Sistemas de ecuaciones

3

ACTIVIDADES

1. Determina las incógnitas, los coeficientes, el término independiente y una solución de estas ecuaciones lineales.

a) $3x - 2y = -3$

b) $5y + 2x + z = 8$

c) $8 - 4x + 2y = z$

d) $2t + 4x - 7 = y + 4z$

	Ecuación reordenada	Incógnitas	Coeficientes	Término independiente	Solución cualquiera
a)	$3x-2y=-3$	x, y	3, −2	−3	(−1, 0)
b)	$2x+5y+z=8$	x, y, z	2, 5, 1	8	(0, 0, 8)
c)	$-4x+2y-z=-8$	x, y, z	−4, 2, −1	−8	(1, 1, 6)
d)	$4x-y-4z+2t=7$	x, y, z, t	4, −1, −4, 2	7	(0, 1, 0, 4)

2. ¿Cuáles de estos pares de valores son solución del sistema $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ x-2y=-3 \end{array}\right\}$?

a) $x = 1, y = 0$

b) $x = -1, y = 1$

c) $x = 5, y = 4$

El único par que satisface las dos ecuaciones que forman el sistema es $x = 5$, $y = 4$.

3. Clasifica estos sistemas de ecuaciones y resuélvelos por el método más adecuado.

a) $\left.\begin{array}{r} 8x-2y=4 \\ -12x+3y=-6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} p+2q=1 \\ 3p-q=11 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 4x+6y=2 \\ 3y+2x=1 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=-4 \\ -x+2y=7 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 8x-2y=4 \\ -12x+3y=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{:2} \\ \xrightarrow{:(-3)} \end{array} \left.\begin{array}{r} 4x-y=2 \\ 4x-y=2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{r} p+2q=1 \\ 3p-q=11 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 2} \end{array} \left.\begin{array}{r} p+2q=1 \\ 6p-2q=22 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 7p=23 \rightarrow p=\frac{23}{7} \rightarrow 3\cdot\frac{23}{7}-q=11 \rightarrow q=-\frac{8}{7} \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

c) $\left.\begin{array}{r} 4x+6y=2 \\ 3y+2x=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{:2} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=1 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

d) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=-4 \\ -x+2y=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4=y \\ -x+2y=7 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} -x+2(2x+4)=7 \rightarrow 3x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3} \rightarrow y=\frac{10}{3} \rightarrow$

$\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

4. Decide de qué tipo son estos sistemas de ecuaciones y representa gráficamente su solución.

a) $\left.\begin{array}{r}3x-2y=5\\-6x+4y=0\end{array}\right\}$

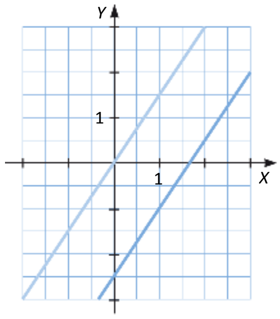
b) $\left.\begin{array}{r}4x-6y=2\\-6x+9y=-3\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}-x+y=3\\2x-y=-1\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}10x+y=-3\\-4x+2y=-6\end{array}\right\}$

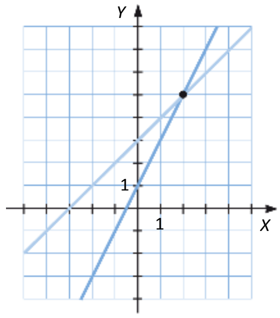
a) $\left.\begin{array}{r}3x-2y=5\\-6x+4y=0\end{array}\right\}\xrightarrow{:(-2)}\left.\begin{array}{r}3x-2y=5\\3x-2y=0\end{array}\right\}$

Sistema incompatible. No existe solución:



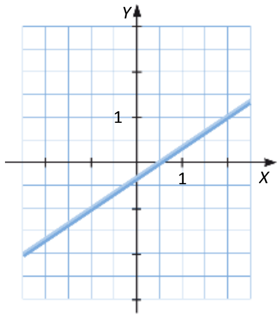
c) $\left.\begin{array}{r}-x+y=3\\2x-y=-1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}x=2\xrightarrow{y=3+x}y=5$

Sistema compatible determinado. Solución única:



b) $\left.\begin{array}{r}4x-6y=2\\-6x+9y=-3\end{array}\right\}\begin{array}{l}\xrightarrow{:2}\\\xrightarrow{:(-3)}\end{array}\left.\begin{array}{r}2x-3y=1\\2x-3y=1\end{array}\right\}$

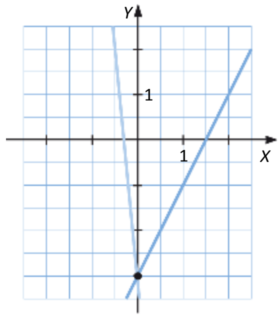
Sistema compatible indeterminado.
Infinitas soluciones:



d) $\left.\begin{array}{r}10x+y=-3\\-4x+2y=-6\end{array}\right\}\xrightarrow{:(-2)}\left.\begin{array}{r}10x+y=-3\\2x-y=3\end{array}\right\}\rightarrow$

$\xrightarrow{\text{Reducción}}12x=0\rightarrow x=0\xrightarrow{y=-3-10x}y=-3$

Sistema compatible determinado. Solución única:



5. Resuelve utilizando los métodos de sustitución e igualación.

a) $\left.\begin{array}{r}3x-5y=2\\-2x+3y=5\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}2x-7y=4\\-6x+2y=3\end{array}\right\}$

a) ▪ Sustitución:

$$\left.\begin{array}{r}3x-5y=2\\-2x+3y=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{2+5y}{3}\\-2x+3y=5\end{array}\right\}\rightarrow-2\left(\frac{2+5y}{3}\right)+3y=5\rightarrow-4-10y+9y=15\rightarrow y=-19\rightarrow x=-31$$

▪ Igualación:

$$\left.\begin{array}{r}3x-5y=2\\-2x+3y=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{2+5y}{3}\\x=\dfrac{3y-5}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\frac{2+5y}{3}=\frac{3y-5}{2}\rightarrow4+10y=9y-15\rightarrow y=-19\rightarrow x=-31$$

b) ▪ Sustitución:

$$\left.\begin{array}{r}2x-7y=4\\-6x+2y=3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{4+7y}{2}\\-6x+2y=3\end{array}\right\}\to -6\left(\frac{4+7y}{2}\right)+2y=3\to -12-21y+2y=3\to y=-\frac{15}{19}\to x=-\frac{29}{38}$$

▪ Igualación:

$$\left.\begin{array}{r}2x-7y=4\\-6x+2y=3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{4+7y}{2}\\x=\dfrac{2y-3}{6}\end{array}\right\}\to\frac{4+7y}{2}=\frac{2y-3}{6}\to 12+21y=2y-3\to y=-\frac{15}{19}\to x=-\frac{29}{38}$$

6. Halla la solución del sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r}3(2x+y-1)-6(4x-y)=15\\-x+y+3(x-2y+6)=4\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}3(2x+y-1)-6(4x-y)=15\\-x+y+3(x-2y+6)=4\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}-2x+y=2\\2x-5y=-14\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}-4y=-12\to y=3$$

$$-2x+y=2\xrightarrow{y=3}-2x+3=2\to x=\frac{1}{2}$$

7. Resuelve por el método de reducción.

a) $\left.\begin{array}{r}3x-2y=4\\2x-3y=2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}x-3y=1\\4x+5y=-2\end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r}3x-2y=4\\2x-3y=2\end{array}\right\}\begin{array}{c}\xrightarrow{\cdot(-2)}\\\xrightarrow{\cdot 3}\end{array}\left.\begin{array}{r}-6x+4y=-8\\6x-9y=6\end{array}\right\}\to -5y=-2\to y=\frac{2}{5}\to x=\frac{4+2\cdot\frac{2}{5}}{3}=\frac{16}{15}$$

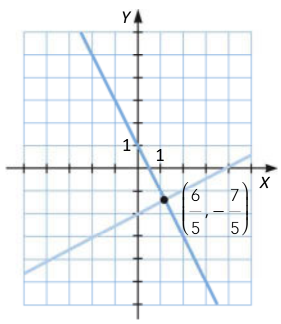
b) $$\left.\begin{array}{r}x-3y=1\\4x+5y=-2\end{array}\right\}\xrightarrow{\cdot(-4)}\left.\begin{array}{r}-4x+12y=-4\\4x+5y=-2\end{array}\right\}\to 17y=-6\to y=-\frac{6}{17}\to x=1+3\cdot\left(-\frac{6}{17}\right)=\frac{11}{17}$$

8. Resuelve gráficamente los sistemas.

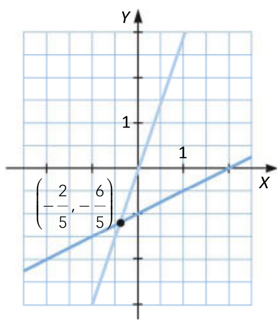
a) $\left.\begin{array}{r}x-2y=4\\2x+y=1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}3x-y=0\\x-2y=2\end{array}\right\}$

a)



b)



9. Halla la solución de estos sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 2x - y - 2z &= 4 \\ x + 3y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \\ -x + y + z &= 4 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x+z&=1 \\ 2x-y-2z&=4 \\ x+3y+z&=3 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=1-z} \left.\begin{aligned} 2(1-z)-y-2z&=4 \\ 1-z+3y+z&=3 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} -y-4z&=2 \\ 3y&=2 \end{aligned}\right\} \to y=\frac{2}{3} \to -\frac{2}{3}-4z=2 \to z=-\frac{2}{3} \xrightarrow{x=1-z} x=\frac{5}{3}$

La solución es la terna $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

b) $\left.\begin{aligned} x+y-z&=0 \\ x-y+z&=2 \\ -x+y+z&=4 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=z-y} \left.\begin{aligned} z-y-y+z&=2 \\ -z+y+y+z&=4 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} z-y&=1 \\ 2y&=4 \end{aligned}\right\} \to y=2 \xrightarrow{z=1+y} z=3 \xrightarrow{x=z-y} x=1$

La solución es la terna $(1, 2, 3)$.

10. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 4 \\ -2x + 3y - z &= 1 \\ 3x + y + 2z &= -1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + z &= 1 \\ y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x-2y+5z&=4 \\ -2x+3y-z&=1 \\ 3x+y+2z&=-1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=4-5z+2y} \left.\begin{aligned} -2(4-5z+2y)+3y-z&=1 \\ 3(4-5z+2y)+y+2z&=-1 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} -y+9z&=9 \\ 7y-13z&=-13 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y=9z-9}$

$\to 7(9z-9)-13z=-13 \to 50z=50 \to z=1 \xrightarrow{y=9z-9} y=0 \xrightarrow{x=4-5z+2y} x=-1$

La solución es la terna $(-1, 0, 1)$.

b) $\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ x+z&=1 \\ y+z&=1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x=1-y} \left.\begin{aligned} 1-y+z&=1 \\ y+z&=1 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{y=z} 2z=1 \to z=\frac{1}{2} \to y=\frac{1}{2} \to x=\frac{1}{2}$

La solución es la terna $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

11. Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 3x + 2y &= 19 \\ 2x + 3y &= 16 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 5y - 6z &= 0 \\ 3x + 4y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x-y&=3 \\ 3x+2y&=19 \\ 2x+3y&=16 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ &\xrightarrow{E_3=-2E_1+E_3} \end{aligned} \left.\begin{aligned} x-y&=3 \\ 5y&=10 \\ 5y&=10 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x-y&=3 \\ 5y&=10 \end{aligned}\right\} \to y=2 \to x=5$

La solución es el par (5, 2).

b) $\left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 2x+5y-6z&=0 \\ 3x+4y+z&=0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ &\xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3} \end{aligned} \left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 3y-10z&=0 \\ y-5z&=0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{E_3=E_2-3E_3} \left.\begin{aligned} x+y+2z&=0 \\ 3y-10z&=0 \\ 5z&=0 \end{aligned}\right\} \to z=0 \to y=0 \to x=0$

La solución es la terna (0, 0, 0).

12. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3x-y=1 \\ 5x+7y-3z=3 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-y-2z=8 \\ 2x+y-3z=11 \\ x+2y+3z=5 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 3x-y=1 \\ 5x+7y-3z=3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-5E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -4y-3z=-5 \\ 2y-8z=-7 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3=2E_3+E_2} \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ -4y-3z=-5 \\ -19z=-19 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow z=1 \xrightarrow{y=\frac{-5+3z}{-4}} y=\frac{1}{2} \xrightarrow{x=2-y-z} x=\frac{1}{2}$

La solución es la terna $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x-y-2z=8 \\ 2x+y-3z=11 \\ x+2y+3z=5 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{r} x-y-2z=8 \\ 3y+z=-5 \\ 3y+5z=-3 \end{array}\right\} \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3} \left.\begin{array}{r} x-y-2z=8 \\ 3y+z=-5 \\ 4z=2 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow z=2 \xrightarrow{y=\frac{-5-z}{3}} y=-\frac{11}{6} \xrightarrow{x=8+y+2z} x=\frac{43}{6}$

La solución es la terna $\left(\frac{43}{6},-\frac{11}{6},\frac{1}{2}\right)$.

13. Expresa de forma matricial y resuelve.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x+4y+5z=2 \\ x-y+2z=-6 \\ -2x-y+z=8 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x-y=7 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \\ -2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1\leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=2E_1+E_3} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & -1 & 20 \\ 0 & -3 & 5 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=3E_2+7E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 7 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 32 & 32 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+2z=-6 \\ 7y-z=20 \\ 32z=32 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \xrightarrow{y=3,\, z=1} x=-6+3-2 \rightarrow x=-5 \\ \xrightarrow{z=1} 7y=21 \rightarrow y=3 \\ \longrightarrow z=1 \end{array}$

La solución es la terna $(-5,3,1)$.

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3} \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=E_3/2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-4E_2+7E_3}$

$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y+2z=1 \\ 7y-5z=1 \\ -z=10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=-7,\, z=-10} x+21-20=1 \rightarrow x=0 \\ \xrightarrow{z=-10} 7y+50=1 \rightarrow y=-7 \\ \longrightarrow z=-10 \end{array}$

La solución es la terna $(0,-7,-10)$.

14. **Expresa de forma matricial y resuelve.**

a) $\left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ x-z=2 \\ y-z=-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-y+z=1 \\ x+3y-z=2 \\ 4x+2y=1 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2=-E_1+E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

Como una fila se repite, el sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones, que se dan en función de un parámetro:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x-y=3 \\ y-z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{z=\lambda,\, y=-1+\lambda} x-(-1+\lambda)=3 \to x=2+\lambda \\ \xrightarrow{z=\lambda} y=-1+\lambda \end{array}$

Las soluciones vienen determinadas por la terna $(2+\lambda, -1+\lambda, \lambda)$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-4E_1+E_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 4 & -5 \\ 0 & -10 & 4 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3}$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -10 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

15. **Determina el número de soluciones de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+4y-z=2 \\ 3x-y+z=1 \\ -2x+y-z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+5z=1 \\ 2x+y-z=3 \\ 2y-3z=1 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=2E_1+E_3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 4 & -5 \\ 0 & 9 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=9E_2+13E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -13 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Existe una única solución.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2=-E_1+E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+2E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Existen infinitas soluciones.

16. **Discute estos sistemas y resuélvelos.**

a) $\left.\begin{array}{r} y-3z=3 \\ 3y-2z=1 \\ 2x+5y-5z=4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-3y+4z=1 \\ 2x-2y-z=2 \\ x+y-3z=-2 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{E_1 \leftrightarrow E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+3E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Existe una única solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} 2x+5y-5z=4 \\ 3y-2z=1 \\ -7z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=-\frac{3}{7},\, z=-\frac{8}{7}} x=\frac{3}{14} \\ \xrightarrow{z=-\frac{8}{7}} y=-\frac{3}{7} \\ \longrightarrow z=-\frac{8}{7} \end{array}$$

La solución es la terna $\left(\frac{3}{14}, -\frac{3}{7}, -\frac{8}{7}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[E_3=-E_1+E_3]{E_2=-2E_1+E_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right)$

Sistema compatible determinado. Existe una única solución:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x-3y+4z=1 \\ 4y-9z=0 \\ 2z=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=-\frac{27}{8},\, z=-\frac{3}{2}} x=-\frac{25}{8} \\ \xrightarrow{z=-\frac{3}{2}} y=-\frac{27}{8} \\ \longrightarrow z=-\frac{3}{2} \end{array}$$

La solución es la terna $\left(-\frac{25}{8}, -\frac{27}{8}, -\frac{3}{2}\right)$.

17. Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = y-3 \\ 2x^2 = y^2-7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} xy - 2x = -9 \\ \frac{x+y}{y} = 2y \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} \frac{x+1}{2}=y-3 \\ 2x^2=y^2-7 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=2y-7 \\ 2x^2=y^2-7 \end{array}\right\} \to 2(2y-7)^2=y^2-7 \to 8y^2+98-56y=y^2-7 \to$

$\to 7y^2-56y+105=0 \to y^2-8y+15=0 \to \begin{cases} y_1=5 \xrightarrow{2y-7} x_1=3 \\ y_2=3 \xrightarrow{2y-7} x_2=-1 \end{cases}$

Las dos soluciones son los pares $(3, 5)$ y $(-1, 3)$.

b) $\left.\begin{array}{l} xy-2x=-9 \\ \frac{x+y}{y}=2y \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} xy-2x=-9 \\ x=2y^2-y \end{array}\right\} \to (2y^2-y)y-2(2y^2-y)=-9 \to 2y^3-5y^2+2y+9=0$

Se obtienen las soluciones con Ruffini:

	2	−5	2	9
−1		−2	7	−9
	2	−7	9	0

$\to y=-1$ es la única solución real, y por tanto, $x=2-1=1$.

La solución del sistema es el par $(1, 1)$.

18. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 6x + 6y = 5 \\ x^2 - y^2 = \dfrac{5}{36} \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4} + x = y + 2 \\ y^2 - x^2 = 2(x+y) \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 6x+6y=5 \\ x^2-y^2=\dfrac{5}{36} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x=\dfrac{5-6y}{6} \\ 36x^2-36y^2=5 \end{array}\right\} \to 36\left(\dfrac{5-6y}{6}\right)^2-36y^2=5 \to$

$\to 25+36y^2-60y-36y^2=5 \to 60y=20 \to y=\dfrac{1}{3} \xrightarrow{x=\frac{5-6y}{6}} x=\dfrac{1}{2}$

La única solución es el par $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right)$.

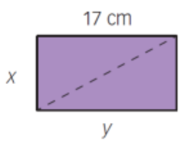
b) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4}+x=y+2 \\ y^2-x^2=2(x+y) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Factorizando}]{} \left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4}+x=y+2 \\ (y+x)(y-x)=2(x+y) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4}+x=y+2 \\ y-x=2 \end{array}\right\} \to$

$\to \left.\begin{array}{r} \sqrt{x+y+4}+x=y+2 \\ y=2+x \end{array}\right\} \to \sqrt{x+2+x+4}+x=2+x+2 \to \sqrt{2x+6}=4 \to$

$\to 2x+6=16 \to 2x=10 \to x=5 \to y=7$.

Al simplificar la segunda ecuación del sistema, se pierde la solución trivial nula, que también es válida. Por tanto, las dos soluciones son los pares $(0, 0)$ y $(5, 7)$.

19. La diagonal de un rectángulo mide 17 cm, y su perímetro, 46 cm. Plantea un sistema de ecuaciones y calcula la longitud de sus lados.



Por definición de perímetro y aplicando el teorema de Pitágoras, se llega al sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas siguientes:

$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=46 \\ x^2+y^2=17^2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y=23 \\ x^2+y^2=289 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} \left.\begin{array}{r} y=23-x \\ x^2+y^2=289 \end{array}\right\} \to$

$\to x^2+(23-x)^2=289 \to 2x^2-46x+240=0 \to \begin{cases} x_1=8 \to y_1=15 \\ x_2=15 \to y_2=8 \end{cases}$

Para que la solución se ajuste a la ilustración, *x* e *y* deben medir 8 cm y 15 cm, respectivamente.

20. La suma de un número más cinco veces el inverso de otro es 2. Por otro lado, el segundo número más el cuádruple del primero es 9. Determina cuáles son esos números.

Sea *x* el primer número e *y* el segundo. Entonces, el sistema de ecuaciones es el siguiente:

$\left.\begin{array}{r} x+\dfrac{5}{y}=2 \\ 4x+y=9 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} \left.\begin{array}{r} xy+5=2y \\ y=9-4x \end{array}\right\} \to x(9-4x)+5=2(9-4x) \to 4x^2-17x+13=0 \to \begin{cases} x_1=1 \to y_1=5 \\ x_2=\dfrac{13}{4} \to y_2=-4 \end{cases}$

Hay dos posibles soluciones, que están determinadas por los pares $(1, 5)$ y $\left(\dfrac{13}{4},-4\right)$.

SABER HACER

21. Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} -x+3y=\dfrac{2}{5} \\ 5x-15y=2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3}-y=\dfrac{5}{2} \\ 2x-6y=15 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -x+3y=\dfrac{2}{5} \\ 5x-15y=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 5} \left.\begin{array}{r} -5x+15y=2 \\ 5x-15y=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 0=0 \to$ Sistema compatible indeterminado.

Se buscan las soluciones en función de un parámetro:

$5x-15y=2 \to \left.\begin{array}{r} 5x-15\lambda=2 \\ y=\lambda \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{2+15\lambda}{5} \\ y=\lambda \end{array}\right\}$

Las infinitas soluciones están determinadas por los pares $\left(\dfrac{2+15\lambda}{5},\lambda\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{3}-y=\dfrac{5}{2} \\ 2x-6y=15 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-6)} \left.\begin{array}{r} -2x+6y=-15 \\ 2x-6y=15 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 0=0 \to$ Sistema compatible indeterminado.

Se buscan las soluciones en función de un parámetro:

$2x-6y=15 \to \left.\begin{array}{r} 2x-6\lambda=15 \\ y=\lambda \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{15+6\lambda}{2} \\ y=\lambda \end{array}\right\}$

Las infinitas soluciones están determinadas por los pares $\left(\dfrac{15+6\lambda}{2},\lambda\right)$.

22. Resuelve en función del parámetro *a*.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=7 \\ ax+2y=12 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+5y=20 \\ 7x+ay=39 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=7 \\ ax+2y=12 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot(-2)} \left.\begin{array}{r} -4x-2y=-14 \\ ax+2y=12 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} (a-4)x=-2 \to x=\dfrac{-2}{a-4} \to x=\dfrac{2}{4-a}$

- Si $a=4 \to$ Sistema incompatible. No existe solución.
- Si $a\neq 4 \to$ Sistema compatible determinado. Existe una única solución.

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+5y=20 \\ 7x+ay=39 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot(-7)} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \left.\begin{array}{r} -21x-35y=-140 \\ 21x+3ay=117 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}}$

$\to (3a-35)y=-23 \to y=\dfrac{-23}{3a-35} \to x=\dfrac{23}{35-3a}$

- Si $a=\dfrac{35}{3} \to$ Sistema incompatible. No existe solución.
- Si $a\neq\dfrac{35}{3} \to$ Sistema compatible determinado. Existe una única solución.

23. La diferencia de las dos cifras de un número es 2 y la diferencia entre dicho número y el obtenido intercambiando sus cifras es 18. ¿Cuál es el número?

Sea x la cifra de las decenas, e y la cifra de las unidades. Entonces, se diferencian dos casos:

- $y > x$:

$$\left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 10x+y-(10y+x)=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 10x+y-10y-x=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y-x=2 \\ 9x-9y=18 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} y=2+x \\ 9x-9y=18 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} 9x-9(2+x)=18 \rightarrow 9x-18-9x=18 \rightarrow \text{Imposible. No existe solución.}$$

- $x > y$:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 10x+y-(10y+x)=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 10x+y-10y-x=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

Se buscan las soluciones en función de un parámetro:

$$x-y=2 \xrightarrow{y=\lambda} \left.\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=\lambda \end{array}\right\}$$

Las infinitas soluciones están determinadas por los pares $(2+\lambda, \lambda)$. Por ejemplo, para $\lambda=3$ se tiene que el número 53 cumple las condiciones dadas.

24. Determina el número de soluciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=-3 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -3x+6y=9 \end{array}\right\} \rightarrow 0 \neq 18 \rightarrow \text{Sistema incompatible. No existe solución.}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -x+2y=-3 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \end{array} \left.\begin{array}{r} 3x-6y=9 \\ -3x+6y=-9 \end{array}\right\} \rightarrow 0=0 \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.}$$

25. Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x-4y+z=5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 2x-y+z=4 \\ 3x-4y+z=5 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-3E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 5y+z=2 \\ 5y+z=2 \end{array}\right\}$$

Como se repite una ecuación, el sistema es compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 5y+z=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{z=\lambda,\, y=\frac{2-\lambda}{5}} x=1+3\left(\frac{2-\lambda}{5}\right) \rightarrow x=\frac{11-3\lambda}{5} \\ \xrightarrow{z=\lambda} y=\frac{2-\lambda}{5} \end{array}$$

Las infinitas soluciones están determinadas por las ternas $\left(\frac{11-3\lambda}{5}, \frac{2-\lambda}{5}, \lambda\right)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \\ -x+y-z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-3E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=E_1+E_3} \end{array} \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{array}\right\}$

Sistema compatible indeterminado. Como hay una ecuación y tres incógnitas es necesario dar las soluciones en función de dos parámetros:

$x-y+z=0 \xrightarrow{y=\mu,\ z=\lambda} x=\mu-\lambda$

Las infinitas soluciones están determinadas por las ternas $(\mu-\lambda, \mu, \lambda)$.

26. **Resuelve el sistema** $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x-y+z=0} \\ \boldsymbol{2x-y-2z=1} \\ \boldsymbol{x-az=2} \end{array}\right\}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -a & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-E_1+E3} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1-a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=-E_2+E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 1 \end{array}\right)$$

- $3-a=0 \rightarrow a=3 \rightarrow$ Sistema incompatible. Ninguna solución.
- $3-a\neq 0 \rightarrow a\neq 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ y-4z=1 \\ (3-a)z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{y=\frac{a+1}{a-3},\ z=\frac{1}{3-a}} x=\dfrac{a+1}{a-3}-\dfrac{1}{3-a} \rightarrow x=\dfrac{a+2}{a-3} \\ \xrightarrow{z=\frac{1}{3-a}} y=1-\dfrac{4}{3-a} \rightarrow y=\dfrac{a+1}{a-3} \\ \longrightarrow z=\dfrac{1}{3-a} \end{array}$$

Para cada valor de $a\neq 3$ la terna $\left(\dfrac{a+2}{a-3}, \dfrac{a+1}{a-3}, \dfrac{1}{3-a}\right)$ es la solución del sistema.

27. **María, Marisa y Manuela quieren reunir 260 € para comprar un regalo. Si María pone el doble que Marisa y Manuela pone dos terceras partes de lo que pone María, ¿cuánto debe poner cada una?**

	Dinero en € que aporta
María	$y=2x$
Marisa	x
Manuela	$z=\frac{2}{3}y$
TOTAL	260

El sistema es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=260 \\ y=2x \\ z=\frac{2}{3}y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=260 \\ 2x-y=0 \\ 2y-3z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260 \\ 0 & -3 & -2 & -520 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3=2E_2+3E_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 260 \\ 0 & -3 & -2 & -520 \\ 0 & 0 & -13 & -1\,040 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=60 \\ y=120 \\ z=80 \end{array}\right\}$$

Así, María, Marisa y Manuela aportan para el regalo 120 €, 60 € y 80 €, respectivamente.

28. Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r}\sqrt{3x^2-y}-y=1\\ 5x-7y=-2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\sqrt[3]{5y+2x}=3x+1\\ x-y=1\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}\sqrt{3x^2-y}-y=1\\ 5x-7y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}\left(\sqrt{3x^2-y}\right)^2=(y+1)^2\\ 5x-7y=-2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x^2-y^2-3y+1=0\\ x=\dfrac{-2+7y}{5}\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow 3\left(\dfrac{7y-2}{5}\right)^2-y^2-3y+1=0\rightarrow 122y^2-75y-47=0\rightarrow$

$\rightarrow\begin{cases}y_1=1\rightarrow x_1=1\\ y_2=-\dfrac{47}{122}\approx-0{,}385\rightarrow x_2=-\dfrac{939}{1000}=-0{,}939\end{cases}$

Las soluciones son los pares $(1,1)$ y $(-0{,}939;-0{,}385)$.

b) $\left.\begin{array}{r}\sqrt[3]{5y+2x}=3x+1\\ x-y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}\left(\sqrt[3]{5y+2x}\right)^3=(3x+1)^3\\ x-y=1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}27x^3+27x^2+7x-5y+1=0\\ y=x-1\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow 27x^3+27x^2+7x-5(x-1)+1=0\rightarrow 27x^3+27x^2+2x+6=0\rightarrow\begin{cases}x_1=-1{,}1129\rightarrow y_1=-2{,}1129\\ x_2=-2{,}1129\rightarrow y_2=-3{,}1129\end{cases}$

Las soluciones son los pares $(-1{,}1129;-2{,}1129)$ y $(-2{,}1129;-3{,}1129)$.

29. Resuelve estos sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\\ x+2y=5\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}3x-y=2\\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{y}=-3\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1\\ x+2y=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y+x=xy\\ x+2y=5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y+x=xy\\ x=5-2y\end{array}\right\}\rightarrow y+5-2y=(5-2y)y\rightarrow 2y^2-6y+5=0$

No existe solución real.

b) $\left.\begin{array}{r}3x-y=2\\ \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{y}=-3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=3x-2\\ 2y-(x-2)=-3y(x-2)\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=3x-2\\ -3xy+4y+x-2=0\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow -3x(3x-2)+4(3x-2)+x-2=0\rightarrow\begin{cases}x_1=1\rightarrow y_1=1\\ x_2=\dfrac{10}{9}\rightarrow y_2=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

Las soluciones son los pares $(1,1)$ y $\left(\dfrac{10}{9},\dfrac{4}{3}\right)$.

ACTIVIDADES FINALES

30. Completa para que los siguientes pares de valores sean solución de la ecuación $-x+5y=4$.

a) $(1, \blacksquare)$

b) $(\blacksquare, 3)$

c) $(-4, \blacksquare)$

d) $(\blacksquare, -2)$

a) $-1+5y=4\rightarrow y=1\rightarrow \blacksquare=1$

b) $-x+15=4\rightarrow x=11\rightarrow \blacksquare=11$

c) $4+5y=4\rightarrow y=0\rightarrow \blacksquare=0$

d) $-x-10=4\rightarrow x=-14\rightarrow \blacksquare=-14$

31. Completa para que las siguientes ternas de valores sean solución de la ecuación $2x - 3y + z = 8$.

a) (1, ■, 9)
b) (■, −1, 1)
c) (−1, −2, ■)
d) (0, ■, 2)
e) (−1, −5, ■)
f) (■, −2, 10)

a) $2 - 3y + 9 = 8 \to y = 1 \to$ ■ $= 1$

b) $2x + 3 + 1 = 8 \to x = 2 \to$ ■ $= 2$

c) $-2 + 6 + z = 8 \to z = 4 \to$ ■ $= 4$

d) $0 - 3y + 2 = 8 \to y = -2 \to$ ■ $= -2$

e) $-2 + 15 + z = 8 \to z = -5 \to$ ■ $= -5$

f) $2x + 6 + 10 = 8 \to x = -4 \to$ ■ $= -4$

32. Considera la ecuación $2x + y = 5$.

a) Escribe todas sus soluciones.
b) Razona si (5, −15) es una de sus soluciones.
c) Completa los siguientes pares de valores para que sean solución: (3, ■) y (■, 3).

a) $2x + y = 5 \xrightarrow{y=\lambda} \left.\begin{array}{l} 2x + \lambda = 5 \\ y = \lambda \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5-\lambda}{2} \\ y = \lambda \end{array}\right\}$

Las infinitas soluciones las determina el par $\left(\dfrac{5-\lambda}{2}, \lambda\right)$.

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{5-\lambda}{2} = 5 \\ \lambda = -15 \end{array}\right\} \to \dfrac{5+15}{2} = 10 \neq 5 \to$ No es solución.

c) $x = 3 \to \dfrac{5-\lambda}{2} = 3 \to \lambda = -1 \to$ ■ $= 1$ $y = 3 \to \lambda = 3 \to x = \dfrac{5-3}{2} \to x = 1 \to$ ■ $= 1$

33. Identifica los sistemas para los cuales el par de valores $x = 5$, $y = 2$ es solución.

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 4y = 7 \\ \dfrac{x-1}{2} + y = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x + \dfrac{y}{2} = 6 \\ \dfrac{x-y}{3} = \dfrac{x}{5} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2(x-y) = x + 1 \\ \dfrac{2x-y}{4} = y \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 5y - 3x = 19 \\ \dfrac{y-x}{3} = 1 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{l} 15 - 8 = 7 \\ \dfrac{4}{2} + 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 7 = 7 \\ 4 \neq 0 \end{array}\right\} \to$ No es solución de este sistema.

b) $\left.\begin{array}{l} 5 + \dfrac{2}{2} = 6 \\ \dfrac{3}{3} = \dfrac{5}{5} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 6 = 6 \\ 1 = 1 \end{array}\right\} \to$ Sí es solución de este sistema.

c) $\left.\begin{array}{l} 2\cdot(5-2) = 6 \\ \dfrac{10-2}{4} = 2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 6 = 6 \\ 2 = 2 \end{array}\right\} \to$ Sí es solución de este sistema.

d) $\left.\begin{array}{l} 10 - 15 = 19 \\ \dfrac{2-5}{3} = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} -5 \neq 19 \\ -1 \neq 1 \end{array}\right\} \to$ No es solución de este sistema.

34. **Completa estos sistemas para que $x = 1$, $y = 4$ sea solución.**

a) $\left.\begin{array}{r} \blacksquare x - 3y = -10 \\ -5x + \blacksquare y = 11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \blacksquare x + 3y = 16 \\ -2x + 7y = \blacksquare \end{array}\right\}$

Por comodidad, denotamos al $\blacksquare$ de la primera ecuación por a, y al de la segunda ecuación, por b. Entonces, sustituyendo:

a) $\left.\begin{array}{r} a-12=-10 \\ -5+4b=11 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a=2 \\ b=4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} a+12=16 \\ -2+28=b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a=4 \\ b=26 \end{array}\right\}$

35. **Calcula el valor de a y b para que el siguiente sistema tenga por soluciones $x = 1$ e $y = -2$.**

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2(5x - y) - 3 = a \\ 4(x - 2y) + 3x - 2 = b \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2(5x-y)-3=a \\ 4(x-2y)+3x-2=b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3\cdot 1-2(5\cdot 1+2)-3=a \\ 4(1+2\cdot 2)+3\cdot 1-2=b \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a=-14 \\ b=21 \end{array}\right\}$$

36. **Indica los sistemas para los que el par de valores $x = 3$, $y = -2$ es solución.**

a) $\left.\begin{array}{r} y - \dfrac{x+1}{2} = 0 \\ x - y = 5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 10 \\ x - \dfrac{y}{2} = 4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x - \dfrac{y+3x}{7} = 2 \\ 2x + y = 8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{8x-4}{5} + y = 2 \\ 4x + \dfrac{5}{2}y = 7 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2-\dfrac{3+1}{2}=0 \\ 3+2=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -4\neq 0 \\ 5=5 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución de este sistema.

b) $\left.\begin{array}{r} 15-4=10 \\ 3-\dfrac{-2}{2}=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 11\neq 10 \\ 4=4 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución de este sistema.

c) $\left.\begin{array}{r} 3-\dfrac{-2+9}{7}=2 \\ 6-2=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ 4\neq 8 \end{array}\right\} \rightarrow$ No es solución de este sistema.

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{24-4}{5}-2=2 \\ 12-5=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ 7=7 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí es solución de este sistema.

37. **Agrupa de dos en dos estas ecuaciones lineales:**

$4x - y - 1 = 0$	$y + 1 = -2x$
$2y = 8x + 10$	$y + 2x = 3$
$6x - 9 + 3y = 0$	$y - 4x = 5$

Para formar:

a) Dos sistemas compatibles determinados.

b) Dos sistemas compatibles indeterminados.

c) Dos sistemas incompatibles.

a) $\left.\begin{array}{r} 4x-y-1=0 \\ y+2x=3 \end{array}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} 2y=8x+10 \\ y+2x=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 6x-9+3y=0 \\ y+2x=3 \end{array}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} 2y=8x+10 \\ y-4x=5 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 4x-y-1=0 \\ y-4x=5 \end{array}\right\}$ $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} y+1=-2x \\ y+2x=3 \end{array}\right\}$

38. Añade a la ecuación $3x - 5y = 3$ otra ecuación, de forma que resulte un sistema:

a) Determinado. b) Indeterminado. c) Incompatible.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-5y=3 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$ $\qquad$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x-5y=3 \\ 10y=6x-6 \end{array}\right\}$ $\qquad$ c) $\left.\begin{array}{r} 3x-5y=3 \\ 12x=20y \end{array}\right\}$

39. Considera las ecuaciones:

$3x - y = 1$ $\qquad$ $ax + by = c$

Calcula los valores de a, b y c para que las dos ecuaciones formen un sistema con estas características:

a) $ax + by = c$ pasa por $(2, -3)$ y el sistema tiene como solución $(-2, -7)$.

b) $ax + by = c$ pasa por $(4, 3)$ y el sistema tiene como solución un punto de ordenada 5.

c) $ax + by = c$ pasa por $(-2, 0)$ y el sistema es incompatible.

a) $\left.\begin{array}{r} ax+by=c \xrightarrow{(2,-3)} 2x-3y=c \\ \left.\begin{array}{r} 1=1 \\ \xrightarrow{(-2,-7)} \quad -2a-7b=c \end{array}\right\} \end{array}\right\}$

Se forma un sistema con variables a, b y c, que es compatible indeterminado, porque hay dos ecuaciones y tres incógnitas. Las posibles soluciones se dan en función de un parámetro:

$$\left.\begin{array}{r} 2a-3b=c \\ -2a-7b=c \end{array}\right\} \to -10b=2c \to c=-5b \xrightarrow{b=\lambda,\ a=\frac{c+3\lambda}{2}} \left.\begin{array}{l} a=-\lambda \\ b=\lambda \\ c=-5\lambda \end{array}\right\}$$

Por ejemplo, si $\lambda=1 \to \left.\begin{array}{r} a=-1 \\ b=1 \\ c=-5 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x-y=1 \\ -x+y=-5 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+by=c \xrightarrow{(4,3)} 4a+3b=c \\ \left.\begin{array}{r} 3x-y=1 \\ ax+by=c \end{array}\right\} \xrightarrow{y=5} \left.\begin{array}{r} 3x-5=1 \\ ax+5b=c \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x=2 \\ 2a+5b=c \end{array}\right\} \end{array}\right\}$

Se forma un sistema con variables a, b y c, que es compatible indeterminado, porque hay dos ecuaciones y tres incógnitas. Las posibles soluciones se dan en función de un parámetro:

$$\left.\begin{array}{r} 4a+3b=c \\ 2a+5b=c \end{array}\right\} \to c=7b \to \xrightarrow{b=\lambda,\ a=\frac{c-5\lambda}{2}} \left.\begin{array}{l} a=\lambda \\ b=\lambda \\ c=7\lambda \end{array}\right\}$$

Por ejemplo, si $\lambda=1 \to \left.\begin{array}{r} a=1 \\ b=1 \\ c=7 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x-y=1 \\ x+y=7 \end{array}\right\}$

c) $ax+by=c \xrightarrow{(-2,0)} -2a=c$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-y=1 \\ ax+by=c \end{array}\right\}$$

Para que sea sistema incompatible, el par (*a*, *b*) debe ser proporcional al par (3, –1) y además $c \neq 1$.

Entonces, por ejemplo, si $c=2$ se tiene que $-2a=2 \rightarrow a=-1 \rightarrow b=\frac{1}{3}$, quedando el sistema así:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-y=1 \\ -x+\frac{1}{3}y=2 \end{array}\right\}$$

40. **¿Cuáles de los siguientes sistemas tienen la misma solución? Resuelve gráficamente.**

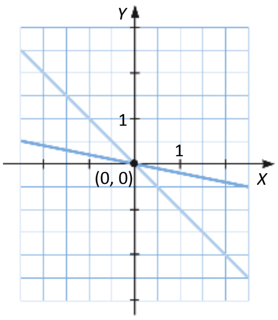
a) $\left.\begin{array}{r} x+3y=-2y \\ x-y=2x \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3y-x=16 \\ 2x+4=y-1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \frac{x+y}{4}+2=0 \\ x=-5y \end{array}\right\}$

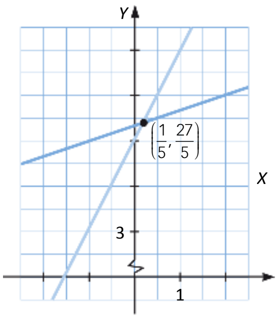
d) $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{5}-\frac{y}{2}=-3 \\ \frac{x}{2}+4y=3 \end{array}\right\}$

a)



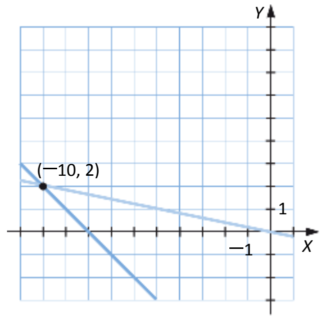
La solución es el par $(0,0)$.

b)



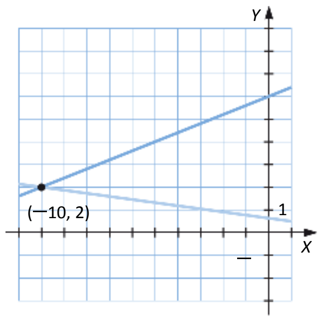
La solución es el par $\left(\frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$.

c)



La solución es el par $(-10,2)$.

d)



La solución es el par $(-10,2)$.

Por tanto, tienen la misma solución los sistemas c) y d).

41. Determina el número de soluciones de estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x-2y=-2 \\ \dfrac{x}{4}+y=7 \\ x-y=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{2y}{3}=2 \\ 2x+7y=4 \\ 2y-3x=-6 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=8 \\ \dfrac{x+2y}{5}=-1 \\ x-1=-y \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -x+4y=15 \\ \dfrac{x-3y}{3}=-1 \\ 5y-3x=0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} x-2y=-2 \\ \dfrac{x}{4}+y=7 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cdot 4} \left.\begin{array}{r} x-2y=-2 \\ x+4y=28 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 4 & 28 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Existe una única solución.

b) $\left.\begin{array}{r} x-\dfrac{2y}{3}=2 \\ 2x+7y=4 \\ 2y-3x=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 3} \\ \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} 3x-2y=6 \\ 2x+7y=4 \\ -3x+2y=-6 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{rr|r} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 7 & 4 \\ -3 & 2 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Existe una única solución.

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=8 \\ \dfrac{x+2y}{5}=-1 \\ x-1=-y \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 5} \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x+y=8 \\ x+2y=-5 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas. Existe una única solución.

d) $\left.\begin{array}{r} -x+4y=15 \\ \dfrac{x-3y}{3}=-1 \\ 5y-3x=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{\cdot 3} \\ \longrightarrow \end{array} \left.\begin{array}{r} -x+4y=15 \\ x-3y=-3 \\ 3x-5y=0 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 4 & 15 \\ 1 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 7 & 45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -39 \end{array}\right) \to 0 \neq -39$

Sistema incompatible. Es imposible que se cumpla la tercera ecuación. No existe ninguna solución.

42. Resuelve estos sistemas por sustitución.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{5}=2 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=0 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 6x-2y=6 \\ 3(x+1)-(y-2)=8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2(x-y)+4y=-4 \\ x+3(y+2)=8 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{5}=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=1-2x} \dfrac{x}{3}-\dfrac{1-2x}{5}=2 \to 5x-3+6x=30 \to x=\dfrac{27}{11} \xrightarrow{y=1-2x} y=-\dfrac{43}{11}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y=0 \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 3x+2y=0 \\ x+2(y-1)=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{x=2-2(y-1)} 3(2-2(y-1))+2y=0 \to$

$\to 12-6y+2y=0 \to 12=4y \to y=3 \xrightarrow{x=2-2(y-1)} x=-2$

c) $\left.\begin{array}{r}6x-2y=6\\3(x+1)-(y-2)=8\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}6x-2y=6\\3x+3-y+2=8\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}6x-2y=6\\3x-y=3\end{array}\right\}\xrightarrow{y=3x-3}6x-2(3x-3)=6\rightarrow 6=6$

Sistema compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones, dependientes de un parámetro: $\left.\begin{array}{l}x=\lambda\\y=3\lambda-3\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}2(x-y)+4y=-4\\x+3(y+2)=8\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+2y=-4\\x+3y+6=8\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+2y=-4\\x+3y=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2-3y}2(2-3y)+2y=-4\rightarrow$

$\rightarrow 4-6y+2y=-4\rightarrow 8=4y\rightarrow y=2\xrightarrow{x=2-3y}x=-4$

43. Resuelve por igualación.

a) $\left.\begin{array}{r}y-x+2=6\\2(x-y)+1=-y\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}4x+y=\dfrac{27}{2}\\x+3y=13\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{-3}{8}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{3}{16}\\\dfrac{x}{y}=-3\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}y-x+2=6\\2(x-y)+1=-y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=4+x\\y=2x+1\end{array}\right\}\rightarrow 4+x=2x+1\rightarrow x=3\rightarrow y=7$

b) $\left.\begin{array}{r}4x+y=\dfrac{27}{2}\\x+3y=13\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}8x+2y=27\\x+3y=13\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{27-2y}{8}\\x=13-3y\end{array}\right\}\rightarrow\dfrac{27-2y}{8}=13-3y\rightarrow$

$27-2y=104-24y\rightarrow 22y=77\rightarrow y=\dfrac{7}{2}\rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

c) $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\\dfrac{x-y}{4}=\dfrac{-3}{8}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=1-x\\2x-2y=-3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=1-x\\y=\dfrac{2x+3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow 1-x=\dfrac{2x+3}{2}\rightarrow$

$2-2x=2x+3\rightarrow -1=4x\rightarrow x=-\dfrac{1}{4}\rightarrow y=\dfrac{5}{4}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{3}{16}\\\dfrac{x}{y}=-3\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}32x+24y=9\\x=-3y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x=\dfrac{9-24y}{32}\\x=-3y\end{array}\right\}\rightarrow\dfrac{9-24y}{32}=-3y\rightarrow$

$9-24y=-96y\rightarrow 72y=-9\rightarrow y=-8\rightarrow x=24$

44. Resuelve por reducción.

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+7}{3}-y=2x\\4y-\dfrac{2x+1}{5}=-5\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}4x-2=y-5\\3x-\dfrac{y-2}{5}=2\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{5}{4}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}x+y=2\\3x+\dfrac{10}{3}=y\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+7}{3}-y=2x\\ 4y-\dfrac{2x+1}{5}=-5\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}5x+3y=7\\ 2x-20y=24\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2=-\frac{5}{2}E_2}\left.\begin{array}{r}5x+3y=7\\ -5x+50y=-60\end{array}\right\}\rightarrow 53y=-53\rightarrow y=-1\xrightarrow{x=\frac{7-3y}{5}}x=2$

b) $\left.\begin{array}{r}4x-2=y-5\\ 3x-\dfrac{y-2}{5}=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}4x-y=-3\\ -15x+y=-8\end{array}\right\}\rightarrow -11x=-11\rightarrow x=1\xrightarrow{y=4x+3}y=7$

c) $\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ \dfrac{x-y}{2}=\dfrac{5}{4}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+y=7\\ -2x+2y=-5\end{array}\right\}\rightarrow 3y=2\rightarrow y=\dfrac{2}{3}\xrightarrow{x=\frac{7-y}{2}}x=\dfrac{19}{6}$

d) $\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ 3x+\dfrac{10}{3}=y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=2\\ 9x-3y=-10\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1=3\cdot E_1}\left.\begin{array}{r}3x+3y=6\\ 9x-3y=-10\end{array}\right\}\rightarrow 12x=-4\rightarrow x=-\dfrac{1}{3}\xrightarrow{y=2-x}y=\dfrac{7}{3}$

45. **Resuelve estos sistemas de ecuaciones.**

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{3}{2}\\ 2(x-1)-3(1-y)=-3x+1\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{4x}{3}+\dfrac{3y-2}{6}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{x+y}{4}=-x\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{y-3}{4}-5(x+3)=16\\ \dfrac{3(2+x)}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{-1}{15}\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}y-\dfrac{1+2x+3y}{6}=1\\ x+y+\dfrac{2(x-2y+3)}{5}=-6\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{3}{2}\\ 2(x-1)-3(1-y)=-3x+1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-y=9\\ 5x+3y=6\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1=3\cdot E_1}\left.\begin{array}{r}6x-3y=27\\ 5x+3y=6\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow 11x=33\rightarrow x=3\xrightarrow{y=2x-9}y=-3$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{4x}{3}+\dfrac{3y-2}{6}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{x+y}{4}=-x\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}8x+3y=7\\ 5x+y=0\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2=-3E_2}\left.\begin{array}{r}8x+3y=7\\ -15x-3y=0\end{array}\right\}\rightarrow -7x=7\rightarrow x=-1\xrightarrow{y=-5x}y=5$

c) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{y-3}{4}-5(x+3)=16\\ \dfrac{3(2+x)}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{-1}{15}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}20x-y=-127\\ 9x+5y=-19\end{array}\right\}\xrightarrow{E_1=5E_1}\left.\begin{array}{r}100x-5y=-635\\ 9x+5y=-19\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow 109x=-654\rightarrow x=-6\xrightarrow{y=127+20x}y=7$

d) $\left.\begin{array}{r}y-\dfrac{1+2x+3y}{6}=1\\ x+y+\dfrac{2(x-2y+3)}{5}=-6\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-3y=-7\\ 7x+y=-36\end{array}\right\}\xrightarrow{E_2=3E_2}\left.\begin{array}{r}2x-3y=-7\\ 21x+3y=-108\end{array}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow 23x=-115\rightarrow x=-5\xrightarrow{y=-36-7x}y=-1$

46. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x+4)+3(3-2y)-1=12 \\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3 \\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0 \\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15 \\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x-2y-3-\dfrac{2x+y-3}{2}+\dfrac{x+7}{6}=0 \\ \dfrac{x-6y}{2}-\dfrac{x-y}{3}+\dfrac{y}{6}=0 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x+4)+3(3-2y)-1=12 \\ 5(x+y)-4(x+1)-2y+10=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} -2x-6y=12 \\ x+3y+6=0 \end{array}\right\} \to x=-3y-6$

Sistema compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{y+1}{5}=3 \\ \dfrac{x-5}{2}-\dfrac{2y-1}{3}=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 10x+3y=27 \\ 3x-4y=13 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ \xrightarrow{\cdot 10} \end{array} \left.\begin{array}{r} -30x-9y=-81 \\ 30x-40y=130 \end{array}\right\}$

$\to y=-1 \to 3x-4\cdot(-1)=13 \to x=3$

$x=3 \quad y=-1$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x+3}{9}-\dfrac{y-5}{8}=0 \\ \dfrac{2x-y+1}{2}-\dfrac{x+2y-3}{5}=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 8x-9y=-69 \\ 8x-9y=-11 \end{array}\right\}$

Sistema incompatible.

d) $\left.\begin{array}{r} -(2x+3y-2)-6(x-y+1)=-15 \\ 4(x+3)-12(x-y+3)=-32 \end{array}\right\}$

$\to \left.\begin{array}{r} -8x+3y=-11 \\ -8x+12y=-8 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{\cdot(-1)} \end{array} \left.\begin{array}{r} -8x+3y=-11 \\ 8x-12y=8 \end{array}\right\} \to y=\dfrac{1}{3} \to 8x-4=8 \to x=\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{3}{2} \quad y=\dfrac{1}{3}$

e) $\left.\begin{array}{r} x-2y-3-\dfrac{2x+y-3}{2}+\dfrac{x+7}{6}=0 \\ \dfrac{x-6y}{2}-\dfrac{x-y}{3}+\dfrac{y}{6}=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-15y=2 \\ x-15y=0 \end{array}\right\} \to$ Sistema incompatible. No existe solución.

47. **Resuelve los sistemas de ecuaciones que aparecen a continuación.**

a) $\left.\begin{array}{r} 3(x-1)-5(2y-3)=2x+8 \\ 4(x-y)-3x+2=1-(1-y) \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3}-\dfrac{y-4}{4}=0 \\ \dfrac{x-4}{2}+\dfrac{y+2}{5}=3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{6}-\dfrac{y-4}{2}=3 \\ 2(x+3)=3(y-1)+2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3-2x}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-2x}{6} \\ 1=\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{3+3y}{8} \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3(x-1)-5(2y-3)=2x+8 \\ 4(x-y)-3x+2=-(1-y) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-10y=-4 \\ x-5y=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-10y=-4 \\ -x+5y=3 \end{array}\right\} \rightarrow x=-2 \quad y=\dfrac{1}{5}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{3}-\dfrac{y-4}{4}=0 \\ \dfrac{x-4}{2}+\dfrac{y+2}{5}=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x-3y=0 \\ 5x+2y=46 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 20x-15y=0 \\ -20x-8y=-184 \end{array}\right\} \rightarrow x=6 \quad y=8$

c) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-3}{6}-\dfrac{y-4}{2}=3 \\ 2(x+3)=3(y-1)+2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=9 \\ 2x-3y=-7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-6y=18 \\ -2x+3y=7 \end{array}\right\} \rightarrow x=-16 \quad y=-\dfrac{25}{3}$

d) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{3-2x}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1-2x}{6} \\ 1=\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{3+3y}{8} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2 \\ 4x-3y=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y=\dfrac{4x+1}{3} \end{array}\right\} \rightarrow x=2 \quad y=3$

f) $\left.\begin{array}{r} 6(x+2y-3)-5(-2x+3y-1)+3=6 \\ 16=\dfrac{3y}{x-1} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 16x-3y=16 \\ 16x-3y=16 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

48. **¿Cuántas soluciones tienen estos sistemas de ecuaciones si $a=-1$? ¿Y si $a=-2$?**

a) $\left.\begin{array}{r} ax-y=3 \\ 2x+2y=7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+3ay=8 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\}$

a) Si $a=-1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x-y=3 \\ 2x+2y=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-3 \\ x+y=\dfrac{7}{2} \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe ninguna solución.

Si $a=-2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-y=3 \\ 2x+2y=7 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible determinado. Una única solución.

b) Si $a=-1 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-3y=8 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible determinado. Una única solución.

Si $a=-2 \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-6y=8 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=4 \\ -x+3y=-4 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones.

49. Halla el valor de k para que el siguiente sistema sea compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y=-1\\ x-k\cdot y=-3\\ 4x-y=2\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}3x-2y=-1\\ x-k\cdot y=-3\\ 4x-y=2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}3x-2y=-1\\ -3x+3ky=+9\\ -3x+\frac{3}{4}y=-\frac{3}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}(3k-2)y=8\\ -\frac{5}{4}y=-\frac{5}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}y=\frac{8}{3k-2}\\ y=2\end{array}\right\}\rightarrow\frac{8}{3k-2}=2\rightarrow k=2$$

50. Encuentra, si es posible, un valor de a para que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r}8x-12y=20\\ 4x+9y=a\end{array}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$\frac{8}{4}\neq-\frac{12}{9}\rightarrow$ El sistema es siempre compatible determinado.

51. Encuentra, si es posible, valores de a para que el sistema

$$\left.\begin{array}{r}ax+2y=2\\ -2x+\frac{y}{2}=a\end{array}\right\}$$

a) Sea incompatible.
b) Sea compatible indeterminado.
c) Sea compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r}ax+2y=2\\ -2x+\frac{y}{2}=a\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}ax+2y=2\\ -8x+2y=4a\end{array}\right\}\rightarrow-\frac{a}{8}=\frac{2}{2}\rightarrow a=-8$$

El sistema es incompatible si $a=-8$. En los demás casos el sistema es compatible determinado.

52. Clasifica los siguientes sistemas según el valor del parámetro a.

a) $\left.\begin{array}{r}3x+ay=5\\ 3x+y=-a\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}-x+2y=a\\ ax+y=-3\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}ax-y=0\\ x+3ay=0\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}3x-y=-a+1\\ -2ax+2y=4\end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{cc|c}3 & a & 5\\ 3 & 1 & -a\end{array}\right)\xrightarrow{\text{Gauss}}\left(\begin{array}{cc|c}3 & a & 5\\ 0 & a-1 & 5+a\end{array}\right)$

Si $a-1=0\rightarrow a=1\rightarrow$ Sistema incompatible, pues $0\neq6$.

Si $a-1\neq0\rightarrow a\neq1\rightarrow$ Sistema compatible determinado.

No se puede dar el caso compatible indeterminado porque $a-1$ y $5+a$ no se anulan a la vez.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & a \\ a & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & a \\ 0 & 1+2a & a^2-3 \end{array}\right) \rightarrow$

Si $1+2a=0 \rightarrow a=-\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema incompatible, pues $0 \neq -\frac{11}{4}$.

Si $1+2a \neq 0 \rightarrow a \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

No se puede dar el caso compatible indeterminado porque $1+2a$ y a^2-3 no se anulan a la vez.

c) $\left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 1 & 3a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} a & -1 & 0 \\ 0 & -1-3a^2 & 0 \end{array}\right)$

Como $-1-3a^2$ nunca se anula, el sistema es siempre compatible determinado.

d) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -a+1 \\ -2a & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -a+1 \\ 0 & 3-a & -a^2+a-6 \end{array}\right)$

Si $3-a=0 \rightarrow a=3 \rightarrow$ Sistema incompatible, pues $0 \neq -12$.

Si $3-a \neq 0 \rightarrow a \neq 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinado.

No se puede dar el caso compatible indeterminado porque $3-a$ y $-a^2+a-6$ no se anulan a la vez, de hecho, $-a^2+a-6$ no se anula nunca en los reales.

53. Considera el par de valores (3λ, λ), donde λ puede ser cualquier número.

a) Escribe una ecuación cuyas soluciones sean ese par de valores.

b) Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales cuyas soluciones sean ese par de valores.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $x-3y=0$

b) $\left.\begin{array}{r} x=3y \\ 6y-2x=0 \end{array}\right\}$

54. Dado el par de valores (1 − λ, 2λ), donde λ es cualquier número real:

a) Escribe una ecuación lineal que tenga como soluciones ese par de valores.

b) Escribe un sistema de ecuaciones lineales que tenga como soluciones ese par de valores.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $2(1-x)=y$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=2 \\ 10x-10=-5y \end{array}\right\}$

55. Encuentra tres sistemas de ecuaciones compatibles indeterminados cuya solución sea $x=\lambda-2$, $y=\lambda$, donde λ puede ser cualquier número.

Respuesta abierta, por ejemplo:

$\left.\begin{array}{r} x-y=2 \\ 3x-6=3y \end{array}\right\}$ $\quad$ $\left.\begin{array}{r} 20x-10=10(1+y) \\ 5(x-y)-2=8 \end{array}\right\}$ $\quad$ $\left.\begin{array}{r} 6x-6(y+2)=0 \\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2} \end{array}\right\}$

56. **Si las soluciones de la ecuación $ax + by = c$ son de la forma $(\lambda, 2\lambda)$ y las de la ecuación $dx + ey = f$ son de la forma $(\lambda, -3\lambda + 10)$, encuentra la solución del sistema formado por ambas ecuaciones.**

Se obtiene una ecuación equivalente de cada una de las ecuaciones dadas a partir de la forma que tiene su solución:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x=\lambda,\ y=2\lambda} \\ \xrightarrow{x=\lambda,\ y=10-3\lambda} \end{array} \left.\begin{array}{l} y=2x \\ y=10-3x \end{array}\right\} \rightarrow 2x=10-3x \rightarrow x=2 \rightarrow y=4$$

57. **La ecuación $ax + by = c$ tiene por solución los pares $(\lambda + 1, \lambda - 3)$ y la ecuación $dx + ey = f$ tiene por solución los pares $(\lambda - 2, 2\lambda + 1)$.**

Calcula la solución del siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\}$.

Se obtiene una ecuación equivalente de cada una de las ecuaciones dadas a partir de la forma que tiene su solución:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}\right\} \begin{array}{l} \xrightarrow{x=\lambda+1,\ y=\lambda-3} \\ \xrightarrow{x=\lambda-2,\ y=\lambda+1} \end{array} \left.\begin{array}{l} x-y=4 \\ x-y=-3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Sistema incompatible. No existe solución.}$$

58. **Resuelve los siguientes sistemas con tres ecuaciones y dos incógnitas, y representa las soluciones.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=-1 \\ -x+y=-4 \\ -4x-y=-1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ 2x-y=2 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ -3x-2y=1 \\ x-3y=7 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -4x+2y=0 \\ 6x-3y=2 \\ 3x-2y=-2 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow y=-3 \xrightarrow{2x+y=-1} x=1$

b) $\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -21 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

c) $\left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -14 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow y=-2 \xrightarrow{2x+y=0} x=-1$

d) $\left(\begin{array}{rr|r} -4 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

59. **Resuelve estos sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas.**

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x-4-1)=y-1 \\ -4x+y=-2x-3y+2 \\ 2x+3y-1=\dfrac{3x+2y}{5} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{-x+y-1}{2}=\dfrac{5-x}{3} \\ x+y-2=\dfrac{2(x+y)-3}{3} \\ x+y+5=7+2(x-y) \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -2(x-4-1)=y-1 \\ -4x+y=-2x-3y+2 \\ 2x+3y-1=\dfrac{3x+2y}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=11 \\ x-2y=-1 \\ 7x+13y=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 11 \\ 1 & -2 & -1 \\ 7 & 13 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 19 & -67 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 582 \end{array}\right)$

Sistema incompatible. No existe solución.

b) $\left.\begin{array}{r} \dfrac{-x+y-1}{2}=\dfrac{5-x}{3} \\ x+y-2=\dfrac{2(x+y)-3}{3} \\ x+y+5=7+2(x-y) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=-13 \\ x+y=3 \\ -x+3y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -13 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 19 & -67 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 11 \\ 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 582 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

60. **Añade al siguiente sistema una ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) para que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas que resulta siga siendo compatible.**

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=0 \\ 3x-y=\dfrac{11}{6} \end{array}\right\}$$

Para que el sistema siga siendo compatible, la ecuación nueva debe ser una ecuación equivalente a algunas de las dadas. Por ejemplo, $6x-24y=11$.

61. **Escribe, en cada caso, un sistema de tres ecuaciones cuya solución sea la que se indica.**

a) $x = 4, y = -2, z = 0$

b) $x = -3, y = 5, z = 1$

c) $x = 2, y = 7, z = -1$

d) $x = 0, y = 1, z = \dfrac{1}{2}$

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $x+2y+3z$ b) $2x+y-2z=-3$ c) $5x-y+z=2$ d) $3x+2y-2z=1$

62. **Halla el valor de a y b en la ecuación $ax - 4y + bz = -4$ sabiendo que $(-1, 3, 2)$ y $(3, 5, 2)$ son dos de sus soluciones. Luego escribe otras dos soluciones.**

$\left.\begin{array}{l} ax-4y+bz=-4 \xrightarrow{(-1,\,3,\,2)} -a-12+2b=-4 \\ ax-4y+bz=-4 \xrightarrow{(3,\,5,\,2)} 3a-20+2b=-4 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -3a+6b=24 \\ 3a+2b=16 \end{array}\right\} \rightarrow 8b=40 \rightarrow b=5 \xrightarrow{a=2b-8} a=2$

Por tanto, la ecuación resultante es $2x-4y+5z=-4$.

Dos soluciones son, por ejemplo, $(0,1,0)$ y $(2,7,4)$.

63. **Halla el valor de a y b en la ecuación $3x + ay + bz = 6$ sabiendo que $(1, 5, 1)$ y $(-1, 7, -1)$ son dos de sus soluciones. Después escribe tres soluciones que cumplan:**

a) Solución en la que $x = 2$.

b) Solución en la que $y = -3$.

c) Solución en la que $z = 5$.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+ay+bz=6 \xrightarrow{(1,5,1)} 5a+b=3 \\ 3x+ay+bz=6 \xrightarrow{(-1,7,-1)} 7a-b=9 \end{array}\right\} \to 12a=12 \to a=1 \xrightarrow{b=7a-9} b=-2$$

Por tanto, la ecuación resultante es $3x+y-2z=6$.

a) $3x+y-2z=6 \xrightarrow{x=2} y-2z=0 \to$ Una solución es $(2,2,1)$.

b) $3x+y-2z=6 \xrightarrow{y=-3} 3x-2z=9 \to$ Una solución es $(3,-3,0)$.

c) $3x+y-2z=6 \xrightarrow{z=5} 3x+y=16 \to$ Una solución es $(7,-5,5)$.

64. Resuelve los sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x-2y+z=11 \\ 2x+y-2z=4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x-2y+5z=4 \\ x+3y-4z=9 \\ -x-y+4z=11 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ x+2y=5 \\ 2x-y-2z=2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x-2y+2z=7 \\ 2x+3y-2z=-2 \\ -x-2y-3z=-2 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=-2 \\ z=2 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{array}\right\}$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 9 \\ -1 & -1 & 4 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=10 \\ z=5 \end{array}\right\}$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -6 & -16 \\ 0 & -4 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & -31 & -29 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=\frac{67}{31} \\ y=-\frac{46}{31} \\ z=\frac{29}{31} \end{array}\right\}$

65. Resuelve los sistemas utilizando el método de Gauss.

a) $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=5 \\ 2x-y+4z=-5 \\ x+y-5z=5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} -x+3y+z=-15 \\ 3x-y+3z=9 \\ x+4y-2z=-4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-2y-z=-1 \\ x-y+2z=2 \\ x+2y+z=3 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} 3x+2y+2z=1 \\ 2x+y+z=0 \\ 3y+2z=-1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=24 \\ 7x+10y+2z=6 \\ 2x+6y+4z=-10 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+4z=5 \\ 5x+2y-2z=-1 \\ -x+6y-10x=-11 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=5 \\ z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=2 \\ y=0 \\ z=1 \end{array}\right\}$

c) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 7 & 10 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & -10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 0 & 27 & 11 & -156 \\ 0 & 7 & 5 & -34 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 24 \\ 0 & 27 & 11 & -156 \\ 0 & 0 & 58 & -174 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=10 \\ y=-7 \\ z=3 \end{array}\right\}$

d) $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 3 & -1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 0 & 4 & 3 & -18 \\ 0 & 7 & -1 & -19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & -15 \\ 0 & 4 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 25 & -50 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=4 \\ y=-3 \\ z=-2 \end{array}\right\}$

e) $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} x=-1 \\ y=-5 \\ z=7 \end{array}\right\}$

f) $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 6 & -10 & -11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & 13 & 14 \\ 0 & 8 & -13 & -14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -8 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$\left(\frac{2-\lambda}{4}, \frac{13\lambda-14}{8}, \lambda\right)$$

66. **Resuelve estos sistemas por el método de Gauss utilizando su forma matricial.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+y-z=3 \\ 2x-y-5z=0 \\ \dfrac{x}{2}+3y+2z=\dfrac{13}{2} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ -2x+y-z=-4 \\ x+2y-2z=7 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=5 \\ 2x-y-4z=-5 \\ x+y-5z=5 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x+y-5z=2 \\ x-y-z=-4 \\ y-2z=3 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x-2z=-11 \\ 2y-z=-5 \\ x-4y=-1 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} -x+y-z=-7 \\ 3x-y-z=15 \\ 4x-2y=22 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 & \frac{13}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 13 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$(1+2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$(3, 2+\lambda, \lambda)$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$(3\lambda, 5+2\lambda, \lambda)$$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$(3\lambda-1, 3+2\lambda, \lambda)$$

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & 2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$\left(2\lambda-11, \frac{\lambda-5}{2}, \lambda\right)$$

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 3 & -1 & -1 & 15 \\ 4 & -2 & 0 & 22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ :

$$(\lambda+4, 2\lambda-3, \lambda)$$

67. Comprueba si estos sistemas de ecuaciones tienen solución o no.

a) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=3 \\ 2x+4z=2 \\ 2x-y+3z=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ x+3y-2z=1 \\ x-2y+z=2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} -x-y+2z=3 \\ 2x+3y+z=-2 \\ 2y+10z=8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=5 \\ 2x+y-2z=7 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x+5y-5z=12 \\ -2x-3y+3z=-1 \\ 3x+y-z=0 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} x-5y+3z=10 \\ 2x-2y+z=-4 \\ 3x+y-z=5 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 7 & -7 & 23 \\ 0 & -14 & 14 & -36 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -5 & 12 \\ 0 & 7 & -7 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & -5 & -24 \\ 0 & 16 & -10 & -25 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & -5 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{2} \end{array}\right) \rightarrow$ Sistema incompatible. No existe solución.

68. **Expresa matricialmente estos sistemas y aplica el método de Gauss para resolverlos.**

a) $\left.\begin{array}{r} -x+y-z=6 \\ y-4z=-7 \\ -x=4 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5z-y=2x-3 \\ 7x+z=2+5y \\ x+3y+2z=2(1-x) \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=-4 \\ x=-10+z \\ y=z+2 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} y=2(z-x+2) \\ 2(z-y)=3(1-x) \\ z=5x-3y+2 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r} -x+y-z=6 \\ y-4z=-7 \\ -x=4 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-4 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 5z-y=2x-3 \\ 7x+z=2+5y \\ x+3y+2z=2(1-x) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-y+5z=-3 \\ 7x-5y+z=2 \\ 3x+3y+2z=2 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & -3 \\ 7 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -17 & 37 & -17 \\ 0 & 3 & 19 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -17 & 37 & -17 \\ 0 & 0 & 434 & -136 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{121}{217} \\ y=\frac{69}{217} \\ z=-\frac{68}{217} \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=-4 \\ x=-10+z \\ y=z+2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=-4 \\ x-z=-10 \\ y-z=2 \end{array}\right\} \rightarrow \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2 \\ y=10 \\ z=8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} y=2(z-x+2) \\ 2(z-y)=3(1-x) \\ z=5x-3y+2 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2x+y-2z=2 \\ 3x-2y+2z=3 \\ -5x+3y+z=2 \end{array}\right\} \to$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 10 & -6 \\ 0 & 11 & -8 & 24 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 54 & 102 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=\frac{19}{9} \\ y=\frac{32}{9} \\ z=\frac{17}{9} \end{array}\right\}$$

69. **Determina, aplicando el método de Gauss, el número de soluciones de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+4y+z=0 \\ x-y+2z=0 \\ -3x+2y+z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y+z=0 \\ x+9y-3z=0 \\ 5x+3y-z=0 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 6x+4y-12z=6 \\ 7x+6y+18z=7 \\ 6z-2y-3x=-3 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 3x-7y+4z=4 \\ -10x+71y+9z=9 \\ 6x-3y-2z=10 \end{array}\right\}$

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 16 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$

b) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ:

$$\left(0, \frac{\lambda}{3}, \lambda\right)$$

c) $\left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 4 & -12 & 6 \\ 7 & 6 & 18 & 7 \\ -3 & -2 & 6 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 4 & -12 & 6 \\ 0 & 1 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones están determinadas por la siguiente terna, en función del parámetro λ:

$$(1+18\lambda, -24\lambda, \lambda)$$

d) $\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -7 & 4 & 4 \\ -10 & 71 & 9 & 9 \\ 6 & -3 & -2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 143 & 67 & 67 \\ 0 & -11 & 10 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 143 & 67 & 67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} x=\frac{4164}{2167} \\ y=\frac{804}{2167} \\ z=\frac{41}{197} \end{array}\right\}$

70. **Opera y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss.**

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y=2-y \\ -y+2z=1-2x \\ 3(x+y)+4x=3(1+y) \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x+y=2(2-z) \\ y-z=2x+3 \\ x+2y+z=1+2x \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} x+3y&=2-y\\ -y+2z&=1-2x\\ 3(x+y)+4x&=3(1+y)\end{aligned}\right\}\rightarrow \left.\begin{aligned} x+4y&=2\\ 2x-y+2z&=1\\ 7x&=3\end{aligned}\right\}\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 2 & 1\\ 7 & 0 & 0 & 3\end{array}\right)\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2\\ 0 & -9 & 2 & -3\\ 0 & 28 & 0 & 11\end{array}\right)\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 2\\ 0 & -9 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 56 & 15\end{array}\right)\rightarrow \left.\begin{aligned} x&=\frac{3}{7}\\ y&=\frac{11}{28}\\ z&=\frac{15}{56}\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} x+y&=2(2-z)\\ y-z&=2x+3\\ x+2y+z&=1+2x\end{aligned}\right\}\rightarrow \left.\begin{aligned} x+y+2z&=4\\ -2x+y-z&=3\\ -x+2y+z&=1\end{aligned}\right\}\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & -1 & 3\\ -1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right)\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 3 & 11\\ 0 & 3 & 3 & 5\end{array}\right)\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 3 & 11\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right)$

Sistema incompatible. No existe solución.

71. Opera y resuelve por el método de Gauss estos sistemas de ecuaciones utilizando su forma matricial.

a) $\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2}-\frac{y-3}{4}&=12-z\\ 2x+\frac{y}{5}+\frac{z-6}{2}&=6\\ \frac{x-y}{2}&=z-4\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -3(x+y)+4z&=1\\ 2x-(y+z)&=-5\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{5}{6}&=\frac{z+4}{5}\end{aligned}\right\}$

a) $\left.\begin{aligned} \frac{x+1}{2}-\frac{y-3}{4}&=12-z\\ 2x+\frac{y}{5}+\frac{z-6}{2}&=6\\ \frac{x-y}{2}&=z-4\end{aligned}\right\}\rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-y+4z&=43\\ 20x+2y+5z&=90\\ x-y-2z&=-8\end{aligned}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 43\\ 20 & 2 & 5 & 90\\ 1 & -1 & -2 & -8\end{array}\right)\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 43\\ 0 & 12 & -35 & -340\\ 0 & -1 & -8 & -59\end{array}\right)\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 43\\ 0 & 12 & -35 & -340\\ 0 & 0 & -131 & 1048\end{array}\right)\rightarrow \left.\begin{aligned} x&=3\\ y&=-5\\ z&=8\end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} -3(x+y)+4z&=1\\ 2x-(y+z)&=-5\\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{5}{6}&=\frac{z+4}{5}\end{aligned}\right\}\rightarrow \left.\begin{aligned} -3x-3y+4z&=1\\ 2x-y-z&=-5\\ 15x+10y-6z&=-1\end{aligned}\right\}\rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 4 & 1\\ 2 & -1 & -1 & -5\\ 15 & 10 & -6 & -1\end{array}\right)\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 4 & 1\\ 0 & -9 & 5 & -13\\ 0 & -5 & 14 & 4\end{array}\right)\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 4 & 1\\ 0 & -9 & 5 & -13\\ 0 & 0 & 101 & 101\end{array}\right)\rightarrow \left.\begin{aligned} x&=-1\\ y&=2\\ z&=1\end{aligned}\right\}$

72. Los valores $x = 3\lambda$, $y = \frac{\lambda}{2}$, $z = \lambda$ son solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Escribe cinco soluciones distintas para el sistema.

Respuesta abierta, según los valores que se elijan para λ. Por ejemplo:

Si $\lambda=-2\rightarrow(-6,-1,-2)$ Si $\lambda=1\rightarrow\left(3,\frac{1}{2},1\right)$ Si $\lambda=2\rightarrow(6,1,2)$.

Si $\lambda=-1\rightarrow\left(-3,-\frac{1}{2},-1\right)$ Si $\lambda=0\rightarrow(0,0,0)$

73. **Los valores $(2\lambda, \lambda - 3, \lambda)$ son solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Completa en tu cuaderno para que las siguientes ternas de valores sean solución del mismo sistema.**

a) $(4, ■, ■)$
b) $(■, ■, 3)$
c) $(■, 5, ■)$
d) $(■, ■, -2)$
e) $(1, ■, ■)$
f) $(■, 1, ■)$

a) $x = 4 \to 2\lambda = 4 \to \lambda = 2 \to (4, -1, 2)$

b) $z = 3 \to \lambda = 3 \to (6, 0, 3)$

c) $y = 5 \to \lambda - 3 = 5 \to \lambda = 8 \to (16, 5, 8)$

d) $z = -2 \to \lambda = -2 \to (-4, -5, -2)$

e) $x = 1 \to 2\lambda = 1 \to \lambda = \frac{1}{2} \to \left(1, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

f) $y = 1 \to \lambda - 3 = 1 \to \lambda = 4 \to (8, 1, 4)$

74. **¿Cuáles de los siguientes valores son solución de este sistema?**

$$\left.\begin{aligned} 2x - y - z &= 8 \\ x - z &= 3 \\ x - y &= 5 \end{aligned}\right\}$$

a) $(\lambda, \lambda + 2, \lambda + 6)$
b) $(\lambda + 3, \lambda - 2, \lambda)$
c) $(\lambda + 3, \lambda, \lambda - 3)$
d) $(\lambda + 5, \lambda, \lambda + 2)$
e) $(\lambda, \lambda - 5, \lambda - 3)$
f) $(\lambda, \lambda - 3, \lambda - 5)$

a) $\left.\begin{aligned} 2\lambda - (\lambda + 2) - (\lambda + 6) &= 8 \\ \lambda - (\lambda - 6) &= 3 \\ \lambda - (\lambda + 2) &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} -8 &\neq 8 \\ 6 &\neq 3 \\ -2 &\neq 5 \end{aligned}\right\} \to$ No es solución del sistema.

b) $\left.\begin{aligned} 2(\lambda + 3) - (\lambda - 2) - \lambda &= 8 \\ (\lambda + 3) - \lambda &= 3 \\ (\lambda + 3) - (\lambda - 2) &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 3 &= 3 \\ 5 &= 5 \end{aligned}\right\} \to$ Sí es solución del sistema.

c) $\left.\begin{aligned} 2(\lambda + 3) - \lambda - (\lambda - 3) &= 8 \\ (\lambda + 3) - (\lambda - 3) &= 3 \\ (\lambda + 3) - \lambda &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 9 &\neq 8 \\ 6 &\neq 3 \\ 3 &\neq 5 \end{aligned}\right\} \to$ No es solución del sistema.

d) $\left.\begin{aligned} 2(\lambda + 5) - \lambda - (\lambda + 2) &= 8 \\ (\lambda + 5) - (\lambda + 2) &= 3 \\ (\lambda + 5) - \lambda &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 3 &= 3 \\ 5 &= 5 \end{aligned}\right\} \to$ Sí es solución del sistema.

e) $\left.\begin{aligned} 2\lambda - (\lambda - 5) - (\lambda - 3) &= 8 \\ \lambda - (\lambda - 3) &= 3 \\ \lambda - (\lambda - 5) &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 3 &= 3 \\ 5 &= 5 \end{aligned}\right\} \to$ Sí es solución del sistema.

f) $\left.\begin{aligned} 2\lambda - (\lambda - 3) - (\lambda - 5) &= 8 \\ \lambda - (\lambda - 5) &= 3 \\ \lambda - (\lambda - 3) &= 5 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} 8 &= 8 \\ 5 &\neq 3 \\ 3 &\neq 5 \end{aligned}\right\} \to$ No es solución del sistema.

75. **Sabiendo que los valores $(3\lambda - 1, 4\lambda + 3, \lambda)$ son solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, averigua qué soluciones son de la forma:**

a) $(a, a, ■)$
b) $(■, a, a)$

a) $\left.\begin{aligned} a &= 3\lambda - 1 \\ a &= 4\lambda + 3 \end{aligned}\right\} \to 3\lambda - 1 = 4\lambda + 3 \to \lambda = -4 \to (-13, -13, -4)$

b) $\left.\begin{aligned} a &= 4\lambda + 3 \\ a &= \lambda \end{aligned}\right\} \to 4\lambda + 3 = \lambda \to \lambda = -1 \to (-4, -1, -1)$

76. Si la terna $(\lambda, \lambda + 1, \lambda - 3)$ es solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, averigua cuáles de las siguientes también lo son y razona por qué.

a) $(2\lambda, 2\lambda + 2, 2\lambda - 6)$
b) $(2\lambda, 2\lambda + 1, 2\lambda - 3)$
c) $(\lambda + 1, \lambda + 2, \lambda - 2)$
d) $(\lambda - 3, \lambda - 2, \lambda - 6)$
e) $(\lambda - 1, \lambda, \lambda - 4)$

Un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas del cual $(\lambda, \lambda+1, \lambda-3)$ es solución, es, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=2 \\ x-y=-1 \\ x-z=3 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo cada terna dada en el sistema, se observa si es o no solución:

a) $\left.\begin{array}{r} 2(2\lambda)-(2\lambda+2)-(2\lambda-6)=2 \\ 2\lambda-(2\lambda+2)=-1 \\ 2\lambda-(2\lambda-6)=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4\neq 2 \\ -2\neq -1 \\ 6\neq 3 \end{array}\right\} \rightarrow$ No

b) $\left.\begin{array}{r} 2(2\lambda)-(2\lambda+1)-(2\lambda-3)=2 \\ 2\lambda-(2\lambda+1)=-1 \\ 2\lambda-(2\lambda-3)=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí

c) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda+1)-(\lambda+2)-(\lambda-2)=2 \\ \lambda+1-(\lambda+2)=-1 \\ \lambda+1-(\lambda-2)=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí

d) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda-3)-(\lambda-2)-(\lambda-6)=2 \\ \lambda-3-(\lambda-2)=-1 \\ \lambda-3-(\lambda-6)=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí

e) $\left.\begin{array}{r} 2(\lambda-1)-\lambda-(\lambda-4)=2 \\ \lambda-1-\lambda=-1 \\ \lambda-1-(\lambda-4)=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2=2 \\ -1=-1 \\ 3=3 \end{array}\right\} \rightarrow$ Sí

77. Completa en tu cuaderno las ternas de valores para que sean solución de este sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x-y-3z=2 \\ 2x+\dfrac{y}{2}-z=4 \end{array}\right\}$$

a) (■, ■, λ)
b) (■, ■, 3)
c) (■, λ, ■)
d) (■, 3, ■)
e) (λ, ■, ■)
f) (3, ■, ■)

Primero se resuelve el sistema en función de un parámetro μ, y después se calculan las soluciones pedidas:

$\left.\begin{array}{r} x-y-3z=2 \\ 2x+\dfrac{y}{2}-z=4 \end{array}\right\} \rightarrow \ldots \rightarrow$ Las infinitas soluciones están determinadas por la terna $\left(\dfrac{6+4\mu}{3}, -\dfrac{5}{3}\mu, \mu\right)$.

a) $\mu=\lambda \rightarrow \left(\dfrac{6+4\lambda}{3}, -\dfrac{5}{3}\lambda, \lambda\right)$

b) $\mu=3 \rightarrow (6, -5, 3)$

c) $-\frac{5}{3}\mu=\lambda \to \left(\frac{6+4\cdot\left(-\frac{3}{5}\lambda\right)}{3}, \lambda, -\frac{3}{5}\lambda\right)=\left(\frac{10-4\lambda}{5}, \lambda, -\frac{3}{5}\lambda\right)$

d) $-\frac{5}{3}\mu=3 \to \mu=-\frac{9}{5} \to \left(-\frac{2}{5}, 3, -\frac{9}{5}\right)$

e) $\frac{6+4\mu}{3}=\lambda \to \mu=\frac{3\lambda-6}{4} \to \left(\lambda, -\frac{5}{3}\left(\frac{3\lambda-6}{4}\right), \frac{3\lambda-6}{4}\right)=\left(\lambda, \frac{10-5\lambda}{4}, \frac{3\lambda-6}{4}\right)$

f) $\frac{6+4\mu}{3}=3 \to \mu=\frac{3}{4} \to \left(3, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

78. Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{r} x=y+z \\ x-3y+2z=13 \end{array}\right\}$**:**

a) Para $x=1$.

b) Para $x=-4$.

c) Para cualquier valor de x.

a) $x=1 \to \left.\begin{array}{r} 1=y+z \\ 1-3y+2z=13 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ -3y+2z=12 \end{array}\right\} \xrightarrow{z=1-y} -3y+2(1-y)=12 \to \left.\begin{array}{r} y=-2 \\ z=3 \end{array}\right\} \to (1,-2,3)$

b) $x=-4 \to \left.\begin{array}{r} -4=y+z \\ -4-3y+2z=13 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} y+z=-4 \\ -3y+2z=17 \end{array}\right\} \xrightarrow{z=-4-y} -3y+2(-4-y)=17 \to \left.\begin{array}{r} y=-5 \\ z=1 \end{array}\right\} \to (-4,-5,1)$

c) Se tiene infinitas soluciones, dependientes de un parámetro λ:

$$x=\lambda \to \left.\begin{array}{r} \lambda=y+z \\ \lambda-3y+2z=13 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=\lambda-z} \lambda-3(\lambda-z)+2z=13 \to \left.\begin{array}{l} y=-\frac{13}{2} \\ z=\frac{13+2\lambda}{2} \end{array}\right\} \to \left(\lambda, -\frac{13}{2}, \frac{13+2\lambda}{2}\right)$$

79. Considera el sistema $\left.\begin{array}{r} x-2=z-y \\ 3x+y=1-2z \end{array}\right\}$**.**

a) Resuélvelo para $y=3$.

b) Resuélvelo para cualquier valor de y.

c) Halla y para $x=7$.

d) Halla z para $x=-2$.

a) $y=3 \to \left.\begin{array}{r} x-2=z-3 \\ 3x+3=1-2z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-z=-1 \\ 3x+2z=-2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 5z=1 \to \left.\begin{array}{l} x=-\frac{4}{5} \\ z=\frac{1}{5} \end{array}\right\} \to \left(-\frac{4}{5}, 3, \frac{1}{5}\right)$

b) Obviamente en este caso se tienen infinitas soluciones, determinadas por un parámetro λ:

$$y=\lambda \to \left.\begin{array}{r} x-2=z-\lambda \\ 3x+\lambda=1-2z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x-z=2-\lambda \\ 3x+2z=1-\lambda \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} \left.\begin{array}{l} z=\frac{2\lambda-5}{5} \\ x=\frac{5-3\lambda}{5} \end{array}\right\} \to \left(\frac{5-3\lambda}{5}, \lambda, \frac{2\lambda-5}{5}\right)$$

c) Utilizando el apartado anterior:

$$x=7 \to \frac{5-3\lambda}{5}=7 \to \lambda=y=-10$$

d) De nuevo, recurriendo al apartado b):

$$x=-2 \to \frac{5-3\lambda}{5}=-2 \to \lambda=5 \to z=\frac{2\cdot 5-5}{5}=1$$

80. Resuelve estos sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-y-z=0 \\ x+z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -x+2z=-5 \\ 4x-3y+z=5 \\ 3x-y-4z=-4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ -x+y-z=4 \\ x+y+z=2 \\ x+2z=0 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ x+5y+3x=-7 \\ 6x+7y-10z=4 \\ x-2y+2z=7 \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-y-z=0 \\ x+z=1 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{E_2=-2E_1+E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-E_1+E_3} \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -3y-z=-2 \\ -y+z=0 \\ y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \\ \xrightarrow{E_3=-3E_3+E_2} \\ \xrightarrow{E_4=3E_4+E_2} \end{array} \left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -3y-z=-2 \\ -4z=-2 \\ 2z=1 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones tercera y cuarta son proporcionales. Se elimina una de ellas y se continúa resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ -3y-z=-2 \\ 2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow z=\frac{1}{2} \xrightarrow{-3y-\frac{1}{2}=-2} y=\frac{1}{2} \xrightarrow{x+y=1} x=\frac{1}{2}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -x+2z=-5 \\ 4x-3y+z=5 \\ 3x-y-4z=-4 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{E_2=E_1+2E_2} \\ \xrightarrow{E_3=-2E_1+E_3} \\ \xrightarrow{E_4=-3E_1+2E_4} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -2y+7z=0 \\ y-5z=-15 \\ 4y-17z=-38 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \\ \xrightarrow{E_3=2E_3+E_2} \\ \xrightarrow{E_4=E_4+2E_2} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -2y+7z=0 \\ -3z=-30 \\ -3z=-38 \end{array}\right\}$$

Sistema incompatible.

c) $$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ -x+y-z=4 \\ x+y+z=2 \\ x+2z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{E_2=2E_2+E_1} \\ \xrightarrow{E_3=-2E_3+E_1} \\ \xrightarrow{E_4=-2E_4+E_1} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ y+z=4 \\ -3y+z=-8 \\ -y-z=-4 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones segunda y cuarta son proporcionales. Se elimina una de ellas y se continúa resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ y+z=4 \\ -3y+z=-8 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \\ \xrightarrow{E_3=E_3+3E_1} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=-4 \\ y+z=4 \\ 4z=4 \end{array}\right\} \rightarrow z=1 \xrightarrow{y+z=4} y=3 \xrightarrow{2x-y+3z=-4} x=-2$$

d) $$\left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ x+5y+3x=-7 \\ 6x+7y-10z=4 \\ x-2y+2z=7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ 4x+5y=-7 \\ 6x+7y-10z=4 \\ x-2y+2z=7 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{E_2=-2E_2+E_1} \\ \xrightarrow{E_3=--3E_1+E_3} \\ \xrightarrow{E_4=-2E_4+E_1} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ -7y-10z=14 \\ 2y+25z=-4 \\ 7y+z=-14 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \\ \\ \xrightarrow{E_3=2E_2+E_3} \\ \xrightarrow{E_4=7E_2+E_4} \end{array} \left.\begin{array}{r} 2x+3y+5z=0 \\ -7y-10z=14 \\ 5z=-18 \\ 23z=21 \end{array}\right\}$$

El sistema es incompatible, porque de las ecuaciones tercera y cuarta se obtienen valores diferentes de z. Por tanto, no existe ninguna solución.

81. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales.

a) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ x+y=7 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y=3 \\ xy=2 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 2x-y=0 \\ xy-3y=20 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=10 \\ -x+y=-2 \end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} x^2-3y^2=6 \\ x-y=-2 \end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r} xy=-2 \\ x^2-y^2=3 \end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=25\\ x+y=7\end{array}\right\}\xrightarrow{x=7-y}(7-y)^2+y^2=25\rightarrow y^2-7y+12=0\rightarrow\begin{cases}y_1=3\rightarrow x_1=4\\ y_2=4\rightarrow x_2=3\end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{r}x-y=3\\ xy=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=y+3}(y+3)y=2\rightarrow y^2+3y-2=0\rightarrow\begin{cases}y_1=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\rightarrow x_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\\ y_2=\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\rightarrow x_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{r}2x-y=0\\ xy-3y=20\end{array}\right\}\xrightarrow{y=2x}2x^2-6x=20\rightarrow x^2-3x-10=0\rightarrow\begin{cases}x_1=5\rightarrow y_1=10\\ x_2=-2\rightarrow y_2=-4\end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r}x^2+y^2=10\\ -x+y=-2\end{array}\right\}\xrightarrow{y=x-2}x^2+(x-2)^2=10\rightarrow x^2-2x-3=0\rightarrow\begin{cases}x_1=3\rightarrow y_1=1\\ x_2=-1\rightarrow y_2=-3\end{cases}$

e) $\left.\begin{array}{r}x^2-3y^2=6\\ x-y=-2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=y-2}(y-2)^2-3y^2=6\rightarrow y^2+2y+1=0\rightarrow y=-1\rightarrow x=-3$

f) $\left.\begin{array}{r}xy=-2\\ x^2-y^2=3\end{array}\right\}\xrightarrow{y=-\frac{2}{x}}x^2-\left(-\dfrac{2}{x}\right)^2=3\rightarrow x^2-\dfrac{4}{x^2}=3\rightarrow x^4-3x^2-4=0\rightarrow$ Es una ecuación bicuadrada.

$x^4-3x^2-4=0\xrightarrow{x^2=t}t^2-3t-4=0\rightarrow\begin{cases}t_1=4\rightarrow\begin{cases}x_1=2\rightarrow y_1=-1\\ x_2=-2\rightarrow y_2=1\end{cases}\\ t_2=-1\rightarrow \text{Imposible}\end{cases}$

82. Encuentra las soluciones de los siguientes sistemas no lineales.

a) $\left.\begin{array}{r}x-3y+5=0\\ xy-10=\dfrac{x}{2}\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}2x+y=4\\ x^2+y^2=13\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}x-\dfrac{x+1}{y}=11\\ x+y=4\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}(x-2y)^2=4\\ -2x+y=-16\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}(y-x)^2-xy=31\\ x-(y-1)^2=xy\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{9y}=2\\ x-\dfrac{x}{y}=-3\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}x-3y+5=0\\ xy-10=\dfrac{x}{2}\end{array}\right\}\xrightarrow{x=3y-5}(3y-5)y-10=\dfrac{3y-5}{2}\rightarrow 6y^2-13y-15=0\rightarrow\begin{cases}y_1=3\rightarrow x_1=4\\ y_2=-\dfrac{5}{6}\rightarrow x_2=-\dfrac{15}{2}\end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{r}2x+y=4\\ x^2+y^2=13\end{array}\right\}\xrightarrow{y=4-2x}x^2+(4-2x)^2=13\rightarrow 5x^2-16x+3=0\rightarrow\begin{cases}x_1=3\rightarrow y_1=-2\\ x_2=\dfrac{1}{5}\rightarrow y_2=\dfrac{18}{5}\end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{r}x-\dfrac{x+1}{y}=11\\ x+y=4\end{array}\right\}\xrightarrow{x=4-y}4-y-\dfrac{(4-y)+1}{y}=11\rightarrow y^2+6y+5=0\rightarrow\begin{cases}y_1=-5\rightarrow x_1=9\\ y_2=-1\rightarrow x_2=5\end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r}(x-2y)^2=4\\ -2x+y=-16\end{array}\right\}\xrightarrow{y=2x-16}(x-2(2x-16))^2=4\rightarrow 3x^2-64x+340=0\rightarrow\begin{cases}x_1=10\rightarrow y_1=4\\ x_2=\dfrac{34}{3}\rightarrow y_2=\dfrac{20}{3}\end{cases}$

e) $\left.\begin{array}{r}(y-x)^2-xy=31\\ x-(y-1)^2=xy\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x^2+y^2-3xy=31\\ x(1-y)-y^2+2y=1\end{array}\right\}\xrightarrow{x=\frac{1-2y+y^2}{1-y}}$

$$\to\left(\frac{1-2y+y^2}{1-y}\right)^2+y^2-3y\left(\frac{1-2y+y^2}{1-y}\right)=31\to y^2-y-6=0\to\begin{cases}y_1=3\to x_1=-2\\ y_2=-2\to x_2=3\\ y_3=1\to\begin{cases}x_3=\dfrac{3+\sqrt{129}}{2}\\ x_4=\dfrac{3-\sqrt{129}}{2}\end{cases}\end{cases}$$

f) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x^2}{9y}=2\\ x-\dfrac{x}{y}=-3\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}x^2=18y\\ xy-x=-3y\end{array}\right\}\xrightarrow{y=\frac{x^2}{18}}x\left(\frac{x^2}{18}\right)-x=-3\left(\frac{x^2}{18}\right)\to$

$$\to x^3+3x^2-18x=0\to x(x^2+3x-18)=0\to\begin{cases}x_1=0\to y_1=0\to \text{No es válida.}\\ x_2=3\to y_2=\dfrac{1}{2}\\ x_3=-6\to y_3=2\end{cases}$$

83. **Resuelve estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r}3xy-2x=100\\ \dfrac{x}{y+1}=2\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=-1\\ 5x+6y=-1\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}(x-3)(y+1)=50\\ \dfrac{x+2}{y-4}=2\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+3}{7}=y-1\\ \sqrt{x-2}=y\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r}\sqrt{y}+2\sqrt{x}=15\\ \sqrt{y+x-1}=1\end{array}\right\}$

f) $\left.\begin{array}{r}x^2-xy+y=-1\\ \sqrt{y-1}=x\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}3xy-2x=100\\ \dfrac{x}{y+1}=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2(y+1)}3\cdot 2(y+1)y-2\cdot 2(y+1)=100\to 3y^2+y-52=0\to\begin{cases}y_1=4\to x_1=10\\ y_2=-\dfrac{13}{3}\to x_2=-\dfrac{20}{3}\end{cases}$

b) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=-1\\ 5x+6y=-1\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}4x+3y=-xy\\ 5x+6y=-1\end{array}\right\}\xrightarrow{y=\frac{-1-5x}{6}}4x+3\left(\frac{-1-5x}{6}\right)=-x\left(\frac{-1-5x}{6}\right)\to$

$$\to -5x^2+8x-3=0\to\begin{cases}x_1=1\to y_1=-1\\ x_2=\dfrac{3}{5}\to y_2=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

c) $\left.\begin{array}{r}(x-3)(y+1)=50\\ \dfrac{x+2}{y-4}=2\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{r}(x-3)(y+1)=50\\ x+2=2y-8\end{array}\right\}\xrightarrow{x=2y-10}(2y-10-3)(y+1)=50\to$

$$\to 2y^2+2y-10y-10-3y-3-50=0\to 2y^2-11y-63=0\to\begin{cases}y_1=9\to x_1=8\\ y_2=-\dfrac{7}{2}\to x_2=-17\end{cases}$$

d) $\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+3}{7}=y-1\\ \sqrt{x-2}=y\end{array}\right\}\to\dfrac{x+3}{7}=\sqrt{x-2}-1\to(x+10)^2=\left(7\sqrt{x-2}\right)^2\to x^2-29x+198\to\begin{cases}x_1=11\to y_1=3\\ x_2=18\to y_2=4\end{cases}$

e) $\left.\begin{array}{r}\sqrt{y}+2\sqrt{x}=15\\ \sqrt{y+x-1}=1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}\left(\sqrt{y}\right)^2=\left(15-2\sqrt{x}\right)^2\\ \left(\sqrt{y+x-1}\right)^2=1^2\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l}y=225+4x-6\sqrt{x}\\ y=2-x\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Igualación}} 225+4x-6\sqrt{x}=2-x \to$

$\to (5x+223)^2=\left(6\sqrt{x}\right)^2 \to 25x^2+2194x+49729=0 \to$ No existe solución.

f) $\left.\begin{array}{r}x^2-xy+y=-1\\ \sqrt{y-1}=x\end{array}\right\} \to \left(\sqrt{y-1}\right)^2-y\sqrt{y-1}+y=-1 \to y\left(2-\sqrt{y-1}\right)=0 \to \begin{cases} y_1=0 \to x_1 \to \text{No existe.}\\ y_2=5 \to \begin{cases} x_2=2\\ x_3=-2 \to \text{No válida.}\end{cases}\end{cases}$

84. **Halla la solución de estos sistemas.**

a) $\left.\begin{array}{r}2^x\cdot 2^y=16\\ 9^x=\dfrac{3^y}{3}\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}xy=2\\ \dfrac{125^x}{625}=25^y\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}\log 2x=1+\log y\\ \sqrt{x-1}=y+1\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}25^x\cdot 5^y=\dfrac{1}{5}\\ \sqrt{x+11}=y\end{array}\right\}$

a) $\left.\begin{array}{r}2^x\cdot 2^y=16\\ 9^x=\dfrac{3^y}{3}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}2^{x+y}=2^4\\ 3^{2x}=3^{y-1}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}x+y=4\\ 2x=y-1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}x+y=4\\ 2x-y=-1\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 3x=3 \to x=1 \to y=3$

b) $\left.\begin{array}{r}xy=2\\ \dfrac{125^x}{625}=25^y\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}xy=2\\ 5^{3x-4}=5^{2y}\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}xy=2\\ 3x-4=2y\end{array}\right\} \xrightarrow{y=\frac{2}{x}} 3x-4=\dfrac{4}{x} \to 3x^2-4x-4=0 \to \begin{cases} x_1=2 \to y_1=1\\ x_2=-\dfrac{2}{3} \to y_2=-3\end{cases}$

c) $\left.\begin{array}{r}\log 2x=1+\log y\\ \sqrt{x-1}=y+1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}\log 2x=\log 10y\\ \sqrt{x-1}=y+1\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}x=5y\\ \sqrt{x-1}=y+1\end{array}\right\} \to \left(\sqrt{5y-1}\right)^2=(y+1)^2 \to$

$\to 5y-1=y^2+2y+1 \to y^2-3y+2=0 \to \begin{cases} y_1=1 \to x_1=5\\ y_2=2 \to x_2=10\end{cases}$

d) $\left.\begin{array}{r}25^x\cdot 5^y=\dfrac{1}{5}\\ \sqrt{x+11}=y\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}5^{2x}\cdot 5^y=5^{-1}\\ \sqrt{x+11}=y\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}2x+y=-1\\ \sqrt{x+11}=y\end{array}\right\} \to 2x+\sqrt{x+11}=-1 \to$

$\to 4x^2+3x-10=0 \to \begin{cases} x_1=\dfrac{5}{4} \to \begin{cases} y_1=-\dfrac{7}{2}\\ y_2=\dfrac{7}{2} \to \text{No válida.}\end{cases}\\ x_2=-2 \to \begin{cases} y_3=3\\ y_4=-3 \to \text{No válida.}\end{cases}\end{cases}$

85. **Para producir leche semidesnatada que conserve el 40 % de su grasa se mezclan dos tipos de leche: una con un 20 % de grasa y otra con el 70 % de grasa. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche se necesitan para producir 200 litros de leche con el 40 % de grasa?**

Sean x e y el número de litros que se necesitan de la leche con un 20 % de grasa y con un 70 % de grasa, respectivamente. El sistema que se plantea es el siguiente:

$\left.\begin{array}{r}x+y=200\\ \dfrac{20}{100}x+\dfrac{70}{100}y=\dfrac{40}{100}\cdot 200\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}x+y=200\\ 2x+7y=800\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}2x+2y=400\\ -2x-7y=-800\end{array}\right\} \to -5y=-400 \to \begin{cases} x=120\\ y=80\end{cases}$

Por tanto, se necesitan 120 litros de la leche con un 20 % de grasa y 80 litros de la leche con un 70 % de grasa.

86. **En una bodega venden dos tipos de vino: crianza y reserva. Averigua cuál es su precio si sabemos que Juan compró 3 botellas de reserva y 12 botellas de crianza y pagó 69 €, mientras que Belén compró 6 botellas de crianza y 8 botellas de reserva y pagó 80 €.**

Sean x e y los precios en € de las botella de crianza y de reserva, respectivamente. Entonces, el gasto que han realizado Juan y Belén queda reflejado en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}12x+3y=69\\6x+8y=80\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}4x+y=23\\3x+4y=40\end{array}\right\}\xrightarrow{y=23-4x}3x+4(23-4x)=40\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=4\\y=7\end{array}\right.$$

Es decir, una botella de crianza cuesta 4 €; y una de reserva, 7 €.

87. **Un ciclista y un coche parten uno al encuentro del otro desde dos ciudades separadas por 180 km. Sabiendo que el ciclista avanza 4 veces más despacio que el coche y que tardan 1 h 48 min en encontrarse, ¿cuál es la velocidad de cada uno?**

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e=v\cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el ciclista e y a la velocidad del mismo:

1 h 48 min = 1,8 h

$$\left.\begin{array}{r}x=1{,}8y\\180-x=7{,}2y\end{array}\right\}\rightarrow 180-1{,}8y=7{,}2y\rightarrow y=20$$

$x=1{,}8\cdot 20=36$

La velocidad del ciclista es 20 km/h, y la velocidad del coche es 80 km/h.

88. **Calcula un número, sabiendo que la suma de sus cifras es 14, y que si se invierte el orden en que están colocadas, el número disminuye en 18 unidades.**

Llamamos x a la cifra de las decenas e y a la de las unidades:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=14\\10y+x+18=10x+y\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}y=14-x\\9y-9x+18=0\end{array}\right\}\rightarrow 126-9x-9x+18=0\rightarrow 18x=144\rightarrow x=8\rightarrow y=14-8=6$$

El número es 86.

89. **Un camión sale de una ciudad a 80 km/h y dos horas después parte en la misma dirección un coche a 100 km/h. ¿Cuánto tardará en alcanzarlo y cuánta distancia habrá recorrido hasta ese momento?**

Planteamos un sistema de ecuaciones, teniendo en cuenta que $e=v\cdot t$.

Llamamos x a la distancia recorrida por el camión e y al tiempo que tarda en alcanzarlo:

$$\left.\begin{array}{r}x=80y\\x+160=100y\end{array}\right\}\rightarrow 80y+160=100y\rightarrow y=8$$

$x=80\cdot 8=640$

Tardará 8 horas en alcanzarlo y habrá recorrido 800 kilómetros.

90. **Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m². Halla las dimensiones del polígono.**

Llamamos x al lado menor del polígono e y a su área:

$$\left.\begin{array}{r} x(x+2)=y \\ (x+2)(x+4)=y+40 \end{array}\right\} \to x^2+6x+8=x^2+2x+40 \to 4x=32 \to x=8$$

$y=8(8+2)=80$

Los lados del polígono original miden 8 y 10 m, respectivamente.

91. **Jacinto está cercando un terreno de forma rectangular. Cuando lleva puesto alambre a dos lados consecutivos del terreno, se da cuenta de que ha gastado 170 m de alambre. Si sabe que la diagonal del rectángulo mide 130 m, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno?**

Llamamos x e y a las dimensiones del terreno:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=170 \\ x^2+y^2=130^2 \end{array}\right\} \to y^2-170y+6000=0 \to y=\frac{-(-170)\pm\sqrt{(-170)^2-4\cdot 1\cdot 6000}}{2\cdot 1}=\frac{170\pm 70}{2} \to \begin{cases} y_1=120 \\ y_2=50 \end{cases}$$

$y_1=120 \to x_1=170-120=50$

$y_2=50 \to x_2=170-50=120$

Las dimensiones del terreno son 120 y 50 m, respectivamente.

El área del terreno mide 6 000 m².

92. **Averigua las dimensiones que tiene un pliego rectangular de papel, sabiendo que si dejamos los márgenes laterales de 1 cm y los verticales de 2,5 cm, el área es 360 cm², y que si los márgenes laterales son de 2 cm y los verticales son de 1,25 cm, el área es la misma.**

Llamamos x e y a las dimensiones del pliego:

$$\left.\begin{array}{r} (x-2)(y-5)=360 \\ (x-4)(y-2{,}5)=360 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{350+2y}{y-5} \\ x=\dfrac{350+4y}{y-2{,}5} \end{array}\right\} \to 2y^2-15y-875=0$$

$$y=\frac{-(-15)\pm\sqrt{(-15)^2-4\cdot 2\cdot(-875)}}{2\cdot 2}=\frac{15\pm 85}{4} \to \begin{cases} y_1=-\dfrac{35}{2} \\ y_2=25 \end{cases}$$

$$\text{Si } y_1=-\frac{35}{2} \to x_1=\frac{350+2\dfrac{-35}{2}}{\dfrac{-35}{2}-5}=-14 \qquad \text{Si } y_2=25 \to x_2=\frac{350+2\cdot 25}{25-5}=20$$

Las dimensiones del pliego son 20 y 25 cm, respectivamente.

93. **Las habitaciones de Alicia y Marta tienen forma cuadrada. La suma de sus superficies es 29,89 m² y la diferencia de estas superficies es 5,39 m². Calcula sus dimensiones.**

Sean x e y las longitudes de los lados de las respectivas habitaciones. Se supone $x>y$, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=29{,}89 \\ x^2-y^2=5{,}39 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} 2x^2=35{,}28 \to \begin{cases} x_1=4{,}2 \xrightarrow{y^2=29{,}89-x^2} \begin{cases} y_1=3{,}5 \\ y_2=-3{,}5 \to \text{ No válida.} \end{cases} \\ x_2=-4{,}2 \to \text{No válida.} \end{cases}$$

Las soluciones negativas carecen de sentido, por ello, las únicas medidas válidas de las habitaciones son 4,2 m y 3,5 m, respectivamente.

94. Considera un cuadrado y la diagonal de este. Se forma un rectángulo cuya base mide igual que la diagonal del cuadrado, siendo el perímetro del rectángulo $4+6\sqrt{2}$ cm. Halla las dimensiones de ambas figuras sabiendo que la suma de sus áreas es $9+6\sqrt{2}$ cm².

Sea x la longitud del lado del cuadrado en cm.

Primero, por el teorema de Pitágoras, se calcula la longitud de la diagonal del cuadrado, en función de x:

$d^2 = x^2 + x^2 \rightarrow d = x\sqrt{2}$ cm

Sea y la longitud de la altura del rectángulo. Las ecuaciones que formarán el sistema son:

- Perímetro $= 4+6\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}+2y$
- Suma de áreas $= 9+6\sqrt{2} = x^2 + xy\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} 4+6\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}+2y \\ 9+6\sqrt{2} = x^2+xy\sqrt{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2+3\sqrt{2}-x\sqrt{2} \\ y = \dfrac{9+6\sqrt{2}-x^2}{x\sqrt{2}} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Igualación}} 2+3\sqrt{2}-x\sqrt{2} = \frac{9+6\sqrt{2}-x^2}{x\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - x(6+2\sqrt{2})+9+6\sqrt{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 2 \\ x_2 = 3+2\sqrt{2} \rightarrow y_2 = -2 \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$$

Por tanto, el lado del cuadrado mide 3 cm; la altura del rectángulo, 2 cm; y la base del rectángulo, $3\sqrt{2}$ cm.

95. Calcula las dimensiones de un rectángulo de perímetro 40 cm del que se conoce que la suma de sus diagonales es $8\sqrt{13}$ cm.

Sea x la longitud de la base del rectángulo, e y su altura. Primero, se calcula la longitud de la diagonal con el teorema de Pitágoras. Después, teniendo en cuenta que las diagonales de un rectángulo son iguales y que el semiperímetro mide 20 cm, se plantea y se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{x^2+y^2} = 8\sqrt{13} \\ x+y = 20 \end{array}\right\} \xrightarrow{y=20-x} \left(2\sqrt{x^2+(20-x)^2}\right)^2 = \left(8\sqrt{13}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4(x^2+400+x^2-40x) = 832 \rightarrow x^2-20x+96 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \rightarrow y_1 = 12 \\ x_2 = 12 \rightarrow y_2 = 8 \end{cases}$$

Por tanto, el rectángulo tiene unas dimensiones de 8 × 12 cm.

96. La altura de un rectángulo es tres quintas partes de la base. La tercera parte de la diagonal del rectángulo mide $\sqrt{34}$ cm. Halla las dimensiones del rectángulo.

Sea x la longitud de la base del rectángulo, e y su altura, entonces, por el teorema de Pitágoras se obtiene la diagonal, y con ella se plantea y resuelve el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} y = \dfrac{3}{5}x \\ \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{3} = \sqrt{34} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\sqrt{x^2+\left(\frac{3}{5}x\right)^2}}{3} = \sqrt{34} \rightarrow \left(\sqrt{x^2+\left(\frac{3}{5}x\right)^2}\right)^2 = \left(3\sqrt{34}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2+\left(\frac{3}{5}x\right)^2 = 306 \rightarrow 34x^2 = 7650 \rightarrow x^2 = 225 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \rightarrow y_1 = 9 \\ x_2 = -15 \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$$

Por tanto, el rectángulo tiene unas dimensiones de 15 × 9 cm.

97. **La cifra de las unidades de un número de dos cifras es tres unidades mayor que el cuadrado de la cifra de las decenas. El cuadrado del consecutivo del número original supera en 55 unidades al cuadrado del original. Encuentra el número de partida.**

Sean x e y las cifras de las unidades y las decenas, respectivamente. El sistema que se debe resolver para encontrar el número de partida es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x = 3 + y^2 \\ (x + 10y + 1)^2 = 55 + (x + 10y)^2 \end{array}\right\} \rightarrow (3 + y^2 + 10y + 1)^2 = 55 + (3 + y^2 + 10y)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 108y^2 + 80y + 16 = 55 + 106y^2 + 60y + 9 \rightarrow y^2 + 10y - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} y_1 = -12 \rightarrow \text{No válida.} \\ y_2 = 2 \rightarrow x_2 = 7 \end{cases}$$

Entonces, el número de partida es 27.

98. **El alquiler de una tienda de campaña cuesta 80 € al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión: «Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 € menos cada uno». ¿Cuántos amigos van de excursión?**

N.° de amigos	Precio en € por persona	TOTAL en €
x	y	80
$x + 3$	$y - 6$	80

El sistema que hay que resolver es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} xy = 80 \\ (x + 3)(y - 6) = 80 \end{array}\right\} \xrightarrow{y = \frac{80}{x}} (x + 3)\left(\frac{80}{x} - 6\right) = 80 \rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \rightarrow y_1 = 16 \\ x_2 = -8 \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$$

Por tanto, van de excursión 5 amigos, y cada uno paga 16 €.

99. **La diferencia de dos números es 5. La diferencia de los cuadrados de sus consecutivos es 95. Halla los dos números.**

Sean x e y los números buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 5 \\ (x + 1)^2 - (y + 1)^2 = 95 \end{array}\right\} \xrightarrow{x = y + 5} (y + 5 + 1)^2 - (y + 1)^2 = 85 \rightarrow 10y = 60 \rightarrow y = 6 \rightarrow x = 11$$

Los números son 6 y 11.

100. **La suma de las raíces cuadradas de dos números es 6. El cociente de ambos números es igual al menor de ellos. Encuentra esos números.**

Sean *x* e *y* los números buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{x}+\sqrt{y}=6\\ \dfrac{x}{y}=y\end{array}\right\}\xrightarrow{x=y^2}\sqrt{y^2}+\sqrt{y}=6\rightarrow y^2-13y+36=0\rightarrow\begin{cases}y_1=4\rightarrow x_1=16\\ y_2=9\rightarrow x_2=81\end{cases}$$

Tras la comprobación de las soluciones se descarta $(81, 9)$. Por ello, los números buscados son 16 y 4.

101. **Busca dos números naturales de forma que su producto disminuido 12 unidades coincide con el cuádruple del menor, sabiendo además que la diferencia del triple del menor y el mayor es una unidad.**

Sean *x* e *y* los números naturales buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}xy-12=4y\\ 3y-x=1\end{array}\right\}\xrightarrow{x=3y-1}(3y-1)y-12=4y\rightarrow 3y^2-5y-12=0\rightarrow\begin{cases}y_1=3\rightarrow x_1=8\\ y_2=-\dfrac{4}{3}\rightarrow \text{No válida.}\end{cases}\rightarrow \text{Los números son 8 y 3.}$$

102. **Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.**

Sean *x*, *y*, *z* los precios respectivos, en €, de una vaca, un ternero y una oveja. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y=16z\\ x+4z=3y\\ 3y+8z=4x\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{rrr|r}2&3&-16&0\\1&-3&4&0\\-4&3&8&0\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{E_2=-2E_2+E_1}\\ \xrightarrow{E_3=2E_1+E_3}\end{array}\left(\begin{array}{rrr|r}2&3&-16&0\\0&-9&36&0\\0&9&-24&0\end{array}\right)\xrightarrow{E_3=E_2+E_3}\left(\begin{array}{rrr|r}2&3&-16&0\\0&-9&36&0\\0&0&12&0\end{array}\right)\rightarrow x=y=z=0$$

Se obtiene la solución trivial nula. Obviamente, carece de sentido para este problema.

103. **Encuentra dos números naturales sabiendo que la quinta parte de su diferencia es 2 y la suma de sus inversos es $\dfrac{13}{72}$.**

Sean *x* e *y* los números naturales buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-y}{5}=2\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{72}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x=y+10\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{72}\end{array}\right\}\xrightarrow{x=y+10}\dfrac{1}{y+10}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{72}\rightarrow 72(2y+10)=13y(y+10)\rightarrow$$

$$\rightarrow 13y^2-14y-720=0\rightarrow\begin{cases}y_1=8\rightarrow x_1=18\\ y_2=-\dfrac{90}{13}\rightarrow \text{No válida.}\end{cases}\rightarrow \text{Los números buscados son 18 y 8.}$$

104. **Halla dos números naturales tales que el inverso del primero más el triple del segundo es $\dfrac{31}{5}$ y la diferencia entre el doble del primero y el inverso del segundo es $\dfrac{19}{2}$.**

Sean *x* e *y* los números naturales buscados. Se supone $x > y$. Entonces, hay que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{1}{x}+3y=\dfrac{31}{5}\\ 2x-\dfrac{1}{y}=\dfrac{19}{2}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r}x(31-15y)=5\\ y(4x-19)=2\end{array}\right\}\xrightarrow{x=\frac{5}{31-15y}}y\left(\dfrac{20}{31-15y}-19\right)=2\rightarrow 285y^2-539y-62=0\rightarrow\begin{cases}y_1=2\rightarrow x_1=5\\ y_2=-\dfrac{31}{285}\rightarrow \text{No válida.}\end{cases}$$

Los números buscados son 5 y 2.

105. Calcula tres números sabiendo que su suma es 6, la suma del doble del mayor y el triple de la diferencia de los otros dos es −4, y la diferencia del triple del mayor y el doble de la suma de los otros dos es 8.

Sean *x*, *y*, *z* los números buscados. Se supone $x > y, z$ y se plantea y resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x+3(y-z)=-4 \\ 3x-2(y+z)=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & -16 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=-1 \\ z=3 \end{array}\right.$$

Luego, los números son 4, –1 y 3.

106. La suma de las tres cifras de un número es 16. Calcula el número sabiendo que la diferencia de las unidades y las decenas es el doble de las centenas, y la suma de las unidades y las centenas supera en una unidad al doble de las decenas.

Sean *x*, *y*, *z* las cifras de las centenas, decenas y unidades, respectivamente. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=16 \\ z-y=2x \\ z+x=1+2y \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -32 \\ 0 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -32 \\ 0 & 0 & 3 & 27 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \\ z=9 \end{array}\right.$$

Por tanto, el número buscado es 259.

107. En el monedero de Martín hay 11 monedas de 1, 0,5 y 0,2 € con un valor total de 4,9 €. Halla cuántas monedas hay de cada tipo sabiendo que la suma del doble de monedas de 1 € más las monedas de 0,5 € coincide con el número de monedas de 0,2 €.

	1 €	0,5 €	0,2 €	TOTAL
Número de monedas	x	y	z	11
€ que aportan	x	0,5y	0,2z	4,9

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=11 \\ 2x+y=z \\ x+0{,}5y+0{,}2z=4{,}9 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}2 & 4{,}9 \end{array}\right) \rightarrow \ldots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -22 \\ 0 & 0 & 1{,}4 & 9{,}8 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=1 \\ z=7 \end{array}\right.$$

Luego, Martín tiene tres monedas de 1 €**,** una moneda de 0,5 € y siete monedas de 0,2 €.

108. Un cuaderno grande, uno mediano y uno pequeño cuestan juntos 3,9 €. Tres grandes, cuatro medianos y uno pequeño cuestan 11,1 €, y seis pequeños y tres medianos cuestan lo mismo que cinco grandes. Calcula el precio de cada tipo de cuaderno.

Sean *x*, *y*, *z* los precios de un cuaderno grande, uno mediano y uno pequeño, respectivamente. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3{,}9 \\ 3x+4y+z=11{,}1 \\ 6z+3y=5x \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 3 & 4 & 1 & 11{,}1 \\ -5 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 0 & 1 & -2 & -0{,}6 \\ 0 & 8 & 11 & 19{,}5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3{,}9 \\ 0 & 1 & -2 & -0{,}6 \\ 0 & 0 & 27 & 24{,}3 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1{,}8 \\ y=1{,}2 \\ z=0{,}9 \end{array}\right.$$

Por tanto, el cuaderno grande cuesta 1,8 €; el mediano, 1,2 €; y el pequeño, 0,9 €.

109. Laura tiene billetes de 5, 10 y 20 €. En total son 16. El triple de los billetes de más valor es igual al total del resto y la mitad de los billetes de más valor es igual a la diferencia de los de menor valor y los de valor intermedio. Calcula cuántos billetes de cada tipo tiene Laura.

Sean *x*, *y*, *z* el número de billetes de 5, 10 y 20 €, respectivamente. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 3z = x + y \\ \dfrac{z}{2} = x - y \\ x + y + z = 16 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 5 \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Por tanto, Laura tiene 7 billetes de 5 €, 5 de 10 € y 4 de 20 €.

110. Sobre un camión se cargan tres bidones. El doble del peso del primero menos el triple del segundo es 4 kg. El quíntuplo del peso del segundo menos un tercio del peso del tercero es 50 kg. Halla el peso de cada bidón si entre los tres pesan 275 kg.

Sea *x*, *y*, *z* los pesos del primer, segundo y tercer bidón, respectivamente. Entonces:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 275 \\ 2x - 3y = 4 \\ 5y - \dfrac{1}{3}z = 50 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x = 275 - y - z \\ 2(275 - y - z) - 3y = 4 \\ 5y - \dfrac{1}{3}z = 50 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5y + 2z = 546 \\ 15y - z = 150 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5y + 2z = 546 \\ 30y - 2z = 300 \end{array}\right\} \to 35y = 846 \to \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1339}{35} \approx 38{,}26 \\ y = \dfrac{846}{35} \approx 24{,}17 \\ z = \dfrac{1488}{7} \approx 212{,}57 \end{array}\right.$$

El primer bidón pesa 38,26 kg; el segundo, 24,17 kg; y el tercero, 212,57 kg.

111. Un número que tiene tres cifras lo representamos en la forma *abc*. Determínalo, sabiendo que si escribes *cab*, el número disminuye en 459 unidades; si escribes *bac*, el número disminuye en 360 unidades, y que *bca* es 45 unidades menor que *bac*.

a = cifra de las centenas $\quad$ b = cifra de las decenas $\quad$ c = cifra de las unidades

$$\left.\begin{array}{l} 100a + 10b + c = 100c + 10a + b + 459 \\ 100a + 10b + c = 100b + 10a + c + 360 \\ 100b + 10c + a = 100b + 10a + c - 45 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 90a + 9b - 99c = 459 \\ 90a - 90b = 360 \\ -9a + 9c = -45 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 10a + b - 11c = 51 \\ 10a - 10b = 40 \\ -a + c = -5 \end{array}\right\} \xrightarrow{a = c + 5} \left.\begin{array}{r} b - c = 1 \\ -10b + 10c = -10 \end{array}\right\} \to$$

Entonces $a = c + 5$ y $b = c + 1$

Para determinar la solución sabemos que los tres números son enteros y, por tanto, *c* es un número de 0 a 9. Como $a = c + 5$, *c* solo puede valer 0, 1, 2, 3 y 4.

Para cada uno de estos valores de *c* resultan a y *b*.

Si *c* = 0, entonces: $a = 5$ y *b* = 1. El número es 510.

Si *c* = 1, entonces: $a = 6$ y *b* = 2. El número es 621.

Si *c* = 2, entonces: $a = 7$ y *b* = 3. El número es 732.

Si *c* = 3, entonces: $a = 8$ y *b* = 4. El número es 843.

Si *c* = 4, entonces: $a = 9$ y *b* = 5. El número es 954.

112. **El bloque de pisos en el que vivo ha estado de obras. El administrador de la comunidad está tratando de descubrir cuánto cobran a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Sabe que:**

- **En el 4.º A el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas y tuvieron que pagar 78 € de mano de obra.**
- **En el 3.º D pagaron 85 € por las dos horas que estuvo el fontanero y la hora que estuvo el albañil.**
- **En mi casa estuvieron 1 hora el fontanero, 1 hora el electricista y 3 horas el albañil y nos cobraron 133 €.**

¿Cuánto cobra por hora cada profesional?

	€/h	horas 4.ºA	horas 3.ºD	horas en casa
Electricista	x	1	0	1
Fontanero	y	0	2	1
Albañil	z	2	1	3
TOTAL en €		87	85	133

$$\left.\begin{aligned} x+2z&=87\\ 2y+z&=85\\ x+y+3z&=133\end{aligned}\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&87\\0&2&1&85\\1&1&3&133\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&87\\0&2&1&85\\0&1&1&46\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&87\\0&2&1&85\\0&0&1&7\end{array}\right)\to\left\{\begin{aligned}x&=73\\y&=39\\z&=7\end{aligned}\right.$$

Luego, el electricista cobra por hora 73 €; el fontanero, 39 €; y el albañil, 7 €.

113. **Cuando en el año 1800 Beethoven escribe su primera sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert el que compone su célebre *Sinfonía incompleta*. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera sinfonía.**

Determina el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores.

	Beethoven	Schubert	ECUACIÓN
Edad en 1800	$10x$	x	
Edad en 1800 + y años	$10x+y$	$x+y$	$10x+y+x+y=77$
Edad en 1800 + y + 5 años	$10x+y+5$	$x+y+5$	$x+y+5=10x$

$$\left.\begin{aligned}10x+y+x+y&=77\\ x+y+5&=10x\end{aligned}\right\}\to\left.\begin{aligned}11x+2y&=77\\ 9x-y&=5\end{aligned}\right\}\to\left.\begin{aligned}11x+2y&=77\\ 18x-2y&=10\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{Reducción}}29x=87\to\left\{\begin{aligned}x&=3\\y&=22\end{aligned}\right.$$

Entonces, Beethoven murió en el año 1800 + 22 + 5 = 1827 a la edad de 30 + 3 + 22 + 5 = 57 años. Por tanto, su año de nacimiento fue 1770.

Schubert tenía 3 años en 1800. Por tanto, su año de nacimiento fue 1797.

PARA PROFUNDIZAR

114. Elige la respuesta adecuada. (Concurso de Primavera)

Si a, b, c y d son números reales con $a-1=b+2=c-3=d+4$, el mayor de los cuatro es:	a	b	c	d	No se puede determinar
Si m y n son enteros con $2m-n=3$, $m-2n$ debe ser:	Igual a -3	Igual a 0	Múltiplo de 3	Un entero impar	Un entero par
Isa tiene un perro cuya edad actual, en meses, es la mitad que la edad de Isa, en años. Pero dentro de cinco años la edad del perrito, en meses, será cinco unidades más que el doble de la edad de Isa, en años, en ese momento. ¿Cuál es la edad actual del perrito en meses?	13	14	15	16	17
Ya sabes que en un partido de baloncesto hay tiros de 3 puntos, tiros de 2 puntos y tiros libres, que valen 1 punto cada uno. En un extraño partido, un equipo hizo tantos puntos con tiros de 3 como con tiros de 2 puntos y el número de aciertos en tiros libres superó en 1 al número de aciertos en tiros de 2 puntos. Si al final sumaron 61 puntos, ¿cuántos tiros libres encestaron?	13	14	15	16	17

□ De la sucesión de igualdades se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a-1=b+2 \\ a-1=c-3 \\ a-1=d+4 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} a-b=3 \\ a-c=-2 \\ a-d=5 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \ldots \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

Es un sistema compatible indeterminado. Las infinitas soluciones vienen dadas por un parámetro λ :

$a=\lambda+5 \qquad b=\lambda+2 \qquad c=\lambda+7 \qquad d=\lambda$

A la vista de los resultados, se observa que la variable c siempre es la mayor de las cuatro.

□ Se plantea el siguiente sistema, donde $(*)$ representa el dato desconocido:

$$\left.\begin{array}{l} 2m-n=3 \\ m-2n=(*) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} \left.\begin{array}{r} -4m+2n=-6 \\ m-2n=(*) \end{array}\right\} \to -3m=-6+(*) \to 3(2-m)=(*) \to$$

$\to m-2n=(*)$ debe ser un múltiplo de 3.

□

	Edad del perro en meses	Edad de Isa en meses
Actualmente	y	x
Dentro de 5 años = 60 meses	$y+60$	$x+60$

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x}{2\cdot 12} \\ y+60=5+2\cdot\dfrac{x+60}{12} \end{array}\right\} \xrightarrow{y=\frac{x}{24}} \frac{x}{24}+60=5+\frac{x+60}{6} \to x+1440=120+4x+240 \to \begin{cases} x=360 \\ y=15 \end{cases}$$

Luego, el perro tiene 15 meses de edad.

□

	Tiros de 3 puntos (z)	Tiros de 2 puntos (y)	Tiros de 1 punto (x)
Puntos	$3z$	$2y$	x

Se plantea y resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned}3z+2y+x&=61\\ x&=1+y\\ 3z&=2y\end{aligned}\right\}\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&61\\1&-1&0&1\\0&2&-3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&61\\0&1&1&20\\0&2&-3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&61\\0&1&1&20\\0&0&1&8\end{array}\right)\to\left\{\begin{aligned}x&=13\\y&=12\\z&=8\end{aligned}\right.$$

Por tanto, se encestaron 13 tiros libres.

115. Escribe un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas de modo que cumpla la condición indicada en cada caso.

a) Sea compatible determinado con solución $x=-1$, $y=-2$.

b) Sea compatible indeterminado y $x=-1$, $y=-2$, una solución del sistema.

c) Sea compatible indeterminado y todas las soluciones de la forma $x=-1$, $y=\lambda$.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $\left.\begin{aligned}4x-y&=-2\\5x-y&=-3\end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned}7x-5y&=3\\5(2y-x)+3&=3(3x-1)\end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned}2x-1+4y&=-3\cdot(1-y)+y\\3y-2(y+1)&=y-2\end{aligned}\right\}$

116. Escribe un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas que cumplan las condiciones en cada caso.

a) Sea compatible determinado con solución $x=3$, $y=2$, $z=2$.

b) Sea compatible indeterminado y $x=3$, $y=2$ y $z=2$, una solución del sistema.

c) Sea compatible indeterminado y $x=3$, $y=2$ y $z=2$ y $x=1$, $y=1$ y $z=1$, dos soluciones.

Respuesta abierta, por ejemplo:

a) $\left.\begin{aligned}3x+2y-3z&=7\\x+y-2z&=1\\7x-y-8z&=3\end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned}x+y-2z&=1\\7x-y-8z&=3\\6x-6z&=2(y+1)\end{aligned}\right\}$ c) $\left.\begin{aligned}x-2y&=-1\\x-2z&=-1\\x-y-z&=-1\end{aligned}\right\}$

117. Resuelve este sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}&=1\\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}&=\frac{17}{3}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}&=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\}$$

Siguiendo la sugerencia, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}&=1\\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}&=\frac{17}{3}\\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{2}{z}&=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\xrightarrow{X=\frac{1}{x}}\\&\xrightarrow{Y=\frac{1}{y}}\\&\xrightarrow{Z=\frac{1}{z}}\end{aligned}\left.\begin{aligned}X+2Y-3Z&=1\\2X-4Y+5Z&=\frac{17}{3}\\3X+6Y-2Z&=\frac{2}{3}\end{aligned}\right\}\to\ldots\to\left\{\begin{aligned}X&=\frac{11}{6}\\Y&=-\frac{11}{12}\\Z&=-\frac{1}{3}\end{aligned}\right.\begin{aligned}&\xrightarrow{x=\frac{1}{X}}\\&\xrightarrow{y=\frac{1}{Y}}\\&\xrightarrow{z=\frac{1}{Z}}\end{aligned}\left\{\begin{aligned}x&=\frac{6}{11}\\y&=-\frac{12}{11}\\z&=-3\end{aligned}\right.$$

118. Tres números, *a*, *b* y *c*, distintos de cero, están en progresión aritmética. Si se aumenta *a* en 1 unidad o *c* en 2 unidades, resultan progresiones geométricas. Averigua esos números.

(Concurso de Primavera)

Sea *d* la diferencia de la progresión aritmética.

Sean r_1 y r_2 las razones de las dos progresiones geométricas que se pueden obtener. Los datos del enunciado se expresan de la siguiente manera:

- Progresión aritmética:

$$a \qquad b=a+d \qquad c=b+d=a+2d$$

- Progresión geométrica 1:

$$a+1 \qquad b=(a+1)r_1 \qquad c=br_1=ar_1^2$$

- Progresión geométrica 2:

$$a \qquad b=ar_2 \qquad c+2=br_2=ar_2^2$$

Eliminando *d* de los datos de la progresión aritmética se obtiene $a=2b-c$.

Eliminando r_1 de los datos de la progresión geométrica 1 se obtiene $b=\sqrt{c(a+1)}$.

Eliminando r_1 de los datos de la progresión geométrica 1 se obtiene $b=\sqrt{a(c+2)}$.

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones anteriores se determinan *a*, *b* y *c*:

$$\left.\begin{array}{l} a=2b-c \\ b=\sqrt{c(a+1)} \\ b=\sqrt{a(c+2)} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Igualando } E_2 \text{ y } E_3]{\text{Sustituyendo } E_2 \text{ en } E_1} \left.\begin{array}{l} a=2\sqrt{c(a+1)}-c \\ \sqrt{c(a+1)}=\sqrt{a(c+2)} \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} a=2\sqrt{c(a+1)}-c \\ c=2a \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Sustitución}} a=2\sqrt{2a(a+1)}-2a \to \begin{cases} a=8 \\ b=12 \\ c=16 \end{cases}$$

119. En una cafetería, un vaso de limonada, tres bocadillos y siete bizcochos han costado 1 chelín y 2 peniques. Teniendo en cuenta que 1 chelín es 12 peniques, halla el precio de:

a) Un vaso de limonada, un bocadillo y un bizcocho.

b) Dos vasos de limonada, tres bocadillos y cinco bizcochos.

(Olimpiadas matemáticas. Fase Nacional)

Sean *x*, *y*, *z* los precios respectivos de un vaso de limonada, un bocadillo y un bizcocho, y *a*, *b*, son los precios pedidos. Se verifica que:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+7z=14 \\ x+4y+10z=17 \\ x+y+z=a \\ 2x+3y+5z=b \end{array}\right\}$$

Considerando las dos primeras ecuaciones del sistema, tomando como parámetro *z* y sustituyendo estos valores en las ecuaciones tercera y cuarta:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=14-7z \\ x+4y=17-10z \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x=5+2z \\ y=3-3z \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 5+2z+3-3z+z=a \\ 10+4z+9-9z+5z=b \end{array}\right\} \to a=8 \text{ y } b=19$$

MATEMÁTICAS EN TU VIDA

1. Explica por qué la demanda y la oferta no suben o bajan al mismo tiempo.

Si la demanda de un determinado producto sube, se realizan más compras del mismo, por lo que hay menor cantidad de ejemplares para la venta y, por tanto, la oferta disminuye.

De manera contraria, si la oferta aumenta, hay más ejemplares para la venta y, por tanto, la demanda disminuye.

2. El día del espectador los encargados del cine deciden poner las entradas a 4 €. Si las ecuaciones de oferta y demanda se mantienen, ¿crees que habrá un exceso de demanda o un exceso de oferta?

Como el precio disminuye, la demanda aumenta, y por ello, la oferta disminuye. Esto se refleja en las ecuaciones del enunciado:

$$D(P_x) = 1\,500 - 100P_x \xrightarrow{P_x=4} D(P_x) = 1\,100 \qquad O(P_x) = \frac{700(P_x - 1)}{3} \xrightarrow{P_x=4} O(P_x) = 700$$

3. Cuando el precio de un producto, por ejemplo, el pan, está intervenido, ¿se puede aplicar la ley de la oferta y la demanda?

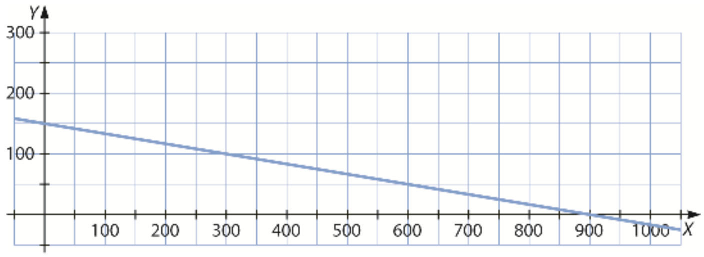
No, dado que en este caso el precio del producto no depende directamente ni de la oferta ni de la demanda, sino de otros factores.

4. Resuelve, de forma gráfica, el sistema que varía la ecuación de oferta para que el precio de mercado:

a) Ascienda a 6 €.

b) Baje a 5 €.

a)



b)