

INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ La finalidad de esta unidad es repasar los números enteros, sus propiedades y aplicaciones, prestando especial atención a la divisibilidad.

Comenzaremos comentando con los alumnos el texto y la imagen de presentación. Fomentaremos la participación del alumnado mediante las preguntas:

- ¿Qué problemas cotidianos permite resolver la divisibilidad de números naturales?
- ¿En qué situaciones se usan los números enteros negativos?
- ¿Cómo se expresa la temperatura bajo cero? ¿Y las distancias bajo el nivel del mar?

■ A continuación leeremos entre todos el índice de contenidos junto con el esquema de la unidad didáctica y plantearemos estas cuestiones a los alumnos y alumnas:

- ¿Cuáles son las principales aplicaciones de la divisibilidad?
- ¿Por qué son necesarios los números enteros? Pon algunos ejemplos
- ¿Cómo distinguimos una deuda de un saldo a favor?

Empezamos la unidad

■ Para repasar e introducir los conceptos que se desarrollarán a lo largo del tema, se proponen en el libro una serie de actividades:

- Las actividades 1 y 2 repasan el concepto de divisibilidad.
- En la actividad 3 se trabaja el cálculo de los m.c.d. y m.c.m.
- La actividad 4 introduce la clasificación de los números en naturales y enteros.
- La actividad 5 pone en práctica la representación en la recta de los números enteros.
- La actividad 6 revisa los conceptos de valor absoluto y opuesto de un número.
- En la actividad 7 se repasan las operaciones con números enteros.

■ Para terminar esta introducción a la unidad, pediremos al alumnado que resuelva por parejas las actividades del apartado *Para empezar*.

El fin de estos ejercicios es que los alumnos repasen los contenidos, en cooperación con sus compañeros y compañeras y tomen consciencia de los conceptos que necesitan reforzar.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 1 a 6.* Leer e interpretar enunciados que contengan léxico técnico específico.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 1 a 7.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza.
- *Act. 5.* Utilizar elementos gráficos como las rectas numéricas e interpretar la representación de los números naturales y enteros.
- *Esquema.* Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.
- *Acts. 1 a 3.* Aplicar los conocimientos previos para calcular divisores y múltiplos.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

- *Texto.* Valorar el uso y la necesidad de los números enteros en la vida cotidiana.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 1 a 7* Identificar en la realización de las actividades las posibles estrategias y respuestas.

Educamos en valores

Autoestima personal y espíritu de superación

- La enseñanza de las matemáticas permite incidir directamente sobre la potenciación de la confianza y de la seguridad individual y colectiva del alumnado.

Para reforzar la seguridad personal, a lo largo de la unidad se proponen métodos de trabajo y actividades que permiten autoevaluar los propios progresos.

Seguidamente se relacionan algunas de las actividades de la unidad que contribuyen a conseguir este objetivo:

- En las págs. 3 y 24 del tema el alumnado puede autoevaluar sus conocimientos y los aprendidos.
- Las baterías de ejercicios repetitivos, como las de las págs. 12 y 16, permiten reforzar la confianza en las propias capacidades.
- Las actividades de estrategia de la p. 24 constituyen un incentivo para trabajar el espíritu de superación.

Libro Digital

- *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching



- Para empezar el tema podemos visualizar el recurso del siguiente enlace:

<http://www.tiching.com/738806>

Se trata de un vídeo de poco menos de dos minutos y medio en el que se explica cómo se tiene que proceder para hallar los divisores de un número.

A continuación, para seguir introduciendo la unidad preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Qué lugar ocupa el dividendo? ¿Y el divisor? ¿Y el cociente?*
- *¿Qué otras situaciones reales puedes explicar dónde sea necesario buscar la divisibilidad de un número?*

Finalmente, propondremos que escriban un ejemplo concreto de cada caso por parejas y hallen la solución.

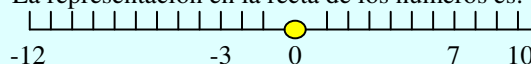
SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 3

Para empezar...

1. Son divisores de 42 los números 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21.
2. Respuesta personal. A modo de ejemplo:
Son múltiplos de 12 los números 60, 72, 84, 96 y 108.
3. Los resultados son los siguientes:
a) m.c.m. $(60, 100) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300$
m.c.d. $(60, 100) = 2^2 \cdot 5 = 20$
b) m.c.m. $(20, 15) = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$
m.c.d. $(20, 15) = 5$
4. La clasificación es la siguiente:
a) 7 es un número natural y entero.
b) -12 es un número entero.
c) -3 es un número entero.
d) 0 es un número entero.
e) 10 es un número natural y entero.

5. La representación en la recta de los números es:



(Continúa en la página 1-32 de la guía)

1. Divisores y múltiplos

Fija te en estas fracciones:

$$\frac{12}{3} = \frac{24}{6} \quad \frac{12}{4} = \frac{6}{2} \quad \frac{12}{3} = \frac{6}{1}$$

Las dos primeras son exactas, con el resto en 0, mientras que la tercera lo es. Por eso, que 12 es divisible por 3 y por 4, y que no lo es por 5.

Notación

Un número natural es **divisible** por otro cuando la división del primero sobre el segundo es exacta.

Si un número a es divisible por b , también decimos que a es **divisible** de a y que b es **múltiplo** de a .

En el ejemplo que 24 es divisible de 6 y 4 es múltiplo de 6.

Por ejemplo: 12 es divisible por 3 u $3 \mid 12$ es divisor de 12 u 12 es múltiplo de 3.

Representamos con $a \mid b$ el conjunto de casos de divisibilidad de un número a y con $b \in M(a)$ el conjunto de todos sus divisores.

Fija te en que un número compuesto tiene infinitos divisores. Por ejemplo:

$$M(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, \dots\}$$

Para hallar los divisores de un número, lo dividimos entre los números naturales 1, 2, 3, ... hasta que el cociente obtenido sea menor o igual que el divisor. Los divisores del número serán los divisores y cocientes de las divisiones exactas.

Por ejemplo, para encontrar los divisores de 12 hacemos:

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 12} \\ \underline{00} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \\ \underline{00} \\ 00 \end{array}$$

Por lo tanto, los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6, 12.

1.1 Criterios de divisibilidad

Los criterios de divisibilidad son reglas sencillas que permiten decidir si un número es divisible por otro sin tener que hacer la división. A continuación exponemos algunos de los más usuales.

- Un número es divisible por 2 cuando termina en 0 o en cifra par.
- Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 5 cuando acaba en 0 o en 5.
- Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
- Un número es divisible por 10 cuando acaba en 0.
- Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la suma de las cifras que ocupan lugares impares es 0 o un múltiplo de 11.

1.2 Propiedades de los múltiplos y divisores

Un número natural a es divisible por otro número b si a es divisible por b , lo es b , o la división de a entre b es exacta. Como vemos, esta definición es un tanto circular (se refiere a la divisibilidad al hablar de $a \mid b$).

Así, por ejemplo, 24 es múltiplo de 6 porque la división $24 : 6$ es exacta y, de forma equivalente, puesto que el cociente es 4, $24 = 6 \cdot 4$.

Forma más compacta, los ejemplos y a partir de la definición de múltiplo nos podemos dar un número de las propiedades más usuales de los múltiplos:

1. Cualquier número natural es múltiplo de 1. Por ejemplo, 8 es múltiplo de 1, porque $8 = 1 \cdot 8$.
2. Cualquier número natural es múltiplo de sí mismo. Así, 11 es múltiplo de 11, pues $11 = 11 \cdot 1$.
3. Si a y b son múltiplos de c , entonces $a + b$ y $a - b$ son múltiplos de c . Por ejemplo, 24 y 18 son múltiplos de 6 y la suma de ambos, 42, y la diferencia, 6, también son múltiplos de 6, puesto que: $42 = 24 + 18 = 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 6 \cdot 7$ y $6 = 24 - 18 = 6 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 6 \cdot 1$.
4. Si a es múltiplo de b , entonces $a \cdot c$ es múltiplo de b . Así, 20 es múltiplo de 5 y el producto de 20 por cualquier número, por ejemplo por 30, también es múltiplo de 5: $30 \cdot 20 = 17 \cdot 30 = 30 \cdot 17 = 30 \cdot 17$. Luego $30 \cdot 20 = 17 \cdot 30$ es múltiplo de 5.
5. Si a es múltiplo de b y b es múltiplo de c , entonces a es múltiplo de c . Por ejemplo, sabemos que 24 es múltiplo de 12 ($24 = 12 \cdot 2$) y 12 es múltiplo de 6 ($12 = 6 \cdot 2$). Podemos concluir que 24 es también múltiplo de 6: $24 = 12 \cdot 2 = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot (2 \cdot 2)$.

Hazte fijo con las expresiones "a es múltiplo de b" y "b es divisor de a" con sus equivalentes. Por tanto, las propiedades que acabamos de ver las podemos escribir de forma equivalente en términos de divisores en lugar de en términos de múltiplos, como puedes ver en el margen.

Amplía en la red...

¿Qué es un número primo? ¿Qué es un número compuesto? ¿Qué es un número primo? ¿Qué es un número compuesto? ¿Qué es un número primo? ¿Qué es un número compuesto?

Ten en cuenta

Si a es múltiplo de b , entonces b es divisor de a .

Si a es divisor de b , entonces b es múltiplo de a .

Recuerda

Para obtener los múltiplos de un número, multiplicamos ese número por los números naturales sucesivos 1, 2, 3, 4, 5, ... Así, los múltiplos de 12 son: 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

Divisibilidad por 4, por 8 y por 9

- Un número es divisible por 4 si los últimos dos dígitos del número forman un múltiplo de 4.
- Por 8 si es divisible por 2 y por 4.
- Por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Resolución de problemas

1. ¿Qué números son divisores de 36? ¿Qué números son divisores de 48? ¿Qué números son divisores de 72?

2. Halla los múltiplos de 12 que sean menores que 100 y mayores que 200.

3. ¿Qué números son divisores de 120, 144 y 180? ¿Qué números son divisores de 120 y 144? ¿Qué números son divisores de 120 y 180?

4. ¿Qué números son divisores de 12 y 18? ¿Qué números son divisores de 12 y 18?

5. ¿Qué números son divisores de 12 y 18? ¿Qué números son divisores de 12 y 18?

1. DIVISIBILIDAD Y NÚMEROS ENTEROS

■ El objetivo de esta sección es el estudio de los conceptos de divisor y múltiplo, la relación entre ellos y las claves para calcularlos. Empezaremos leyendo la introducción y plantearemos la siguiente pregunta al alumnado:

– ¿Cuándo se dice que un número natural es divisible por otro? Pon un ejemplo.

■ Al explicar el concepto de divisor, observaremos la *Notación* del margen derecho y al final de la introducción prestaremos atención el apartado *Recuerda* del mismo margen.

Para repasar lo aprendido, formularemos estas cuestiones:

– ¿Qué elementos forman el conjunto $D(6)$? ¿Y el $M(2)$?

Como complemento al texto de este apartado los alumnos pueden practicar los conceptos de divisor y múltiplo y su interrelación visitando el recurso *Tiching* 69519 del apartado *@Amplía en la red*.

1.1 Criterios de divisibilidad

■ A continuación leeremos el texto de este subapartado donde recordaremos los criterios de divisibilidad. Lo complementaremos con la lectura del texto del margen.

Para comprobar la comprensión de los conceptos por parte del alumnado, les haremos las siguientes preguntas:

- ¿234 es divisible por 6?
- ¿724 es divisible por 4?
- ¿165 es divisible por 11?

Concluimos este subapartado proponiendo a los alumnos que resuelvan las actividades 1 y 2.

1.2 Propiedades de los múltiplos y divisores

■ Leeremos ahora el texto de este subapartado sobre las propiedades de los múltiplos, incluyendo la nota al margen *Ten en cuenta*, y lanzaremos el siguiente reto al alumnado:

– ¿Podrías poner un ejemplo distinto para la tercera propiedad de los múltiplos?

Para poner en práctica estos conocimientos resolveremos entre todos las actividades 3 y 4, y a continuación pondremos a los alumnos el recurso *Tiching* 69517 de la sección *@Amplía en la red*.

Posteriormente leeremos la nota *Fijate*, acerca de las propiedades de los divisores. Ahora el alumnado puede contestar a los ejercicios 5, 6 y 7.

■ Finalizaremos esta sección pidiendo a los alumnos que resuelvan en su cuaderno la última actividad propuesta en el libro, donde tendrán que aplicar los conocimientos adquiridos.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 3 y 8.* Desarrollar la capacidad de expresar por escrito argumentos propios, así como trabajar la búsqueda, recopilación y procesamiento de información.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1 y 2.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia de resolución de múltiplos y divisores.

■ *Acts. 3, 6, 7 y 8.* Aplicar los criterios de divisibilidad y las propiedades de los múltiplos y divisores para resolver las actividades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Act. 8.* Afrontar los problemas siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la solución, aplicando eficientemente los conocimientos adquiridos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

- ✓ La actividad de refuerzo 4 servirá para asentar la capacidad de cálculo de múltiplos y divisores.
- ✓ La actividad de ampliación 2 resultará útil para evaluar si el alumnado ha entendido correctamente y sabe aplicar los conceptos de múltiplo y divisor en situaciones prácticas.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching



- Proponemos entrar en el siguiente enlace para ampliar y reforzar los conceptos estudiados sobre los divisores y los múltiplos:

<http://www.tiching.com/738807>

En la página se muestran cuatro apartados, en cada uno de los cuales se presenta un breve resumen de la teoría y se acompaña de actividades interactivas.

Pediremos a los alumnos que poco a poco vayan realizando las actividades y que al final completen la evaluación del apartado.

El material autoevaluable es interesante porque podemos presentárselo a los alumnos para que desarrollen la capacidad de trabajo autónomo como método para asimilar conceptos matemáticos.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 5

1. Actividad personal.

El alumno deberá escoger el número de divisores que demanda la actividad entre los siguientes:

- Divisores de 54: 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54.
 - Divisores de 40: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.
 - Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
 - Divisores de 17: 1, 17.
2. Los múltiplos de 75 en el rango demandado son:
 $300 = 75 \cdot 4$
 $375 = 75 \cdot 5$
3. Son múltiplos de 18 todos aquellos números que son divisibles por 18 y no dejan resto.
En este caso, todos los números mayores o iguales a 18 lo son 90, 126, 18 y 720.
4. Sí, ya que:
 $96 = 32 \cdot 3 = 8 \cdot 4 \cdot 3 = 8 \cdot 12$
5. Sí, porque dividir por 14 es equivalente a dividir por 7 y por 2.

6. Sabemos que todos los elementos de la tabla de multiplicar del 7 son múltiplos de 7. Así pues 70 y 49 son múltiplos de 7.

Por la propiedad 3, encontramos que:

$$70 + 49 = 119 \text{ también es múltiplo de 7}$$

7. Respuesta personal, a modo de ejemplo:

Escogemos el 5 y sus múltiplos 25 y 75. Siendo $a = 25$, $b = 75$ y $c = 5$:

$$a \cdot b = 25 \cdot 75 = 1875$$

$$c^2 = 25 \rightarrow 1875$$

$$1875 = 25^2 \cdot 3 \rightarrow 1875 \text{ es múltiplo de 25.}$$

8. La resolución del problema es la siguiente:

- Para 122 minutos de publicidad:

$122 : 3 = 40,6667 \rightarrow 122$ no es múltiplo de 3. Por lo tanto, deberían ser 120 minutos con 40 pausas o 123 con 41 pausas.

- Para 2 horas de publicidad:

2 horas son 120 minutos, que al ser un número múltiplo de 3, sí que sería posible. En total, serían 40 pausas publicitarias.

2. Números primos y números compuestos

¿Cuántos divisores tiene el 12? ¿Puedes ser sus divisor? Aplicando los criterios del apartado anterior sabemos que 12 solo es divisible por 1 y por sí mismo, entonces que 12, además de ser divisible por 1 y por sí mismo, lo es también por 2, 3, 4 y 6.

Según sus divisores, clasificamos al número como número compuesto.

Un número natural mayor que 1 es primo si y solo si es divisible por sí mismo y por 1. Si no cumple por algún otro número, es compuesto.

Por ejemplo, son números primos 2, 3, 5, 7, 11, ...

Para averiguar si un número dado es primo, se divide con los números primos 2, 3, 5, 7, ... hasta llegar a uno menor o igual a su raíz cuadrada. Si el cociente sea mayor o igual que el divisor, se sigue a otro divisor mayor, si no, entonces es compuesto; si tampoco divide es primo, el número es primo.

Una utilidad para saber si un número es primo es utilizar la criba de Eratóstenes del número dado. En primer lugar, se escribe con el que estamos primos en el menor número primo mayor que dicho número.

ETIMOLOGÍA

Los números primos, así como los números compuestos, se llaman así porque son los "fundamentos" de los números.

CRIBA DE ERATÓSTENES

Es un procedimiento para determinar los números primos más pequeños que el máximo a utilizar en un problema.

Por ejemplo, para todos los números primos menores que 100, se escriben en forma de lista y se marcan todos los múltiplos de 2 excepto el 2, los múltiplos de 3 excepto el 3, hasta que no quede un número que quede sin marcar, excepto el 1, son primos.

Amplia en la red

Descomponer un número en factores primos consiste en escribirlo como producto de números primos.

Para hacer la descomposición, dividimos el número sucesivamente por los números primos 2, 3, 5, 7, ... por los que sea divisible, hasta que encontremos un cociente que a 1. Además, mediante un apunte, se marca cuáles de ellos son los divisores.

TEN EN CUENTA

Al hacer la descomposición de factores primos de un número, debemos tener presente siempre al 1, el último divisor de un número cuando se divide por el siguiente.

Los criterios de divisibilidad nos ayudan a saber si un número es divisible o no.

NÚMERO DE DIVISORES

La descomposición de un número en factores primos nos permite encontrar el número de divisores que tiene un número con el producto de los exponentes de su descomposición incrementados, todos por una unidad.

Así, el número 900 tiene 24 divisores en total.

$$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$(2+1)(2+1)(2+1) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

2. NÚMEROS PRIMOS Y NÚMEROS COMPUESTOS

■ A partir de lo estudiado en la sección anterior explicaremos cuándo un número es primo y cuándo compuesto. Como curiosidad prestaremos atención a la *Etimología* de la palabra “primos”, que aparece en el margen. Lanzaremos estas preguntas a la clase:

- ¿Cuántos divisores tiene un número primo? Pon un ejemplo.
- ¿El número 9 es primo? ¿Y el 19?

■ A continuación, propondremos a un alumno que lea en voz alta los procedimientos para averiguar si un número es primo, incluyendo la *Criba de Eratóstenes* del margen. Les formularemos las siguientes cuestiones:

- ¿Qué números primos hay entre 11 y 20?
- Enumera los diez primeros números primos.

Para completar este apartado trabajaremos en la pizarra el ejemplo propuesto. En su resolución fomentaremos la participación del alumnado repasando los criterios de divisibilidad.

Posteriormente, los alumnos y alumnas pueden resolver los ejercicios 9 a 12.

2.1 Descomposición de un número en factores...

■ Leeremos este subapartado y practicaremos la factorización mediante el ejemplo propuesto, haciendo hincapié

en que un número primo puede ser divisor de un número varias veces, como se indica en la nota del margen: *Ten en cuenta*.

- ¿En qué orden se prueban los divisores de un número?
- ¿Cómo se expresa la descomposición de un número en factores primos?

A continuación, los alumnos y alumnas se familiarizarán con la factorización realizando la actividad interactiva propuesta en la plataforma *Tiching en Amplía en la red*.

■ Terminamos esta sección exponiendo al alumnado una de las aplicaciones de la descomposición de un número, el cálculo de sus divisores.

Realizaremos el ejemplo en la pizarra y sacaremos a un alumno o alumna a resolver el siguiente ejercicio:

- Obtén todos los divisores de los números 93, 320 y 2541.

Aprovecharemos el ejemplo anterior para explicar al alumnado cómo conocer la cantidad de divisores que tiene un número, observación que encontramos en el margen en *Número de divisores*.

■ Finalmente, los alumnos y alumnas resolverán en su cuaderno las actividades 13, 14, 15 y 16 propuestas.

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 10 a 12 y 14 a 15.* Leer e interpretar los enunciados de las actividades procesando los datos de manera ordenada.
- *Act. 16.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios y de generar hipótesis.
- *Etimología.* Usar el vocabulario adecuado y aprender sobre el origen etimológico de palabras clave.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 12 y 16.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos para comprobar o razonar la respuesta.
- *Acts. 9 y 13.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de la actividad.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Acts. 10 y 14.* Ser capaz de proponer ejemplos siendo creativo y mostrando criterio propio al buscar las respuestas.

Navegamos por Tiching



- Podemos ampliar la información sobre La Criba de Eratóstenes accediendo a este enlace:

<http://www.tiching.com/738808>

En esta página web encontraremos un artículo muy completo que podemos utilizar para conocer el procedimiento del algoritmo de Eratóstenes, muy útil para encontrar los números primos y compuestos menores que un número natural dado.

Para trabajar este algoritmo con nuestros alumnos, podemos pedirles que sigan los pasos que se explican en la parte inferior del recurso.

A continuación, haremos que busquen los números primos comprendidos entre 200 y 300 siguiendo el mismo procedimiento.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 6

9. La clasificación es la siguiente:
- a) $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \rightarrow$ compuesto
 - b) $91 = 7 \cdot 13 \rightarrow$ compuesto
 - c) $101 \rightarrow$ primo
 - d) $803 = 73 \cdot 11 \rightarrow$ compuesto
 - e) $143 = 11 \cdot 13 \rightarrow$ compuesto
 - f) $539 = 7^2 \cdot 11 \rightarrow$ compuesto
10. Para cada caso:
- $2K1$ es primo cuando $K = 1, 4, 5, 7, 8$.
 - $11K$ es primo cuando $K = 3$.
11. Cambiando el orden del número 125 obtenemos 251 y 521, ambos números primos.
12. Primero realizamos la raíz cuadrada de los dos números:
- $$\sqrt{197} = 14,036 \quad \sqrt{199} = 14,107$$
- El mayor número primo menor que estos resultados es 13. Dividiendo cada número entre 13, 11, 7, 3 y 2, vemos que ninguno de los dos da una división exacta, por lo que podemos concluir que ambos son primos.
- Como entre 197 y 199 hay una distancia de 2, podemos afirmar que además son gemelos.

Página 7

13. La descomposición numérica en números primos es:
- a) $4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$
 - b) $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$
 - c) $306 = 2 \cdot 3^2$
 - d) $392 = 2^3 \cdot 7^2$
 - e) $184 = 2^3 \cdot 23$
 - f) $3150 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
14. Respuesta personal. Es correcto cualquier número cuya descomposición en factores primos tenga: 2, 3 y 7.
- Por ejemplo:
- $$378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$$
- $$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$
- $$588 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$$
15. Descomponemos el número en factores primos y calculamos el número de divisores que tiene:
- $$472 = 2^3 \cdot 59$$
- $$(3 + 1) \cdot (1 + 1) = 4 \cdot 2 = 8 \rightarrow$$
- tendrá 8 divisores.

	2^0	2^1	2^2	2^3
59^0	1	2	4	8
59^1	59	118	236	472

Los divisores son 1, 2, 4, 8, 59, 118, 236 y 472.

16. No es correcta, porque sabemos que: $6 = 2 \cdot 3$. Por lo tanto, la descomposición correcta sería $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

3. m.c.d. y m.c.m.

Como vimos en el apartado de resolución de problemas, para resolver algunos problemas matemáticos, debemos utilizar un método de los números naturales, a saber: números o el resto de los múltiplos constantes. Es lo que se conoce, respectivamente, como **máximo común divisor** y **mínimo común múltiplo**.

¿Qué relación existe entre el m.c.d. y el m.c.m. de dos números?

Para calcularlos, utilizamos la descomposición de los números en factores primos.

El m.c.d. es el producto de los factores comunes a todos los descomposiciones con el menor de las potencias con que figuran.

El m.c.m. es el producto de los factores comunes a todos los descomposiciones y de los no comunes, con el mayor de las potencias con que figuran.

3.1. Ejemplos:

Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de 24, 30 y 36.

En primer lugar, descomponemos 24, 30 y 36 en producto de factores primos:

$$\begin{array}{l} 24 = 2^3 \cdot 3 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \end{array}$$

Para calcular el m.c.d., elegimos los factores comunes elevados a su menor potencia:

$$m.c.d. = 2^2 \cdot 3 = 12$$

Para calcular el m.c.m., elegimos todos los factores, los comunes y los no comunes, elevados a su mayor potencia:

$$m.c.m. = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

3.2. Números primos entre sí

Dos números son **primos entre sí** si su único divisor común es 1. Por tanto, si el m.c.d. es 1.

Observa que dos números primos son siempre primos entre sí, pero dos números primos no siempre son entre sí y no los primos, como 18 y 27.

4. Números enteros

Para ciertos problemas e identificar utilizando los números naturales. Hay otros los números naturales. El conjunto de todos ellos se simboliza con \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

En algunos textos, el cero se consideraba un natural.

En algunos textos, el cero se consideraba un natural.

En algunos textos, el cero se consideraba un natural.

4.1 Representación en la recta numérica y ordenación

Los números enteros se pueden representar en la recta numérica. Para hacerlo:

- Marcamos un punto en la recta que represente el 0.
- Elegimos un segmento como unidad y lo transportamos a derecha e izquierda del 0.
- Marcamos los números positivos a la derecha del 0 y los negativos a la izquierda.

La situación de los números enteros en la recta numérica quedará:

Debido que los números enteros, positivos, se marcan al que está a la izquierda del 0 y los negativos, al que está a la derecha del 0 en la recta.

Por ejemplo, el número -3 se representa a la izquierda del 0 en la recta.

El número 3 se representa a la derecha del 0 en la recta.

El 0 es mayor que -5, ya que -5 está a la izquierda de -0 en la recta.

El número -3 se representa a la izquierda del 0 en la recta.

El número 3 se representa a la derecha del 0 en la recta.

El 0 es mayor que -5, ya que -5 está a la izquierda de -0 en la recta.

3. M.C.D Y M.C.M. / 4. NÚMEROS ENTEROS

3. m.c.d y m.c.m

■ En este apartado repasaremos dos procedimientos de cálculo que serán muy útiles a la hora de resolver problemas, el m.c.d. y el m.c.m.

Leeremos las dos definiciones y formularemos estas preguntas para comprobar el grado de comprensión:

- ¿El m.c.d. de dos números puede ser mayor que alguno de dichos números?
- ¿Y el m.c.m. puede ser menor que dichos números?

■ Trabajaremos a continuación el cálculo del m.c.d. y el m.c.m. a partir de la descomposición en factores primos estudiada en la sección anterior.

Expondremos el ejemplo del libro y plantearemos a los alumnos estas cuestiones relacionadas:

- ¿Por qué no se toma el 5 para el cálculo del m.c.d.?
- ¿Qué potencia del 2 se elige para calcular el m.c.m.?

Para completar el apartado pediremos a los alumnos que practiquen estos cálculos mediante el recurso *Tiching* propuesto. Les contaremos también cómo calcularlos utilizando la calculadora WIRIS, del apartado *Recursos TIC*.

■ En el siguiente subapartado explicaremos cuándo dos números son primos entre sí. Los alumnos pueden resolver ahora las actividades propuestas en el libro.

4. Números enteros

■ Comenzaremos este apartado repasando los números naturales y destacando con ejemplos la necesidad de los números enteros en la vida cotidiana.

Seguiremos leyendo y observaremos el conjunto de los números enteros y el por qué de su símbolo en la nota del margen. Repasamos cuestionando:

- ¿Un número natural es un número entero?

Apuntaremos al alumnado la notación que se emplea para los números enteros en *Fíjate* y como curiosidad leeremos las notas *Sabías...* del margen.

- ¿Qué parte de la expresión de un número positivo se puede eliminar?

4.1 Representación en la recta numérica y...

■ En este subapartado los alumnos leerán cómo representar los números enteros en la recta numérica. Les podemos preguntar estas cuestiones para asegurarnos que han entendido el texto:

- ¿Qué valor se utiliza como punto de referencia en la recta numérica?
- ¿Dónde se sitúan los números negativos?
- ¿La unidad representada en la recta tiene una longitud determinada?

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 19 y 20.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar por escrito argumentos propios en la resolución de las actividades, generando estrategias e ideas propias.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de la calculadora WIRIS, con la que se puede efectuar los cálculos de divisibilidad.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 17 y 18.* Aplicar el proceso aprendido para hallar el m.c.m. y el m.c.d. de forma repetitiva para mejorar la eficacia en su resolución.

■ *Act. 20.* Aplicar los nuevos conocimientos adquiridos sobre m.c.m. y m.c.d. a situaciones parecidas propuestas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 19 y 20.* Reflexionar y saber argumentar los puntos de vista propios de manera lógica mediante la propuesta de ejemplos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 5 permitirá consolidar el cálculo del m.c.d. y del m.c.m. de un par de números.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching



– Para repasar el conjunto de los números enteros, proponemos visualizar el recurso del siguiente enlace:

<http://www.tiching.com/738809>

Se trata de un vídeo de poco menos de dos minutos y medio de duración en el que se explican los números enteros y la manera de representarlos en una recta numérica.

Este enlace nos servirá como complemento a las explicaciones de esta doble página, así como para asegurarnos de que se ha comprendido bien el apartado. Por ello, al acabar de verlo preguntaremos al alumnado:

- ¿Con qué símbolo se representa el conjunto de los enteros?
- ¿Cómo se denominan los dos grupos que forman los números enteros?
- ¿Cómo representarías en la recta numérica la suma de $8 + 6$? ¿Y la resta de $-2 - 8$?

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 8

17. Las soluciones al cálculo del m.c.d. son:

- a) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
 $225 = 3^2 \cdot 5^2$
m.c.d. = $3^2 \cdot 5 = 45$
- b) $196 = 2^2 \cdot 7^2$
 $216 = 2^3 \cdot 3^3$
m.c.d. = $2^2 = 4$
- c) $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$
 $325 = 5^2 \cdot 13$
 $486 = 2 \cdot 3^5$
m.c.d. = 1

18. Las soluciones al cálculo del m.c.m. son las siguientes:

- a) $28 = 2^2 \cdot 7$
 $98 = 2 \cdot 7^2$
m.c.m. = $2^2 \cdot 7^2 = 196$
- b) $11 = 11 \cdot 1$
 $24 = 2^3 \cdot 3$
 $40 = 2^3 \cdot 5$
m.c.m. = $11 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 1320$

c) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
 $108 = 2^2 \cdot 3^3$
 $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$
m.c.m. = $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18\,900$

19. El menor número de tres cifras, múltiplo de 3, 4 y 5, es 120. Por lo tanto, el que buscamos es el 122.

20. Respuesta personal. A modo de ejemplo:

Vemos que si descomponemos los términos 26, 33, 35 el m.c.d. es 1:

$$\begin{cases} 26 = 2 \cdot 13 \\ 33 = 3 \cdot 11 \rightarrow \text{m.c.d.} = 1 \\ 35 = 5 \cdot 7 \end{cases}$$

4.2 Valor absoluto de un número entero

El **valor absoluto** de un número entero es la distancia desde el punto que representa este número en la recta numérica hasta el 0. Se indica usualmente al número entre barras. Por ejemplo:

$$|-4| = 4 \quad |0| = 0 \quad |3| = 3$$

Otra forma de definir el valor absoluto es: **El valor absoluto de un número entero es el número que se obtiene cuando se ignoran los signos.**

Encuadra en el caso del 5, siempre hay dos números que tienen el mismo valor absoluto.

Encuadra en el caso del 6, siempre hay dos números que tienen el mismo valor absoluto.

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto cumple las siguientes propiedades:

- $|a| \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$
- $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

Ejemplo en la Realidad

Siempre en la recta numérica $|-4| = 4$, $|0| = 0$, $|3| = 3$.

Siempre en la recta numérica $|-4| = 4$, $|0| = 0$, $|3| = 3$.

Siempre en la recta numérica $|-4| = 4$, $|0| = 0$, $|3| = 3$.

5. Suma y resta de números enteros

La resolución de muchos problemas cotidianos lleva a efectuar sumas y restas con números enteros. Resolvamos algunos ejemplos.

5.1 Suma

En qué planta se define un ascensor que, partiendo de la planta 3 de un edificio, sube 2 plantas? ¿Y si parte de la planta -1 y baja 2 plantas? ¿Y si parte de la planta -2 y sube 3 plantas?

- En el primer caso, hacemos $3 + 2 = 5$; el ascensor se define en la planta 5.
- En el segundo, hacemos $-1 + (-2) = -3$; el ascensor se define en la planta -3.
- En el tercer, hacemos $-2 + 3 = 1$; el ascensor se define en la planta 1.

En general:

Para sumar dos números enteros de **igual signo**, sumamos sus valores absolutos y ponemos el mismo signo.

Para sumar dos números enteros de **diferente signo**, restamos sus valores absolutos y el resultado lo colocamos al signo del que tiene mayor valor absoluto.

PROPIEDADES DE LA SUMA

- Commutativa:** cambiar el orden de los sumandos no modifica el resultado de la suma.

$$4 + (-2) = (-2) + 4$$
- Asociativa:** el resultado de la suma de tres números no depende de la manera en que se agrupan.

$$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$$
- Elemento neutro:** el 0 es el elemento neutro de la suma, puesto que cualquier número entero sumado a 0 da como resultado el mismo número entero.

$$0 + (-8) = (-8) + 0 = -8$$
- Elemento opuesto:** la suma de un número entero con su opuesto es 0.

$$4 + (-4) = (-4) + 4 = 0$$

5.2 Resta

Un ascensor está detenido en la planta 2 después de bajar 7 plantas. ¿En qué planta se paró?

Si a es la planta de la que se bajó, entonces:

$$a - 7 = 2 \quad a = 2 + 7 \quad a = 9$$

Es decir, el ascensor paró en la planta 9.

Esto es que la operación $a - 7$ es equivalente a $a + (-7)$.

Logo:

Para restar dos números enteros, sumamos el primero con el otro y el opuesto del segundo.

NO LO OLVIDES

Las propiedades de la suma son:

- Commutativa: $a + b = b + a$
- Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Elemento neutro 0: $0 + a = a + 0 = a$
- Elemento opuesto: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

EXERCICIOS

La suma de los números enteros $1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10$ es igual a -5 .

Por ejemplo, $1 + (-2) = -1$ y $-1 + 3 = 2$.

4. NÚMEROS... (CONT.) / 5. SUMA Y RESTA...

4.2 Valor absoluto de un número entero

Continuamos con este subapartado exponiendo el concepto de valor absoluto y sus propiedades.

Prestaremos atención a las gráficas que destacan el significado de este concepto y a las dos anotaciones bajo el título *Fíjate*. Éstas nos aportan pistas de gran utilidad a la hora de calcular el valor absoluto de un número.

Los alumnos pueden resolver ahora las actividades 25 a 27 sobre el valor absoluto.

Leeremos cuándo se dice que dos números son opuestos y enunciaremos las propiedades indicadas en el margen.

Completaremos la exposición con los dos ejemplos propuestos en el libro junto con estas cuestiones:

- ¿Cuál es el mayor de dos números opuestos?
- ¿Puede haber algún valor absoluto negativo?

Concluimos el apartado repasando los conocimientos adquiridos mediante los recursos *Tiching* propuestos.

Pediremos a los alumnos que realicen en su cuaderno las actividades de repaso 21 a 24 y de la 28 a la 30.

5.1 Suma

El objetivo básico de esta sección es practicar la suma y la resta de números enteros.

Partiremos del ejemplo que se plantea, invitando a los alumnos a que analicen el enunciado:

- ¿Por qué son negativos los dos números en el segundo caso?
- ¿Por qué se debe indicar el -2 entre paréntesis?

A continuación explicaremos la suma de números enteros analítica y gráficamente, observando la nota del margen.

Leeremos ahora las propiedades de la suma, relacionando cada propiedad con el ejemplo propuesto y su síntesis en la nota al margen *No lo olvides*.

- ¿Afecta al resultado el orden en el que sumemos varios números?
- ¿Existe algún número que sumado a otro dé como resultado este último?

5.2 Resta

Comenzamos el siguiente subapartado pidiendo a los alumnos que observen el ejemplo y preguntándoles:

- ¿Por qué se resta 7 del valor de x?
- ¿Qué diferencia hay entre los dos signos menos de la expresión $-(-7)$?

Comprobaremos cómo se restan números enteros y revisaremos cómo introducir números negativos en la calculadora en el apartado que lleva este mismo nombre.

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 21 y 22.* Desarrollar la capacidad de expresar por escrito aspectos habituales de la vida cotidiana, utilizando números enteros.
- *Act. 30.* Expresar e interpretar de forma escrita los conocimientos adquiridos sobre el valor absoluto de un número entero, argumentando la respuesta.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 23 a 29.* Reconocer y asimilar el concepto y las propiedades del valor absoluto de los números enteros y ser capaz de reproducirlos.
- *Act. 30.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 22.* Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación, siendo creativo e imaginativo para relacionar situaciones reales con las matemáticas.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

- ✓ La actividad de refuerzo 1 servirá para revisar las operaciones de suma y resta con números enteros, así como con valores absolutos de estos.

Naveguemos por Tiching



- Para asimilar y asegurar los conceptos referentes a las sumas y restas de los números enteros, podemos acceder a este enlace:

<http://www.tiching.com/738810>

En esta página encontraremos una explicación detallada de cómo crear los cuadrados mágicos de $3 \cdot 3$ o de $5 \cdot 5$.

Después de leer los contenidos, pediremos a los alumnos que construyan un cuadrado mágico con números negativos.

También les podemos plantear algunos cuadrados mágicos elaborados por nosotros mismos, en los que deberán decir si son correctos o no y, en ese caso, hacer que encuentren dónde se localiza el error.

Finalmente, les podemos pedir que comprueben si es posible hacer cuadrados mágicos con la multiplicación y la división.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 11

21. Expresado en números enteros es:
- a) El ascensor está en la planta 0.
 - b) Tiene -56 €.
 - c) El termómetro marca -7 °C.
 - d) La cueva está a -64 m.
22. Respuesta personal, a modo de ejemplo:
- a) La temperatura es de 4 °C bajo cero.
 - b) Tiene una deuda 17 €.
 - c) La altitud es de 85 m bajo el nivel del mar.
 - d) El ascensor está en el sótano 3.
23. La representación en la recta numérica es:
-
- A horizontal number line with tick marks every 1 unit. Labels are placed at -7, -4, -2, 0, 5, and 9. A yellow circle is drawn at the 0 tick mark.

24. El orden es: $7 > 4 > 2 > 0 > -2 > -3 > -5$
 Los opuestos, en el mismo orden que en el apartado anterior, son: $-7, -4, -2, 0, 2, 3, 5$.
25. El valor absoluto de cada número es:
 $|6| = 6; |-9| = 9; |-15| = 15; |0| = 0; |17| = 17$

26. Los números que se representan a la izquierda del cero son negativos. Por lo tanto, si el número en cuestión tiene valor absoluto 8, se trata del -8 .
27. Los números enteros en cada caso son:
- a) 12 y -12 .
 - b) -1 y 0 .
 - c) $-2, -1, 0, 1, 2$.
28. Los opuestos de los números 3 y -2 son -3 y 2 . En este rango tenemos los números enteros: $-2, -1, 0$ y 1 .
 Realizando ahora el valor absoluto de estos números:
 $|-2| = 2; |-1| = 1; |0| = 0; |1| = 1$
 Por lo tanto, los números cuyo valor absoluto están entre -3 y 2 son $-1, 0$ y 1 .
29. Aunque los números están en valor absoluto, sabemos que son negativos, por lo que $x = -5$, y -3 En conclusión, $y > x$.
30. Hay dos valores posibles:
 $|-2-5| = 7 \qquad |12-5| = 7$
 Esto ocurre porque el valor absoluto de un número entero negativo y su positivo es el mismo.

5.3 Simplificación de la escritura
 En las expresiones de sumas y restas de números enteros podemos agrupar la escritura eliminando signos y paréntesis innecesarios. Para hacerlo, tenemos que seguir la siguiente regla:

1. Eliminamos el paréntesis del primer sumando y, si lo ponemos, le restamos su signo.
2. En los demás sumandos, siempre que nos encontremos con dos signos seguidos seguidos, los sustituimos por "+", y siempre que nos encontremos con dos signos iguales seguidos, los sustituimos por "+".

De cada número:
 $(+3) + (+2) = +3 + 2$ $(-4) + (-3) = -4 - 3$
 $(-2) + (+3) = -2 + 3$ $(-3) - (-2) = -3 + 2$
 $(+2) + (-3) = +2 - 3$ $(-4) - (-2) = -4 + 2$
 $(-2) + (-3) = -2 - 3$ $(-3) - (-2) = -3 + 2$

5.4 Sumas y restas combinadas
 Para sumar o restar, aplicamos el siguiente procedimiento:

1. Simplificamos la escritura eliminando signos y paréntesis innecesarios.
2. Ordenamos los términos resultantes por un hecho a los negativos por otro.
3. Clasificamos la última operación.

6. Multiplicación y división de números enteros
6.1 Multiplicación
 Para multiplicar dos números enteros, multiplicamos sus valores absolutos y después colocamos el signo que obtenemos la regla de los signos: + si los signos tienen el mismo signo y - si los signos tienen signos diferentes.

REGLA DE LOS SIGNOS
 $+$ \cdot $+$ = $+$ $+$ \cdot $-$ = $-$
 $-$ \cdot $+$ = $-$ $-$ \cdot $-$ = $+$

NO LO OLVIDES
 Los productos de la multiplicación cumplen:
 - Comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
 - Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
 - Elemento neutro: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
 - Distributiva de la multiplicación con respecto de la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Amplía en la red...
 Táchala y resuelve el problema de la página 12.
www.tiching.com/69501
www.tiching.com/69503

5. SUMA Y... (CONT.)/ 6. MULTIPLICACIÓN...

5.3 Simplificación de la escritura

■ En este subapartado leeremos las normas de simplificación de la escritura y destacaremos la importancia de memorizar dichas reglas, resumidas en la nota al margen *No lo olvides*.

Para valorar su comprensión preguntamos al alumnado:

- ¿Qué signo se indica para sustituir a dos signos negativos seguidos?
- ¿Cómo simplificarías la expresión $(-3) - (-3) - (-3)$?

Leeremos ahora el planteamiento propuesto en el apartado *Piensa y contesta* del margen y razonaremos la respuesta animando a los alumnos a participar.

Repasaremos las sumas y restas de números enteros a través del recurso *Tiching 69501* de *@Amplía en la red*.

■ En el siguiente subapartado daremos un paso más trabajando las sumas y restas de más de dos números. Leeremos el procedimiento para resolverlas en el recuadro y lo pondremos en práctica con los ejemplos.

- ¿Qué se hace primero, operar o simplificar?
- ¿Qué términos distinguimos a la hora de operar?

Después el alumnado realizará las actividades 31 y 32. Finalmente repasarán lo aprendido mediante el recurso *Tiching 69503* de *@Amplía en la red*.

6.1 Multiplicación

■ El objetivo básico de esta sección es presentar el método de multiplicación de dos números enteros teniendo en cuenta sus signos respectivos.

Para empezar, el alumnado leerá el recuadro azul y comprobará su aplicación en los ejemplos.

- ¿Qué signo tiene el resultado de multiplicar un número positivo por uno negativo?
- ¿Por qué el resultado de $(-7) \cdot (-3)$ es positivo?

Conviene que el docente insista en la importancia de memorizar la *Regla de los signos* como indica la nota.

Después los alumnos pueden aplicar el procedimiento de multiplicación en la actividad 33 y las actividades auto-correctivas de los recursos *Tiching 69505* y *69506*.

■ En el siguiente subapartado estudiaremos las propiedades de la multiplicación, resumidas en el apartado *No lo olvides*, que practicaremos con los ejemplos propuestos. Plantearemos también estas cuestiones:

- ¿Qué significa que un número sea el elemento neutro de una operación?
- Aplica la propiedad asociativa a: $(-4) \cdot [(-3) \cdot 5]$.

Por último, los alumnos practicarán la propiedad distributiva en la actividad 34.

COMPETENCIAS CLAVE

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 31 y 32.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia en la resolución de sumas y restas de números enteros.
- *Acts. 33 y 34.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia en la resolución de multiplicaciones de números enteros, así como sus propiedades.
- *Piensa y contesta.* Identificar errores en operaciones con escritura simplificada aplicando los conocimientos adquiridos.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Piensa y contesta.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

- ✓ La actividad de refuerzo 2 consolidará el aprendizaje de las operaciones combinadas con números enteros, teniendo en cuenta la prioridad de las operaciones.
- ✓ La actividad de ampliación 1 resultará útil para comprobar cómo la multiplicación de ambos miembros de una desigualdad por un número entero invierte su sentido.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching



- Podemos repasar y asimilar los conceptos de la multiplicación y división de números enteros consultando el siguiente enlace:

<http://www.tiching.com/738811>

Para trabajar con los alumnos les pediremos que visualicen el vídeo, de diecisiete minutos y medio, en el que se explican los pasos para resolver los algoritmos.

Pediremos que paren el vídeo en las actividades para que las realicen antes de verlas resueltas en la pantalla.

Les pediremos también que propongan dos operaciones y las resuelvan aplicando el sistema rápido de la ley de los signos que enseña el vídeo.

Además, si les interesa, los alumnos podrán visualizar en sus casas un tutorial del mismo autor sobre operaciones combinadas.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 12

Piensa y contesta:

El error ocurre al eliminar el paréntesis y simplificar la operación sin tener en cuenta el signo interior.

$$3 - (-5) = 5 - (-3) \rightarrow 3 - 5 = 5 - 3$$

La igualdad correcta sería:

$$3 - (-5) = 5 - (-3) \rightarrow 3 + 5 = 5 + 3$$

31. Las soluciones correctas son:

- a) $17 + 8 + 23 + 6 = 54$
- b) $(-12) + 16 + (-8) = -12 + 16 - 8 = -20 + 16 = -4$
- c) $(-7) + (-5) + (-3) = -7 - 5 - 3 = -15$
- d) $(-9) - (-13) - 7 = -9 + 13 - 7 = 13 - 16 = -3$
- e) $(-14) - 25 + 7 = -14 - 25 + 7 = -39 + 7 = -32$
- f) $23 - (-18) + 7 + (-14) = 23 + 18 + 7 - 14 = 48 - 14 = 34$
- g) $(-26) + (-4) + 15 = -26 - 4 + 15 = -30 + 15 = -15$
- h) $15 + 12 + (-25) + 4 = 15 + 12 - 25 + 4 = 6$
- i) $27 - 41 + 15 - 18 = 42 - 59 = -17$
- j) $12 + (-30) - (-19) + 3 = 12 - 30 + 19 + 3 = 4$

32. Las soluciones correctas son:

- a) $24 + 12 - 23 + 6 = 42 - 23 = 19$

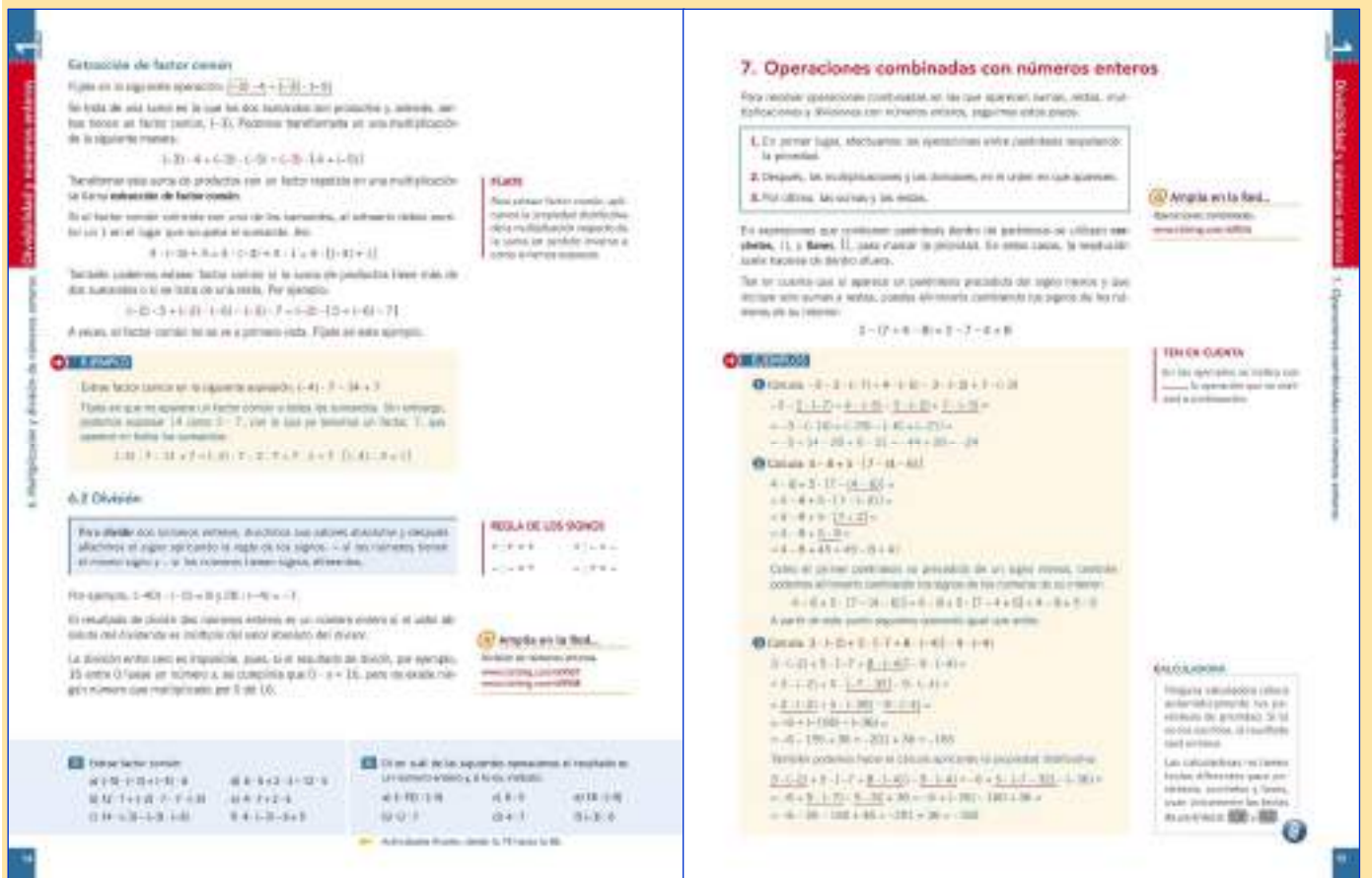
- b) $-12 + 42 - 8 - 15 = 42 - 35 = 7$
- c) $-7 - 15 - 3 + 22 = -25 + 22 = -3$
- d) $19 - 23 - 6 + 10 = 29 - 29 = 0$
- e) $-17 + 2 - 44 + 15 = -61 + 17 = -44$
- f) $4 - 18 + 5 - 32 = 9 - 50 = -41$
- g) $-21 - 6 + 19 + 3 = -27 + 22 = -5$
- h) $30 + 7 - 55 + 14 = 51 - 55 = -4$
- i) $70 - 41 + 5 - 88 = 75 - 129 = -54$
- j) $15 + 6 - 35 + 14 = 35 - 35 = 0$

33. Las soluciones correctas sobre las multiplicaciones de números enteros son las siguientes:

- a) $7 \cdot (-4) = -28$
- b) $(-6) \cdot 8 = -48$
- c) $(-3) \cdot (-7) = 21$
- d) $(-5) \cdot (-4) = 20$
- e) $2 \cdot (-10) \cdot 3 = -60$
- f) $(-6) \cdot (-5) \cdot (-9) = -270$

34. Las soluciones aplicando la propiedad distributiva son:

- a) $7 \cdot (11 + 15) = 7 \cdot 11 + 7 \cdot 15 = 77 + 105 = 182$
- b) $(-6) \cdot (8 - 4) = (-6) \cdot 8 - (-6) \cdot 4 = -48 + 24 = -24$
- c) $(-3) \cdot (9 - 7 + 12) = (-3) \cdot 9 - (-3) \cdot 7 + (-3) \cdot 12 = -27 + 21 - 36 = -63 + 21 = -42$
- d) $(-5) \cdot (3 - 4 - 5) = (-5) \cdot 3 - (-5) \cdot 4 - (-5) \cdot 5 = -15 + 20 + 25 = -15 + 45 = 30$



6. MULTIPLIC.(CONT.) / 7. OPERACIONES...

■ Para terminar el apartado sobre la multiplicación de enteros, practicaremos el procedimiento para sacar factor común. Leeremos la explicación y analizaremos el método utilizado mediante la realización de los ejemplos:

- ¿Cuál es el factor común d el primer ejemplo?
- ¿Puede el factor común ser un número negativo?

Prestaremos atención a la observación añadida en el margen, *Fíjate*, y al ejemplo del recuadro que presenta un caso que con cierta frecuencia es fuente de errores.

A continuación el alumnado resolverá la actividad 35.

6.2 División

■ El siguiente subapartado tiene como finalidad el estudio de la división de dos números enteros.

Los alumnos y alumnas leerán el método descrito en el recuadro azul y memorizarán la *Regla de los signos* indicada al margen.

- ¿Qué signo tiene el resultado de la división de dos números enteros de diferente signo?

A continuación, el alumnado practicará la división y la regla de los signos mediante el recurso *@Amplía en la Red 69507* que incluye actividades autocorrectivas.

■ Seguidamente leeremos los dos párrafos siguientes y plantearemos estas cuestiones:

- ¿Cómo es el resultado de la división $10 : 4$?
- ¿Cuál es el resultado de dividir $8 : 0$? ¿Y de $0 : 8$?

Finalmente los alumnos y alumnas resolverán la actividad 36 del libro que ampliarán con las actividades propuestas en el recurso de *@Amplía en la red 69508*.

7. Operaciones combinadas con números...

■ El objetivo de este apartado es establecer las normas de prioridad a la hora de operar con números enteros.

Leeremos las reglas del recuadro junto con las indicaciones de los dos párrafos siguientes y preguntaremos a los alumnos:

- ¿Qué se efectúa ante, una suma o un producto?
- ¿En qué orden se efectúan dos divisiones consecutivas?
- ¿Qué tienen prioridad, las llaves o los corchetes?

■ A continuación, pondremos en práctica estas reglas mediante la realización de los ejemplos resueltos, fijándonos en la notación que se emplea, indicada en la nota del margen *Ten en cuenta*.

Prestaremos atención a la ayuda del margen en cuanto al uso de la *Calculadora* y la introducción de paréntesis.

Por último el alumnado puede ampliar la información y repasar lo aprendido mediante nuevas actividades, accediendo el recurso digital *@Amplía en la red*.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Acts. 35 y 36.* Trabajar la capacidad de interpretar expresiones con números enteros y expresar los resultados de las operaciones donde se utilizan.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Calculadora.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la calculadora.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 35 y 36.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridas para resolver las actividades propuestos.

■ *Acts. 35 y 36.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, gracias al carácter repetitivo de las actividades.

■ *Ejemplos, págs. 14 y 15.* Observar el cálculo de números enteros identificando las estrategias utilizadas, así como el orden de las operaciones, pudiendo utilizarlas para resolverlas y comprobar posteriormente la solución.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

- ✓ La actividad de refuerzo 3 servirá como práctica del cálculo del factor común en operaciones con números enteros.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching



- Visitando esta página web, nuestros alumnos y alumnas podrán practicar las operaciones combinadas de números enteros:

<http://www.tiching.com/738812>

En la página se muestran muchos recursos didácticos y actividades para ampliar o reforzar los contenidos estudiados. Concretamente, podremos descargar todo aquello que haga referencia a las actividades sobre operaciones combinadas.

Como docentes, podemos plantearles las operaciones que aparecen en los problemas y pedirles que las resuelvan sin consultar el libro ni el recurso.

Finalmente, también les podemos pedir que elaboren un esquema de los números enteros parecido al que hay en la página a modo de resumen de la unidad.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 14

35. Las expresiones después de extraer el factor común son:

- a) $(-5) \cdot (-3) + (-5) \cdot 4 = (-5) \cdot [(-3) + 4]$
b) $12 \cdot 7 + (-2) \cdot 7 - 7 \cdot (-3) = 7 \cdot [12 + (-2) - (-3)]$
c) $14 \cdot (-3) - (-3) \cdot (-6) = (-3) \cdot [14 - (-6)]$
d) $6 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 12 \cdot 5 = 6 \cdot 5 + 6 - 6 \cdot 2 \cdot 5 = 6 \cdot (5 + 1 - 10)$
e) $4 \cdot 7 + 2 \cdot 6 = 4 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 4 \cdot (7 + 3)$
f) $4 \cdot (-3) - 6 + 9 = 4 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-3) = (-3) \cdot [4 + 2 + (-3)] = (-3) \cdot (4 + 2 - 3)$

36. Las soluciones son las siguientes:

- a) $(-15) : (-3) = 5 \rightarrow$ Número entero positivo.
b) $12 : 7 \rightarrow$ No es un número entero.
c) $0 : 5 = 0 \rightarrow$ Número entero, sin signo.
d) $4 : 7 \rightarrow$ No es un número entero.
e) $18 : (-9) = -2 \rightarrow$ Número entero negativo.
f) $(-3) : 0 \rightarrow$ No es un número entero.

Operaciones combinadas con números enteros

Ejercicio 37:

$$\begin{aligned}
 & 10 - 3 + 2 - 5 + 4 - 1 + 6 - 2 \\
 & = (10 - 3) + (2 - 5) + (4 - 1) + (6 - 2) \\
 & = 7 - 3 + 3 + 4 \\
 & = 4 + 7 \\
 & = 11
 \end{aligned}$$

Ejercicio 38:

$$\begin{aligned}
 & 15 - 8 + 3 - 2 + 1 - 4 + 6 - 1 \\
 & = (15 - 8) + (3 - 2) + (1 - 4) + (6 - 1) \\
 & = 7 + 1 - 3 + 5 \\
 & = 7 - 3 + 5 + 1 \\
 & = 4 + 6 \\
 & = 10
 \end{aligned}$$

Ejercicio 39:

$$\begin{aligned}
 & 20 - 12 + 5 - 3 + 8 - 4 + 1 - 6 + 3 - 2 \\
 & = (20 - 12) + (5 - 3) + (8 - 4) + (1 - 6) + (3 - 2) \\
 & = 8 + 2 + 4 - 5 + 1 \\
 & = 8 + 2 + 4 - 5 + 1 \\
 & = 10 + 4 - 5 + 1 \\
 & = 14 - 5 + 1 \\
 & = 9 + 1 \\
 & = 10
 \end{aligned}$$

Resolución de problemas

Problema: La temperatura del aire baja según la altitud a razón de 5°C por cada 100 m. La gélida punta más alta de la montaña de -10°C cuando la temperatura a nivel del mar es de 15°C. ¿A qué altura se encuentra el glaciar?

1. Comprender el problema: Tenemos que calcular la altura de un glaciar según la temperatura a nivel del mar y la temperatura a nivel del glaciar.

2. Elaborar un plan de resolución: Calcularemos la diferencia entre las temperaturas y luego calcularemos la altura del glaciar.

3. Ejecutar el plan: Calculamos la diferencia entre las temperaturas: $15 - (-10) = 25$. Luego calculamos la altura del glaciar: $25 \times 20 = 500$.

4. Comprobar el resultado: Podemos calcular cuánto más frío sería el glaciar si la temperatura a nivel del mar fuera de 10°C: $10 - (-10) = 20$. Luego calculamos la altura del glaciar: $20 \times 20 = 400$.

Ten en cuenta: Si el resultado de la división es un número decimal, entonces el número no es divisible. Si el resultado de la división es un número entero, entonces el número es divisible.

7. OPERACIONES... (CONT.) / RESOLUCIÓN DE...

En esta sección seguiremos practicando las operaciones combinadas y sus jerarquías, dada su importancia a la hora de resolver problemas.

Podemos proponer a varios alumnos que expliquen a los demás las reglas empleadas para operar con números enteros. Para su exposición, recomendamos que se apoyen en cada uno de los cuatro ejemplos propuestos en el libro.

Para fomentar el uso de las tecnologías, prestaremos atención al manejo de la calculadora WIRIS a la hora de operar con jerarquías, según se establece en la nota al margen: *Recursos TIC*.

En este punto, los alumnos y alumnas pueden resolver los ejercicios 37, 38 y 39.

Resolución de problemas

La finalidad de este apartado es recordar las etapas características de la resolución de problemas.

En esta ocasión, vamos a resolver situaciones cotidianas en las que habrá que aplicar lo aprendido sobre el m.c.m. y el m.c.d y las operaciones combinadas.

Leeremos la introducción del apartado y los pasos implicados en la resolución de problemas, indicados bajo la nota *Recuerda*.

A continuación, prestaremos atención a las pistas a la hora de identificar un problema, recogidas en el apartado del margen titulado *Ten en cuenta* y lanzaremos al alumnado las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo reconoces que un problema puede resolverse aplicando el m.c.m.?
- ¿Cómo reconoces que un problema puede resolverse aplicando el m.c.d.?

Ahora ya podemos empezar a resolver los problemas propuestos. Después de leer el enunciado del primer ejemplo, formularemos a los alumnos y alumnas las siguientes preguntas:

- Etapa 1: ¿Qué es lo que buscamos? ¿En qué unidades vamos a expresar la respuesta?
- Etapa 2: ¿Por qué tenemos que calcular el m.c.m. y no el m.c.d.?
- Etapa 3: ¿En qué consiste la etapa "Ejecutar el plan" en este problema?
- Etapa 4: ¿Cómo se interpreta la solución obtenida? ¿Cómo comprobamos el resultado?

Finalmente pediremos a los alumnos que resuelvan en sus cuadernos las actividades 40 y 41 del libro de texto.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Recursos TIC.* Trabajar el uso habitual y correcto de la calculadora WIRIS, con la que se pueden calcular operaciones combinadas con números enteros atendiendo a los paréntesis.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 37 a 39.* Aplicar reglas operativas de forma repetitiva para mejorar la eficacia de resolución de operaciones combinadas de números enteros.

■ *Acts. 40 y 41.* Aplicar una serie de pasos para mejorar la eficacia de resolución de problemas

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 40 y 41.* Afrontar los problemas siendo creativo, imaginativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la resolución.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

- ✓ La actividad de refuerzo 6 servirá para practicar la aplicación de operaciones combinadas con números enteros en la resolución de problemas cotidianos.
- ✓ La actividad de ampliación 3 consolidará el método de resolución de problemas paso a paso a partir de un problema de divisibilidad.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching



- En esta dirección encontrarán más actividades sobre operaciones combinadas de números enteros:

<http://www.tiching.com/738813>

El documento para descargar contiene las soluciones, así los alumnos y alumnas podrán autoevaluarse para ser conscientes de los propios errores.

Como docentes, les pediremos que resuelvan las operaciones sin consultar el libro ni el propio recurso.

Con el fin de repasar el procedimiento de los algoritmos conocidos, antes de empezar preguntaremos:

- ¿El orden correcto para resolver las operaciones es de derecha a izquierda? ¿Sabrías explicar por qué?
- ¿Las operaciones situadas dentro de los paréntesis son las primeras a resolver o las últimas? ¿Por qué?

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 17

37. Los resultados de las operaciones combinadas son:

- $8 \cdot (4 : 2 - 5) - 3 \cdot [6 : (-3) + 9] = 8 \cdot (2 - 5) - 3 \cdot (-2 + 9) = 8 \cdot (-3) - 3 \cdot 7 = -24 - 21 = -45$
- $(-7 + 12) \cdot 2 - 4 \cdot [15 : 3 - 9 + 2 \cdot (3 - 1)] = 5 \cdot 2 - 4 \cdot (5 - 9 + 2 \cdot 2) = 10 - 4 \cdot (-4 + 4) = 10 - 4 \cdot 0 = 10$
- $3 \cdot 6 + 12 : 2 - 3 \cdot (-6) + 4 \cdot [3 + 2 \cdot (4 - 7)] = 18 + 6 + 18 + 4 \cdot [3 + 2 \cdot (-3)] = 42 + 4 \cdot (3 - 6) = 42 + 4 \cdot (-3) = 42 - 12 = 30$

38. Los resultados de las operaciones combinadas son:

- $-5 + 12 + 3 - 2 = 15 - 7 = 8$
- $8 : 4 + 3 \cdot 6 : (-2) - 5 \cdot 5 = 2 - 9 - 25 = 2 - 34 = -32$
- $-12 + 20 - 12 = 20 - 24 = -4$
- $7 + 3 \cdot 5 - 24 : 6 + 2 \cdot (-5) + 5 = 7 + 15 - 4 - 10 + 5 = 27 - 14 = 13$
- $20 : 5 - (9 \cdot 3 + 2) - 8 : 4 + 4 = 20 : 5 - (27 + 2) - 8 : 4 + 4 = 20 : 5 - 29 - 8 : 4 + 4 = 4 - 29 - 2 + 4 = -31 + 8 = -23$
- $-5 \cdot (12 - 4 \cdot 6) + 4 \cdot (5 : 1 - 4 + 3 \cdot 1) = -5 \cdot (12 - 24) + 4 \cdot (5 - 4 + 3) = -5 \cdot (-12) + 4 \cdot 4 = 60 + 16 = 76$

39. Los resultados de las operaciones combinadas son:

- $[(-3) \cdot (-9 + 12)] : [4 - 2 + 5 \cdot 2 - 7 - 2] = [(-3) \cdot 3] : [4 - 2 + 5 \cdot 2 - 7 - 2] = (-9) : [4 - 2 + 10 - 7 - 2] = (-9) : 3 = -3$
- $[-12 : (-3) - 3 \cdot 4] : [-8 : (-2) - 16 : (-4)] = (4 - 12) : (4 + 4) = -8 : 8 = -1$
- $[3 \cdot (-1) + 4 : (-2)] : [(-5) \cdot (-3) : (-3)] = (-3 - 2) : (-5) = (-5) : (-5) = 1$
- $[(-5) \cdot (-3) : (-3)] \cdot [-6 \cdot (-3) + 5 \cdot (-3)] = (-5) \cdot (18 - 15) = (-5) \cdot 3 = -15$
- $(-3) \cdot (-6) \cdot (-3) \cdot (1) : (-1) = 18 \cdot (-3) : (-1) = -54 : (-1) = 54$
- $14 - 3 [(-3) \cdot (-2) - 5 \cdot 1] = 14 - 3 \cdot (6 - 5) = 14 - 3 \cdot 1 = 14 - 3 = 11$
- $[-3 + 2 - 1 - 3] \cdot [-3 : 3] + [-3 \cdot (-4)] = (-5) \cdot (-1) + 12 = 5 + 12 = 17$
- $\{5 - 3 \cdot [4 : 2] + 4\} \cdot \{3 - \{4 \cdot 2 - [5 + 3 - 1]\}\} = \{5 - 3 \cdot 2 + 4\} \cdot \{3 - \{4 \cdot 2 - 7\}\} = (5 - 3 \cdot 2 + 4) \cdot (3 - 1) = (5 - 6 + 4) \cdot (3 - 1) = 3 \cdot 2 = 6$
- $\{3 - \{[12 + 5 - (15 - 10)] \cdot (-6)\}\} : 3 \cdot (-13) = \{3 - \{[12 + 5 - 5] \cdot (-6)\}\} : 3 \cdot (-13) = \{3 - \{12 \cdot (-6)\}\} : 3 \cdot (-13) = \{3 - (-72)\} : 3 \cdot (-13) = 75 : 3 \cdot (-13) = -325$

(Continúa en la página 1-32 de la guía)

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Repasa la unidad.* Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y adecuado a los contenidos dados.

■ *Acts. 45, 46, 49, 53, 54, 60, 78, 82, 86, 103 y 108.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.

■ *Desarrolla tus competencias.* Leer y comprender el estímulo y los enunciados de la actividad, generando ideas y supuestos.

APRENDER A APRENDER

■ *Repasa la unidad.* Saber transformar la información vista en el tema en conocimiento propio, así como ser consciente de las propias capacidades y carencias.

■ *Acts. 45, 46, 49, 53, 54, 60, 78, 80, 82, 85, 86, 103 y 108.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

■ *Acts. 94, 96, 104, 114 y 117.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas.

■ *Acts. 118, 124 a 126.* Aplicar los nuevos conocimientos para demostrar los resultados.

■ *Cálculo mental.* Aprender estrategias y técnicas de cálculo mental, adquiriendo confianza.

■ *Desarrolla tus competencias.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.

■ *Evaluación de estándares.* Ser consciente de las propias capacidades.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Para aplicar.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, evaluando las acciones realizadas.

■ *Acts. 47, 59, 63, 72, 74, 83 y 120 a 123.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad didáctica, mostrando un criterio propio.

■ *Cálculo mental y Desarrolla tus competencias.* Buscar las soluciones de forma creativa.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Desarrolla tus competencias.* Buscar, analizar, seleccionar y manejar información en internet.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Desarrolla tus competencias.* Manejar las habilidades sociales en la realización de un trabajo cooperativo.

ACTIVIDADES FINALES

■ En las *Actividades* se proponen una serie de ejercicios de aplicación y ampliación enfocados a repasar la unidad y poner en práctica los conocimientos adquiridos en cada apartado.

■ La finalidad de *Desarrolla...* es promover la autonomía del alumno y la utilización de distintos recursos en la búsqueda de soluciones. Se propone un caso práctico en el que el alumnado tendrá que recopilar información, exponer conclusiones y trabajar los nuevos conceptos estudiados a lo largo del tema.

■ En *Evaluación...* los alumnos podrán comprobar el grado de asimilación de los contenidos y detectar sus posibles carencias a través de actividades y problemas que cubren los principales contenidos conceptuales y procedimentales de la unidad didáctica

■ *Estrategia e ingenio* persigue que los alumnos y alumnas aprendan a pensar a través del juego. Propone dos acertijos en los que tendrán que recurrir a la imaginación para conseguir resolverlos.

■ El objetivo de la sección *Resumen* es recopilar las principales ideas estudiadas a lo largo de la unidad. Los alumnos lo leerán a modo de repaso y deben conservarlo como guía para revisar de un vistazo todo lo aprendido en el tema.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 18

C1. Un número natural a es divisible por otro b cuando la división del primero entre el segundo es exacta.

- Un número es divisible por 2 cuando termina en 0 o en cifra par.
- Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 5 cuando acaba en 0 o en 5.
- Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
- Un número es divisible por 10 cuando acaba en 0.
- Un número es divisible por 11 si la diferencia (en valor absoluto) entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la suma de las cifras que ocupan lugares impares es 0 o múltiplo de 11.

C2. Un número entero mayor que 1 es *primo* si y solo si es divisible por sí mismo y por 1. Si es divisible por algún otro número, es *compuesto*.

C3. Para calcular el m.c.m. y el m.c.d., primero debemos descomponer los números en factores primos. Después de descomponerlos:

- El m.c.d. de varios números es el producto de los factores comunes a todas las descomposiciones con el menor de los exponentes con que figuran.
- El m.c.m. de varios números es el producto de los factores comunes y no comunes a todas las descomposiciones con el mayor de los exponentes que figuran.

C4. Respuesta personal. A modo de ejemplo:

- El rango de temperaturas en grados Celsius que habitualmente toma valores negativos.
- La enumeración de las plantas de un edificio, donde se suelen reservar los valores negativos para las plantas subterráneas.

C5. El valor absoluto se halla calculando la distancia desde el punto que representa el número en la recta numérica hasta el 0.

C6. La suma:

- Para sumar dos números enteros del mismo signo, sumamos sus valores absolutos y ponemos el mismo signo.

$$(-5) + (-6) = -(|-5| + |-6|) = -(5 + 6) = -11$$

- Para sumar dos números enteros de diferente signo, restamos sus valores absolutos y al resultado le ponemos el signo del que tiene mayor valor absoluto.

$$(5) + (-6) = -(|-6| - |5|) = -(6 - 5) = -1$$

La resta:

- Para restar dos números enteros, sumamos al primero de ellos el opuesto del segundo.

$$(5) - (-6) = 5 + 6 = 11$$

C7. La regla de los signos nos dice el signo que tendrá el resultado de una multiplicación o una división.

+ si los números tienen el mismo signo. $\pm \cdot \pm = +$

- si los números tienen diferente signo. $\pm \cdot \mp = -$

La regla es la misma para la división.

C8. Repasemos las propiedades de la multiplicación:

Conmutativa: El orden de los factores no altera el producto.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Asociativa: El resultado de la multiplicación de tres números no depende de la manera en que se agrupan.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Elemento neutro: El resultado de multiplicar 1 por otro número entero es el mismo número entero. 1 es el elemento neutro del producto.

$$1 \cdot a = a$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma: La multiplicación de una suma por un número es igual a la suma de los productos de los sumandos por dicho número.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

La extracción del factor común consiste en transformar una suma de productos con un factor repetido en una multiplicación de ese factor repetido por la suma de los términos restantes.

C9. Para realizar operaciones combinadas se deben seguir tres pasos:

- En primer lugar efectuamos las operaciones entre paréntesis, respetando el orden de prioridad de las operaciones de su interior.
- En segundo lugar se realizan las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen.
- En tercer lugar se realizan las sumas y las restas en orden de aparición.

42. El cuadro completo sería:

	2	3	4	5	9	11
56	D	ND	D	ND	ND	ND
261	ND	D	ND	ND	D	ND
660	D	D	D	D	ND	D
1455	ND	D	ND	D	ND	ND

43. El resultado será, respectivamente:

- $x = 7 \cdot 15 = 105$
- Si es divisible por 3 y 5, también lo es por 15.
 $x = 7 \cdot 15 = 105$
- Si es divisible por 2, 3 y 5, también lo es por 30.
 $x = 30 \cdot 4 = 120$
- Para cumplir esa condición debemos encontrar un número que sea múltiplo de 3, 4 y 5 y sumarle 2:
 $x = (60 \cdot 2) + 2 = 120 + 2 = 122$

44. Expresamos 36 y 24 como:

$$36 = 6 \cdot 6; \quad 24 = 6 \cdot 4$$

Entonces:

$$36 + 24 = 6 \cdot 6 + 6 \cdot 4$$

$$36 - 24 = 6 \cdot 6 - 6 \cdot 4$$

Usando la propiedad distributiva:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$6 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 6 \cdot (6 + 4) = 6 \cdot 10$$

$$6 \cdot 6 - 6 \cdot 4 = 6 \cdot (6 - 4) = 6 \cdot 2$$

Vemos que los términos anteriores se pueden expresar como múltiplos de 6.

45. Usaremos la propiedad distributiva para probar que $12 - 15$ es múltiplo de 3:

$$12 - 15 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 3 \cdot (4 - 5)$$

Vemos asimismo que ninguno de los términos de la expresión final es divisible por 9 así pues, $12 - 15$ no es múltiplo de 9.

46. La respuesta es sí. Cuando un número es divisible por otros, este puede ser expresado como producto de sus divisores. Así pues, si es divisible por 4 y 6, a podrá ser expresado como:

$$a = 4 \cdot 6 \cdot x = 24 \cdot x$$

y obtenemos la expresión de a como múltiplo de 24.

47. Recordamos los criterios de divisibilidad por 3 y 11:

- Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 11 si la diferencia (en valor absoluto) entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la suma de las cifras que ocupan lugares impares es 0 o múltiplo de 11.

Buscamos los pares X e Y que nos permitan cumplir ambas condiciones.

a) El criterio de divisibilidad por 11 en ese caso, lo podemos expresar como:

$$\begin{aligned} |(3 + x + y + 3) - (5 + 9 + 4)| &= |(6 + x + y) - 18| = \\ &= |(x + y) - 12| = 11 \cdot b \quad b \geq 0 \end{aligned}$$

Sabiendo que $0 \leq (x + y) \leq 18$ (ya que ambos términos solo pueden tener un valor entre 0 y 9), tenemos una sola solución válida:

$$|(x + y) - 12| = 0 \rightarrow x + y = 12$$

Comprobamos ahora si también cumple el criterio de divisibilidad por 3:

$$\begin{aligned} 3 + 5 + x + 9 + y + 4 + 3 &= \\ = 24 + x + y &= 3 \cdot z \quad z \geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Vemos que si } x + y = 12 \quad 24 + 12 = 36 = 3 \cdot 12$$

Los términos que cumplan esa condición también serán divisibles por 3. Los pares de términos que cumplen esa condición son:

$$\begin{aligned} (x = 3 ; y = 9) , (x = 4 ; y = 8) , (x = 5 ; y = 7) , \\ (x = 6 ; y = 6) , (x = 7 ; y = 5) , (x = 8 ; y = 4) , \\ (x = 9 ; y = 3) \end{aligned}$$

b) El criterio de divisibilidad por 11 en ese caso, lo podemos expresar como:

$$\begin{aligned} |(3 + 7 + 3 + y) - (x + 2 + 4)| &= |(13 + y) - (6 + x)| = \\ = |7 + (y - x)| &= 11 \cdot b \quad b \geq 0 \end{aligned}$$

Sabiendo que $-9 \leq (y - x) \leq 9$ (ya que ambos términos solo pueden tener un valor entre 0 y 9), tenemos dos soluciones válidas:

$$\begin{cases} |7 + y - x| = 0 \rightarrow y - x = -7 \rightarrow x = y + 7 & (1) \\ |7 + y - x| = 11 \rightarrow y - x = 4 \rightarrow y = 4 + x & (2) \end{cases}$$

Los pares que cumplen (1) son:

$$(y = 0 ; x = 7) , (y = 1 ; x = 8) , (y = 2 ; x = 9)$$

Los pares que cumplen (2) son:

$$(y = 4 ; x = 0) , (y = 5 ; x = 1) , (y = 6 ; x = 2) , (y = 7 ; x = 3) , (y = 8 ; x = 4) , (y = 9 ; x = 5)$$

Aplicamos ahora el criterio de divisibilidad por 3:

$$\begin{aligned} 3 + x + 7 + 2 + 3 + 4 + y &= 19 + x + y = 3 \cdot z \\ = 19 + x + y &= 3 \cdot z \quad z \geq 1 \end{aligned}$$

De los pares antes dados, los únicos que además cumplen el criterio de divisibilidad por 3 son:

$$(y = 1 ; x = 8) , (y = 5 ; x = 1) , (y = 8 ; x = 4)$$

48. Los números primos mayores que 200 y menores que 240 son:

$$211, 223, 227, 229, 233 \text{ y } 239.$$

Para encontrarlos debemos tener en cuenta todos los números primos menores que $\sqrt{240}$, es decir, 2, 3, 5, 7, 11 y 13.

- Podemos descartar todos los pares. Nos quedan: 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237 y 239.
- Podemos descartar los números, los términos de los cuales sumen 3 y los que terminen en 5. Nos quedan: 203, 209, 211, 217, 221, 223, 227, 229, 233 y 239.
- Descartamos los múltiplos de 7, 11 y 13. Nos quedan: 211, 223, 227, 229, 233 y 239.

49. La expresión correcta es la b), todas las otras no son descomposiciones en factores primos dado que los términos expresados en a), c) y d) no son números primos.

50. Los resultados son:

a) $440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$	g) $521 = 521$
b) $651 = 3 \cdot 7 \cdot 31$	h) $881 = 881$
c) $525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$	i) $552 = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$
d) $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$	j) $986 = 2 \cdot 17 \cdot 29$
e) $1704 = 2^3 \cdot 3 \cdot 71$	k) $351 = 3^3 \cdot 13$
f) $255 = 3 \cdot 5 \cdot 17$	l) $1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$

51. Descomponemos los números en factores primos: Cada factor y cada combinación de factores posibles será un divisor:

a) $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$	20 divisores
b) $432 = 2^4 \cdot 3^2$	15 divisores
c) $1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$	30 divisores
d) $10800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2$	45 divisores

52. Descomponemos los números en factores primos:

a) $280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$

Los divisores posibles serán: 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 5, 7, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, $5 \cdot 7$, $2 \cdot 5 \cdot 7$, $2^2 \cdot 5$, $2^2 \cdot 7$, $2^2 \cdot 5 \cdot 7$, $2^3 \cdot 5$, $2^3 \cdot 7$ y $2^3 \cdot 5 \cdot 7$.

Reescritos: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 140 y 280.

b) $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$

Los divisores posibles serán: 1, 2, 2^2 , 3, 3^2 , 3^3 , 5, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2^2 \cdot 3$, $2^2 \cdot 5$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 3^2$, $3^2 \cdot 5$, $2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $2^2 \cdot 3^2$, $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $2 \cdot 3^3$, $3^3 \cdot 5$, $2 \cdot 3^3 \cdot 5$, $2^2 \cdot 3^3$ y $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Reescritos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 27, 30, 36, 45, 54, 60, 90, 108, 135, 180, 270 y 540.

c) $218184 = 2^3 \cdot 3 \cdot 9091$

Los divisores posibles serán: 1, 2, 2^2 , 2^3 , 3, 9091, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 9091$, $2 \cdot 3 \cdot 9091$, $3 \cdot 9091$, $2^2 \cdot 3$, $2^2 \cdot 9091$, $2^2 \cdot 3 \cdot 9091$, $2^3 \cdot 3$, $2^3 \cdot 9091$ y, $2^3 \cdot 3 \cdot 9091$.

Reescritos: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 9091, 18 182, 27 273, 36 364, 54 546, 72 728, 109 092 y 218 184.

d) $3\ 675 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

Los divisores posibles serán: 1, 3, 5, 5^2 , 7, 7^2 , $3 \cdot 5$, $3 \cdot 7$, $5 \cdot 7$, $3 \cdot 5 \cdot 7$, $3 \cdot 5^2$, $5^2 \cdot 7$, $3 \cdot 5^2 \cdot 7$, $3 \cdot 7^2$, $5 \cdot 7^2$, $3 \cdot 5 \cdot 7^2$, $5^2 \cdot 7^2$ y $3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.

Reescritos: 1, 3, 5, 25, 7, 15, 21, 35, 49, 75, 105, 147, 175, 245, 525, 735, 1225 y 3675.

53. La respuesta es no. Podemos ver que ese número es múltiplo de 3. Por definición, todos los múltiplos de tres cumplen que el sumatorio de sus cifras también es un múltiplo de tres. En este caso:

$$1 + 5 + 9 = 15 = 3 \cdot 5$$

Asimismo, sabemos que el resultado de una suma no se ve afectado por el orden de sus términos, de modo que, sea cual sea la permutación de las cifras de 159, siempre obtendremos un número múltiplo de 3.

54. Los números primos mayores que 2 serán impares por definición (si no fuera así, serían múltiplos de 2). La suma de dos números impares siempre es un número par (y, por ende, múltiplo de 2).

55. El m.c.m. será:

a) $\left\{ \begin{array}{l} 8 = 2^3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \end{array} \right\} \rightarrow 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

b) $\left\{ \begin{array}{l} 16 = 2^4 \\ 25 = 5^2 \\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \right\} \rightarrow 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 = 1200$

c) $\left\{ \begin{array}{l} 15 = 3 \cdot 5 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 48 = 2^4 \cdot 3 \end{array} \right\} \rightarrow 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

56. Descomponemos en factores primos y encontramos el m.c.m. y el m.c.d.

a) $\left\{ \begin{array}{l} 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 225 = 3^2 \cdot 5^2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{m.c.m.} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900 \\ \text{m.c.d.} = 3^2 \cdot 5 = 45 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} 196 = 2^2 \cdot 7^2 \\ 216 = 2^3 \cdot 3^3 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 = 10\ 584 \\ \text{m.c.d.} = 2^2 = 4 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \\ 325 = 5^2 \cdot 13 \\ 486 = 2 \cdot 3^5 \end{array} \right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{m.c.m.} = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 13 = 1\ 263\ 600 \\ \text{m.c.d.} = 1 \end{array} \right.$$

d) $\left\{ \begin{array}{l} 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \\ 144 = 2^4 \cdot 3^2 \\ 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \end{array} \right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{m.c.m.} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13 = 20\ 592 \\ \text{m.c.d.} = 2^2 \cdot 3 = 12 \end{array} \right.$$

57. La solución será:

a) $\left\{ \begin{array}{l} 711 = 3^2 \cdot 79 \\ 693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \\ 423 = 3^2 \cdot 47 \end{array} \right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \text{m.c.m.} = 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 47 \cdot 79 = 2\ 573\ 109$$

b) $\left\{ \begin{array}{l} 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 780 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \end{array} \right\} \rightarrow$

$$\rightarrow \text{m.c.m.} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 65\ 520$$

c) $\left\{ \begin{array}{l} 1155 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \\ 1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \\ 756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \end{array} \right\} \rightarrow \text{m.c.d.} = 3 \cdot 7 = 21$

d) $\left\{ \begin{array}{l} 1092 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \\ 2295 = 3^3 \cdot 5 \cdot 17 \\ 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \end{array} \right\} \rightarrow \text{m.c.d.} = 3$

58. El resultado será:

a) $(\text{m.c.m.}) \cdot (\text{m.c.d.}) = (\text{m.c.m.}) \cdot 10 = 1870 \cdot 740$
 $(\text{m.c.m.}) = 138\ 380$

b) $(\text{m.c.m.}) \cdot (\text{m.c.d.}) = (\text{m.c.m.}) \cdot 2 = 3260 \cdot 542$
 $(\text{m.c.m.}) = 88\ 3460$

59. Descomponemos los valores dados en factores primos:

$$\text{m.c.m.} = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{m.c.d.} = 12 = 2^2 \cdot 3$$

El m.c.d. nos indica que ambos números deben tener como divisor común el 12 :

$$a = 12 \cdot x \quad b = 12 \cdot y$$

Asimismo, sabemos por el m.c.m. que uno de ambos números deberá ser además factorizable por 2, 3 y 5. Cualquiera de los dos números pueden contener estos factores (a condición de que no esten en ambos).

A modo de ejemplo:

$$a = 12 \cdot 2 \cdot 3 = 72$$

$$b = 12 \cdot 5 = 60$$

60. Factorizamos ambos valores:

$$\text{m.c.m.} = 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{m.c.d.} = 14 = 2 \cdot 7$$

No es posible hallarlos pues los valores dados por el enunciado no representan el m.c.m. y m.c.d. de un par de números.

Esto se puede ver por el hecho de que el m.c.m no contiene el factor 7. Por definición, todos los términos del m.c.d. deben ser también presentes en el m.c.m. (aunque no necesariamente con el mismo exponente).

Página 19

61. Si factorizamos 18 vemos que:

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

x no deberá contener los factores 2 y 3 para que el m.c.d. sea 1.

Los valores posibles serán:

$$x = 1; x = 5; x = 7; x = 11; x = 13; x = 17$$

62. El resultado será:

$$\text{m.c.m.} = a \cdot b \cdot c$$

$$\text{m.c.d.} = 1$$

63. El resultado será:

a) Dividimos 180 entre 36 y encontraremos el factor que falta para llegar a ese valor. Ese factor es el menor valor de x que verifica la relación.

$$180 / 36 = 5 \qquad x = 5$$

b) El m.c.d. nos da el valor mínimo de x que verifica la relación (ya que ambos números deben contener al menos los factores del m.c.d.).

$$x = \text{m.c.d.} = 6$$

64. Ese número lo obtendremos simplemente multiplicando los términos dados por el enunciado (ya que debe ser factorizable en esos valores y todos son primos).

$$x = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1\ 001$$

65. Para encontrar ese valor, multiplicamos los tres términos y sumamos 1.

$$x = (3 \cdot 5 \cdot 7) + 1 = 105 + 1 = 106$$

66 Factorizamos los tres términos:

$$\left. \begin{array}{l} 132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \\ 248 = 2^3 \cdot 31 \\ 364 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13 \end{array} \right\} \text{El valor buscado será } x = \text{m.c.m.} + 3$$

$$\text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31 = 744\ 744$$

$$x = 744\ 744 + 3 = 744\ 747$$

67. Las expresiones en números enteros serán:

a) $x = -250 \text{ €}$

b) $x = 315 \text{ €}$

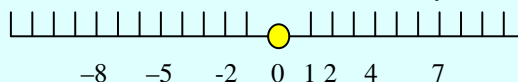
c) $x = 4\ 775 \text{ m}$

d) $x = -280 \text{ m}$

e) $x = 28 \text{ °C}$

f) $x = -6 \text{ °C}$

68. Los números, ordenados de menor a mayor son:



69. Los valores absolutos son, en el mismo orden que en el enunciado:

$$16, 98, 45, 34, 0, 5$$

70. Tendremos 2 posibles valores:

$$-13 \text{ y } 13$$

71. Los valores, ordenados de menor a mayor son:

a) $-|-5|, -3, |-2|, 3, |-4|$

b) $-|-5|, -|-3|, -1, 0, |-1|, |-5|$

c) $-|-34\ 987|, -|-4523|, -|1231|, |-2345|$

72. El número que nos piden debe ser menor que -5 (segunda condición). Todos los números que cumplen la segunda condición también cumplen la primera. A modo de ejemplo:

$$x = -6 \quad |-6| = 6 > 3 \quad -6 < -5$$

73. Dependiendo de si los términos son negativos o positivos, el resultado variará:

Si ambos términos son negativos:

$$x = -4; y = -9 \qquad x > y$$

Si ambos términos son positivos:

$$x = 4; y = 9 \qquad y > x$$

74. En ambos casos podemos diferenciar diferentes rangos de valores para los cuales las expresiones dadas son válidas o no:

a) La expresión dada no será válida si:

$$\begin{cases} a = b \\ a = 0 \text{ o } b = 0 \\ a > 0 \text{ y } b > 0 \end{cases} \quad \text{A modo de ejemplo: } a = 4, b = 6$$

b) La expresión dada no será válida si:

$$\{a < 0 \text{ y/o } b < 0 \text{ y } a \neq b$$

$$\text{A modo de ejemplo: } a = -2, b = 3$$

75. La solución será:

a) $-70 - 18 - 32 = -(70 + 18 + 32) = -120$

b) $49 + 15 - (31 + 33) = 64 - 64 = 0$

c) $19 - (4 + 12 + 77) = 19 - 93 = -74$

d) $41 - (39 + 11 + 19) = 41 - 69 = -28$

e) $40 - (7 + 11 + 4) = 40 - 22 = 18$

f) $53 - (22 + 10 + 17) = 53 - 49 = 4$

76. Los resultados serán:

a) $3 - (-5) - 7 = 3 + 5 - 7 = 8 - 7 = 1$

b) $(-2) - (-3) + 8 = 8 + 3 - 2 = 11 - 2 = 9$

c) $-(-7) + (-12) - 9 = 7 - 12 - 9 = 7 - 21 = -14$

d) $(-23) - (-32) + (-21) = 32 - 23 - 21 = 32 - 44 = -12$

- e) $-(-12) + (-21) - (-5) = 12 + 5 - 21 = -4$
 f) $-(-90) + (-32) - (-32) = 90 + 32 - 32 = 90$

77. Debemos sumar 7 a los extremos para hallar la solución:

a + 7 estará comprendido entre $(-2 + 7)$ y $(3 + 7)$
 La respuesta correcta es b), entre 5 y 10.

78. Resolvemos la desigualdad para encontrar la respuesta:

$$a - b > a \rightarrow a - a > b \rightarrow b < 0$$

79. Resolvemos:

- a) $7 \cdot 13 = 91$
 b) $(-3) \cdot 16 = -(3 \cdot 16) = -48$
 c) $8 \cdot (-8) = -(8 \cdot 8) = -64$
 d) $4 \cdot 15 = 60$
 e) $(-4) \cdot (-9) = 4 \cdot 9 = 36$
 f) $(-15) \cdot 4 = -(15 \cdot 4) = -60$
 g) $(-2) \cdot 14 = -(2 \cdot 14) = -28$
 h) $(-5) \cdot (-6) = 5 \cdot 6 = 30$
 i) $(-12) \cdot (-15) = 12 \cdot 15 = 180$

80. La propiedad asociativa nos dice que:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Así pues:

$$(-12) \cdot (-3) \cdot (-1) = (-12) \cdot (3 \cdot 1) = (12 \cdot 3) \cdot (-1) = -36$$

81. Simplificamos las expresiones sacando el máximo de factores comunes posibles:

- a) $(-4) \cdot 8 + (-4) \cdot (-6) = (-4) \cdot (8 - 6) =$
 $= (-4 \cdot 2) \cdot (4 - 3) = (-8) \cdot (4 - 3)$
 Factor común: -8
 b) $15 \cdot (-5) - (-4) \cdot (-5) = (-5) \cdot (15 - (-4)) =$
 $= (-5) \cdot (15 + 4)$
 Factor común: -5
 c) $8 \cdot 9 + (-3) \cdot 8 + (-3) \cdot 8 = 8 \cdot (9 + (-3) + (-3)) =$
 $= (8 \cdot 3) \cdot (9 - 1 - 1) = 24 \cdot (9 - 2)$
 Factor común: 24
 d) $(-4) \cdot (-8) + (-4) \cdot (-4) = (-4) \cdot (-8 + (-4)) =$
 $= (-4) \cdot (-4) \cdot (2 + 1) = 16 \cdot (2 + 1)$
 Factor común: 16

82. La respuesta es:

- a) Para que el resultado sea negativo, el producto debe contener un número impar de términos negativos.
 b) Para que el resultado sea positivo, el producto debe contener un número par de términos negativos.

83. Hay un total de 37 dividendos posibles, cada uno con un resto diferente (de 0 a 36).

El dividendo más pequeño será el que de resto = 0. Esto es: $37 \cdot 28 = 1036$

El dividendo mayor será $1036 + 36 = 1072$

84. La tabla completa será:

dividendo	63	70	-28	39	9
divisor	-9	-14	-4	13	-9
cociente	-7	-5	7	3	-1

85. Multiplicar el dividendo y el divisor por el mismo número no afecta el resultado de la división; cociente y resto restarán inalterados.

86. La expresión matemática del enunciado será:

$$(x - 1) \cdot (y - 1) = xy - x - y + 1 = xy + 1 - (x + y) = xy + A$$

Vemos que la variación será equivalente a sumarle $A = 1 - (x + y)$ al producto original.

87. La solución será:

- a) $63 + 52 + 8 + 9 = 132$
 b) $98 + 67 - 24 = 141$
 c) $8 + 9 - 63 - 15 = 17 - 78 = -61$
 d) $36 + 48 - 5 = 79$
 e) $142 - 69 - 73 = 0$
 f) $-34 - 49 + 35 = -48$

Página 20

88. Los resultados son:

- a) $8 - (-18) + (-7) = 8 + 18 - 7 = 19$
 b) $-(-8) + (5) - 23 = 8 + 5 - 23 = -10$
 c) $-5(-74) - 12 = -5 + 74 - 12 = 57$
 d) $32 - (-11 - 72 + 4) = 32 - (-79) = 32 + 79 = 111$
 e) $12 - [5 - 12 - (19)] = 12 - (5 - 12 - 19) = 12 - (-26) =$
 $= 12 + 26 = 38$
 f) $-7 + 5 - [12 - (22)] = -7 + 5 - (-10) = -7 + 5 + 10 =$
 $= 8$

89. Calculamos:

- a) $(-21) \cdot (-3) : (-9) = 63 : (-9) = -7$
 b) $[(-24) : 4] : (-3) = (-6) : (-3) = 2$
 c) $[42 : (-3)] : [18 : (-3)] = (-14) : (-6) \approx 2,33$
 d) $[(-6) \cdot (-8)] : 12 = 48 : 12 = 4$
 e) $(-2) \cdot [36 : (-9)] = (-2) \cdot (-4) = 8$
 f) $[(-72) : 6] : [(-18) : (-3)] = (-12) : 6 = -2$

90. Las soluciones son:

- a) $-3 - 35 + 27 = -11$
 b) $18 + (-12) : (-6) = 18 + 2 = 20$
 c) $9 + 24 + 12 \cdot (-12) = 9 + 24 - 144 = -111$
 d) $2 \cdot 6 + 2 \cdot (-22) - 5 = 12 - 44 - 5 = -37$
 e) $(-3) \cdot (-5) - 2 \cdot (-11) = 15 + 22 = 37$
 f) $-15 - 4 \cdot (-8 - 3 - 7) = -15 - 4 \cdot (-18) = -15 + 72 =$
 $= 57$

91. Calculando se obtiene:

- a) $(-10) \cdot (-5 - 36 + 4) = (-10) \cdot (-37) = 370$
b) $(-3) \cdot (-4) - 2 \cdot (7 + 9 - 11) = 12 - 2 \cdot (5) = 12 - 10 = 2$
c) $(-8) \cdot (-5) - 4 \cdot (3 + 10 - 3) = 40 - 4 \cdot (10) =$
 $= 40 - 40 = 0$
d) $-(2 - 15) + (3 - 28) \cdot (-2) = -(-13) + (-25) \cdot (-2) =$
 $= 13 + 50 = 63$
e) $2 \cdot (3 - 20) - 7 \cdot (2 + 18) = 2 \cdot (-17) - 7 \cdot 20 =$
 $= -34 - 140 = -174$
f) $(-3) \cdot (5 + 14) + 20 - (-6) = (-3) \cdot 19 + 20 + 6 =$
 $= -57 + 26 = -31$

92. Los resultados son:

- a) $3 - 7 \cdot [12 - (5) - 6] = 3 - 7 \cdot 1 = -4$
b) $-3 - 5 \cdot (4 - 27) + 2 \cdot (5 + 21 - 12) = -3 - 5 \cdot (-23) +$
 $+ 2 \cdot 14 = -3 + 115 + 28 = 140$
c) $(-3 - 15) \cdot (18 - 6 + 2 - 12) = (-18) \cdot (2) = -36$
d) $-3 \cdot [-2 + 3 \cdot (-2 - 15 - 8)] - 6 = -3 \cdot [-2 + 3 \cdot (-25)] -$
 $- 6 = -3 \cdot (-2 - 75) - 6 = -3 \cdot (-77) - 6 = 231 - 6 =$
 $= 225$
e) $-2 \cdot (-4 - 45) - 4 \cdot (2 + 12 - 12 - 17) = -2 \cdot (-49) -$
 $- 4 \cdot (-15) = 98 + 60 = 158$

93. Las soluciones son:

- a) $7 - 9 \cdot [6 - 4 - 2 \cdot (3 + 10)] = 7 - 9 \cdot [6 - 4 - 2 \cdot (13)] =$
 $= 7 - 9 \cdot (6 - 4 - 26) = 7 - 9 \cdot (-24) = 7 + 216 = 223$
b) $4 - 3 \cdot [-5 \cdot (2 + 24 + 8 - 11) - 15] = 4 - 3 \cdot [-5 \cdot (23) -$
 $- 15] = 4 - 3 \cdot (-115 - 15) = 4 - 3 \cdot (-130) = 4 + 390 =$
 $= 394$
c) $\{-5 - [-5 - (-10 + 7) \cdot (3 + 10) - 7] - 1\} : (-11) =$
 $= \{-5 - [-5 - (-3) \cdot (13) - 7] - 1\} : (-11) = [-5 -$
 $- (-5 + 39 - 7) - 1\} : (-11) = (-5 - 27 - 1) : (-11) =$
 $= (-33) : (-11) = 3$
d) $-4 - \{4 - 3 \cdot [7 - 3 + 4 - 7 \cdot (-6)] + 2\} - 5 = -4 -$
 $- [4 - 3 \cdot (7 - 3 + 4 + 42) + 2] - 5 = -4 - [4 -$
 $- 3 \cdot (50) + 2] - 5 = -4 - (4 - 150 + 2) - 5 = -4 -$
 $- (-144) - 5 = -4 + 144 - 5 = 135$
e) $\{5 \cdot [3 - 2 \cdot (7 + 4)] - 1\} - [1 + 4 \cdot (3 + 10)] =$
 $= [5 \cdot (3 - 22) - 1] - (1 + 52) = [5 \cdot (-19) - 1] - 53 =$
 $= (-95 - 1) - 53 = -96 - 53 = -149$

94. Actividad resuelta en el libro.

95. Resolvemos:

- a) $3 - |-9| - |3| = 3 - 9 - 3 = -9$
b) $3 - 5 + 7 \cdot |-8| = -2 + 7 \cdot 8 = -2 + 56 = 54$
c) $|-5 + 16| \cdot |10 - 6| = |11| \cdot |4| = 11 \cdot 4 = 44$
d) $|-24| - |24| - 2 \cdot |36 + 12| = 24 - 24 - 2 \cdot |48| =$
 $= -2 \cdot 48 = -96$
e) $|-5 - 2 + 3| + |7 - |-12| - 8| - 7 = |-4| +$
 $+ |7 - 12 - 8| - 7 = 4 + |-13| - 7 = 4 + 13 - 7 = 10$
f) $7 \cdot |1 - 5 - 2| = 7 \cdot |-6| = 7 \cdot 6 = 42$

96. Ejercicio resuelto en el libro.

97. Las soluciones son:

- a) $(-5) + (-5) \cdot (-3) + (-5) \cdot 14 + (-5) \cdot 4 =$
 $= (-5) \cdot [1 - 3 + 14 + 4] = (-5) \cdot 16 = -80$
b) $(-3) \cdot 4 \cdot (-15) - (-3) \cdot 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 90 =$
 $= (-3) \cdot [4 \cdot (-15) - 2 \cdot 5 + 90] =$
 $= (-3) \cdot [-60 - 10 + 90] = (-3) \cdot 20 = -60$
c) $(-3) \cdot 6 \cdot 7 + (-3) \cdot 7 + (-3) \cdot 35 + (-3) \cdot 42 =$
 $= (-3) \cdot [6 \cdot 7 + 7 + 35 + 42] = (-3) \cdot [126] = -378$
d) $(-6) \cdot (-3) + (-6) \cdot (-5) - (-6) \cdot 2 \cdot (-5) =$
 $= (-6) \cdot [(-3) + (-5) - 2 \cdot (-5)] = (-6) \cdot [-3 - 5 + 10] =$
 $= (-6) \cdot 2 = -12$

98. A 26 le tengo que sumar 43 €, restar 60 e, y sumar 28 €, y el resultado será el dinero con el que Margarita salió de casa:

$$26 + 43 - 60 + 28 = 37 \text{ €}$$

99. Con los datos dados por el enunciado resolvemos las cuestiones:

- a) Ana debe recuperar la inversión inicial de 896 € y ganar 168 € de más para que estos puedan ser considerados ganancias. Así pues:
 $(896 + 168) / 56 = 19 \rightarrow$ Ana debe vender 19 juegos
b) Multiplicamos el precio de un juego por el total y le restamos el precio de compra:
 $28 \cdot 56 - 896 = 1568 - 896 = 672 \text{ €}$
c) Sumamos 896 € a los 280 € y lo dividimos por el precio de venta de los juegos:
 $(280 + 896) / 56 = 21$ juegos

100. Las respuestas son:

- a) La temperatura inicial es 2 °C, y se reduce 5 veces, 6 °C cada vez:
 $2 - 5 \cdot 6 = 2 - 30 = -28 \text{ °C}$
b) Calculamos la diferencia entre la temperatura inicial y la mínima, y la dividimos entre 6:
 $[2 - (-42)] : 6 = (2 + 42) : 6 = 44 : 6 \approx 7,3$ horas

Página 21

101. Hay que calcular qué cantidad de dinero se pierde cada día, es decir, restar ingresos y gastos, y dividir los 3000 € iniciales por ese valor:

$$3000 : |150 - 165| = 3000 : |-15| = 3000 : 15 = 200 \text{ días}$$

102. Hay que sumar el dinero gastado en los 145 libros a los 1500 € (pues el total ha de compensar lo que se ha gastado, y además dar esa cantidad de beneficio), y dividir el valor resultante entre el número total de libros a vender:

$$(1500 + 145 \cdot 15) : (145 + 2) = (1500 + 2175) : 147 =$$
$$= 3675 : 147 = 25 \text{ € por cada libro.}$$

103. En un día, lo que se ahorra es la suma de los dos sueldos menos el gasto, así que para 30 días, la respuesta correcta es la c):

$$30 \cdot (75 + 63 - 103)$$

104. Actividad resuelta en el libro.

105. Para que sean del mayor tamaño posible y que no se corte ninguno, el lado de cada azulejo debe ser el máximo común divisor del alto y la longitud de la pared:

$$\begin{array}{r|l} 425 & 5 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$425 = 5^2 \cdot 17, \quad 250 = 2 \cdot 5^3 \rightarrow \\ \rightarrow \text{m.c.d.}(425, 250) = 5^2 = 25$$

El lado debe tener una k 25 cm, así que a lo largo pondremos $425 : 25 = 17$ azulejos, y a lo alto $250 : 25 = 10$ azulejos, con un total de $17 \cdot 10 = 170$ azulejos.

106. La longitud de cada trozo será el máximo común divisor de los tres listones:

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 192 & 2 \\ 96 & 2 \\ 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$144 = 2^4 \cdot 3^2, \quad 80 = 2^4 \cdot 5, \quad 192 = 2^6 \cdot 3 \rightarrow \\ \rightarrow \text{m.c.d.}(144, 80, 192) = 2^4 = 16 \text{ cm}$$

Así, del primer listón podemos sacar $144 : 16 = 9$ trozos, del segundo $80 : 16 = 5$ trozos, y del tercero $192 : 16 = 12$ trozos, con lo que, al final, tendremos un total de 26 trozos.

107. Para que haya la misma cantidad de los tres artículos en cada lote, y no sobre nada, calculamos el máximo común divisor:

$$\begin{array}{r|l} 345 & 5 \\ 69 & 3 \\ 23 & 23 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 375 & 5 \\ 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 390 & 5 \\ 78 & 2 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$345 = 23 \cdot 5 \cdot 3, \quad 375 = 5^3 \cdot 3, \quad 390 = 13 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \\ \text{m.c.d.}(276, 300, 312) = 5 \cdot 3 = 15 \text{ lotes.}$$

108. Para saber dentro de cuántos años volverán a ser visibles a la vez, hay que calcular el mínimo común múltiplo, pues es el número más bajo (es decir, el año más cercano) en el que coincidirán los dos períodos, 36 y 63 años, así que la respuesta correcta es la b).

109. Necesitamos el mínimo común múltiplo entre ambas medidas, para que el resultado sea cuadrado (misma altura y anchura):

$$\begin{array}{r|l} 89 & 89 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$89 = 89 \cdot 1, \quad 64 = 2^6 \rightarrow \text{m.c.m.}(89, 64) = 2^6 \cdot 89 = \\ = 5696 \text{ mm de lado.}$$

a) El mosaico tendrá $5696 : 89 = 64$ cartas de alto y $5696 : 64 = 89$ de ancho, un total de $64 \cdot 89 = 5696$ cartas

b) El área total valdrá $A = (5696 \text{ mm})^2 = 32\,444\,416 \text{ mm}^2$.

110. Calculamos el mínimo común múltiplo del tiempo de travesía de los tres barcos:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 18 = 2 \cdot 3^2$$

Así:

$$\text{m.c.m.}(12, 15, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

Los tres barcos saldrán simultáneamente cada 180 días.

111. Para saber cuánto tiempo tardan en estar justo recién hechos los tres productos, calculamos el mínimo común múltiplo:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2, \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{m.c.m.}(24, 18, 30) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 \text{ minutos}$$

Es decir, después de $360 : 60 = 6$ horas volverá a haber pan, napolitanas y magdalenas recién hechas, a las 16:30.

112. Para saber cuánto tardan en coincidir los tres ciclistas, calculamos el mínimo común múltiplo:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 2 & \end{array}$$

$$18 = 2 \cdot 3^2, \quad 21 = 3 \cdot 7, \quad 25 = 5^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{m.c.m.}(18, 21, 25) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 3150$$

Tardarán 3150 segundos en coincidir, así que el primero llevará $3150 : 18 = 175$ vueltas, el segundo $3150 : 21 = 150$ vueltas, y el tercero $3150 : 25 = 126$ vueltas.

113. Las soluciones son:

a) Para saber cuándo coinciden por primera vez, tengo que calcular el mínimo común múltiplo:

$$12000 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3$$

$$15000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \rightarrow$$

$$20000 = 2^5 \cdot 5^4$$

$$\rightarrow \text{m.c.m.}(12000, 15000, 20000) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^4 = 60000 \text{ km}$$

b) Si coinciden por tercera vez, llevarán $60000 \cdot 3 = 180000$ km recorridos, y como la motocicleta tiene que pasar revisión cada 12000: $180000 : 12000 = 15$ revisiones.

Página 22

114. Actividad resuelta en el libro.

115. Si no sobrasen melones al contarlos de 4 en 4, de 6 en 6 y de 7 en 7, el número sería un múltiplo de estos tres números. Calculemos el mínimo común múltiplo:

$$\begin{cases} 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \rightarrow \text{m.c.m.}(4, 6, 7) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \\ 7 = 7 \cdot 1 \end{cases}$$

Si no sobrasen, serían 84 melones, pero como siempre sobran 3, y sabemos que son menos de 100, tenemos $84 + 3 = 87$ melones.

116. Calculamos el total de frutas no estropeadas:

$$15 \cdot 18 - 6 = 270 - 6 = 264 \text{ naranjas}$$

$$12 \cdot 18 - 6 = 216 - 6 = 210 \text{ manzanas}$$

$$24 \cdot 18 - 6 = 432 - 6 = 426 \text{ plátanos}$$

Para que haya la misma cantidad en cada lote y no sobre fruta, calculamos el máximo común divisor:

$$\begin{array}{r|l} 264 & 2 \\ 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 426 & 2 \\ 213 & 3 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

$$264 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11, \quad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7, \quad 426 = 2 \cdot 3 \cdot 71 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{m.c.d.}(264, 210, 426) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ lotes.}$$

En cada lote habrá: $264 : 6 = 44$ naranjas, $210 : 6 = 35$ manzanas, y $426 : 6 = 71$ plátanos.

117. Actividad resuelta en el libro.

118. Expresamos:

$$b = X \cdot d \quad \text{donde } X \text{ es un número natural}$$

$$a = Y \cdot b \quad \text{donde } Y \text{ es un número natural.}$$

Entonces:

$$a = Y \cdot b = Y \cdot (X \cdot d) = (Y \cdot X) \cdot d = Z \cdot d$$

donde Z es un número natural.

Así pues, a es un múltiplo de d.

119. El signo será, en cada caso:

a) $a - c$ es positivo, $b - d$ también, así que $\frac{a-c}{b-d}$ es positivo.

Por otro lado, $-a - b$ es negativo, así que $\frac{-a-b}{c}$ es positivo.

Por lo tanto, $\frac{a-c}{b-d} \cdot \frac{-a-b}{c}$ es positivo.

b) $c - b$ es negativo, y $d - b$ también, así que $\frac{c-b}{d-b}$ es positivo.

Por otro lado, $a - c$ es positivo, pero $d - a$ es negativo, así que $\frac{a-c}{d-a}$ es negativo.

Así que $\frac{c-b}{d-b} \cdot \frac{a-c}{d-a}$ es negativo.

120. Por la segunda condición, a sólo puede valer 4 y -4.

Por la tercera condición, b sólo puede valer -2 y 8.

Por lo tanto, teniendo en cuenta la primera condición, $b < a$, el único resultado posible es: $a = 4$, y $b = -2$.

121. Respuesta personal, a modo de ejemplo:

a) $a = -2$ y $b = 3$

b) $a = 2$, $b = -3$

c) $a = 2$, $b = -3$

d) $a = 2$, $b = -3$

122. Si $n = 10$, $n^2 = 100$, y tenemos que $100 : 4 = 25$, pero 10 no es divisible por 4.

123. Recordemos el criterio de divisibilidad por 11:

Un número es divisible por 11 si la diferencia (en valor absoluto) entre la suma de las cifras que ocupan lugares pares y la suma de las cifras que ocupan lugares impares es 0 o múltiplo de 11.

Así pues, un número palíndromo será divisible por 11 solo si cumple esta condición. Considerando que hay palíndromos con una cantidad par de dígitos y otros con una cantidad impar, y definiendo los dígitos como a_n , siendo n la posición que ocupan, podemos reescribir matemáticamente el criterio de divisibilidad:

Términos palíndromos con $2n$ dígitos (cantidad par):

$$\begin{aligned} & \left| (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) \right| = \\ & = 11x \quad x \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

En los palíndromos de $2n$ dígitos, por definición, a partir del término $n+1$ los valores de los dígitos toman los valores de los n primeros dígitos según:

$$a_{n+1} = a_n ; a_{n+2} = a_{n-1} ; \dots ; a_{2n} = a_1$$

Vemos pues que, en la segunda mitad del palíndromo, los valores de los dígitos son los mismos pero habiendo cambiado las posiciones impares por pares y las pares por impares. De ese modo la condición de divisibilidad por 11 cobra la forma:

$$\begin{aligned} & \left| (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) \right| = \\ & \left| (a_1 + a_3 + \dots + a_n + a_{n-1} + a_{n-3} + \dots + a_4 + a_2) - \right. \\ & \left. - (a_2 + a_4 + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4} + \dots + a_3 + a_1) \right| = 0 \end{aligned}$$

Esta igualdad se cumple siempre, por lo tanto, este tipo de palíndromos siempre serán múltiplos de 11 ya que todos cumplen el criterio de divisibilidad.

Términos palíndromos con $2n-1$ dígitos (cantidad impar):

$$\begin{aligned} & \left| (a_1 + a_3 + \dots + a_n + \dots + a_{2n-1}) - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2}) \right| = \\ & = 11x \quad x \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

En los palíndromos de $2n-1$ dígitos, por definición, a partir del término $n+1$ los valores de los dígitos toman los valores de los n primeros dígitos según:

$$a_{n+1} = a_{n-1} ; a_{n+2} = a_{n-2} ; \dots ; a_{2n-1} = a_1$$

Vemos pues que en la segunda mitad del palíndromo los valores de los dígitos son los mismos sin haber cambiado las posiciones impares por pares, ni las pares por impares. El término n queda desemparejado. De ese modo, la condición de divisibilidad por 11 cobra la forma:

$$\begin{aligned} & \left| (2a_1 + 2a_3 + \dots + a_n) - (2a_2 + 2a_4 + \dots + 2a_{n-1}) \right| = \\ & = 11x \quad x \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Escogiendo adecuadamente los términos, podemos encontrar palíndromos que cumplan esa condición, sin embargo, muchos otros no la cumplirán. A modo de ejemplo:

- 13231: Aplicamos el criterio de divisibilidad:

$$\left| (3+3) - (1+2+1) \right| = \left| (6-4) \right| = \left| 2 \right| = 2$$

Vemos que este término no cumple la condición, ya que 2 no es un múltiplo de 11 ni 0. Así pues, no todos los números palíndromos son múltiplos de 11.

124. Comprobamos la afirmación del enunciado:

$$n = 2 \rightarrow 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3, \text{ primo.}$$

$$n = 3 \rightarrow 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7, \text{ primo.}$$

$$n = 5 \rightarrow 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31, \text{ primo.}$$

$$n = 7 \rightarrow 2^7 - 1 = 128 - 1 = 127, \text{ primo.}$$

$$n = 13 \rightarrow 2^{13} - 1 = 8192 - 1 = 8191, \text{ primo.}$$

125. Un ejemplo para cada caso queda:

4 = 3 + 1	24 = 17 + 7
6 = 5 + 1	26 = 19 + 7
8 = 5 + 3	28 = 17 + 11
10 = 5 + 5	30 = 13 + 17
12 = 11 + 1	32 = 13 + 19
14 = 11 + 3	34 = 17 + 17
16 = 11 + 5	36 = 19 + 17
18 = 11 + 7	38 = 19 + 19
20 = 13 + 7	40 = 21 + 19
22 = 17 + 5	42 = 21 + 21

126. Calculamos mediante el algoritmo de Euclides:

a)

1870 $\overline{)740}$	→	740 $\overline{)390}$
390 2		350 1
390 $\overline{)350}$	→	350 $\overline{)40}$
40 1		30 8
40 $\overline{)30}$	→	30 $\overline{)10}$
10 1		0 3

→ m.c.d.(1870, 740) = m.c.d.(30, 10) = 10

b)

11 111 $\overline{)111}$	→	111 $\overline{)11}$
11 100		1 10
11 $\overline{)1}$	→	
0 11		

→ m.c.d.(111, 11111) = m.c.d.(11, 1) = 1

c)

3260 $\overline{)542}$	→	542 $\overline{)8}$
8 6		6 67
8 $\overline{)6}$	→	6 $\overline{)2}$
2 1		0 3

→ m.c.d.(3260, 542) = m.c.d.(6, 2) = 2

d) Los resultados son:

12 432 $\overline{)5432}$	→	5432 $\overline{)1568}$
1568 2		728 3

$$1568 \begin{array}{l} \overline{728} \\ 112 \quad 2 \end{array} \rightarrow 728 \begin{array}{l} \overline{112} \\ 56 \quad 6 \end{array}$$

$$112 \begin{array}{l} \overline{56} \\ 0 \quad 2 \end{array} \rightarrow$$

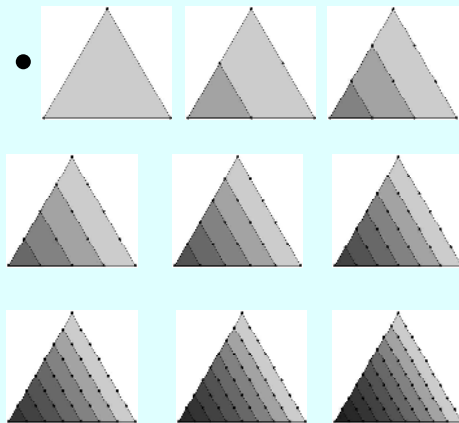
$$\rightarrow \text{m.c.d.}(12432, 5432) = 56$$

127. a) $\frac{190}{2} = 95$ b) $410 + 41 = 451$
- c) $\frac{84}{4} \cdot 100 = 21 \cdot 100 = 2100$ d) $\frac{6400}{2} = 3200$
- e) $380 + 38 = 418$ f) $\frac{17}{4} \cdot 100 = 425$
- g) $\frac{2110}{2} = 1055$ h) $830 + 83 = 913$
- i) $\frac{34}{4} \cdot 100 = 850$ j) $\frac{940}{2} = 470$
- k) $260 + 26 = 286$ l) $\frac{47}{4} \cdot 100 = 1175$

Página 23

Desarrolla tus competencias:

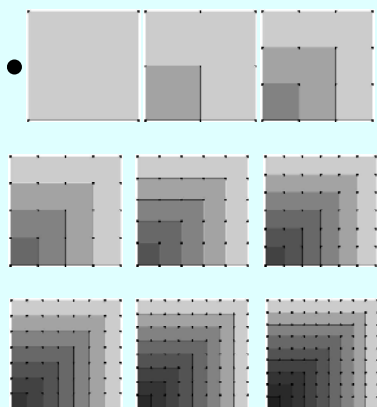
1. Los diez primeros números triangulares son:



A continuación ya podemos completar la tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T _n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

2. Los diez primeros números cuadrados son:



A continuación ya podemos completar la tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C _n	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

Observando la tabla, fácilmente podemos deducir los valores que nos piden. Así, C₂₅ = 625 y C₁₀₀ = 10000. Por tanto, la expresión general será C_n = n².

3. Sabiendo que cada número triangular está definido por la fórmula T_n = n(n+1)/2, sustituimos n por = 1, 2, 3, etc. y podremos comprobar que la tabla es correcta:

$$T_1 = 1 \cdot (1+1)/2 = 1 \qquad T_6 = 6 \cdot (6+1)/2 = 21$$

$$T_2 = 2 \cdot (2+1)/2 = 3 \qquad T_7 = 7 \cdot (7+1)/2 = 28$$

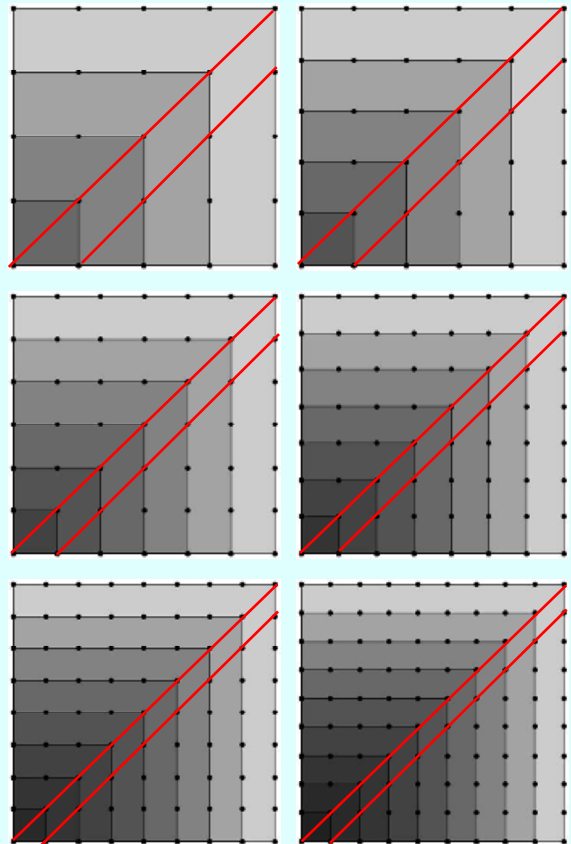
$$T_3 = 3 \cdot (3+1)/2 = 6 \qquad T_8 = 8 \cdot (8+1)/2 = 36$$

$$T_4 = 4 \cdot (4+1)/2 = 10 \qquad T_9 = 9 \cdot (9+1)/2 = 45$$

$$T_5 = 5 \cdot (5+1)/2 = 15 \qquad T_{10} = 10 \cdot (10+1)/2 = 55$$

4. Sí, el 36 es un número triángulo y cuadrado a la vez. Para encontrar el siguiente número triangular y cuadrado a la misma vez generamos los números a partir de las respectivas expresiones: T_n = n(n+1)/2 y C_n = n². Comparando los resultados obtenidos veremos que este número es el 1225.

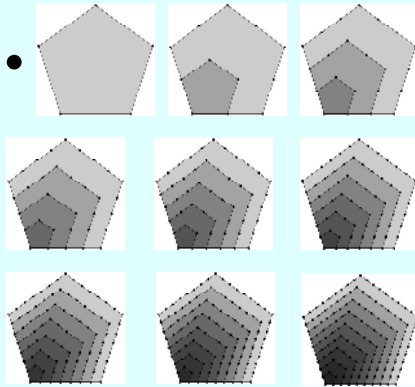
5. La descomposición de estos números cuadrados en triangulares es:



Podemos deducir que C₅ = T₄ + T₅, C₆ = T₅ + T₆, C₇ = T₆ + T₇, C₈ = T₇ + T₈, C₉ = T₈ + T₉, C₁₀ = T₉ + T₁₀.

Por tanto, T_{n-1} + T_n = C_n.

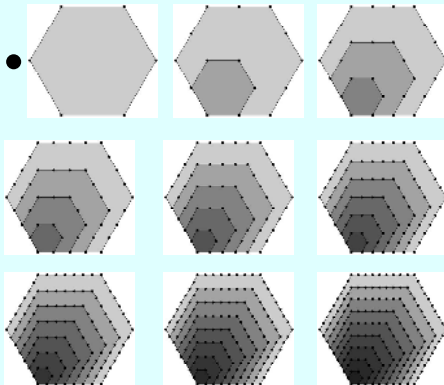
6. Los primeros diez números pentagonales son:



A continuación podemos escribir la tabla:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145

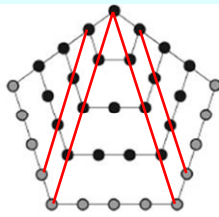
Los primeros diez números hexagonales son:



A continuación podemos escribir la tabla:

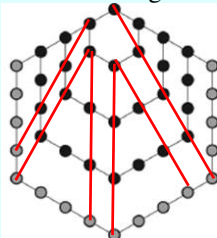
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190

7. Representamos el número P_5 y dibujamos en él los números triangulares correspondientes:



$$P_5 = T_4 + T_5 + T_4 = T_5 + 2T_4$$

Representamos el número H_5 y dibujamos en él los números triangulares correspondientes:



$$H_5 = T_5 + T_4 + T_4 = T_5 + 3T_4$$

8. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Pitágoras fue el fundador de la escuela pitagórica, que fue una asociación religiosa, política y filosófica. Su esencia estaba en considerar que la sustancia de las cosas era el número. Según ellos, todo se basaba en relaciones numéricas.

La adoración y obsesión que sentían por los números les condujo a su estudio exhaustivo. Así, establecieron diferentes clasificaciones, por ejemplo, en pares e impares. Otras clasificaciones curiosas que hicieron fueron los números triangulares, los cuadrados y los perfectos. También desarrollaron un detallado estudio sobre la geometría aplicada a la astronomía.

Página 24

Evaluación de estándares

- El menor número natural divisible por tres números, es el mínimo común múltiplo de esos tres números:
 $m.c.m.(3,13,17) = 3 \cdot 13 \cdot 17 = 663$
- m es múltiplo de n porque n aparece en la descomposición factorial de m.
 - m no es múltiplo de n porque 11 no aparece en la descomposición factorial de m.
 - m no es múltiplo de n porque 2^3 no aparece en la descomposición factorial de m.
- $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ $495 = 5 \cdot 3^2 \cdot 11$
 $m.c.m.(360, 495) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 3960$
 $m.c.d.(360, 495) = 3^2 \cdot 5 = 45$
 - $216 = 2^3 \cdot 3^3$ $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ $648 = 2^3 \cdot 3^4$
 $m.c.m.(216, 240, 648) = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 = 6480$
 $m.c.d.(216, 240, 648) = 2^3 \cdot 3 = 24$
 - $2805 = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$ $3366 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17$
 $m.c.m.(2805, 3366) = 2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 17 = 16\,830$
 $m.c.d.(2805, 3366) = 3 \cdot 11 \cdot 17 = 561$
- Los número ordenados quedan de la siguiente forma:
 $-| -890| < -7 = -| -7| < -| -3| < | -12| < | -1234|$
- $(-2) \cdot 5 + 6 \cdot 4 - 2 = (-2) \cdot (5 + 6 \cdot (-2) + 1)$
 - $(-9) \cdot (-49) + 6 \cdot (-7) - 3 \cdot 42 =$
 $= (21) \cdot (3 \cdot 7 - 2 - 6)$
 - $(-15) \cdot 6 + (-45) - 90 + 10 \cdot (-9) =$
 $= (-45) \cdot (2 + 1 + 2 + 2)$
- $-2 - 3 \cdot (4 - 2 \cdot 7 + 11 - 9) = -2 - 3 \cdot (4 - 14 + 11 - 9) =$
 $= -2 - 3 \cdot (15 - 23) = -2 - 3 \cdot (-8) = -2 + 24 = 22$
 - $-(6 - 2 \cdot 5) + (3 - 7 \cdot (-4)) \cdot (-2 - 7) = -(6 - 10) +$
 $+ (3 + 28) \cdot (-9) = -(-4) + 31 \cdot (-9) = 4 - 279 = -275$
 - $-30 : [(-12 + 9) \cdot 9 - (3 \cdot 3 - 12 : 3) + 2] =$
 $= -30 : [-3 \cdot 9 - (9 - 4) + 2] = -30 : (-27 - 5 + 2) =$
 $= -30 : (-30) = 1$
 - $3 + 2 \cdot [-8 + 2 \cdot (3 - 7 \cdot (-2) - 8) + 2 \cdot (-3)] = 3 + 2 \cdot [-8 +$
 $+ 2 \cdot (3 + 14 - 8) + 2 \cdot (-3)] = 3 + 2 \cdot (-8 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot (-3)) =$
 $= 3 + 2 \cdot (-8 + 18 - 6) = 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11$
 - $1 - 3 \cdot \{ [(-24) \cdot (-6) + 48 : (-8) - 2 \cdot (2 - 5 \cdot (-3))] : (-6) \} =$
 $= 1 - 3 \cdot \{ [4 - 6 - 2 \cdot (2 + 15)] : (-6) \} =$
 $= 1 - 3 \cdot \{ (4 - 6 - 2 \cdot 17) : (-6) \} = 1 - 3 \cdot \{ (4 - 6 - 34) : (-6) \} =$
 $= 1 - 3 \cdot \{ (-36) : (-6) \} = 1 - 3 \cdot 6 = 1 - 18 = -17$

7. a) $|-5| - |-3| + 2 \cdot |-4| - 3 = 5 - 3 + 2 \cdot 4 - 3 = 5 - 3 + 8 - 3 = 7$

b) $-2 \cdot |3 - 8| + (-3) \cdot |4 - 3| \cdot |2 - 7| - 8| = -2 \cdot |-5| + (-3) \cdot |4 - 3| \cdot |-5| - 8| = -2 \cdot 5 + (-3) \cdot |4 - 3 \cdot 5 - 8| = -10 + (-3) \cdot |4 - 15 - 8| = -10 + (-3) \cdot |-19| = -10 + (-3) \cdot 19 = -10 - 57 = -67$

8. a) Para calcular el tamaño de los trozos de cinta debemos calcular el máximo común divisor de 84, 66 y 150.

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \quad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\text{m.c.d.}(84, 66, 150) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}$$

El mayor tamaño de los trozos de cinta es 6 cm.

b) Luego, si cortamos las cintas en trozos de 6 cm, obtendremos:

$$84 + 66 + 150 = 300 \quad 300 : 6 = 50 \text{ trozos}$$

Por tanto, sí que tendremos trozos suficientes para llevar a cabo la actividad.

9. Buscamos el mínimo común múltiplo de 22 y 16.

$$22 = 2 \cdot 11 \quad 16 = 2^4$$

$$\text{m.c.m.}(22, 16) = 2^4 \cdot 11 = 176 \text{ libros}$$

La librería recibió como mínimo 176 libros.

10. La operación combinada quedaría de la siguiente forma:

$$[320 + (4 \cdot 7 \cdot 15 + 5 \cdot 3) - 4 \cdot 7 \cdot 25] : 5 =$$

$$(320 + 420 - 700) : 5 = 55 : 5 = 11 \text{ €}$$

Debe vender cada libreta a 11 €

Estrategia e ingenio

Pirámide numérica

- La pirámide completa queda de la siguiente forma:

129				
48		81		
1	47		34	
-7	8	39	-5	
9	-16	24	15	-20

Número romanos

- Las expresiones modificadas quedan de la siguiente forma:

a) VIII - II = V

b) VI + IV = X

c) XIV - II = XII

La igualdad sería verdadera si la leyeseamos dando la vuelta al papel; quedaría de la siguiente forma:

$$X = I + IX$$

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 1-3 de la guía)

6. Las soluciones del ejercicio son:

a) $|-15| = 15$ y el opuesto de -15 es 15.

b) $|17| = 17$ y el opuesto de 17 es -17.

c) $|-2| = 2$ y el opuesto de -2 es 2.

d) $|9| = 9$ y el opuesto de 9 es -9.

7. Las soluciones son las siguientes:

a) $(-13) + 12 = -1$

b) $(-20) : 5 = -4$

c) $32 - (-44) = 32 + 44 = 76$

d) $88 : (-11) = -8$

(Viene de la página 1-17 de la guía)

40. La resolución del problema es la siguiente:

Primero realizamos la descomposición de los números en factores primos y calculamos el m.c.d.

$$A = 2^3 \cdot 3 \cdot 23; B = 2^3 \cdot 3 \cdot 13; C = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{El m.c.d. es } 12 \rightarrow 2^3 \cdot 3 = 12$$

El mayor número de lotes que podemos hacer sin que sobre ninguna unidad es 12. Para conocer la composición de cada producto tenemos que dividir el total por el número de lotes:

$$A \rightarrow 276 : 12 = 23; B \rightarrow 312 : 12 = 26; C \rightarrow 300 : 12 = 25$$

A tiene 23, B 26 y C 25 unidades por lote.

41. La resolución del problema es la siguiente:

$$50 + [3 \cdot (-8) - 19 + 2 \cdot 8 - 3] = 50 + (-24 - 19 + 16 - 3) = 50 + (-46 + 16) = 50 + (-30) = 50 - 30 = 20$$

Quedan 20 € de los 50 € iniciales

DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/738806	https://www.youtube.com/watch?v=LrvReDIXSrl
http://www.tiching.com/738807	http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/primaria/matematicas/conmates/index.htm
http://www.tiching.com/738808	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/primaria/actividades/aritmetica/naturales_y_enteros/criba_de_eratostenes/actividad.html
http://www.tiching.com/738809	https://www.youtube.com/watch?v=83_tdwzT1Xs
http://www.tiching.com/738810	http://maryluzdevia.blogspot.com.es/
http://www.tiching.com/738811	https://www.youtube.com/watch?v=9Xi5Rb20n7w
http://www.tiching.com/738812	https://matematicasiesoja.wordpress.com/2o-eso/
http://www.tiching.com/738813	http://www.padrefejoo.com/portal/images/stories/nmero%20enteros%20operaciones%20combinadas.pdf