13 Probabilidad

ANALIZA Y CONTESTA

El mago no sabe qué moneda voltea en cada ocasión. Puede cambiar una cruz por una cara, o al revés, en cinco ocasiones, pero sin saber qué está pasando. ¿Es realmente un fenómeno que depende del azar?

Seleccionar la moneda que va a voltear el mago es un fenómeno que depende del azar. Sin embargo, el volteo en sí de la moneda no depende del azar, puesto que se sabe que si una moneda es cara, pasará a ser cruz y viceversa.

¿Por qué cuenta el número de caras y cruces que aparecen al final?

Porque tras los cinco volteos, con independencia de entre cuántas monedas se han repartido dichos volteos, siempre se obtiene la misma configuración, hay tres monedas iguales y otra distinta (tres caras y una cruz, o bien tres cruces y una cara). Por este motivo, si tapamos una moneda al azar, siguiendo el paso cuatro del truco de magia podemos “adivinar” si la moneda que tapamos es cara o cruz.

REFLEXIONA Y PON EN COMÚN

Repite varias veces el truco y descubre el misterio por ti mismo. ¿Funcionaría el truco si al principio hubiese tres caras y tres cruces? ¿Y si hubiese cuatro?

No, el truco no funciona en ninguno de los nuevos casos. Se puede comprobar que existen configuraciones de las monedas en ambos casos que no verifican las propiedades dadas en el apartado 4 del truco de magia.

Ejemplo: Supongamos que tenemos tres caras y tres cruces, CCCXXX. Si volteamos cada una de las caras una vez y una de las cruces dos veces, realizamos cinco volteos y la configuración que obtenemos es XXXXXX. En este caso, tapando una de ellas obtenemos todo cruces, pero la moneda que estamos tapando también es cruz, en contradicción con el apartado 4 del truco de magia, que afirma que dicha moneda tapada debe ser cara.

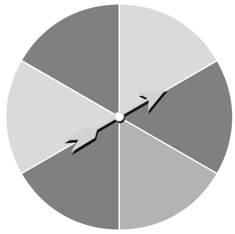
Actividades propuestas

1. **Actividad resuelta.**

2. **Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios.**
   - **a)** **Tirar un tótem al aire y que caiga de pie.**
   - **b)** **Anotar el horario de salida del tren de la estación.**
   - **c)** **Reproducir una canción de una lista de música.**
   - **d)** **Extraer una carta de la baraja y medir su anchura.**
   - **e)** **Lanzar un dado jugando al parchís.**

   - **a)** Experimento aleatorio.
   - **b)** Experimento determinista. El horario está determinado por el servicio de trenes.
   - **c)** Experimento aleatorio.
   - **d)** Experimento determinista. Todas las cartas de la baraja tienen la misma anchura.
   - **e)** Experimento aleatorio.

3. **Escribe el espacio muestral que se obtiene al hacer girar la aguja de la siguiente ruleta.**



   El espacio muestral es E = {rojo, verde, morado}.

4. **Extraemos sin mirar una carta de una baraja española de 40 cartas.**

a) **¿Cuántos resultados posibles hay? Describe el espacio muestral.**

b) **Si miramos solo el número sin importar el palo, ¿cuál es el espacio muestral?**

a) 40 resultados posibles.

Si consideramos O = oros, B = bastos, E = espadas y C = copas, el espacio muestral es el siguiente:

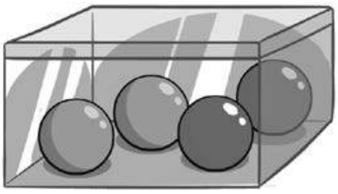
E = {1O, 2O, 3O, 4O, 5O, 6O, 7O, 10O, 11O, 12O, 1B, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, 10B, 11B, 12B, 1E, 2E, 3E, 4E, 5E, 6E, 7E, 10E, 11E, 12E, 1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 7C, 10C, 11C, 12C}

b) 10 resultados posibles. *E* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12}

5. **Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos utilizando una tabla de doble entrada o un diagrama de árbol.**

a) **Lanzar dos dados y sumar los resultados.**

b) **Extraer tres bolas de la siguiente urna.**



a) En este caso utilizaremos una tabla de doble entrada para determinar el espacio muestral.

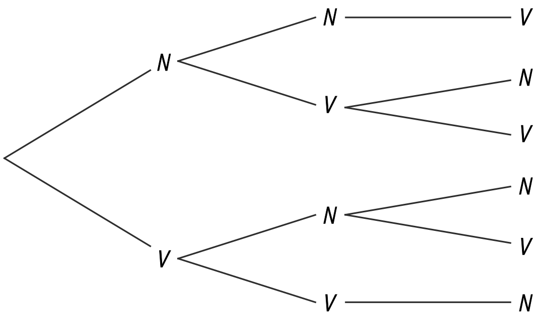
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

E = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

b) Teniendo en cuenta el número de bolas de cada color que tenemos en la urna y que se extraen tres bolas, el diagrama de árbol de este experimento aleatorio queda como sigue:

N = extraer una bola naranja

V = extraer una bola verde



El espacio muestral es *E* = {N-N-V, N-V-N, N-V-V, V-N-N, V-N-V, V-V-N}.

6. Existen dados con la forma de todos los poliedros regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

a) Describe el espacio muestral asociado al lanzamiento de cada uno de los dados anteriores.

b) Lanzamos un dado cúbico y un dado tetraédrico a la vez. Describe mediante una tabla de doble entrada el espacio muestral.

a) Tetraedro (4 caras): $E = \{1, 2, 3, 4\}$

Cubo (6 caras): $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Octaedro (8 caras): $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Dodecaedro (12 caras): $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Icosaedro (20 caras): $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

b) Como se lanza un dado cúbico (seis caras) y otro dado tetraédrico (cuatro caras), el espacio muestral de este experimento aleatorio estará formado por los siguientes elementos:

	1	**2**	**3**	**4**
1	1-1	1-2	1-3	1-4
2	2-1	2-2	2-3	2-4
3	3-1	3-2	3-3	3-4
4	4-1	4-2	4-3	4-4
5	5-1	5-2	5-3	5-4
6	6-1	6-2	6-3	6-4

E = {1 - 1, 1 - 2, 1 - 3, 1 - 4, 2 - 1, 2 - 2, 2 - 3, 2 - 4, 3 - 1, 3 - 2, 3 - 3, 3 - 4, 4 - 1, 4 - 2, 4 - 3, 4 - 4, 5 - 1, 5 - 2, 5 -3, 5 - 4, 6 - 1, 6 - 2, 6 - 3, 6 - 4}

7. En el experimento de sacar una carta de una baraja española:

a) Describe un suceso posible.

b) Describe un suceso imposible.

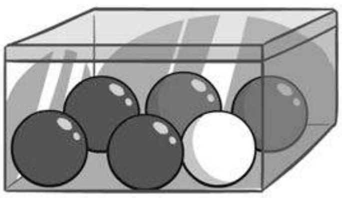
c) Describe un suceso seguro.

a) Sacar el rey de oros.

b) Sacar el as de picas.

c) Sacar una carta de oros, bastos, espadas o copas.

8. Una urna contiene las siguientes bolas.



a) Escribe el espacio muestral.

b) Describe dos sucesos compuestos.

c) ¿Qué suceso sería seguro? Compara tu respuesta con la de un compañero.

a) E = {rojo, azul, blanco}

b) Sucesos compuestos: {rojo, azul}, {rojo, blanco}

c) Sacar una bola roja o azul o blanca.

9. Actividad resuelta.

10. Se lanzan tres monedas y se anotan los resultados obtenidos.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Describe un suceso elemental y un suceso compuesto.

c) ¿Cuántos sucesos formados por tres elementos hay?

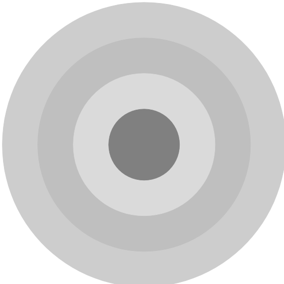
a) E = {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}

b) Suceso elemental: {CCC}

Suceso compuesto: {CCX, XXC}

c) El número de sucesos que hay formados por tres elementos coincide, en este caso, con el número de sucesos del espacio muestral, esto es, ocho.

11. Se lanza un dardo a esta diana.



a) Escribe el espacio muestral.

b) Describe un suceso imposible.

c) Describe un suceso seguro.

d) Indica tres sucesos compuestos si lanzamos dos dardos a la diana.

a) E = {azul, verde, amarillo, rojo}

b) Dar con el dardo en la zona negra.

c) Dar con el dardo en la zona azul o verde o amarilla o roja.

d) Sucesos compuestos: {rojo, amarillo}, {azul, verde}, {verde, amarillo}

12. En una carrera participan 3 caballos *A*, *B* y *C*.

a) {*A*, *B*, *C*} es un posible orden de llegada de los caballos a la meta. ¿Cuántas llegadas diferentes pueden tener lugar? Indícalas.

b) Consideramos el suceso *T* = "gana el caballo *A*". ¿Cuántos elementos tiene este suceso?

c) Consideramos el suceso *R* = "no gana *B*". ¿Cuántos elementos lo forman?

a) El número de posibles llegadas diferentes es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

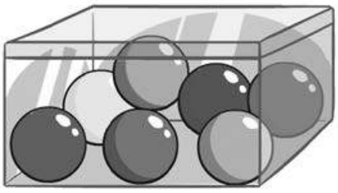
{{A, B, C}, {A, C, B}, {B, A, C}, {B, C, A}, {C, A, B}, {C, B, A}}

b) Dos elementos: {A, B, C}, {A, C, B}

c) Cuatro elementos: {A, B, C}, {A, C, B}, {C, A, B}, {C, B, A}

13. Actividad resuelta.

14. Una urna contiene las siguientes bolas.



Extraemos una bola sin mirar y anotamos su color. Consideramos los sucesos *A* = "sacar una bola roja" y *B* = "sacar una bola que no sea verde".

a) Escribe el espacio muestral.

b) Halla los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.

c) Escribe los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$.

d) Halla los sucesos $\overline{A} \cup B$ y $A \cap \overline{B}$.

a) E = {verde, amarillo, rosa, morado, rojo, naranja, azul}

b) En el suceso $A \cup B$ se ha de verificar *A* o *B*, es decir, sacar una bola roja o sacar una bola que no sea verde.

$A \cup B$ = {amarillo, rosa, morado, rojo, naranja, azul}

En el suceso $A \cap B$ se ha de verificar *A* y *B*, es decir, sacar una bola roja y que a la vez no sea verde.

$A \cap B$ = {rojo}

c) El suceso contrario de *A*, $\overline{A}$, se verifica cuando no se da *A*, es decir, cuando sacamos una bola que no sea roja.

$\overline{A}$ = {verde, amarillo, rosa, morado, naranja, azul}

El suceso contrario de *B*, $\overline{B}$, se verifica cuando no se verifica *B*, es decir, cuando sacamos una bola verde.

$\overline{B}$ = {verde}

d) En el suceso $\overline{A} \cup B$ se ha de verificar $\overline{A}$ o *B*, es decir, sacar una bola que no sea roja o sacar una bola que no sea verde. Se tiene que el suceso $\overline{A} \cup B$ coincide con el espacio muestral.

$\overline{A} \cup B = E$

En el suceso $A \cap \overline{B}$ se ha de verificar A y $\overline{B}$, es decir, sacar una bola roja y sacar una bola verde. Esto no es posible, por lo que $A \cap \overline{B}$ es un suceso imposible.

$A \cap \overline{B} = \varnothing$

15. En el experimento de lanzar un dado cúbico consideramos los sucesos:

***A* = "salir un número par"** **C = {1, 2, 5}**

***B* = "salir un número menor que 3"** **D = {3}**

Halla:

a) $A \cup B$ **c)** $B \cup C$ **e)** $\overline{B}$

b) $A \cap C$ **d)** $C \cap D$ **f)** $\overline{C \cup D}$

a) $A \cup B$ = {1, 2, 4, 6}

b) $A \cap C$ = {2}

c) $B \cup C$ = {1, 2, 5}

d) $C \cap D = \varnothing$

e) $\overline{B}$ = {3, 4, 5, 6}

f) $C \cup D$ = {1, 2, 3, 5} $\Rightarrow$ $\overline{C \cup D}$ = {4, 6}

16. Indica, a partir de los sucesos del ejercicio anterior, si son compatibles o incompatibles los sucesos:

a) *A* y *B* **b) *A* y *C*** **c) *C* y *D***

a) $A \cap B$ = {2} $\Rightarrow$ Sucesos compatibles

b) $A \cap C$ = {2} $\Rightarrow$ Sucesos compatibles

c) $C \cap D = \varnothing$ $\Rightarrow$ Sucesos incompatibles

17. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Consideramos los sucesos:

***A* = "sacar un as"**
***B* = "sacar un oro"**
***C* = "sacar una carta menor que 4"**

a) Describe los sucesos $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$.

b) Describe los sucesos $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$.

c) Describe los sucesos $\overline{A}$, $\overline{B}$ y $\overline{C}$.

a) $A \cup B$ = "sacar un as o sacar un oro"
$A \cup C$ = "sacar un as o sacar una carta menor que 4" = "sacar una carta menor que 4"
$B \cup C$ = "sacar un oro o sacar una carta menor que 4"

b) $A \cap B$ = "sacar un as y sacar un oro" = "sacar el as de oros"
$A \cap C$ = "sacar un as y sacar una carta menor que 4" = "sacar un as"
$B \cap C$ = "sacar un oro y sacar una carta menor que 4" = "sacar un oro menor que 4"

c) $\overline{A}$ = "sacar una carta que no sea un as"
$\overline{B}$ = "sacar una carta que no sea de oros" = "sacar una carta de espadas, bastos o copas"
$\overline{C}$ = "sacar una carta mayor o igual que 4"

18. Lanzamos un dado dodecaédrico y miramos el número de la cara superior. Describe los sucesos siguientes:

a) "Salir un múltiplo de 4"

b) "Salir un número primo"

c) "Salir múltiplo de 5 o par"

d) "Salir múltiplo de 5 y par"

Como lanzamos un dado dodecaédrico, el espacio muestral es E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

a) {4, 8, 12}

b) {2, 3, 5, 7, 11}

c) {2, 4, 5, 6, 8, 10, 12}

d) {10}

19. Se elige al azar un número entre el 1 y el 50.

a) Indica los elementos de los sucesos:
***A* = "salir múltiplo de 5"**
***B* = "salir un número que empieza por 3"**
***C* = "salir un número terminado en 0"**

b) Escribe los elementos de los sucesos $A \cap B$, $A \cap C$ y $A \cup C$.

c) ¿Son compatibles los sucesos *A* y *B*? ¿Y los sucesos *A* y *C*?

a) *A* = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}
B = {3, 30}
C = {10, 20, 30, 40, 50}

b) $A \cap B$ = {30}
$A \cap C$ = {10, 20, 30, 40, 50} = *C*
$A \cup C$ = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50} = *A*

c) *A* y *B* son sucesos compatibles, puesto que hemos visto en el apartado anterior que $A \cap B \neq \varnothing$.
A y *C* son sucesos compatibles, puesto que hemos visto en el apartado anterior que $A \cap C \neq \varnothing$.

20. Actividad resuelta.

21. En un cuadrado de lado 2 dm se coloca una diana de radio 1 dm. Se han efectuado 500 disparos con estos resultados: 386 han dado en la diana y el resto han dado fuera.

a) Asigna la probabilidad de acertar en la diana.

b) Si las dimensiones del círculo grande y el cuadrado fueran mayores, ¿habría más probabilidad de acertar?

a) Para asignar la probabilidad de acertar en la diana vamos a considerar como casos posibles todos los disparos efectuados, 500, y como casos favorables, aquellos disparos que han dado en la diana, 386.

$P(\text{diana}) = \frac{386}{500} = 0{,}772$

b) En el caso que nos ocupa, para calcular la probabilidad de acertar en la diana debemos hallar el cociente entre el área de la diana y el área del cuadrado.

Área de la diana $= \pi \cdot 1^2 = \pi$ dm^2

Área del cuadrado $= 2^2 = 4$ dm^2

$P(\text{diana}) = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$

Supongamos, en general, que el cuadrado tiene de lado una longitud L dm, mientras que la diana tiene un radio de longitud $r = \frac{L}{2}$.

Área de la diana $= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot L^2}{4}$ dm^2

Área del cuadrado $= L^2$ dm^2

Por tanto, considerando de nuevo la probabilidad de dar en la diana como el cociente entre el área de la diana y el área del cuadrado, tenemos que $P(\text{diana}) = \frac{\frac{\pi \cdot L^2}{4}}{L^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$.

Esto nos permite concluir que si modificamos las dimensiones de la diana y del cuadrado, pero el cuadrado continúa circunscribiendo a la diana, la probabilidad de acertar en la diana no cambia.

22. Actividad resuelta.

23. De una baraja española se extrae una carta. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Un tres.

b) El rey de bastos.

c) Un rey que no sea de bastos.

d) Una sota o un caballo.

Vamos a considerar la baraja española de 40 cartas, por lo que tenemos 40 casos posibles.

a) Como tenemos un tres por cada palo de la baraja, nuestros casos favorables son cuatro.

$P(\text{tres}) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

b) En la baraja española hay un único rey de bastos.

$P(\text{rey de bastos}) = \frac{1}{40} = 0{,}025$

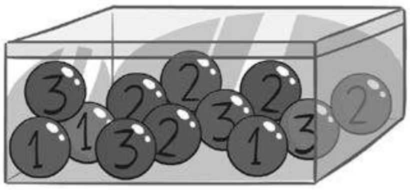
c) Sabemos que hay tres reyes que no son de bastos: el rey de copas, el de espadas y el de oros.

$P(\text{rey que no sea de bastos}) = \frac{3}{40} = 0{,}075$

d) En la baraja española hay cuatro sotas, una por cada palo, y cuatro caballos, también uno por cada palo. Por tanto, nuestros casos favorables son ocho.

$P(\text{sota o caballo}) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

24. Se extrae una bola de la siguiente urna.



Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) La bola es verde.

b) La bola no es roja.

c) La bola es verde o azul.

d) La bola no tiene el número 2.

e) La bola es roja y tiene el número 1.

a) Observando la urna, vemos que hay 12 bolas, de las cuales 4 son verdes.

$P(\text{verde}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0{,}333$

b) De las 12 bolas que contiene la urna, hay 4 bolas verdes y 3 bolas azules, por lo que tenemos 7 bolas que no son rojas.

$P(\text{no roja}) = \frac{7}{12} = 0{,}583$

c) Puesto que en la urna solo hay bolas de color rojo, verde o azul, considerar las bolas de color verde o azul es lo mismo que considerar las que no son rojas. Por tanto, la probabilidad de sacar una bola verde o azul es la misma que la de sacar una bola no roja (apartado b).

$P(\text{verde o azul}) = P(\text{no roja}) = 0{,}583$

d) De las 12 bolas que hay en la urna, 7 de ellas tienen un número distinto al 2.

$P(\text{no } 2) = \frac{7}{12} = 0{,}583$

e) Ninguna de las bolas de la urna es roja y tiene el número 1. Por tanto, el número de casos favorables es 0.

$P(\text{roja y } 1) = \frac{0}{12} = 0$

Para resolver este apartado, también podemos observar que estamos ante un suceso imposible, por lo que su probabilidad es 0.

25. Se lanza un dado de ocho caras numeradas del 1 al 8.

a) ¿Qué probabilidad hay de sacar un número par?

b) ¿Qué probabilidad hay de obtener un número primo?

c) ¿Qué es más probable, obtener un múltiplo de 2 o un múltiplo de 3?

El número de casos posibles coincide con el número de caras, es decir, ocho.

a) Los números pares que aparecen en las caras del dado son {2, 4, 6, 8}, por lo que tenemos cuatro casos favorables.

$P(\text{par}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

b) Los números primos de las caras de los dados son {2, 3, 5, 7}, obteniendo de nuevo cuatro casos favorables.

$P(\text{primo}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

c) Los múltiplos de 2 son {2, 4, 6, 8}, mientras que los múltiplos de 3 son {3, 6}.

$P(\text{múltiplo de } 2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$P(\text{múltiplo de } 3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Por tanto, es más probable obtener un múltiplo de 2 que un múltiplo de 3.

26. En un juego para dos jugadores, Elsa y Benito lanzan dos dados y se anota su suma. Elsa gana si la suma sale un número par y Benito si sale un número impar.

a) ¿Es justo el juego?

b) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?

c) Calcula las probabilidades de cada uno si en lugar de sumar los resultados de los dados los multiplican, y Elsa sigue apostando a que sale par y Benito a que sale impar.

a) Para determinar si el juego es justo, vamos a calcular el espacio muestral del experimento aleatorio y los casos favorables a Elsa y a Benito.

Suma	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Así, el espacio muestral es $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Los casos favorables a Elsa son {2, 4, 6, 8, 10, 12}, mientras que los de Benito son {3, 5, 7, 9, 11}. Como el número de casos favorables de Elsa son seis, mientras que los casos favorables de Benito son cinco, el juego no es justo, puesto que Elsa tiene mayor probabilidad de ganar que Benito.

b) $P(\text{gana Elsa}) = \frac{6}{11} = 0{,}545$ $\qquad$ $P(\text{gana Benito}) = \frac{5}{11} = 0{,}455$

c) Determinemos ahora el espacio muestral en el caso de multiplicar los resultados de los dados.

Multiplicación	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$.

Como Elsa sigue apostando a que sale par, sus casos favorables son {2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 30, 36}, mientras que los favorables a Benito son {1, 3, 5, 9, 15, 25}.

$P(\text{gana Elsa}) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} = 0{,}667$ $\qquad$ $P(\text{gana Benito}) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} = 0{,}333$

27. Actividad resuelta.

28. De los experimentos siguientes, indica los que son aleatorios y escribe su espacio muestral.

a) Medir el tiempo que tarda una canica en llegar al suelo.

b) Lanzar una moneda de 20 céntimos de euro a un tablero de ajedrez y anotar si toca o no alguna línea.

c) Extraer una carta de una baraja española y mirar su número.

d) Indicar el número de litros de pintura necesarios para pintar tu habitación.

a) Experimento determinista, puesto que aplicando las leyes de la física se puede calcular el tiempo que tarda la canica en llegar al suelo.

b) Experimento aleatorio. E = {Sí, No}

c) Experimento aleatorio. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12\}$

d) Experimento determinista. Conociendo las dimensiones de la habitación, se puede determinar el número de litros necesarios para pintarla.

29. En la lotería nacional, los números van del 00000 al 99999. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuáles no:

a) Es más difícil que salga el 44444 que el 32578.

b) Es más difícil que salga un número que tenga todas las cifras iguales que uno que tenga todas diferentes.

c) Es preferible comprar un número grande como el 54980 antes que uno pequeño como el 00232.

d) Salen más veces los números que terminan en 5.

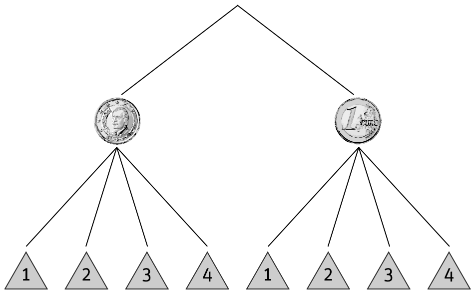
a) Falsa. Todos los números tienen la misma probabilidad de salir.

b) Falsa. Todos los números tienen la misma probabilidad de salir.

c) Falsa. Tienen la misma probabilidad de salir los números grandes que los pequeños.

d) Falsa. La probabilidad de que salga un número que acaba en 5 es la misma que la de cualquier otro número.

30. Se lanzan al aire una moneda y un dado tetraédrico.



a) Observa el diagrama de árbol y escribe el espacio muestral. ¿Cuántos elementos tiene?

b) Escribe los elementos del suceso "salir cara y número impar".

c) Escribe los elementos del suceso "salir un 6".

a) *E* = {C1, C2, C3, C4, X1, X2, X3, X4}. El espacio muestral tiene ocho elementos.

b) "Sacar cara y número impar" = {C1, C3}

c) Se trata de un suceso imposible, $\varnothing$, puesto que en este experimento nunca puede salir un 6.

31. Se lanzan dos dados de ocho caras y se suman los resultados.

a) ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener?

b) Escribe los elementos del suceso *A* = "sumar 10".

a) Construyamos una tabla de doble entrada para determinar los resultados que se obtienen en este experimento.

Suma	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12
5	6	7	8	9	10	11	12	13
6	7	8	9	10	11	12	13	14
7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	9	10	11	12	13	14	15	16

El espacio muestral es *E* = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}. Por tanto, en este experimento se pueden obtener 15 resultados distintos.

b) Los elementos del suceso *A* = "sumar 10" son los que aparecen en rojo en la tabla anterior.

{(2,8), (3,7), (4,6), (5,5), (6,4), (7,3), (8,2)}

32. **Actividad resuelta.**

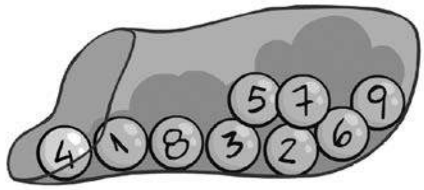
33. **Una bolsa contiene las siguientes bolas.**

Consideramos los siguientes sucesos:

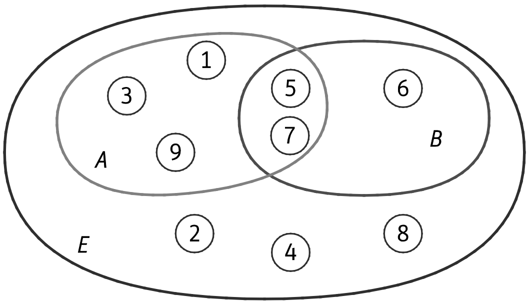
A = {1, 3, 5, 7, 9}

B = {5, 6, 7}

Escribe los elementos de los siguientes sucesos con ayuda de diagramas de Venn:



a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$ **c)** $\overline{A}$ **d)** $\overline{B}$



a) $A \cup B$ = {1, 3, 5, 6, 7, 9}

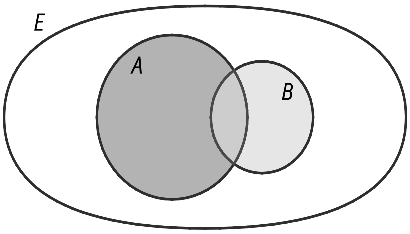
b) $A \cap B$ = {5, 7}

c) $\overline{A}$ = {2, 4, 6, 8}

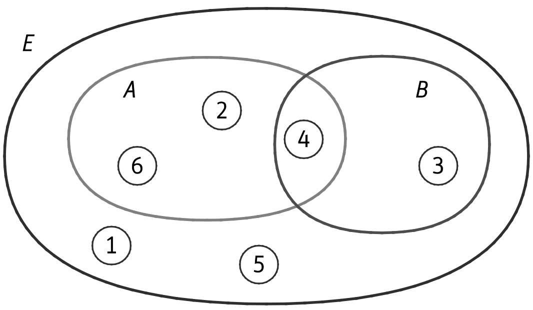
d) $\overline{B}$ = {1, 2, 3, 4, 8, 9}

34. **Lanzamos un dado y consideramos los sucesos A = "salir número par" y B = {3, 4}.**

Dibuja en tu cuaderno las siguientes regiones del diagrama de Venn, coloca los números e indica los elementos que forman los sucesos.



a) $A \cap B$ **b)** $A \cup B$ **c)** $\overline{A}$ **d)** $A \cap \overline{B}$



a) $A \cap B$ = {4}

b) $A \cup B$ = {2, 3, 4, 6}

c) $\overline{A}$ = {1, 3, 5}

d) A = {2, 4, 6}, $\overline{B}$ = {1, 2, 5, 6}, $A \cap \overline{B}$ = {2, 6}

35. **Se escriben en cinco papeles las letras de la palabra Paris, se meten en una bolsa y se extraen al azar.**

P	**A**	**R**	**I**	**S**

a) **Escribe los sucesos elementales.**

b) **Describe el suceso "sacar consonante".**

c) **Describe un suceso imposible.**

d) **Describe un suceso seguro.**

a) Sucesos elementales: {P}, {A}, {R}, {I}, {S}

b) "Sacar consonante" = {P, R, S}

c) "Sacar la letra D"

d) Suceso seguro: E = {P, A, R, I, S}

36. Se lanza una bola en una ruleta de 36 números, numerados del 1 al 36. Describe los siguientes sucesos:

a) *A* = "Salir par y múltiplo de 6".

b) *B* = "Salir primo o múltiplo de 5".

c) *C* = "Salir lo contrario que en B".

a) A = {6, 12, 18, 24, 30, 36}

b) B = {2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 23, 25, 29, 30, 31, 35}

c) $C = \overline{B}$ = {1, 4, 6, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 36}

37. Se lanza un dado icosaédrico. Escribe los elementos de los siguientes sucesos:

a) Salir un múltiplo de 3.

b) Salir múltiplo de 3 y par.

c) Salir múltiplo de 3 o par.

d) Salir un número mayor que 13.

Puesto que se lanza un dado icosaédrico, los elementos del espacio muestral son los números del 1 al 20.

a) {3, 6, 9, 12, 15, 18}

b) {6, 12, 18}

c) {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

d) {14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

38. Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se consideran los sucesos:

***A* = "obtener una carta de oros"**

***B* = "obtener una sota"**

***C* = "obtener un tres"**

Di si son compatibles o incompatibles los sucesos:

a) *A* y *B* **b) *A* y *C*** **c) *A*, *B* y *C***

a) Compatibles, puesto que $A \cap B$ = "obtener la sota de oros".

b) Compatibles, puesto que $A \cap C$ = "obtener el tres de oros".

c) Incompatibles, ya que $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap \varnothing = \varnothing$.

39. De una bolsa que contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8 se extrae una bola sin mirar. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) El suceso "múltiplo de 2" es incompatible con el suceso "número par".

b) Los sucesos "par" y "primo" son compatibles.

c) Los sucesos "primo" y "cuadrado perfecto" son incompatibles.

a) Falsa. A = "múltiplo de 2" = {2, 4, 6, 8} y B = "número par" = {2, 4, 6, 8}, luego $A \cap B$ = {2, 4, 6, 8}.

b) Verdadera. A = "par" = {2, 4, 6, 8} y B = {2, 3, 5, 7}, por lo que $A \cap B$ = {2}.

c) Verdadera. A = "primo" = {2, 3, 5, 7} y B = {4 = 2^2}, luego $A \cap B = \varnothing$.

40. Lanzamos un dado tetraédrico y uno cúbico y anotamos la suma de los dos.

a) ¿Cuántos elementos tendrá el espacio muestral?

b) Escribe los elementos del suceso "sumar 8".

a) Construyamos una tabla de doble entrada para determinar los resultados que se obtienen en este experimento.

Suma	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

El espacio muestral es $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Por tanto, el espacio muestral tiene nueve elementos.

b) Los elementos del suceso "sumar 8" son los que aparecen en rojo en la tabla anterior. {(2,6), (3,5), (4,4)}

41. Se extraen dos cartas de una baraja española y se mira a qué palo pertenecen. Indica cuál es el suceso contrario al suceso *A* = "salir dos cartas de copas".

A. Una es de copas y la otra no.

B. Ninguna de las dos es de copas.

C. Al menos una no es de copas.

D. Las dos son espadas.

El suceso contrario de *A* = "salir dos cartas de copas" es la respuesta C., "al menos una no es de copas". Otra manera de escribir el suceso contrario de *A* es "salir una o ninguna carta de copas".

42. Emprende

Elegid, entre toda la clase, un tema de interés común:

- **Serie de televisión favorita.**
- **Red social favorita.**
- **Etc…**

Diseñad, por grupos, una encuesta en torno al tema elegido para realizarla entre los alumnos del instituto.

a) Hallad las frecuencias relativas.

b) Comparad los resultados obtenidos entre los grupos. Si se elige un alumno del instituto al azar, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca a cada una de las opciones? ¿Se diferencia mucho el resultado en cada grupo?

Respuesta libre.

43. Se ha lanzado un dado 100 veces y se han obtenido los siguientes resultados.

Cara	1	2	3	4	5	6
Frecuencia absoluta	19	18	16	18	16	13

Calcula la frecuencia relativa de los sucesos:

a) *A* = "obtener múltiplo de 3".

b) *B* = "sacar menos de 3".

c) *C* = "no sacar un 5".

d) *D* = "no sacar ni 5 ni 6"

a) Frecuencia relativa *A*: $\frac{16}{100}+\frac{13}{100}=\frac{29}{100}=0,29$

b) Frecuencia relativa *B*: $\frac{19}{100}+\frac{18}{100}=\frac{37}{100}=0,37$

c) Frecuencia relativa *C*: $\frac{19}{100}+\frac{18}{100}+\frac{16}{100}+\frac{18}{100}+\frac{13}{100}=\frac{84}{100}=0,84$

d) Frecuencia relativa *D*: $\frac{19}{100}+\frac{18}{100}+\frac{16}{100}+\frac{18}{100}=\frac{71}{100}=0,71$

44. En una empresa que fabrica tornillos realizan un control de producción recogiendo 600 tornillos cada día de la semana y comprueban los que salen defectuosos:

Día	L	M	X	J	V
Defectuosos	12	9	7	11	10

a) Halla la frecuencia relativa de los tornillos defectuosos de cada día.

b) Halla la frecuencia relativa de los tornillos defectuosos a lo largo de la semana.

c) Si elegimos al azar uno de los tornillos fabricados en la semana, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

a)

Día	L	M	X	J	V
Frecuencia relativa	$\frac{12}{600}=0{,}02$	$\frac{9}{600}=0{,}015$	$\frac{7}{600}=0{,}0117$	$\frac{11}{600}=0{,}0183$	$\frac{10}{600}=0{,}0167$

b) Para calcular la frecuencia relativa de los tornillos defectuosos de toda la semana hallaremos el cociente entre el número total de tornillos defectuosos y el número total de tornillos seleccionados.

$$\frac{12+9+7+11+10}{5\cdot 600}=\frac{49}{3000}=0{,}0163$$

c) La probabilidad de que un tornillo fabricado a lo largo de la semana sea defectuoso coincide con la frecuencia relativa de los tornillos defectuosos a lo largo de la semana, es decir, 0,0163.

45. Se sospecha que una moneda está trucada. Los resultados de obtener cara y cruz en sucesivos lanzamientos han sido:

Lanzamientos	10	20	40	80	120
N.º de cruces	5	9	16	26	52

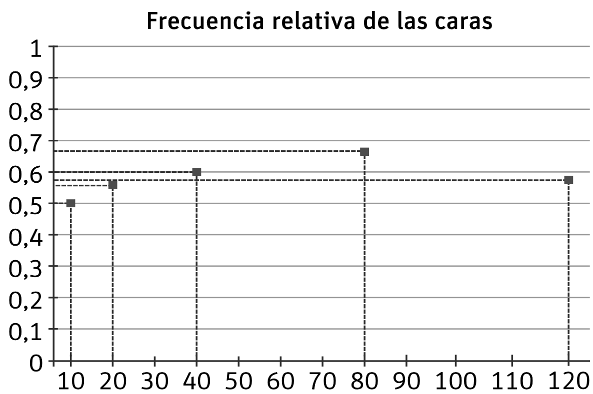
a) Representa en unos ejes cartesianos la frecuencia relativa de las caras respecto del número de lanzamientos.

b) ¿Cuál sería la probabilidad de "salir cara"?

c) ¿Está trucada la moneda?

a)

Lanzamientos	10	20	40	80	120
N.º de cruces	5	9	16	26	52
N.º de caras	5	11	24	54	68
Frecuencia relativa (caras)	$\frac{5}{10}=0{,}5$	$\frac{11}{20}=0{,}55$	$\frac{24}{40}=0{,}6$	$\frac{54}{80}=0{,}675$	$\frac{68}{120}=0{,}567$



b) Si repitiéramos el experimento indefinidamente, parece que la frecuencia relativa de las caras tendería a 0,6. Por tanto, la probabilidad de "salir cara" es 0,6.

c) Sí, la moneda está trucada porque la frecuencia de "salir cara" en una moneda no trucada es 0,5.

46. Actividad resuelta.

47. En una excursión viajan 50 personas. Los que llevan paraguas no llevan chubasquero y los que llevan chubasquero no llevan paraguas. Se elige una persona al azar.

Si 22 personas llevan paraguas, ¿qué probabilidad hay de haber elegido una que lleve chubasquero?

El número de personas que llevan chubasquero coincide con el de las personas que no llevan paraguas.

50 – 22 = 28 personas llevan chubasquero.

Por tanto, para calcular la probabilidad de haber elegido una persona que lleve chubasquero tenemos 28 casos favorables de 50 casos posibles.

$P(\text{chubasquero}) = \frac{28}{50} = 0{,}56$

48. Tenemos 25 fichas numeradas del 1 al 25. Se extrae una al azar. Calcula las probabilidades de que:

a) Sea impar.

b) Sea mayor que 7 y menor que 23.

c) Sea múltiplo de 3 o menor que 7.

d) Sea múltiplo de 3 y menor que 7.

En este experimento aleatorio, el número de casos posibles es 25.

a) Casos favorables: {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25}

$P(\text{impar}) = \frac{13}{25} = 0{,}52$

b) Casos favorables: {8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22}

$P(\text{mayor que 7 y menor que 23}) = \frac{15}{25} = 0{,}6$

c) Casos favorables: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24}

$P(\text{múltiplo de 3 o menor que 7}) = \frac{12}{25} = 0{,}48$

d) Casos favorables: {3, 6}

$P(\text{múltiplo de 3 y menor que 7}) = \frac{2}{25} = 0{,}08$

49. De una baraja española de 40 cartas se extrae una carta. Calcula la probabilidad de obtener:

a) Un as.

b) El rey de bastos.

c) Un rey que no sea de bastos.

d) Una figura (sota, caballo o rey).

e) Una carta que no sea de oros.

En el experimento aleatorio que nos ocupa, el número de casos posibles es 40.

a) El número de casos favorables es cuatro, ya que hay un as por cada uno de los cuatro palos de la baraja.

$P(\text{as}) = \frac{4}{40} = 0{,}1$

b) El número de casos favorables es uno, puesto que solo hay un rey de bastos en toda la baraja.

$P(\text{rey de bastos}) = \frac{1}{40} = 0{,}025$

c) En esta ocasión tenemos tres casos favorables: el rey de espadas, el de oros y el de copas.

$P(\text{rey que no sea de bastos}) = \frac{3}{40} = 0{,}075$

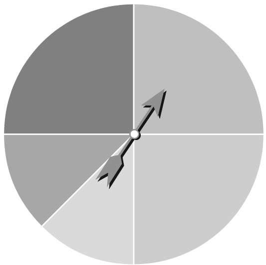
d) Como hay tres figuras por cada uno de los cuatro palos de la baraja, en total tenemos 12 casos favorables.

$P(\text{figura}) = \frac{12}{40} = 0{,}3$

e) En la baraja hay 10 cartas de oros, luego tenemos 30 cartas que no lo son. Por tanto, hay 30 casos favorables.

$P(\text{carta que no sea de oros}) = \frac{30}{40} = 0{,}75$

50. En un juego de mesa se dispone de la siguiente ruleta.



Calcula las probabilidades de:

a) Que la aguja caiga en la zona amarilla.

b) Que la aguja no caiga en la zona verde.

a) La zona amarilla se corresponde con un sector circular de 45º. Por tanto, la probabilidad de que la aguja caiga en la zona amarilla es:

$P(\text{zona amarilla}) = \dfrac{45}{360} = 0{,}125$

b) La zona verde se corresponde con un sector circular de 90º, luego la zona que no es verde ocupa un sector circular de 360º – 90º = 270º. Así, la probabilidad de que la aguja no caiga en la zona verde es:

$P(\text{no zona verde}) = \dfrac{270}{360} = 0{,}75$

51. Se elige al azar un número entre 1 y 50. Calcula la probabilidad de que sea:

a) Múltiplo de 4.

b) Múltiplo de 4 y de 5.

c) Múltiplo de 5.

d) Múltiplo de 4 o de 5.

En este ejercicio, los casos posibles son 50.

a) Casos favorables: {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48}

$P(\text{múltiplo de 4}) = \dfrac{12}{50} = 0{,}24$

b) Casos favorables: {20, 40}

$P(\text{múltiplo de 4 y de 5}) = \dfrac{2}{50} = 0{,}04$

c) Casos favorables: {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}

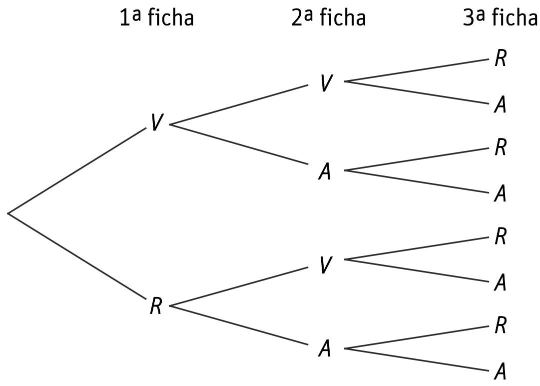
$P(\text{múltiplo de 5}) = \dfrac{10}{50} = 0{,}2$

d) Casos favorables: {4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40, 44, 45, 48, 50}

$P(\text{múltiplo de 4 o de 5}) = \dfrac{20}{50} = 0{,}4$

52. Actividad resuelta.

53. Dos jugadores disponen de tres fichas, una de ellas con una cara verde y la otra roja; otra, con una cara verde y la otra azul, y la tercera, con una cara roja y la otra azul. Se tiran las tres fichas a la vez. Gana el jugador 1 si coinciden los colores de dos fichas cualesquiera, gana el jugador 2 si los tres colores son diferentes. Haz un diagrama de árbol y calcula la probabilidad de que gane cada jugador.



Espacio muestral: $E = \{V - V - R, V - V - A, V - A - R, V - A - A, R - V - R, R - V - A, R - A - R, R - A - A\}$

Gana el jugador 1 si coinciden los colores de dos fichas: $\{V - V - R, V - V - A, V - A - A, R - V - R, R - A - R, R - A - A\}$

$$P(\text{gana jugador 1}) = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Gana el jugador 2 si los tres colores son diferentes: $\{V - A - R, R - V - A\}$

$$P(\text{gana jugador 2}) = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

54. Razona si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes sobre la lotería.

a) Como en mi ciudad casi nunca toca, tengo más probabilidad de que me toque si la compro fuera.

b) Prefiero el número 23568 al 00027 porque los números menores que 100 nunca salen.

c) Prefiero comprar el billete los primeros días, así es seguro que aún no han vendido el gordo.

d) En los últimos sorteos que han tenido lugar ha salido el 5 más veces que el resto de los números, así que ahora no saldrá.

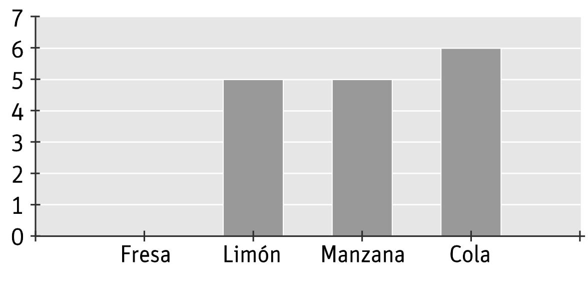
a) Falsa. Todos los números tienen la misma probabilidad de salir, con independencia del lugar en que se compren.

b) Falsa. Todos los números tienen la misma probabilidad de salir, incluidos los menores de 100.

c) Falsa. El gordo de la lotería no depende de lo pronto que se compre el billete.

d) Falsa. La probabilidad de salir un número en un sorteo no depende de que haya salido en sorteos previos.

55. La madre de Eva le deja coger un caramelo de una bolsa sin mirar. En la gráfica se puede ver el número de caramelos de cada tipo que hay en la bolsa.



Calcula las probabilidades de:

a) Que Eva saque un caramelo de fresa.

b) Que Eva saque un caramelo de limón.

c) Que Eva no saque un caramelo de manzana.

d) Que Eva no saque ningún caramelo con sabor a fruta.

Observando el diagrama de barras, podemos deducir que en la bolsa hay cinco caramelos de limón y manzana, respectivamente; seis de cola y ninguno de fresa. En total hay 5 + 5 + 6 = 16 caramelos en la bolsa.

Aplicaremos la regla de Laplace para calcular cada probabilidad.

a) $P(\text{fresa}) = \frac{0}{16} = 0$

b) $P(\text{limón}) = \frac{5}{16} = 0{,}3125$

c) $P(\text{no manzana}) = \frac{16-5}{16} = \frac{11}{16} = 0{,}6875$

d) $P(\text{no fruta}) = P(\text{cola}) = \frac{6}{16} = 0{,}375$

56. En una bolsa hay tres tarjetas con números positivos y otras tres con números negativos. Se eligen dos tarjetas al azar y se multiplican los números. Anotamos el signo del producto.

a) ¿Son equiprobables los sucesos *A* = "salir un número positivo" y *B* = "salir un número negativo"?

b) Calcula la probabilidad de que el producto sea un número positivo.

a) El espacio muestral de este experimento aleatorio es: $E = \{(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)\}$

Salir un número positivo: $A = \{(+, +), (-, -)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = 0{,}5$

Salir un número negativo: $B = \{(+, -), (-, +)\} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{4} = 0{,}5$

Por tanto, los sucesos *A* y *B* son equiprobables.

b) La probabilidad de que el producto sea un número positivo es 0,5.

57. En un experimento aleatorio sabemos que *P*(*A*) = 0,6 y *P*(*B*) = 0,5. ¿Son *A* y *B* sucesos compatibles o incompatibles?

En el cálculo de probabilidades es muy conocida la siguiente fórmula, que nos proporciona la probabilidad de la unión de dos sucesos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En el caso que nos ocupa, sabemos que *P*(*A*) = 0,6 y *P*(*B*) = 0,5, por lo que sustituyendo en la anterior fórmula tenemos que:

$$P(A \cup B) = 0{,}6 + 0{,}5 - P(A \cap B) = 1{,}1 - P(A \cap B)$$

Ahora bien, como la probabilidad de un suceso nunca puede ser mayor que 1, es necesario que $P(A \cap B) \geq 0{,}1$, lo que nos permite concluir que $A \cap B \neq \varnothing$, quedando así probado que los sucesos *A* y *B* son compatibles.

58. Una fábrica de bombillas tiene dos máquinas. La máquina *A* produce cuatro bombillas defectuosas cada 250 bombillas fabricadas. El número de bombillas defectuosas que produce la máquina *B* es de seis por cada 400 fabricadas.

Clara tiene una bombilla que funciona. ¿Con qué máquina es más probable que se haya fabricado?

Máquina *A*:

Bombillas no defectuosas: 250 – 4 = 246

$P(\text{no defectuosa en A}) = \frac{246}{250} = 0{,}984$

Máquina *B*:

Bombillas no defectuosas: 400 – 6 = 394

$P(\text{no defectuosa en B}) = \frac{394}{400} = 0{,}985$

Por tanto, es ligeramente más probable que la bombilla de Clara haya sido fabricada por la máquina *B*.

59. Roberto ha respondido al azar cuatro preguntas de verdadero o falso del examen que está realizando.

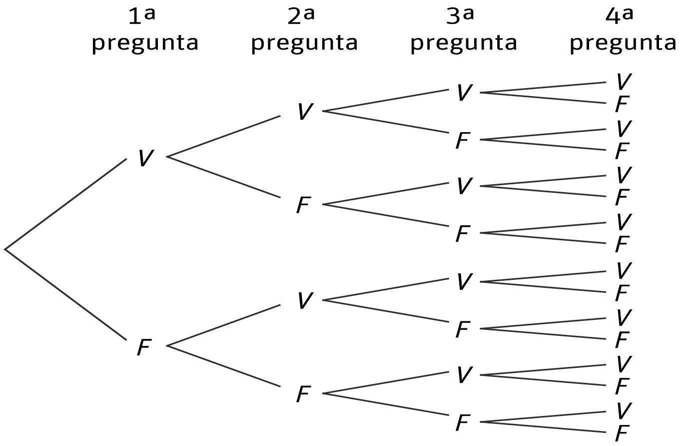
a) Escribe el espacio muestral que se corresponde con las respuestas de las preguntas. Ayúdate de un diagrama de árbol.

b) Escribe el espacio muestral del suceso *A* = "responder falso solo a una de las cuatro preguntas".

c) Escribe el espacio muestral del suceso *B* = "responder verdadero al menos a tres preguntas".

d) Calcula la unión y la intersección de *A* y *B*.

a)



E = {*VVVV*, *VVVF*, *VVFV*, *VVFF*, *VFVV*, *VFVF*, *VFFV*, *VFFF*, *FVVV*, *FVVF*, *FVFV*, *FVFF*, *FFVV*, *FFVF*, *FFFV*, *FFFF*}

b) *A* = {*VVVF*, *VVFV*, *VFVV*, *FVVV*}

c) *B* = {*VVVV*, *VVVF*, *VVFV*, *VFVV*, *FVVV*}

d) $A \cup B$ = {*VVVV*, *VVVF*, *VVFV*, *VFVV*, *FVVV*} = *B*

$A \cap B$ = {*VVVF*, *VVFV*, *VFVV*, *FVVV*} = *A*

60. Carla y Jesús juegan con unos dados cúbicos en cuyas caras están escritos los seis primeros números primos. Jesús propone el siguiente juego:

"Lancemos los dados hasta que el producto sea 6 o 49. Si sale 49, ganas tú, y si sale 6, gano yo".

Carla no acepta las condiciones del juego. ¿Por qué crees que lo hace? Justifica la respuesta.

Cada dado tiene escritos los seis primeros números primos en sus caras, es decir, 2, 3, 5, 7, 11 y 13.

Para que el producto de los dos dados sea 49, solo tenemos una posibilidad, y es obtener el par (7,7), puesto que $7 \cdot 7 = 49$. Sin embargo, para que el producto de los dados sea 6 tenemos dos opciones, que salga (2,3) o bien (3,2), ya que $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$. Así, hay el doble de posibilidades de que el producto de los dados sea 6 que 49.

Por este motivo, Carla no acepta el juego, ya que Jesús tiene el doble de probabilidad que ella de ganar.

61. Una urna contiene 100 bolas numeradas del 00 al 99. Se extrae una al azar. Calcula la probabilidad de que:

a) La suma de las cifras sea 8.

b) El producto de las cifras sea menor que 10.

El número de casos posibles en esta actividad es 100.

a) Cada una de las cifras que forman los números toma valores entre el 0 y el 9, por lo que vamos a construir una tabla de doble entrada en la que calcularemos la suma de dichas cifras.

Suma	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Por tanto, la suma de las cifras vale 8 cuando se extraen los números 08, 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71 y 80.

$$P(\text{suma} = 8) = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

b) Construimos ahora otra tabla de doble entrada con el producto de las cifras de cada número.

Producto	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Así, el producto de las cifras es menor que 10 en los 42 casos marcados en rojo en la tabla anterior.

$$P(\text{producto menor que } 10) = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

62. En una urna tenemos tres bolas negras y cinco blancas. ¿Cuántas bolas rojas hay que añadir a la urna para que la probabilidad de sacar una bola negra sea 0,20?

A. 2 **B. 5** **C. 7** **D. 10**

Llamamos x al número de bolas rojas que debemos añadir a la urna para que la probabilidad de sacar una bola negra sea 0,20. Además, el número de bolas negras es 3, mientras que el número total de bolas es 3 + 5 + x = 8 + x. Por tanto, aplicando la regla de Laplace, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(\text{negra}) = \dfrac{3}{8+x} \\ P(\text{negra}) = 0{,}2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{8+x} = 0{,}2 \Rightarrow 3 = 1{,}6 + 0{,}2x \Rightarrow x = \frac{3-1{,}6}{0{,}2} = 7$$

Así, necesitamos añadir siete bolas rojas, es decir, la opción correcta es la C.

63. El porcentaje de aciertos de un jugador de baloncesto en lanzamientos de tiros libres es del 80 %. Si lanza tres tiros seguidos, la probabilidad de acertar dos y fallar uno es:

A. 0,384 **B. 0,128** **C. 0,512** **D. 0,820**

Sabemos que la probabilidad de acertar es 0,8, por lo que la probabilidad de fallar es 1 – 0,8 = 0,2.

Por otro lado, vamos a denotar mediante *A* el suceso "anotar la canasta", y mediante *F*, el suceso "fallar la canasta". Así, las posibilidades que tenemos de que anote dos canastas y falle una son *AAF*, *AFA* y *FAA.*

Por tanto, la probabilidad de las tres opciones que tenemos es:

$$\left.\begin{array}{l} P(AAF)=0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}128 \\ P(AFA)=0{,}8\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}128 \\ P(FAA)=0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}128 \end{array}\right\} \Rightarrow P(AAF, AFA, FAA)=0{,}128+0{,}128+0{,}128=0{,}384$$

Luego la solución es la A.

64. El guardián del laberinto me deja entrar si al lanzar un dado cúbico saco el doble de puntos que él o más. ¿Qué probabilidad tengo de entrar?

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{2}{9}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{2}$

En función de los resultados que obtenga el guardián al lanzar el dado, las posibilidades que tengo de obtener el doble de puntuación que él o más son:

Guardián	Yo
1	2, 3, 4, 5, 6 (cinco posibilidades)
2	4, 5, 6 (tres posibilidades)
3	6 (una posibilidad)
4	No hay posibilidad de obtener el doble o más puntuación.
5	No hay posibilidad de obtener el doble o más puntuación.
6	No hay posibilidad de obtener el doble o más puntuación.

Por cada número que obtiene el guardián, yo tengo seis posibles resultados al lanzar el dado. Así, el número de casos posibles es 6 · 6 = 36. Sin embargo, observando las posibilidades que tengo de obtener el doble o más puntos que él, tengo nueve casos favorables. Por tanto, aplicando Laplace, la probabilidad es: $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$.

Por lo que la opción correcta es la C.

65. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar cuatro monedas el número de caras sea mayor que el número de cruces?

A. $\frac{11}{16}$ **B.** $\frac{5}{8}$ **C.** $\frac{5}{16}$ **D.** $\frac{1}{2}$

Puesto que al lanzar cada una de las monedas se puede obtener cara o cruz (dos resultados), tenemos que el número de casos posibles es $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

Para determinar el número de casos favorables, vamos a identificar los casos en los que el número de caras es mayor que el número de cruces:

{CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, CCCC}

Por tanto, los casos favorables son cinco, y aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de que al lanzar cuatro monedas el número de caras sea mayor que el número de cruces es $\frac{5}{16}$.

La solución es la C.

66. En una bolsa con seis bolas, numeradas del 1 al 6, sacamos dos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los números obtenidos difieran en 1?

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Si sacamos una bola, el número de casos posibles es seis. Ahora bien, si sacamos dos bolas al azar y sin reposición, tenemos seis posibilidades para una de ellas y cinco posibilidades para la otra, por lo que el número total de casos posibles es 6 · 5 = 30.

Tratemos de identificar ahora los casos en los que los números obtenidos difieren en 1:

{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)}

Luego los casos favorables son 10, por lo que aplicando la regla de Laplace, la probabilidad solicitada es $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

La opción correcta es la D.

67. Las caras de un dado tetraédrico están numeradas con 1, 2, 2, 3, y las de otro, con 2, 3, 3, 4. Los tiramos. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de los números de las caras superiores sea par?

A. $\frac{11}{16}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{13}{16}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Como cada uno de los dados tiene cuatro caras y se tiran dos dados, el número de casos posibles es $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$. Veamos ahora cuáles son los casos en los que el producto de los dados es par:

{(1,2), (1,4), (2,2), (2,3), (2,3), (2,4), (2,2), (2,3), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4)}

Por tanto, los casos favorables son 12 y la probabilidad que nos piden es $\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$.

La solución es la opción B.

Encuentra el error.

68. Al tirar un dado, la probabilidad de cada resultado es de $\frac{1}{6}$. Carmen y Teresa disponen de estos tres dados. El dado rojo tiene cinco caras con un cuatro y una cara con un uno; el dado verde, tres doses y tres cincos, y el dado azul, cinco treses y un seis. Como en los dados normales, sus caras suman 21. Juegan a escoger un dado de manera que gana el que obtiene mayor número. Teresa, que elige primero, escoge el dado verde. Carmen está convencida de que para ganar a Teresa tiene que elegir el dado azul. ¿Está en lo cierto Carmen?

Dado rojo: {4, 4, 4, 4, 4, 1} $\Rightarrow P(4) = \frac{5}{6}$, $P(1) = \frac{1}{6}$

Dado verde: {2, 2, 2, 5, 5, 5} $\Rightarrow P(2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Dado azul: {3, 3, 3, 3, 3, 6} $\Rightarrow P(3) = \frac{5}{6}$, $P(6) = \frac{1}{6}$

Vamos a estudiar ahora, en función de los números que puede sacar Teresa con el dado verde, las opciones que tiene Carmen de ganar dependiendo de si elige el dado azul o el dado rojo.

TERESA	CARMEN	CARMEN
Verde	Azul	Rojo
Saca 2	Gana siempre	Gana el 4
Saca 5	Gana el 6	Pierde siempre

A la vista de esta tabla y conociendo las probabilidades de obtener cada uno de los números, vamos a calcular la probabilidad de que gane Carmen con el dado azul y con el dado rojo, respectivamente.

$P(\text{gana Carmen con el dado azul}) = P(2) \cdot P(\text{gana siempre}) + P(5) \cdot P(6) = \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{12}$

$P(\text{gana Carmen con el dado rojo}) = P(2) \cdot P(4) + P(5) \cdot P(\text{pierde siempre}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{5}{12}$

Por tanto, Carmen ha hecho una buena elección al escoger el dado azul.

Sin embargo, el error se encuentra en que al inicio de la actividad se indica que la probabilidad de cada resultado en un dado cúbico es de $\frac{1}{6}$, y en el caso que nos ocupa esto no es cierto debido a que hay varias caras en cada dado que tienen el mismo número.

PONTE A PRUEBA

Nivel de Inglés

Problema resuelto

Juego para dos jugadores. ¿Y el ganador es…?

Disponemos de tres ruletas con los números del 1 al 9.

El primer jugador elige una de las tres ruletas, la hace girar y anota el número que ha salido. El segundo jugador elige una de las dos ruletas que quedan y hace lo mismo. Gana el que obtiene el número mayor.

1. ¿Crees que los dos jugadores tienen las mismas probabilidades de ganar?

Vamos a estudiar la probabilidad de que gane el segundo jugador dependiendo de la ruleta que ha elegido el primero de ellos.

PRIMER JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR
Ruleta verde (3-5-7)	**Ruleta azul (1-6-8)**	**Ruleta roja (2-4-9)**
Saca 3	Gana 6 y 8	Gana 4 y 9
Saca 5	Gana 6 y 8	Gana 9
Saca 7	Gana 8	Gana 9

Ahora, sabiendo que la probabilidad de que salga cada número en cada ruleta es de $\frac{1}{3}$, en el caso en que el primer jugador haya elegido la ruleta verde, la probabilidad de que gane el segundo jugador eligiendo cada una de las otras dos ruletas es:

- P(gana ruleta azul) = $P(3) \cdot P(6 \text{ u } 8) + P(5) \cdot P(6 \text{ u } 8) + P(7) \cdot P(8) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$
- P(gana ruleta roja) = $P(3) \cdot P(4 \text{ o } 9) + P(5) \cdot P(9) + P(7) \cdot P(9) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

PRIMER JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR
Ruleta azul (1-6-8)	**Ruleta verde (3-5-7)**	**Ruleta roja (2-4-9)**
Saca 1	Gana siempre	Gana siempre
Saca 6	Gana 7	Gana 9
Saca 8	Pierde siempre	Gana 9

En el caso en que el primer jugador haya elegido la ruleta azul, la probabilidad de que gane el segundo jugador eligiendo cada una de las otras dos ruletas es:

- P(gana ruleta verde) = $P(1) \cdot P$(gana siempre) + $P(6) \cdot P(7) + P(8) \cdot P$(pierde siempre) =
$$= \frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{4}{9}$$
- P(gana ruleta roja) = $P(1) \cdot P$(gana siempre) + $P(6) \cdot P(9) + P(8) \cdot P(9) = \frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

PRIMER JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR	SEGUNDO JUGADOR
Ruleta roja (2-4-9)	**Ruleta azul (1-6-8)**	**Ruleta verde (3-5-7)**
Saca 2	Gana 6 y 8	Gana siempre
Saca 4	Gana 6 y 8	Gana 5 y 7
Saca 9	Pierde siempre	Pierde siempre

En este último caso, si el primer jugador elige la ruleta roja, la probabilidad de que gane el segundo jugador escogiendo cualquiera de las otras dos ruletas es:

- P(gana ruleta azul) = $P(2) \cdot P(6 \text{ u } 8) + P(4) \cdot P(6 \text{ u } 8) + P(9) \cdot P$(pierde siempre) = $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{4}{9}$
- P(gana ruleta verde) = $P(2) \cdot P$(gana siempre) + $P(4) \cdot P(5 \text{ o } 7) + P(9) \cdot P$(pierde siempre) =
$$= \frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{5}{9}$$

Analizando el estudio hecho anteriormente, el segundo jugador tiene ventaja sobre el primero. Dependiendo de la ruleta que haya elegido el primer jugador, el segundo puede seleccionar la ruleta cuya probabilidad de ganar es $\frac{5}{9}$, en cuyo caso la probabilidad de ganar el primer jugador es de $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

2. ¿Qué prefieres: ser el primer jugador o el segundo?

El segundo jugador.

3. Si eres el primero, ¿qué ruleta elegirías?

En el análisis anterior, ha quedado probado que el primer jugador tiene las mismas probabilidades de ganar con cualquiera de las ruletas. Por tanto, elegiría cualquiera de ellas.

4. Si eres el segundo y el primero ha elegido la ruleta verde, ¿cuál elegirías tú?

Observando el primer caso, elegiría la ruleta azul.

5. ¿Y si ha elegido la roja?

Según el último de los casos analizados, debemos elegir la ruleta verde.

6. ¿Y si ha elegido la azul?

Elegiría la ruleta roja.

¿Lloverá el fin de semana?

En Villasecovia dicen que han comprobado que si un día hace sol, la probabilidad de que haga sol al día siguiente es de $\frac{3}{4}$, pero si un día llueve, la probabilidad de que llueva al día siguiente es de $\frac{1}{2}$.

El próximo fin de semana, sábado y domingo, habrá una fiesta y hoy es jueves y está lloviendo.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el sábado haga sol?

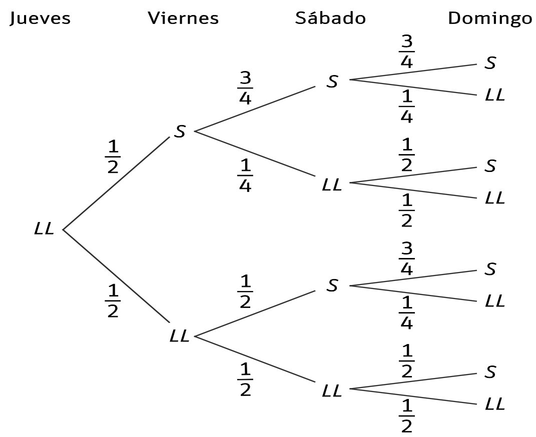
Vamos a denotar:

S = "día que hace sol" y LL = "día que llueve".

Así, las probabilidades que conocemos en esta actividad son las siguientes:

$P(\text{S - S}) = \frac{3}{4}$, entonces $P(\text{S - LL}) = 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$P(\text{LL - LL}) = \frac{1}{2}$, entonces $P(\text{LL - S}) = 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$



Para que el sábado haga sol, tiene que ocurrir cualquiera de los siguientes sucesos: {LL - S - S, LL - LL - S}.

$P(\text{haga sol el sábado}) = P(\text{LL - S - S}) + P(\text{LL - LL - S}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos días haga sol?

En esta ocasión, para que tanto el sábado como el domingo haga sol, debe ocurrir:

{LL - S – S - S, LL - LL - S - S}.

$P(\text{haga sol el sábado y el domingo}) = P(\text{LL - S - S - S}) + P(\text{LL - LL - S - S}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{32}$

3. Independientemente de lo que pase el sábado, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo haga sol?

Para que el domingo haga sol, tenemos los casos {LL-S-S-S, LL-S-LL-S, LL-LL-S-S, LL-LL-LL-S}.

$P(\text{haga sol el domingo}) = P(\text{LL - S - S - S}) + P(\text{LL - S - LL - S}) + \text{P}(\text{LL - LL - S - S}) + \text{P}(\text{LL - LL - LL - S}) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{21}{32}$

AUTOEVALUACIÓN

1. De los siguientes experimentos, señala los que son aleatorios.

a) Medir la distancia de la Tierra a la Luna.

b) El resultado de un partido de tenis.

c) Sacar una bola del bombo en el sorteo de la lotería.

d) El tiempo que tarda un semáforo en cambiar.

e) Hacer girar la ruleta y que caiga en un número impar.

a) Experimento determinista, puesto que la distancia de la Tierra a la Luna es conocida.

b) Experimento aleatorio.

c) Experimento aleatorio.

d) Experimento determinista. El tiempo que tarda un semáforo en cambiar de color está previamente establecido y siempre es el mismo.

e) Experimento aleatorio.

2. En el experimento de lanzar un dado se consideran los sucesos *A* = "sacar un número menor que 5" y *B* = "sacar un número par".

a) Escribe los sucesos elementales que forman cada uno de los sucesos *A* y *B*.

b) Halla el suceso unión de *A* y *B*.

c) Halla el suceso intersección de *A* y *B*.

d) Halla el suceso contrario de *A*.

a) Sucesos elementales de *A*: {1}, {2}, {3}, {4} Sucesos elementales de *B*: {2}, {4}, {6}

b) $A \cup B$ = {1, 2, 3, 4, 6}

c) $A \cap B$ = {2, 4}

d) $\bar{A}$ = {5, 6}

3. Lanzamos dos dados de distinto color y anotamos el producto de los resultados.

a) Escribe el espacio muestral.

b) ¿Son equiprobables los sucesos elementales?

c) Escribe los resultados del suceso "salir 12".

d) Escribe los resultados del suceso "salir menos de 3".

e) Escribe los resultados del suceso "salir número primo".

a) Vamos a construir una tabla de doble entrada para determinar el espacio muestral.

Producto	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

El espacio muestral es *E* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36}.

b) Los sucesos elementales no son equiprobables puesto que no tienen la misma probabilidad.

{1} = {(1,1)}, luego $P(1) = \frac{1}{36}$ {2} = {(2,1), (1,2)}, luego $P(2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

c) "Salir 12" = {12} = {(3,4), (4,3), (2,6), (6,2)}

d) "Salir menos de 3" = {1, 2} = {(1,1), (1,2), (2,1)}

e) "Salir número primo" = {2, 3, 5} = {(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1)}

4. **En una bolsa hay cinco bolas rojas, tres azules y dos blancas. Si se extrae una bola al azar, calcula las probabilidades de que:**

a) No sea blanca.

b) Sea blanca o azul.

c) No sea ni blanca ni roja.

d) Sea amarilla.

e) No sea amarilla.

En esta actividad, el número de casos posibles es 5 + 3 + 2 = 10.

a) P(no blanca) = P(roja o azul) = $\frac{5+3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

b) P(blanca o azul) = $\frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

c) P(no blanca y no roja) = P(azul) = $\frac{3}{10}$

d) P(amarilla) = $\frac{0}{10}$ = 0, puesto que no hay bolas amarillas en la bolsa (se trata de un suceso imposible).

e) P(no amarilla) = 1

Es un suceso seguro, puesto que cualquier bola que saquemos de la bolsa es de color distinto al amarillo.

5. **Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas. Calcula las probabilidades de que salga:**

a) Una carta de oros o de copas.

b) Una carta de copas o una figura.

c) Una carta de oros y una figura.

d) Ninguna figura de oros.

El número de casos posibles coincide con el número de cartas, es decir, 40.

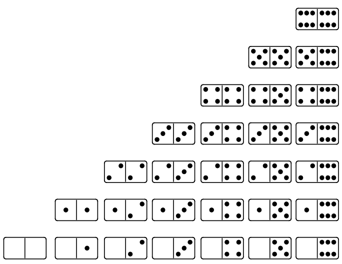
a) P(carta de oros o de copas) = $\frac{10+10}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

b) P(carta de copas o figura) = $\frac{10+3\cdot 3}{40} = \frac{19}{40}$

c) P(carta de oros y figura) = $\frac{3}{40}$

d) P(no figura de oros) = $\frac{37}{40}$

6. **Estas son las fichas del dominó. En el juego, al lado de cada ficha solo puede ir otra cuya numeración coincida en uno de los lados.**



Si hemos sacado la ficha (3|6) y el resto está boca abajo, ¿qué probabilidad hay de que al tomar una al azar encaje con ella?

Puesto que tenemos la ficha (3|6), debemos contar todas las fichas que contienen el 3 o el 6.

- Fichas que contienen el 3: (3|3), (3|4), (3|5), (3|6), (2|3), (1|3), (0|3)
- Fichas que contienen el 6: (6|6), (5|6), (4|6), (3|6) (2|6), (1|6), (0|6)

Podemos observar que en total hay 14 fichas, pero la ficha (3|6) es la que hemos sacado y además aparece dos veces, por lo que hay 12 fichas distintas de la ficha (3|6) que contienen el 3 o el 6. Así, el número de casos favorables es 12.

Por otro lado, el número de casos posibles es 27, es decir, el número de fichas del dominó menos una .

$$P(\text{encaje con } (3|6)) = \frac{12}{27}$$