# Geometría analítica

6

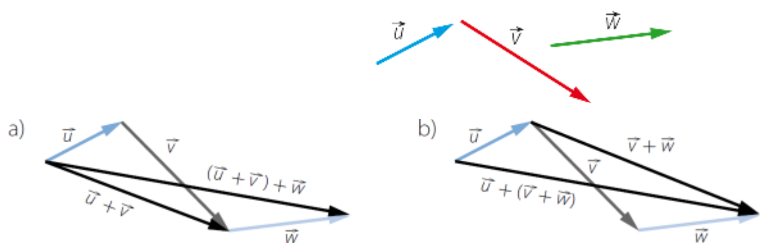
## ACTIVIDADES

1. Copia estos vectores y calcula gráficamente $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.


2. Realiza estas sumas.

a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

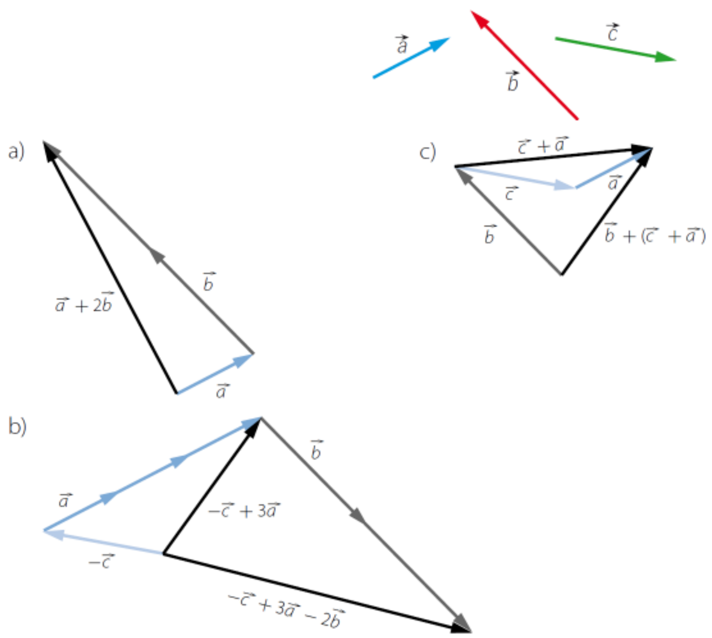



3. Copia los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, y realiza gráficamente las siguientes operaciones.

a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

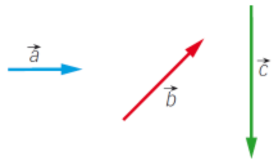
b) $-\vec{c} + 3\vec{a} - 2\vec{b}$

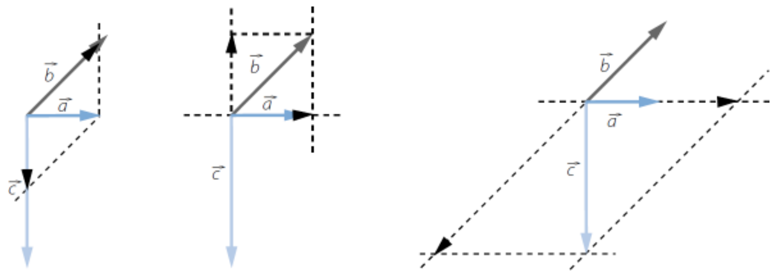
c) $\vec{b} + (\vec{c} + \vec{a})$



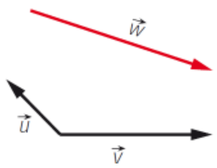
**4.** **Escribe el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.**

**Expresa $\vec{b}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{c}$, y también $\vec{c}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.**

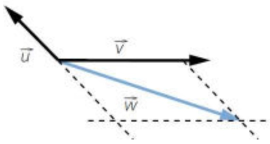



**5.** **Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base, y expresa el vector $\vec{w}$ en función de ellos.**




Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen distinta dirección, por lo que forman una base.

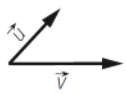



**6.** **Dada la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$:**

a) Calcula $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$.

b) Comprueba que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base.

c) Expresa $\vec{u}$ y $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.




a)

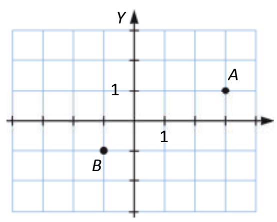

b) Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen distinta dirección, luego forman una base.

c) $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{2}$; $\vec{v} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{2}$

**7.** **Dibuja los puntos $A(3, 1)$ y $B(-1, -1)$ y calcula las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, y sus módulos.**

$\overrightarrow{AB} = (-1-3, -1-1) = (-4, -2)$ $\qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{BA} = (3-(-1), 1-(-1)) = (4, 2)$ $\qquad |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$



**8. Encuentra *x* para que estos pares de vectores sean paralelos.**

a) (3, 2) y (9, $x$)    b) (−1, 4) y ($x$, −2)

a) $\frac{9}{3}=\frac{x}{2}\rightarrow x=\frac{2\cdot 9}{3}=6$    b) $\frac{-1}{x}=\frac{4}{-2}\rightarrow x=\frac{-2\cdot(-1)}{4}=\frac{1}{2}$

**9. Dados los puntos $A(3, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(0, 2)$ y $D(-1, -2)$, halla estos vectores.**

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$    b) $2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$    c) $-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}$

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(-4,3)+(-1,-4)=(-5,-1)$

b) $2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2(-3,3)-(0,-4)=(-6,6)-(0,-4)=(-6,10)$

c) $-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}=-(1,0)+2(-4,-1)=(-1,0)+(-8,-2)=(-9,-2)$

**10. Dados $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(0,3)$, realiza las siguientes operaciones de vectores.**

a) $\vec{u}-3\vec{v}$    b) $5\vec{u}+\vec{v}$    c) $-\vec{u}+2\vec{v}$

a) $\vec{u}-3\vec{v}=(2,-1)-(0,-9)=(2,8)$

b) $5\vec{u}+\vec{v}=(10,-5)+(0,3)=(10,-2)$

c) $-\vec{u}+2\vec{v}=(-2,1)+(0,6)=(-2,7)$

**11. Dados $\vec{u}=(0,2)$, $\vec{v}=(1,-1)$ y $\vec{w}=(0,-1)$, calcula.**

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$    c) $\vec{w}\cdot\vec{v}$    e) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-2\vec{w})$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$    d) $\vec{u}\cdot\vec{w}$    f) $-2\vec{u}\cdot 3\vec{v}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(0,2)\cdot(1,-1)=-2$

b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(0,2)\cdot((1,-1)+(0,-1))=(0,2)\cdot(1,-2)=-4$

c) $\vec{w}\cdot\vec{v}=(0,-1)\cdot(1,-1)=1$

d) $\vec{u}\cdot\vec{w}=(0,2)\cdot(0,-1)=-2$

e) $\vec{u}\cdot(\vec{v}-2\vec{w})=(0,2)\cdot((1,-1)-(0,-2))=(0,2)\cdot(1,1)=2$

f) $-2\vec{u}\cdot 3\vec{v}=(0,-4)\cdot(3,-3)=12$

**12. Señala cuáles de los siguientes vectores son perpendiculares entre sí y cuáles no.**

$$\vec{u}=(-1,3) \qquad \vec{v}=(12,4) \qquad \vec{w}=\left(\frac{1}{3},-1\right)$$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-1\cdot 12+3\cdot 4=0$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=-1\cdot\frac{1}{3}+3\cdot(-1)=-\frac{10}{3}\neq 0$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=12\cdot\frac{1}{3}+4\cdot(-1)=0$

Son perpendiculares $\vec{u}$ y $\vec{w}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

**13. Halla el ángulo de los siguientes vectores.**

a) $\vec{a}=(2,-1)$ y $\vec{b}=(3,2)$    c) $\vec{a}=(-3,-1)$ y $\vec{b}=(2,3)$

b) $\vec{a}=(5,2)$ y $\vec{b}=(-1,1)$    d) $\vec{a}=(-1,5)$ y $\vec{b}=(4,-2)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{2\cdot 3+2\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{3^2+2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{65}} \to \alpha = 60{,}3^{\circ}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{-1\cdot 5+2\cdot 1}{\sqrt{5^2+2^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{-3}{\sqrt{58}} \to \alpha = 113{,}2^{\circ}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{-3\cdot 2+3\cdot(-1)}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+3^2}} = \dfrac{-9}{\sqrt{130}} \to \alpha = 217{,}9^{\circ}$

d) $\cos\alpha = \dfrac{-1\cdot 4+5\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+5^2}\sqrt{4^2+(-2)^2}} = \dfrac{-14}{\sqrt{520}} \to \alpha = 232{,}1^{\circ}$

**14. Encuentra tres vectores perpendiculares y otros tres paralelos a los siguientes vectores.**

a) $\vec{a} = (1, 1)$ b) $\vec{b} = (3, 2)$ c) $\vec{c} = (0, 1)$

Respuesta abierta.

a) $\vec{a} = (1, 1)$
Vectores paralelos: (2, 2), (3, 3) y (4, 4)
Vectores perpendiculares: (−1, 1), (−2, 2) y (−3, 3)

b) $\vec{b} = (3, 2)$
Vectores paralelos: (6, 4), (9, 6) y (12, 8)
Vectores perpendiculares: (2, −3), (4, −6) y (6, −9)

c) $\vec{c} = (0, 1)$
Vectores paralelos: (0, 2), (0, 3) y (0, 4)
Vectores perpendiculares: (1, 0), (2, 0) y (3, 0)

**15. Dados los puntos $A(-1, 3)$, $B(5, 1)$ y $C(0, 3)$, calcula la distancia del punto $C$ al punto medio de $A$ y $B$.**

Punto medio de $A$ y $B$: $M\left(\dfrac{-1+5}{2}, \dfrac{3+1}{2}\right) = (2, 2)$

$d(C, M) = |\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(2-0)^2+(2-3)^2} = \sqrt{5}$

**16. Halla los simétricos de los puntos $A(2, -5)$ y $B(-1, 3)$, respecto del punto $C(2, -1)$.**

$(2, -1) = \left(\dfrac{2+x}{2}, \dfrac{-5+y}{2}\right) \to x = 2,\ y = 3$

El simétrico respecto de $A$ es $(2, 3)$.

$(2, -1) = \left(\dfrac{-1+x}{2}, \dfrac{3+y}{2}\right) \to x = 5,\ y = -5$

El simétrico respecto de $B$ es $(5, -5)$.

**17. Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A(7, 3)$ y $B(2, 2)$.**

$\overrightarrow{AB} = (-5, -1)$

Ecuación vectorial:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \to (x, y) = (7, 3) + t(-5, -1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 7-5t \\ y = 3-t \end{array}\right\}$$

**18.** **Halla las ecuaciones paramétricas de la recta cuyo vector director es $\vec{v} = (-1, 0)$ y pasa por el punto $A(3, 2)$.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

**19.** **Calcula las ecuaciones vectorial y paramétricas de las rectas bisectrices de los cuadrantes.**

Bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(1, 1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array}\right\}$$

Bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

Ecuación vectorial:

$(x, y) = t(1, -1)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -t \end{array}\right\}$$

**20.** **Halla la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto medio de $A(3, 1)$ y $B(5, -3)$ y por el punto $C(0, 3)$.**

$$\left.\begin{array}{l} M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{1-3}{2}\right) = (4, -1) \\ \overrightarrow{CM} = (4, -4) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x = t \cdot 4 \\ y = 3 - t \cdot 4 \end{array}\right\}$$

**21.** **Halla la ecuación continua de la recta que pasa por $A(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $\vec{d} = (2, -1)$.**

**Averigua si el punto $P(3, 1)$ está en la recta.**

Calculamos la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{-1}$$

Comprobamos si el punto $P$ cumple las ecuaciones de la recta:

$$\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1-(-1)}{-1} = -2$$

Luego el punto $P$ no pertenece a la recta.

**22.** **Escribe la ecuación general de la recta que pasa por $A(0, -2)$ y $B(4, -1)$.**

$$\overrightarrow{AB} = (4, 1) \to \frac{x-0}{4} = \frac{y-(-2)}{1} \to \frac{x}{4} - (y+2) = 0 \to x - 4y - 8 = 0$$

**23.** **Dadas las siguientes ecuaciones paramétricas de una recta, determina.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \end{array}\right\}$$

a) La ecuación continua de la recta.

b) La ecuación general de la recta.

a) $\left.\begin{array}{l} x = 1-2t \\ y = -3+t \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x-1}{-2} \\ t = y+3 \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{x-1}{-2} = y+3$

b) $\dfrac{x-1}{-2} = y+3 \rightarrow -2y-6 = x-1 \rightarrow x+2y+5 = 0$

**24.** **Halla las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por $A(2, -3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (-2, 1)$.**

$m = \dfrac{d_2}{d_1} = -\dfrac{1}{2}$

Ecuación punto-pendiente: $y+3 = -\dfrac{1}{2}(x-2)$

$y = -\dfrac{1}{2}x + n \rightarrow -3 = -\dfrac{1}{2} \cdot 2 + n \rightarrow n = -2$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{1}{2}x - 2$

**25.** **Calcula la recta que pasa por el punto $A(2, 7)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60°. Explica cómo lo haces.**

Calculamos la pendiente: $tg\ 60° = m \rightarrow m = \sqrt{3}$

Hallamos la ecuación punto-pendiente: $y - 7 = \sqrt{3}(x-2)$

**26.** **Estudia la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.**

$$r: \frac{x}{3} = y - 5 \qquad s: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \end{cases}$$

Las ecuaciones generales de $r$ y $s$ son:

$r: x - 3y + 15 = 0$ $\qquad s: 3x + y - 6 = 0$

Como $\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{-3}{1}$, las rectas son secantes.

**27.** **Estudia la posición relativa de dos rectas que tienen vectores directores no proporcionales. ¿Qué condición han de verificar para que las rectas sean perpendiculares?**

Si los vectores directores no son proporcionales, las rectas son secantes.

Sea $\vec{d} = (d_1, d_2)$ el vector director de la recta $r$, y sea $\vec{c} = (c_1, c_2)$ el vector director de la recta $s$.

Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de los vectores es cero.

$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 0 \rightarrow d_1 \cdot c_1 = -d_2 \cdot c_2 \rightarrow \vec{c} = (-d_2, d_1)$

**28.** **Halla la distancia que existe entre el punto $P(2, -1)$ y la recta $r$, cuya ecuación es la siguiente:**

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}\ u$$

**29.** **Calcula la distancia que separa la siguiente recta del origen de coordenadas.**

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$$

Expresamos la recta en forma general:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\} \rightarrow -x + 3 = \frac{y-2}{2} \rightarrow -2x - y + 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}\ u$$

**30.** **Halla la distancia entre estas dos rectas paralelas.**

$$r: 5x - 2y + 2 = 0 \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5}$$

Tomamos el punto $P(0, 1)$ que pertenece a la recta $r$.

La ecuación general de la recta $s$ es $5x - 2y + 6 = 0$.

$$d(P, s) = \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29}$$

**31.** **Calcula el ángulo que forman estas dos rectas al cortarse.**

$$r: y = x - 3 \qquad s: \frac{x-1}{-2} = y + 3$$

$r: -x + y + 3 = 0 \qquad s: x + 2y + 5 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{|-1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \alpha = 71{,}57^\circ$$

## SABER HACER

**32.** **Determina si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base y halla las coordenadas del vector $\vec{w}$ especto de ella en cada caso.**

a) $\vec{u} = (-1, 0), \vec{v} = (2, -3)$ y $\vec{w} = (3, -3)$

b) $\vec{u} = (3, -3), \vec{v} = (1, -4)$ y $\vec{w} = (5, -2)$

a) Forman una base, pues $\frac{-1}{2} \neq \frac{0}{-3}$.

$$(3, -3) = a(-1, 0) + b(2, -3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = -a + 2b \\ -3 = -3b \end{array}\right\} \rightarrow b = 1,\ a = -1 \rightarrow \vec{w} = -\vec{u} + \vec{v}$$

b) Forman una base, pues $\frac{3}{1} \neq \frac{-3}{-4}$.

$(5,-2) = a(3,-3) + b(1,-4)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 3a + b \\ -2 = -3a - 4b \end{array}\right\} \to b = -1,\ a = 2 \to \vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

**33. Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equivalentes, con $A$ (2, 1) y $B$ (0, −2), calcula el extremo desconocido en cada caso.**

a) $C(-5, 7)$
b) $D(-5, 7)$
c) $C(0, -2)$
d) $D(0, -2)$
e) $C(7, -5)$
f) $D(7, -5)$
g) $C(0, 0)$
h) $D(0, 0)$

$\overrightarrow{AB} = (-2, -3)$

a) $\overrightarrow{CD} = (a+5, b-7) = (-2,-3) \to D(-7, 4)$

b) $\overrightarrow{CD} = (-5-a, 7-b) = (-2,-3) \to C(-3, 10)$

c) $\overrightarrow{CD} = (a, b+2) = (-2,-3) \to D(-2,-5)$

d) $\overrightarrow{CD} = (-a, -2-b) = (-2,-3) \to C(2, 1)$

e) $\overrightarrow{CD} = (a-7, b+5) = (-2,-3) \to D(5,-8)$

f) $\overrightarrow{CD} = (7-a, -5-b) = (-2,-3) \to C(9,-2)$

g) $\overrightarrow{CD} = (a, b) = (-2,-3) \to D(-2,-3)$

h) $\overrightarrow{CD} = (-a, -b) = (-2,-3) \to C(2, 3)$

**34. Halla las coordenadas de dos vectores sabiendo que su suma y su diferencia son:**

**$\vec{u} + \vec{v} = (2, 3)$ $\qquad$ $\vec{u} - \vec{v} = (-1, 4)$**

$\vec{u} = (a, b)$ $\qquad$ $\vec{v} = (c, d)$

$\vec{u} + \vec{v} = (a+c, b+d) = (2, 3)$ $\qquad$ $\vec{u} - \vec{v} = (a-c, b-d) = (-1, 4)$

$$\left.\begin{array}{l} a + c = 2 \\ a - c = -1 \end{array}\right\} \to a = \frac{1}{2},\ c = \frac{3}{2} \qquad \left.\begin{array}{l} b + d = 3 \\ b - d = 4 \end{array}\right\} \to b = \frac{7}{2},\ d = -\frac{1}{2}$$

**35. Halla los vectores que se piden a continuación.**

a) Perpendicular a $\vec{u} = (-2, 1)$ y de módulo 2.
b) Perpendicular a $\vec{u} = (3, 1)$ y de módulo 1.
c) Perpendicular a $\vec{u} = (-3, 4)$ y de módulo 5.
d) Perpendicular a $\vec{u} = (1, 1)$ y de módulo 1.

a) Un vector perpendicular a $\vec{u} = (-1, 1)$ es $\vec{v} = (1, 2)$.

Para obtener el vector de módulo 2, multiplicamos por 2 y dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \frac{2(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

b) Un vector perpendicular a $\vec{u}=(-3,1)$ es $\vec{v}=(-1,3)$.

Para obtener el vector de módulo 1, dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{(-1,3)}{\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

c) Un vector perpendicular a $\vec{u}=(-3,4)$ es $\vec{v}=(4,3)$.

Para obtener el vector de módulo 5, multiplicamos por 5 y dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{5(4,3)}{\sqrt{4^2+3^2}}=(4,3)$$

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}=(1,1)$ es $\vec{v}=(-1,1)$.

Para obtener el vector de módulo 1, dividimos entre el módulo del vector $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

**36.** **Dibuja el cuadrilátero *ABCD* en unos ejes de coordenadas y halla su perímetro, teniendo en cuenta que las coordenadas de sus vértices son *A*(−4, −3), *B*(2, −3), *C*(2, 1) y *D*(−2, 2).**

$|\overrightarrow{AB}|=|(6,0)|=6$ $\quad|\overrightarrow{BC}|=|(0,4)|=4$ $\quad|\overrightarrow{CD}|=|(-4,1)|=\sqrt{17}$ $\quad|\overrightarrow{DA}|=|(-2,-5)|=\sqrt{29}$

El perímetro del cuadrilátero es $P=10+\sqrt{17}+\sqrt{29}$.

**37.** **Divide el segmento *AB* en tres partes iguales.**

a) $A(-2,3)$ y $B(0,-1)$

b) $A(1,1)$ y $B(3,6)$

a) $\overrightarrow{AB}=(2,-4)$

$$P_1=A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(-2,3)+\frac{1}{3}(2,-4)=\left(-\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$$

$$P_2=A+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(-2,3)+\frac{2}{3}(2,-4)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

b) $\overrightarrow{AB}=(2,5)$

$$P_1=A+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(1,1)+\frac{1}{3}(2,5)=\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3}\right)$$

$$P_2=A+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=(1,1)+\frac{2}{3}(2,5)=\left(\frac{7}{3},\frac{13}{3}\right)$$

**38.** **Comprueba si los puntos *A*, *B* y *C* están alineados.**

a) $A(-2,0)$, $B(1,-1)$ y $C(-5,-1)$

b) $A(0,0)$, $B(3,-1)$ y $C(2,-2)$

a) $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(-3,-1)$

No están alineados, pues $\frac{3}{-3}\neq\frac{-1}{-1}$.

b) $\overrightarrow{AB}=(3,-1)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(2,-2)$

No están alineados, pues $\frac{3}{2}\neq\frac{-1}{-2}$.

**39.** **Halla la ecuación de la recta que pasa por *O*(0, 0):**

a) Y pasa también por el punto $A(-5,2)$.

b) Y tiene pendiente $m=-2$.

a) El vector director es $\vec{d}=(-5,2)$ y pasa por el punto *O*.

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x=-5t \\ y=2t \end{array}\right\}$

b) Ecuación punto-pendiente $\rightarrow$ $y=-2x$

**40.** **Determina la ecuación de la recta paralela a $r: 3x - y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(0, -4)$.**

El vector director es $\vec{d} = (1, 3)$.

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -4 + 3t \end{array}\right\}$

**41.** **Halla la recta $s$ paralela a $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{4}$ que está a 2 unidades de distancia.**

La ecuación de la recta $s$ es $4x - 3y + C = 0$.

Un punto de la recta $r$ es $P(1, 1)$.

$$d(P, s) = \frac{|4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|1 + C|}{5} = 2 \rightarrow C_1 = 9,\ C_2 = -11$$

**42.** **Determina la ecuación de la recta perpendicular a $r: 3x - y - 3 = 0$ que pasa por el punto $P(0, -4)$.**

El vector perpendicular al vector director de $r$ es $(3, -1)$.

Ecuación en forma continua $\rightarrow$ $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y+4}{-1}$

**43.** **Halla la ecuación de la recta que pasa por $P(0, 1)$ y forma un ángulo de 45° con $r: x + y - 1 = 0$.**

Ecuación punto-pendiente $\rightarrow$ $y - 1 = mx$

Ecuación general $\rightarrow$ $mx - y + 1 = 0$

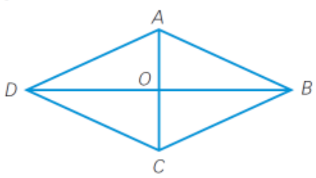
$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|m \cdot 2 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{5}}$$

$$(2m - 1)^2 = \frac{5}{2}(m^2 + 1) \rightarrow 3m^2 - 8m - 3 = 0 \rightarrow m_1 = 3,\ m_2 = -\frac{1}{3}$$

Hay dos rectas: $s_1: y - 1 = 3x$ $\qquad$ $s_2: y - 1 = -\dfrac{1}{3}x$

## ACTIVIDADES FINALES

**44.** **Observa la figura y realiza las operaciones indicadas.**




a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
b) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$
d) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$
e) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$
f) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC}$
g) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
h) $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$
i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD}$

d) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

e) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{DC}$

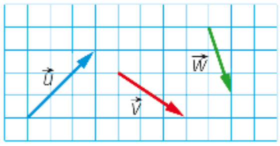
f) $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$

g) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$

h) $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

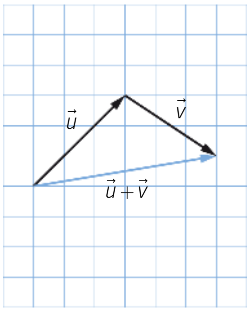
i) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD}$

**45.** **Realiza las siguientes operaciones.**

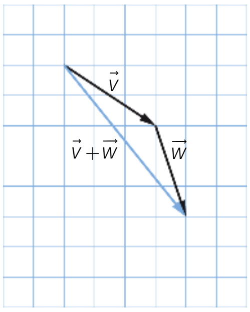



a) $\vec{u} + \vec{v}$
b) $\vec{v} + \vec{w}$
c) $\vec{u} + \vec{w}$
d) $\vec{u} - \vec{v}$
e) $\vec{v} - \vec{w}$
f) $\vec{u} - \vec{w}$
g) $2\vec{u} - \vec{v}$
h) $-\vec{v} + 2\vec{w}$
i) $-\vec{u} - 2\vec{w}$

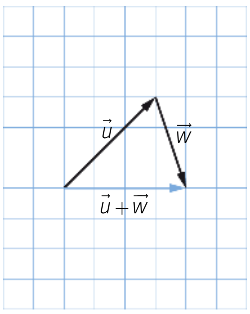
a)



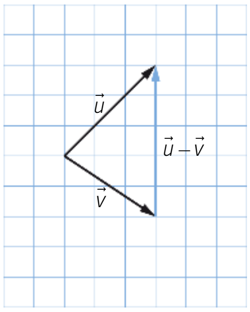

b)



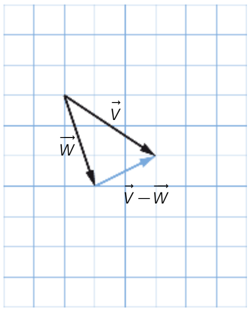

c)



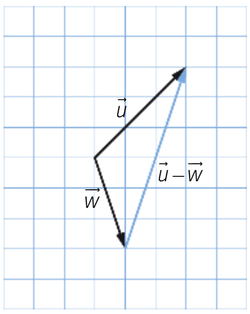

d)



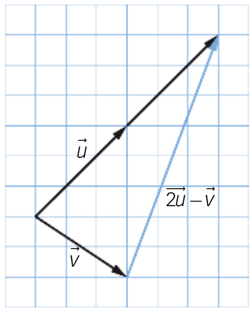

e)



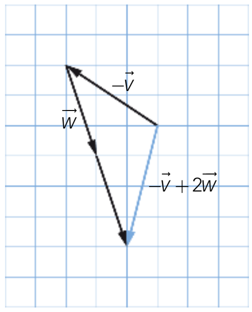

f)



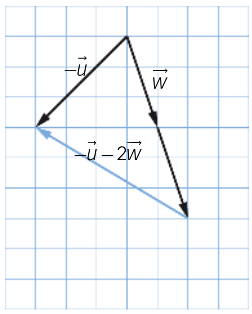

g)



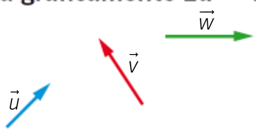

h)

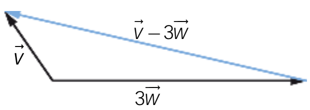


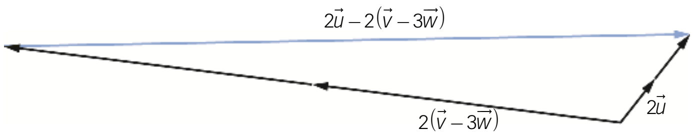

i)



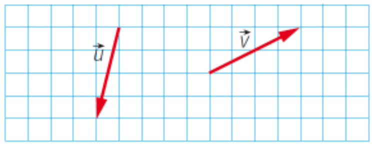

**46.** **Dados los siguientes vectores, calcula gráficamente $2\vec{u} - 2(\vec{v} - 3\vec{w})$.**



**47.** **Comprueba que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura forman una base.**

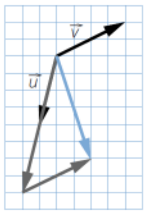



**Dibuja los vectores con estas coordenadas en esa base.**

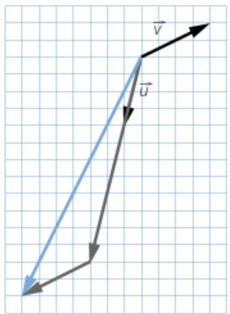
a) (2, 1) b) (3, −1) c) (−2, 3)

Como los vectores tienen distinta dirección, forman una base.

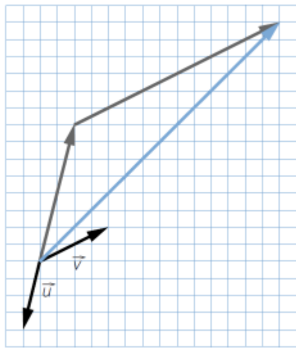
a)




b)




c)




**48.** **Comprueba si los vectores $\vec{u} = (-1, -3)$ y $\vec{v} = (4, 2)$ forman una base y, si es así, halla las coordenadas de los siguientes vectores respecto de ella.**

a) $\vec{a} = (2, 1)$ b) $\vec{b} = (3, -1)$ c) $\vec{c} = (-2, 3)$

Forman una base, pues $\frac{-1}{4} \neq \frac{-3}{2}$.

a) $(2, 1) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = -a + 4b \\ 1 = -3a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = 0,\ b = \frac{1}{2}$$

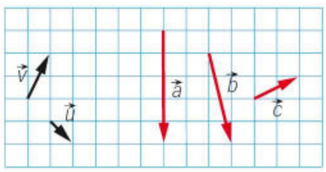
b) $(3, -1) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = -a + 4b \\ -1 = -3a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 1$$

c) $(-2, 3) = a(-1, -3) + b(4, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} -2 = -a + 4b \\ 3 = -3a + 2b \end{array}\right\} \rightarrow a = -\frac{8}{5},\ b = -\frac{9}{10}$$

**49.** **Escribe los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**




**Escribe las coordenadas de cada vector respecto de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.**

$\vec{u}=(1,-1)$ $\vec{v}=(1,2)$ $\vec{a}=(0,-5)$ $\vec{b}=(1,-4)$ $\vec{c}=(2,1)$

$$(0,-5)=a(1,-1)+b(1,2)\rightarrow \left.\begin{matrix} 0=a+b \\ -5=-a+2b \end{matrix}\right\}\rightarrow a=\frac{5}{3},\ b=-\frac{5}{3}$$

$$(1,-4)=a(1,2)+b(1,-1)\rightarrow \left.\begin{matrix} 1=a+b \\ -4=-a+2b \end{matrix}\right\}\rightarrow a=2,\ b=-1$$

$$(2,1)=a(1,2)+b(1,-1)\rightarrow \left.\begin{matrix} 2=a+b \\ 1=-a+2b \end{matrix}\right\}\rightarrow a=1,\ b=1$$

**50. Expresa el vector $\vec{u}(7, 6)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}=(6, -3)$ y $\vec{b}=(-1, 3)$.**

$$(7,6)=a(6,-3)+b(-1,3)\rightarrow \left.\begin{matrix} 7=6a-b \\ 6=-3a+3b \end{matrix}\right\}\rightarrow a=\frac{27}{15},\ b=\frac{19}{5}$$

**51. Halla el módulo de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}$ y $2\vec{b}-\vec{c}$, dados $\vec{a}=(-3, 4)$, $\vec{b}=(-5, -12)$ y $\vec{c}=(3, -1)$.**

$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$

$|\vec{c}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

$\vec{a}+\vec{b}=(-8,-8)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-8)^2+(-8)^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

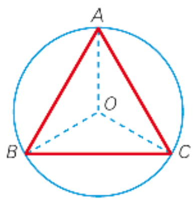
$2\vec{b}-\vec{c}=(-10,-24)+(-3,1)=(-13,-23)$

$|2\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{(-13)^2+(-23)^2}=\sqrt{698}$

**52. Calcula las coordenadas del punto $B$ para que los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{AB}$ sean equivalentes, sabiendo que $\vec{u}=(2, -3)$ y $A(-1, 2)$.**

$\overrightarrow{AB}=(x+1, y-2)=(2,-3)\rightarrow B=(1,-1)$

**53. El siguiente triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio 5 cm.**




**Calcula los siguientes productos escalares.**

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$

a) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\alpha=25\cdot\cos(-120^\circ)=-12{,}5$

b) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot\cos\alpha=25\cdot\cos 120^\circ=-12{,}5$

**54.** **Considera que *A*, *B*, *C* y *D* son los vértices de un cuadrado de lado 1 cm. Calcula los siguientes productos escalares.**

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$

d) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$

Tomamos el punto *A* como origen y obtenemos las siguientes coordenadas: $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1,0), \overrightarrow{BC}=(0,1)$

$(1,0)\cdot(0,1)=0$

b) $\overrightarrow{AC}=(1,1), \overrightarrow{DB}=(1,-1)$

$(1,1)\cdot(1,-1)=1-1=0$

c) $\overrightarrow{AD}=(0,1), \overrightarrow{CB}=(0,-1)$

$(0,1)\cdot(0,-1)=-1$

d) $\overrightarrow{AC}=(1,1), \overrightarrow{CB}=(0,-1)$

$(1,1)\cdot(0,-1)=-1$

**55.** **Si $\vec{u}=(3,1)$ y $\vec{v}=(2,-1)$, calcula.**

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

b) $\vec{u}\cdot 2\vec{v}$

c) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot\vec{v}$

d) $\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,1)\cdot(2,-1)=6-1=5$

b) $\vec{u}\cdot 2\vec{v}=(3,1)\cdot(4,-2)=12-2=10$

c) $(2\vec{u}+3\vec{v})\cdot\vec{v}=((6,2)+(6,-3))\cdot(2,-1)=(12,-1)\cdot(2,-1)=24+1=25$

d) $\vec{u}\cdot(\vec{u}-\vec{v})=(3,1)\cdot((3,1)+(-2,1))=(3,1)\cdot(1,2)=3+2=5$

**56.** **Dados los vectores $\vec{a}=(2,-1)$, $\vec{b}=(-3,1)$ y $\vec{c}=(4,3)$, calcula.**

a) $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot\vec{c}$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

a) $((2,-1)-2(-3,1))\cdot(4,3)=(8,-3)\cdot(4,3)=23$

b) $(2,-1)\cdot(-3,1)-(-3,1)\cdot(4,3)=-7-(-9)=2$

**57.** **Calcula el valor de *t* para que $\vec{u}\cdot\vec{v}=7$, si $\vec{u}=(-1,2)$ y $\vec{v}=(3,t)$. Halla el módulo de los dos vectores.**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=7$

$(-1,2)\cdot(3,t)=7\rightarrow -3+2t=7\rightarrow t=5$

$|\vec{u}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$

$|\vec{v}|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

**58.** **Encuentra un vector perpendicular a $\vec{u}=(-3,2)$ con módulo 2.**

Un vector perpendicular a $\vec{u}$ es $\vec{v}=(2,3)$. Para que tenga módulo 2, multiplicamos por 2 y dividimos entre el módulo de $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\frac{2(2,3)}{\sqrt{13}}=\left(\frac{4}{\sqrt{13}},\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

**59.** **Dado el vector $\vec{p} = (6, 2)$, obtén un vector $\vec{q}$ con módulo $\sqrt{89}$ y tal que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.**

$\vec{p} \cdot \vec{q} = (6, 2) \cdot (a, b) = 6a + 2b = 14 \to b = 7 - 3a$

$|\vec{q}| = \sqrt{a^2 + (7-3a)^2} = \sqrt{89} \to 10a^2 - 42a - 40 = 0 \to \begin{cases} a_1 = -\dfrac{4}{5} \\ a_2 = 5 \end{cases}$

Si $a = -\dfrac{4}{5} \to b = \dfrac{47}{5}$

Si $a = 5 \to b = -8$

**60.** **Calcula el valor de $k$ para que los vectores sean perpendiculares.**

a) $\vec{u} = (2, k), \vec{v} = (1, -6)$

b) $\vec{u} = \left(-\dfrac{2}{3}, k\right), \vec{v} = (5, -1)$

c) $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}\right), \vec{v} = (k, -1)$

d) $\vec{u} = (2, -3), \vec{v} = (1, k)$

a) $(2, k) \cdot (1, -6) = 2 - 6k = 0 \to k = \dfrac{1}{3}$

b) $\left(-\dfrac{2}{3}, k\right) \cdot (5, -1) = -\dfrac{10}{3} - k = 0 \to k = -\dfrac{10}{3}$

c) $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{5}\right) \cdot (k, -1) = \dfrac{1}{3}k - \dfrac{2}{5} = 0 \to k = \dfrac{6}{5}$

d) $(2, -3) \cdot (1, k) = 2 - 3k = 0 \to k = \dfrac{2}{3}$

**61.** **Calcula $m$ para que $\vec{v} = (7, -2)$ y $\vec{w} = (m, 6)$:**

a) Sean perpendiculares.

b) Sean paralelos.

c) Tengan el mismo módulo.

a) $(7, -2) \cdot (m, 6) = 7m - 12 \to m = \dfrac{12}{7}$

b) $\dfrac{7}{m} = \dfrac{-2}{6} \to m = -21$

c) $|\vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$

$|\vec{w}| = \sqrt{m^2 + 6^2}$

$53 = m^2 + 36 \to m = \sqrt{17}$

**62.** **Dados $\vec{a} = (6, -2)$ y $\vec{b} = (16, 12)$, calcula el valor de $m$ para que los vectores $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares. ¿Hay una solución única?**

$\vec{u} = m(6, -2) + (16, 12) = (16 + 6m, 12 - 2m)$

$\vec{v} = m(6, -2) - (16, 12) = (-16 + 6m, -12 - 2m)$

Para que los vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero.

$(16 + 6m, 12 - 2m) \cdot (-16 + 6m, -12 - 2m) = 36m^2 - 256 + 4m^2 - 144 = 0$

$\to m = \pm\sqrt{10}$

La solución no es única.

**63. Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de vectores.**

a) $\vec{a} = (0, -2)$ y $\vec{b} = (-4, -3)$

b) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}, 5\right)$ y $\vec{b} = (3, -1)$

c) $\vec{a} = (-4, -3)$ y $\vec{b} = (1, 1)$

d) $\vec{a} = \left(1, -\sqrt{3}\right)$ y $\vec{b} = \left(1, \sqrt{3}\right)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{(0,-2)\cdot(-4,-3)}{2\cdot 5} = \dfrac{3}{5} \to \alpha = 306{,}87^\circ$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\left(\frac{1}{3}, 5\right)\cdot(3,-1)}{\sqrt{\frac{226}{9}}\sqrt{10}} = \dfrac{-12}{\sqrt{2260}} \to \alpha = 255{,}38^\circ$

c) $\cos\alpha = \dfrac{(-4,-3)\cdot(1,1)}{5\sqrt{2}} = \dfrac{-7}{5\sqrt{2}} \to \alpha = 188{,}13^\circ$

d) $\cos\alpha = \dfrac{\left(1,-\sqrt{3}\right)\cdot\left(1,\sqrt{3}\right)}{2\cdot 2} = -\dfrac{1}{2} \to \alpha = 120^\circ$

**64. Halla el valor de $k$ para que los vectores $\vec{a} = (1, k)$ y $\vec{b} = (2, -3)$ formen un ángulo de 120°.**

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2} = \frac{2-3k}{\sqrt{1+k^2}\sqrt{13}} \to k = \frac{24+13\sqrt{3}}{23}$$

**65. Encuentra un vector $\vec{a}$ que forme un ángulo de 30° con $\vec{b} = (3, -4)$ y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}\cdot|\vec{b}|$.**

$$\cos 30^\circ = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \to \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a-4b}{5\sqrt{3}+5} \to 15+5\sqrt{3} = 6a-8b$$

$$\sqrt{a^2+b^2} = 5\sqrt{3} \to a^2+b^2 = 75$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 6a-8b = 15+5\sqrt{3} \\ a^2+b^2 = 75 \end{array}\right\} \xrightarrow{a=\frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6}} \left(\frac{15+5\sqrt{3}+8b}{6}\right)^2 + b^2 = 75$$

$$50b^2 + 40\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)b + 75\sqrt{3} - 1\,200 = 0 \to b = -\frac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{5} \pm \sqrt{\frac{1\,296-27\sqrt{3}}{50}}$$

**66. Determina si el triángulo de vértices $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ y $C(8, 32)$ es rectángulo.**

Calculamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB} = (8, 6)$, $\overrightarrow{BC} = (-12, 16)$ y $\overrightarrow{AC} = (-4, 22)$

Hallamos los módulos de los vectores:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+36} = 10\ u$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20\ u$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+484} = \sqrt{500}\ u$

Si el triángulo es rectángulo, debe verificar el teorema de Pitágoras.

$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$

$10^2 + 20^2 = 500$

Luego el triángulo es rectángulo.

**67.** **Tres de los vértices de un paralelogramo son $A(2,1)$, $B(6, -1)$ y $C(7, 1)$. ¿Cuáles son las posibles coordenadas del otro vértice?**

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (4, -2) = (7-a, 1-b) \rightarrow D(3, 3)$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} \rightarrow (5, 0) = (6-a, -1-b) \rightarrow D(1, -1)$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \rightarrow (5, 0) = (a-6, b+1) \rightarrow D(11, -1)$

**68.** **Dados los vectores $\vec{a} = (1, 5)$ y $\vec{b} = (-4, -3)$, calcula.**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{b} \cdot \vec{a}$

b) $|\vec{a}|$ y $|\vec{b}|$

c) El ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

d) El valor de $k$ para que el vector $(3, k)$ sea perpendicular al vector $\vec{a}$.

e) El valor de $k$ para que el vector $(k, -1)$ sea paralelo al vector $\vec{b}$.

f) Un vector perpendicular al vector $\vec{b}$.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = (1, 5) \cdot (-4, -3) = -19$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{26}$ $\quad$ $|\vec{b}| = 5$

c) $\cos \alpha = \dfrac{-19}{5\sqrt{26}} \rightarrow \alpha = 138{,}18^\circ$

d) $(3, k) \cdot (1, 5) = 3 + 5k = 0 \rightarrow k = -\dfrac{3}{5}$

e) $\dfrac{k}{-4} = \dfrac{-1}{-3} \rightarrow k = -\dfrac{4}{3}$

f) Un vector perpendicular a $\vec{b}$ es, por ejemplo, $\vec{c} = (3, -4)$.

**69.** **¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$?**

**Con este resultado, demuestra que si un paralelogramo tiene las diagonales perpendiculares, solo puede ser un cuadrado o un rombo.**

$\vec{u} = (a, b) \quad \vec{v} = (c, d)$

$(a + c, b + d) \cdot (a - c, b - d) = 0 \rightarrow a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0 \rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
$\rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los lados de un paralelogramo, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales.
Por tanto, si las diagonales son perpendiculares, los módulos miden lo mismo, por lo que solo puede ser un cuadrado o un rombo.

**70.** **Calcula el perímetro de un triángulo cuyos vértices están situados en los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ y $C(-1, 3)$.**

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$:

$\overrightarrow{AB} = (2, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-4, 1)$ y $\overrightarrow{CA} = (2, -1)$

Hallamos el módulo de los vectores:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

El perímetro mide:

$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8{,}36$ u

**71.** **Demuestra que el cuadrilátero formado por los puntos *A*(2, −2), *B*(5, 3), *C*(0, 6) y *D*(−3, 1) es un cuadrado.**

Los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ son paralelos:

$\overrightarrow{AB}=(3,5)=\overrightarrow{DC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC}=(-5,3)=\overrightarrow{AD}$

Además, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son perpendiculares:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(3,5)\cdot(-5,3)=0$

Como todos los lados son iguales:

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{34}$

Entonces es un cuadrado.

**72.** **Demuestra que el triángulo de vértices *A*(3, 1), *B*(9, −1) y *C*(5, −5) es isósceles. ¿Es también equilátero? ¿Cuáles son sus lados iguales? Calcula su área.**

Hallamos los vectores formados por los vértices del triángulo:

$\overrightarrow{AB}=(6,-2)$, $\overrightarrow{BC}=(-4,-4)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,-6)$

Calculamos los módulos de los vectores:

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}$ u

$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}$ u

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$ u

Como el triángulo tiene dos lados iguales, *AB* y *AC*, es un triángulo isósceles.

Para hallar el área calculamos la altura, *h*, sobre el lado *BC* aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h=\sqrt{(\sqrt{40})^2-\left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2}=\sqrt{40-8}=\sqrt{32}\text{ u}$$

$$A=\frac{B\cdot h}{2}=\frac{\sqrt{32}\cdot\sqrt{32}}{2}=16\text{ u}^2$$

**73.** **Halla el punto medio de los segmentos cuyos extremos aparecen a continuación.**

a) *A*(3, 5) y *B*(9, 11)

b) *A*(−3, 1) y *B*(7, −4)

c) *A*(4, 5) y *B*(7, 1)

d) *A*(−6, −1) y *B*(−9, −3)

Llamamos *M* al punto medio de *A* y *B*.

a) $M=\left(\frac{3+9}{2},\frac{5+11}{2}\right)=(6,8)$

b) $M=\left(\frac{-3+7}{2},\frac{1-4}{2}\right)=\left(2,-\frac{3}{2}\right)$

c) $M=\left(\frac{4+7}{2},\frac{5+1}{2}\right)=\left(\frac{11}{2},3\right)$

d) $M=\left(\frac{-6-9}{2},\frac{-1-3}{2}\right)=\left(-\frac{15}{2},-2\right)$

**74. Si el punto medio del segmento $AB$ es $M(3, 5)$, dado $A(9, 7)$, calcula el punto $B$. Luego obtén $A$ con $M(-1, 5)$ y $B(4, -9)$.**

Sea $B(x, y)$.

$$(3, 5) = \left(\frac{9+x}{2}, \frac{7+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 = \dfrac{9+x}{2} \\ 5 = \dfrac{7+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 3 \end{array}\right\}$$

Sea $A(x, y)$.

$$(-1, 5) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} -1 = \dfrac{4+x}{2} \\ 5 = \dfrac{-9+y}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -6 \\ y = 19 \end{array}\right\}$$

**75. Dos vértices consecutivos de un cuadrado son $A(-2, 3)$ y $B(1, -2)$. Si sus dos diagonales se cortan en el punto $O(2, 2)$, calcula los dos vértices que faltan.**

$\overrightarrow{AO} = (4, -1)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BO} = (1, 4)$

$C = A + 2\overrightarrow{AO} = (-2, 3) + (8, -2) = (6, 1)$

$D = B + \overrightarrow{2BO} = (1, -2) + (2, 8) = (3, 6)$

**76. Tres vértices consecutivos de un hexágono regular tienen como coordenadas $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $\left(3, \sqrt{3}\right)$. Halla los otros tres vértices.**

Sabemos que $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ y $C\left(3, \sqrt{3}\right)$.

Calculamos el vértice $D$, con una traslación con origen en $C$ y vector guía $\left(-1, \sqrt{3}\right)$:

$D = \left(3, \sqrt{3}\right) + \left(-1, \sqrt{3}\right) = \left(2, 2\sqrt{3}\right)$

Hallamos el vértice $E$, con una traslación con origen en $D$ y vector guía $(-2, 0)$:

$E = \left(2, 2\sqrt{3}\right) + (-2, 0) = \left(0, 2\sqrt{3}\right)$

Determinamos el vértice $F$, con una traslación con origen en $E$ y vector guía $\left(-1, -\sqrt{3}\right)$:

$F = \left(0, 2\sqrt{3}\right) + \left(-1, -\sqrt{3}\right) = \left(-1, \sqrt{3}\right)$

**77. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(5, -1)$ y $B(17, 8)$ en tres partes iguales.**

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (12, 9)$

El primer punto estará situado a $\frac{1}{3}$ de distancia de uno de los extremos del segmento, y el segundo, a $\frac{2}{3}$ de distancia.

$$P_1 = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{1}{3}(12, 9) = (9, 2)$$

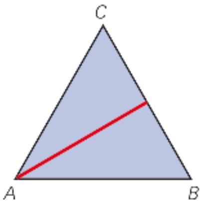
$$P_2 = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{2}{3}(12, 9) = (13, 5)$$

**78. Determina el valor de $k$ para que los puntos $A(2, -3)$, $B(9, k)$ y $C(6, -1)$ estén alineados.**

$\overrightarrow{AB} = (7, k+3)$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = (4, 2)$

$$\frac{7}{4} = \frac{k+3}{2} \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

**79.** **Halla la longitud de la mediana que parte de *A* en el triángulo de vértices *A*(−1, 4), *B*(6, 5) y *C*(10, −3). ¿En el caso de este triángulo coincide la mediana con la altura? Justifica tu respuesta.**




Calculamos el punto medio, $M$, del segmento $CB$:

$M = \left(\frac{6+10}{2}, \frac{5-3}{2}\right) = (8, 1)$

Para hallar la longitud de la mediana, determinamos el módulo del vector $\overrightarrow{AM}$:

$\overrightarrow{AM} = (9, -3) \qquad |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{81+9} = \sqrt{90}$

Para que la mediana, $AM$, coincida con la altura sobre el lado $CB$, los lados $AC$ y $AB$ deben ser iguales.

$\overrightarrow{AC} = (11, -7) \qquad \overrightarrow{AB} = (7, 1)$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{121+49} = \sqrt{170} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

Luego la mediana no coincide con la altura.

**80.** **Dos vértices de un triángulo equilátero son *A*(3, 1) y *B*(5, −2). Calcula cuáles pueden ser las coordenadas del vértice que falta.**

$\overrightarrow{AB} = (2, -3)$

La recta que pasa por el tercer vértice, $C(c_x, c_y)$, y por el punto medio de $A$ y $B$ y tiene como vector director $\vec{d} = (3, 2)$. El punto medio del vector $\overrightarrow{AB}$ es $M\left(4, -\frac{1}{2}\right)$. Así, esta recta tiene como ecuación:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+\frac{1}{2}}{2} \rightarrow 4x - 6y - 19 = 0$$

Además, el módulo de $\overrightarrow{AC}$ es el mismo que el módulo de $\overrightarrow{AB}$.

$$\sqrt{13} = \sqrt{(c_x-3)^2 + (c_y-1)^2} \rightarrow c_x^{\,2} - 6_x + c_y^{\,2} - 2c_y - 3 = 0$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} c_x = \dfrac{19+6c_y}{4} \\ c_x^{\,2} - 6c_x + c_y^{\,2} - 2c_y - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} c_x = 4 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ c_y = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{3} \\ c_x = 4 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ c_y = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \end{array}\right\}$$ → Serían las posibles coordenadas del punto $C$.

**81.** **Dados los puntos *A*(3, 0) y *B*(−3, 0), obtén un punto *C* sobre el eje de ordenadas, de modo que el triángulo que describan sea equilátero. ¿Hay una solución única? Halla el área de los triángulos que resulten.**

Los vectores formados por los vértices deben tener la misma longitud.

Si $C(0, c)$:

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9+c^2} \qquad |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9+c^2} \qquad |\overrightarrow{AB}| = 6$

$6 = \sqrt{9+c^2} \rightarrow c = \sqrt{27}$

Los puntos pedidos son: $C_1\left(0, 3\sqrt{3}\right)$ y $C_2\left(0, -3\sqrt{3}\right)$

Calculamos el área de los triángulos:

$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ \text{u}^2$

**82.** **Dos vértices consecutivos de un cuadrado son $A(2, -4)$ y $B(8, -2)$. Calcula el resto de vértices sabiendo que uno de los vértices que faltan está sobre el eje de ordenadas.**

$\overrightarrow{AB}=(6,2)$ $\qquad$ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{40}$

El vértice $D$ está en el eje $Y$: $D(0,y)$

$\overrightarrow{AD}=(-2,y+4)$ $\qquad$ $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-2)^2+(y+4)^2}=\sqrt{40}\rightarrow y^2+8y-20=0\rightarrow y=2$

$C=D+\overrightarrow{AB}=(0,2)+(6,2)=(6,4)$

**83.** **Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua, explícita y general de la recta que pasa por el punto $P(0, -3)$ cuyo vector director es $\vec{v}=(3, -1)$.**

Ecuación vectorial $\longrightarrow$ $(x,y)=(0,-3)+t(3,-1)$

Ecuación paramétrica $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x=3t \\ y=-3-t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\longrightarrow$ $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+3}{-1}$

Ecuación explícita $\longrightarrow$ $y=-\dfrac{1}{3}x-3$

Ecuación general $\longrightarrow$ $x+3y+9=0$

**84.** **Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, continua, explícita y general de la recta que pasa por los puntos $P(-2, 3)$ y $Q(5, 1)$.**

El vector director es $\vec{v}=(7,-2)$. Entonces:

Ecuación vectorial $\longrightarrow$ $(x,y)=(-2,3)+t(7,-2)$

Ecuación paramétrica $\longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x=-2+7t \\ y=3-2t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\longrightarrow$ $\dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y-3}{-2}$

Ecuación explícita $\longrightarrow$ $y=-\dfrac{2}{7}x+\dfrac{17}{7}$

Ecuación general $\longrightarrow$ $2x+7y-17=0$

**85.** **Halla la ecuación continua y general de las rectas que contienen los lados del triángulo cuyos vértices son $A(1, 4)$, $B(-6, -5)$ y $C(3, -1)$.**

- Lado 1:

  El vector director es $\overrightarrow{AB}=(-7,-9)$. Entonces:

  Ecuación continua $\longrightarrow$ $\dfrac{x-1}{-7}=\dfrac{y-4}{-9}$

  Ecuación general $\longrightarrow$ $9x-7y+19=0$

- Lado 2:

  El vector director es $\overrightarrow{BC} = (9, 4)$. Entonces:

  Ecuación continua $\rightarrow \frac{x+6}{9} = \frac{y+5}{4}$

  Ecuación general $\rightarrow 4x - 9y - 21 = 0$

- Lado 3:

  El vector director es $\overrightarrow{CA} = (-2, 5)$

  Ecuación continua $\rightarrow \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{5}$

  Ecuación general $\rightarrow 5x + 2y - 13 = 0$

**86. Escribe las siguientes ecuaciones de rectas en la forma que se pide.**

a) $y = -3x + 4$ en forma paramétrica.

b) $-2x + y + 7 = 0$ en forma continua.

c) $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{5}$ en forma explícita.

d) $\left.\begin{matrix} x = 3t \\ y = -2 - t \end{matrix}\right\}$ en forma general.

a) Un punto de la recta es el (0, 4) y el vector director es el (1, –3) $\rightarrow \left.\begin{matrix} x = t \\ y = 4 - 3t \end{matrix}\right\}$

b) Un punto de la recta es el (0, –7) y el vector director es el (1, 2) $\rightarrow x = \frac{y+7}{2}$

c) La pendiente de la recta es $-\frac{5}{2}$ y la ordenada en el origen es 3 $\rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 3$

d) Un punto de la recta es el (0, –2) y el vector normal es el (1, 3) $\rightarrow x + 3y + 6 = 0$

**87. Comprueba si los puntos $A(-3, 2)$ y $B(5, -1)$ están en las siguientes rectas.**

a) $\left.\begin{matrix} x = 3 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{matrix}\right\}$

b) $y = \frac{5x-3}{3}$

c) $5x - 2y + 19 = 0$

d) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+7}{2}$

a) $\left.\begin{matrix} -3 = 3 - 2\lambda \\ 2 = 3 + 4\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda = 3 \\ \lambda = \frac{-1}{4} \end{matrix}\right\}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$\left.\begin{matrix} 5 = 3 - 2\lambda \\ -1 = 3 + 4\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{matrix}\right\}$

El punto $(5, -1)$ pertenece a la recta.

b) $2 \neq \frac{-15-3}{3}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$-1 \neq \frac{25-3}{3}$

El punto $(5, -1)$ no pertenece a la recta.

c) $-15-4+19=0$

El punto $(-3, 2)$ pertenece a la recta.

$25+2+19 \neq 0$

El punto $(5, -1)$ no pertenece a la recta.

d) $\dfrac{-3+4}{3} \neq \dfrac{2+7}{2}$

El punto $(-3, 2)$ no pertenece a la recta.

$\dfrac{5+4}{3} = \dfrac{-1+7}{2} \rightarrow$ El punto $(5, -1)$ pertenece a la recta.

**88. Calcula el valor de $k$ para que la recta $3x + 7y + k = 0$ pase por el punto $P(-1, 4)$.**

$3\cdot(-1)+4\cdot 7+k=0 \rightarrow k=-25$

**89. Calcula el valor de $k$ para que la recta $4x - y + k = 0$ pase por el origen de coordenadas.**

$4\cdot 0-0+k=0 \rightarrow k=0$

**90. Escribe dos puntos de estas rectas.**

a) $y = 3x - 1$

b) $\left.\begin{array}{l} x = -2 - t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$

c) $4x - 3y + 1 = 0$

d) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-1}$

Respuesta abierta. Por ejemplo:

a) $(0, -1)$ y $(1, 2)$

c) $\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ y $\left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$

b) $(-2, 4)$ y $(-3, 1)$

d) $(2, -1)$ y $(-1, 0)$

**91. Escribe la ecuación punto-pendiente de la recta que cumple las siguientes condiciones.**

a) Pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(0, -2)$.

b) Pasa por el punto $A(0, 3)$ y tiene por dirección la del vector $\vec{v} = (3, -1)$.

a) $\left.\begin{array}{l} A(2,-3) \\ B(0,-2) \end{array}\right\} \rightarrow m=-\dfrac{1}{2} \rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2,1) \rightarrow y+3=-\dfrac{1}{2}(x-2)$

b) $\left.\begin{array}{l} m=-\dfrac{1}{3} \\ A(0,3) \end{array}\right\} \rightarrow y-3=-\dfrac{1}{3}x$

**92. Calcula el valor de $k$ para que la recta $8x - ky + 7 = 0$ tenga pendiente 2.**

El vector director es $(k, 8) \longrightarrow$ $m=\dfrac{8}{k}=2 \rightarrow k=4$

**93. Determina la ecuación de una recta que pasa por los puntos $(-1, -10)$ y $(2, c)$, sabiendo que su pendiente es 7. Expresa la recta en forma continua y general.**

Hallamos el vector director: $(3, c + 10)$

Como sabemos que la pendiente es: $7 = \dfrac{c+10}{3} \rightarrow 21 = c+10 \rightarrow c = 11$

$\vec{u}_r = (3, 21)$

Expresamos la recta en forma continua:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+10}{21}$$

Y la expresamos en forma general:

$21x+21=3y+30 \rightarrow 21x-3y-9=0$

**94. Determina la ecuación en forma continua, paramétrica, general y explícita de la recta que pasa por el punto $A(2, -4)$ y es perpendicular a la dirección del vector $\vec{v}=(4, -1)$.**

El vector director de la recta es el (1, 4).

Ecuación continua $\rightarrow x-2=\dfrac{y+4}{4}$

Ecuación paramétrica $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=-4+4t \end{array}\right\}$

Ecuación general $\rightarrow 4x-y-12=0$

Ecuación explícita $\rightarrow y=4x-12$

**95. Expresa en forma vectorial, paramétrica y continua la ecuación de la recta que:**

a) Pasa por el punto (1, 3) y es paralela a la recta $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}$.

b) Es paralela a la recta $5x-2y+12=0$ y pasa por el punto $(-2, 5)$.

a) Vector director de la recta: $(2, -4)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y)=(1, 3)+t(2, -4)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+2t \\ y=3-4t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{-4}$

b) Vector director de la recta: (2, 5)

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y)=(-2, 5)+t(2, 5)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2+2t \\ y=5+5t \end{array}\right\}$

Ecuación continua $\rightarrow \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-5}{5}$

**96. Expresa en forma explícita la recta que:**

a) Pasa por el punto $(0, -1)$ y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x=2+3t \\ y=-4 \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y}{-1}$ y pasa por el punto $(5, -2)$.

a) Vector director de la recta: (3, 0)

Pendiente: $m=0$

$-1=0x+n \rightarrow n=-1$

Ecuación explícita $\rightarrow y=-1$

b) Vector director de la recta: $(4, -1)$

Pendiente: $m=-\dfrac{1}{4}$

$-2=-\dfrac{5}{4}+n \rightarrow n=-\dfrac{3}{4}$

Ecuación explícita $\rightarrow y=-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3}{4}$

**97.** **Escribe la ecuación general de la recta que:**

a) Pasa por el punto $(10, -2)$ y es paralela a la recta $\left.\begin{array}{l} x = -1 - 3t \\ y = 2 - 2t \end{array}\right\}$.

b) Es paralela a la recta $y = \dfrac{8x - 3}{2}$ y pasa por el punto $(4, 0)$.

a) Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x - 10}{-3} = \dfrac{y + 2}{-2}$

Y la expresamos en forma general: $-2x + 20 = -3y - 6 \rightarrow -2x + 3y + 26 = 0$

b) Vector director de la recta: $(1, 4)$

Expresamos la recta en forma continua: $\dfrac{x - 4}{1} = \dfrac{y}{4}$

Y la expresamos en forma general: $4x - 16 = y \rightarrow 4x - y - 16 = 0$

**98.** **Escribe en forma vectorial y paramétrica la recta que:**

a) Pasa por el punto $(0, -3)$ y es perpendicular a la recta $\dfrac{x + 2}{-3} = \dfrac{y + 1}{4}$.

b) Pasa por el punto $(-5, 0)$ y es perpendicular a la recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

a) Un vector perpendicular a $(-3, 4)$ es $(4, 3)$.

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (0, -3) + t(4, 3)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{array}\right\}$

b) Calculamos el vector director de la recta:

$A(1, 2), B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a $(-2, 3)$ es $(-3, -2)$

Ecuación vectorial $\rightarrow (x, y) = (-5, 0) + t(-3, -2)$

Ecuaciones paramétricas $\rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -5 - 3t \\ y = -2t \end{array}\right\}$

**99.** **Determina la ecuación continua de la recta que cumple estas condiciones.**

a) Pasa por el punto $(7, -1)$ y es perpendicular a la recta $y = \dfrac{-x + 6}{3}$.

b) Pasa por el punto $(-4, 4)$ y es perpendicular a la recta $-2x + y + 7 = 0$.

a) Calculamos el vector director de la recta:

$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$

Un vector perpendicular a $(3, -1)$ es $(1, 3)$.

Expresamos la recta en forma continua:

$\dfrac{x - 7}{1} = \dfrac{y + 1}{3}$

b) Calculamos el vector director de la recta:

$A(0, -7), B(1, -5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$

Un vector perpendicular a $(1, 2)$ es $(-2, 1)$.

Expresamos la recta en forma continua:

$\dfrac{x + 4}{-2} = \dfrac{y - 4}{1}$

**100. Determina el punto de la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1}$ que dista 2 unidades del punto $P(-2, 2)$.**

Expresamos la recta en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \end{array}\right\}$$

Los puntos de la recta son de la forma:

$A_r(1 + 2t, -1 - t)$

Calculamos los vectores que van de la recta al punto $P$:

$\overrightarrow{A_rP} = (-3 - 2t, 3 + t)$

Veamos cuáles de estos vectores tienen módulo 2.

$$2 = \sqrt{(-3-2t)^2 + (3+t)^2} \rightarrow 4 = 9 + 12t + 4t^2 + 9 + 6t + t^2$$

$$\rightarrow 5t^2 + 18t + 14 = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-9-\sqrt{11}}{5} \\ t_2 = \dfrac{-9+\sqrt{11}}{5} \end{array}\right\}$$

Por tanto, los puntos son:

$$A_1\left(1 + \frac{-18-2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9+\sqrt{11}}{5}\right) \qquad A_2\left(1 + \frac{-18+2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9-\sqrt{11}}{5}\right)$$

**101. Estudia la posición relativa de estos pares de rectas.**

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3t \\ y = t \end{array}\right\}$ $\qquad s: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 6t \\ y = 1 - 2t \end{array}\right\}$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 6t \\ y = -3 + 2t \end{array}\right\}$ $\qquad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -t \end{array}\right\}$

a) $\vec{u_r} = (-3, 1)$ y $\vec{u_s} = (6, -2)$.

Son vectores paralelos y además las rectas coinciden en un punto, por ejemplo $(2, 0)$, entonces son rectas coincidentes.

b) $\vec{u_r} = (-6, 2)$

$\vec{u_s} = (3, -1)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(1, -3)$, de la recta $r$, pertenece a la recta $s$.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 2 + 3\mu \\ -3 = -\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = -\dfrac{1}{3} \\ \mu = 3 \end{array}\right\}$$

Las rectas son paralelas.

**102. Analiza la posición relativa de las rectas $r$ y $s$.**

a) $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2}$ $\qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4}$

b) $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3}$ $\qquad s: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-3}$

a) $\vec{u_r} = (3, -2)$ $\qquad \vec{u_s} = (2, -4)$.

$\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-4} \rightarrow$ Son rectas secantes.

b) $\vec{u_r} = (2, -3)$ $\qquad \vec{u_s} = (2, -3)$

Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(-1, 2)$, de la recta $r$, pertenece a la recta $s$.

$$\frac{-1+1}{2} \neq \frac{-2+3}{-3}$$

Las rectas son paralelas.

**103. Investiga qué posición relativa tienen los siguientes pares de rectas.**

a) $r\colon 2x - 6y + 4 = 0 \qquad s\colon -x + 3y - 2 = 0$

b) $r\colon 6x - 4y + 11 = 0 \qquad s\colon -9x + 6y - 1 = 0$

c) $r\colon 4x - y + 1 = 0 \qquad s\colon 2x - 3y + 13 = 0$

a) $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{4}{-2} \rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

b) $\frac{-9}{6} = \frac{6}{-4} \neq \frac{-1}{11} \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\frac{4}{2} \neq \frac{-1}{-3} \rightarrow$ Las rectas son secantes.

**104. Discute la posición relativa de estas rectas.**

a) $r\colon y = \frac{6x-1}{4} \qquad s\colon y = \frac{-3x+5}{-2}$

b) $r\colon y = \frac{-3x+1}{2} \qquad s\colon y = \frac{x-3}{-3}$

a) La pendiente de la recta $r$ es: $m_r = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

La pendiente de la recta $s$ es: $m_s = \frac{3}{2}$

Como las pendientes son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_s(1, -1)$, de la recta $s$, pertenece a la recta $r$.

$-1 \neq \frac{6-1}{4} \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

b) La pendiente de la recta $r$ es $m_r = -\frac{3}{2}$ y la de la recta $s$ es $m_s = -\frac{1}{3}$.

Como las pendientes son distintas, son rectas secantes.

**105. ¿En qué posición relativa están estas parejas de rectas?**

a) $r\colon \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\} \qquad s\colon x + 2y - 7 = 0$

b) $r\colon \frac{x}{2} = y - 3 \qquad s\colon 3x - 6y + 4 = 0$

c) $r\colon y = 3x - 1 \qquad s\colon \left.\begin{array}{l} x = 4 - 3t \\ y = -2t \end{array}\right\}$

d) $r\colon y = \frac{5x+1}{-2} \qquad s\colon \frac{x+3}{2} = \frac{y-7}{-5}$

a) Expresamos la recta $r$ en forma general:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow -2x - 2 = 4y - 12 \rightarrow -2x - 4y + 10 = 0$$

Las rectas son paralelas.

b) Expresamos la recta $r$ en forma general:

$r: x - 2y + 6 = 0$

Las rectas son paralelas.

c) Expresamos las rectas en forma general:

$r: 3x - y - 1 = 0 \qquad s: 2x - 3y - 8 = 0$

Las rectas son secantes.

d) Expresamos las rectas en forma general:

$r: \ -2y = 5x + 1 \qquad s: \ -5x - 15 = 2y - 14$

$5x + 2y + 1 = 0 \qquad 5x + 2y + 1 = 0$

Las rectas son coincidentes.

**106.** **Discute la posición relativa de la recta $r$ que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, 4)$, y la recta $s$ que queda definida por los puntos $(-3, 4)$ y $(2, -1)$.**

Escribimos las rectas en forma general:

$r: x - 2y + 5 = 0 \qquad s: x + y - 1 = 0$

Las rectas son secantes.

**107.** **¿Qué posición relativa mantienen los siguientes pares de rectas?**

a) $r$ pasa por $(-3, 4)$ y por $(8, -1)$.
$s: x - 2y + 15 = 0$

b) $r$ pasa por $(-1, 4)$ y por $(2, -5)$.
$s: \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-7}{3}$

a) $\left.\begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{(-3,4)} 4 = -3m + n \\ y = mx + n \xrightarrow{(8,-1)} -1 = 8m + n \end{array}\right\}$

$y = -\dfrac{5}{11}x + \dfrac{29}{11} \rightarrow 5x + 11y - 29 = 0 \rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) $\vec{u_r} = (3, -9)$

$\vec{u_s} = (-1, 3)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Veamos si el punto $A_r(-1, 4)$, de la recta $r$, pertenece a la recta $s$.

$\dfrac{-1+2}{-1} = \dfrac{4-7}{3} \rightarrow$ Las rectas son coincidentes.

**108.** **¿En qué posición relativa están las siguientes parejas de rectas?**

a) $r$ es perpendicular a $3x - 4y + 11 = 0$.
$s: \left.\begin{array}{l} x = -6t \\ y = -3 + 8t \end{array}\right\}$

b) $r$ es paralela a $y = 2x - 3$.
$s: \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y}{6}$

a) Calculamos el vector director de la recta:

$m = \dfrac{3}{4} \rightarrow (4, 3)$

Este vector es perpendicular al vector director de la recta $s$.

$\vec{u_r} = (4, 3) \qquad \vec{u_s} = (-6, 8)$

Las rectas $r$ y $s$ son perpendiculares.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$:

$\left.\begin{array}{l} r: 2x - y = a \rightarrow m_r = 2 \\ s: 2x - y = 8 \rightarrow m_s = 2 \end{array}\right\} \rightarrow$ Son paralelas o coincidentes: $\left\{\begin{array}{l} \text{Si } a = 8 \rightarrow \text{Coincidentes} \\ \text{Si } a \neq 8 \rightarrow \text{Paralelas} \end{array}\right.$

**109.** **Determina si las rectas *r* y *s* se cortan. En caso afirmativo calcula el punto de corte.**

a) $r: 2x + 3y - 3 = 0$ $\quad s: 3x - 4y - 13 = 0$

b) $r: 6x + 9y - 3 = 0$ $\quad s: 2x + 3y - 1 = 0$

c) $r: x - 2y + 3 = 0$ $\quad s: -3x + 6y - 8 = 0$

a) $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-4} \rightarrow$ Se cortan.

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 3 = 0 \\ 3x - 4y - 13 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = 3,\ y = -1$$

b) $\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{-3}{-1} \rightarrow$ Son rectas coincidentes, cortan en todos los puntos.

c) $\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \neq \frac{3}{-8} \rightarrow$ No se cortan, son rectas paralelas.

**110.** **Indica, si es posible, los puntos de corte de los siguientes pares de rectas.**

a) $r: \left.\begin{array}{r} x = 3 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x = -1 - 4\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{array}\right\}$

b) $r: \left.\begin{array}{r} x = 7 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x = 5 - 4\mu \\ y = 3 - 6\mu \end{array}\right\}$

c) $r: \left.\begin{array}{r} x = 1 - 2\lambda \\ y = -4 + 4\lambda \end{array}\right\}$ $\quad s: \left.\begin{array}{r} x = -3 + \mu \\ y = -1 + 2\mu \end{array}\right\}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 3 - \lambda = -1 - 4\mu \\ -1 + 2\lambda = 5 + 3\mu \end{array}\right\} \xrightarrow{\lambda = 4(\mu+1)} -1 + 8(\mu + 1) = 5 + 3\mu \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mu = -\frac{2}{5} \\ \lambda = \frac{12}{5} \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto de intersección es } \left(\frac{3}{5}, \frac{19}{5}\right).$$

b) $$\left.\begin{array}{r} 7 - 2\lambda = 5 - 4\mu \\ 3\lambda = 3 - 6\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda - 2\mu = 1 \\ \lambda + 2\mu = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \mu = 0 \rightarrow \text{El punto de intersección es } (5, 3).$$

c) $$\left.\begin{array}{r} 1 - 2\lambda = -3 + \mu \\ -4 + 4\lambda = -1 + 2\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\lambda + \mu = 4 \\ 4\lambda - 2\mu = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{\mu = 4 - 2\lambda} 4\lambda - 2(4 - 2\lambda) = 3 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{11}{8} \\ \mu = \frac{5}{4} \end{array}\right. \rightarrow \text{El punto de intersección es } \left(-\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right).$$

**111.** **Calcula los puntos de corte, si es posible, de las parejas de rectas.**

a) $r: 2x - y + 8 = 0$ $\quad s: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 7 + t \end{array}\right\}$

b) $r: y = \frac{-2x + 7}{3}$ $\quad s: \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{-2}$

c) $r: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-6}$ $\quad s: 3x + y + 2 = 0$

d) $r: \left.\begin{array}{l} x = -1 - 3t \\ y = 5 + 8t \end{array}\right\}$ $\quad s: \frac{x - 3}{1} = \frac{y + 7}{-4}$

e) $r: y = \frac{6x + 3}{2}$ $\quad s: \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = \frac{3}{2} + 3t \end{array}\right\}$

a) $2(2+3t)-(7+t)+8=0 \rightarrow 4+6t-7-t+8=0 \rightarrow t=-1$

El punto de corte es $P(-1, 6)$.

b) $\left.\begin{array}{l} 3y=-2x+7 \\ -2x+4=3y-3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=7 \\ -2x-3y=-7 \end{array}\right\}$

Hay infinitos puntos de corte, y las rectas son coincidentes.

c) $\left.\begin{array}{l} -6x+6=2y+6 \\ 3x+y+2=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -6x-2y=0 \\ 3x+y=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+y=0 \\ 3x+y=-2 \end{array}\right\}$

No hay puntos de corte, y las rectas son paralelas.

d) $\dfrac{-1-3t-3}{1}=\dfrac{5+8t+7}{-4} \rightarrow 12t+16=8t+12 \rightarrow t=-1$

El punto de corte es $P(2, -3)$.

e) $\dfrac{3}{2}+3t=\dfrac{6+6t+3}{2} \rightarrow 3+6t=6t+9$

No tiene solución, las rectas son paralelas.

**112. Calcula los puntos de corte de estas rectas.**

a) $r: x+2y-5=0$ $\qquad s: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x=2-3t \\ y=5+t \end{array}\right\}$ $\qquad s: x+3y-2=0$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=3-5t \end{array}\right\}$ $\qquad s: 2x-y+5=0$

a) $s: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1} \rightarrow -x+3=2y-2 \rightarrow x+2y-5=0$

Son rectas coincidentes, todos sus puntos son de corte.

b) $(2-3t)+3(5+t)-2=0 \rightarrow 2-3t+15+3t-2 \neq 0 \rightarrow$ No se cortan.

c) $2(2+t)-(3-5t)+5=0 \rightarrow 4+2t-3+5t+5=0 \rightarrow t=-\dfrac{6}{7} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{8}{7} \\ y=\dfrac{51}{7} \end{array}\right.$

**113. Halla el valor que debe tomar $k$ para que la recta $\dfrac{x+1}{k}=\dfrac{y-2}{3}$ sea paralela a $\left.\begin{array}{l} x=3-t \\ y=2+5t \end{array}\right\}$.**

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\dfrac{k}{-1}=\dfrac{3}{5} \rightarrow k=-\dfrac{3}{5}$

**114. Encuentra el valor de $a$ para que la recta $ax+3y-7=0$ sea paralela a $\dfrac{x-1}{5}=y+2$.**

Para que las rectas sean paralelas, los vectores directores deben ser proporcionales.

$\dfrac{-3}{5}=\dfrac{a}{1} \rightarrow a=-\dfrac{3}{5}$

**115. Calcula el valor de $k$ para que las rectas $r$ y $s$ sean paralelas.**

$r: kx+(k+1)y+8=0 \qquad s: 5x+6y-12=0$

$\dfrac{k}{5}=\dfrac{k+1}{6} \neq \dfrac{8}{-12} \rightarrow 6k=5k+5 \rightarrow k=5$

**116.** **Determina el valor de $k$ para que las rectas $r$ y $s$ sean perpendiculares.**

$r: k^2x + (k + 1)y + 8 = 0 \qquad s: 16x - 9y - 5 = 0$

$(a, b) \perp t(-b, a)$ o bien $(a, b) \perp t(b, -a)$.

$$\left.\begin{array}{l} k^2 = -9t \\ k + 1 = -16t \end{array}\right\} \rightarrow t = \frac{k^2}{-9} = \frac{k+1}{-16} \rightarrow k = \frac{9 \pm \sqrt{657}}{32}$$

**117.** **Prueba que todas las rectas cuya ecuación es del tipo $y = ax + a$ pasan por el mismo punto. Halla el punto y la recta de ese tipo que es paralela a $\left.\begin{array}{l} x = 21 - 3t \\ y = -1 + 2t \end{array}\right\}$.**

Hallamos el punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + a \\ y = bx + b \end{array}\right\} \rightarrow ax + a = bx + b \rightarrow (a - b)x = -(a - b) \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 0$$

Todas las rectas pasan por $(-1, 0)$.

Como la recta es paralela a la recta dada, su vector director es $(-3, 2)$.

$$m = -\frac{2}{3}$$

La recta es: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

**118.** **Calcula la distancia entre el punto $P$ y la recta $r$ en los siguientes casos.**

a) $P(0, 0) \qquad r: x - 4y + 1 = 0$

b) $P(2, 1) \qquad r: 2x + 3y - 1 = 0$

c) $P(-3, -1) \qquad r: 3x - 2y - 3 = 0$

a) $d(P, r) = \dfrac{|1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{17}} = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$

b) $d(P, r) = \dfrac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{13}} = \dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

c) $d(P, r) = \dfrac{|3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) - 3|}{\sqrt{13}} = \dfrac{10\sqrt{13}}{13}$

**119.** **Halla la distancia del punto $P(4, -2)$ a estas rectas.**

a) $-6x + 8y - 5 = 0$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \end{array}\right\}$

c) $\dfrac{x - 1}{3} = \dfrac{y - 2}{6}$

d) $y = \dfrac{4x - 5}{3}$

a) $d(P, r) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-6 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \dfrac{45}{10} = \dfrac{9}{2}$ u

b) Calculamos la ecuación general de la recta:

$$-x + 2 = \frac{y - 2}{2} \rightarrow 2x + y - 6 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0 \text{ u}$$

c) Hallamos la ecuación general de la recta:

$$6x - 6 = 3y - 6 \rightarrow 6x - 3y = 0 \rightarrow 2x - y = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \text{ u}$$

d) Determinamos la ecuación general de la recta:

$3y = 4x - 5 \rightarrow -4x + 3y + 5 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-4 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{17}{5}\ \text{u}$$

**120.** **Determina la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(-2, 4)$ y $B(4, -2)$, y el punto $P(-3, 2)$.**

Escribimos la recta en forma general:

$$r: x + y - 2 = 0 \ \rightarrow \ d(P, r) = \frac{|1 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

**121.** **Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta que pasa por $(-3, 6)$ y es paralela a $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{8}$.**

Determinamos la recta pedida: $\frac{x+3}{-6} = \frac{y-6}{8}$

Calculamos la ecuación general de la recta:

$8x + 24 = -6y + 36 \rightarrow 8x + 6y - 12 = 0$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}\ u$$

**122.** **Calcula la distancia entre las siguientes rectas paralelas.**

a) $r: 4x - 3y + 1 = 0$ $\quad$ $s: 8x - 6y - 5 = 0$

b) $r: x + 2y - 5 = 0$ $\quad$ $s: 4x + 8y + 2 = 0$

c) $r: 5x - y - 16 = 0$ $\quad$ $s: 5x - y + 16 = 0$

a) Un punto de la recta $r$ es $P(2, 3)$.

$$d(P, s) = \frac{|8 \cdot 2 - 6 \cdot 3 - 5|}{10} = \frac{7}{10}$$

b) Un punto de la recta $r$ es $P(-1, 3)$.

$$d(P, s) = \frac{|4 \cdot (-1) + 8 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{96}} = \frac{11\sqrt{6}}{12}$$

c) Un punto de la recta $r$ es $P(3, -1)$.

$$d(P, s) = \frac{|5 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) + 16|}{\sqrt{26}} = \frac{16\sqrt{26}}{13}$$

**123.** **¿Qué distancia hay entre las rectas $r$ y $s$?**

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \end{array}\right\}$ $\quad$ $s: -x + 2y + 5 = 0$

b) $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{6}$ $\quad$ $s: y = \frac{8x-3}{4}$

c) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = -1 - t \end{array}\right\}$ $\quad$ $s: y = \frac{-x-1}{3}$

a) $\vec{u}_r = (2, 1)$, $\vec{u}_s = (-2, -1)$. Los vectores son proporcionales. Un punto de $r$ es $P(-1, 3)$

$$d(r, s) = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

b) $\vec{u}_r = (2, 6)$, $\vec{u}_s = (4, 8)$. Los vectores no son proporcionales; por tanto, las rectas son secantes.

c) $\vec{u}_r = (3, -1)$, $\vec{u}_s = (3, -1)$. Como los vectores son iguales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Tomamos un punto de la recta $r$, $A(2, -1)$, y vemos si pertenece a $s$: $-1 = \frac{-2-1}{3}$.

Las rectas son coincidentes.

**124. Calcula el valor de *a* para que la distancia entre el punto *A*(2, *a*) y la recta *r*: 13*x* − 12*y* + 2 = 0 sea de 3 unidades.**

$$d(A, r) = \frac{|13\cdot 2 - 12\cdot a + 2|}{\sqrt{313}} = 3 \rightarrow |28 - 12a| = 3\sqrt{313}$$

- Si $28 - 12a \geq 0$:

$$28 - 12a = 3\sqrt{313} \rightarrow a = \frac{28 - 3\sqrt{313}}{12}$$

- Si $28 - 12a \leq 0$:

$$-28 + 12a = 3\sqrt{313} \rightarrow a = \frac{3\sqrt{313} + 28}{12}$$

**125. Halla el valor de *b* para que la recta *r* y el punto *P* se encuentren a 5 unidades de distancia.**

$$r: \frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3} \qquad P(-4, 1)$$

Expresamos la recta en forma general:

$$3x + 3 = by + 3b \rightarrow 3x - by + 3 - 3b = 0$$

$$5 = \frac{|3\cdot(-4) - b\cdot 1 + 3 - 3b|}{\sqrt{3^2 + (-b)^2}} \rightarrow 5\sqrt{9 + b^2} = |-9 - 4b|$$

$$9b^2 - 72b + 144 = 0 \rightarrow b = 4$$

**126. Calcula el valor de *k* para que la distancia entre las rectas *r*: 3*x* + 4*y* + *k* = 0 y *s*: 6*x* − 8*y* −10 = 0 sea 4.**

Un punto de la recta $s$ es $P(-5, -5)$.

$$d(P, r) = \frac{|3\cdot(-5) + 4\cdot(-5) + k|}{5} = 4 \rightarrow |-35 + k| = 20$$

- Si $-35 + k \geq 0$:

$$-35 + k = 20 \rightarrow k = 55$$

- Si $-35 + k \leq 0$:

$$35 - k = 20 \rightarrow k = 15$$

**127.** **Encuentra la ecuación de una recta que sea paralela a $\frac{x+1}{-3}=\frac{y-5}{4}$ y que esté a 8 unidades de distancia de ella.**

La recta tiene esta ecuación general.

$4x+3y+C=0$

$$8=\frac{|4\cdot(-1)+3\cdot 5+C|}{\sqrt{4^2+3^2}}\rightarrow 40=|11+C|$$

$C=29, C=-51$

Las siguientes rectas cumplen las condiciones indicadas.

$4x+3y+29=0$

$4x+3y-51=0$

**128.** **Determina el ángulo que forman las rectas *r* y *s*.**

a) $r:\left.\begin{array}{l}x=2-3\lambda\\ y=-1-2\lambda\end{array}\right\}$ $\qquad s:\left.\begin{array}{l}x=2\mu\\ y=5+3\mu\end{array}\right\}$

b) $r: y=3x+2$ $\qquad s: y=\frac{4x+1}{-2}$

c) $r:\frac{x}{2}=\frac{y-4}{6}$ $\qquad s:\frac{2x+3}{-1}=\frac{y}{2}$

d) $r: 20x-4y+1=0$ $\qquad s: -15x+3y+7=0$

a) $\vec{u_r}=(3,2), \vec{u_s}=(2,3)$

$$\cos\alpha=\frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{|3\cdot 2+2\cdot 3|}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{12}{13}$$

$\alpha=22^\circ\ 37'\ 11{,}51''$

b) $\vec{u_r}=(1,3), \vec{u_s}=(-4,8)$

$$\cos\alpha=\frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{|1\cdot(-4)+3\cdot 8|}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+8^2}}=$$

$$=\frac{20}{\sqrt{800}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\alpha=45^\circ$

c) $\vec{u_r}=(2,6)$ , $\vec{u_s}=(-1,4)$

$$\cos\alpha=\frac{|2\cdot(-1)+6\cdot 4|}{\sqrt{40}\sqrt{17}}=\frac{11}{\sqrt{170}}\rightarrow\alpha=32^\circ\ 28'\ 16{,}3''$$

d) $\vec{u_r}=(4,20), \vec{u_s}=(3,15)$

$$\cos\alpha=\frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{|4\cdot 3+20\cdot 15|}{\sqrt{4^2+20^2}\cdot\sqrt{3^2+15^2}}=\frac{312}{312}=1$$

$\alpha=0^\circ$

**129.** **¿Qué ángulo forman entre sí estos pares de rectas?**

a) $r:\frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}$ $\qquad s: y=-5x+3$

b) $r: y=3x-2$ $\qquad s:\left.\begin{array}{l}x=2-t\\ y=5+3t\end{array}\right\}$

c) $r:\left.\begin{array}{l}x=t\\ y=3+t\end{array}\right\}$ $\qquad s: 2x+2y-1=0$

d) $r: 3x-y-3=0$ $\qquad s:\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-4}$

a) $\overrightarrow{u_r}=(-2,3)$, $\overrightarrow{u_s}=(1,-5)$

$$\cos\alpha=\frac{|-2-15|}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\frac{17\sqrt{2}}{26}\to\alpha=22^\circ\ 22'\ 48''$$

b) $\overrightarrow{u_r}=(1,3)$, $\overrightarrow{u_s}=(-1,3)$

$$\cos\alpha=\frac{|-1+9|}{\sqrt{10}\sqrt{10}}=\frac{4}{5}\to\alpha=36^\circ\ 52'\ 11{,}6''$$

c) $\overrightarrow{u_r}=(1,1)$, $\overrightarrow{u_s}=(2,-2)$

$$\cos\alpha=\frac{|1\cdot 2+1\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2}\ \sqrt{1^2+(-2)^2}}=0\to\alpha=90^\circ$$

d) $\overrightarrow{u_r}=(1,3)$, $\overrightarrow{u_s}=(2,-4)$

$$\cos\alpha=\frac{|1\cdot 2+3\cdot(-4)|}{\sqrt{1^2+3^2}\ \sqrt{2^2+(-4)^2}}=\frac{10}{\sqrt{200}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\to\alpha=45^\circ$$

**130. Calcula el ángulo que forman entre sí las rectas $r$: $y=x+1$, $s$: $x+4y+4=0$ y $t$: $\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y+3}{-3}$.**

$r: x-y+1=0$

$s: x+4y+4=0$

$t=3x+2y-12=0$

$$\cos(\widehat{r,s})=\frac{|1\cdot 1-1\cdot 4|}{\sqrt{2}\sqrt{17}}=\frac{3}{\sqrt{34}}\to\alpha=59^\circ$$

$$\cos(\widehat{r,t})=\frac{|1\cdot 1-1\cdot 2|}{\sqrt{2}\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{26}}\to\beta=78{,}7^\circ$$

$$\cos(\widehat{s,t})=\frac{|1\cdot 3+4\cdot 2|}{\sqrt{17}\sqrt{13}}=\frac{11}{\sqrt{221}}\to\alpha=42{,}3^\circ$$

**131. Encuentra el ángulo que forman la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(3, 8)$ y la recta $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{8}$.**

$\overrightarrow{PQ}=(4,4)$, $\overrightarrow{u_r}=(2,8)$

$$\cos\alpha=\frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{|4\cdot 2+4\cdot 8|}{\sqrt{4^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+8^2}}=\frac{40}{\sqrt{2.176}}$$

$\alpha=30^\circ\ 57'\ 49{,}52''$

**132. Obtén la medida de los ángulos que forman las parejas de rectas $r$ y $s$.**

a) $r: y=\dfrac{4x-3}{2}$

$s$ pasa por $(-1, 6)$ y es paralela a $4x+2y+7=0$.

b) $r: x+3=\dfrac{y}{2}$

$s$ pasa por $(3, 8)$ y es paralela a $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+9}{4}$.

c) $r: 8x-2y-3=0$

$s$ es perpendicular a $\left.\begin{array}{l}x=6-t\\ y=-1+3t\end{array}\right\}$ y pasa por $(3, -2)$.

a) $\overrightarrow{u_r}=(2,4)$, $\overrightarrow{u_s}=(2,-4)$

$$\cos\alpha=\frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}}=\frac{|2\cdot 2+4\cdot(-4)|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

$\alpha=53^\circ\ 7'\ 48''$

b) $\vec{u_r}=(1,2), \vec{u_s}=(2,4)$

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|1\cdot 2+2\cdot 4|}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2}} = \frac{10}{10} = 1$$

$\alpha = 0° \rightarrow$ Las rectas son paralelas.

c) $\vec{u_r}=(2,8)$

El vector $\vec{u_s}$ debe ser perpendicular a $(-1,3)$; por tanto, puede ser $\vec{u_s}=(3,1)$.

$$\cos\alpha = \frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} = \frac{|2\cdot 3+8\cdot 1|}{\sqrt{2^2+8^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{680}} = \frac{7\sqrt{170}}{170}$$

$\alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$

**133. Obtén el valor que debe tener $b$ para que la recta $3x+by+6=0$ forme un ángulo de 60° con la recta $y=\frac{x+4}{-3}$.**

$\vec{u_r}=(-3,1), \vec{u_s}=(b,-3)$

$$\cos 60° = \frac{|d_1\cdot c_1+d_2\cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2+d_2^2}\cdot\sqrt{c_1^2+c_2^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-3\cdot b+1\cdot(-3)|}{\sqrt{(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{b^2+(-3)^2}}$$

$$\rightarrow m = \frac{-18-15\sqrt{3}}{13},\ m = \frac{-18+15\sqrt{3}}{13}$$

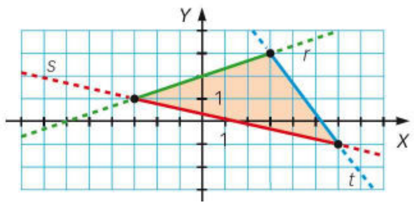
**134. Halla el valor de $k$ para que las rectas $r$ y $s$ formen un ángulo de 45°.**

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = -3+2t \end{array}\right\} \qquad s: kx-2y+1=0$$

$r: 2x-y-7=0$

$$\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|2k+2|}{\sqrt{k^2+4}\sqrt{5}} \rightarrow k_1 = \frac{1}{3},\ k_2=-3$$

**135. Escribe las ecuaciones, en la forma general, de las rectas que forman el siguiente triángulo.**




La recta $r$ pasa por los puntos $(-3,1)$ y $\left(3,\frac{5}{2}\right)$:

$\vec{u_r}=(4,1)$ $\qquad$ $r: -x+4y-7=0$

La recta $s$ pasa por los puntos $\left(3,\frac{5}{2}\right)$ y $\left(6,-\frac{5}{4}\right)$:

$\vec{u_s}=(4,-5)$ $\qquad$ $s: 5x+4y-25=0$

La recta $t$ pasa por los puntos $\left(6,-\frac{5}{4}\right)$ y $(-3,1)$:

$\vec{u_t}=(-4,1)$ $\qquad$ $t: x+4y-1=0$

**136.** **Determina la recta paralela a *r* que pasa por el punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.**

a) $r: 2x - 3y + 10 = 0 \qquad P(4, -7)$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = -2t \\ y = 2 - t \end{array}\right\} \qquad P(4, 4)$

c) $r: y = \dfrac{3x - 1}{4} \qquad P(5, -9)$

a) Calculamos la recta $s$, perpendicular a $r$, y que pasa por $P$:

$s: \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y+7}{3}$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + 10 = 0 \\ 3x - 12 = -2y - 14 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x - 3y = -10 \\ 3x + 2y = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

$(-2, 2)$ es el punto medio de $P$ y su simétrico, $P'$, respecto de $r$.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-2, 2) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-7+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -8 \\ y = 11 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -8 + 3t \\ y = 11 + 2t \end{array}\right\}$

b) Calculamos la recta $s$, perpendicular a $r$, y que pasa por $P$:

$s: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y-4}{-2}$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\frac{-2t - 4}{1} = \frac{2 - t - 4}{-2} \rightarrow t = 2$$

$(-4, 0)$ es el punto medio de $P$ y su simétrico, $P'$, respecto de $r$.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-4, 0) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{4+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -12 \\ y = -4 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -12 - 2t \\ y = -4 - t \end{array}\right\}$

c) Calculamos la recta $s$, perpendicular a $r$, y que pasa por $P$:

$s: \dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y+9}{4}$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 4y = 3x - 1 \\ 4x - 20 = -3y - 27 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x + 4y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array}\right\}$$

$(-1, -1)$ es el punto medio de $P$ y su simétrico, $P'$, respecto de $r$.

Calculamos $P'(x, y)$:

$$(-1, -1) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -7 \\ y = 7 \end{array}\right\}$$

La recta es: $\left.\begin{array}{l} x = -7 + 4t \\ y = 7 + 3t \end{array}\right\}$

**137.** **Encuentra la ecuación de la recta simétrica de *r* respecto de la recta *s*.**

a) $r: y = \dfrac{x-4}{2} \qquad s: -x + 2y + 4 = 0$

b) $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \end{array}\right\} \qquad s: 2x + y - 7 = 0$

a) $\vec{u_r} = (2, 1), \vec{u_s} = (2, 1)$

Las rectas son paralelas o coincidentes.

Elegimos un punto, $P$, de $r$ y calculamos la distancia hasta $s$:

$P(4, 0) \qquad d(P, s) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|-4 + 2 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = 0$

Las rectas son coincidentes y, por tanto, la recta simétrica es la misma.

b) $\vec{u_r} = (-1, 2), \vec{u_s} = (1, -2)$

Como los vectores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes.

Elegimos un punto, $P$, de $r$ y calculamos la distancia hasta $s$:

$P(2, 3) \qquad d(P, s) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0$

Las rectas son coincidentes y, por tanto, la recta simétrica es la misma.

**138. Los puntos $P(3, 3)$ y $Q(6, -1)$ son simétricos respecto de una recta. Halla la ecuación general de esta recta.**

$\overrightarrow{PQ} = (3, -4)$ es el vector normal de la recta. $\qquad M\left(\dfrac{3+6}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right) = \left(\dfrac{9}{2}, 1\right)$

$r: 3x - 4y - \dfrac{19}{2} = 0 \rightarrow 6x - 8y - 19 = 0$

**139. Comprueba si están alineados los puntos $P(-1, 4)$, $Q(3, 1)$ y $R(11, -5)$. En caso afirmativo, escribe la ecuación de la recta que los contiene.**

Calculamos los vectores formados por los puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$

$\overrightarrow{PR} = (12, -9)$

Como los vectores son proporcionales, los puntos están alineados.

Calculamos la ecuación de la recta que los contiene:

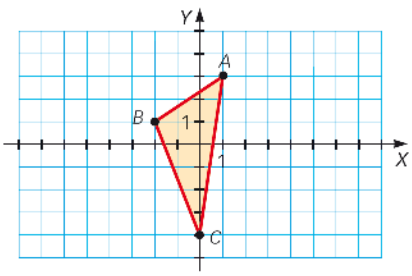
$r: \left.\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 4 - 3t \end{array}\right\}$

**140. Demuestra que los puntos $A(3, -2)$, $B(9, 6)$ y $C(10, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.**

$\overrightarrow{AC} = (7, 7) \qquad \overrightarrow{BC} = (1, -1)$

Son ortogonales: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 7 \cdot 1 + 7 \cdot (-1) = 0$

**141. Para este triángulo calcula lo siguiente.**




a) La longitud del segmento $AC$.

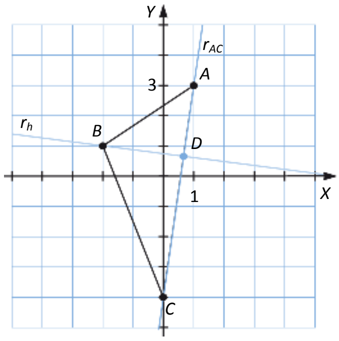
b) La ecuación de la recta que pasa por $A$ y por $C$.

c) El área del triángulo $ABC$.

a) $\left.\begin{matrix} A(1,3) \\ C(0,-4) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AC} = C - A = (-1,-7) \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

b) La recta pasa por el punto *A* y tiene vector director $\overrightarrow{AC}$ . Por tanto, su ecuación es $r_{AC}$: $7x - y = 4$ .

c) Para calcular el área se necesitan conocer la base, *b*, y la altura, *h*, del triángulo:




$b = \left|\overrightarrow{AC}\right| = 5\sqrt{2}$ .

La recta que definirá *h* cumple lo siguiente:

$$r_h : \begin{cases} \overrightarrow{v_h} \perp \overrightarrow{AC} \\ B(-2,1) \end{cases} \rightarrow r_h : \begin{cases} \overrightarrow{v_h} = (7,-1) \\ B(-2,1) \end{cases} \rightarrow \frac{x+2}{7} = \frac{y-1}{-1} \rightarrow r_h : x + 7y = 5$$

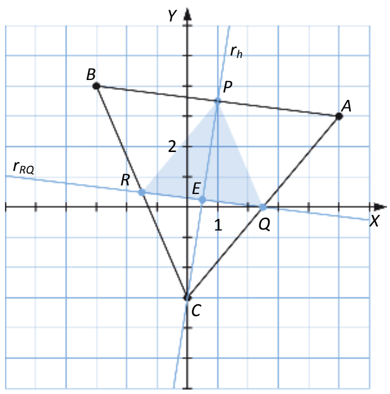
El punto de intersección de $r_h$ con la recta $r_{AC}$ permite obtener la longitud de la altura, *h*:

$$\left.\begin{matrix} 7x - y = 4 \\ x + 7y = 5 \end{matrix}\right\} \rightarrow D\left(\frac{33}{50}, \frac{31}{50}\right) \rightarrow h = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\left(\frac{133}{50}, -\frac{19}{50}\right)\right| = \frac{19\sqrt{2}}{10}$$

Por tanto, $A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot \dfrac{19\sqrt{2}}{10}}{2} = \dfrac{19}{2}\ \text{u}^2$ .

**142. Calcula el área del triángulo formado al unir los puntos medios del triángulo cuyos vértices son los puntos *A*(5, 3), *B*(−3, 4) y *C*(0, −3).**

Primero, se localizan los vértices del triángulo del que se va a calcular el área:




- Punto medio de $\overline{AB}$ : $P = \left(\frac{5-3}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(1, \frac{7}{2}\right)$
- Punto medio de $\overline{AC}$ : $Q = \left(\frac{5+0}{2}, \frac{3-3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$
- Punto medio de $\overline{BC}$ : $R = \left(\frac{-3+0}{2}, \frac{4-3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Se toma como base el segmento $\overline{RQ}$ , es decir:

$$b = \left|\overrightarrow{RQ}\right| = \sqrt{(4)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4{,}03$$

$$r_{RQ} : \begin{cases} \overrightarrow{RQ} = \left(4, -\frac{1}{2}\right) \\ Q = \left(\frac{5}{2}, 0\right) \end{cases} \rightarrow 2x + 16y = 5$$

La recta que definirá $h$ cumple lo siguiente:

$$r_h:\begin{cases}\vec{v_h}\perp\overline{RQ}\\ P\left(1,\dfrac{7}{2}\right)\end{cases}, \text{ es decir, } r_h:\begin{cases}\vec{v_h}=\left(\dfrac{1}{2},4\right)\\ P\left(1,\dfrac{7}{2}\right)\end{cases}\rightarrow\frac{x-1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{7}{2}}{4}\rightarrow 16x-2y=9$$ El punto de intersección de $r_h$ con $r_{RQ}$ permite obtener la longitud de la altura:

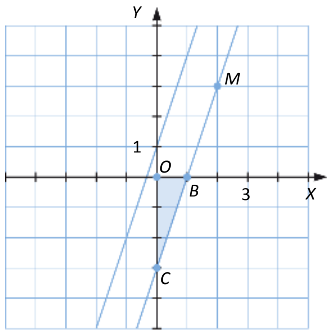
$$\left.\begin{array}{l}2x+16y=5\\16x-2y=9\end{array}\right\}\rightarrow E\left(\frac{31}{130},-\frac{337}{130}\right)\rightarrow h=\left|\overrightarrow{EP}\right|=\left|\left(\frac{99}{130},\frac{396}{65}\right)\right|\approx 6{,}14$$

Por tanto, $A_{triángulo}=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{4{,}03\cdot 6{,}14}{2}=12{,}3721\text{ u}^2$.

**143. La recta que pasa por $M(2, 3)$ y es paralela a la recta $r: y = 3x + 1$ determina con los ejes coordenados un triángulo. Halla su área.**

Primero se calcula la ecuación de la recta $s$:

$$s:\begin{cases}s\parallel r\\ M\in s\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\vec{v_s}=(1,3)\\ M(2,3)\end{cases}\rightarrow 3x-y=3$$




A continuación se obtienen los puntos de intersección de la recta $s$ con los ejes de coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\3x-y=3\end{array}\right\}\rightarrow B(0,-3) \qquad \left.\begin{array}{l}y=0\\3x-y=3\end{array}\right\}\rightarrow C(1,0)$$

El triángulo está formado por los puntos $O$, $B$, $C$. Como son puntos que están sobre los ejes de coordenadas, los vectores $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OB}$ son perpendiculares. Entonces:

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{1^2+0^2}=1 \quad \left|\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{0^2+(-3)^2}=3$$

Y finalmente se obtiene el área: $A_{\text{triángulo}}=\dfrac{\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}{2}=\dfrac{1\cdot 3}{2}=\dfrac{3}{2}\text{ u}^2$

**144. Los puntos $A(2, 2)$ y $B(-10, -2)$ son los vértices correspondientes al lado desigual de un triángulo isósceles. El otro lado está sobre la recta $\left.\begin{array}{l}x=1-6t\\y=1+2t\end{array}\right\}$. Determina el triángulo y halla su área.**

Igualamos el módulo de los vectores que van de la recta hasta los puntos $A$ y $B$.

$$\sqrt{(1-6t-2)^2+(1+2t-2)^2}=\sqrt{(1-6t+10)^2+(1+2t+2)^2}$$
$$\rightarrow t=1\rightarrow C(-5,3)$$

Hallamos las longitudes de los lados: $\overrightarrow{AB}=(-12,-4)$, $\overrightarrow{AC}=(-7,1)$ y $\overrightarrow{BC}=(5,5)$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-12)^2+(-4)^2}=\sqrt{160}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-7)^2+1^2}=\sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}$$

Determinamos la altura sobre el lado desigual, utilizando el teorema de Pitágoras:

$$h=\sqrt{\left(\sqrt{50}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{160}}{2}\right)^2}=\sqrt{10}\text{ u}$$

Por tanto, el área es: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{\sqrt{160}\cdot\sqrt{10}}{2}=20\text{ u}^2$

**145.** **Halla el área del cuadrilátero formado por los puntos (1, 3), (−2, 4), (−1, −3) y (3, −2).**

Sean $A(1, 3)$, $B(-2, 4)$, $C(-1, -3)$, $D(3, -2)$los puntos dados. La representación gráfica muestra que el cuadrilátero no es un paralelogramo. Entonces, para calcular el área hay que dividirlo en dos triángulos mediante una de sus diagonales:

La diagonal, $r_{AC}$, tiene por ecuación $r_{AC}: \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-2, -6) \\ A(1,3) \end{cases} \rightarrow y = 3x$

- Triángulo $ABC$:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-2, -6) \cdot (-3, 1) = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ Los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son perpendiculares. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \rightarrow A_{ABC} = \frac{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}}{2} = 10 \text{ u}^2.$$

- Triángulo $ADC$:

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = (2, -5) \cdot (4, 1) = 8 - 5 \neq 0 \rightarrow$ Los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares. Entonces, hay que calcular la altura, $h$, relativa al lado del triángulo que se tome como base:

Base $= \left|\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{10}$

La recta que definirá la altura, $h$, cumple lo siguiente:

$$r_h: \begin{cases} \overrightarrow{v_h} \perp \overrightarrow{AC} \\ D(3,-2) \end{cases}, \text{ es decir, } r_h: \begin{cases} \overrightarrow{v_h} = (6, -2) \\ D(3, -2) \end{cases} \rightarrow x + 3y = -3$$

El punto de intersección de $r_h$ con $r_{AC}$ permite obtener la longitud de la altura:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x \\ x + 3y = -3 \end{array}\right\} \rightarrow E\left(-\frac{3}{10}, -\frac{-9}{10}\right) \rightarrow h = \left|\overrightarrow{ED}\right| = \left|\left(\frac{33}{10}, -\frac{11}{10}\right)\right| = \frac{11\sqrt{10}}{10}$$

Por tanto, $A_{ADC} = \dfrac{2\sqrt{10} \cdot \frac{11\sqrt{10}}{10}}{2} = 11 \text{ u}^2$.

Así, $A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = 10 + 11 = 21 \text{ u}^2$.

**146.** **Calcula el centro de un paralelogramo del que conocemos los vértices (5, −1), (9, 5) y (−1, −5). ¿Cuántas soluciones tiene este problema? ¿Por qué? Haz un dibujo en el que se muestren todas las soluciones.**

Llamamos a los puntos $A(5, -1)$, $B(9, 5)$ y $C(-1, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = (4, 6)$

Hacemos una traslación con origen en $C$ y vector $(4, 6)$, y obtenemos un punto $D$, que forma un paralelogramo: $D(3, 1)$

Calculamos el centro del paralelogramo, $E$:

$$(x, y) = \left(\frac{9-1}{2}, \frac{5-5}{2}\right) \rightarrow E(4, 0)$$

Hacemos una traslación con origen en $C$ y vector $(-4, -6)$, y obtenemos un punto $D'$, que forma un paralelogramo: $D'(-5, -11)$

Calculamos el centro del paralelogramo, $E'$:

$$(x, y) = \left(\frac{9-5}{2}, \frac{5-11}{2}\right) \rightarrow E'(2, -3)$$

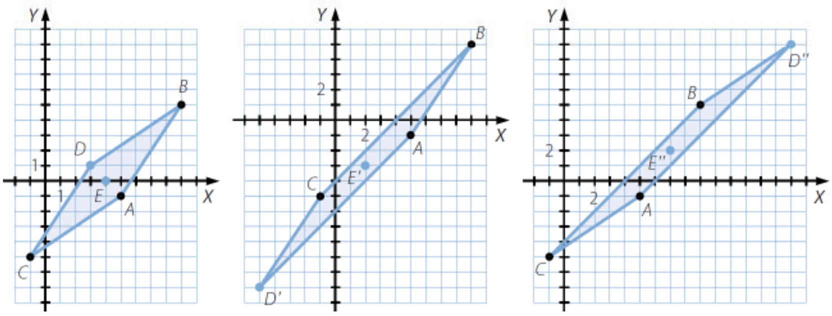
$\overrightarrow{CB} = (10, 10)$

Hacemos una traslación con origen en $A$ y vector $(10, 10)$,
y obtenemos un punto $D''$, que forma un paralelogramo: $D'' = (15, 9)$

Calculamos el centro del paralelogramo, $E''$:

$$(x, y) = \left(\frac{15-1}{2}, \frac{9-5}{2}\right) \to E''(7, 2)$$

Este problema tiene tres soluciones.



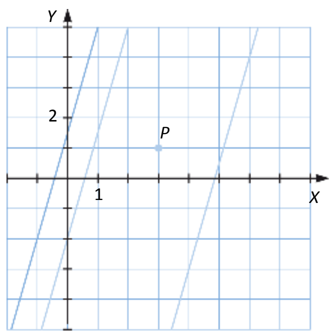

**147. Calcula la ecuación de las rectas paralelas a la recta $r$: $10x - 3y + 4 = 0$ cuya distancia al punto $P(3, 1)$ es 2.**

Sólo hay dos rectas que cumplan las características dadas. Como son paralelas a $r$, tienen el mismo vector director, es decir son:

$s: 10x - 3y + c = 0$ $\qquad$ $t: 10x - 3y + c' = 0$

Entonces, imponiendo la condición de la distancia:

$$d = \frac{|10 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + c|}{\sqrt{9+100}} = 2 \to \frac{|27+c|}{\sqrt{109}} \to \begin{cases} \dfrac{27+c}{\sqrt{109}} = 2 & \text{si } c \geq -27 \\ \dfrac{-27-c}{\sqrt{109}} = 2 & \text{si } c < -27 \end{cases} \to \begin{cases} c = 2\sqrt{109} - 27 \\ c' = -2\sqrt{109} - 27 \end{cases}$$

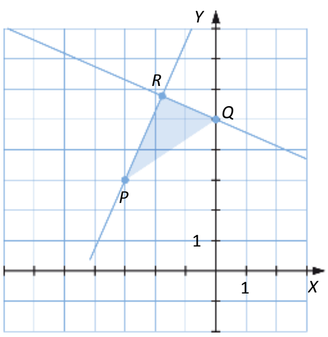



**148. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-3, 3)$ y se encuentra a una distancia de 2 unidades del punto $Q(0, 5)$.**

Como la recta pasa por el punto $P$:

$$ax + by + c = 0 \xrightarrow{P(-3,3)} -3a + 3b + c = 0$$

Se crea un triángulo rectángulo, cuyos vértices son $P$, $Q$ y $R$, donde $R$ es la proyección del punto $Q$ sobre la recta buscada:




$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\left|\overrightarrow{QR}\right| = 2 = |(x_R, y_R - 5)| = \sqrt{x_R^{\,2} + (y_R - 5)^2} \to 4 = x_R^{\,2} + (y_R - 5)^2$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$13 = 4 + \left|\overrightarrow{PR}\right|^2 \rightarrow 3 = \left|\overrightarrow{PR}\right| \rightarrow (x_R + 3)^2 + (y_R - 3)^2 = 9$$

Resolviendo el sistema, se obtienen las coordenadas del punto $R$:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = x_R{}^2 + (y_R - 5)^2 \\ (x_R + 3)^2 + (y_R - 3)^2 = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_R = 0,\ \ y_R = 3 \rightarrow \text{No válida.} \\ x_R = -\dfrac{24}{13},\ \ y_R = \dfrac{75}{13} \end{array}\right. \rightarrow R\left(-\frac{24}{13}, \frac{75}{13}\right)$$

La recta buscada está determinada por los puntos $P$ y $R$:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{PR} = R - P = \left(\dfrac{15}{13}, \dfrac{36}{13}\right) \rightarrow r: 36x - 15y = -153 \\ P(-3, 3) \end{array}\right.$$

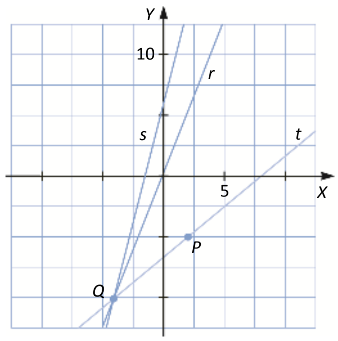
**149.** **Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -5)$ y por la intersección de las rectas $r$: $5x - 2y + 1 = 0$ y $s$: $4x - y + 7 = 0$.**

Primero se obtiene el punto $Q$, intersección de las rectas $r$ y $s$:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 2y + 1 = 0 \\ 4x - y + 7 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{y = 4x+7} 5x - 2(4x + 7) + 1 = 0 \rightarrow Q\left(-\frac{13}{3}, -\frac{31}{3}\right)$$

Para terminar se calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P$ y $Q$:

$$\left.\begin{array}{l} P(2, -5) \\ Q\left(-\dfrac{13}{3}, -\dfrac{31}{3}\right) \end{array}\right\} \rightarrow m = \frac{-5 + \dfrac{31}{3}}{2 + \dfrac{13}{3}} = \frac{16}{19} \rightarrow t: 16x - 19y - 127 = 0$$




**150.** **Calcula el valor de $k$ para que estas tres rectas se corten en el mismo punto. Determina las coordenadas de dicho punto.**

$2x + 5y - 1 = 0 \quad -x + 2y + k = 0 \quad 4x + 7y - 5 = 0$

Se denotan por $r$, $s$ y $t$ a las rectas dadas:

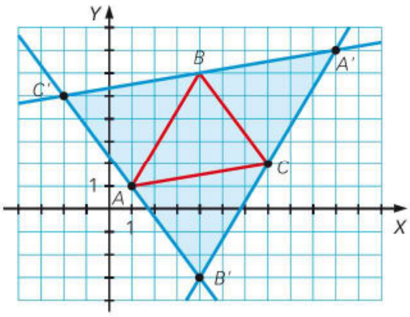
$$r: 2x + 5y - 1 = 0$$
$$s: -x + 2y + k = 0$$
$$t: 4x + 7y - 5 = 0$$

Calculando el punto de intersección, $P$, de las rectas $r$ y $t$, y obligando a que este punto pertenezca a la recta, se obtiene $k$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -4x - 10y + 2 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} -3y - 3 = 0 \rightarrow P(3, -1)$$

$$-x + 2y + k = 0 \xrightarrow{P(3,-1) \in s} -3 - 2 + k = 0 \rightarrow k = 5$$

**151.** **Sea el triángulo de vértices $A(1, 1)$, $B(4, 6)$ y $C(7, 2)$. Las rectas paralelas por cada vértice al lado opuesto forman un triángulo $A'B'C'$.**




**Determina las coordenadas de estos vértices y comprueba que los dos triángulos son semejantes calculando los ángulos de ambos triángulos.**

Primero se calculan las ecuaciones de las rectas determinadas por los puntos $A'$, $B'$ y $C'$ dos a dos:

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_{A'B'}} = B - A = (3, 5)\\ C(7, 2)\end{array}\right\} \to r_{A'B'}:\ 5x - 3y = 29$$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{v_{AC}} = \overrightarrow{v_{A'C'}} = C - A = (6, 1)\\ B(4, 6)\end{array}\right\} \to r_{A'C'}:\ x - 6y = -32$$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{v_{BC}} = \overrightarrow{v_{B'C'}} = C - B = (3, -4)\\ A(1, 1)\end{array}\right\} \to r_{B'C'}:\ 4x + 3y = 7$$

A continuación se obtienen las coordenadas de $A'$, $B'$ y $C'$ hallando las respectivas intersecciones de las rectas anteriores:

$$A' = r_{A'B'} \cap r_{A'C'} \to \left.\begin{array}{r}5x - 3y = 29\\ x - 6y = -32\end{array}\right\} \xrightarrow{x = 6y - 32} 5(6y - 32) - 3y = 29 \to A'(10, 7)$$

$$B' = r_{A'B'} \cap r_{B'C'} \to \left.\begin{array}{r}5x - 3y = 29\\ 4x + 3y = 7\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} B'(4, -3)$$

$$C' = r_{A'C'} \cap r_{B'C'} \to \left.\begin{array}{r}x - 6y = -32\\ 4x + 3y = 7\end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r}-4x + 24y = 128\\ 4x + 3y = 7\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Reducción}} C'(-2, 5)$$

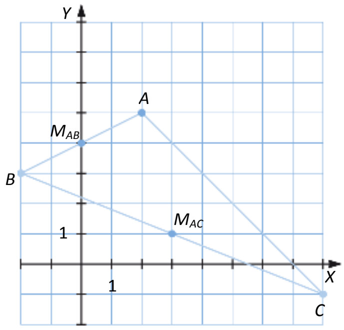
Para terminar, se comprueba que los dos triángulos son semejantes:

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{v_{AB}} \cdot \overrightarrow{v_{BC}}}{\left|\overrightarrow{v_{AB}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{BC}}\right|} = \frac{\overrightarrow{v_{A'B'}} \cdot \overrightarrow{v_{B'C'}}}{\left|\overrightarrow{v_{A'B'}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{B'C'}}\right|} = \cos\beta' = \frac{-11}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{9+16}} \to \beta = \beta' = 67{,}834° \to \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{v_{AC}} \cdot \overrightarrow{v_{BC}}}{\left|\overrightarrow{v_{AC}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{BC}}\right|} = \frac{\overrightarrow{v_{A'C'}} \cdot \overrightarrow{v_{B'C'}}}{\left|\overrightarrow{v_{A'C'}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{B'C'}}\right|} = \cos\gamma' = \frac{14}{\sqrt{36+1} \cdot \sqrt{9+16}} \to \gamma = \gamma' = 62{,}592° \to \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_{AB}} \cdot \overrightarrow{v_{AC}}}{\left|\overrightarrow{v_{AB}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{AC}}\right|} = \frac{\overrightarrow{v_{A'B'}} \cdot \overrightarrow{v_{A'C'}}}{\left|\overrightarrow{v_{A'B'}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_{A'C'}}\right|} = \cos\alpha' = \frac{23}{\sqrt{9+25} \cdot \sqrt{36+1}} \to \alpha = 49{,}574° \to \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

**152.** **En un triángulo *ABC*, un vértice es *A*(2, 5). El punto medio del lado *BC* es (3, 1) y el punto medio del lado *AB* es (0, 4). Calcula los vértices *B* y *C* del triángulo.**




$$M_{AB} = \frac{A+B}{2} \to (0, 4) = \frac{(2, 5)+(b_1+b_2)}{2} \to B(-2, 3)$$

$$M_{BC} = \frac{B+C}{2} \to (3, 1) = \frac{(-2, 3)+(c_1+c_2)}{2} \to C(8, -1)$$

**153.** **Determina las coordenadas de un punto *P*, sabiendo que pertenece a la recta *r*: *x* − *y* + 1 = 0 y dista 5 unidades del origen de coordenadas.**

Sea el punto $P(x, y)$. *P* debe cumplir $\left.\begin{matrix} d(P, O) = 5 \\ P \in r \end{matrix}\right\}$. Por tanto:

$$\left.\begin{matrix} \left|\overline{PO}\right| = \sqrt{a^2+b^2} = 5 \to a^2+b^2 = 25 \\ a-b+1=0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{a=b-1} (b-1)^2+b^2 = 25 \to \begin{cases} P_1(-4, -3) \\ P_2 = (3, 4) \end{cases}$$

**154.** **Halla las coordenadas de los puntos de la recta *r*: 2*x* + 3*y* + 4 = 0 que están a una distancia de 2 unidades de la recta *s*: 3*x* + 4*y* − 6 = 0.**

Se denota por $P(a, b)$ al punto o puntos buscados:

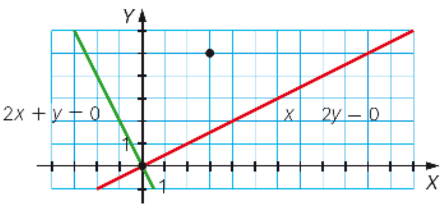
- Por un lado, $P \in r \to 2a+3b+4=0$.
- Por otro lado, imponiendo la condición de la distancia: $d(P, s) = \frac{|3a+4b-6|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|3a+4b-6|}{5} = 2$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, se obtiene *P*:

$$\left.\begin{matrix} 2a+3b+4=0 \\ \frac{3a+4b-6}{5} = 2 \end{matrix}\right\} \to x = 64 \to y = -44 \to P_1(64, -44) \qquad \left.\begin{matrix} 2a+3b+4=0 \\ \frac{-3a-4b+6}{5} = 2 \end{matrix}\right\} \to x = 4 \to y = -4 \to P_2(4, -4)$$

**155.** **Uno de los vértices de un paralelogramo es el origen de coordenadas y otro es el punto (3, 5).**

**Halla las coordenadas de los otros dos vértices si uno está en la recta de ecuación *x* − 2*y* = 0 y el otro está en la recta de ecuación 2*x* + *y* = 0.**



Sea $A(3, 5)$, $r: x-2y=0$ y $s: 2x+y=0$ el punto y las rectas conocidas.

Las rectas dadas son perpendiculares, pues su producto escalar es nulo.

$(2, 1)\cdot(-1, 2) = -2+2=0$

Con esta observación es fácil calcular las ecuaciones de los lados que faltan:

- Recta $t$:

  Aquella paralela a $s$ que pasa por $A$:

  $\vec{v}_s = (-1, 2) \rightarrow \vec{v}_t = (-1, 2) \xrightarrow{A\in t} t: 2x+y=11$

- Recta $z$:

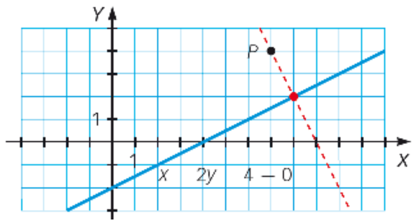
  Aquella paralela a $r$ que pasa por $A$:

  $\vec{v}_r = (2, 1) \rightarrow \vec{v}_z = (2, 1) \xrightarrow{A\in z} z: x-2y=-7$

Entonces, los vértices desconocidos del rectángulo son los puntos de intersección siguientes:

$$B = r\cap t \rightarrow \left.\begin{matrix} x-2y=0 \\ 2x+y=11 \end{matrix}\right\} \rightarrow B\left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right) \qquad C = s\cap z \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+y=0 \\ x-2y=-7 \end{matrix}\right\} \rightarrow C\left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

**156. Halla la proyección ortogonal del punto $P(7, 4)$ sobre la recta $x - 2y - 4 = 0$.**




Sea $r: x-2y-4=0$.

Primero se calcula la recta, $s$, perpendicular a $r$ que pasa por $P$:

$\vec{v}_r = (2, 1) \rightarrow \vec{v}_s = (-1, 2) \xrightarrow{P\in s} s:\ 2x+y=18$

Así, la proyección ortogonal del punto $P$ sobre la recta $r$ es otro punto $Q$, que viene determinado por la intersección entre $r$ y $s$:

$$\left.\begin{matrix} x-2y=4 \\ 2x+y=18 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{x=2y+4} 2(2y+4)+y=18 \rightarrow y=2 \rightarrow x=8 \rightarrow Q(8, 2)$$

**157. Encuentra un punto en el eje de abscisas que esté a la misma distancia del punto $A(5, 4)$ que de la recta $r: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-4}{3}$.**

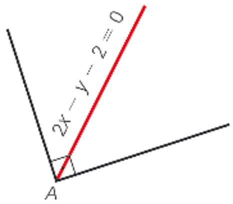
Sea $P(a, 0)$ el punto buscado. Entonces:

$$d(P, A) = d(P, r) \rightarrow \sqrt{(5-a)^2+4^2} = \frac{|3a+19|}{\sqrt{4^2+3^2}} \rightarrow \left(\sqrt{(5-a)^2+4^2}\right)^2 = \frac{(3a+19)^2}{25} \rightarrow 16a^2-364a+664=0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{83}{4} \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que ambas soluciones son válidas. Por tanto, hay dos puntos solución:

$P_1(2, 0) \qquad P_2\left(\dfrac{83}{4}, 0\right)$

**158.** **Un ángulo recto tiene su vértice en el punto $A(3, 4)$ y su bisectriz tiene por ecuación $2x - y - 2 = 0$. Halla las ecuaciones de sus lados.**




La bisectriz tiene por vector director $(1, 2)$.

Escribimos la ecuación punto-pendiente de los lados:

$y - 4 = m(x - 3) \rightarrow -mx + y - 4 + 3m = 0$

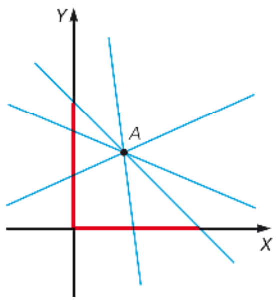
Aplicamos la fórmula del ángulo entre dos rectas:

$$\cos 45° = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\rightarrow m = -3,\ m = \frac{1}{3}$$

Las ecuaciones son: $3x + y - 13 = 0 \qquad -\frac{1}{3}x + y - 3 = 0$

**159.** **De todas las rectas que pasan por el punto $A(2, 3)$, calcula la que determina segmentos iguales al cortar a los dos ejes cartesianos.**




Las rectas que pasan por $A$ son de la forma:

$y - 3 = m(x - 2)$

Estas rectas cortan a los ejes en los puntos:

$(0, 3 - 2m) \qquad \left(\frac{-3 + 2m}{m}, 0\right)$

La distancia al origen $(0, 0)$ debe ser igual:

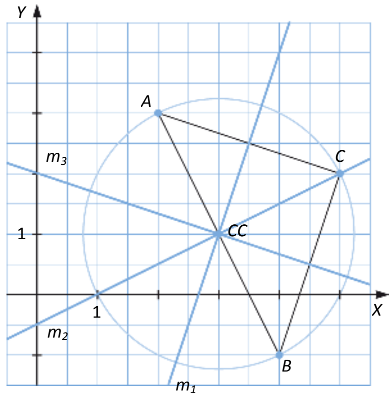
$$\sqrt{(3 - 2m)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3 + 2m}{m}\right)^2} \rightarrow \text{Hay tres soluciones.}$$

$m_1 = -1 \rightarrow y = -x + 5$

$m_2 = 1 \longrightarrow y = x + 1$

$m_3 = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$

**160. Halla las coordenadas del circuncentro del triángulo de vértices *A* que el circuncentro equidista de los vértices.**




Para hallar las coordenadas del circuncentro basta con calcular las ecuaciones de dos de las mediatrices del triángulo y obtener su intersección:

- Mediatriz 1:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC}=(3,-1)\rightarrow \overrightarrow{v_{m_1}}=(1,3) \\ M_1=\dfrac{A+C}{2}\rightarrow M_1=\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{5}{2}\right) \end{array}\right\}\rightarrow m_1: 3x-y=8$$

- Mediatriz 2:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(2,-4)\rightarrow \overrightarrow{v_{m_2}}=(4,2) \\ M_2=\dfrac{A+B}{2}\rightarrow M_2=(3,1) \end{array}\right\}\rightarrow m_2: x-2y=1$$

Así, el circuncentro es el punto $CC=m_1\cap m_2\rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-y=8 \\ x-2y=1 \end{array}\right\}\xrightarrow{x=2y+1} CC(3,1)$

Obteniendo la tercera mediatriz, y viendo si pasa por el circuncentro, se comprueba si está bien calculado:

$m_3: x+3y=6\xrightarrow{CC(3,1)}3+3=6\rightarrow$ Es correcto.

**161. Halla la ecuación de la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (3, 0) y (0, 5). Confirma que esa ecuación puede escribirse en la forma $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1$.**

**Comprueba que si una recta corta a los ejes en los puntos ($a$, 0) y (0, $b$), su ecuación puede escribirse en la forma $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.**

**Esta manera de escribir una recta se llama forma canónica o segmentaria.**

Sean $A(3,0)$ y $B(0,5)$. La recta *r* que pasa por (3, 0) y (0, 5) es:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_r=(3,0)-(0,5)=(3,-5) \\ A(3,0) \end{array}\right\}\rightarrow r:\ 5x+3y=15$$

En general, si una recta corta a los ejes en los puntos $P(a,0)$ y $Q(0,b)$, su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{PQ}=Q-P=(-a,b) \\ P(a,0) \end{array}\right\}\rightarrow \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b}\rightarrow -\frac{x}{a}+1=\frac{y}{b}\rightarrow s: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

**162. Dado el segmento *AB*, donde *A*(−2, 1) y *B*(2, 3), construye los posibles triángulos equiláteros en los que *AB* es uno de sus lados.**

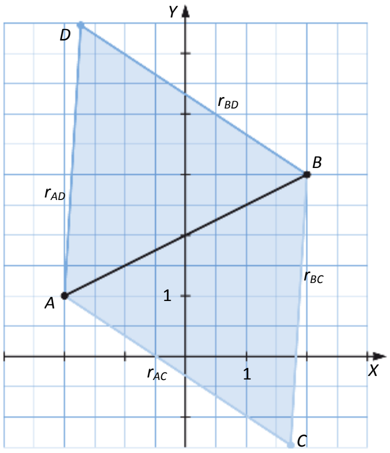
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(4,2) \\ A(-2,1) \end{array}\right\}\rightarrow\ r_{AB}: x-2y=-4$$

La ecuación genérica de las rectas buscadas que pasan por *A* es:

$y+2=m(x-1)\rightarrow mx-y-(2+m)=0$

Así, aplicando la condición del ángulo, se obtienen las posibles pendientes:

$$\cos 60° = \frac{|m+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}} \to \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{|m+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+m^2}}\right)^2 \to m^2 - 16m - 11 = 0 \to \begin{cases} m_1 = 8-5\sqrt{3} \\ m_2 = 8+5\sqrt{3} \end{cases}$$




Entonces, se tiene que:

$$\begin{cases} m_1 = 8-5\sqrt{3} \to \quad r_{AC}: (8-5\sqrt{3})x - y - (10-5\sqrt{3}) = 0 \\ m_2 = 8+5\sqrt{3} \to \quad r_{AD}: (8+5\sqrt{3})x - y - (10+5\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

La ecuación genérica de las rectas buscadas que pasan por $B$ es $y-3 = m(x-2) \to mx - y + (3-2m) = 0$ :

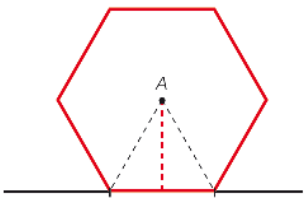
Así, se tiene que $\begin{cases} m_1 = 8-5\sqrt{3} \to \quad r_{BD}: (8-5\sqrt{3})x - y + (-13+10\sqrt{3}) = 0 \\ m_2 = 8+5\sqrt{3} \to \quad r_{CB}: (8+5\sqrt{3})x - y + (-13-10\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$

Realizando las correspondientes intersecciones se obtienen los puntos $C$ y $D$, vértices de los dos triángulos posibles:

$$C = r_{AC} \cap r_{CB} \to \left.\begin{matrix} (8-5\sqrt{3})x - y - (10-5\sqrt{3}) = 0 \\ (8+5\sqrt{3})x - y + (-13-10\sqrt{3}) = 0 \end{matrix}\right\} \to \ldots \to C\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{10}, \frac{1}{2}-\frac{17\sqrt{3}}{10}\right)$$

$$D = r_{AD} \cap r_{BD} \to \left.\begin{matrix} (8+5\sqrt{3})x - y - (10+5\sqrt{3}) = 0 \\ (8-5\sqrt{3})x - y + (-13+10\sqrt{3}) = 0 \end{matrix}\right\} \to \ldots \to D\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{10}, \frac{1}{2}+\frac{17\sqrt{3}}{10}\right)$$

**163. El centro de un hexágono regular es el punto $A(6, -2)$ y un lado se halla sobre la recta de ecuación $-4x + 3y + 5 = 0$. Determina las coordenadas de los vértices y su área.**




Calculamos la longitud de la apotema:

$$d(A, r) = \frac{|-4\cdot 6 + 3\cdot(-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 5$$

Hallamos la longitud del lado: $l = \sqrt{5^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} \to l = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ u

Determinamos el área: $A = \frac{P\cdot a_p}{2} = \frac{6\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3}\cdot 5}{2} = 50\sqrt{3}$ u$^2$

Calculamos los puntos que distan $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ de $A$ y pertenecen a la recta dada:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{10\sqrt{3}}{3}=\sqrt{(6-x)^2+(-2-y)^2}\\ -4x+3y+5=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x_1=\sqrt{3}+2,\ y_1=1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\\ x_2=-\sqrt{3}+2,\ y_2=1-\frac{4\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}$$

$$B\left(\sqrt{3}+2,1+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\qquad C\left(-\sqrt{3}+2,1-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Otros dos vértices son simétricos a los vértices calculados respecto de $A$.

$$(6,-2)=\left(\frac{\sqrt{3}+2+x}{2},\frac{1+\frac{4\sqrt{3}}{3}+y}{2}\right)\rightarrow D\left(10-\sqrt{3},-5-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(6,-2)=\left(\frac{-\sqrt{3}+2+x}{2},\frac{1-\frac{4\sqrt{3}}{3}+y}{2}\right)\rightarrow E\left(10+\sqrt{3},-5+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

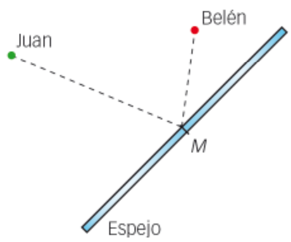
Para calcular los restantes vértices tenemos en cuenta la longitud de los lados.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\left(10+\sqrt{3}-x\right)^2+\left(-5+\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\\ \sqrt{\left(\sqrt{3}+2-x\right)^2+\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=6,\ y=-2\\ x=2\sqrt{3}+6,\ y=\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\left(10-\sqrt{3}-x\right)^2+\left(-5-\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\\ \sqrt{\left(-\sqrt{3}+2-x\right)^2+\left(1-\frac{4\sqrt{3}}{3}-y\right)^2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x=6,\ y=-2\\ x=-2\sqrt{3}+6,\ y=-\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\end{array}\right\}$$

$$F\left(2\sqrt{3}+6,\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\right)\qquad G\left(-2\sqrt{3}+6,-\frac{8\sqrt{3}}{3}-2\right)$$

**164.** **Juan y Belén se están mirando uno al otro a través de un espejo situado según la recta de ecuación $y=-x+2$. Belén se encuentra en el punto $(-9,-1)$ y Juan en $(-4,3)$. ¿Qué coordenadas tiene el punto $M$ al que miran?**




Hallamos el vector director de la recta dada:

$\vec{u_r}=(1,-1)$

Un vector perpendicular es $\vec{u_s}=(1,1)$.

La recta, perpendicular al espejo, que pasa por donde está Belén es:

$$\left.\begin{array}{l}x=-9+\lambda\\ y=-1+\lambda\end{array}\right\}$$

Determinamos el punto de corte de las dos rectas:

$-1+\lambda=9-\lambda+2\rightarrow\lambda=6\rightarrow(-3,5)$

Calculamos el punto simétrico respecto del espejo, $B'$:

$$(-3,5)=\left(\frac{x-9}{2},\frac{y-1}{2}\right)\rightarrow B'=(3,11)$$

Repitiendo el proceso con el otro punto dado obtenemos $J'$:

$$\left.\begin{array}{l} x=-4+\lambda \\ y=3+\lambda \end{array}\right\}$$

$$3+\lambda=4-\lambda+2\rightarrow\lambda=\frac{3}{2}\rightarrow\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$$

$$\left(-\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{x-4}{2},\frac{y+3}{2}\right)\rightarrow J'(-1,6)$$

Determinamos la recta que pasa por $(-9, 1)$ y por $J'$:

$$\left.\begin{array}{l} x=-9+8\lambda \\ y=-1+7\lambda \end{array}\right\}$$

Calculamos la recta que pasa por $(-4, 3)$ y por $B'$:

$$\left.\begin{array}{l} x=-4+7\mu \\ y=3+8\mu \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} -9+8\lambda=-4+7\mu \\ -1+7\lambda=3+8\mu \end{array}\right\}\rightarrow\lambda=\frac{4}{5}\rightarrow\mu=\frac{1}{5}$$

El punto de corte es: $\left(-\frac{13}{5},\frac{23}{5}\right)$

**165. La recta $-2x+y=-3$ es la mediatriz de un segmento $AB$ con $A(-2, 3)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto $B$?**

La recta perpendicular a la mediatriz que contiene al punto $A$, es decir, la recta que contiene al segmento $AB$ es:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_{AB}}=(2,-1) \\ A(-2,3) \end{array}\right\}\rightarrow r: x+2y=4$$

Su punto de corte con la mediatriz es $\left.\begin{array}{l} x+2y=4 \\ -2x+y=-3 \end{array}\right\}\rightarrow C(2,1)$, que es el punto medio del segmento $AB$.

Entonces, las coordenadas de $B$, punto simétrico de $A$ respecto a $C$ son:

$$B(2\cdot 2+2, 2\cdot 1-3)=(6,-1)$$

## PARA PROFUNDIZAR

**166.** **Elige la respuesta adecuada.** (Concurso de Primavera)

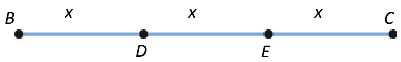
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Si la recta $y = mx$ divide al triángulo de vértices (0, 0), (1, 1) y (6$m$, 0) en dos triángulos de igual área, la suma de todos los valores posibles de $m$ es: | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| En el segmento $BC$ marcamos los puntos $D$ y $E$ que lo dividen en tres segmentos iguales. Si $BD^2 + BE^2 = k \cdot BC^2$, el valor de $k$ es: | $\frac{5}{9}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 2 | $\frac{1}{4}$ |
| ¿Cuál es el área del triángulo de vértices $A(4, 0)$, $B(0, 4)$ y $C(-2010, 4020)$? | 4010 | 4012 | 4014 | 4016 | 4018 |
| Si la recta $y = 3x + 4$ se refleja sobre la recta $y = -x$, ¿cuál es la ecuación de la recta imagen? | $3y = x + 4$ | $3y = x - 4$ | $y = 3x - 4$ | $y = -3x - 4$ | $y = 4x + 3$ |
| Las rectas $r_1$ y $r_2$ son simétricas respecto de la recta $y = x$. Si la ecuación de $r_1$ es $y = ax + b$, con $a \neq 0$, la ecuación de $r_2$ es: | $y = \frac{x}{a} + b$ | $y = -\frac{x}{a} + b$ | $y = -\frac{x}{a} - \frac{b}{a}$ | $y = \frac{x}{a} + \frac{b}{a}$ | $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$ |

- La recta $y = mx$ y pasa por el origen de coordenadas. Para que divida al triángulo dado en otros dos de igual área, el punto medio del lado opuesto:

$$M = \frac{(1,1) + (6m, 0)}{2} = \left(\frac{1+6m}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$M \in r: y = mx \rightarrow \frac{1}{2} = m \cdot \frac{1+6m}{2} \rightarrow 6m^2 + m - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} m_1 = -\frac{1}{2} \\ m_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow m_1 + m_2 = -\frac{1}{6}$$

- Sea $x$ la longitud del segmento $BD$. Entonces:




$$x^2 + (2x)^2 = k(3x)^2 \rightarrow 5x^2 = 9kx^2 \rightarrow k = \frac{5}{9}$$

- $\overrightarrow{AB} = (-4, 4) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

$$\overrightarrow{AC} = (-2\,014, 4020) \rightarrow \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2\,014^2 + 4\,020^2} = 4\,496{,}29$$

$$\overrightarrow{BC} = (-2\,010, 4\,016) \rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2\,010^2 + 4\,016^2} = 4\,490{,}92$$

  - Base: segmento $AC \rightarrow b = 4\,496{,}29$
  - Altura: se calcula la recta perpendicular a la recta $r_{AC}$; después, el punto de intersección entre ellas; y, para terminar, la distancia entre el punto obtenido y $B$:

$$r_{AC}: 2\,010x + 1\,007y = 8\,040$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}_h = (-2\,010, -1\,007) \\ B(0, 4) \end{array}\right\} \rightarrow r_h: 1\,007x - 2\,010y = -8\,040$$

$$D = r_{AC} \cap r_h = (1{,}595;\ 4{,}799) \rightarrow h = \left|\overrightarrow{BD}\right| = 1{,}784$$

Así, el área será $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4\,496{,}29 \cdot 1{,}784}{2} = 4\,010{,}546$ Por tanto, la respuesta más aproximada es 4 010.

- Primero se calcula el ángulo entre las dos rectas dadas:

$$\cos\alpha = \frac{|3-1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} \to \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \to \alpha = 63{,}435°$$

A continuación se obtiene el punto de corte entre estas rectas:

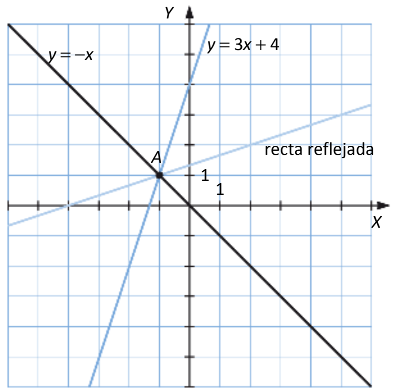
$$\left.\begin{array}{l} y=-x \\ y=3x+4 \end{array}\right\} \to -4x=4 \to P(-1,1)$$

Por otro lado, la ecuación de la recta reflejada, dada en su forma punto-pendiente es:

$$y-1=m(x+1) \to mx-y+m-1=0$$

El ángulo entre la recta reflejada y la recta $y=-x$ debe ser el obtenido anteriormente:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \left(\frac{|m-1|}{\sqrt{2+2m^2}}\right)^2 \to \frac{1}{5} = \frac{m^2+1-2m}{2+2m^2} \to 3m^2-10m+3=0 \to \begin{cases} m_1=3 \\ m_2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$




La pendiente de la recta dada es 3, por tanto, la pendiente de la recta reflejada es $\frac{1}{3}$.

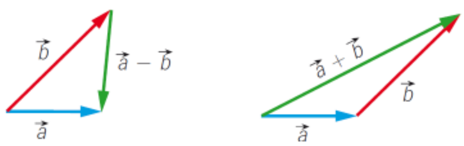
Entonces, la ecuación de la recta reflejada es $y-1=\frac{1}{3}(x+1) \to 3y=x+4$

- Repitiendo de forma general el procedimiento del apartado anterior, se obtiene que la ecuación de la recta reflejada es $y=\frac{x}{a}+\frac{b}{a}$.

**167.** **Calcula el ángulo que deben formar dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, para que sus módulos coincidan con el módulo de su diferencia, $\vec{a}-\vec{b}$.**

**Es decir, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.**

**¿Y para que coincidan con el módulo de su suma, $\vec{a}+\vec{b}$?**



$\vec{a} = (x, y)$

$\vec{b} = (z, t)$

$\vec{a} - \vec{b} = (x - z, y - t)$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{z^2 + t^2}$

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(x - z)^2 + (y - t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt}$

Igualando, resulta que:

$$x^2 + y^2 = x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt \rightarrow \frac{z^2 + t^2}{2} = xz + yt$$

Calculamos el ángulo que forman:

$$\cos\alpha = \frac{xz + yt}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

Para que los módulos de dos vectores del mismo módulo coincidan con su diferencia deben formar un ángulo de 60°.

$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(x - z)^2 + (y - t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt}$

Igualando, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = x^2 + z^2 + 2xz + y^2 + t^2 + 2yt \rightarrow \frac{z^2 + t^2}{-2} = xz + yt$$

Calculamos el ángulo que forman:

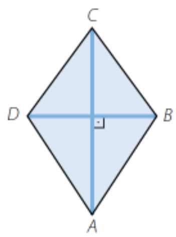
$$\cos\alpha = \frac{xz + yt}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2}} = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 120°$$

Para que los módulos de dos vectores del mismo módulo coincidan con su suma deben formar un ángulo de 120°.

**168.** **Demuestra que si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tienen el mismo módulo, entonces $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ forman un ángulo recto.**

**Deduce de este resultado que las diagonales de un rombo son perpendiculares.**

Sean $\vec{a} = \vec{u}$ y $\vec{b} = \vec{v}$ dos vectores cualquiera.




Aplicamos los resultados de la actividad anterior:

$\vec{u} = (x, y)$

$\vec{v} = (z, t)$

$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(x - z)^2 + (y - t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt}$

$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(x + z)^2 + (y + t)^2} = \sqrt{x^2 + z^2 + 2xz + y^2 + t^2 + 2yt}$

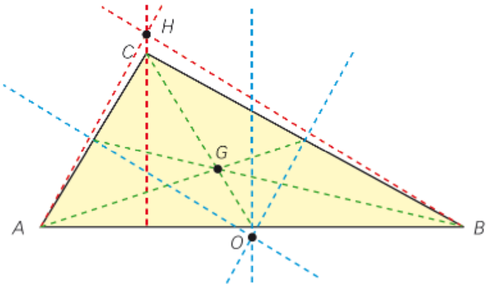
$$\sqrt{x^2 + z^2 - 2xz + y^2 + t^2 - 2yt} = \sqrt{x^2 + z^2 + 2xz + y^2 + t^2 + 2yt} \rightarrow 0 = xz + yt$$

$$\cos\alpha = \frac{xz + yt}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{z^2 + t^2}} = 0 \rightarrow \alpha = 90°$$

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores de los lados del rombo, que tienen el mismo módulo.

Las diagonales del rombo se obtienen, respectivamente, sumando y restando $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por lo que las diagonales son perpendiculares.

**169.** **La recta de Euler de un triángulo es aquella que contiene al ortocentro, al circuncentro y al baricentro del triángulo. Se llama así en honor al matemático suizo Leonhard Euler, quien descubrió este hecho a mediados del siglo XVIII.**




**Halla la recta de Euler en el triángulo de vértices $A(-5, 6)$, $B(-1, 4)$ y $C(3, -2)$ y comprueba que tanto el baricentro $G$, el ortocentro $H$ y el circuncentro están en esa recta y que verifican la relación $\overline{GH} = 2\overline{GO}$.**

Calculamos el baricentro, $G$, y para ello sumamos las coordenadas de los puntos y dividimos entre tres: $G\left(-1, \frac{8}{3}\right)$.

Para hallar el ortocentro, calculamos una recta perpendicular al lado $AB$ que pase por $C$:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2}$$

Determinamos una recta perpendicular al lado $AC$ que pase por $B$:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1}$$

El punto de corte de estas rectas es el ortocentro: $H(13, 18)$.

Para hallar el circuncentro, calculamos la recta que pasa por el punto medio del lado $AB$ y es perpendicular al mismo.

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-5}{2}$$

Determinamos la recta que pasa por el punto medio de $AC$ y es perpendicular al mismo.

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1}$$

El punto de corte de estas dos rectas es el circuncentro: $O(-8, -5)$.

Calculamos la recta que pasa por $GH$:

$$\frac{x-13}{14} = \frac{y-18}{46/3} \rightarrow 23x - 21y + 79 = 0$$

Como $O$ verifica las ecuaciones de la ecuación de la recta, los tres puntos están alineados.

Hallamos la distancia $GH$: $\quad |GH| = \sqrt{(13+1)^2 + \left(18 - \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3\,880}}{3} = 20{,}76$

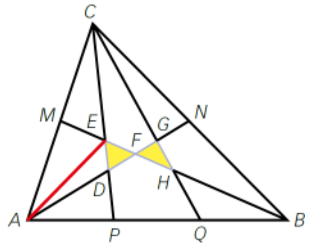
Hallamos la distancia $GO$: $\quad |GO| = \sqrt{(-8+1)^2 + \left(-5 - \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{970}}{3} = 10{,}38$

Efectivamente $|GH| = 2|GO|$.

**170.** **Por los puntos medios de los lados de un triángulo *ABC* trazamos las medianas y unimos los puntos que trisecan el tercer lado con el vértice opuesto. Así, en el interior se obtiene una pajarita (dos triángulos unidos por un vértice).**

**¿Se puede calcular la fracción de superficie total del triángulo que representa la pajarita?**

(Olimpiadas matemáticas. Fase Local)



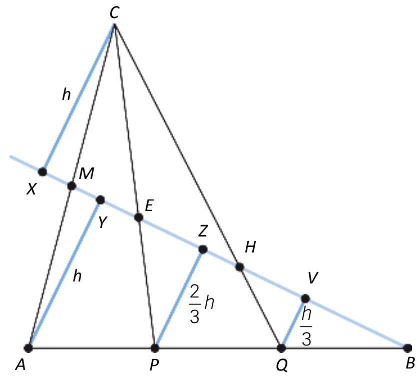

Para empezar, se supone que el área del triángulo dado es uno, es decir, $A_{ABC}=1$.

Las medianas dividen al triángulo en seis partes iguales, por ello:

$$A_{AMF}=A_{FNB}=\frac{1}{6} \qquad\qquad A_{AFB}=2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

Se trazan desde *A*, *C*, *P* y *Q* perpendiculares sobre la mediana *BM*, siendo *X, Y, Z* y *V* sus respectivos pies.

Observando la figura, se tiene las siguientes relaciones:




- $AMY\equiv CMX$ . Como $AM=MC\rightarrow AY=XC=h$ .
- $AYB\cong PZB\cong QVB$ . Como $AP=PQ=QB\rightarrow PZ=\frac{2}{3}h$ y $QV=\frac{1}{3}h$ .
- $PEZ\cong XCE$ . Como $PZ=\frac{2}{3}XC\rightarrow PE=\frac{2}{3}EC\rightarrow PE=\frac{2}{5}PC$ y $EC=\frac{3}{5}PC$ .
- $QHV\cong XCH$ . Como $QV=\frac{1}{3}QC\rightarrow QH=\frac{1}{3}HC\rightarrow QH=\frac{1}{4}QC$ .

Realizando el mismo procedimiento sobre la mediana *AN*:

$$QG=\frac{2}{5}QC \qquad GB=\frac{3}{5}QC \qquad PD=\frac{1}{4}PC$$

Observando la mediana *PC*, y los puntos *D* y *E*:

$$DE=PE-PD=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)PC=\frac{3}{20}PC\rightarrow\begin{cases}PD=\frac{5}{20}PC\\ DE=\frac{3}{20}PC\\ EC=\frac{12}{20}PC\end{cases}$$

Se traza la línea auxiliar *AE*, y se observa que los triángulos *ACE*, *AED* y *ADP* tienen igual altura. Así:

$$\frac{A_{ADP}}{A_{ACP}}=\frac{PD}{PC}=\frac{5}{20} \qquad \frac{A_{AED}}{A_{ACP}}=\frac{DE}{PC}=\frac{3}{20} \qquad \frac{A_{ACE}}{A_{ACP}}=\frac{EC}{PC}=\frac{12}{20}$$

Como $A_{ACP}=\frac{1}{3}\rightarrow\begin{cases}A_{ADP}=\frac{5}{60}\\ A_{AED}=\frac{3}{60}\\ A_{ACE}=\frac{12}{60}\end{cases}$

Por otra parte, como *EM* es mediana del triángulo *ACE*, $A_{AME}=\frac{1}{2}A_{ACE}=\frac{6}{60}$ . Y entonces:

$$\frac{1}{6} = A_{AMF} = A_{AME} + A_{AED} + A_{DEF} = \frac{1}{10} + \frac{3}{60} + A_{DEF} \rightarrow A_{DEF} = \frac{1}{60}$$

Análogamente, $A_{FGH} = \frac{1}{60}$, y así: $A_{\text{Pajarita}} = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$

Luego, el área del triángulo *ABC* es 30 veces el área de la pajarita.

## MATEMÁTICAS EN TU VIDA

**1. ¿Por qué crees que influyen el viento y las mareas en el rumbo del barco siniestrado?**

El viento y las mareas pueden variar la dirección del rumbo, alejando o acercando el barco hacia la costa. Cuanto más tiempo pase el barco a la deriva, más probable es que esto ocurra.

**2. ¿Qué relación existe entre el vector $\overrightarrow{OP}$ y los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{OA}$?**

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$

**3. ¿Crees que es posible aplicar un método similar si se quiere interceptar un barco sospechoso de contrabando avistado desde un avión?**

Sí, siempre y cuando el avión se posicione encima del barco y emita la señal de radio a la base de los guardacostas.

**4. Halla las ecuaciones de las rectas que se describen a continuación.**

a) La dirección del barco guardacostas cuando va a efectuar el rescate.

b) La recta que une la base con el primer punto de contacto.

c) La recta que une la base con el segundo punto de contacto.

d) La dirección del barco siniestrado cuando va a la deriva.

Sean $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $P(p_1, p_2)$ y $O(0, 0)$. Entonces:

a) La dirección que lleva el barco guardacostas es la dirección del vector $\overrightarrow{OP} = P - O = (p_1, p_2)$.

La recta que marca esta dirección es $y = \frac{p_2}{p_1}x$.

b) La recta que une la base con el punto *A*, es $y = \frac{a_2}{a_1}x$.

c) La recta que une la base con el punto *B*, es $y = \frac{b_2}{b_1}x$.

d) La dirección del barco cuando va a la deriva es la del vector $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.

La recta correspondiente es $y = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}x + \frac{b_1a_2 - b_2a_1}{b_1 - a_1}$

**5. Halla los puntos de corte que tienen las rectas anteriores entre sí.**

El punto $O(0, 0)$ es el punto de corte entre las rectas de los apartados a), b) y c).

- El punto *A* es el punto de corte entre las rectas $r_{OA}$ y $r_{AB}$.
- El punto *B* es el punto de corte entre las rectas $r_{OB}$ y $r_{AB}$.
- El punto *P* es el punto de corte entre las rectas $r_{OP}$ y $r_{AB}$, pues está alineado con *A* y *B*.