

Página 69

REFLEXIONA Y RESUELVE

Puñado de almendras

Tres amigos, Antonio, Juan y Pablo, fueron con sus tres hijos, Julio, José y Luis, a un almacén de frutos secos.

Ante un saco de almendras, el dueño les dijo:

— Coged las que queráis.

Cada uno de los seis metió la mano en el saco un número n de veces y, cada vez, se llevó n almendras (es decir, si uno de ellos metió la mano en el saco 9 veces, cada vez cogió 9 almendras, y, por tanto, se llevó 81 almendras). Además, cada padre cogió, en total, 45 almendras más que su hijo.

Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, y Julio, 15 más que Pablo.

- ¿Cómo se llama el hijo de Antonio?
- ¿Y el de Juan?
- ¿Cuántas almendras se llevaron entre todos?

- 2.º caso: 15×3

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ x - y = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 18 \rightarrow x = 9 \\ \text{Restando: } 2y = 12 \rightarrow y = 6 \end{array}$$

Esto significa que otro de los padres cogió 9 puñados de 9 almendras (81 almendras) y su hijo, 6 puñados de 6 almendras (36 almendras).

- 3.º caso: 45×1

$$(x + y)(x - y) = 45$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 45 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 2x = 46 \rightarrow x = 23 \\ \text{Restando: } 2y = 44 \rightarrow y = 22 \end{array}$$

Uno de los padres se llevó 23 puñados de 23 almendras (529 almendras) y su hijo, 22 puñados de 22 almendras (484 almendras).

Como Antonio metió la mano 7 veces más que Luis, Antonio cogió 9 puñados y Luis 2 puñados.

Como Julio metió la mano 15 veces más que Pablo, Julio cogió 22 puñados y Pablo, 7 puñados.

Por tanto:

- Antonio se lleva 9 puñados y José 6.
- Juan coge 23 puñados y Julio 22.
- Pablo se lleva 7 puñados y Luis 2.
- El hijo de Antonio es José, el de Juan es Julio y el de Pablo es Luis.

Por último, el número total de almendras que se llevaron entre todos será:

$$81 + 36 + 529 + 484 + 49 + 4 = 1\,183 \text{ almendras}$$

Sin necesidad del álgebra

Un galgo persigue a una liebre.

La liebre lleva 30 de sus saltos de ventaja al galgo. Mientras el galgo da dos saltos, la liebre da tres. Tres saltos del galgo equivalen a cinco de la liebre.

¿Cuántos saltos dará cada uno hasta el momento de la captura?

Cada 2 saltos de galgo y 3 de liebre se acerca 1 u el galgo.

Cada 2 · 2 saltos de galgo y 3 · 2 de liebre se acerca 2 u el galgo.

Cada 2 · 3 saltos de galgo y 3 · 3 de liebre se acerca 3 u el galgo.

... ..

Cada 2 · 90 saltos de galgo y 3 · 90 de liebre se acerca 90 u el galgo.

Como la liebre lleva 30 de sus saltos al galgo (90 u de ventaja), serán:

$$2 \cdot 90 = 180 \text{ saltos el galgo}$$

$$3 \cdot 90 = 270 \text{ saltos la liebre}$$

De esta forma el galgo recorre $180 \cdot 5 u = 900 u$; y la liebre $270 \cdot 3 u = 810 u$.

Como tenía 90 de ventaja: $810 + 90 = 900 u$

Por tanto, hasta el momento de la captura el galgo da 180 saltos y la liebre 270.

Página 70

1. Efectúa la división:

$$P(x) = x^5 - 6x^3 - 25x$$

entre

$$Q(x) = x^2 + 3x$$

$$\begin{array}{r}
 x^5 \quad - 6x^3 \quad - 25x \quad | \quad x^2 + 3x \\
 \underline{-x^5 - 3x^4} \\
 -3x^4 \\
 \underline{3x^4 + 9x^3} \\
 3x^3 \\
 \underline{-3x^3 - 9x^2} \\
 -9x^2 \\
 \underline{9x^2 + 27x} \\
 2x
 \end{array}$$

Cociente: $x^3 - 3x^2 + 3x - 9$
Resto: $2x$

2. Calcula el cociente y el resto:

$$(6x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x + 5) : (3x^2 - 3x - 1)$$

$$\begin{array}{r}
 6x^5 + 9x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x + 5 \quad | \quad 3x^2 - 3x - 1 \\
 \underline{-6x^5 + 6x^4 + 2x^3} \\
 15x^4 - 5x^3 \\
 \underline{-15x^4 + 15x^3 + 5x^2} \\
 10x^3 + 12x^2 \\
 \underline{-10x^3 + 10x^2 + \frac{10}{3}x} \\
 22x^2 - \frac{14}{3}x \\
 \underline{-22x^2 + 22x + \frac{22}{3}} \\
 \frac{52}{3}x + \frac{37}{3}
 \end{array}$$

3. Copia y completa:

$$\square x^4 + \square x^3 + \square x^2 - 3x + \square \quad | \quad x^3 - 2x^2 + \square x + \square$$

$$\square x^4 + \square x^3 - 2x^2 + 6x \quad 2x + \square$$

$$\underline{3x^3 - x^2 + \square x + \square}$$

$$\underline{\square x^3 + \square x^2 + \square x + \square}$$

$$\square x^2 + \square x + 2$$

$$\begin{array}{r}
 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 7 \quad | \quad x^3 - 2x^2 + x - 3 \\
 \underline{-2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 6x} \\
 3x^3 - x^2 + 3x - 7 \\
 \underline{-3x^3 + 6x^2 - 3x + 9} \\
 5x^2 + 2
 \end{array}$$

Página 71

4. En una división de polinomios, el dividendo es de grado cinco y el divisor de grado dos.

¿Cuál es el grado del cociente? ¿Qué puedes decir del grado del resto?

El cociente es de grado tres. El resto es de grado inferior a dos.

5. a) ¿Cuánto han de valer a y b para que la siguiente división sea exacta?

$$(x^4 - 5x^3 + 3x^2 + ax + b) : (x^2 - 5x + 1)$$

- b) ¿Cuánto han de valer a y b para que el resto de la división sea $3x - 7$?

$$\begin{array}{r} \text{a) } x^4 - 5x^3 + 3x^2 \quad + ax \quad + b \quad \big| x^2 - 5x + 1 \\ \underline{-x^4 + 5x^3 - x^2} x^2 + 2 \\ 2x^2 + ax + b \\ \underline{-2x^2 + 10x - 2} \\ (10 + a)x + (b - 2) \end{array}$$

Para que la división sea exacta, debe cumplirse:

$$\left. \begin{array}{l} 10 + a = 0 \\ b - 2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -10 \\ b = 2 \end{array}$$

- b) Para que el resto sea $3x - 7$, debe cumplirse:

$$\left. \begin{array}{l} 10 + a = 3 \\ b - 2 = -7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -7 \\ b = -5 \end{array}$$

6. Expresa el resultado de las siguientes divisiones en la forma $\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$:

a) $\frac{x+9}{x+6}$

b) $\frac{x+6}{x+9}$

c) $\frac{2x+3}{2x}$

d) $\frac{x^2+2x+5}{x^2+2x+2}$

e) $\frac{3x^2-4}{x+1}$

f) $\frac{x^3-x^2+2x+1}{x^2+5x-2}$

g) $\frac{x^4+3x^2+2x+3}{x^2+4x-1}$

h) $\frac{3x^3+4x^2-5x+2}{x+2}$

$$\text{a) } \begin{array}{r} x+9 \quad \big| x+6 \\ \underline{-x-6} \quad 1 \\ 3 \end{array} \qquad \frac{x+9}{x+6} = 1 + \frac{3}{x+6}$$

$$\begin{array}{r} x+6 \quad |x+9 \\ -x-9 \quad 1 \\ \hline -3 \end{array} \qquad \frac{x+6}{x+9} = 1 + \frac{-3}{x+9}$$

$$c) \frac{2x+3}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{3}{2x} = 1 + \frac{3}{2x}$$

$$\begin{array}{r} x^2+2x+5 \quad |x^2+2x+2 \\ -x^2-2x-2 \quad 1 \\ \hline 3 \end{array} \qquad \frac{x^2+2x+5}{x^2+2x+2} = 1 + \frac{3}{x^2+2x+2}$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 \quad -4 \quad |x+1 \\ -3x^2-3x \quad 3x-3 \\ \hline -3x-4 \\ \quad 3x+3 \\ \quad \hline -1 \end{array} \qquad \frac{3x^2-4}{x+1} = 3x-3 + \frac{-1}{x+1}$$

$$\begin{array}{r} x^3-x^2+2x+1 \quad |x^2+5x-2 \\ -x^3-5x^2+2x \quad x-6 \\ \hline -6x^2+4x+1 \\ \quad 6x^2+30x-12 \\ \quad \hline 34x-11 \end{array} \qquad \frac{x^3-x^2+2x+1}{x^2+5x-2} = x-6 + \frac{34x-11}{x^2+5x-2}$$

$$\begin{array}{r} x^4 \quad +3x^2+2x+3 \quad |x^2+4x-1 \\ -x^4-4x^3+x^2 \quad x^2-4x+20 \\ \hline -4x^3+4x^2+2x+3 \\ \quad 4x^3+16x^2-4x \\ \quad \hline 20x^2-2x+3 \\ \quad -20x^2-80x+20 \\ \quad \hline -82x+23 \end{array} \qquad \frac{x^4+3x^2+2x+3}{x^2+4x-1} = x^2-4x+20 + \frac{-82x+23}{x^2+4x-1}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{h) } 3x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \quad | \quad x + 2 \\
 \underline{-3x^3 - 6x^2} \quad \quad 3x^2 - 2x - 1 \\
 -2x^2 - 5x + 2 \\
 \underline{2x^2 + 4x} \\
 -x + 2 \\
 \underline{x + 2} \\
 4
 \end{array}
 \qquad
 \frac{3x^3 + 4x^2 - 5x + 2}{x + 2} = 3x^2 - 2x - 1 + \frac{4}{x + 2}$$

Página 72

1. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1)$

b) $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x + 3)$

c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3)$

d) $(x^4 + x^2 + 1) : (x + 1)$

a)	1	-3	2	4	Cociente: $x^2 - 4x + 6$
	-1	-1	4	-6	Resto: -2
	1	-4	6	-2	

b)	5	14	-5	-4	5	-2	Cociente: $5x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$
	-3	-15	3	6	-6	3	Resto: 1
	5	-1	-2	2	-1	1	

c)	2	0	-15	-8	Cociente: $2x^2 + 6x + 3$
	3	6	18	9	Resto: 1
	2	6	3	1	

d)	1	0	1	0	1	Cociente: $x^3 - x^2 + 2x - 2$
	-1	-1	1	-2	2	Resto: 3
	1	-1	2	-2	3	

2. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini:

a) $(2x^4 + x^3 - 5x - 3) : (x - 2)$

b) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

c) $(4x^3 + 4x^2 - 5x + 3) : (x + 1)$

a)	2	1	0	-5	-3	
2		4	10	20	30	
	2	5	10	15	27	

d) $(2,5x^3 + 1,5x^2 - 3,5x - 4,5) : (x - 1)$

Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 10x + 15$
 Resto: 27

b)	1	0	0	0	0	-32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

Cociente: $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$
 Resto: 0

c)	4	4	-5	3
-1		-4	0	5
	4	0	-5	8

Cociente: $4x^2 - 5$
 Resto: 8

d)	2,5	1,5	-3,5	-4,5
1		2,5	4	0,5
	2,5	4	0,5	-4

Cociente: $2,5x^2 + 4x + 0,5$
 Resto: -4

Página 74

1. Descompón en factores este polinomio: $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$

	1	-4	7	-12	12
2		2	-4	6	-12
	1	-2	3	-6	0
2		2	0	6	
	1	0	3	0	

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12 = (x - 2)^2 (x^2 + 3)$$

2. Factoriza el siguiente polinomio: $x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50$

	1	1	-27	-25	50
1		1	2	-25	-50
	1	2	-25	-50	0
-2		-2	0	50	
	1	0	-25	0	

$$x^2 - 25 = 0 \rightarrow x^2 = 25 \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$x^4 + x^3 - 27x^2 - 25x + 50 = (x - 1)(x + 2)(x - 5)(x + 5)$$

Página 75

3. Observa y descompón en factores el polinomio:

$$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60$$

2	1	-8	11	32	-60
		2	-12	-2	60
-2	1	-6	-1	30	0
		-2	16	-30	
3	1	-8	15	0	
		3	-15		
	1	-5	0		

$$x^4 - 8x^3 + 11x^2 + 32x - 60 = (x - 2)(x + 2)(x - 3)(x - 5)$$

4. Razona por qué $x - 1$, $x + 1$, $x + 5$, $x - 5$ son, en principio, posibles divisores del polinomio $x^3 - x^2 - 25x + 25$.

a) Razona por qué $x - 3$ no puede serlo.

b) Descompón en factores dicho polinomio.

Los divisores del término independiente (25) son: 1 -1, 5, -5, 25, -25

Por tanto, los polinomios $(x - 1)$, $(x + 1)$, $(x - 5)$, $(x + 5)$ son posibles divisores del polinomio dado.

a) 3 no es divisor de 25.

b)

1	1	-1	-25	25
		1	0	-25
5	1	0	-25	0
		5	25	
	1	5	0	

$$x^3 - x^2 - 25x + 25 = (x - 1)(x - 5)(x + 5)$$

5. Factoriza estos polinomios:

a) $x^3 + x^2 - 32x - 60$

b) $x^3 + 8x^2 + 21x + 18$

c) $x^4 - 10x^2 + 9$

d) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

e) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x$

f) $x^4 + 5x^2 - 36$

g) $x^4 - 81$

h) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x - 4$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -32 & -60 \\
 6 & & 6 & 42 & 60 \\
 \hline
 & 1 & 7 & 10 & 0 \\
 -2 & & -2 & -10 & \\
 \hline
 & 1 & 5 & & 0
 \end{array}$$

$$x^3 + x^2 - 32x - 60 = (x - 6)(x + 2)(x + 5)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 8 & 21 & 18 \\
 -2 & & -2 & -12 & -18 \\
 \hline
 & 1 & 6 & 9 & 0 \\
 -3 & & -3 & -9 & \\
 \hline
 & 1 & 3 & & 0
 \end{array}$$

$$x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = (x + 2)(x + 3)^2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -10 & 0 & 9 \\
 1 & & 1 & 1 & -9 & -9 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -9 & -9 & 0 \\
 -1 & & -1 & 0 & 9 & \\
 \hline
 & 1 & 0 & -9 & & 0 \\
 3 & & 3 & 9 & & \\
 \hline
 & 1 & 3 & & & 0
 \end{array}$$

$$x^4 - 10x^2 + 9 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -5 & 2 & 8 \\
 -1 & & -1 & 6 & -8 \\
 \hline
 & 1 & -6 & 8 & 0 \\
 2 & & 2 & -8 & \\
 \hline
 & 1 & -4 & & 0
 \end{array}$$

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$$

e) Utilizamos el resultado obtenido en el apartado anterior:

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) = x(x + 1)(x - 2)(x - 4)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 5 & 0 & -36 \\
 2 & & 2 & 4 & 18 & 36 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 9 & 18 & 0 \\
 -2 & & -2 & 0 & -18 & \\
 \hline
 & 1 & 0 & 9 & & 0
 \end{array}$$

El polinomio $x^2 + 9$ no tiene raíces reales.

$$\text{Por tanto, } x^4 + 5x^2 - 36 = (x^2 + 9) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 \text{g)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -81 \\
 3 & & 3 & 9 & 27 & 81 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 9 & 27 & 0 \\
 -3 & & -3 & 0 & -27 & \\
 \hline
 & 1 & 0 & 9 & 0 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 \text{h)} & 1 & 3 & -5 & -3 & 4 \\
 -4 & & -4 & 4 & 4 & -4 \\
 \hline
 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 -1 & & -1 & 2 & -1 & \\
 \hline
 & 1 & -2 & 1 & 0 & \\
 1 & & 1 & -1 & & \\
 \hline
 & 1 & -1 & 0 & & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 3x + 4 = (x + 4)(x + 1)(x - 1)^2$$

6. Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 4x$

b) $x^2 - 2x$

c) $4x - 12$

d) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$

e) $x^2 - 2x + 1$

f) $x^2 + 2x - 3$

g) $x^3 + 4x^2 + 3x$

h) $x^3 - 4x^2 - 5x$

i) $x^3 - x$

j) $x^4 + 2x^3 + x^2$

k) $x^5 - 16x$

l) $x^3 - 10^6x$

a) $x^2 - 4x = x(x - 4)$

b) $x^2 - 2x = x(x - 2)$

c) $4x - 12 = 4(x - 3)$

d) $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)^2(x - 3)$

e) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

f) $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$

g) $x^3 + 4x^2 + 3x = x(x + 1)(x + 3)$

h) $x^3 - 4x^2 - 5x = x(x + 1)(x - 5)$

i) $x^3 - x = x(x - 1)(x + 1)$

j) $x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2(x + 1)^2$

k) $x^5 - 16x = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

l) $x^3 - 10^6x = x(x - 1000)(x + 1000)$

Página 76

1. Simplifica:

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$

b) $\frac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$

c) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

d) $\frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$

e) $\frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^3 - 4x^2 - 5x}$

f) $\frac{x^3 - x}{x^4 + 2x^3 + x^2}$

a) $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x} = \frac{x(x^2 - 4)}{x(x - 2)} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = x + 2$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -12 \\ 3 & & 3 & -12 & 12 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\frac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \frac{4(x - 3)}{(x - 3)(x^2 - 4x + 4)} = \frac{4}{x^2 - 4x + 4}$$

c)
$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \begin{cases} \frac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \frac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3}$$

d) $\frac{x^4}{x^3 + 3x^2} = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^2(x + 3)} = \frac{x^2}{x + 3}$

e)
$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \begin{cases} \frac{-4 + 2}{2} = -1 \\ \frac{-4 - 2}{2} = -3 \end{cases} \quad \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} \begin{cases} \frac{4 + 6}{2} = 5 \\ \frac{4 - 6}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x^3 - 4x^2 - 5x} = \frac{x(x^2 + 4x + 3)}{x(x^2 - 4x - 5)} = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x + 1)(x - 5)} = \frac{x + 3}{x - 5}$$

f) $\frac{x^3 - x}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{x(x^2 - 1)}{x^2(x^2 + 2x + 1)} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x(x + 1)^2} = \frac{x - 1}{x(x + 1)}$

2. Efectúa las siguientes sumas:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 3} - \frac{3}{10}$

b) $\frac{x}{x - 1} + \frac{2x}{x + 1} - 3$

c) $\frac{4}{x} + \frac{2(x + 1)}{3(x - 2)} - 4$

d) $\frac{5}{x + 2} + \frac{x}{x + 3} - \frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}$

f) $\frac{x + 3}{x - 1} - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - \frac{26}{25}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 3} - \frac{3}{10} &= \frac{10(x + 3) + 10x - 3x(x + 3)}{x(x + 3)10} = \frac{10x + 30 + 10x - 3x^2 - 9x}{10x^2 + 30x} = \\ &= \frac{11x - 3x^2 + 30}{10x^2 + 30x} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} - 3 = \frac{x(x+1) + 2x(x-1) - 3(x^2-1)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{x^2 + x + 2x^2 - 2x - 3x^2 + 3}{x^2-1} = \frac{-x+3}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} - 4 = \frac{12(x-2) + 2x(x+1) - 12x(x-2)}{3x(x-2)} =$$

$$= \frac{12x - 24 + 2x^2 + 2x - 12x^2 + 24x}{3x^2 - 6x} = \frac{-10x^2 + 38x - 24}{3x^2 - 6x}$$

$$\text{d) } \frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} - \frac{3}{2} = \frac{10(x+3) + 2x(x+2) - 3(x+2)(x+3)}{2(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{10x + 30 + 2x^2 + 4x - 3x^2 - 9x - 6x - 18}{2x^2 + 4x + 6x + 12} = \frac{-x^2 - x + 12}{2x^2 + 10x + 12}$$

$$\text{e) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} = \frac{4x + 4 - 3x^2}{4x^2} = \frac{-3x^2 + 4x + 4}{4x^2}$$

$$\text{f) } \frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{26}{25} = \frac{25(x+3)(x+1) - 25(x^2+1) - 26(x^2-1)}{(x^2-1)25} =$$

$$= \frac{25x^2 + 75x + 25x + 75 - 25x^2 - 25 - 26x^2 + 26}{(x^2-1)25} =$$

$$= \frac{-26x^2 + 100x + 76}{25x^2 - 25}$$

Página 77

3. Efectúa estas operaciones:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \cdot \frac{2x+3}{x+5}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} : \frac{2x+3}{x+5}$$

$$\text{a) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \cdot \frac{2x+3}{x+5} = \frac{(x^2 - 2x + 3)(2x+3)}{(x-2)(x+5)} =$$

$$= \frac{2x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 6x + 6x + 9}{x^2 + 5x - 2x - 10} = \frac{2x^3 - x^2 + 9}{x^2 + 3x - 10}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} : \frac{2x+3}{x+5} = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \cdot \frac{x+5}{2x+3} = \frac{(x^2 - 2x + 3)(x+5)}{(x-2)(2x+3)} =$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 + 3x + 5x^2 - 10x + 15}{2x^2 + 3x - 4x - 6} = \frac{x^3 + 3x^2 - 7x + 15}{2x^2 - x - 6}$$

4. Calcula:

a) $\frac{x+2}{x} : \left(\frac{x-1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1} \right)$

b) $\frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x+2}{x} : \left(\frac{x-1}{3} \cdot \frac{x}{2x+1} \right) &= \frac{x+2}{x} : \frac{(x-1)x}{3(2x+1)} = \frac{x+2}{x} \cdot \frac{3(2x+1)}{(x-1)x} = \\ &= \frac{3(2x+1)(x+2)}{x^2(x-1)} = \frac{3(2x^2+4x+x+2)}{x^3-x^2} = \\ &= \frac{6x^2+15x+6}{x^3-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{x^4-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^4+x^2}{x^4} &= \frac{(x^4-x^2)(x^4+x^2)}{(x^2+1)x^4} = \frac{x^8-x^4}{x^6+x^4} = \frac{x^4(x^4-1)}{x^4(x^2+1)} = \\ &= \frac{x^4-1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} = x^2-1 \end{aligned}$$

Página 78
1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$$\text{a) } x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ -3 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 2 \text{ y } -2$$

$$\text{b) } x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -1 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases} \quad 3 \text{ y } -3$$

2. Resuelve:

a) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

$$\text{a) } x^2 = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{-10 \pm 8}{2} \begin{cases} -1 \rightarrow \text{(no vale)} \\ -9 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$$

No tiene solución.

b) $x^4 - x^2 - 2 = 0$

$$x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x^2 = -1 \rightarrow \text{No vale} \\ x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1 = -\sqrt{2}$; $x_2 = \sqrt{2}$

Página 79

3. Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$

b) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

c) $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$$1 + x^2 - 2x = 2x - 3; x^2 - 4x + 4 = 0; x = 2 \text{ (no vale)}$$

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$$

$$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$$

$$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$$

$$x^2 - 116x + 228 = 0; x = \frac{116 \pm 112}{2} \begin{cases} 114 \\ 2 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$$

$$x = 114$$

c) $\sqrt{x} = x - 2; x = x^2 + 4 - 4x; 0 = x^2 - 5x + 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$$

$$x = 4$$

d) $2 - x = \sqrt{x}; 4 + x^2 - 4x = x; x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases} \rightarrow \text{(no vale)}$$

$$x = 1$$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

$$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8-2x}$$

$$5x - 6 = 2\sqrt{8-2x}$$

$$25x^2 + 36 - 60x = 4(8-2x)$$

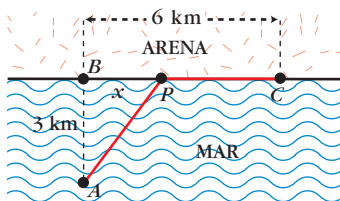
$$25x^2 - 52x + 4 = 0$$

$$x = \frac{52 \pm 48}{50} \begin{cases} x = 2 \\ x = 0,08 \end{cases} \rightarrow \text{no vale}$$

Así, $x = 2$.

4. Para ir de A hasta C hemos navegado a 4 km/h en línea recta hasta P , y hemos caminado a 5 km/h de P a C . Hemos tardado, en total, 99 minutos ($99/60$ horas).

¿Cuál es la distancia, x , de B a P ?



$$\left. \begin{array}{l} \overline{AP}^2 = x^2 + 9 \\ \overline{PC} = 6 - x \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} = t \\ \frac{6 - x}{5} = \left(\frac{99}{60} - t\right) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} \\ t = -\frac{6 - x}{5} + \frac{99}{60} \end{array} \right\} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} = -\frac{6 - x}{5} + \frac{99}{60}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{4} + \frac{6 - x}{5} = \frac{99}{60}$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} + 12(6 - x) = 99$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} + 72 - 12x = 99$$

$$15\sqrt{x^2 + 9} = 12x + 27$$

$$225(x^2 + 9) = 144x^2 + 729 + 648x$$

$$225x^2 + 2025 = 144x^2 + 729 + 648x$$

$$81x^2 - 648x + 1296 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x = \frac{8}{2} = 4$$

Así, la distancia de B a P es de 4 km .

Página 80

5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{10} \quad \text{b) } \frac{4}{x} + \frac{2(x+1)}{3(x-2)} = 4 \quad \text{c) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{a) } 10(x+3) + 10x = 3x(x+3)$$

$$10x + 30 + 10x = 3x^2 + 9x$$

$$0 = 3x^2 - 11x - 30$$

$$x = \frac{11 \pm 21,93}{6} = \begin{cases} 5,489 \\ -1,822 \end{cases}$$

$$x_1 = 5,489; \quad x_2 = -1,822$$

$$\text{b) } 12(x-2) + 2x(x+1) = 12x(x-2)$$

$$12x - 24 + 2x^2 + 2x = 12x^2 - 24x$$

$$0 = 10x^2 - 38x + 24$$

$$0 = 5x^2 - 19x + 12; \quad x = \frac{19 \pm 11}{10} = \begin{cases} 3 \\ 4/5 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = \frac{4}{5}$$

$$\text{c) } 4x + 4 = 3x^2; \quad 0 = 3x^2 - 4x - 4$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{6} = \begin{cases} 2 \\ -2/3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{-2}{3}$$

6. Resuelve:

$$\text{a) } \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = 3 \quad \text{b) } \frac{5}{x+2} + \frac{x}{x+3} = \frac{3}{2} \quad \text{c) } \frac{x+3}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{26}{35}$$

$$\text{a) } x(x+1) + 2x(x-1) = 3(x^2-1)$$

$$x^2 + x + 2x^2 - 2x = 3x^2 - 3$$

$$x = 3$$

$$\text{b) } 10(x+3) + 2x(x+2) = 3(x^2+5x+6)$$

$$10x + 30 + 2x^2 + 4x = 3x^2 + 15x + 18$$

$$0 = x^2 + x - 12$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -4$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & 35(x+3)(x+1) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1) \\
 & 35(x^2+4x+3) - 35(x^2+1) = 26(x^2-1) \\
 & 35x^2 + 140x + 105 - 35x^2 - 35 = 26x^2 - 26 \\
 & 26x^2 - 140x - 96 = 0 \\
 & x = \frac{70 \pm \sqrt{70^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-48)}}{26} = \frac{70 \pm 86}{26} = \begin{cases} 6 \\ -8/13 \end{cases} \\
 & x_1 = 6; \quad x_2 = \frac{-8}{13}
 \end{aligned}$$

Página 81

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } 2^{3x} = 0,5^{3x+2}$$

$$\text{b) } 3^{4-x^2} = \frac{1}{9}$$

$$\text{c) } \frac{4^{x-1}}{2^{x+2}} = 186$$

$$\text{d) } 7^{x+2} = 5\,764\,801$$

$$\text{a) } 2^{3x} = 2^{-3x-2}; \quad 3x = -3x-2; \quad 6x = -2; \quad x = \frac{-1}{3}$$

$$\text{b) } 3^{4-x^2} = 3^{-2}; \quad 4-x^2 = -2; \quad x^2 = 6; \quad x = \pm\sqrt{6}$$

$$x_1 = \sqrt{6}; \quad x_2 = -\sqrt{6}$$

$$\text{c) } \frac{2^{2x-2}}{2^{x+2}} = 186; \quad 2^{2x-2-x-2} = 186; \quad 2^{x-4} = 186$$

$$\log 2^{x-4} = \log 186; \quad (x-4) \log 2 = \log 186$$

$$x = 4 + \frac{\log 186}{\log 2} = 11,54$$

$$\text{d) } 7^{x+2} = 7^8; \quad x = 6$$

8. Resuelve:

$$\text{a) } 3^x + 3^{x+2} = 30$$

$$\text{b) } 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = \frac{31}{5}$$

$$\text{c) } \frac{5^{x^2+1}}{25^{x+2}} = 3\,125$$

$$\text{d) } 5^{2x} = 0,2^{4x-6}$$

$$\text{a) } 3^x + 3^x \cdot 9 = 30$$

$$\text{b) } 5 \cdot 5^x + 5^x + \frac{5^x}{5} = \frac{31}{5}$$

$$3^x(10) = 30; \quad 3^x = 3; \quad x = 1$$

$$5^x \cdot \frac{31}{5} = \frac{31}{5}; \quad x = 0$$

$$c) \frac{5x^2 + 1}{25x + 2} = 3125 \rightarrow \frac{5x^2 + 1}{5^{2(x+2)}} = 5^5 \rightarrow 5x^2 + 1 - 2(x+2) = 5^5$$

$$x^2 + 1 - 2(x-2) = 5 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$d) 5^{2x} = 0,2^{4x-6} \rightarrow 5^{2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-6} \rightarrow 5^{2x} = 5^{-(4x-6)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x = -(4x-6) \rightarrow 6x = 6 \rightarrow x = 1$$

Página 83

1. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 7 = y + 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{xy} \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$$

$$x^2 - 9 = 2x - 1; x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$x_1 = 4; y_1 = 7$$

$$x_2 = -2; y_2 = -5$$

$$b) \begin{cases} y + x = xy - 1 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$y = 5 - x$$

$$x(5-x) = 6; 5x - x^2 = 6; x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x_1 = 2; y_1 = 3$$

$$x_2 = 3; y_2 = 2$$

$$c) x = 2y + 1$$

$$\sqrt{3y+1} - \sqrt{y+1} = 2; \sqrt{3y+1} = 2 + \sqrt{y+1}$$

$$3y+1 = 4 + y+1 + 4\sqrt{y+1}; 2y-4 = 4\sqrt{y+1}; y-2 = 2\sqrt{y+1}$$

$$y^2 + 4 - 4y = 4y + 4; y^2 - 8y = 0$$

$$y = 8 \rightarrow x = 17$$

$$y = 0 \text{ (no vale)}$$

$$x = 17; y = 8$$

2. Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2^x - 2^y = 768 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5^{x+y} = 125^3 \\ 5^{x-y} = 125 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$y = 1 - x; \quad x^2 + x(1-x) + (1-x)^2 = 21$$

$$x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x = 21; \quad x^2 - x - 20 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow y = -4 \\ -4 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

$$x_1 = -4; \quad y_1 = 5$$

$$x_2 = 5; \quad y_2 = -4$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2^x - 2^y = 768 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$2^x = X; \quad 2^y = Y$$

$$\left. \begin{array}{l} X - Y = 768 \\ X/Y = 4 \end{array} \right\} X = 4Y \rightarrow 4Y - Y = 768 \rightarrow Y = 256, \quad X = 1024$$

$$2^y = 256 \rightarrow y = 8$$

$$2^x = 1024 \rightarrow x = 10$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5^{x+y} = 125^3 \\ 5^{x-y} = 125 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5^{x+y} = (5^3)^3 \rightarrow x+y=9 \\ 5^{x-y} = 5^3 \rightarrow x-y=3 \end{array} \right\} \rightarrow x=6, \quad y=3$$

Página 84**1. Reconoce como escalonados y resuelve:**

$$\text{a) } \begin{cases} x & = 7 \\ 2x - 3y & = 8 \\ 3x + y - z & = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y & = 0 \\ 2y & = -6 \\ 5x + y - z & = 17 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x & = -3 \\ 5y & = 20 \\ 2x + y - z & = -2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} y & = 4 \\ x - z & = 11 \\ y - z & = 7 \end{cases}$$

$$a) \left. \begin{cases} x & = 7 \\ 2x - 3y & = 8 \\ 3x + y - z & = 12 \end{cases} \right\} \begin{aligned} x &= 7 \\ y &= \frac{2x-8}{3} = 2 \\ z &= 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 7 \\ y &= 2 \\ z &= 11 \end{aligned}$$

$$b) \left. \begin{cases} 3x + 4y & = 0 \\ 2y & = -6 \\ 5x + y - z & = 17 \end{cases} \right\} \begin{aligned} y &= \frac{-6}{2} = -3 \\ x &= \frac{-4y}{3} = 4 \\ z &= 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 4 \\ y &= -3 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$c) \left. \begin{cases} 3x & = -3 \\ 5y & = 20 \\ 2x + y - z & = -2 \end{cases} \right\} \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 4 \\ z &= 2x + y + 2 = -2 + 4 + 2 = 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 4 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

$$d) \left. \begin{cases} y & = 4 \\ x - z & = 11 \\ y - z & = 7 \end{cases} \right\} \begin{aligned} y &= 4 \\ z &= y - 7 = 4 - 7 = -3 \\ x &= 11 + z = 11 - 3 = 8 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 8 \\ y &= 4 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas escalonados:

$$a) \begin{cases} y & = -5 \\ 2z & = 8 \\ 3x & = 3 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y - z & = -3 \\ 3x + y & = -5 \\ 5y & = -10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - 5y + 3z & = 8 \\ 3y - z & = 5 \\ 4z & = 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x + y - z & = 7 \\ 2y & = 8 \\ 3x & = 9 \end{cases}$$

$$a) \left. \begin{cases} y & = -5 \\ 2z & = 8 \\ 3x & = 3 \end{cases} \right\} \begin{aligned} y &= -5 \\ z &= 4 \\ x &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -5 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

$$b) \left. \begin{cases} x + 2y - z & = -3 \\ 3x + y & = -5 \\ 5y & = -10 \end{cases} \right\} \begin{aligned} y &= \frac{-10}{5} = -2 \\ x &= \frac{-5 - y}{3} = -1 \\ z &= x + 2y + 3 = -2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x - 5y + 3z = 8 \\ 3y - z = 5 \\ 4z = 4 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} z = 1 \\ y = \frac{5+z}{3} = 2 \\ x = 8 + 5y - 3z = 8 + 10 - 3 = 15 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 15 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}$$

$$d) \left. \begin{array}{l} 4x + y - z = 7 \\ 2y = 8 \\ 3x = 9 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = \frac{9}{3} = 3 \\ y = \frac{8}{2} = 4 \\ z = 4x + y - 7 = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{array}$$

Página 85

3. Resuelve por el método de Gauss:

$$a) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array} \right.$$

$$a) \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array} \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{20}{5} = 4 \\ y = \frac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$$

4. Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a + 4 \cdot 2.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 3 \cdot 2.^a \end{array} \begin{array}{l} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x + 10z = -2 \end{array} \begin{array}{l} 2 \cdot 1.^a + 3.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ z = \frac{-1 + x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 1.^a \\ 3.^a \end{array} \begin{cases} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ z = \frac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \frac{2x + 4z + 1}{5} = \frac{1}{5} \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{5} \\ z = -1 \end{cases}$$

Página 86

5. Intenta resolver por el método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 8 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a \end{array} \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones 2.^a y 3.^a dicen cosas contradictorias (si $2x - y$ es igual a 1, no puede ser igual a 2). Por tanto, el sistema es incompatible.

$$b) \begin{cases} x + y + z = -2 & 1.^a \\ x - 2y - z = 3 & 2.^a + 1.^a \\ 2x - y = 1 & 3.^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 & 1.^a \\ 2x - y = 1 & 2.^a \\ 2x - y = 1 & 3.^a - 2.^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Solo quedan dos ecuaciones. Resolvemos el sistema obteniendo y , z en función de x :

$$(2.^a) \rightarrow y = 2x - 1$$

$$(1.^a) \rightarrow z = -2 - y - x = -2 - (2x - 1) - x = -2 - 2x + 1 - x = -3x - 1$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x - 1 \end{cases}$$

Para cada valor de x , se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

$$\text{Para } x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{Para } x = -2 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + z = 3 & 1.^a \\ 2x - y + 4z = 8 & 2.^a + 3.^a \\ x + y - z = 2 & 3.^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 3 & 1.^a \\ 3x + 3z = 10 & 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ x + y - z = 2 & 3.^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La segunda ecuación es absurda. No} \\ \text{puede ser } 0 = 1. \\ \text{Por tanto, el sistema no tiene solución.} \end{array}$$

$$d) \begin{cases} x + z = 3 & 1.^a \\ 2x - y + 4z = 8 & 2.^a + 3.^a \\ x + y - z = 1 & 3.^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 3 & 1.^a \\ 3x + 3z = 9 & 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ x + y - z = 1 & 3.^a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 0x + 0z = 0 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{La segunda ecuación no dice nada. No} \\ \text{es una ecuación. Por tanto, solo quedan} \\ \text{dos ecuaciones, la } 1.^a \text{ y la } 3.^a. \end{array}$$

Resolvemos el sistema resultante dando los valores de x e y en función de z :

$$\begin{cases} x + z = 3 \rightarrow x = 3 - z \\ x + y - z = 1 \rightarrow y = 1 - x + z = 1 - (3 - z) + z = -2 + 2z \end{cases}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = 3 - z \\ y = -2 + 2z \end{cases}$$

Para cada valor que le demos a z , se obtiene una solución del sistema. Por ejemplo:

$$\text{Para } z = 0 \rightarrow x = 3, y = -2$$

$$\text{Para } z = 4 \rightarrow x = -1, y = 6$$

Página 87

1. Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x - 2 \leq 10$

b) $x - 2 > 1$

c) $2x + 5 \geq 6$

d) $3x + 1 \leq 15$

a) $3x - 2 \leq 10 \rightarrow 3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Soluciones: $\{x / x \leq 4\} = (-\infty, 4]$

Soluciones: $\{x / x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \geq 6 \rightarrow 2x \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

d) $3x + 1 \leq 15 \rightarrow 3x \leq 14 \rightarrow x \leq \frac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x / x \geq \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Soluciones: $\left\{x / x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{14}{3}\right]$

2. Resuelve estos sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x - 2 \leq 10 \\ x - 2 > 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5 \geq 6 \\ 3x + 1 \leq 15 \end{cases}$

Observamos que las inecuaciones que forman ambos sistemas se han resuelto en el ejercicio anterior.

a) $\begin{cases} x \leq 4 \\ x > 3 \end{cases}$ Soluciones: $\{x / 3 < x \leq 4\} = (3, 4]$

b) $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{14}{3} \end{cases}$ Soluciones: $\left\{x / \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{14}{3}\right\} = \left[\frac{1}{2}, \frac{14}{3}\right]$

Página 88

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

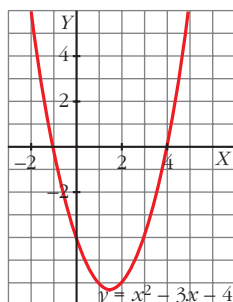
a) $x^2 - 3x - 4 < 0$

b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0$

c) $x^2 + 7 < 0$

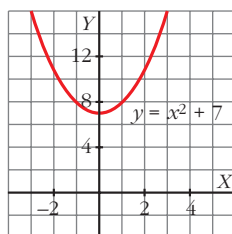
d) $x^2 - 4 \leq 0$

a) $x^2 - 3x - 4 < 0 \rightarrow$ intervalo $(-1, 4)$



b) $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

c) $x^2 + 7 < 0 \rightarrow$ No tiene solución



d) $x^2 - 4 \leq 0$

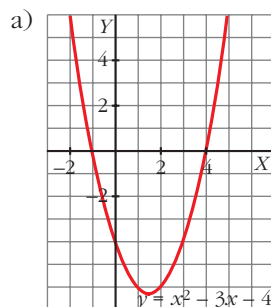
La parábola $y = x^2 - 4$ queda por debajo del eje X en el intervalo $(-2, 2)$; y corta al eje X en $x = -2$ y en $x = 2$.

Por tanto, las soluciones de la inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$.

4. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ 2x - 7 > 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$



$2x - 7 > 5 \rightarrow 2x > 12 \rightarrow x > 6 \rightarrow (6, +\infty)$

$x^2 - 3x - 4 \geq 0 \rightarrow (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

Solución: $(6, +\infty)$

b) $\begin{cases} x^2 - 4 \leq 0 \\ x - 4 > 1 \end{cases}$

- Las soluciones de la primera inecuación son los puntos del intervalo $[-2, 2]$. (Ver apartado d) del ejercicio anterior).

- Las soluciones de la segunda inecuación son:

$x - 4 > 1 \rightarrow x > 5 \rightarrow (5, +\infty)$

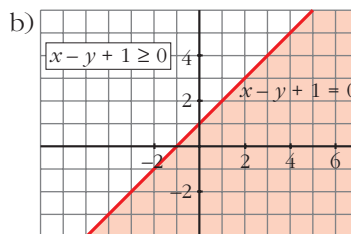
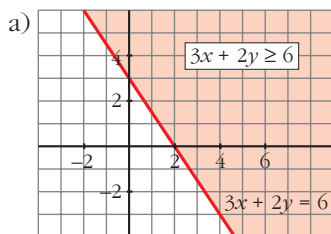
- Las soluciones del sistema serán los puntos en común de los dos intervalos. Por tanto, el sistema no tiene solución.

Página 89

1. Resuelve:

a) $3x + 2y \geq 6$

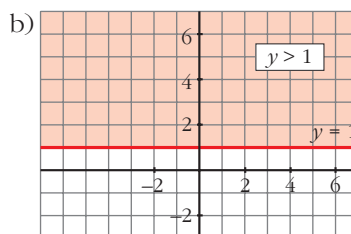
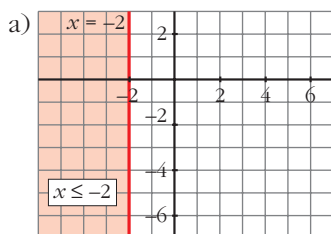
b) $x - y + 1 \geq 0$



2. Resuelve:

a) $x \leq -2$

b) $y > 1$



Página 90

3. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y \geq 9 \\ -2x + 3y \geq 12 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x \geq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

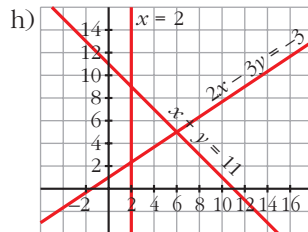
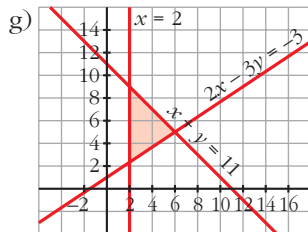
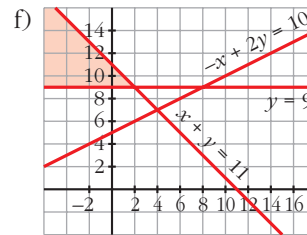
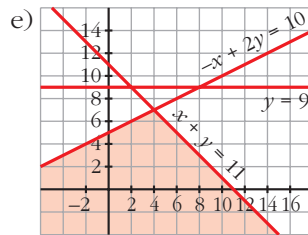
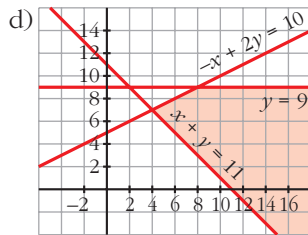
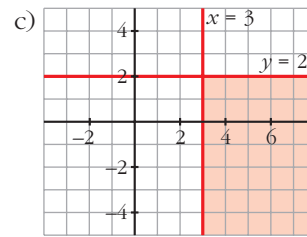
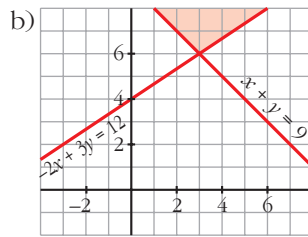
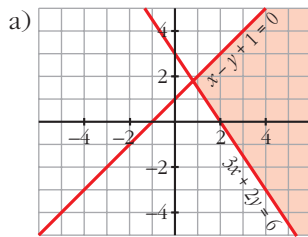
d)
$$\begin{cases} x + y \geq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \geq 10 \\ y \leq 9 \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} x + y \leq 11 \\ -x + 2y \leq 10 \\ y \geq 9 \end{cases}$$

g)
$$\begin{cases} 2x - 3y \leq -3 \\ x + y \leq 11 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

h)
$$\begin{cases} 2x - 3y \geq -3 \\ x + y \geq 11 \\ x \leq 2 \end{cases}$$



No hay solución.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

División de polinomios

1 Calcula el cociente y el resto en cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^4 - 4x^2 + 12x - 9) : (x^2 - 2x + 3)$

b) $(3x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x^2 - 1)$

c) $(3x^4 - x^2 - 1) : (3x^2 - 3x - 4)$

$$\begin{array}{r}
 x^4 \quad - 4x^2 + 12x - 9 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 2x + 3 \\ x^2 + 2x - 3 \end{array} \right. \\
 \underline{-x^4 + 2x^3 - 3x^2} \\
 2x^3 - 7x^2 + 12x - 9 \\
 \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} \\
 -3x^2 + 6x - 9 \\
 \underline{3x^2 - 6x + 9} \\
 0
 \end{array}$$

Cociente = $x^2 + 2x - 3$
 Resto = 0

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 \\ 3x - 5 \end{array} \right. \\
 \underline{-3x^3} \quad + 3x \\
 -5x^2 + 10x - 3 \\
 \underline{5x^2} \quad - 5 \\
 10x - 8
 \end{array}$$

Cociente = $3x - 5$
 Resto = $10x - 8$

$$\begin{array}{r}
 3x^4 \quad - x^2 \quad - 1 \quad \left| \begin{array}{l} 3x^2 - 3x - 4 \\ x^2 + x + 2 \end{array} \right. \\
 \underline{-3x^4 + 3x^3 + 4x^2} \\
 3x^3 + 3x^2 - 1 \\
 \underline{-3x^3 + 3x^2 + 4x} \\
 6x^2 + 4x - 1 \\
 \underline{-6x^2 + 6x + 8} \\
 10x + 7
 \end{array}$$

Cociente = $x^2 + x + 2$
 Resto = $10x + 7$

2 Expresa las siguientes fracciones en la forma:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

a) $\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x + 1}$

b) $\frac{6x^3 + 5x^2 - 9x}{3x - 2}$

c) $\frac{15x - 2x^3 - 4 + x^4}{x - 2}$

d) $\frac{18 + 2x^3 - 5x^2}{2x + 3}$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 4x + 1 \quad | \quad 2x + 1 \\ -4x^2 - 2x \quad \quad \quad 2x - 3 \\ \hline -6x + 1 \\ \quad \quad \quad 6x + 3 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 4 \end{array}$$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{2x + 1} = 2x - 3 + \frac{4}{2x + 1}$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 + 5x^2 - 9x \quad | \quad 3x - 2 \\ -6x^3 + 4x^2 \quad \quad \quad 2x^2 + 3x - 1 \\ \hline 9x^2 - 9x \\ -9x^2 + 6x \\ \hline -3x \\ \quad \quad \quad 3x - 2 \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad -2 \end{array}$$

$$\frac{6x^3 + 5x^2 - 9x}{3x - 2} = 2x^2 + 3x - 1 + \frac{-2}{3x - 2}$$

c) $15x - 2x^3 - 4 + x^4 = x^4 - 2x^3 + 15x - 4$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 0 & 15 & -4 \\ 2 & & 2 & 0 & 0 & 30 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 15 & 26 \end{array}$$

$$\frac{15x - 2x^3 - 4 + x^4}{x - 2} = x^3 + 15 + \frac{26}{x - 2}$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 \quad + 18 \quad | \quad 2x + 3 \\ -2x^3 - 3x^2 \quad \quad \quad x^2 - 4x + 6 \\ \hline -8x^2 \quad \quad \quad + 18 \\ \quad \quad \quad 8x^2 + 12x \\ \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad 12x + 18 \\ \quad \quad \quad \quad \quad -12x - 18 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \hline \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\frac{18 + 2x^3 - 5x^2}{2x + 3} = x^2 - 4x + 6$$

Regla de Ruffini

3 Halla el cociente y el resto en cada caso:

a) $(x^4 - 2x^3 + 5x - 1) : (x - 2)$

b) $(x^4 + x^2 - 20x) : (x + 2)$

c) $(x^4 - 81) : (x + 3)$

a)	1	-2	0	5	-1	Cociente: $x^3 + 5$
	2		2	0	0	Resto: 9
	1	0	0	5	9	

b)	1	0	1	-20	0	Cociente: $x^3 - 2x^2 + 5x - 30$
	-2		-2	4	-10	Resto: 60
	1	-2	5	-30	60	

c)	1	0	0	0	-81	Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$
	-3		-3	9	-27	Resto: 0
	1	-3	9	-27	0	

4 Aplica la regla de Ruffini para calcular $P(-2)$ y $P(5)$, siendo:

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 7$$

	1	0	-3	5	-7	
	-2		-2	4	-2	$P(-2) = -13$
	1	-2	1	3	-13	

	1	0	-3	5	-7	
	5		5	25	110	$P(5) = 568$
	1	5	22	115	568	

5 Utiliza la regla de Ruffini para averiguar si el polinomio $x^4 - 3x^2 - 4$ es divisible por cada uno de los siguientes monomios:

$$x + 1; x - 1; x + 2; x - 2$$

	1	0	-3	0	-4	No es divisible por $(x + 1)$.
	-1		-1	1	2	
	1	-1	-2	2	-6	

1	1	0	-3	0	-4	No es divisible por $(x - 1)$.
		1	1	-2	-2	
	1	1	-2	-2	-6	

-2	1	0	-3	0	-4	Sí es divisible por $(x + 2)$.
		-2	4	-2	4	
	1	-2	1	-2	0	

2	1	0	-3	0	-4	Sí es divisible por $(x - 2)$.
		2	4	2	4	
	2	2	1	2	0	

6 Calcula, en cada caso, el valor de m para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $(2x^3 - 9x^2 + 2x + m) : (x - 4)$

b) $(x^4 + 3x^3 + mx - 3) : (x + 3)$

c) $(4x^3 + mx^2 - 2x + 1) : (x + 1)$

4	2	-9	2	m	$m - 8 = 0 \rightarrow m = 8$
		8	-4	-8	
	2	-1	-2	$m - 8$	

-3	1	3	0	m	-3
		-3	0	0	-3m
	1	0	0	m	$-3m - 3$

$-3m - 3 = 0 \rightarrow m = -1$

c) $P(x) = 4x^3 + mx^2 - 2x + 1$

$P(-1) = -4 + m + 2 + 1 = m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$

7 El resto de la división $(-x^3 + 3x^2 + kx + 7) : (x + 2)$ es igual a -7 .

¿Cuánto vale k ?

Si llamamos $P(x) = -x^3 + 3x^2 + kx + 7$, entonces:

$P(-2) = 8 + 12 - 2k + 7 = 27 - 2k = -7 \rightarrow k = 17$

Factorización de polinomios

8 Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $x^2 - x - 6$ b) $x^2 + 5x - 14$ c) $2x^2 - 8x - 10$ d) $4x^2 - 9$

a) $x^2 - x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

$$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$

b) $x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 14}}{2} = \frac{-5 \pm 9}{2} = \begin{matrix} 2 \\ -7 \end{matrix}$$

c) $2x^2 - 8x - 10 = 2(x^2 - 4x - 5) = 2(x - 5)(x + 1)$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix}$$

d) $4x^2 - 9 = 4 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right)$

$$4x^2 - 9 = 0 \rightarrow 4x^2 = 9 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2}$$

9 Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 - x^2 + 9x - 9$ b) $x^4 + x^2 - 20$ c) $x^3 + x^2 - 5x - 5$ d) $x^4 - 81$

a)

1	1	-1	9	-9
1		1	0	9
1	0	9	0	

$$x^3 - x^2 + 9x - 9 = (x - 1)(x^2 + 9) \rightarrow \text{Raíces: } x = 1$$

b)

2	1	0	1	0	-20
2		2	4	10	20
1	2	5	10	0	
-2		-2	0	-10	
1	0	5	0	0	

$$x^4 + x^2 - 20 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 5) \rightarrow \text{Raíces: } x_1 = 2; x_2 = -2$$

c)

-1	1	1	-5	-5
-1		-1	0	5
1	0	-5	0	0

$$x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{5}$$

$$x^3 + x^2 - 5x - 5 = (x + 1)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

$$\text{Raíces: } x_1 = -1; x_2 = \sqrt{5}; x_3 = -\sqrt{5}$$

$$6x^3 + 7x^2 - x - 2 = (x + 1)(6x^2 + x - 2) = (x - 1)6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= (x + 1)(2x - 1)(3x + 2)$$

Raíces: $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = \frac{-2}{3}$

c) $x^5 - 16x = x(x^4 - 16) = x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

2	1	0	0	0	-16
		2	4	8	16
	1	2	4	8	0
-2		-2	0	-8	
	1	0	4		0

Raíces: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = -2$

d) $2x^4 - 2x^3 - 18x^2 + 18x = 2x(x^3 - x^2 - 9x + 9) =$
 $= 2x(x - 1)(x^2 - 9) = 2x(x - 1)(x - 3)(x + 3)$

1	1	-1	-9	9
1		1	0	-9
	1	0	-9	0

Raíces: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 3$; $x_4 = -3$

Fracciones algebraicas

12 Descompón en factores y simplifica las siguientes fracciones:

a) $\frac{x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$

c) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1}$

d) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

a) $\frac{x + 1}{x^2 - 1} = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{1}{x - 1}$

b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x + 2)^2} = \frac{x - 2}{x + 2}$

c) $\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x(x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{x}{x + 1}$

d) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x - 2} = x + 3$

13 Reduce al mínimo común denominador y opera:

$$\text{a) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1}$$

$$\text{b) } \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6}$$

$$\text{c) } \frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-1} &= \frac{(x+1)^2 - 3(x-1) + (x-2)}{x^2-1} = \\ &= \frac{x^2+2x+1-3x+3+x-2}{x^2-1} = \frac{x^2+2}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x}{x-2} - \frac{x^2+5x-10}{x^2+x-6} &= \frac{(1-x)(x-2) + 2x(x+3) - (x^2+5x-10)}{(x+3)(x-2)} = \\ &= \frac{-x^2+3x-2+2x^2+6x-x^2-5x+10}{(x+3)(x-2)} = \frac{4x+8}{x^2+x-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{x^2}{x^2+2x+1} - \frac{2x-3}{x-1} + 3 &= \frac{x^2(x-1) - (2x-3)(x+1)^2 + 3(x+1)^2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} = \\ &= \frac{x^3 - x^2 - (2x-3)(x^2+2x+1) + 3(x^2+2x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x-1)} = \\ &= \frac{x^3 - x^2 - 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3x^2 + 6x + 3 + 3x^3 - 3x^2 + 6x^2 - 6x + 3x - 3}{(x+1)^2(x-1)} = \\ &= \frac{2x^3 + x^2 + x}{(x+1)^2(x-1)} \end{aligned}$$

14 Efectúa las siguientes operaciones reduciendo al mínimo común denominador:

$$\text{a) } \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{2x} + \frac{1}{3x}$$

$$\text{b) } \frac{2x-1}{x^2} - \frac{x-3}{2x}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{x} - \frac{1}{x-1}$$

$$\text{d) } \frac{1}{2x+4} - \frac{2}{3x+6}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{2x} + \frac{1}{3x} &= \frac{6(x-1)}{6x} - \frac{3(x+1)}{6x} + \frac{2}{6x} = \\ &= \frac{6x-6-3x-3+2}{6x} = \frac{3x-7}{6x} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{2x-1}{x^2} - \frac{x-3}{2x} = \frac{2(2x-1)}{2x^2} - \frac{x(x-3)}{2x^2} = \frac{4x-2-x^2+3x}{2x^2} = \frac{-x^2+7x-2}{2x^2}$$

$$\text{c) } \frac{x+2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} - \frac{x}{x(x-1)} = \frac{x^2+x-2-x}{x(x-1)} = \frac{x^2-2}{x^2-x}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{1}{2x+4} - \frac{2}{3x+6} &= \frac{1}{2(x+2)} - \frac{2}{3(x+2)} = \\ &= \frac{3}{6(x+2)} - \frac{4}{6(x+2)} = \frac{-1}{6(x+2)} = \frac{-1}{6x+12} \end{aligned}$$

15 Opera y simplifica:

a) $\frac{3}{x} : \frac{x-3}{x}$

b) $\frac{x+1}{3} \cdot \frac{15}{x^2-1}$

c) $\left(\frac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3$

d) $\frac{x-2}{x} : \left(\frac{x-2}{x}\right)^2$

a) $\frac{3}{x} : \frac{x-3}{x} = \frac{3x}{x(x-3)} = \frac{3}{x-3}$

b) $\frac{x+1}{3} \cdot \frac{15}{x^2-1} = \frac{15(x+1)}{3(x-1)(x+1)} = \frac{5}{(x-1)}$

c) $\left(\frac{x^3}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3 = \frac{x^6}{36} \cdot \frac{27}{x^3} = \frac{27x^6}{36x^3} = \frac{3x^3}{4}$

d) $\frac{x-2}{x} : \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = \left(\frac{x-2}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{x-2}$

Página 94

16 Opera y simplifica:

a) $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) : \frac{x}{x+1}$

b) $\left[\left(1 - \frac{1}{x}\right) : \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] : (x^2 - 1)$

c) $\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$

d) $\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) : \left(x - \frac{1}{x}\right)\right] (x-1)$

e) $\left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2}\right) : \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2}\right)$

a) $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) : \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-2x}{x^2-1} : \frac{x}{x+1} =$
 $= \frac{-x+1}{x^2-1} : \frac{x}{x+1} = \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} : \frac{x}{x+1} =$
 $= \frac{-1}{x+1} : \frac{x}{x+1} = \frac{-(x+1)}{x(x+1)} = \frac{-1}{x}$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \left[\left(1 - \frac{1}{x} \right) : \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] : (x^2 - 1) &= \left[\frac{x-1}{x} : \frac{x+1}{x} \right] : (x^2 - 1) = \frac{x(x-1)}{x(x+1)} : (x^2 - 1) = \\
 &= \frac{x-1}{x+1} : (x^2 - 1) = \frac{x-1}{(x+1)(x^2 - 1)} = \\
 &= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right) : \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) &= \frac{x-1-x-1}{x^2-1} : \frac{x+1+x-1}{x^2-1} = \\
 &= \frac{-2}{x^2-1} : \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-2(x^2-1)}{2x(x^2-1)} = \frac{-1}{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \left[\left(x + \frac{1}{x} \right) : \left(x - \frac{1}{x} \right) \right] (x-1) &= \left[\frac{x^2+1}{x} : \frac{x^2-1}{x} \right] (x-1) = \frac{x(x^2+1)}{x(x^2-1)} \cdot (x-1) = \\
 &= \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} \cdot (x-1) = \frac{x^2+1}{x+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \left(\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-3}{x-2} \right) : \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} \right) &= \\
 &= \frac{x^2-4x+4-(x^2-6x+9)}{(x-3)(x-2)} : \frac{x-2+x+3}{(x-3)(x-2)} = \\
 &= \frac{2x-5}{(x-3)(x-2)} : \frac{2x-5}{(x-3)(x-2)} = 1
 \end{aligned}$$

17 Opera y simplifica:

$$\text{a) } \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x+11)}{(x+1)^2}$$

$$\text{b) } \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x)}{(x+1)^2}$$

$$\text{c) } \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{d) } \frac{2x(x^2-2x) - (x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2}$$

$$\text{e) } \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1)2x}{x^4}$$

$$\text{f) } \frac{(2x-5)(x-2) - (x^2-5x+7)}{(x-2)^2}$$

$$\text{g) } \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{h) } \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} &= \frac{(2x^2 + 5x + 3) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} = \frac{(2x^2 + 5x + 3) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2}$$

$$\text{c) } \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} &= \frac{(2x^3 - 4x^2) - (2x^3 - 2x^2 + 4x - 4)}{(x^2 - 2x)^2} = \\ &= \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{e) } \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1)2x}{x^4} = \frac{2x^3 - (2x^3 - 2x)}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\text{f) } \frac{(2x - 5)(x - 2) - (x^2 - 5x + 7)}{(x - 2)^2} = \frac{(2x^2 - 9x + 10) - (x^2 - 5x + 7)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

$$\text{g) } \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} &= \frac{(2x^3 - 4x^2) - (2x^3 - 2x^2 + 2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \\ &= \frac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2} \end{aligned}$$

Ecuaciones de primer y segundo grado

18 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } (3x + 1)(2x - 3) - (x - 3)(6x + 4) = 9x$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{2}{3}(x + 1) = \frac{(2x - 3)^2 - (13x - 5)}{16}$$

$$\text{c) } \frac{1}{6}[(13 - 2x) - 2(x - 3)^2] = -\frac{1}{3}(x + 1)^2$$

$$\text{d) } \frac{x^2 - 1}{3} + (x - 2)^2 = \frac{x^2 + 2}{2}$$

$$\text{e) } 0,5(x - 1)^2 - 0,25(x + 1)^2 = 4 - x$$

$$\text{f) } (0,5x - 1)(0,5x + 1) = (x + 1)^2 - 9$$

$$\text{a) } 6x^2 - 9x + 2x - 3 - 6x^2 - 4x + 18x + 12 = 9x$$

$$2x = 9$$

$$x = \frac{9}{2}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 1}{4} - \frac{(2x + 2)}{3} = \frac{4x^2 + 9 - 12x - 13x + 5}{16}$$

$$12x^2 - 12 - 32x - 32 = 12x^2 + 27 - 36x - 39x + 15$$

$$-44 - 32x = 42 - 75x$$

$$43x = 86$$

$$x = 2$$

$$\text{c) } \frac{1}{6}(13 - 2x - 2x^2 - 18 + 12x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$\frac{1}{6}(-2x^2 + 10x - 5) = -\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$-\frac{2x^2}{6} + \frac{10x}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$$

$$-2x^2 + 10x - 5 = -2x^2 - 2 - 4x$$

$$14x = 3$$

$$x = \frac{3}{14}$$

$$\text{d) } 2x^2 - 2 + 6x^2 + 24 - 24x = 3x^2 + 6$$

$$5x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 320}}{10}$$

$$x = \frac{24 \pm 16}{10} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4/5 \end{cases}$$

$$\text{e) } \frac{1}{2}(x^2 + 1 - 2x) - \frac{1}{4}(x^2 + 1 + 2x) = 4 - x$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{x}{2} = 4 - x$$

$$2x^2 + 2 - 4x - x^2 - 1 - 2x = 16 - 4x$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$f) \left(\frac{x}{2} - 1\right) \left(\frac{x}{2} + 1\right) = x^2 + 1 + 2x - 9$$

$$\frac{x^2}{4} - 1 = x^2 + 1 + 2x - 9$$

$$x^2 - 4 = 4x^2 + 4 + 8x - 36$$

$$0 = 3x^2 + 8x - 28$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{6} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -14/3 \end{cases}$$

19 Resuelve estas ecuaciones incompletas de segundo grado sin aplicar la fórmula general:

$$a) (x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 3)^2 + x^2 - 20$$

$$b) \frac{x^2 - 2x + 5}{2} - \frac{x^2 + 3x}{4} = \frac{x^2 - 4x + 15}{6}$$

$$c) \frac{3x + 1}{3} - \frac{5x^2 + 3}{2} = \frac{x^2 - 1}{2} - \frac{x + 2}{3}$$

$$d) \frac{3x^2 - 1}{4} + \frac{1}{2} \left[x^2 - 2 - \frac{1}{2}x \right] = \frac{x^2 - 5}{4}$$

$$a) x^2 + 1 + 2x - x^2 - 4 + 4x = x^2 + 9 + 6x + x^2 - 20$$

$$6x - 3 = 2x^2 + 6x - 11$$

$$8 = 2x^2$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2$$

$$b) 6x^2 - 12x + 30 - 3x^2 - 9x = 2x^2 - 8x + 30$$

$$x^2 - 13x = 0$$

$$x(x - 13) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = 13$$

$$c) 6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$$

$$0 = 18x^2 - 8x$$

$$2x(9x - 4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4/9 \end{cases}$$

$$d) \frac{3x^2 - 1}{4} + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{x}{4} = \frac{x^2 - 5}{4}$$

$$3x^2 - 1 + 2x^2 - 4 - x = x^2 - 5$$

$$4x^2 - x = 0$$

$$x(4x - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ 4x - 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1/4 \end{cases}$$

20 Resuelve estas ecuaciones (una de ellas no tiene solución y otra tiene infinitas):

$$a) \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$$

$$b) 0,2x + 0,6 - 0,25(x-1)^2 = 1,25x - (0,5x + 2)^2$$

$$c) (5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$$

$$d) \frac{2x+1}{7} - \frac{(x+1)(x-2)}{2} = \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}$$

$$a) x^2 + 1 + 2x - 8 - 8x = x^2 + 1 - 2x - 8 - 4x$$

$$0 = 0$$

Tiene infinitas soluciones.

$$b) \frac{x}{5} + \frac{3}{5} - \frac{(x^2 + 1 - 2x)}{4} = \frac{5x}{4} - \frac{x^2}{4} - 4 - 2x$$

$$4x + 12 - 5x^2 - 5 + 10x = 25x - 5x^2 - 80 - 40x$$

$$29x = -87$$

$$x = -\frac{87}{29}$$

$$x = -3$$

$$c) 25x^2 + 9 - 30x - 20x^2 + 25x = 5x^2 - 5x$$

$$9 = 0$$

No tiene solución.

$$d) 4x + 2 - 7x^2 + 14x - 7x + 14 = 7x - 14 - 7x^2 - 28 + 28x$$

$$-7x^2 + 11x + 16 = -7x^2 + 35x - 42$$

$$x = \frac{58}{24} = \frac{29}{12}$$

21 Algunas de las siguientes ecuaciones no tienen solución. Búscalas y resuelve las otras.

$$a) x + 2 + 3x^2 = \frac{5x^2 + 6x}{2}$$

b) $(x + 2)^2 - 3 = 4x$

c) $(x + 4)^2 - (2x - 1)^2 = 8x$

d) $2(2 - x)(3x + 1) - (1 - 2x)(x + 3) + 24 = 0$

e) $\frac{(x - 1)^2 - 3x + 1}{15} + \frac{x + 1}{5} = 0$

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = 2$$

b) $x^2 + 4 + 4x - 3 = 4x$

$$x^2 + 1 = 0$$

No tiene solución.

c) $x^2 + 16 + 8x - 4x^2 - 1 + 4x = 8x$

$$0 = 3x^2 - 4x - 15$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{6} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5/3 \end{cases}$$

d) $12x + 4 - 6x^2 - 2x - x - 3 + 2x^2 + 6x + 24 = 0$

$$-4x^2 + 15x + 25 = 0$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 400}}{-8} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -5/4 \end{cases}$$

e) $x^2 + 1 - 2x - 3x + 1 + 3x + 3 = 0$

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

No tiene solución.

Ecuaciones bicuadradas

22 Resuelve y comprueba las soluciones:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$

d) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

e) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

f) $x^4 - 5x^2 + 36 = 0$

g) $9x^4 - 46x^2 + 5 = 0$

h) $x^4 - 4x^2 = 0$

i) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

j) $9x^4 - x^2 = 0$

• Resuelve b) y j) sacando factor común.

a) $x^2 = z$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \begin{cases} z = 4 & \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ z = 1 & \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

b) $x^2 = z$

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \begin{cases} z = -4 \text{ (no vale)} \\ z = 1 & \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

c) $x^2 = z$

$$z^2 + 3z + 2 = 0$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \begin{cases} z = -2 \text{ (no vale)} \\ z = -1 \text{ (no vale)} \end{cases} \text{ (no tiene solución)}$$

d) $x^2 = z$

$$z^2 - 9z + 8 = 0$$

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} \begin{cases} z = 8 & \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{2} \\ x_2 = -2\sqrt{2} \end{cases} \\ z = 1 & \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

e) $x^2 = z$

$$z^2 - 10z + 9 = 0$$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \begin{cases} z = 9 & \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases} \\ z = 1 & \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

f) $x^2 = z$

$$z^2 - 5z + 36 = 0$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 144}}{2} \text{ (no tiene solución)}$$

g) $x^2 = z$

$$9z^2 - 46z + 5 = 0$$

$$z = \frac{46 \pm \sqrt{2116 - 180}}{18} \begin{cases} z = 90/18 = 5 & \begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = -\sqrt{5} \end{cases} \\ z = 2/18 = 1/9 & \begin{cases} x_3 = 1/3 \\ x_4 = -1/3 \end{cases} \end{cases}$$

h) $x^2(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2$

i) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

$$z = x^2$$

$$4z^2 - 17z + 4 = 0$$

$$z = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{8} \begin{cases} z = 4 & \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \\ z = 1/4 & \begin{cases} x_3 = 1/2 \\ x_4 = -1/2 \end{cases} \end{cases}$$

j) $9x^4 - x^2 = 0$

$$x^2(9x^2 - 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{3}; x_3 = -\frac{1}{3}$$

23 Halla las soluciones de estas ecuaciones:

a) $(2x^2 + 1)(x^2 - 3) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) - 8$

b) $\frac{1}{4}(3x^2 - 1)(x^2 + 3) - (2x^2 + 1)(x^2 - 3) = 4x^2$

a) $2x^4 - 6x^2 + x^2 - 3 = x^4 - x^2 + x^2 - 1 - 8$

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

$$x^2 = z$$

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \begin{cases} z = 3 & \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \\ z = 2 & \begin{cases} x_3 = \sqrt{2} \\ x_4 = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

b) $\frac{3x^4 + 9x^2 - x^2 - 3}{4} - 2x^4 + 6x^2 - x^2 + 3 = 4x^2$

$$3x^4 + 8x^2 - 3 - 8x^4 + 20x^2 + 12 = 16x^2$$

$$-5x^4 + 12x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = z \rightarrow z = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{-10} \begin{cases} z = -3/5 \text{ (no vale)} \\ z = 3 & \begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

Página 95

Ecuaciones con radicales

24 Resuelve: $\sqrt[3]{x^2 - 28} + 3 = 0$

• *Aísla el radical y eleva al cubo.*

$$\sqrt[3]{x^2 - 28} = -3; \quad x^2 - 28 = -27, \quad x^2 = 1 \rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$

25 Resuelve:

a) $\frac{1}{\sqrt{5x + 14}} = \frac{1}{7}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{13 - 5x}} = -1$

a) $7 = \sqrt{5x + 14} \rightarrow 49 = 5x + 14 \rightarrow 35 = 5x \rightarrow x = 7$

b) $-3 = \sqrt[3]{13 - 5x} \rightarrow -27 = 13 - 5x \rightarrow 5x = 40 \rightarrow x = 8$

26 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{5x + 6} = 3 + 2x$

b) $x + \sqrt{7 - 3x} = 1$

c) $\sqrt{2 - 5x} + x\sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x - 6} = 4$

a) $5x + 6 = 9 + 4x^2 + 12x$

$$4x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} \begin{cases} x = -3/4 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) $7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \begin{cases} x = 2 \text{ (no vale)} \\ x = -3 \end{cases}$$

c) $2 - 5x = (-x\sqrt{3})^2$

$$2 - 5x = x^2 \cdot 3$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} \begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } (\sqrt{5x-6})^2 &= (4-\sqrt{2x})^2 \\
 5x-6 &= 16+2x-8\sqrt{2x} \\
 (8\sqrt{2x})^2 &= (-3x+22)^2 \\
 64 \cdot 2x &= 9x^2+484-132x \\
 128x &= 9x^2+484-132x \\
 0 &= 9x^2-260x+484 \\
 x &= \frac{260 \pm \sqrt{67\,600-17\,424}}{18} \begin{cases} x = 484/18 = 242/9 \text{ (no vale)} \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

27 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0$

b) $x - \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{5x+6} - 3 = 2x$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$

e) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

a) $(\sqrt{3x+4})^2 = (4-2x)^2$
 $3x+4 = 16+4x^2-16x$
 $4x^2-19x+12 = 0$
 $x = \frac{19 \pm \sqrt{361-192}}{8} \begin{cases} x = 4 \text{ (no vale)} \\ x = 6/8 = 3/4 \end{cases}$

b) $(x-1)^2 = (\sqrt{7-3x})^2$
 $x^2+1-2x = 7-3x$
 $x^2+x-6 = 0$
 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} x_1 = -3 \text{ (no vale)} \\ x_2 = 2 \end{cases}$

c) $(\sqrt{5x+6})^2 = (2x+3)^2$
 $5x+6 = 4x^2+9+12x$
 $4x^2+7x+3 = 0$
 $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} \begin{cases} x_1 = -3/4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$$d) (\sqrt{x^2 + x})^2 = (\sqrt{x + 1})^2$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1$$

$$e) (\sqrt{x^2 + 3})^2 = (\sqrt{3 - x})^2$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1$$

Ecuaciones factorizables

28 Sacar factor común y resolver:

$$a) 5x^3 - 3x^2 = 0$$

$$b) x^4 + 4x^2 = 0$$

$$c) 4x^3 - x = 0$$

$$d) 2x^4 - 3x^3 = 0$$

$$a) x^2(5x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{5}$$

$$b) x^2(x^2 + 4) = 0$$

$$x = 0$$

$$c) x(4x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 = \frac{1}{4} \begin{cases} x_2 = 1/2 \\ x_3 = -1/2 \end{cases} \end{cases}$$

$$d) x^3(2x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}$$

29 Resolver las siguientes ecuaciones igualando a cero cada factor:

$$a) (2x - 7)(x + 3)^2 = 0 \begin{cases} 2x - 7 = 0; x = \dots \\ (x + 3)^2 = 0; x = \dots \end{cases}$$

$$b) x(x^2 - 4)(3x + 12) = 0$$

$$c) (x + 2)^2(x - 1)^2 = 0$$

$$d) 3x(x - 2)^3 = 0$$

$$e) (x - 5)(x^2 + 1) = 0$$

$$a) x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = -3$$

$$b) x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -2, x_4 = -4$$

$$c) x_1 = -2, x_2 = 1$$

$$d) x_1 = 0, x_2 = 2$$

$$e) x = 5$$

30 Descompón en factores y resuelve:

a) $x^3 + x^2 - 6x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

c) $x^3 - 9x = 0$

d) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$

e) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 = 0$

f) $-x^3 + 13x - 12 = 0$

g) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

h) $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$

a) $x(x - 2)(x + 3) = 0$

b) $x^2(x - 1)^2 = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -3$

$x_1 = 0, x_2 = 1$

c) $x(x - 3)(x + 3) = 0$

d) $(x - 1)(x + 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3$

$x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = -3$

e) $2(x - 1)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

f) $-(x + 4)(x - 1)(x - 3) = 0$

$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = 3$

g) $(x - 1)^2(x - 3) = 0$

h) $(x - 2)(x + 2)^2 = 0$

$x_1 = 1, x_2 = 3$

$x_1 = 2, x_2 = -2$

Ecuaciones con la x en el denominador

31 Resuelve la ecuación $\frac{x}{x-3} + \frac{2x}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$.

• *Multiplica los dos miembros de la ecuación por el mín.c.m. de los denominadores: $(x + 3)(x - 3)$.*

$x(x + 3) + 2x(x - 3) = 6$

$x^2 + 3x + 2x^2 - 6x = 6$

$3x^2 - 3x - 6 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{6} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

32 Resuelve:

a) $\frac{x}{x+1} = \frac{4}{x+4}$

b) $\frac{3}{x+3} = \frac{x+2}{2-x}$

c) $\frac{2x}{x+2} = \frac{3x+2}{2x}$

• *Haz producto de medios igual a producto de extremos.*

a) $x^2 + 4x = 4x + 4$

$x^2 = 4$

$x_1 = 2, x_2 = -2$

$$b) 6 - 3x = x^2 + 3x + 2x + 6$$

$$x^2 + 8x = 0$$

$$x(x + 8) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -8$$

$$c) 4x^2 = 3x^2 + 2x + 6x + 4$$

$$x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 16}}{2} \begin{cases} x_1 = 4 + 2\sqrt{5} \\ x_2 = 4 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

33 Resuelve:

$$a) \frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$$

$$b) \frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{x}{3} - 1$$

$$c) \frac{600}{x} + 80 = \frac{600}{x-2}$$

$$d) \frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$$

$$a) 2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = 2$$

$$b) 3 + 6 + 9 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$c) 600x - 1200 + 80x^2 - 160x = 600x$$

$$80x^2 - 160x - 1200 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$d) 8x - 48 + 12x - x^2 + 72 - 6x = x^2 - 36$$

$$2x^2 - 14x - 60 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{4} \begin{cases} x_1 = (14 + 26)/4 = 10 \\ x_2 = (14 - 26)/4 = -3 \end{cases}$$

34 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x+6}{2}$ b) $\frac{10}{3} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{x+5}{x-5}$

a) $8x - 24 - x^2 + 3x - 4x + 22 = x^2 + 6x - 3x - 18$

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} \begin{cases} x_1 = (4 + 12)/4 = 4 \\ x_2 = (4 - 12)/4 = -2 \end{cases}$$

b) $10x^2 - 250 + 15x - 3x^2 - 75 + 15x = 3x^2 + 15x + 15x + 75$

$$4x^2 = 400$$

$$x^2 = 100 \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -10 \end{cases}$$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

35 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2,3^x = 18$

b) $7 \cdot 3^x = 567$

c) $\frac{2^x}{3} = 7,5$

d) $4^{2x-1} = 0,25$

a) $x \log 2,3 = \log 18 \rightarrow x = \frac{\log 18}{\log 2,3} = 3,47$

b) $3^x = \frac{567}{7} \rightarrow 3^x = 81 \rightarrow x = 4$

c) $2^x = 22,5 \rightarrow x = \frac{\log 22,5}{\log 2} = 4,49$

d) $4^{2x-1} = 4^{-1} \rightarrow 2x-1 = -1 \rightarrow x = 0$

36 Las siguientes ecuaciones exponenciales tienen soluciones enteras. Hállalas:

a) $2^{x^2+1} = 32$

b) $3^{2x-5} = 2 \cdot 187$

c) $\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$

d) $(0,5)^x = 16$

a) $2^{x^2+1} = 2^5 \rightarrow x^2 + 1 = 5 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

b) $3^{2x-5} = 3^7 \rightarrow 2x-5 = 7 \rightarrow x = 6$

c) $7^{x/2} = 7^{-2} \rightarrow \frac{x}{2} = -2 \rightarrow x = -4$

d) $2^{-x} = 2^4 \rightarrow x = -4$

Página 96

37 Resuelve las ecuaciones siguientes mediante un cambio de variable:

a) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

b) $3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 21$

c) $3^x - 3^{-x} = \frac{728}{27}$

a) $2^x = z$; $z^2 - 5z + 4 = 0$; $z_1 = 4$, $z_2 = 1 \rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 0$

b) $3^x = z$; $z - \frac{z}{3} + \frac{z}{9} = 21 \rightarrow z = 27 \rightarrow x = 3$

c) $3^x = z$; $z - \frac{1}{z} = \frac{728}{27} \rightarrow z^2 - 1 = \frac{728}{27}z \rightarrow 27z^2 - 728z - 27 = 0$

$z_1 = 27 \rightarrow x_1 = 3$; $z_2 = -\frac{2}{54}$ (no vale)

38 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $7^{x+2} = 823\,543$

b) $5^{5x-2} = 390\,625$

c) $3^x + 3^{x+2} = 39$

d) $10^{3+x} = 1$

a) $7^{x+2} = 7^7 \rightarrow x+2 = 7 \rightarrow x = 5$

b) $5^{5x-2} = 5^8 \rightarrow x = 2$

c) $3^x(1+9) = 39 \rightarrow 3^x = 3,9 \rightarrow x = \frac{\log 3,9}{\log 3} = 1,24$

d) $3+x = 0 \rightarrow x = -3$

39 RESUELTO EN EL LIBRO DE TEXTO.

40 Calcula x en las siguientes ecuaciones:

a) $\log x = \log 9 - \log 4$

b) $\ln x = 3 \ln 5$

c) $3 + 2 \log x = 5$

d) $\frac{1}{3} \log_2 x = -3$

a) $\log x = \log \frac{9}{4} \rightarrow x = \frac{9}{4}$

b) $\ln x = \ln 5^3 \rightarrow x = 125$

c) $\log x = 1 \rightarrow x = 10$

d) $\log_2 x = -9 \rightarrow x = 2^{-9} = \frac{1}{512}$

Sistemas de ecuaciones

41 Resuelve los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} 2x - 11y = -11 \\ 23x + y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x + 5 = 2y + 1 \\ x - 9 = 1 - 5y \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\text{a) } y = 1 - 23x$$

$$2x - 11 + 253x = -11$$

$$0 = 255x$$

$$x = 0, \quad y = 1$$

$$\text{b) } x = 10 - 5y$$

$$30 - 15y + 5 = 2y + 1$$

$$34 = 17y$$

$$y = \frac{34}{17}, \quad y = 2$$

$$x = 0, \quad y = 2$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{cases}$$

$$x = 2 - 3y$$

$$2 - 3y + 8y = 7; \quad 5y = 5; \quad y = 1$$

$$x = -1, \quad y = 1$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 3y = 24 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 3y = -24 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad 2y = -16; \quad y = -8$$

$$x = 0, \quad y = -8$$

42 Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} x \cdot y = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

• **Suma las dos ecuaciones.**

$$\text{a) } x = \frac{5y}{3}$$

$$\frac{5y^2}{3} = 15; \quad y^2 = 9 \quad \begin{cases} y = 3 \rightarrow x = 5 \\ y = -3 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 3; \quad x_2 = -5, \quad y_2 = -3$$

$$b) 6y + 6x = 5xy \quad 4 - 4x + 6x = \frac{5x(2 - 2x)}{3}$$

$$y = \frac{2 - 2x}{3} \quad 6x + 12 = 10x - 10x^2$$

$$10x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$5x^2 - 2x + 6 = 0$$

No tiene solución.

$$c) 2x^2 - 10x + 12 = 0; \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$$

$$\frac{-x^2 + y^2 + 5x - 5y - 2 = 0}{2y^2 - 10y + 8 = 0}$$

$$2y^2 - 10y + 8 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$x_1 = 3, y_1 = 4; \quad x_2 = 3, y_2 = 1; \quad x_3 = 2, y_3 = 4; \quad x_4 = 2, y_4 = 1$$

$$d) x = \frac{4y}{3}$$

$$\frac{7y}{3} \cdot \frac{y}{3} = 7$$

$$y^2 = 9; \quad y = \pm 3$$

$$x_1 = 4, y_1 = 3; \quad x_2 = -4, y_2 = -3$$

43 Resuelve por sustitución:

$$a) \begin{cases} (x^2 + 1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$a) \left. \begin{aligned} (x^2 + 1)y^2 = 5 \\ 4x - y = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y = 4x \\ (x^2 + 1)16x^2 = 5 \end{aligned}$$

$$16x^4 + 16x^2 - 5 = 0$$

$$x^2 = \frac{-16 \pm 24}{32} = \begin{cases} 1/4 \rightarrow x_1 = 1/2; \quad x_2 = -1/2 \\ -5/4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{1}{2}, y_2 = -2$$

$$b) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{6}{x}; \quad x^2 - \frac{36}{x^2} = 5; \quad x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$x^2 = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -4 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$$x_1 = 3, y_1 = 2, x_2 = -3, y_2 = -2$$

44 Resuelve por reducción:

$$a) \begin{cases} 3x^2 - 5y^2 = 30 \\ x^2 - 2y^2 = 7 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4} \\ x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$a) \quad 3x^2 - 5y^2 = 30$$

$$\underline{-3x^2 + 6y^2 = -21}$$

$$y^2 = 9; \quad y = \pm 3$$

$$x^2 = 25; \quad x = \pm 5$$

$$x_1 = 5, y_1 = 3; \quad x_2 = -5, y_2 = 3; \quad x_3 = 5, y_3 = -3; \quad x_4 = -5, y_4 = -3$$

$$b) \quad x^2 + y^2 + xy = \frac{3}{4}$$

$$\underline{x^2 - y^2 - xy = -\frac{1}{4}}$$

$$2x^2 = \frac{2}{4}; \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x = \frac{1}{2}: \quad \frac{1}{4} + y^2 + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$1 + 4y^2 + 2y = 3$$

$$4y^2 + 2y - 2 = 0; \quad 2y^2 + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = -\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{4} + y^2 - \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

$$1 + 4y^2 - 2y = 3$$

$$4y^2 - 2y - 2 = 0; \quad 2y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -1/2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = -1; \quad x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = -\frac{1}{2}, y_3 = 1; \quad x_4 = -\frac{1}{2}, y_4 = -\frac{1}{2}$$

45 Resuelve los siguientes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{2x-1}{x+1} + \frac{y+3}{y+1} = 3 \\ x(x-2) = y(1-y) \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy = 28 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} xy = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (x+y)(x-y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} 2xy + 2x - y - 1 + xy + 3x + y + 3 &= 3(xy + x + y + 1) \\ x^2 - 2x &= y - y^2 \end{aligned} \right\}$$

$$3xy + 5x + 2 = 3xy + 3x + 3y + 3$$

$$2x - 3y = 1; \quad x = \frac{1 + 3y}{2}$$

$$\frac{1 + 9y^2 + 6y}{4} - 1 - 3y = y - y^2 \rightarrow 1 + 9y^2 + 6y - 4 - 12y = 4y - 4y^2$$

$$13y^2 - 10y - 3 = 0; \quad y = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 156}}{26} = \frac{10 \pm 16}{26} = \begin{cases} 1 \\ -3/13 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = \frac{2}{13}, \quad y_2 = -\frac{3}{13}$$

$$\text{b) } x = \frac{28}{y}$$

$$\left(\frac{28}{y}\right)^2 + y^2 = 65$$

$$784 + y^4 = 65y^2$$

$$y^4 - 65y^2 + 784 = 0; \quad y^2 = z$$

$$z = \frac{65 \pm 33}{2} = \begin{cases} 49 \rightarrow y = \pm 7 \\ 16 \rightarrow y = \pm 4 \end{cases}$$

$$x_1 = 7, \quad y_1 = 4; \quad x_2 = -7, \quad y_2 = -4; \quad x_3 = 4, \quad y_3 = 7; \quad x_4 = -4, \quad y_4 = -7$$

$$\text{c) } x = \frac{15}{y}$$

$$\frac{15/y}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{15}{y^2} = \frac{5}{3}; \quad 45 = 5y^2; \quad y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$$

$$x_1 = 5, \quad y_1 = 3; \quad x_2 = -5, \quad y_2 = -3$$

$$\text{d) } \left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= 7 \\ x &= \frac{4y}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{16y^2}{9} - y^2 = 7$$

$$16y^2 - 9y^2 = 63; y^2 = 9$$

$$x_1 = 4, y_1 = 3; x_2 = -4, y_2 = -3$$

46 Resuelve:

$$\text{a) } \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x + y} = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2\sqrt{x + 1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt{3(x + y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \sqrt{x + y + 2} = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

$$\text{a) } x = (5 - y)^2$$

$$y^2 - 2y + 1 = 25 + y^2 - 10y$$

$$8y = 24; y = 3; x = 4$$

$$x = 4; y = 3$$

$$\text{b) } 4x + 4 = y^2 + 1 + 2y; x = \frac{y^2 + 2y - 3}{4}$$

$$x = \frac{1 + 3y}{2} = \frac{2 + 6y}{4}$$

$$y^2 + 2y - 3 = 2 + 6y$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \rightarrow x = 8 \\ -1 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1, y_1 = -1; x_2 = 8, y_2 = 5$$

$$\text{c) } y = 2x - 6$$

$$\sqrt{3(3x - 6)} = 12 - x$$

$$9x - 18 = 144 + x^2 - 24x$$

$$0 = x^2 - 33x + 162$$

$$x = \frac{33 \pm 21}{2} = \begin{cases} 27 \rightarrow y = 48 \text{ (no vale)} \\ 6 \rightarrow y = 6 \end{cases}$$

$$x = 6; y = 6 \text{ (} x = 27, y = 48 \text{ no vale)}$$

$$\text{d) } y = 2x - 5$$

$$\sqrt{3x - 5} = x - 1$$

$$3x - 5 = x^2 + 1 - 2x$$

$$0 = x^2 - 5x + 6$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \rightarrow y = 1 \\ 2 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, y_1 = -1; x_2 = 3, y_2 = 1$$

47 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$

a) $y - x = 1$
 $2^x + 2^y = 12$
 $y = 1 + x \rightarrow 2^x + 2^{1+x} = 12 \rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = 12 \rightarrow$
 $\rightarrow 3 \cdot 2^x = 12 \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow x = 2 \rightarrow y = 1 + 2 = 3$
 $x = 2; y = 3$

b) $5^x \cdot 5^y = 1$
 $5^x : 5^y = 25$
 $\left. \begin{aligned} 5^{x+y} &= 5^0 \rightarrow x + y = 0 \\ 5^{x-y} &= 5^2 \rightarrow x - y = 2 \end{aligned} \right\}$
 $2x = 2 \rightarrow x = 1$
 $1 + y = 0 \rightarrow y = -1$

Página 97

Método de Gauss

48 Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - y - z = -10 \\ x + 2y + z = 11 \\ 2x - y + z = 8 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 2.^a \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix}$

$$\begin{cases} x - y - z = -10 \\ 2x + y = 1 \\ 7x = 0 \end{cases} \begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 + 10 = 9 \end{matrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ 2x + 2z = 4 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2z = 5 \\ -x = -1 \end{cases} \begin{matrix} x = 1 \\ z = \frac{5 - 3x}{2} = 1 \\ y = 3 - x - z = 1 \end{matrix} \left. \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix} \right\}$$

49 Resuelve aplicando el método de Gauss:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2 \cdot 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 3x + 3z = 36 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ x + z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - z = 6 \\ 2x = 18 \end{cases} \begin{matrix} x = 9 \\ z = x - 6 = 3 \\ y = 18 - x - z = 6 \end{matrix} \left. \begin{matrix} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{matrix} \right\}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ -6y + 5z = 27 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 6 \cdot 2.^a \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases} \begin{matrix} z = \frac{69}{23} = 3 \\ y = 7 - 3z = 7 - 9 = -2 \\ x = 2 - y - z = 2 + 2 - 3 = 1 \end{matrix} \left. \begin{matrix} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{matrix} \right\}$$

50 Resuelve por el método de Gauss:

$$a) \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 3x + 4z = 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 2.^a \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 2z = 9 \\ 3x + 2z = 13 \\ 2z = -5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = \frac{-5}{2} \\ x = \frac{13 - 2z}{3} = 6 \\ y = 9 - x + 2z = 9 - 6 - 5 = -2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 6 \\ y = -2 \\ z = \frac{-5}{2} \end{array}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x + 6y - 2z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 7x = 0 \\ 6x - 2y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

51 Resuelve aplicando el método de Gauss:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{array} \right.$$

$$\text{d) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{array} \right.$$

$$\text{e) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{f) } \left\{ \begin{array}{l} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{array} \right.$$

• Encontrarás sistemas compatibles (determinados e indeterminados) y sistemas incompatibles.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 5 \cdot 3.^a \\ 3.^a \end{array} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -3x + y = -4 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ -2y = -1 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 1 + 1/2 = 3/2 \\ z = x + 1/2 = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3/2 \\ y = 1/2 \\ z = 2 \end{array}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 5z = 5 \\ 5x - 2y + 17z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 6z = 8 \\ 6x + 18z = 4 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a : 2 \\ 3.^a : 6 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3z = 4 \\ x + 3z = 4/6 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Las ecuaciones } 2.^a \text{ y } 3.^a \text{ dicen cosas contradic-} \\ \text{torias.} \\ \text{El sistema es incompatible, no tiene soluci3n.} \end{array} \right\}$$

$$c) \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ -2x - y - 8z = -7 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a - 3 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ -x - 5z = -5 \\ -x - 5z = -5 \end{cases}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en funci3n de z :

$$\begin{cases} x + y = 2 - 3z \\ -x = -5 + 5z \end{cases} \rightarrow (5 - 5z) + y = 2 - 3z \rightarrow y = 2z - 3$$

$$\rightarrow x = 5 - 5z$$

Soluci3n: $x = 5 - 5z$, $y = 2z - 3$, $z = z$

$$d) \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 2 \\ -5x + 3y + 5z = -1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a - 2 \cdot 1.^a \\ 3.^a + 5 \cdot 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ -x = -2 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases} \left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = \frac{5x - 9}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 2x - y - 2 = \frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

Soluci3n: $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{3}{2}$

$$e) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 1 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = -2 \end{cases}$$

Las ecuaciones $2.^a$ y $3.^a$ obtenidas dicen cosas contradictorias. Por tanto, el sistema es incompatible.

$$f) \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ -x + 4y + z = 2 \end{cases} \begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a - 1.^a \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x + 3y = 1 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

Hay dos ecuaciones iguales. El sistema es compatible indeterminado. Buscamos las soluciones en funci3n del par3metro y :

$$\begin{cases} -2x + z = 1 - y \\ x = 1 - 3y \end{cases} \rightarrow -2(1 - 3y) + z = 1 - y \rightarrow z = 3 - 7y$$

Soluci3n: $x = 1 - 3y$, $z = 3 - 7y$

Inecuaciones

52 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2x - 3 < x - 1$

b) $\frac{3x-2}{2} \leq \frac{2x+7}{3}$

c) $-3x - 2 < 5 - \frac{x}{2}$

d) $\frac{3x}{5} - x > -2$

a) $x < 2$; $(-\infty, 2)$

b) $9x - 6 \leq 4x + 14 \rightarrow 5x \leq 20 \rightarrow x \leq 4$; $(-\infty, 4]$

c) $-6x - 4 < 10 - x \rightarrow -14 < 5x \rightarrow x > -\frac{14}{5}$; $(-\frac{14}{5}, +\infty)$

d) $3x - 5x > -10 \rightarrow -2x > -10 \rightarrow 2x < 10 \rightarrow x < 5$; $(-\infty, 5)$

53 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $5(2 + x) > -5x$

b) $\frac{x-1}{2} > x-1$

c) $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x \rightarrow 10x > -10 \rightarrow x > -1$; $(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2 \rightarrow 1 > x \rightarrow x < 1$; $(-\infty, 1)$

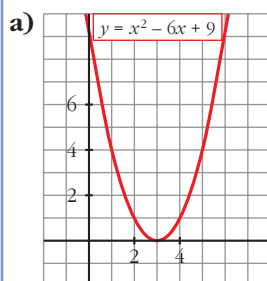
c) $x(x + 5) < 0 \rightarrow -5 < x < 0$; $(-5, 0)$

d) $(3x - 2)(3x + 2) > 0 \rightarrow (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$

e) $(x + 2)(x + 4) \geq 0 \rightarrow (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

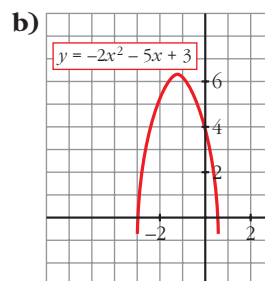
f) $(x + 3)(x - 5) \leq 0 \rightarrow [-3, 5]$

54 Observando la representación gráfica de estas parábolas, di cuáles son las soluciones de las ecuaciones e inecuaciones propuestas:



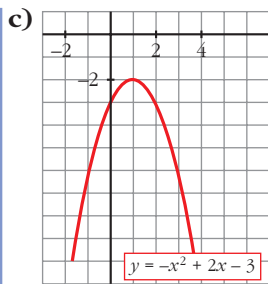
$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$



$$-2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$



$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$

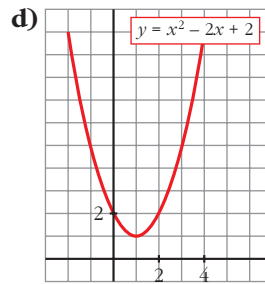
$$-x^2 + 2x - 3 < 0$$

a) Ecuación: $x = 3$

Inecuación: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

c) Ecuación: No tiene solución

Inecuación: \mathbb{R}



$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 > 0$$

b) Ecuación: $x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$

Inecuación: $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$

d) Ecuación: No tiene solución

Inecuación: \mathbb{R}

55 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a)
$$\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$$

• Resuelve cada inecuación y busca las soluciones comunes. Uno de los sistemas no tiene solución.

a)
$$\left. \begin{array}{l} 4x < 4 \rightarrow x < 1 \\ x > -4 \end{array} \right\} (-4, 1)$$

b)
$$\left. \begin{array}{l} 3x > -5 \rightarrow x > -5/3 \\ x > 4 \end{array} \right\} (4, +\infty)$$

c)
$$\left. \begin{array}{l} x > 17 \\ 5x > 19 \rightarrow x > 19/5 \end{array} \right\} (17, +\infty)$$

d)
$$\left. \begin{array}{l} x > 3/2 \\ x < -1/5 \end{array} \right\} \text{No tiene solución}$$

56 Resuelve:

a) $-x^2 - 2x + 3 \geq 0$

b) $5 - x^2 < 0$

c) $x^2 + 3x > 0$

d) $-x^2 + 6x - 5 \leq 0$

a) $-(x + 3)(x - 1) \geq 0 \rightarrow [-3, 1]$

b) $(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x) < 0 \rightarrow (-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

$$c) x(x+3) > 0 \rightarrow (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$$

$$d) -(x-1)(x-5) \leq 0 \rightarrow (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$$

57 Resuelve:

$$a) x^2 - 7x + 6 \leq 0$$

$$b) x^2 - 7x + 6 > 0$$

$$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$$

$$a) [1, 6]$$

$$b) (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$$

58 Comprueba que todos los números reales son solución de esta inecuación:

$$5(x-2) - 4(2x+1) < -3x+1$$

$$5x - 10 - 8x - 4 < -3x + 1$$

$$0 < 15$$

Queda $0 < 15$, que se verifica para todos los números reales.

Página 98

59 Comprueba que no hay ningún número que verifique esta inecuación:

$$3(x-2) + 7 < x + 2(x-5)$$

$$3x - 6 + 7 < x + 2x - 10$$

$$0 < -11$$

Queda $0 < -11$, que no es cierto.

60 Ana tiene 8 años menos que Javier. ¿Cuántos años puede tener Ana, si sabemos que el triple de su edad es mayor que el doble de la de Javier?

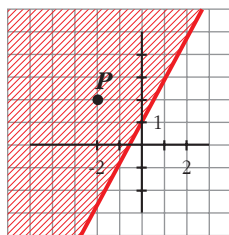
$$\text{Ana} \rightarrow x \quad 3x > 2(x+8)$$

$$\text{Javier} \rightarrow x+8 \quad 3x > 2x+16$$

$$x > 16$$

Ana tendrá más de 16 años.

61



a) Comprueba que el punto P verifica la inecuación $2x - y \leq -1$.

b) Elige tres puntos cualesquiera de la zona rayada y prueba que son soluciones de la inecuación.

a) Las coordenadas de P son $(-2, 2)$.

Sustituyendo en la inecuación, queda: $2 \cdot (-2) - (-2) = -2 \leq -1$

b) Por ejemplo, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, -1)$.

Todos los puntos de la zona rayada cumplen la inecuación.

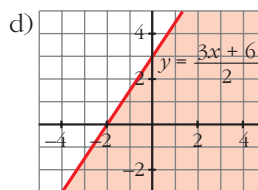
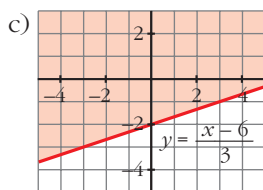
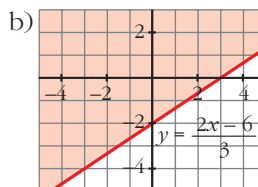
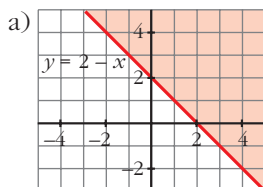
62 Resuelve gráficamente:

a) $x + y - 2 \geq 0$

b) $2x - 3y \leq 6$

c) $\frac{x - 3y}{2} \leq 3$

d) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \geq -1$



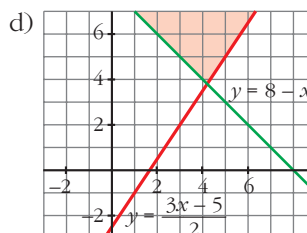
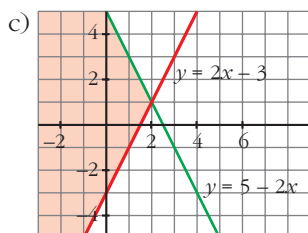
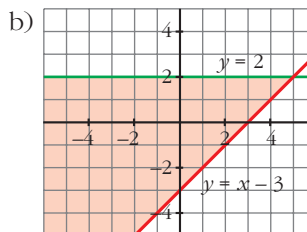
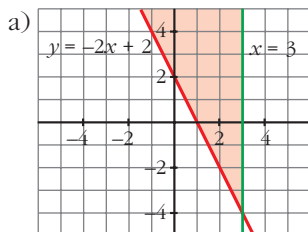
63 Resuelve gráficamente:

a) $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y \leq 3 \\ y \leq 2 \end{cases}$

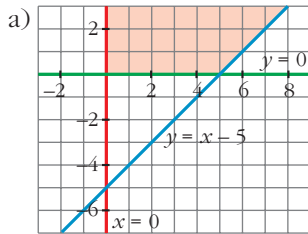
c) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - 2y \leq 5 \\ x + y \geq 8 \end{cases}$

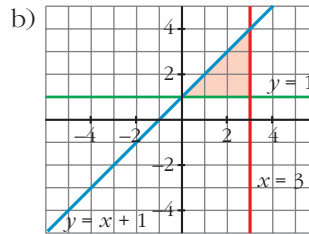


64 Representa, en cada caso, los puntos del plano que verifican las condiciones dadas:

a)
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \leq 5 \end{cases}$$



b)
$$\begin{cases} y \geq 1 \\ x \leq 3 \\ -x + y \leq 1 \end{cases}$$



PARA RESOLVER

Problemas de ecuaciones y de sistemas

65 Para la calificación de un curso, se decide que la primera evaluación cuente un 25%, la segunda, un 35%, y la tercera, un 40%. Una alumna ha tenido un 5 en la primera y un 7 en la segunda. ¿Qué nota tiene que conseguir en la tercera para que su calificación final sea 7?

$$0,25 \cdot 5 + 0,35 \cdot 7 + 0,40 \cdot x = 7$$

$$0,40x = 3,3$$

$$x = 8,25$$

Ha de conseguir un 8,25.

66 Un comerciante compra 50 kg de harina y 80 kg de arroz, por los que tiene que pagar 66,10 €; pero consigue un descuento del 20% en el precio de la harina y un 10% en el del arroz. De esa forma, paga 56,24 €. ¿Cuáles son los precios iniciales de cada artículo?

$$\begin{cases} \text{Precio 1 kg harina} \rightarrow x \\ \text{Precio 1 kg de arroz} \rightarrow y \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 50x + 80y = 66,10 \\ 0,8 \cdot 50x + 0,9 \cdot 80y = 56,24 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 0,65 \text{ €} \\ y = 0,42 \text{ €} \end{array} \right.$$

Un kilo de harina valía 0,65 € y un kilo de arroz 0,42 €.

67 La edad de un padre es el cuádruple de la de su hijo, pero dentro de 16 años será solamente el doble. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

	AHORA	DENTRO DE 16 AÑOS
PADRE	4x	4x + 16
HIJO	x	x + 16

$$4x + 16 = 2(x + 16); \quad 4x + 16 = 2x + 32; \quad x = 8$$

El padre tiene 32 años y el hijo 8 años.

- 68** La suma de un número par, el par anterior y los dos impares que lo siguen, es 34. Calcula ese número.

$$x + x - 2 + x + 1 + x + 3 = 34 \rightarrow x = 8$$

Es el número 8.

- 69** Las dos cifras de un número suman 12. Si se invierte el orden de las mismas, se obtiene un número 18 unidades mayor. Calcula dicho número.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ 10y + x = 18 + 10x + y \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \end{array}$$

Es el número 57.

- 70** Tres empresas aportan 2, 3 y 5 millones de euros para la comercialización de un nuevo avión. A los cinco años reparten beneficios, correspondiendo a la tercera 189 000 € más que a la segunda. ¿Cuál fue la cantidad repartida?

• A la primera le corresponden 2/10 de los beneficios.

Beneficios

$$1.^a \rightarrow 2 \text{ millones} \rightarrow y$$

$$2.^a \rightarrow 3 \text{ millones} \rightarrow x$$

$$3.^a \rightarrow \frac{5 \text{ millones}}{10 \text{ millones}} \rightarrow \frac{189\,000 + x}{2x + y + 189\,000}$$

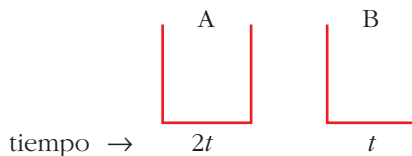
$$\left. \begin{array}{l} \frac{2}{10}(2x + y + 189\,000) = y \\ \frac{3}{10}(2x + y + 189\,000) = x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2x - 4y = -189\,000 \\ -4x + 3y = -567\,000 \end{array} \left\} \begin{array}{l} x = 283\,500 \\ y = 189\,000 \end{array}$$

$$\text{Total} = 2x + y + 189\,000 = 945\,000 \text{ €}$$

La cantidad repartida fue de 945 000 €.

- 71** Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en 2 horas. ¿Cuánto tarda cada uno por separado?

• Si A tarda x horas en llenar el depósito, en 1 hora llena $1/x$ del depósito.

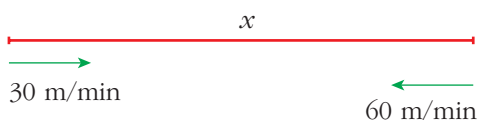


En 1 hora $\rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{3}{2t}$ partes del depósito

Tiempo entre los dos: $\frac{2t}{3} = 2$ horas $\rightarrow 2t = 6$ horas $\rightarrow t = 3$ horas

B tarda 3 horas y A, 6 horas.

- 72** Un remero sube con su barca por un río a una velocidad de 30 m/min y baja a 60 m/min. ¿Hasta qué distancia se aleja en un paseo de hora y media?



$$\left. \begin{aligned} 30 &= \frac{x}{t} \\ 60 &= \frac{x}{90 - t} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 30t &= x \\ 60(90 - t) &= x \end{aligned}$$

$$30t = 5400 - 60t; \quad t = 60 \text{ min}$$

Tarda 60 minutos en la ida y 30 en la vuelta. Se aleja una distancia de 1800 m.

- 73** Se mezclan 30 kg de café de 6 €/kg con cierta cantidad de otro de 8 €/kg, resultando la mezcla a 7,25 €/kg.

¿Qué cantidad del café más caro se ha utilizado?

• $\text{Precio de 1 kg de mezcla} = \frac{\text{coste total}}{\text{total de kilos}}$

A \rightarrow 30 kg \rightarrow 6 €/kg

B \rightarrow x kg \rightarrow 8 €/kg

Mezcla \rightarrow $(30 + x)$ kg \rightarrow 7,25 €/kg

$$7,25 = \frac{30 \cdot 6 + 8x}{30 + x}; \quad 217,5 + 7,25x = 180 + 8x$$

$$0,75x = 37,5 \rightarrow x = 50 \text{ kg}$$

- 74** Una tienda ha vendido 60 ordenadores, cuyo precio original era de 1 200 €, con un descuento del 20% a unos y un 25% a otros.

Si se han recaudado 56 400 €, calcula a cuántos ordenadores se rebajó el 25%.

	PRECIO ORIGINAL		CON DESCUENTO
UNOS $\rightarrow x$	$\rightarrow 1\,200x$	$\xrightarrow{-20\%}$	$0,8 \cdot 1\,200x = 960x$
OTROS $\rightarrow y$	$\rightarrow 1\,200y$	$\xrightarrow{-25\%}$	$0,75 \cdot 1\,200y = 900y$

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ 960x + 900y = 56\,400 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 40 \\ y = 20 \end{array}$$

Se vendieron 20 ordenadores con un 25% de descuento y 40 ordenadores con un 20% de descuento.

Página 99

- 75** En la primera prueba de una oposición, queda eliminado el 52% de los participantes. En la segunda prueba, se elimina el 25% de los restantes. Si el número total de personas suspendidas es 512, ¿cuántas personas se presentaron a la oposición?

• *Recuerda que para calcular el 52% de una cantidad, hay que multiplicarla por 0,52. ¿Por cuánto habrá que multiplicar para calcular el 25% del 48% restante?*

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{QUEDAN} & & \text{QUEDAN} & & \\ \text{Se presentan } x & \xrightarrow[1.ª \text{ prueba}]{-52\%} & 0,48x & \xrightarrow[2.ª \text{ prueba}]{-25\%} & 0,75 \cdot 0,48x = 0,36x & & \end{array}$$

Queda el 36% del total. Se ha eliminado el 64% del total:

$$0,64x = 512 \rightarrow x = 800$$

Se presentaron 800 personas.

- 76** Un granjero espera obtener 36 € por la venta de huevos. En el camino al mercado se le rompen cuatro docenas. Para obtener el mismo beneficio, aumenta en 0,45 € el precio de la docena. ¿Cuántas docenas tenía al principio?

• *Iguala el coste de las docenas que se rompen a lo que aumenta el coste de las que quedan.*

$$\text{Tenía } x \text{ docenas} \rightarrow \frac{36}{x} \text{ €/docena}$$

$$\text{Le quedan } x - 4 \text{ docenas} \rightarrow \left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) \text{ €/docena}$$

$$\left(\frac{36}{x} + 0,45 \right) (x - 4) = 36 \rightarrow (36 + 0,45x) (x - 4) = 36x$$

$$36x - 144 + 0,45x^2 - 1,8x = 36x \rightarrow 0,45x^2 - 1,8x - 144 = 0$$

$$x = 20 \quad (x = -16 \text{ no vale}) \rightarrow \text{Tenía 20 docenas.}$$

- 77** Sobre el número de visitantes a cierta exposición se sabe que:

- Durante el mes de febrero se incrementó en un 12% respecto al mes de enero.
- En marzo sufrió un descenso del 12% respecto a febrero.
- El número de visitantes de enero superó en 36 personas al de marzo.

¿Cuántas personas vieron la exposición en enero?

$$\begin{array}{ccccc} \text{Enero} & \xrightarrow{+12\%} & \text{Febrero} & \xrightarrow{-12\%} & \text{Marzo} \\ x & & 1,12x & & 0,88 \cdot 1,12x = 0,9856x \\ x = 0,9856x + 36 & \rightarrow & x = 2500 & \text{ personas} & \end{array}$$

78 Un inversor, que dispone de 28 000 €, coloca parte de su capital en un banco al 8%, y el resto, en otro banco al 6%. Si la primera parte le produce anualmente 200 € más que la segunda, ¿cuánto colocó en cada banco?

$$28\,600 \text{ €} \left\{ \begin{array}{l} x \text{ al } 8\% \xrightarrow{1 \text{ año}} 0,08x \\ (28\,000 - x) \text{ al } 6\% \xrightarrow{1 \text{ año}} 0,06(28\,000 - x) \end{array} \right.$$

$$0,08x = 0,06(28\,000 - x) + 200 \rightarrow 0,08x = 1\,680 - 0,06x + 200 \rightarrow x = 13\,428,57$$

13 428,57 € al 8% y 14 571,43 € al 6%.

Página 99

AUTOEVALUACIÓN

1. Factoriza los siguientes polinomios señalando sus raíces:

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Aplicamos Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -4 & -4 \\ -1 & & -1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & & 2 & 4 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$$

Las raíces de $P(x)$ son -2 , -1 y 2 .

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

Sacando factor común: $Q(x) = x(2x^2 - x - 1)$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de 2.º grado a $2x^2 - x - 1$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad Q(x) = 2x(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Las raíces de $Q(x)$ son $-\frac{1}{2}$, 0 y 1 .

2. Opera y simplifica el resultado:

a) $\frac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4}$

b) $\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right)$

a) $\frac{(x+5)^2 - 2x(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{(x+5) - 2x}{(x+5)^3} = \frac{5-x}{(x+5)^3}$

b) $\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x+2}\right) = \left(\frac{(x+1)(x+2) - x^2}{x(x+2)}\right) : \left(\frac{x+2+x}{x+2}\right) =$
 $= \left(\frac{x^2 + 3x + 2 - x^2}{x(x+2)}\right) : \left(\frac{2x+2}{x+2}\right) =$
 $= \left(\frac{3x+2}{x(x+2)}\right) \cdot \left(\frac{x+2}{2x+2}\right) = \frac{3x+2}{x(2x+2)} = \frac{3x+2}{2x^2+2x}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{3x+1}{3} - \frac{5x^2+3}{2} = \frac{x^2-1}{2} - \frac{x+2}{3}$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c) $x - \sqrt{2x-1} = 1 - x$

d) $\frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}$

a) $\frac{3x+1}{3} - \frac{5x^2+3}{2} = \frac{x^2-1}{2} - \frac{x+2}{3}$

Multiplicando por mín.c.m.(2, 3) = 6 →

→ $2(3x+1) - 3(5x^2+3) = 3(x^2-1) - 2(x+2)$ →

→ $6x+2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4$ → $-15x^2 + 6x - 7 = 3x^2 - 2x - 7$ →

→ $18x^2 - 8x = 0$ → $2x(9x-4) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ 9x - 4 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{4}{9} \end{array} \right.$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \xrightarrow{x^2=y} y^2 - 8y - 9 = 0$

$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-9) \cdot (1)}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} y = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ y = -1 \text{ (no vale)} \end{array} \right.$

c) $x - \sqrt{2x-1} = 1 - x$ → $(2x-1)^2 = (\sqrt{2x-1})^2$ → $4x^2 - 4x + 1 = 2x - 1$ →
 → $4x^2 - 6x + 2 = 0$ → $2x^2 - 3x + 1 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (2) \cdot (1)}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$ $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$ (Son válidas ambas soluciones.)

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x+1} &= \frac{x^2-3}{(x+1)(x-3)} \rightarrow (x+1) \cdot x - (x-3)(x+3) = x^2-3 \rightarrow \\
 &\rightarrow x^2+x - (x^2-9) = x^2-3 \rightarrow \\
 &\rightarrow x^2+x - x^2+9 = x^2-3 \rightarrow \\
 &\rightarrow x+9 = x^2-3 \rightarrow x^2-x-12=0 \\
 x &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot (1) \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9$

b) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x}$

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9 \rightarrow 3^{x^2-2} = 3^2 \rightarrow x^2-2 = 2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x} \rightarrow 5^{x^2} \cdot (5^2)^{x-1} = 5^{3x} \rightarrow 5^{x^2} \cdot 5^{2x-2} = 5^{3x} \rightarrow$
 $\rightarrow 5^{x^2+2x-2} = 5^{3x} \rightarrow x^2+2x-2 = 3x \rightarrow x^2-x-2 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4 \cdot (1) \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

5. Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} xy = -2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

a) $\begin{cases} xy = -2 \rightarrow x = -\frac{2}{y} \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$$3\left(-\frac{2}{y}\right) + 2y = -1 \rightarrow -\frac{6}{y} + 2y = -1 \rightarrow -6 + 2y^2 = -y \rightarrow 2y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot (2) \cdot (-6)}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} y_1 = \frac{3}{2} \rightarrow x_1 = -\frac{4}{3} \\ y_2 = -2 \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

Hay dos pares de *soluciones*:

$$x_1 = -\frac{4}{3}; y_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = 1; y_2 = -2$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \rightarrow x = 4 + 2y$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-2(4 + 2y)} + y = -1 &\rightarrow (\sqrt{-8 - 4y})^2 = (-1 - y)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow -8 - 4y = 1 + 2y + y^2 \rightarrow y^2 + 6y + 9 = 0 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}}{2} = \frac{-6}{2} \rightarrow y = -3$$

$$x = 4 + 2(-3) \rightarrow x = -2$$

Solución: $x = -2$; $y = -3$

6. Resuelve por el método de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{1^a - 3 \cdot 3^a} \\ \xrightarrow{2^a - 3^a} \\ \xrightarrow{3^a} \end{array} \begin{array}{l} -8y + 7z = 29 \\ y - z = -4 \\ x + y - 2z = -6 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{1^a + 8 \cdot 2^a} \\ \xrightarrow{2^a} \\ \xrightarrow{3^a} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} -z = -3 \\ y - z = -4 \\ x + y - 2z = -6 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow z = 3 \\ \rightarrow y = -1 \\ \rightarrow x = 1 \end{array}$$

Solución: $x = 1$; $y = -1$; $z = 3$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{1^a} \\ \xrightarrow{2^a - 2 \cdot 1^a} \\ \xrightarrow{3^a - 1^a} \end{array} \begin{array}{l} x - 5y + 9z = 4 \\ 11y - 21z = -6 \\ 22y - 42z = -4 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{1^a} \\ \xrightarrow{2^a} \\ \xrightarrow{3^a - 2 \cdot 2^a} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{1^a} x - 5y + 9z = 4 \\ \xrightarrow{2^a} 11y - 21z = -6 \\ \xrightarrow{3^a - 2 \cdot 2^a} 0 = 8 \end{array}$$

El sistema no tiene solución.

7. Resuelve:

a) $x^2 + 5x \geq 0$ b) $x^2 - 25 < 0$ c) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \\ x + 1 \leq 8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$

a) $x^2 + 5x \geq 0 \rightarrow x(x + 5) \geq 0$

Las raíces de $x(x + 5) = 0$ son 0 y -5:

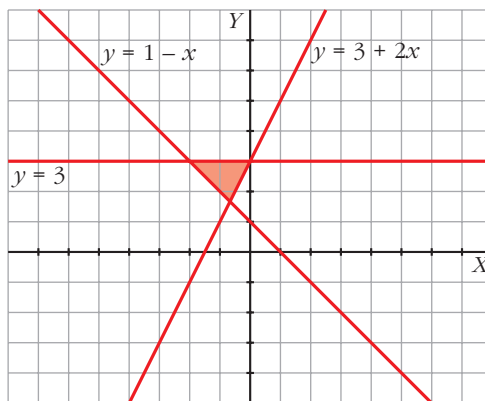


Si $x = -6 \rightarrow -6(-6 + 5) > 0$
 Si $x = -1 \rightarrow -1(-1 + 5) < 0$
 Si $x = 1 \rightarrow 1(1 + 5) > 0$ } Solución: $(-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$

b) $x^2 - 25 < 0 \rightarrow x^2 < 25 \rightarrow -5 < x < 5 \rightarrow$ Solución: $(-5, 5)$

c) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3 \\ x + 1 \leq 8 \rightarrow x \leq 7 \end{cases}$ Solución: $[3, 7]$

d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$ La solución es el recinto sombreado:



8. Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kilos por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?

Llamamos x al número de kilos que compró el tendero.

Llamamos y al precio al que compra cada kilo de manzanas.

$\begin{cases} x \cdot y = 125 \\ (x - 20)(y + 0,4) = 147 \end{cases}$

Resolviendo el sistema (nos quedamos solo con la solución positiva):

$x = 125, y = 1$

Por tanto, el tendero compró 125 kg.