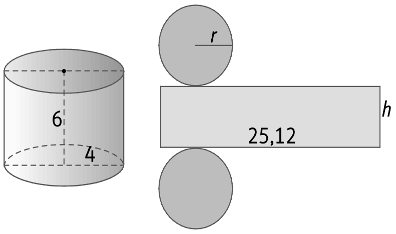
79. Clasifica las figuras correspondientes a los siguientes desarrollos.

a)  **b)**  **c)**  **d)** 

a) Cilindro **b)** Cono **c)** Tronco de cono **d)** Cono

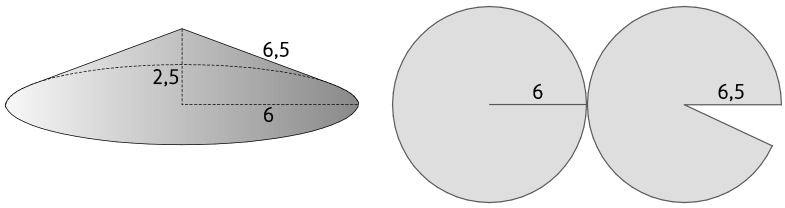
80. Dibuja en tu cuaderno un cilindro que tenga de radio de la base 4 cm y de altura 6 cm. Dibuja su desarrollo e indica las dimensiones del mismo.

$L = 2\cdot \pi \cdot r = 2\cdot 3{,}14\cdot 4 = 25{,}12$ cm

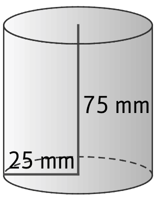


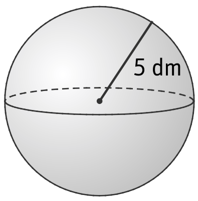
81. Dibuja un cono de radio de la base 6 cm y altura 2,5 cm. Calcula la medida de su generatriz. Dibuja su desarrollo e indica las dimensiones del mismo.

Llamando g a la generatriz del cono, y aplicando el teorema de Pitágoras, $g^2 = 2{,}5^2 + 6^2 = 42{,}25 \Rightarrow g = 6{,}5$ cm.



82. Calcula la superficie y el volumen de los siguientes cuerpos redondos.

a) 

b) 

a) $A_{total} = A_{lateral} + 2\cdot A_{base} = 2\cdot \pi\cdot 25\cdot 75 + 2\cdot \pi\cdot 25^2 = 15\,700$ mm^2

$V = A_{base}\cdot h = \pi\cdot 25^2\cdot 75 = 147\,187{,}5$ mm^3

b) $A = 4\cdot \pi\cdot r^2 = 4\cdot 3{,}14\cdot 5^2 = 314$ dm^2 y $V = \dfrac{4\cdot \pi\cdot r^3}{3} = \dfrac{4\cdot 3{,}14\cdot 5^3}{3} = 523{,}33$ dm^3

83. Calcula el área lateral y total de un cilindro de radio de la base 45 dam y de altura 50 dam.

$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot 45 \cdot 50 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 45 \cdot 50 = 14\,130$ dam$^2 \Rightarrow A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 14\,130 + 2 \cdot \pi \cdot 45^2 =$
$= 14\,130 + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 45^2 = 26\,847$ dam^2

84. Un cono tiene por radio de la base 33 m y por generatriz 65 m. Calcula su área total y su volumen.

$A_{lateral} = \pi \cdot 33 \cdot 65 = 3{,}14 \cdot 33 \cdot 65 = 6735{,}3$ m$^2 \Rightarrow A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 6735{,}3 + \pi \cdot 33^2 = 6735{,}3 + 3{,}14 \cdot 33^2 =$
$= 10\,154{,}76$ m^2

Calculamos la altura del cono, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 65^2 - 33^2 = 3136 \Rightarrow h = 56$ m

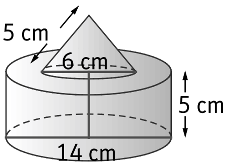
$$V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot 33^2 \cdot 56}{3} = 63\,862{,}30 \text{ m}^3$$

85. Calcula cuántos litros caben en una esfera de radio 125 mm.

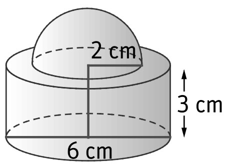
$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 125^3}{3} = 8\,177\,083{,}33 \text{ mm}^3 \approx 8{,}18 \text{ dm}^3 = 8{,}18 \text{ L}$$

86. Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a)



b)



a) Calculamos la altura del cono, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow h = 4$ cm.

El volumen del cuerpo geométrico es $V = V_{cilindro} + V_{cono} = \pi \cdot 7^2 \cdot 5 + \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 4}{3} = 3{,}14 \cdot 7^2 \cdot 5 + \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4}{3} =$

$= 806{,}98$ cm^3.

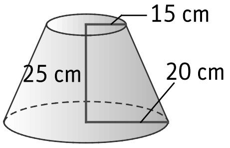
b) El volumen del cuerpo geométrico es $V = V_{cilindro} + V_{semiesfera} = \pi \cdot 3^2 \cdot 3 + \frac{4 \cdot \pi \cdot 2^3}{3 \cdot 2} = 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 2^3}{3 \cdot 2} =$

$= 101{,}53$ cm^3.

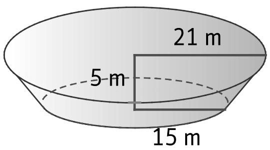
87. Actividad resuelta.

88. Halla el volumen de los siguientes troncos de cono.

a)



b)



a) Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen del cono completo.

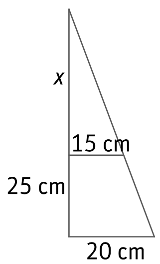
Para hallar la altura del cono, utilizamos la semejanza de triángulos.

$\frac{x}{15} = \frac{x+25}{20} \Rightarrow 20x = 15x + 375 \Rightarrow 5x = 375 \Rightarrow x = 75$ cm

Por tanto, la altura del cono completo es de 100 cm.

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 100}{3} - \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 75}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 20^2 \cdot 100}{3} - \frac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 75}{3} = 24\,204 \text{ cm}^3$$



b) Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen del cono completo.

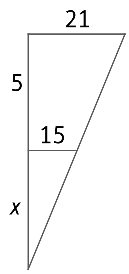
Para hallar la altura del cono, utilizamos la semejanza de triángulos.

$\frac{x}{15} = \frac{x+5}{21} \Rightarrow 21x = 15x + 75 \Rightarrow 6x = 75 \Rightarrow x = 12{,}5$ m

Por tanto, la altura del cono completo es de 17,5 m.

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot 21^2 \cdot 17{,}5}{3} - \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 12{,}5}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 21^2 \cdot 17{,}5}{3} - \frac{3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 12{,}5}{3} = 5133{,}9 \text{ m}^3$$



89. Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) Si un punto pertenece a una recta y a un plano, la recta está contenida en el plano.

b) Si dos planos son perpendiculares a una recta, son paralelos entre sí.

c) Los poliedros que tienen dos caras paralelas iguales son, con seguridad, prismas.

d) No existe ninguna pirámide triangular cóncava.

e) El número de caras de una pirámide siempre es impar.

f) Al cortar un cono por dos planos paralelos a la base, se obtiene un tronco de cono.

a) Falsa. La recta puede ser secante al plano en ese punto.

b) Verdadera.

c) Falsa. Por ejemplo, el antiprisma pentagonal tiene dos caras paralelas iguales, pero sus caras laterales no son paralelogramos.

d) Verdadera.

e) Falsa. Por ejemplo, el tetraedro tiene cuatro caras.

f) Verdadera.

90. Una diagonal de un poliedro es un segmento que une dos de sus vértices que no pertenecen a la misma cara. ¿Cómo son las diagonales en los poliedros convexos? ¿Y en los cóncavos?

En los poliedros convexos, las diagonales quedan siempre en su interior.

En los poliedros cóncavos, por lo menos una de las diagonales tiene una parte en el exterior.

91. Calcula el área total de un tetraedro si cada una de sus aristas mide 25 centímetros.

Todas las caras del tetraedro son triángulos equiláteros de lado 25 cm.

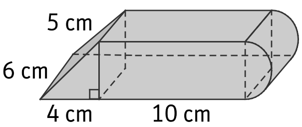
Calculamos la altura de una cara, aplicando el teorema de Pitágoras:

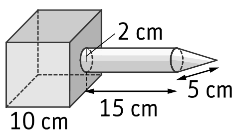
$h^2 = 25^2 - 12{,}5^2 = 468{,}75$ cm $\Rightarrow h = \sqrt{468{,}75} = 21{,}65$ cm

El área de una cara será $A = \dfrac{25 \cdot 21{,}65}{2} = 270{,}63$ cm^2.

Por tanto, el área total del tetraedro es $A_{total} = 270{,}63 \cdot 4 = 1082{,}52$ cm^2.

92. Halla el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

a) 

b) 

a) $V = V_{prisma\ triangular} + V_{ortoedro} + \dfrac{V_{cilindro}}{2}$

Calculamos la altura del prisma triangular, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow h = 3$ cm.

$V_{prisma\ triangular} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} \cdot 6 = 36$ cm^3 $\quad V_{ortoedro} = 10 \cdot 6 \cdot 3 = 180$ cm^3 $\quad \dfrac{V_{cilindro}}{2} = \dfrac{3{,}14 \cdot 1{,}5^2 \cdot 6}{2} = 21{,}20$ cm^3

El volumen del cuerpo es $V = V_{prisma\ triangular} + V_{ortoedro} + \dfrac{V_{cilindro}}{2} = 36 + 180 + 21{,}20 = 237{,}2$ cm^3.

b) $V = V_{cono} + V_{cilindro} + V_{cubo}$

Calculamos la altura del cono, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Rightarrow h = 4{,}58$ cm.

$V_{cono} = \dfrac{3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 4{,}58}{3} = 19{,}17$ cm^3 $\quad V_{cilindro} = 3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 15 = 188{,}4$ cm^3 $\quad V_{cubo} = 10^3 = 1000$ cm^3

El volumen del cuerpo es $V = V_{cono} + V_{cilindro} + V_{cubo} = 19{,}17 + 188{,}4 + 1000 = 1207{,}57$ cm^3.

93. Un cilindro macizo está inscrito en una esfera de radio 50 cm. Calcula el volumen que queda libre entre el cilindro y la esfera si se sabe que la altura del cilindro es de 80 cm.

$V = V_{esfera} - V_{cilindro}$

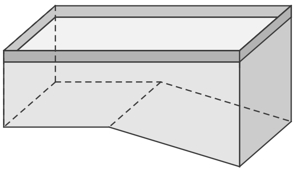
Calculamos el radio de la base del cilindro, aplicando el teorema de Pitágoras:

$r^2 = 50^2 - 40^2 = 900 \Rightarrow r = \sqrt{900} = 30$ cm

$V_{esfera} = \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 50^3}{3} = \dfrac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 50^3}{3} = 523\,333{,}33$ cm^3 $\qquad V_{cilindro} = \pi \cdot 30^2 \cdot 80 = 3{,}14 \cdot 30^2 \cdot 80 = 226\,080$ cm^3

El volumen del cuerpo es $V = V_{esfera} - V_{cilindro} = 523\,333{,}33 - 226\,080 = 297\,253{,}23$ cm^3.

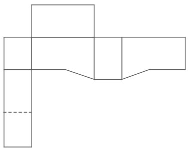
94. En la figura aparece un croquis que representa una piscina.



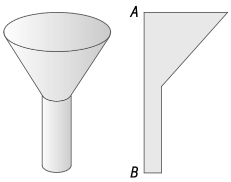
Clasifica la forma geométrica que tiene y elabora un desarrollo plano de la misma.

Se trata de un prisma pentagonal, recto y cóncavo.

Su desarrollo plano puede ser:



95. Dibuja un polígono tal que al girar alrededor de uno de sus lados dé como resultado el embudo de la figura.



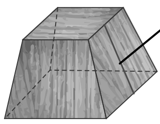
Al girar la figura plana alrededor del lado *AB* se obtiene el embudo.

96. Las dimensiones de una papelera cilíndrica son 20 cm de diámetro y 31 cm de altura. Calcula la superficie de material que se ha necesitado para fabricarla.

$A_{lateral} = 2\pi rh = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \cdot 31 = 1946{,}8$ cm^2 y $A_{base\ inferior} = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314$ cm^2

Se han necesitado $A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 1946{,}8 + 314 = 2260{,}8$ cm^2 de material.

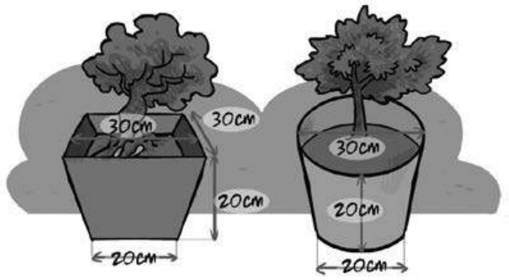
97. Calcula cuántos metros cuadrados de madera se necesitan para construir el podio representado en la figura si no tiene base inferior, es decir, se apoya directamente sobre el suelo.



$A_{lateral} = 4 \cdot \dfrac{3{,}75 + 5{,}25}{2} \cdot 4{,}5 = 81$ m^2 y $A_{base\ superior} = 3{,}75^2 = 14{,}06$ m^2

Se necesitan $A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 81 + 14{,}06 = 95{,}06$ m^2 de madera.

98. Las figuras representan macetas. ¿En cuál de ellas hay que echar más tierra para llenarla?



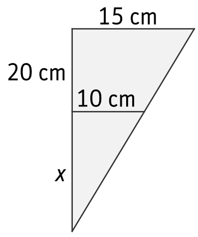
Para calcular la cantidad de tierra que hay que echar en cada maceta, calculamos los volúmenes de ambas.

1.ª maceta: tronco de pirámide

Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen de la pirámide completa.

Para hallar la altura de la pirámide, utilizamos la semejanza de triángulos.

$\frac{x}{10} = \frac{x+20}{15} \Rightarrow 15x = 10x + 200 \Rightarrow 5x = 200 \Rightarrow x = 40$ cm



Por tanto, la altura de la pirámide completa es de 60 cm.

El volumen del tronco de pirámide es, por tanto:

$$V_{tronco} = \frac{30^2 \cdot 60}{3} - \frac{20^2 \cdot 40}{3} = 12\,666{,}67 \text{ cm}^3$$

2.ª maceta: tronco de cono

Para obtener el volumen, restamos el volumen de la parte superior sobrante al volumen del cono completo.

Para hallar la altura del cono, utilizamos la semejanza de triángulos. Los triángulos en posición de Tales que se forman son los mismos que en el caso anterior.

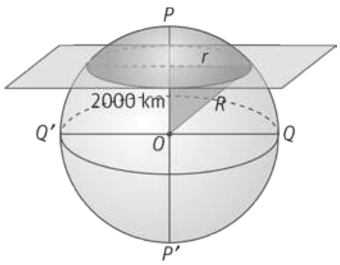
Por tanto, la altura del cono completa es de 60 cm, y la altura del cono sobrante, de 40 cm.

El volumen del tronco de cono es, por tanto:

$$V_{tronco} = \frac{\pi \cdot 15^2 \cdot 60}{3} - \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 40}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 225 \cdot 60}{3} - \frac{3{,}14 \cdot 100 \cdot 40}{3} = 9948{,}38 \text{ cm}^3$$

Luego para llenar las macetas, hay que echar más tierra en la que tiene forma de tronco de pirámide.

99. En la figura se representa el paralelo terrestre determinado por la intersección con un plano que dista del centro de la Tierra 2000 km.



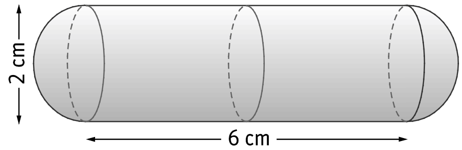
Calcula el radio de dicho paralelo tomando como radio medio terrestre 6371 km.

Calculamos el radio del paralelo, aplicando el teorema de Pitágoras:

$r^2 = R^2 - 2000^2 \Rightarrow r^2 = 6371^2 - 2000^2 = 36\,589\,641 \Rightarrow r = \sqrt{36\,589\,641} = 6048{,}94$ km

El radio del paralelo es, aproximadamente, de 6049 km.

100. Para almacenar cierto medicamento contra las inflamaciones óseas de caballos, se quieren construir cápsulas con forma de cilindro y semiesferas en sus extremos tal y como muestra la figura.



Calcula la cantidad de superficie que se precisa para construir cada cápsula, así como su volumen en cm³.

La cantidad de superficie que se precisa para construir cada cápsula es:

$A_{total} = A_{lateral\ cilindro} + A_{esfera} = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot \pi \cdot 1^2 = 50{,}24\ \text{cm}^2$

El volumen de cada cápsula es $V_{total} = V_{cilindro} + V_{esfera} = \pi \cdot 1^2 \cdot 6 + \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 1^3}{3} = 3{,}14 \cdot 6 + \dfrac{4 \cdot 3{,}14}{3} = 23{,}03\ \text{cm}^3$.

101. El papel que rodea una lata de conservas mide 14 cm de base y 4 cm de altura. ¿Cuál es el volumen de la lata?

Calculamos el radio de la base de la lata, sabiendo que el papel que la rodea mide 14 cm de base:

$14 = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow r = \dfrac{14}{2 \cdot 3{,}14} = 2{,}23\ \text{cm}$

El volumen de la lata es $V = \pi \cdot 2{,}23^2 \cdot 4 = 3{,}14 \cdot 5{,}3824 \cdot 4 = 62{,}46\ \text{cm}^3$.

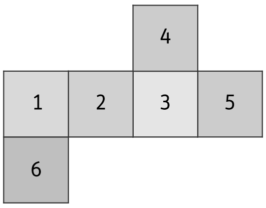
102. A cada una de las caras de un cubo de lado 1 cm le pegamos una pirámide cuadrangular en la que cada arista mide también 1 cm, obteniendo una especie de sólido estrellado. ¿Cuántas aristas tiene este nuevo sólido estrellado?

A. 28 **B. 24** **C. 48** **D. 36**

Originariamente hay 12 aristas, que se mantienen. Además, en cada una de las 6 caras, añadimos 4 aristas nuevas; es decir, añadimos 24 aristas. Por tanto, en total el nuevo sólido estrellado tiene 12 + 24 = 36 aristas.

La respuesta correcta es la D.

103. Si formamos un cubo con el siguiente desarrollo y multiplicamos los tres números de las tres caras que concurren en cada vértice, ¿cuál es el mayor producto que podemos obtener?



A. 60 **B. 72** **C. 90** **D. 120**

El mayor producto que podemos obtener es cuando concurren en un vértice las caras numeradas con 3, 5 y 6, en cuyo caso el producto de los números es 3 · 5 · 6 = 90.

La respuesta correcta es la C.

104. Un bote cilíndrico de bolas de tenis contiene tres bolas perfectamente ajustadas. ¿Qué proporción del volumen del bote está ocupado por las bolas?

A. $\dfrac{2\pi}{3}$ **B.** $\dfrac{2}{3}$ **C.** $\dfrac{\pi}{4}$ **D.** $\dfrac{3}{4}$

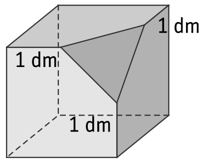
Llamando r al radio de cada bola, el cilindro tendrá radio r y altura $6r$.

Por tanto, $V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot 6r = 6\pi r^3$ y $V_{bolas} = 3 \cdot \dfrac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = 4\pi r^3$

La proporción del volumen ocupado por las bolas es $\dfrac{4\pi r^3}{6\pi r^3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

La respuesta correcta es la B.

105. En un vértice de un cubo de 2 dm de arista damos un corte y queda la figura que ves. ¿Cuál es el área, en decímetros cuadrados, de lo que queda de cubo?



A. $\frac{29}{2}$ **B.** $\frac{71}{2}$ **C.** 21 **D.** $\frac{45}{2}$

La figura resultante tiene tres caras que son cuadrados de lado 2 dm y otras tres caras que son pentágonos, obtenidos al quitar a un cuadrado de lado 2 dm un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1 dm.

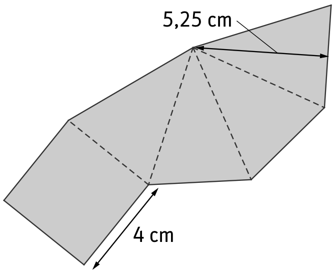
$A_{cara\ cuadrada} = 2^2 = 4\ dm^2$ $A_{cara\ pentagonal} = 2^2 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{7}{2}\ dm^2$

Por tanto, el área total de la figura será $A_{total} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{45}{2}\ dm^2$.

La respuesta correcta es la D.

Encuentra el error

106. Paula ha calculado el volumen de la pirámide que se construye a partir del desarrollo plano que aparece a continuación.



$$V_{pirámide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot 5{,}25}{3} = 28\ cm^3$$

¿Dónde está el error?

El error está en confundir la altura de la pirámide con la altura de la cara lateral o apotema de la pirámide. Además no se está calculando el área total, sino el volumen, y la unidad del volumen es cm^3.

Para calcular el volumen de esta pirámide, primero se tiene que hallar su altura, aplicando el teorema de Pitágoras: $h^2 = 5{,}25^2 - 2^2 = 23{,}56 \Rightarrow h = 4{,}85$ cm

Por tanto, $V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot 4{,}85}{3} = 25{,}87\ cm^3$

PONTE A PRUEBA

El tejado

Actividad resuelta.

Vuelo espacial

La estación espacial *Mir* permaneció en órbita 15 años y durante este tiempo dio aproximadamente 86 500 vueltas alrededor de la Tierra. La permanencia más larga de un astronauta en la *Mir* fue de 680 días. La *Mir* daba vueltas alrededor de la Tierra a una altura aproximada de 400 km. El diámetro de la Tierra mide aproximadamente 12 700 km y su circunferencia es de alrededor de 40 000 km (π × 12 700). Calcula aproximadamente la distancia total recorrida por la *Mir* durante sus 86 500 vueltas mientras estuvo en órbita. Redondea el resultado a las decenas de millón.

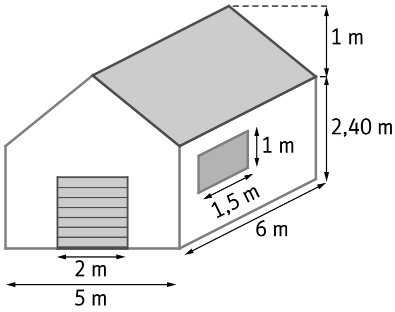
(Prueba PISA 2012)

El diámetro de la estación *Mir* es 12 700 + 2 · 400 = 13 500 km. Por tanto, la longitud de la órbita *Mir* es 13 500π.

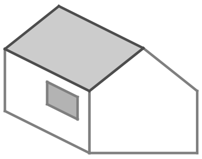
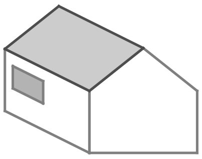
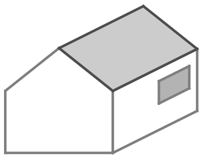
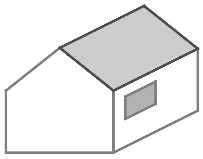
En total, la distancia recorrida por la *Mir* durante 86 500 vueltas fue 13 500π · 86 500 = 3 668 594 821 km; es decir, aproximadamente 3670 millones de kilómetros.

El garaje

La gama *básica* de un fabricante de garajes incluye modelos de una sola ventana y una sola puerta. Jorge elige el siguiente modelo de la gama *básica*. A continuación se muestra la posición de la ventana y de la puerta.



1. **Las siguientes ilustraciones muestran distintos modelos de la gama *básica* vistos desde la parte posterior. Solo una de las ilustraciones se corresponde con el modelo anterior elegido por Jorge. ¿Qué modelo eligió Jorge?**

A.  **B.**  **C.**  **D.** 

El modelo que eligió Jorge fue el B.

2. **Calcula la superficie de material necesaria para construir la estructura del garaje, sin tener en cuenta la puerta y la ventana.**

Para calcular el área del tejado, calculamos primero la base del rectángulo del mismo aplicando el teorema de Pitágoras:

$x^2 = 1^2 + 2{,}5^2 = 7{,}25 \Rightarrow x = 2{,}69$ m.

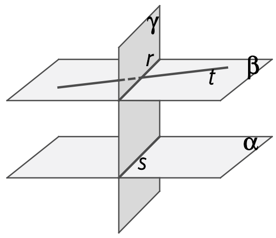
Como el tejado está formado por dos secciones rectangulares idénticas, $A_{tejado} = 2 \cdot 2{,}69 \cdot 6 = 32{,}38$ m^2.

$$A_{total} = A_{tejado} + A_{trasera} + A_{frontal} + A_{lateral} + A_{lateral\ ventana} = 32{,}38 + \left(5\cdot 2{,}40 + \frac{1\cdot 5}{2}\right) + \left(5\cdot 2{,}40 + \frac{1\cdot 5}{2} - 2^2\right) + 6\cdot 2{,}40 +$$
$$+ (6\cdot 2{,}40 - 1\cdot 1{,}5) = 32{,}38 + 14{,}5 + 10{,}5 + 14{,}4 + 12{,}9 = 84{,}68 \text{ m}^2$$

Se necesitarán 84,69 m^2 de material.

AUTOEVALUACIÓN

1. **En la siguiente figura, indica:**



a) **Dos planos paralelos.**

b) **Dos planos secantes.**

c) **Dos rectas paralelas.**

d) **Dos rectas secantes.**

e) **Dos rectas que se cruzan.**

f) **Una recta paralela a un plano.**

g) **Una recta contenida en un plano.**

a) Los planos α y β.

b) Los planos α y γ.

c) Las rectas *r* y *s*.

d) Las rectas *r* y *t*.

e) Las rectas *s* y *t*.

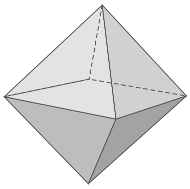
f) La recta *t* es paralela al plano α.

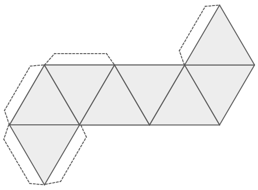
g) La recta *t* está contenida en el plano β.

2. **Un ángulo diedro tiene una amplitud de 55º 30'. ¿Cuánto medirá su ángulo diedro complementario?**

$90^\circ - 55^\circ\, 30' = 34^\circ\, 30'$

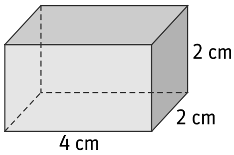
3. **Dibuja un octaedro regular y su desarrollo. Indica el número de caras, aristas y vértices que tiene, y comprueba que verifica el teorema de Euler.**

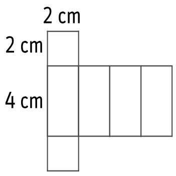




El octaedro regular tiene 8 caras, 6 vértices y 12 aristas. Cumple el teorema de Euler porque $C + V = A + 2 = 14$.

4. **Dibuja el desarrollo plano y calcula el área total y el volumen del prisma de la figura.**

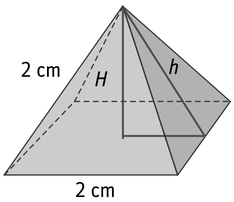




$A_{total} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 40 \text{ cm}^2$

$V = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^3$

5. **La pirámide de la figura tiene por base un cuadrado de lado 2 cm y los triángulos que forman las cuatro caras laterales son equiláteros.**



a) **Halla la altura *h* de cada una de las caras laterales y la altura *H* de la pirámide.**

b) **Calcula el área y el volumen de la pirámide.**

a) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$h^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3} = 1{,}73$ cm $\qquad H^2 = h^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow H = \sqrt{2} = 1{,}41$ cm

b) $A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1{,}73 + 2^2 = 10{,}92 \text{ cm}^2$ y $V = \frac{A_{base} \cdot H}{3} = \frac{2^2 \cdot 1{,}41}{3} = 1{,}88 \text{ cm}^3$

6. **Un cono tiene 4 cm de radio de la base y 3 cm de altura. Calcula su área total y su volumen.**

Hallamos la generatriz del cono aplicando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow g = \sqrt{25} = 5$ cm.

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = \pi r g + \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 4 \cdot 5 + 3{,}14 \cdot 4^2 = 113{,}04 \text{ cm}^2$ y $V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 3}{3} = \frac{3{,}14 \cdot 16 \cdot 3}{3} = 50{,}24 \text{ cm}^3$

7. **¿Es posible desarrollar en el plano una esfera? Calcula el área y el volumen de una esfera de 10 cm de diámetro.**

La esfera no admite ningún tipo de desarrollo plano; por tanto, no es posible desarrollar en el plano una esfera.

$A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 25 = 314 \text{ cm}^2$ y $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 5^3}{3} = 523{,}33 \text{ cm}^3$