

## 7

# INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

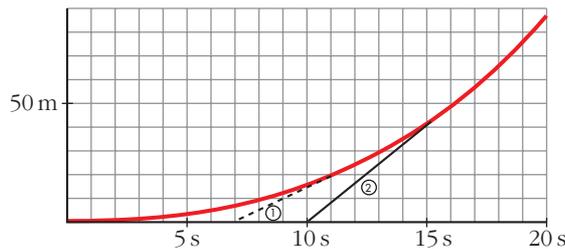
Página 175

## REFLEXIONA Y RESUELVE

### Tomar un autobús en marcha

En la gráfica siguiente, la línea roja representa el movimiento de un autobús que arranca de la parada y va, poco a poco, ganando velocidad.

① y ② corresponden a pasajeros que llegan tarde y corren para tomar el autobús en marcha.



a) Al viajero ② lo acercan en bicicleta. Describe su movimiento y halla la velocidad a la que corre.

b) ¿Cuál es la velocidad aproximada del autobús en el momento que lo alcanza el pasajero ②?

¿Entra este pasajero suavemente en el autobús?

a) El pasajero 2 llega a la parada 10 s después de que saliera el autobús, y lo alcanza 5 s después, 40 m más allá.

Corrió, por tanto, a  $\frac{40}{5} = 8$  m/s. Es decir:  $8 \cdot 3,6 = 28,8$  km/h

b) En el instante 14 s está a 35 m de la parada. En el instante 16 s está a 50 m de la parada.

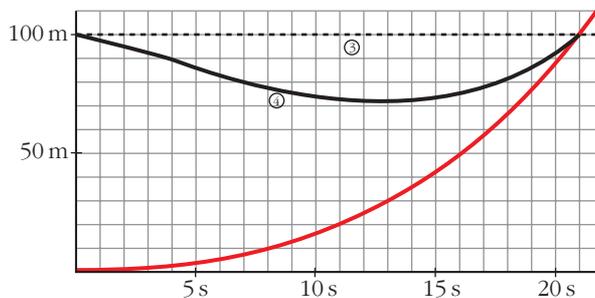
Velocidad media =  $\frac{15 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 7,5$  m/s = 27 km/h

Las velocidades del pasajero 2 y del autobús son, aproximadamente, iguales en el momento en el que el pasajero accede al autobús; por tanto, accederá suavemente.

## ¿Es preferible esperar o correr tras el autobús?

Los viajeros ③ y ④, en el momento de la salida del autobús, estaban a 100 m de la parada. El ③ decide esperar y entrar en él cuando pase por allí.

El ④ tiene un extraño comportamiento. ¿Extraño?

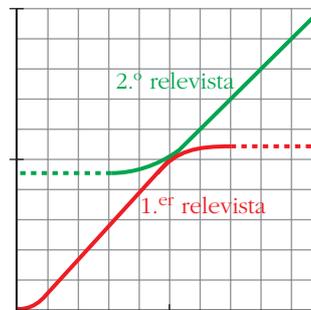


- Describe el movimiento del pasajero ④.
- Explica por qué el comportamiento del pasajero ④ es mucho más sensato que el del ③, quien tendrá muy difícil la entrada en el autobús.
  - Intenta alcanzar aproximadamente la velocidad que lleva el autobús para acceder a él suavemente.
  - El pasajero 4 accede suavemente al autobús (con la misma velocidad, aproximadamente); sin embargo, el 3 no.

## Carrera de relevos

La siguiente gráfica refleja el comportamiento de dos atletas, del mismo equipo, durante una carrera de relevos:

- ¿Por qué en las carreras de relevos  $4 \times 100$  m cada relevista empieza a correr antes de que llegue su compañero?
- ¿Qué pasaría si esperara quieto la llegada del otro?
- ¿Es razonable que las gráficas de sus movimientos sean tangentes?  
¿Cómo son sus velocidades en el momento de la entrega del “testigo”?



- Para que el “testigo” pase sin brusquedades del que llega al que se va.
- El intercambio sería muy brusco y se perdería tiempo.
- Sí, así llevarán los dos la misma velocidad,

## Página 177

1. Halla la T.V.M. de la función  $y = x^2 - 8x + 12$  en los siguientes intervalos:

$$[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8]$$

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - 5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{0 - 5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{5 - 5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8) - f(1)}{8 - 1} = \frac{12 - 5}{7} = 1$$

2. Halla la T.V.M. de  $y = x^2 - 8x + 12$  en el intervalo variable  $[1, 1 + h]$ . Comprueba, dando a  $h$  los valores adecuados, que se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

$$\begin{aligned} \text{T.V.M. } [1, 1 + h] &= \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{(1 + h)^2 - 8(1 + h) + 12 - 5}{h} = \\ &= \frac{h^2 - 6h}{h} = \frac{h(h - 6)}{h} = h - 6 \end{aligned}$$

Dando a  $h$  los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

## Página 178

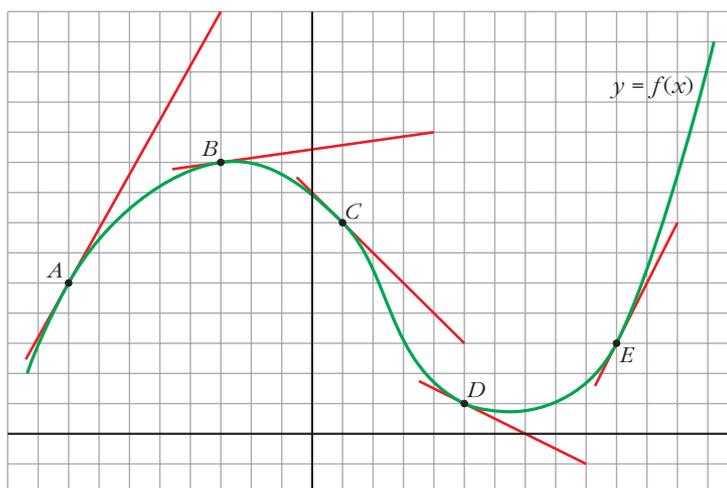
1. En la gráfica, en verde, de la función adjunta, se han señalado cinco puntos,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ .

En cada uno de ellos está trazada la recta tangente, cuya pendiente se puede calcular.

Expresa los resultados utilizando la expresión  $f'(a) = \dots$

Por ejemplo, para el punto  $B$ :

$$f'(-3) = \dots$$



$$f'(-8) = \frac{9}{5}; f'(-3) = \frac{1}{7}; f'(1) = -1; f'(5) = -\frac{1}{2}; f'(10) = 2$$

## Página 179

- 2. Halla, aplicando la definición, el valor de la derivada de  $y = 5x - x^2$  en los puntos de abscisas 0, 1, 2, 4 y 5.**

**Hazlo también, aproximadamente, con calculadora, tomando  $h = 0,0001$ .**

Por la definición  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ :

$$f'(0) = 5; f'(1) = 3; f'(2) = 1; f'(4) = -3; f'(5) = -5$$

Con calculadora (numéricamente, de forma aproximada):

$$f'(0) \approx \frac{f(0,0001) - f(0)}{0,0001} = 4,9999$$

$$f'(1) \approx \frac{f(1,0001) - f(1)}{0,0001} = 2,9999$$

$$f'(2) \approx \frac{f(2,0001) - f(2)}{0,0001} = 0,9999$$

$$f'(4) \approx \frac{f(4,0001) - f(4)}{0,0001} = -3,0001$$

$$f'(5) \approx \frac{f(5,0001) - f(5)}{0,0001} = -5,0001$$

## Página 180

1. Halla la derivada de  $f(x) = 5x - x^2$  y comprueba que, a partir de ella, se pueden obtener los valores concretos hallados en la página anterior.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[5(x+h) - (x+h)^2] - [5x - x^2]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h - h^2 - 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (5 - h - 2x) = 5 - 2x \end{aligned}$$

$$f'(3) = -1; f'(0) = 5; f'(1) = 3; f'(2) = 1; f'(4) = -3; f'(5) = -5$$

2. Halla la derivada de  $y = x^2 - 5x + 6$  y, a partir de ella, halla  $f'(-2)$ ,  $f'(0)$  y  $f'(3)$ . ¿Qué significan los resultados?

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^2 - 5(x+h) + 6] - [x^2 - 5x + 6]}{h} = \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h + 6 - x^2 + 5x - 6}{h} = \\ &= \frac{2xh + h^2 - 5h}{h} = 2x + h - 5 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 5) = 2x - 5$$

$$f'(x) = 2x - 5$$

$$f'(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$f'(3) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

Significa que la tangente pasa de tener pendiente negativa a tenerla positiva.

## Página 182

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1.  $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$$f'(x) = 6x - 6$$

2.  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$3. f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{5x}}$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$f(x) = x^{-3/2} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2} x^{-5/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

$$5. f(x) = \text{sen } x \cos x$$

$$f'(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

$$6. f(x) = \text{tg } x.$$

Expresa  $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$  y deriva como cociente. Al simplificar, ten en cuenta

que:

$$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} D \text{tg } x &= \frac{D(\text{sen } x) \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot D(\cos x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x)}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$7. f(x) = x e^x$$

$$f'(x) = e^x + x e^x = e^x(1 + x)$$

$$8. f(x) = x \cdot 2^x$$

$$f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2)$$

$$9. f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$$

$$f'(x) = 2x \log_2 x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{(x^2 + 1)}{x \ln 2}$$

$$10. f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1) 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$11. f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 5)x - (x^3 + 3x^2 - 5x + 3)}{x^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2} = 2x + 3 - \frac{3}{x^2}$$

$$12. f(x) = \frac{\log x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{[1/(\ln 10)] - \log x}{x^2} = \frac{1 - \ln 10 \log x}{x^2 \ln 10}$$

$$13. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1(x^2 - 1) - x(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} - \frac{-1 - x^2}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

$$14. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{1/2} - x^{-1/2}$$

$$Df(x) = \frac{1}{2} x^{(1/2)-1} - \left(-\frac{1}{2}\right) x^{(-1/2)-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

## Página 183

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

$$15. f(x) = \text{sen}(x^2 - 5x + 7)$$

$$f'(x) = (2x - 5) \cos(x^2 - 5x + 7)$$

$$16. f(x) = \sqrt[3]{(5x + 3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} (5x + 3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3 \sqrt[3]{5x + 3}}$$

$$17. f(x) = \text{sen}(3x + 1) \cdot \cos(3x + 1)$$

$$f'(x) = 3 [\cos^2(3x + 1) - \text{sen}^2(3x + 1)]$$

$$18. f(x) = \frac{\log x^2}{x}$$

$$f(x) = \frac{2 \log x}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{2(1 - \ln 10 \log x)}{x^2 \ln 10}$$

$$19. f(x) = \cos(3x - \pi)$$

$$f'(x) = -3 \operatorname{sen}(3x - \pi)$$

$$20. f(x) = \sqrt{1 + 2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$$

$$21. f(x) = x e^{2x+1}$$

$$f'(x) = e^{2x+1} + x e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1} (1 + 2x)$$

$$22. f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x \sqrt{1 - x^2} \cos(x^2 + 1) + [x \operatorname{sen}(x^2 + 1)] / \sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{2x(1 - x^2) \cos(x^2 + 1) + x \operatorname{sen}(x^2 + 1)}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$$

## Página 184

1. Calcula la función derivada de  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$  y halla:

a) Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas  $-1$ ,  $1$  y  $3$ .

b) Las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

c) Las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.

d) ¿Es  $f(x)$  creciente o decreciente en  $x = 2$ ?

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

a)  $f'(-1) = 11$ ,  $f'(1) = -5$ ,  $f'(3) = 3$

b)  $y = 11(x + 1) - 4$ ;  $y = -5(x - 1) - 2$ ;  $y = 3(x - 3) - 8$

c)  $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x = 0$ ,  $x = 8/3$

d)  $f'(2) = -4 < 0 \rightarrow$  decreciente

## Página 185

## LENGUAJE MATEMÁTICO

1. En la fórmula que sirve para hallar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

di el papel que desempeña cada una de las letras que intervienen. La  $x$  es la variable independiente, ¿de qué función?

$f$  es el nombre de la función;  $a$  es la abscisa, el punto de la curva en el cual se traza la tangente;  $f(a)$  es la ordenada de ese punto, y  $f'(a)$  es la pendiente de la recta tangente, pues  $f'$  es el nombre de la función derivada.

Las variables  $x$  e  $y$  son la abscisa y la ordenada de un punto genérico (un punto cualquiera) de la recta tangente.

$x$  es, pues, la variable independiente de la función lineal descrita por la recta tangente a  $f$  en el punto de abscisa  $a$ .

## Página 187

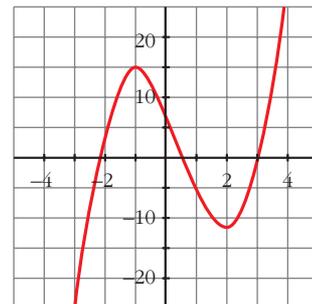
1. Representa estas funciones:

a)  $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$     b)  $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$     c)  $y = x^4 + 4x^3$

a)  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$

Máximo en  $(-1, 15)$ .

Mínimo en  $(2, -12)$ .



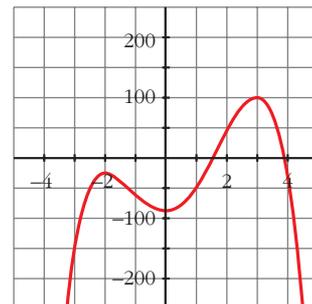
b)  $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Máximo en  $(-2, -26)$  y en  $(3, 99)$ .

Mínimo en  $(0, -90)$ .



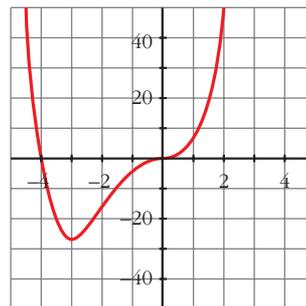
$$c) f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Mínimo en  $(-3, -27)$ .

Punto de inflexión en  $(0, 0)$ .

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Puntos de corte con los ejes:  $(0, 0)$  y  $(-4, 0)$



## Página 189

1. Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

$$a) y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$$

$$b) y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$

$$c) y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$d) y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$e) y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$$

$$f) y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

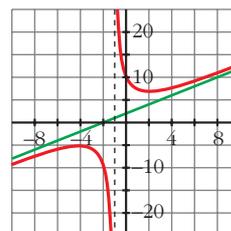
$$\begin{aligned} a) f'(x) &= \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -4 \end{aligned}$$

Máximo en  $(-4, -5)$ .

Mínimo en  $(2, 7)$ .

Asíntota vertical:  $x = -1$

Asíntota oblicua:  $y = x + 2$

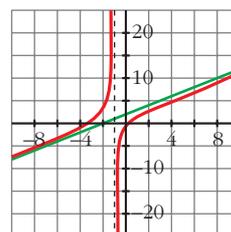


$$\begin{aligned} b) f'(x) &= \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x)}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Puntos de corte con los ejes:  $(0, 0)$  y  $(-3, 0)$

Asíntota vertical:  $x = -1$

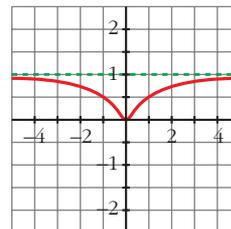
Asíntota oblicua:  $y = x + 2$



$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \frac{2x(x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Mínimo en (0, 0).

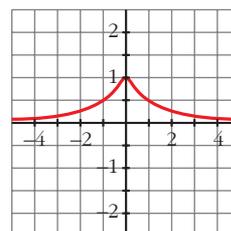
Asíntota horizontal:  $y = 1$



$$\text{d) } f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow x = 0$$

Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal:  $y = 0$



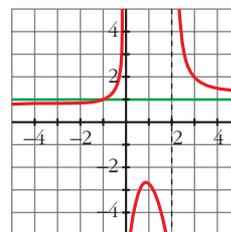
$$\begin{aligned} \text{e) } f'(x) &= \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} = \\ &= \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0,73 \\ x_2 = -2,73 \end{cases} \end{aligned}$$

Máximo en (0,73; -2,73).

Mínimo en (-2,73; 0,73).

Asíntotas verticales:  $x = 0$ ,  $x = 2$

Asíntota horizontal:  $y = 1$



f) • Dominio =  $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^2} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2} &= -\infty \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2}; y = 1 \text{ es asíntota horizontal}$$

Cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y < 1$ ; y cuando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y < 1$ .

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

- Puntos singulares:

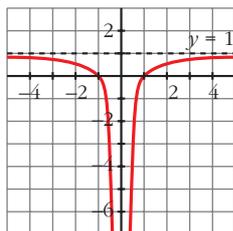
$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$  no tiene puntos singulares

Observamos que  $f'(x) < 0$  si  $x < 0$ ; y que  $f'(x) > 0$  si  $x > 0$ . Luego la función es decreciente en  $(-\infty, 0)$  y es creciente en  $(0, +\infty)$ .

- Corta al eje  $x$  en  $(-1, 0)$  y  $(1, 0)$ .

- Gráfica:



## Página 194

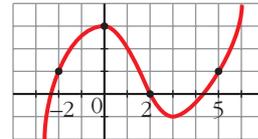
## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

## PARA PRACTICAR

## Tasa de variación media

1 Calcula la tasa de variación media de esta función en los intervalos:

- a)  $[-2, 0]$       b)  $[0, 2]$       c)  $[2, 5]$



$$\text{a) T.V.M. } [-2, 0] = \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$\text{b) T.V.M. } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 3}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{c) T.V.M. } [2, 5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{1 - 0}{3} = \frac{1}{3}$$

2 Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo  $[1, 3]$  e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

a)  $f(x) = 1/x$

b)  $f(x) = (2 - x)^3$

c)  $f(x) = x^2 - x + 1$

d)  $f(x) = 2^x$

• Si la T.V.M. es positiva, la función crece.

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

$$\text{a) T.V.M. } [1, 3] = \frac{1/3 - 1}{2} = -\frac{1}{3} \rightarrow \text{Decrece}$$

$$\text{b) T.V.M. } [1, 3] = \frac{-1 - 1}{2} = -1 \rightarrow \text{Decrece}$$

$$\text{c) T.V.M. } [1, 3] = \frac{7 - 1}{2} = 3 \rightarrow \text{Crece}$$

$$\text{d) T.V.M. } [1, 3] = \frac{8 - 2}{2} = 3 \rightarrow \text{Crece}$$

- 3** Compara la T.V.M. de las funciones  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = 3^x$  en los intervalos  $[2, 3]$  y  $[3, 4]$ , y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

Para  $f(x)$ : T.V.M.  $[2, 3] = 19$

$$\text{T.V.M. } [3, 4] = 37$$

Para  $g(x)$ : T.V.M.  $[2, 3] = 18$

$$\text{T.V.M. } [3, 4] = 54$$

En  $[2, 3]$  crece más  $f(x)$ .

En  $[3, 4]$  crece más  $g(x)$ .

- 4** Dada la función  $f(x) = x^2 - 1$ , halla la tasa de variación media en el intervalo  $[2, 2 + h]$ .

$$\text{T.V.M. } [2, 2 + h] = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{4 + h^2 + 4h - 1 - 3}{h} = h + 4$$

- 5** Comprueba que la T.V.M. de la función  $f(x) = -x^2 + 5x - 3$  en el intervalo  $[1, 1 + h]$  es igual a  $-h + 3$ . Calcula la T.V.M. de esa función en los intervalos  $[1, 2]$ ,  $[1, 1,5]$ , utilizando la expresión anterior.

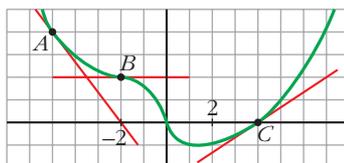
$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-(1 + h^2 + 2h) + 5 + 5h - 3 - 1}{h} = 3 - h$$

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = 2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 1,5] = 2,5$$

### Derivada en un punto

- 6** En esta función se han trazado las tangentes en los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Halla sus pendientes y di el valor de  $f'(-5)$ ;  $f'(0)$  y  $f'(4)$ .



$$m_A = \frac{0 - 4}{-2 + 5} = -\frac{4}{3} \rightarrow f'(-5) = -\frac{4}{3}$$

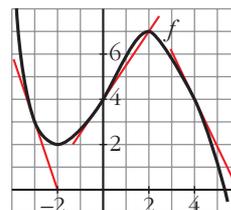
$$m_B = 0 \rightarrow f'(0) = 0$$

$$m_C = \frac{2 - 0}{7 - 4} = \frac{2}{3} \rightarrow f'(4) = \frac{2}{3}$$

7 a) Halla  $f'$  en los puntos de abscisas  $-3$ ,  $0$  y  $4$ .

• *Halla las pendientes de las rectas tangentes trazadas en esos puntos.*

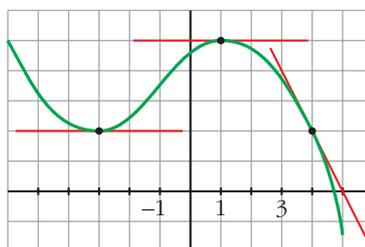
b) En  $x = 1$ , ¿la derivada es positiva o negativa?



a)  $f'(-3) = -3$ ,  $f'(0) = \frac{3}{2}$ ,  $f'(4) = -2$

b) Positiva.

8 a) ¿En qué puntos de esta función la derivada vale 0?



b) ¿Cuánto vale  $f'(4)$ ?

c) Di para qué valores de  $x$  la derivada es negativa.

a) En  $(1, 5)$  y en  $(-3, 2)$ .

b)  $m = \frac{2-0}{4-5} = -2 \rightarrow f'(4) = -2$

c)  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

9 Aplicando la definición de derivada, calcula  $f'(-2)$  y  $f'(3)$ , siendo:

$$f(x) = \frac{2x-3}{5}$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{\frac{2(-2+h)-3}{5} - \frac{7}{5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4+2h-3+7}{5h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{\frac{2(3+h)-3}{5} - \frac{3}{5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6+2h-3-3}{5h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

**10** Halla  $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$  para valores muy pequeños de  $h$  (por ejemplo,  $h = 0,01$

o bien  $h = 0,001$ ) y di después el valor de  $f'(1)$  en cada caso:

a)  $f(x) = 3x^2 - 1$

b)  $f(x) = (2x + 1)^2$

c)  $f(x) = x^2 + 5x$

d)  $f(x) = \frac{2}{x}$

a)  $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3(h+1)^2 - 1 - 2}{h} = \frac{3h^2 + 6h}{h} = 3h + 6$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } h = 0,01 \rightarrow \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 6,03 \\ \text{Si } h = 0,001 \rightarrow \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 6,003 \end{array} \right\} f'(1) = 6$$

b)  $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(2(h+1)+1)^2 - 9}{h} = \frac{4h^2 + 12h}{h} = 4h + 12$

Si  $h = 0,001 \rightarrow \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 12,004 \rightarrow f'(1) = 12$

c)  $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + 5(1+h) - 6}{h} = \frac{h^2 + 7h}{h} = h + 7$

Si  $h = 0,001 \rightarrow \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 7,001 \rightarrow f'(1) = 7$

d)  $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(2/h+1) - 2}{h} = \frac{-2h}{h(h+1)} = \frac{-2}{h+1}$

Si  $h = 0,001 \rightarrow \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -1,998 \rightarrow f'(1) = -2$

**11** Halla la pendiente de la tangente a la curva  $y = x^2 - 5x + 1$  en el punto de abscisa  $x = -2$ , utilizando la definición de derivada.

$$m = f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{(-2+h)^2 - 5(-2+h) + 1 - 15}{h} = \frac{h^2 - 9h}{h} = h - 9$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h - 9 = -9$$

Por tanto, la pendiente es  $-9$ .

- 12** Halla el valor del crecimiento de  $f(x) = (x - 3)^2$  en los puntos  $x = 1$  y  $x = 3$ , aplicando la definición de derivada.

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h-3)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h-4) = -4$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h-3)^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h = 0$$

- 13** Comprueba, utilizando la definición de derivada en cada caso:

a)  $f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$

b)  $f(x) = 7x^2 \rightarrow f'(x) = 14x$

c)  $f(x) = x^2 + x \rightarrow f'(x) = 2x + 1$     d)  $f(x) = \frac{3}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2}$

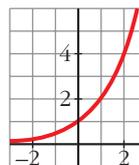
$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h) - 5x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x + 5h - 5x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7(x+h)^2 - 7x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7(x^2 + h^2 + 2xh) - 7x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h^2 + 14xh}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(7h + 14x)}{h} = 14x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + x + h - x^2 - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh + h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x + 1)}{h} = 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{x+h} - \frac{3}{x}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3x - 3h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-3h}{x(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{x(x+h)} = \frac{-3}{x^2} \end{aligned}$$

- 14** ¿Existe algún punto en esta función en el que la derivada sea negativa?



Ordena de menor a mayor los valores de  $f'(-2)$ ,  $f'(2)$  y  $f'(0)$ .

No, pues es creciente.

$$f'(-2) < f'(0) < f'(2)$$

## Página 195

### Reglas de derivación

Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

**15**  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6$ ;  $x = 1$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x; \quad f'(1) = 12$$

**16**  $f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{2}$ ;  $x = -\frac{17}{3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}; \quad f'\left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

**17**  $f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2}$ ;  $x = 2$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}; \quad f'(2) = 6 + 6 - \frac{1}{2} = \frac{23}{2}$$

**18**  $f(x) = \frac{1}{7x+1}$ ;  $x = 0$

$$f'(x) = \frac{-7}{(7x+1)^2}; \quad f'(0) = -7$$

**19**  $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ ;  $x = -1$

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \rightarrow f'(-1) = \frac{3}{2}$$

**20**  $f(x) = \ln(3x-1)$ ;  $x = 3$

$$f'(x) = \frac{3}{3x-1} \rightarrow f'(3) = \frac{3}{8}$$

**21**  $f(x) = \text{sen } 2x + \text{cos } 2x; x = \pi$

$$f'(x) = 2\cos x - 2\text{sen } 2x \rightarrow f'(\pi) = 2$$

**22**  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}; x = 8$

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{(x-4)^3}} \rightarrow f'(8) = \frac{-1}{16}$$

**23**  $f(x) = x \cdot 2^{x+1}; x = -1$

$$f'(x) = 2^{x+1} \ln(2)x + 2^{x+1} \rightarrow f'(-1) = -\ln 2 + 1$$

**24**  $f(x) = (5x-2)^3; x = \frac{1}{5}$

$$f'(x) = 15(5x-2)^2 \rightarrow f'\left(\frac{1}{5}\right) = 15$$

**25**  $f(x) = \frac{x+5}{x-5}; x = 3$

$$f'(x) = \frac{-10}{(x-5)^2} \rightarrow f'(3) = \frac{-5}{2}$$

**26**  $f(x) = x^2 + \log x; x = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x \ln 10} \rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{2}{\ln 10}$$

**27**  $f(x) = e^{2x} \cdot \ln(x^2 + 1); x = 1$

$$f'(x) = 2e^{2x} \left[ \ln(x^2 + 1) + \frac{x}{x^2 + 1} \right] \rightarrow f'(1) = 2e^2 \left( \ln 2 + \frac{1}{2} \right)$$

Halla la función derivada de estas funciones:

**28** a)  $f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt{2x}$

b)  $f(x) = (x^2 - 3)^3$

a)  $f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$

b)  $f'(x) = 6x(x^2 - 3)^2$

**29** a)  $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2}$

b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

a)  $f'(x) = 1$  (si  $x \neq 0$ )

b)  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

**30** a)  $f(x) = \sqrt[3]{(x+6)^2}$

a)  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+6}}$

b)  $f(x) = (1 + e^x)^2$

b)  $f'(x) = 2e^x(1 + e^x)$

**31** a)  $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

b)  $f(x) = 7^{x+1}$

a)  $f(x) = -3(1-x^2)^{-1/2}$ ;  $f'(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{-3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

b)  $f'(x) = 7^{x+1} \cdot \ln 7$

**32** a)  $f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{x}{3}$

a)  $f'(x) = \frac{-1}{3x^2} + \frac{1}{3}$

b)  $f(x) = \ln 3x$

b)  $f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$

**33** a)  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

a)  $f'(x) = \frac{1+x^2-x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

b)  $f'(x) = \frac{e^{2x}(7-10x)}{(1-5x)^2}$

b)  $f(x) = \frac{e^{2x}}{1-5x}$

**34** a)  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

a)  $f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$

b)  $f(x) = \ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x}$

b)  $f(x) = \ln \sqrt{x}$

**35** a)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

b)  $f(x) = x^3 \cdot e^{1-x}$

a)  $f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x \cdot x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$

b)  $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{1-x} - x^3 \cdot e^{1-x} = e^{1-x}(3x^2 - x^3) = x^2 \cdot e^{1-x}(3-x)$

$$36 \quad \text{a) } f(x) = \ln \sqrt{e} \qquad \text{b) } f(x) = \log \frac{x^2}{3-x}$$

$$\text{a) } f'(x) = 0$$

$$\text{b) } f(x) = \log x^2 - \log(3-x) = 2 \log x - \log(3-x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x \ln 10} + \frac{1}{(3-x) \ln 10}$$

$$37 \quad \text{a) } f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} \qquad \text{b) } f(x) = \sqrt{\ln x}$$

$$\text{a) } f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - 2x(x^3 + 2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

### Puntos en los que la derivada vale $k$

38 Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = 3x^2 - 2x + 1$$

$$\text{b) } y = x^3 - 3x$$

$$\text{a) } f'(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Punto } \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{b) } f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 1. \text{ Puntos } (-1, 2) \text{ y } (1, -2)$$

39 Obtén los puntos donde  $f'(x) = 1$  en los siguientes casos:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x+1}{x+5}$$

$$\text{a) } f'(x) = 2x - 3; 2x - 3 = 1 \rightarrow x = 2; f(2) = 0 \rightarrow P(2, 0)$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{x+5-x-1}{(x+5)^2} = \frac{4}{(x+5)^2}$$

$$\frac{4}{(x+5)^2} = 1 \rightarrow (x+5)^2 = 4 \begin{cases} x = -3; f(-3) = -1 \rightarrow P(-3, -1) \\ x = -7; f(-7) = 3 \rightarrow Q(-7, 3) \end{cases}$$

40 Halla los puntos en los que la derivada de cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

$$\text{a) } y = x^2 - 2x$$

$$\text{b) } y = \frac{x}{x+2}$$

$$\text{c) } y = 4\sqrt{x+3}$$

$$\text{d) } y = \ln(4x-1)$$

$$\text{a) } f'(x) = 2x - 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2; f(2) = 0 \rightarrow P(2, 0)$$

$$b) f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} \rightarrow \frac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x+2)^2 = 1 \begin{cases} x = -1; f(-1) = -1 \rightarrow P(-1, -1) \\ x = -3; f(-3) = 3 \rightarrow Q(-3, 3) \end{cases}$$

$$c) f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 \rightarrow x = -2;$$

$$f(-2) = 4 \rightarrow P(-2, 4)$$

$$d) f'(x) = \frac{4}{4x-1} \rightarrow \frac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow x = \frac{3}{4}; f\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 2 \rightarrow P\left(\frac{3}{4}, \ln 2\right)$$

**41** Halla los puntos en los que la derivada vale 0 en cada uno de los siguientes casos:

a)  $y = 2x^2 - 8x + 5$

b)  $y = -x^2 + 5x$

c)  $y = x^4 - 4x^2$

d)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

a)  $f'(x) = 4x - 8 \rightarrow 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2; f(2) = -3 \rightarrow P(2, -3)$

b)  $f'(x) = -2x + 5 \rightarrow -2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}; f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} \rightarrow P\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

c)  $f'(x) = 4x^3 - 8x \rightarrow 4x^3 - 8x = 0 \begin{cases} x = 0; f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0) \\ x = \sqrt{2}; f(\sqrt{2}) = -4 \rightarrow Q(\sqrt{2}, -4) \\ x = -\sqrt{2}; f(-\sqrt{2}) = -4 \rightarrow R(-\sqrt{2}, -4) \end{cases}$

d)  $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0; f(0) = 1 \rightarrow P(0, 1)$

**42** Comprueba que las siguientes funciones no tienen ningún punto en el que la derivada sea igual a 0.

a)  $y = \frac{7x-3}{2}$

b)  $y = 2x^3 + 6x$

c)  $y = x^3 - x^2 + x$

d)  $y = \frac{3x}{x-2}$

a)  $f'(x) = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{7}{2} \neq 0$  para cualquier  $x$ .

b)  $f'(x) = 6x^2 + 6 \rightarrow 6x^2 + 6 = 0$  no tiene solución.

c)  $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \rightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 0; x = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6}$  no tiene solución.

d)  $f'(x) = \frac{-6}{(x-2)^2} \rightarrow \frac{-6}{(x-2)^2} = 0$  no tiene solución.

## Página 196

## Recta tangente

- 43** Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = x^2 - 5x + 6$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .

$$f'(x) = 2x - 5; \quad m = f'(2) = -1, \quad f(2) = 0$$

$$\text{La recta es } y = -(x - 2) = 2 - x$$

- 44** Escribe la ecuación de la recta tangente a  $y = -x^2 + 2x + 5$  en el punto de abscisa  $x = -1$ .

$$f'(x) = -2x + 2; \quad m = f'(-1) = 4, \quad f(-1) = 2$$

$$\text{La recta es } y = 4(x + 1) + 2 = 4x + 6$$

- 45** Escribe la ecuación de la recta tangente a  $y = x^2 + 4x + 1$  cuya pendiente sea igual a 2.

$$f'(x) = 2x + 4 = 2 \rightarrow x = -1; \quad f(-1) = -2$$

$$\text{La recta es } y = 2(x + 1) - 2 = 2x$$

- 46** Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = \sqrt{x + 1}$  en  $x = 0$ .

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}; \quad m = f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f(0) = 1$$

$$\text{La recta es } y = \frac{1}{2}x + 1$$

- 47** Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función  $y = 4 - x^2$  en los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\text{Puntos de corte con el eje de abscisas: } 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = 2, \quad x = -2$$

$$\text{Puntos } (2, 0) \text{ y } (-2, 0)$$

$$f'(x) = -2x, \quad f'(2) = -4, \quad f'(-2) = 4$$

- Las rectas son:
- En  $x = -2$ ,  $y = 4(x + 2) = 4x + 8$
  - En  $x = 2$ ,  $y = -4(x - 2) = -4x + 8$

## Puntos singulares

- 48** Obtén los puntos singulares de las siguientes funciones:

a)  $y = 3x^2 - 2x + 5$

b)  $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c)  $y = x^4 - 4x^3$

d)  $y = x^3 - 12x$

a)  $f'(x) = 6x - 2 \rightarrow 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3} \rightarrow P\left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$

b)  $f'(x) = 6x^2 - 6x \rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \begin{cases} x = 0; f(0) = 1 \rightarrow P(0, 1) \\ x = 1; f(1) = 0 \rightarrow Q(1, 0) \end{cases}$

c)  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \begin{cases} x = 0; f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0) \\ x = 3; f(3) = -27 \rightarrow Q(3, -27) \end{cases}$

d)  $f'(x) = 3x^2 - 12 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x = 2; f(2) = -16 \rightarrow P(2, -16) \\ x = -2; f(-2) = 16 \rightarrow Q(-2, 16) \end{cases}$

**49** Halla los puntos singulares de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

b)  $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

a)  $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = 1; f(1) = 2 \rightarrow P(1, 2) \\ x = -1; f(-1) = -2 \rightarrow Q(-1, -2) \end{cases}$

b)  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0; f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0)$

**50** Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares:

a)  $y = x^3 + 3x$

b)  $y = \frac{1}{x}$

c)  $y = \sqrt{x}$

d)  $y = \ln x$

a)  $f'(x) = 3x^2 + 3 \rightarrow 3x^2 + 3 = 0$  no tiene solución.

b)  $f'(x) = \frac{-1}{x^2} \rightarrow \frac{-1}{x^2} = 0$  no tiene solución.

c)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$  no tiene solución.

d)  $f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x} = 0$  no tiene solución.

## Crecimiento y decrecimiento

**51** Observa los resultados obtenidos en los ejercicios 15 al 27 y di si cada una de las funciones dadas es creciente o decreciente en el punto que se indica.

15) Creciente.      16) Creciente.      17) Creciente.      18) Decreciente.

19) Creciente.      20) Creciente.      21) Creciente.      22) Decreciente.

23) Creciente.      24) Creciente.      25) Decreciente.      26) Creciente.

27) Creciente.

**52** Obtén los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{3x + 1}{2}$

b)  $y = 5 - 2x$

c)  $y = x^2 - 3x + 2$

d)  $y = 2x - x^2$

e)  $y = x^3$

f)  $y = x^3 - 3x$

a)  $f'(x) = \frac{3}{2} \rightarrow$  Creciente en  $(-\infty, +\infty)$ .

b)  $f'(x) = -2 \rightarrow$  Decreciente en  $(-\infty, +\infty)$

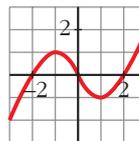
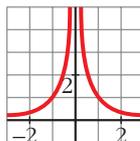
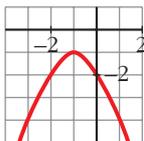
c)  $f'(x) = 2x - 3 \rightarrow$  Crece en  $(\frac{3}{2}, +\infty)$ . Decece en  $(-\infty, \frac{3}{2})$ .

d)  $f'(x) = 2 - 2x \rightarrow$  Crece en  $(-\infty, 1)$ . Decece en  $(1, +\infty)$ .

e)  $f'(x) = 3x^2 \rightarrow$  Creciente en  $(-\infty, +\infty)$ .

f)  $f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow$  Crece en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . Decece en  $(-1, 1)$ .

**53** Indica en cada una de estas funciones los valores de  $x$  en los que  $f'$  es positiva y en los que  $f'$  es negativa.



• **Observa su crecimiento y decrecimiento. La primera crece si  $x < -1$ .**

a)  $f' > 0$  si  $x < -1$

$f' < 0$  si  $x > -1$

b)  $f' > 0$  si  $x < 0$

$f' < 0$  si  $x > 0$

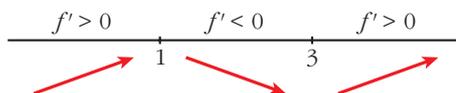
c)  $f' > 0$  si  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$  si  $x \in (-1, 1)$

**54** Dada la función  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ , obtén su función derivada y estudia su signo.

¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de  $f$ ? ¿Tiene  $f$  máximo o mínimo?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$



Crece en  $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ .

Decrece en  $(1, 3)$ .

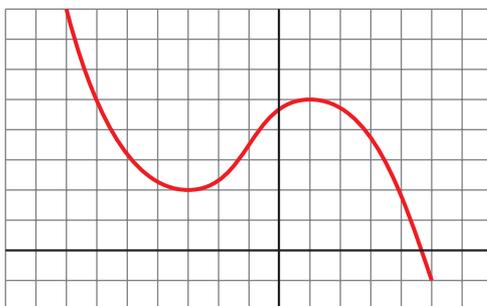
Máximo en  $x = 1$ . Mínimo en  $x = 3$ .

## Gráficas de funciones polinómicas y racionales

**55** Representa una función  $y = f(x)$  de la que sabemos:

- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- Tiene tangente horizontal en  $(-3, 2)$  y en  $(1, 5)$ .

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.



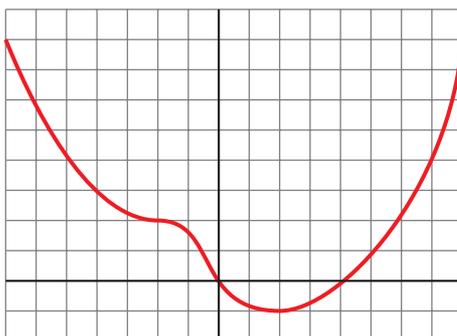
$(-3, 2)$  es un mínimo.

$(1, 5)$  es un máximo.

**56** De una función polinómica sabemos que:

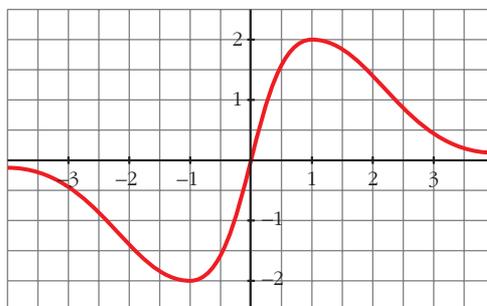
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada es igual a 0 en  $(-2, 2)$  y en  $(2, -1)$ .
- Corta a los ejes en  $(0, 0)$  y en  $(4, 0)$ .

Representala gráficamente.



**57** Representa la función continua  $y = f(x)$  de la que sabemos:

- En los puntos  $(-1, -2)$  y  $(1, 2)$  la tangente es horizontal.
- Sus ramas infinitas son así:



**58** Comprueba que la función  $y = (x - 1)^3$  pasa por los puntos  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$  y  $(2, 1)$ . Su derivada se anula en el punto  $(1, 0)$ . ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?

$$f'(x) = 3(x - 1)^2: f(0) = -1 \rightarrow \text{pasa por } (0, -1)$$

$$f(1) = 0 \rightarrow \text{pasa por } (1, 0)$$

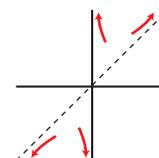
$$f(2) = 1 \rightarrow \text{pasa por } (2, 1)$$

$$f'(1) = 0$$

El punto  $(1, 0)$  no es ni máximo ni mínimo, porque la derivada no cambia de signo.

## Página 197

**59** Comprueba que la función  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$  tiene dos puntos de tangente horizontal,  $(-1, -2)$  y  $(1, 2)$ ; sus asíntotas son  $x = 0$  e  $y = x$  y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración de la derecha. Representálas.



$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

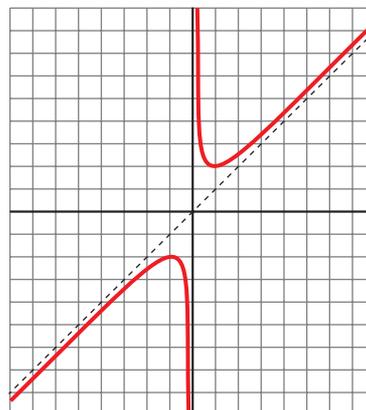
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$$

Puntos  $(-1, -2)$  y  $(1, 2)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Asíntota vertical en  $x = 0$ .

Asíntota oblicua en  $y = x$ .



**60** Comprueba que la función  $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$ :

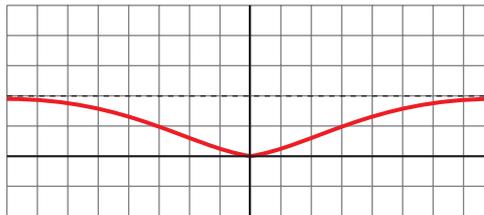
- Tiene derivada nula en  $(0, 0)$ .
- La recta  $y = 2$  es una asíntota horizontal.
- Posición de la curva respecto a la asíntota:  
Si  $x \rightarrow -\infty, y < 2$ . Si  $x \rightarrow +\infty, y < 2$ .

Representála.

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 1) - 2x(2x^2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(0) = 0; f(0) = 0$$

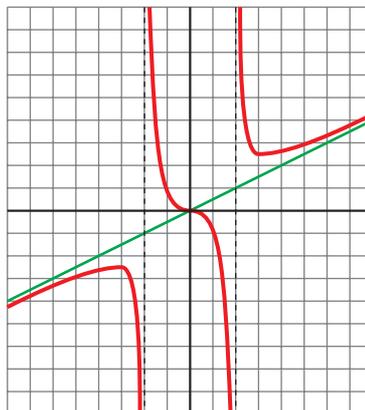
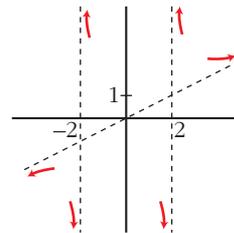
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2$$



**61** Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:

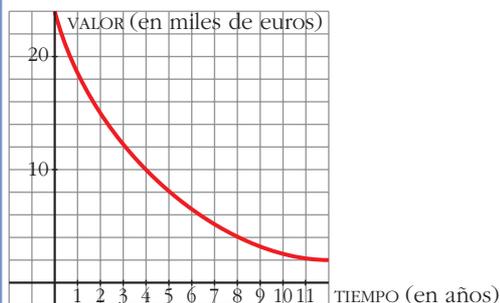
$$\left(-3, -\frac{5}{2}\right), (0, 0) \text{ y } \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas.



## PARA RESOLVER

62



Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor: un 20% cada año, aproximadamente. Esta gráfica muestra el valor de un coche desde que se compró hasta 12 años más tarde.

Calcula lo que se deprecia el coche en los dos primeros años, entre los años 4 y 6, y entre los años 8 y 10. ¿Es constante la depreciación?

Depreciación:  $[0, 2] \rightarrow 9000 \text{ €}$

$[4, 6] \rightarrow 3500 \text{ €}$

$[8, 10] \rightarrow 1500 \text{ €}$

La depreciación no es constante.

63 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva  $y = x^3 - 3x$  que sean paralelas a la recta  $6x - y + 10 = 0$ .

• La pendiente de la recta es el coeficiente de  $x$  cuando la  $y$  está despejada.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}. \text{ Puntos: } (-\sqrt{3}, 0) \text{ y } (\sqrt{3}, 0)$$

$$\text{Rectas: } y = 6(x + \sqrt{3}), y = 6(x - \sqrt{3})$$

64 ¿En qué puntos la recta tangente a  $y = x^3 - 4x$  tiene la pendiente igual a 8?

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 8 \rightarrow x = -2, x = 2$$

Puntos  $(-2, 0)$  y  $(2, 0)$ .

65 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva  $y = \frac{2x}{x-1}$  que son paralelas a la recta  $2x + y = 0$ .

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = -2 \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow x = 0, x = 2$$

En  $(0, 0)$ ,  $y = -2x$

En  $(2, 4)$ ,  $y = -2(x-2) + 4 = -2x + 8$

- 66** Halla los puntos de tangente horizontal de la función  $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$ .

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x = -1, x = 3.$$

Puntos  $(-1, 4)$  y  $(3, -28)$ .

- 67** ¿En qué puntos de la función  $y = 1/x$  la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?

¿Existe algún punto de tangente horizontal en esa función?

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \rightarrow x = -1, x = 1. \text{ Puntos } (-1, -1) \text{ y } (1, 1).$$

No existe ningún punto de tangente horizontal, pues  $f'(x) = \frac{1}{x^2} = 0$  no tiene solución.

- 68** La altura que alcanza una piedra lanzada hacia arriba viene dada por la función  $f(t) = 20t - 5t^2$  ( $t$  en segundos,  $f$  en metros).

a) Calcula su velocidad media entre  $t = 0$  y  $t = 5$ .

b) ¿En qué instante la velocidad es igual a 0?

c) ¿En algún momento su velocidad de la piedra es 15 m/s? En caso afirmativo, ¿a qué altura?

a) T.V.M.  $[0, 5] = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{-25 - 0}{5} = -5$  m/s

b)  $f'(t) = 20 - 10t \rightarrow f'(t) = 0; 20 - 10t = 0 \rightarrow t = 2$

A los 2 segundos.

c)  $f'(t) = 15 \rightarrow 20 - 10t = 15 \rightarrow t = 0,5$  s

A los 0,5 segundos la velocidad es 15 m/s.

La altura en ese instante es:

$$f(0,5) = 8,75 \text{ m.}$$

- 69** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximo o mínimo:

a)  $y = -3x^2 + 6x$

b)  $y = 2x^2 - 8x + 7$

c)  $y = \frac{2x}{x-3}$

d)  $y = \frac{x-1}{2x+3}$

a)  $f'(x) = -6x + 6 \rightarrow$  En  $(-\infty, 1)$  crece y en  $(1, +\infty)$  decrece.

Tiene un máximo en  $(1, 3)$ .

b)  $f'(x) = 4x - 8 \rightarrow$  Creciente en  $(2, +\infty)$ ; decreciente en  $(-\infty, 2)$ .

Tiene un mínimo en  $(2, -1)$ .

$$c) f'(x) = \frac{-6}{(x-3)^2} \rightarrow \text{Decreciente en todo su dominio: } \mathbb{R} - \{3\}$$

$$d) f'(x) = \frac{5}{(2x+3)^2} \rightarrow \text{Creciente en todo su dominio: } \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

- 70** Halla el vértice de la parábola  $y = x^2 + 6x + 11$  teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

$$f'(x) = 2x + 6 = 0 \rightarrow x = -3$$

Punto  $(-3, 2)$ .

- 71** Halla el valor de  $k$  para que la tangente a la gráfica de la función  $y = x^2 + kx - 1$  en  $x = 0$  sea paralela a la recta  $y = 3x + 2$ .

$$f'(x) = 2x + k \rightarrow f'(0) = k \rightarrow k = 3$$

## Página 198

- 72** En cada una de las siguientes funciones, halla los puntos singulares y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos. Representálas:

a)  $y = x^3 - 3x^2$

b)  $y = x^3 - 3x + 2$

c)  $y = x^4 + 4x^3$

d)  $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

e)  $y = 12x - x^3$

f)  $y = -x^4 + x^2$

g)  $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

h)  $y = x^4 - 8x^2 + 2$

a)  $f'(x) = 3x^2 - 6x$

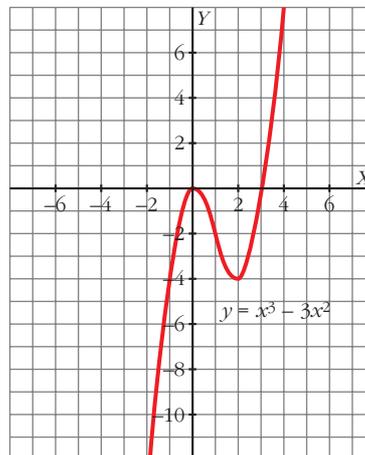
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -4 \rightarrow (2, -4) \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$$

$(0, 0)$  máximo y  $(2, -4)$  mínimo.



b)  $f'(x) = 3x^2 - 3$

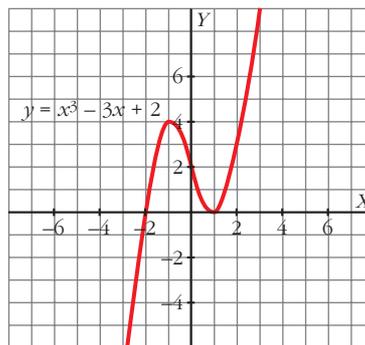
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$\begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow (1, 0) \\ f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4) \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$

$(-1, 4)$  máximo y  $(1, 0)$  mínimo.



c)  $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

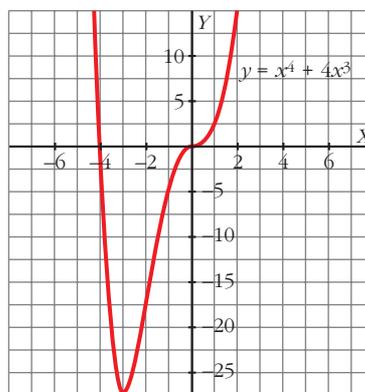
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -3 \rightarrow f(-3) = -27 \rightarrow (-3, -27) \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x^3) =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$(-3, -27)$  mínimo.



d)  $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow$

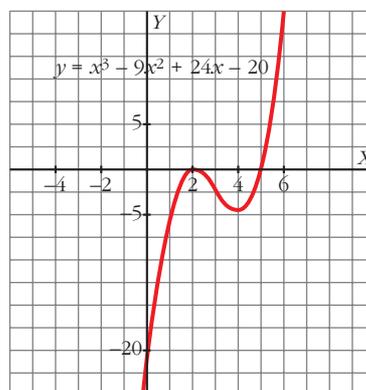
$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$

$\begin{cases} f(4) = -4 \rightarrow (4, -4) \\ f(2) = 0 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = +\infty$

$(2, 0)$  máximo y  $(4, -4)$  mínimo.



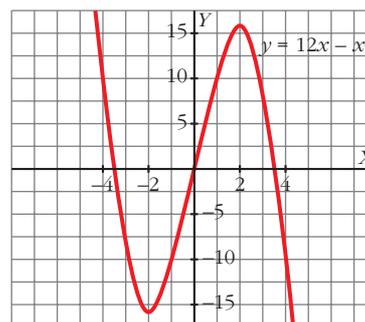
e)  $f'(x) = 12 - 3x^2$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$\begin{cases} f(2) = 16 \rightarrow (2, 16) \\ f(-2) = -16 \rightarrow (-2, -16) \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (12x - x^3) = +\infty$

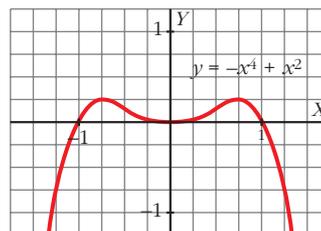
$\lim_{x \rightarrow +\infty} (12x - x^3) = -\infty$

$(2, 16)$  máximo y  $(-2, -16)$  mínimo.



$$f) f'(x) = -4x^3 + 2x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right) \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty$$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$  y  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right)$  son máximos y  $(0, 0)$ , mínimo.

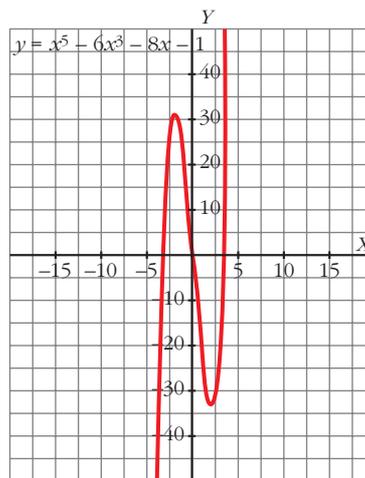
$$g) f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2, -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

$(-2, 31)$  máximo y  $(2, -33)$  mínimo.



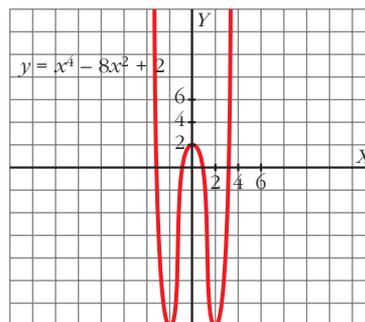
$$h) f'(x) = 4x^3 - 16x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -14 \rightarrow (2, -14) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -14 \rightarrow (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$(0, 2)$  máximo, y  $(2, -14)$  y  $(-2, -14)$  mínimos.



**73** Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y estudiando sus ramas infinitas:

a)  $y = x^3 - 2x^2 + x$

b)  $y = -x^4 + 2x^2$

c)  $y = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$

d)  $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

e)  $y = \frac{x}{(x + 5)^2}$

f)  $y = \frac{2x^2}{x + 2}$

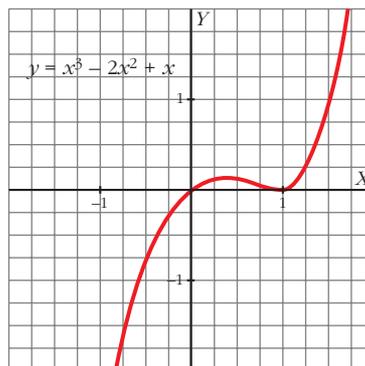
a)  $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}, x = 1$

Puntos de tangente horizontal:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{27}\right), (1, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + x) = -\infty$$



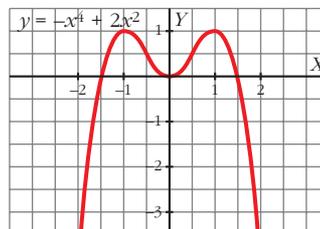
b)  $f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

Puntos de tangente horizontal:

$$(-1, 1), (0, 0) \text{ y } (1, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$



c)  $f'(x) = \frac{x^2 + 5x + 4 - x(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 5x + 4)^2} = 0 \rightarrow x = 2, x = -2$

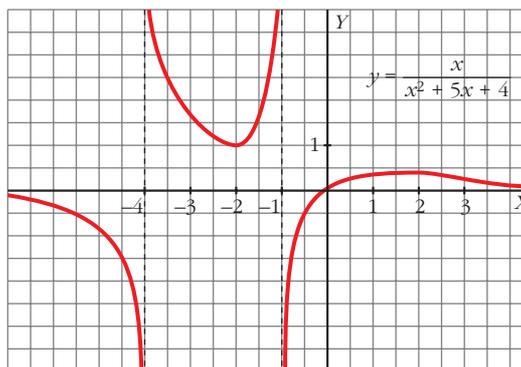
Puntos de tangente horizontal:  $(-2, 1), \left(2, \frac{1}{9}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 5x + 4} = 0$$

Asíntotas verticales:

$$x = -4, x = -1$$



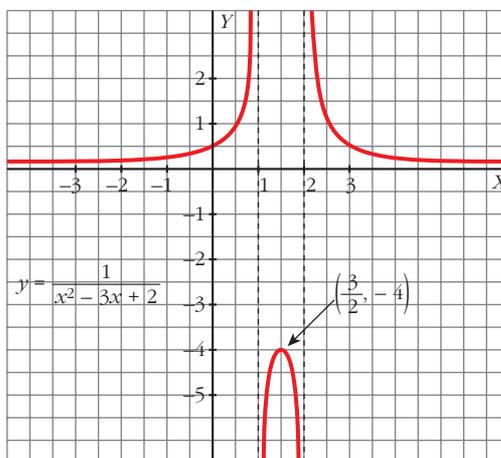
$$d) f'(x) = \frac{-(2x-3)}{(x^2-3x+2)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Puntos de tangente horizontal:  $\left(\frac{3}{2}, -4\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2-3x+2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2-3x+2} = 0$$

Asíntotas verticales:  $x = 1, x = 2$



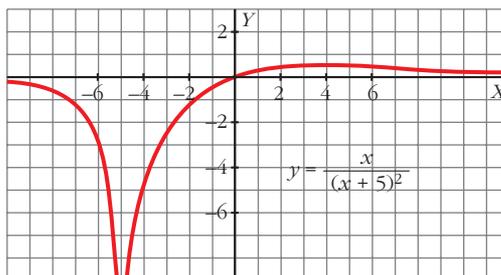
$$e) f'(x) = \frac{(x+5)^2 - x \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{5-x}{(x+5)^3} = 0 \rightarrow x = 5$$

Puntos de tangente horizontal:  $\left(5, \frac{1}{20}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0$$

Asíntota vertical:  $x = -5$



$$f) f'(x) = \frac{4x(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+4)}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = -4$$

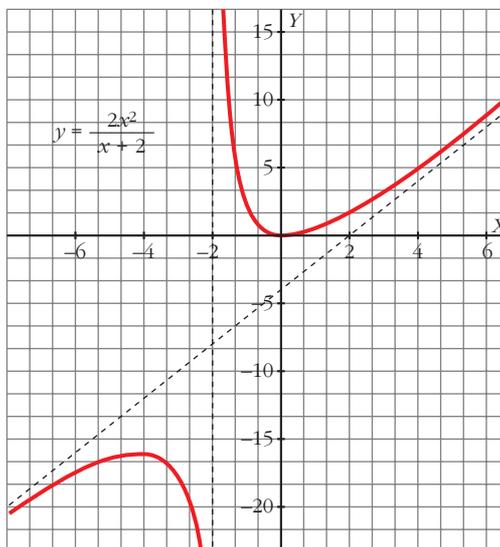
Puntos de tangente horizontal:

$$(-4, -16), (0, 0)$$

$$\frac{2x^2}{x+2} = 2x - 4 + \frac{8}{x+2}$$

( $y = 2x - 4$  asíntota oblicua)

Asíntota vertical:  $x = -2$



**74** Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Representálas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:

$$\text{a) } y = \frac{x-3}{x+2} \quad \text{b) } y = \frac{x^2-1}{x} \quad \text{c) } y = \frac{x^3}{3} + 4x \quad \text{d) } y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

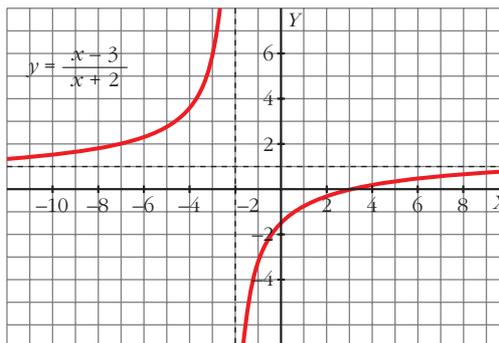
$$\text{a) } f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} \neq 0$$

Los puntos de corte son:  $(0, -\frac{3}{2}), (3, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x+2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x+2} = 1$$

Asíntota vertical:  $x = -2$



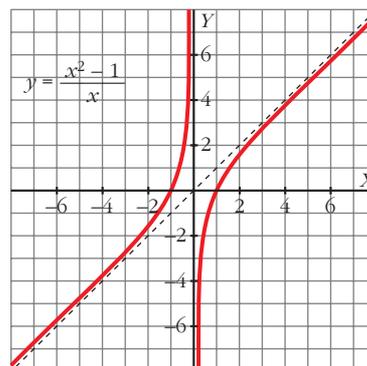
$$b) f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \neq 0$$

Los puntos de corte son: (1, 0), (-1, 0)

$$\frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

( $y = x$  asíntota oblicua)

Asíntota vertical:  $x = 0$

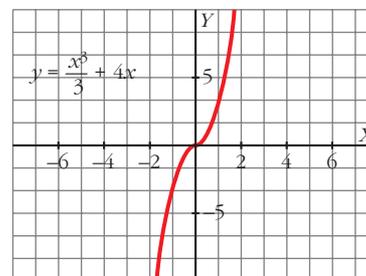


$$c) f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$$

El punto de corte es: (0, 0)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{3} + 4x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3} + 4x = +\infty$$

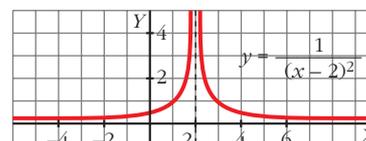


$$d) f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$$

El punto de corte es:  $(0, \frac{1}{4})$

Asíntota vertical:  $x = 2$

Asíntota horizontal:  $y = 0$



### 75 Estudia y representa las siguientes funciones:

$$a) y = \frac{x}{x^2 - 16}$$

$$b) y = \frac{x}{1 - x^2}$$

$$c) y = \frac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$$

$$d) y = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

$$e) y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

$$f) y = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$g) y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$h) y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$$

$$i) y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

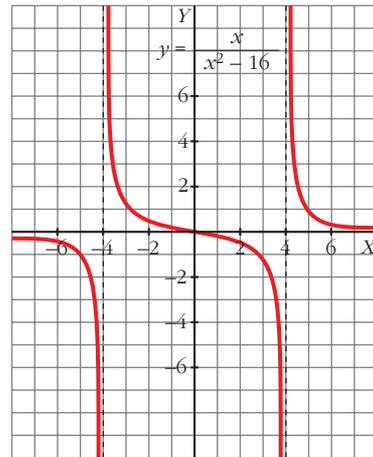
$$j) y = \frac{x^2 - 5}{2x - 4}$$

$$a) f'(x) = \frac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$$

Asíntotas verticales:  $x = -4$ ,  $x = 4$

Asíntotas horizontales:  $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

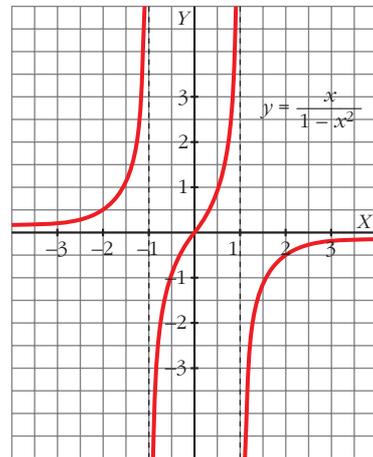


$$b) f'(x) = \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$$

Asíntotas verticales:  $x = 1$ ,  $x = -1$

Asíntotas horizontales:  $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



$$c) f'(x) = \frac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$$

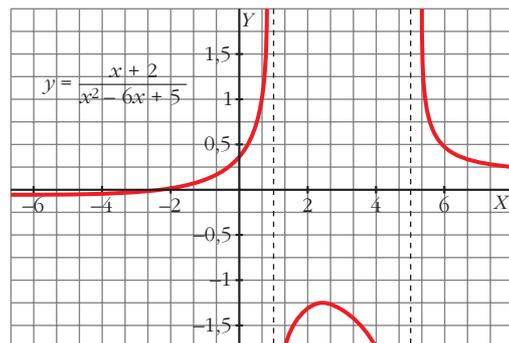
Asíntotas verticales:  $x = 5$ ,  $x = 1$

Asíntotas horizontales:  $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-6,58; -0,052)$ ,  $(2,58; -1,197)$



d)  $f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$

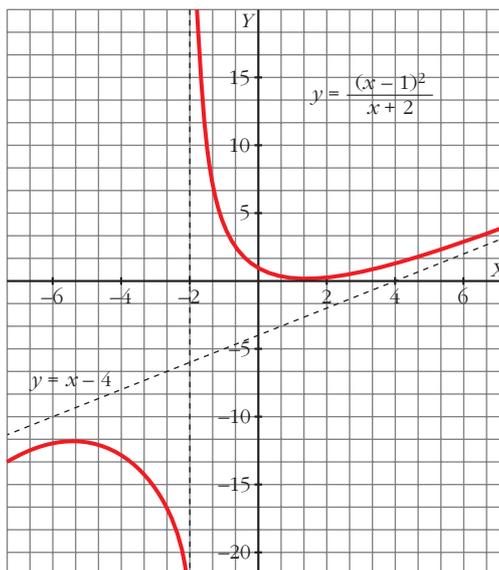
Asíntotas verticales:  $x = -2$

Asíntotas oblicuas:  $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, 0), (-5, 12)$



e)  $f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

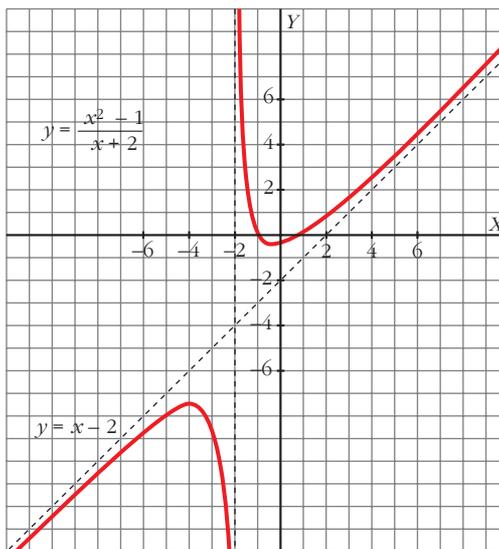
Asíntotas verticales:  $x = -2$

Asíntotas oblicuas:  $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-0,26; -0,54), (-3,73; -7,46)$



f)  $y' = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$

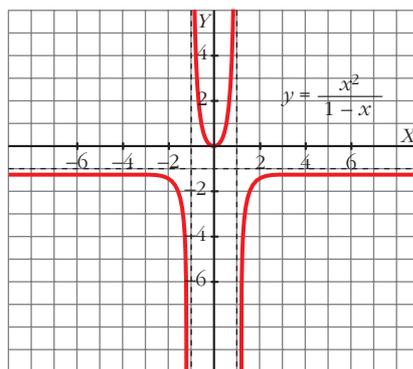
Asíntotas verticales:  $x = 1, x = -1$

Asíntotas horizontales:  $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Su punto de tangente horizontal es:

$(0, 0)$



$$g) f'(x) = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

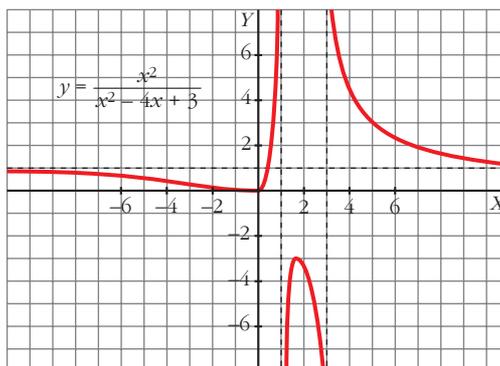
Asíntotas verticales:  $x = 3, x = 1$

Asíntotas horizontales:  $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$$\left(0, 0\right), \left(\frac{3}{2}, -3\right)$$



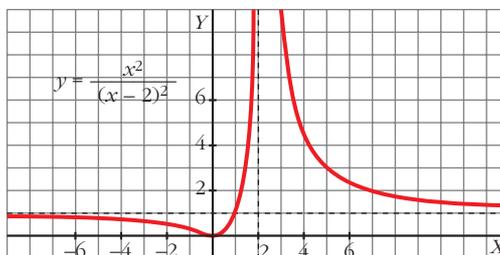
$$h) f'(x) = -\frac{4x}{(x-2)^3}$$

Asíntotas verticales:  $x = 2$

Asíntotas horizontales:  $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Su punto de tangente horizontal es:  $(0, 0)$



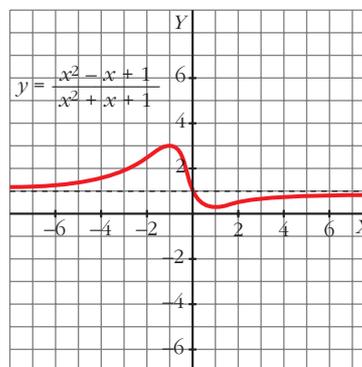
$$i) f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Asíntotas horizontales:  $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$$\left(1, \frac{1}{3}\right), (-1, 3)$$

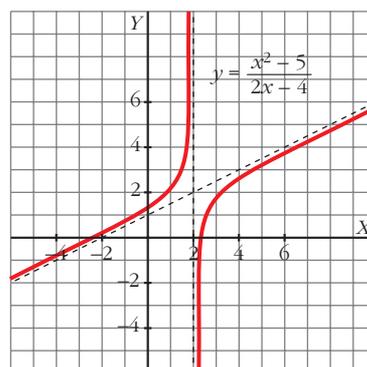


$$j) f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 10}{(2x - 4)^2}$$

Asíntotas verticales:  $x = 2$

Asíntotas oblicuas:  $y = \frac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



- 76** Determina la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  que es tangente a la recta  $y = 2x - 3$  en el punto  $A(2, 1)$  y que pasa por el punto  $B(5, -2)$ .

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 1 \rightarrow 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \rightarrow 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \rightarrow 25a + 5b + c = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es  $f(x) = -x^2 + 6x - 7$ .

- 77** Halla el valor de  $x$  para el que las tangentes a las curvas  $y = 3x^2 - 2x + 5$  e  $y = x^2 + 6x$  sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \rightarrow f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \rightarrow g'(x) = 2x + 6 \end{array} \right\} 6x - 2 = 2x + 6 \rightarrow x = 2$$

Para  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$  la tangente en  $x = 2$  es:

$$y = 10(x - 2) + 13 \rightarrow y = 10x - 7$$

Para  $g(x) = x^2 + 6x$  la tangente en  $x = 2$  es:

$$y = 10(x - 2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$$

- 78** Halla  $a$ ,  $b$  y  $c$  en  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  de modo que la gráfica de  $f$  tenga tangente horizontal en  $x = -4$  y en  $x = 0$  y que pase por  $(1, 1)$ .

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(-4) = 0 \rightarrow 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 0 \rightarrow b = 0 \\ f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es  $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$ .

- 79** Calcula  $a$  y  $b$  de modo que la función  $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$  tenga un máximo en  $x = 1$  y un mínimo en  $x = 2$ .

$$f'(x) = 6x^2 + 2bx + a$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow 6 + 2b + a = 0$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow 24 + 4b + a = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 2b = -6 \\ a + 4b = -24 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 12 \\ b = -9 \end{array}$$

## CUESTIONES TEÓRICAS

- 80** Calcula la T.V.M. de  $f(x) = 3x - 2$  en los intervalos  $[-1, 2]$ ,  $[1, 3]$  y  $[-3, 4]$ . Justifica por qué obtienes el mismo resultado.

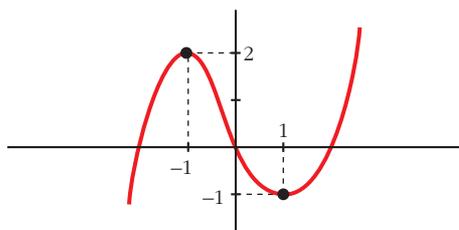
$$\text{T.V.M. } [-1, 2] = \frac{4 + 5}{3} = 3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{7 - 1}{2} = 3$$

$$\text{T.V.M. } [-3, 4] = \frac{10 + 11}{7} = 3$$

T.V.M. = 3 para todos, porque la función es una recta de pendiente 3.

- 81** Dibuja una función que tenga derivada nula en  $x = 1$  y en  $x = -1$ , derivada negativa en el intervalo  $[-1, 1]$  y positiva para cualquier otro valor de  $x$ .



- 82** Pon ejemplos de funciones  $f$  cuya derivada sea  $f'(x) = 2x$ . ¿Cuántas existen?

Existen infinitas.

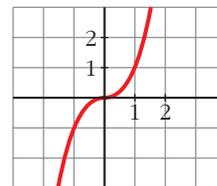
$f(x) = x^2 + k$ , donde  $k$  es cualquier número.

- 83** Esta es la gráfica de la función  $y = x^3$ .

¿Por qué podemos asegurar que el eje de abscisas es la tangente de esa curva en  $(0, 0)$ ?

Ecuación de la tangente en  $(0, 0)$ :

$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow y = 0 + 0(x - 0) \rightarrow y = 0$  es el eje de abscisas.



- 84** Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola

$$y = ax^2 + bx + c \text{ es } x = \frac{-b}{2a}.$$

$$f'(x) = 2ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

**85** Si  $f'(2) = 0$ , ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?

- a) La función  $f$  tiene máximo o mínimo en  $x = 2$ .
- b) La recta tangente en  $x = 2$  es horizontal.
- c) La función pasa por el punto  $(2, 0)$ .

La correcta es la b).

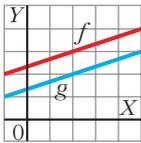
## Página 199

### PARA PROFUNDIZAR

**86** La ecuación de la recta tangente a una función  $f(x)$  en el punto de abscisa  $x = 2$  es  $4x - 3y + 1 = 0$ . ¿Cuál es el valor de  $f'(2)$ ? ¿Y el de  $f(2)$ ?

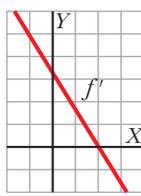
La recta tangente es  $y = \frac{4x + 1}{3}$ ; su pendiente es  $\frac{4}{3} = f'(2)$

$$f(2) = 3$$

**87**  ¿Qué relación existe entre  $f$  y  $g$ ?

¿Y entre  $f'$  y  $g'$ ?

$$\left. \begin{array}{l} f = g + 1 \\ f' = g' \end{array} \right\} \text{ Son rectas paralelas (de igual pendiente).}$$

**88**  Esta es la gráfica de  $f'$ , la función derivada de  $f$ .

a) ¿Tiene  $f$  algún punto de tangente horizontal?

b) Di para qué valores de  $x$  es  $f$  creciente y para cuáles es decreciente.

a) Sí, en  $x = 2$ , puesto que  $f'(2) = 0$

b) Si  $x < 2$  es creciente, pues  $f' > 0$ ; y si  $x > 2$  es decreciente, pues  $f' < 0$ .

**89** El coste total (en dólares) de fabricación de  $q$  unidades de cierto artículo es

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 75. \text{ El coste medio por unidad es: } M(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula  $C(q)$  y  $M(q)$  para el valor de  $q$  que has hallado en el apartado a).

$$\begin{aligned}
 \text{a) } M(q) &= \frac{3q^2 + 5q + 75}{q} \\
 M'(q) &= \frac{(6q + 5)q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} = \frac{6q^2 + 5q - 3q^2 - 5q - 75}{q^2} = \\
 &= \frac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \rightarrow q^2 = 25 \rightarrow q = 5 \text{ unidades}
 \end{aligned}$$

Se deben fabricar 5 unidades.

$$\text{b) } C(5) = 175; \quad M(5) = 35$$

**90** La función  $f(x) = \frac{60x}{x^2 + 9}$  indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ( $f(x)$  en miles de euros,  $x$  en años).

**a) Representarla gráficamente.**

**b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?**

**c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?**

$$\text{a) } f'(x) = \frac{60(x^2 + 9) - 60x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{-60x^2 + 540}{(x^2 + 9)^2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 3 \quad (x = -3 \text{ no está en el dominio})$$

Máximo en (3, 10).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \rightarrow \text{asíntota horizontal: } y = 0$$

La gráfica sería:



**b)** Beneficio máximo en  $x = 3 \rightarrow$  A los 3 años.

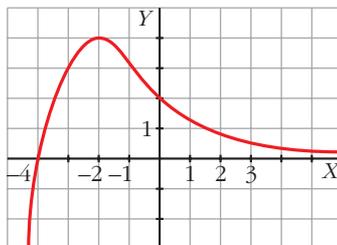
El beneficio sería  $f(3) = 10$  miles de euros.

**c)** No perderá dinero pues  $f(x) = 0$  y  $f(x) > 0$  para todo  $x > 0$ .

## Página 199

## AUTOEVALUACIÓN

1. Observa la gráfica de la función  $y = f(x)$  y responde.



- a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos  $[0, 3]$  y  $[-4, -2]$ ?
- b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?
- c) ¿Para qué valores de  $x$  es  $f'(x) > 0$ ?
- d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa  $x = 0$  es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale  $f'(0)$ ?

$$\text{a) T.V.M. } [0, 3] = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{1/2 - 2}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \frac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \frac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$$

b) Sí,  $P(-2, 4)$ .

c) Si  $x < -2$ ,  $f'(x) > 0$ .

d) La recta  $y = -x$  (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a  $-1$ . Por tanto,  $f'(0) = -1$ .

2. Dada  $f(x) = x^2 - 3x$ , prueba que  $f'(-2) = -7$  aplicando la definición de derivada.

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$$

$$f(-2+h) = (-2+h)^2 - 3(-2+h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$$

$$f(-2+h) - f(-2) = h^2 - 7h$$

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h - 7 = -7$$

Por tanto,  $f'(-2) = -7$ .

**3. Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a)  $y = \sqrt{x} + \frac{2}{x}$

b)  $y = \frac{x}{3} \cdot e^{-x}$

c)  $y = \left(\frac{3x-5}{2}\right)^3$

d)  $y = \frac{x^2}{x-2}$

a)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$

b)  $f'(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{x}{3}(-1)e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{1-x}{3}\right)$

c)  $f'(x) = 3\left(\frac{3x-5}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\left(\frac{3x-5}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}(3x-5)^2$

d)  $f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4}$

**4. Escribe la ecuación de la tangente a la curva  $y = \ln x^2$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .**

Punto de tangencia:  $x = 1, y = \ln 1^2 = 0 \rightarrow P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente:  $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \rightarrow f'(1) = 2$

Ecuación:  $y = 0 + 2(x - 1) \rightarrow y = 2x - 2$

**5. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de**

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 3$$

Buscamos los valores de  $x$  para los que  $f'(x) > 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$

$f'(x) > 0$     $f'(x) < 0$     $f'(x) > 0$

↗   | -1   ↘   | 3   ↗

Intervalos de crecimiento de  $f$ :  $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

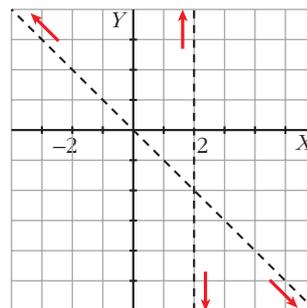
Intervalo de decrecimiento de  $f$ :  $(-1, 3)$

La función tiene un máximo en  $x = -1$  y un mínimo en  $x = 3$ .

**6. Determina los puntos singulares de:**

$$y = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$$

de la cual conocemos sus asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas. Representala.



$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$$

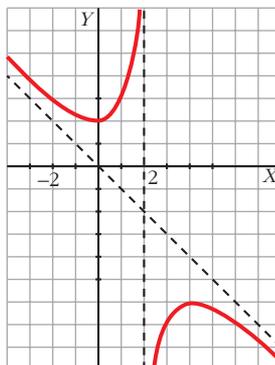
$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(2 - x) - (x^2 - 2x + 4)(-1)}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{(4x - 2x^2 - 4 + 2x) + (x^2 - 2x - 4)}{(2 - x)^2} = \frac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{0 - 0 + 4}{2 - 0} = 2; \quad f(4) = \frac{4^2 - 2 \cdot 4 + 4}{2 - 4} = -6$$

Los puntos singulares son (0, 2) y (4, -6). El primero es un mínimo y el segundo, un máximo.


**7. Representa la función  $y = x^3 - 12x + 16$ .**

$y = x^3 - 12x + 16$  es una función polinómica, por ello es continua en  $\mathbb{R}$ .

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

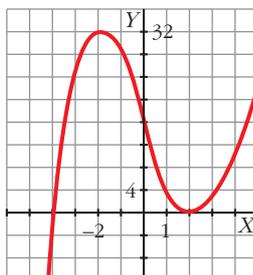
$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0 \rightarrow (2, 0)$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \rightarrow (-2, 32)$$

Los puntos singulares son (2, 0) y (-2, 32).

Esta es su gráfica:



### 8. Estudia y representa $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ .

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

- El dominio de esta función es  $\mathbb{R}$ .

- Asíntotas:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \end{array} \right\} y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) > 0 \rightarrow$  la curva está por encima de la asíntota.

Cuando  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) < 0 \rightarrow$  la curva está por debajo de la asíntota.

- Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$$

La función corta a los ejes en el punto (0, 0).

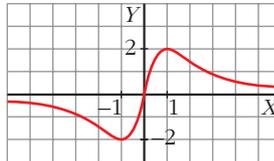
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Así, observando la asíntota y el corte con el eje  $X$ ,  $(1, 2)$  es un máximo relativo, y  $(-1, -2)$ , un mínimo relativo.

La gráfica es:



9. La función  $f(x) = x^2 + bx + c$  tiene un mínimo en  $x = 2$  y pasa por  $(2, 2)$ .  
Calcula  $b$  y  $c$ .

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2x + b$$

- $x = 2$  es un mínimo:

$$f'(2) = 0 \rightarrow 2 \cdot 2 + b = 0 \rightarrow b = -4$$

- Pasa por  $(2, 2)$ :

$$f(2) = 2 \rightarrow 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 2 \rightarrow c = 6$$

Así, la función es  $y = x^2 - 4x + 6$ .