Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

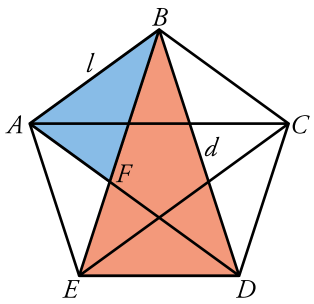
1 LOS NÚMEROS REALES

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.7. (EA 1.7.1-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.-EA 1.7.5.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.)

Página 33

Resuelve

El pentágono estrellado



Observa el pentágono estrellado que se muestra a continuación:

1 **Demuestra que los triángulos ABF y EBD son semejantes (es decir, demuestra que sus ángulos son respectivamente iguales).**

2 **Si llamamos l al lado del pentágono y d a su diagonal, basándote en la semejanza de los triángulos que acabas de demostrar, halla la relación d/l y comprueba que es el número áureo:**

$$\frac{d}{l} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

El ángulo $\hat{B} = 36°$ en el triángulo ABF, y $\hat{B} = 36°$ en el triángulo EBD. Por otra parte los triángulos DAB y EBD son iguales, luego el ángulo $\hat{A}$ en el triángulo ABF, y $\hat{D}$ en el triángulo EBD son iguales. Por tanto los triángulos son semejantes.

El lado $AF = d - l$.

Por la semejanza de los triángulos ABF y EBD; $\frac{BD}{BF} = \frac{ED}{AF}$; es decir, $\frac{d}{l} = \frac{l}{d-l}$

Operando, $d(d-l) = l^2$, por tanto $d^2 - dl - l^2 = 0$.

Las soluciones posibles para d son $d = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

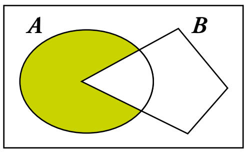
Como d no puede ser negativa, $d = l\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $\frac{d}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

1 ▶ LENGUAJE MATEMÁTICO. CONJUNTOS Y SÍMBOLOS

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 2.1. (EA 2.1.1-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.)

Página 35

1 **[La justificación de las afirmaciones requiere que el alumnado trabaje la expresión oral]. ¿Verdadero o falso?**



a) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A - B$.

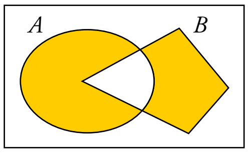
Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B.

b) El conjunto coloreado de la izquierda se puede designar $A \cap B'$.

Verdadero, porque la parte coloreada está formada por todos los elementos de A que no están en B, ya que B' es el complementario de B.

c) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$(A - B) \cup (B - A)$



Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

d) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar:

$(A \cup B) - (A \cap B)$

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto coloreado, tiene que estar en A o en B, pero no puede estar en los dos a la vez $(A \cap B)$.

e) El conjunto coloreado de la derecha se puede designar $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.

Verdadero, porque para que un elemento esté en el conjunto, o está en A y no está en B, o está en B y no está en A.

f) $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$

Verdadero, porque todos los números enteros son racionales.

g) $[x \in (\dot{3})$ y $x \in (\dot{2})] \Leftrightarrow x \in (\dot{6})$

$(\dot{n})$ es el conjunto de los múltiplos de n.

Verdadero, porque si un número es a la vez múltiplo de 2 y de 3, entonces es múltiplo de $2 \cdot 3 = 6$.

h) $(\dot{3}) \cap (\dot{2}) = (\dot{6})$

Es la misma afirmación anterior.

i) $x \in A - B \Rightarrow x \in A \cap B'$

Verdadero, porque los elementos de $A - B$ están en A y no están en B, luego están en A y en B'.

j) $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ es lo mismo que decir $A \subset B$.

Verdadero, porque la implicación indica que todo elemento de A es un elemento de B.

k) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$

Tenemos que comprobar que las dos siguientes afirmaciones son ciertas:

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow A \subset B$ que es la afirmación del apartado j)

$A \in B \Rightarrow x \in \mathrm{A} \Rightarrow x \in B$, pero si B contiene a A, es porque todos los elementos de A están en B, luego son equivalentes y es verdadera la afirmación.

l) $(x \in A \Rightarrow x \in B) \Rightarrow B \subset A$

Falso, porque puede existir algún elemento de B que no esté en A.

m) $x \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ y $0 < x < 1$

Verdadero, porque los intervalos representan conjuntos de números reales y el intervalo (0, 1) está formado por los números comprendidos entre 0 y 1 que son mayores que 0 y menores que 1, luego son afirmaciones equivalentes.

n) $\sqrt{2} \notin (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **pero**

$\sqrt{2}/2 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Verdadero, porque $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional y es mayor que 1, sin embargo $\sqrt{2}/2$ también es irracional, pero está entre 0 y 1.

ñ) $0,5 \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$

Falso, porque 0,5 es racional.

o) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap (0, 1)$ **es el conjunto de los números irracionales positivos menores que 1.**

Verdadero, porque son los números reales que no son racionales, es decir, irracionales, y además tienen que ser mayores que cero, por tanto positivos, y menores que 1.

p) $\{x \in \mathbb{Z} \ / -2 < x \le 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Verdadero, porque los únicos números enteros mayores que –2 y menores o iguales que 5 son los del conjunto indicado.

q) **El conjunto de los números enteros mayores que –5 y menores que 7 es** $\mathbb{Z} \cap (-5, 7)$**.**

Verdadero, porque, de los números enteros mayores que –5 y menores que 7, están en el intervalo (–5, 7) y además son enteros.

r) **(*x* es un número real pero no es racional)** $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Verdadero, porque $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es el conjunto de todos los números reales menos los racionales, que es equivalente a decir los números reales que no son racionales.

2 ▸ NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.5.-EA 2.1.6.)

Página 37

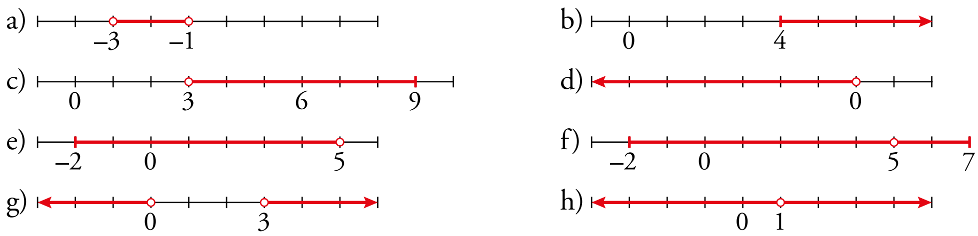
1 **Representa sobre la recta real estos conjuntos:**

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

e) $\{x / -2 \le x < 5\}$ **f)** $[-2, 5) \cup (5, 7]$

g) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$ **h)** $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



2 **Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones y representa cada conjunto.**

a) $|x| = 5$ **b)** $|x - 4| \le 2$ **c)** $|x| \le 5$

d) $|x - 4| > 2$ **e)** $|x - 4| = 2$ **f)** $|x + 4| > 5$

a) 5 y –5

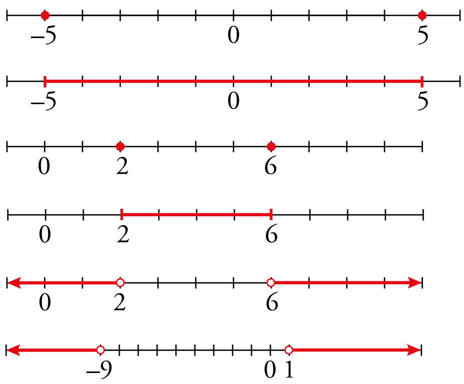
b) $2 \le x \le 6$; $[2, 6]$

c) $-5 \le x \le 5$; $[-5, 5]$

d) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

e) 6 y 2

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$



3 RAÍCES Y RADICALES

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.) C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.)

Página 38

1 Simplifica.

a) $\sqrt[9]{x^{12}}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[9]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^4}$ Se dividen índice y exponente entre 3.

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2 Simplifica y expresa el resultado en forma de raíz.

a) $\sqrt[9]{512x^3}$ **b)** $\sqrt[4]{121x^{10}}$

c) $\sqrt[8]{\dfrac{225}{x^4}}$ **d)** $\sqrt[6]{125x^3}$

a) $\sqrt[9]{512x^3} = \sqrt[9]{2^9 \cdot x^3} = \sqrt[9]{2^9} \cdot \sqrt[9]{x^3} = 2\sqrt[3]{x}$

b) $\sqrt[4]{121x^{10}} = \sqrt{11 \cdot x^5} = x^2\sqrt{11 \cdot x}$

c) $\sqrt[8]{\dfrac{225}{x^4}} = \sqrt[8]{\dfrac{5^2 \cdot 3^2}{x^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{5 \cdot 3}}{\sqrt[2]{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[2]{x}}$

d) $\sqrt[6]{125x^3} = \sqrt[6]{5^3 \cdot x^3} = \sqrt{5x}$

Página 39

3 Compara reduciendo a índice común en cada caso.

a) $\sqrt[12]{2^5}$ **y** $\sqrt[18]{2^7}$ **b)** $\sqrt[3]{51}$ **y** $\sqrt[9]{132650}$

c) $\sqrt[4]{31}$ **y** $\sqrt[3]{13}$ **d)** $\sqrt[5]{245}$ **y** $\sqrt[7]{2185}$

a) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[36]{2^{15}} \\ \sqrt[18]{2^7} = \sqrt[36]{2^{14}} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[12]{2^5} > \sqrt[18]{2^7}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[9]{132651} \Rightarrow \sqrt[3]{51} > \sqrt[9]{132650}$

c) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29791} \\ \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28561} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[4]{31} > \sqrt[3]{13}$

d) $\left.\begin{array}{l} \sqrt[5]{245} = \sqrt[35]{52986177566328125} \\ \sqrt[7]{2185} = \sqrt[35]{49803195206115625} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[5]{245} > \sqrt[7]{2185}$

4 Extrae fuera del radical cuando sea posible.

a) $\sqrt[12]{32}$ **b)** $\sqrt{27}$ **c)** $\sqrt{20}$ **d)** $\sqrt[3]{54}$

e) $\sqrt[4]{a^7}$ **f)** $\sqrt{x^5}$ **g)** $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3}$ **h)** $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2}$

a) $\sqrt[12]{32} = \sqrt[12]{2^5}$. No se puede extraer.

b) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$

c) $\sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 2^2} = 2\sqrt{5}$

d) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

e) $\sqrt[4]{a^7} = a\sqrt[4]{a^3}$

f) $\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x}$

g) $\sqrt{a \cdot b^2 \cdot c^3} = b \cdot c\sqrt{a \cdot c}$

h) $\sqrt[3]{x^4 \cdot x^2} = \sqrt[3]{x^6} = x^2$

5 **Expresa bajo un único radical en cada caso.**

a) $2\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{2}$ **c)** $2\sqrt[3]{5}$ **d)** $3^2 \cdot \sqrt[5]{2}$

e) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3}$ **f)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5}$ **g)** $10\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$ **h)** $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4}$

a) $2\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = \sqrt{12}$

b) $3\sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{18}$

c) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{40}$

d) $32\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2 \cdot 2^{25}} = \sqrt[5]{2^{26}} = \sqrt[5]{67\,108\,864}$

e) $\sqrt{2^3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 2^3} = \sqrt{24}$

f) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{200}$

g) $10\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt{3 \cdot 10^2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 100^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{675\,000\,000}$

h) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[10]{3^5 \cdot 2^5 \cdot 4^2} = \sqrt[10]{124\,416}$

6 **Reduce.**

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$ **e)** $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5}$ **f)** $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

e) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[4]{5^2} = \sqrt[4]{5^5} = 5\sqrt[4]{5}$

f) Se factorizan los radicandos y se reduce a índice común:

$\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[6]{(3^4)^2}\,\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^{11}} = 3\sqrt[6]{3^5}$

Página 40

7 **Simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}}$

c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$

a) $\sqrt[15]{\dfrac{x^3}{x^5}} = \sqrt[15]{\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt[15]{x^{-2}}$

b) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3\,b^3}{a^2\,b^2}} = \sqrt[6]{a\,b}$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$

d) $\sqrt[4]{\dfrac{a^3\,b^5\,c}{a^2\,b^6\,c^6}} = \sqrt[4]{\dfrac{a}{bc^5}} = \dfrac{1}{c}\sqrt[4]{\dfrac{a}{bc}}$

8 **Simplifica.**

a) $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}\right)^8$ **b)** $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ **c)** $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $\left(\sqrt[8]{k}\right)^8 = k$ b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

9 **Suma y simplifica.**

a) $5\sqrt{x}+3\sqrt{x}+2\sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{25\cdot 2}-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$ **d)** $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}$

e) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$ **f)** $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}$

a) $10\sqrt{x}$

b) $3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{2}-\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{2}-\sqrt{2^3}=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3^3}-\sqrt{2\cdot 5^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{2^3}=3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=5\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

e) $\sqrt{2\cdot 5^2\cdot a}-\sqrt{2\cdot 3^2\cdot a}=5\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}=2\sqrt{2a}$

f) Se factorizan los radicandos y se sacan factores de la raíz:

$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}=\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}=0$

Página 41

10 **Racionaliza denominadores y simplifica cuanto puedas.**

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}$ **f)** $\dfrac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}$ **j)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\dfrac{5}{\sqrt{7}}=\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}}=\dfrac{1}{a\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\dfrac{3}{\sqrt{50}}=\dfrac{3}{\sqrt{2\cdot 5^2}}=\dfrac{3}{5\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\dfrac{4}{\sqrt{18}}=\dfrac{4}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\dfrac{4}{3\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{6}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{25}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{40}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^3\cdot 5}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{5}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{36}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3^2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2\cdot 3}}{2\cdot 3}=\dfrac{3\sqrt[3]{6}}{6}=\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{100}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2^2\cdot 5^2}}=\dfrac{2\sqrt[3]{2\cdot 5}}{2\cdot 5}=\dfrac{2\sqrt[3]{10}}{10}=\dfrac{\sqrt[3]{10}}{5}$

11 **Racionaliza denominadores y simplifica estas expresiones cuanto puedas.**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

c) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

e) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f)** $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **h)** $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} = \sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

e) $\dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{12-5} = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{7}$

f) $\dfrac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2}{18-12} = \dfrac{18+12+12\sqrt{6}}{6} = \dfrac{30+12\sqrt{6}}{6} = 5+2\sqrt{6}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \dfrac{(2-1)+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2-1)} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} = \dfrac{2\sqrt{x}}{x-y}$

4 LOGARITMOS

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.) C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.)

Página 42

1 Halla.

a) $\log_2 16$ **b)** $\log_2 0,25$

c) $\log_9 1$ **d)** $\log_{10} 0,1$

e) $\log_4 64$ **f)** $\log_7 49$

g) $\log_7 7$ **h)** $\log_\pi \left(\frac{1}{\pi}\right)$

i) $\log_5 0,04$ **j)** $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right)$

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_2 0,25 = \log_2 2^{-2} = -2$

c) $\log_9 1 = 0$

d) $\log_{10} 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

e) $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

f) $\log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$

g) $\log_7 7 = 1$

h) $\log_\pi \frac{1}{\pi} = \log_\pi \pi^{-1} = -1$

i) $\log_5 0,04 = \log_5 5^{-2} = -2$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216}\right) = \log_6 6^{-3} = -3$

2 Halla la parte entera de…

a) $\log_2 60$ **b)** $\log_5 700$

c) $\log_{10} 43\,000$ **d)** $\log_{10} 0,084$

e) $\log_9 60$ **f)** $\log_7 14$

g) $\log_{20} 450\,000$ **h)** $\log_{5,4} 900$

i) $\log_2 3$ **j)** $\log_5 0,1$

a) $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $32 < 60 < 64$

$5 < \log_2 60 < 6 \Rightarrow \log_2 60 = 5,\ldots$

b) $5^4 = 625$; $5^5 = 3\,125$; $625 < 700 < 3\,125$

$4 < \log_5 700 < 5 \Rightarrow \log_5 700 = 4,\ldots$

c) $10^4 = 10\,000$; $10^5 = 100\,000$; $10\,000 < 43\,000 < 100\,000$

$4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \Rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4,\ldots$

d) $10^{-2} = 0,01$; $10^{-1} = 0,1$; $0,01 < 0,084 < 0,1$

$-2 < \log_{10} 0,084 < -1 \Rightarrow \log_{10} 0,084 = -1,\ldots$

e) $9^1 = 9$; $9^2 = 81$; $9 < 60 < 81$

$1 < \log_9 60 < 2 \Rightarrow \log_9 60 = 1,\ldots$

f) $\log_7 14$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $7^1 = 7$ y $7^2 = 49$.

Con la calculadora: $\log_7 14 = 1,3562$)

g) $\log_{20} 450\,000$; $20^4 = 160\,000$; $20^5 = 3\,200\,000$

Como $20^4 = 160\,000 < 450\,000 < 3\,200\,000 = 20^5 \Rightarrow 4 < \log_{20} 450\,000 < 5$.

La parte entera de $\log_{20} 450\,000$ es 4.

h) $\log_{5,4} 900 = 4,0337$

$5,4^4 = 850,31$; $5,4^5 = 4\,591,7$

Como $5,4^4 = 850,31 < 900 < 4\,591,7 = 5,4^5 \Rightarrow 4 < \log_{5,4} 900 < 5$.

La parte entera de $\log_{5,4} 900$ es 4.

i) $log_2\ 3$ es un número decimal entre 1 y 2 ya que $2^1 = 2$ y $2^2 = 4$.

Con la calculadora: $log_2\ 3 = 1{,}58496$

j) $log_5\ 0{,}1$ es un número decimal entre –1 y –2 ya que $5^{-1} = 0{,}2$ y $5^{-2} = 0{,}04$.

Con la calculadora: $log_5\ 0{,}1 = -1{,}4307$

Página 43

3 **Si $log_5 A = 1{,}8$ y $log_5 B = 2{,}4$, calcula.**

a) $log_5\ 125AB^2$ **b)** $log_5 \dfrac{A}{25}$ **c)** $log_5 \dfrac{25A}{B}$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$ **e)** $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$ **f)** $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}}$

a) $log_5\ 125AB^2 = log_5\ 125 + log_5 A + log_5 B^2 = 3 + 1{,}8 + 2 \cdot 2{,}4 = 9{,}6$

b) $log_5 \dfrac{A}{25} = log_5 A - log_5\ 25 = 1{,}8 - 2 = -0{,}2$

c) $log_5 \dfrac{25A}{B} = log_5\ 25A - log_5 B = log_5\ 25 + log_5 A - 2{,}4 = 2 + 1{,}8 - 2{,}4 = -0{,}2$

d) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\ [2\ log_5 A - log_5\ 25 - log_5 B] = \dfrac{1}{3}\ [2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

e) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5\ 5 + \dfrac{3}{2}\ log_5 A - 2\ log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

f) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2}} = \dfrac{1}{3}\ log_5 \dfrac{\sqrt[3]{A^4}}{(5B)^2} = \dfrac{1}{3}\left(log_5 \sqrt[3]{A^4} - log_5 (5B)^2\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{3} log_5 A - 2\ log_5 5B\right) =$

$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{4}{3} \cdot 1{,}8 - 2\,(log_5 5 + log_5 B)\right] = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{7{,}2}{3} - 2\,(1 + 2{,}4)\right] = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{7{,}2 - 3 \cdot 6{,}8}{3}\right) = \dfrac{-13{,}2}{9}$

Página 44

4 ¿Qué te hace decir eso? **[La presentación de las evidencias para justificar la respuesta permite trabajar esta estrategia].**

Averigua la relación que hay entre x e y, sabiendo que se verifica:

$\boldsymbol{ln\ y = 2x - ln\ 5}$

$ln\ y = 2x - ln\ 5 \ \to\ ln\ y = ln\ e^{2x} - ln\ 5$

$ln\ y = ln \dfrac{e^{2x}}{5} \ \to\ y = \dfrac{e^{2x}}{5}$

5 **Determina si es cierta la siguiente igualdad e indica qué propiedad o propiedades has utilizado:**

$\boldsymbol{log\ e \cdot ln\ 10 = 1}$

Como $ln\ 10 = log_e\ 10$ y usando un cambio de base tenemos que:

$log_e\ 10 = \dfrac{log\,10}{log\,e} = \dfrac{1}{log\,e}$

Así: $log\ e \cdot ln\ 10 = log\,e \cdot \dfrac{1}{log\,e} = \dfrac{log\,e}{log\,e} = 1$

Página 45

1 **Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con ayuda de la tecla ln de la calculadora:**

a) $\log_2 1\,500$ **b)** $\log_5 200$

c) $\log_{100} 200$ **d)** $\log_{100} 40$

Para los ejercicios con calculadora, las explicaciones del libro han tomado como referencia el modelo fx-991spx II Iberia de Casio.

a) $\dfrac{\log 1500}{\log 2} = 10{,}55;\ 2^{10{,}55} \approx 1\,500$ b) $\dfrac{\log 200}{\log 5} = 3{,}29;\ 5^{3{,}29} \approx 200$

c) $\dfrac{\log 200}{\log 100} = 1{,}15;\ 100^{1{,}15} \approx 200$ d) $\dfrac{\log 40}{\log 100} = 0{,}80;\ 100^{0{,}80} \approx 40$

2 **¿Verdadero o falso? Utiliza tu calculadora.**

a) $\log_2 2 = \log_2 (2 \cdot 1) = \log_2 2 \cdot \log_2 1 = 1 \cdot 0 = 0$

b) $\frac{1}{2} \log 5 = \log 25$

c) La parte entera de $\log 500$ **es 2.**

d) La parte entera de $\log 0{,}05$ **es –1.**

e) $\log_2 (\log 10\,000) = 2$

f) $\log\ 3 = \dfrac{1}{\log_3 10}$

g) $\ln 0{,}25 = -2 \ln 2$

h) Si $\log_2 A^2 + \log_2 A^3 + \log_2 A^4 = 36$**, entonces** $A = 4$**.**

i) Si $\log_A 3 + \log_A 27 + \log_A 9 = 12$**, entonces** $A = \sqrt{3}$**.**

a) No es cierto ya que $\log_2 (2 \cdot 1) = \log_2 2 + \log_2 1$ y con la calculadora $\log_2 2 = 1$.

b) $\frac{1}{2}\log 5 = 0{,}3494 \neq 1{,}3979 = \log 25$

No es cierto. Además, usando las propiedades de los logaritmos sabemos que:

$\frac{1}{2}\log 5 = \log 5^{\frac{1}{2}} = \log \sqrt{5}$

$\log 25 = \log 5^2$ y vemos también que no son iguales.

c) Cierto ya que $10^2 = 100$ y $10^3 = 1\,000$. Con calculadora, $\log 500 = 2{,}6989$.

d) Cierto ya que:

$\log 0{,}05 = \log (5 \cdot 10^{-2}) = \log 5 + \log 10^{-2} = \log 5 - 2$

Además $\log 5$ está entre 0 y 1 ya que $10^0 = 1$ y $10^1 = 10$. Y con calculadora: $\log 0{,}05 = -1{,}3010$.

e) Cierto ya que $\log_2 (\log 10\,000) = \log_2 4 = 2$.

f) Con calculadora; 0,4771 = 0,4771. Vemos que es cierto. Además haciendo un cambio de base vemos que $\log_3 10 = \dfrac{\log 10}{\log 3} = \dfrac{1}{\log 3}$.

g) Con la calculadora: –1,3863 = –1,3863

h) Falso. Usando las propiedades de los logaritmos sabemos que:

$\log_2 A^2 + \log_2 A^3 + \log_2 A^4 = \log_2 (A^2 \cdot A^3 \cdot A^4) = \log_2 A^9 = 36$ por lo que $2^{36} = (2^4)^9 \neq 4^9$.

i) Falso. Usando las propiedades de los logaritmos sabemos que

$\log_A 3 + \log_A 27 + \log_A 9 = \log_A (3 \cdot 27 \cdot 9) = \log_A 3^6 = 12$ por lo que $A^{12} = (A^2)^6 = 3^6$ si $A = 3$.

3 **Si $log\, A = 1{,}45$; $log\, B = 2{,}3$ y $log\, C = 0{,}52$; calcula cada una de las siguientes expresiones:**

a) $log \dfrac{AB^2}{\sqrt[3]{C}}$

b) $log \dfrac{100A}{B^2 \sqrt[3]{10C^4}}$

c) $log \left(\dfrac{A}{10} \sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right)$

d) $log \dfrac{A \cdot \sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2}$

e) $log \left(10 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{0{,}1A^2}{10B}}\right)$

f) $\dfrac{1}{2} log \left(\dfrac{\sqrt[3]{C^4}}{(100A)^2}\right)^2$

a) $log\dfrac{AB^2}{\sqrt[3]{C}} = log AB^2 - log\sqrt[3]{C} = log A + log B^2 - \dfrac{1}{3} log C = 1{,}45 + 2 \cdot 2{,}3 + \dfrac{1}{3} \cdot 0{,}52 = 5{,}87\widehat{6}$

b) $log\dfrac{100A}{B^2\sqrt[3]{10C^4}}\, log 100A - \left(log B^2 + \dfrac{1}{3} log 10C^4\right) = log 100 + log A - 2\, log B - \dfrac{1}{3}(log 10 + log C^4) =$

$= 2 + 1{,}45 - 2 \cdot 2{,}3 - \dfrac{1}{3}(1 + 4 \cdot log C) = -1{,}15 - \dfrac{1}{3}(1 + 2{,}8) = -2{,}41\widehat{6}$

c) $log\left(\dfrac{A}{10}\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right) = log\dfrac{A}{10} + log\left(\sqrt[5]{\dfrac{B^2}{0{,}001C}}\right) = log A - log 10 + \dfrac{1}{5}(2\, log B - log\ 0{,}001C) =$

$= 1{,}45 - 1 + \dfrac{1}{5}\left[2 \cdot 2{,}3 - (log 0{,}001 + log C)\right] = 0{,}45 + \dfrac{1}{5}\left[4{,}6 - (log 10^{-3} + 0{,}52)\right] =$

$= 0{,}45 + \dfrac{1}{5}(4{,}6 + 3 - 0{,}52) = 1{,}866$

d) $log\dfrac{A\sqrt[3]{0{,}1C^4}}{(1\,000B)^2} = log A + log\sqrt[3]{0{,}1C^4} - log\left[(1\,000B)^2\right] = 1{,}45 + \dfrac{1}{3} log 0{,}1C^4 - 2\left(log 1\,000 + log B\right) =$

$= 1{,}45 + \dfrac{1}{3}(log 0{,}1 + 4\, log C) - 2(3 + 2{,}3) = 1{,}45 + \dfrac{1}{3}(-1 + 4 \cdot 0{,}52) - 2(3 + 2{,}3) = -9{,}39$

e) $log 10\sqrt[3]{\dfrac{0{,}1A^2}{10B}} = log 10 + \dfrac{1}{3}(log 0{,}1A^2 - log 10B) = 1 + \dfrac{1}{3}(log 0{,}1 + 2\, log A - log 10 - log B) =$

$= 1 + \dfrac{1}{3}(-1 + 2 \cdot 1{,}45 - 1 - 2{,}3) = 0{,}5\widehat{3}$

f) $\dfrac{1}{2} log\left(\dfrac{\sqrt[3]{C^4}}{100A^2}\right)^2 = log\sqrt[3]{C^4} - log[(100A)^2] = \dfrac{4}{3} log C - 2\left(log 100 + log A\right) = \dfrac{4}{3} \cdot 0{,}52 - 2(2 + 1{,}45) =$

$= -6{,}20\widehat{6}$

4 **Halla en cada caso el valor de A:**

a) $ln\, A + ln\, A^2 + ln\, A^3 = 6$

b) $log\, A^2 + log\, A^3 + log\, A^7 = 6$

c) $ln\, A^7 + ln\, A^9 + ln\, A^{14} = 330$

d) $log_A 27^3 + log_A 27^2 + log_A 27^4 + log_A 27^7 = 48$

e) $log_A 6^2 + log_A 6^3 + log_A 6^5 = 30$

f) $log_A 2^2 + log_A 0{,}5^3 + log_A 4^4 + log_A 0{,}25 = 10$

a) $ln\, A + ln A^2 + ln A^3 = 6 \to ln A^6 = 6 \to e^6 = A^6 \to e = A$

b) $log A^2 + log A^3 + log A^7 = 6 \to log A^{12} = 6 \to 10^6 = A^{12} \to A = \sqrt{10}$

c) $ln A^7 + ln A^9 + ln A^{14} = 330 \to ln A^{30} = 330 \to e^{330} = A^{30} \to e^{33} = A^3 \to\ e^{11^3} = A^3 \to A = e^{11}$

d) $log_A 27^3 + log_A 27^2 + log_A 27^4 + log_A 27^7 = 48 \to log_A 27^{16} = 48 \to A^{48} = 27^{16} \to A^{3^{16}} = 27^{16} \to A = \sqrt[3]{27}$

e) $log_A 6^2 + log_A 6^3 + log_A 6^5 = 30 \to log_A 6^{10} = 30 \to A^{30} = 6^{10} \to A^3 = 6 \to A = \sqrt[3]{6}$

f) $log_A 2^2 + log_A 0{,}5^3 + log_A 4^4 + log_A 0{,}25 = 10 \to log_A 4 + 3\, log_A 0{,}5 + 4\, log_A 4 + 2\, log_A 0{,}5 = 10 \to$

$\to 5\, log_A 4 + 5\, log_A 0{,}5 = 10 \to 5\, log_A (4 \cdot 0{,}5) = 10 \to log_A 2 = 2 \to A = \sqrt{2}$

5 ▸ EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS REALES. NÚMEROS APROXIMADOS

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) **CE 1.6.** (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) **CE 1.14.** (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.) **CE 2.1.** (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3-EA 2.1.4.)

Página 47

1 **[El enunciado requiere un análisis que permite que el alumnado trabaje la expresión escrita].**

¿Verdadero o falso?

I. El precio de esta vivienda es, aproximadamente, de 390 000 €, con un error menor que 10 000 €.

II. El precio del menú del día es, aproximadamente, de 12 €, con un error menor que 1 €.

En I el error absoluto es mucho mayor que en II, pero el error relativo es menor.

I. E.R. $< \dfrac{10000}{390000} = 2{,}5641 \cdot 10^{-2} = 0{,}025641 \to$ E.R. $< 2{,}6\,\%$

II. E.R. $< \dfrac{1}{12} = 8{,}3333 \cdot 10^{-2} = 0{,}08333 \to$ E.R. $< 8{,}3\,\%$

El error absoluto nos lo dicen y es mayor en I que en II. Hemos calculado el error relativo en cada caso y vemos que es verdadera la afirmación.

2 **Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:**

a) Daniel le dice a su hermana María que la superficie de su casa es de 96,4 m^2.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana unos 25 000 € al año.

a) E.A. $< 0{,}05$ m^2; E.R. $< \dfrac{0{,}05}{96{,}4} = 5{,}1867 \cdot 10^{-4} = 0{,}00051867 \to$ E.R. $< 0{,}05\,\%$

b) E.A. $< 0{,}5$ millones de horas = 500 000 horas

E.R. $< \dfrac{0{,}5}{37} < 0{,}014 \to 1{,}4\,\%$

c) Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 25 000, redondeando a los «miles de euros»), entonces:

E.A. $< 0{,}5$ miles de € = 500 €; E.R. $< \dfrac{0{,}5}{25} < 0{,}02 \to 2\,\%$

Si suponemos que es 25 000 € exactamente:

E.A. $< 0{,}5$ €; E.R. $< \dfrac{0{,}5}{25\,000} < 0{,}00002 \to 0{,}002\,\%$

Página 48

3 **Calcula en notación científica sin usar la calculadora.**

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

a) $(800\,000 : 0{,}0002) \cdot 0{,}5 \cdot 10^{12} = \left((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})\right) \cdot 5 \cdot 10^{11} =$

$= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21}$

b) $0{,}486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10{-9} - 6 \cdot 10^{-7} = 48{,}6 \cdot 10^{-7} + 0{,}93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} =$

$= 43{,}53 \cdot 10^{-7} = 4{,}353 \cdot 10^{-6}$

4 **Opera con la calculadora:**

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6})$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9}$

a) $(3{,}87 \cdot 10^{15} \cdot 5{,}96 \cdot 10^{-9}) : (3{,}941 \cdot 10^{-6}) \approx 5{,}85 \cdot 10^{12}$

b) $8{,}93 \cdot 10^{-10} + 7{,}64 \cdot 10^{-10} - 1{,}42 \cdot 10^{-9} = 2{,}37 \cdot 10^{-10}$

7 ▶ FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON

C.E.: CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.)

Página 51

1 **Desarrolla las siguientes potencias:**

a) $(x+3)^5$ **b)** $(2x-x^2)^4$ **c)** $\left(3x^2+\dfrac{x}{3}\right)^6$

d) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^6$ **e)** $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)^4$ **f)** $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5$

a) $(x+3)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 3 + \binom{5}{2}x^3\,3^2 + \binom{5}{3}x^2\,3^3 + \binom{5}{4}x \cdot 3^4 + \binom{5}{5}3^5 =$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

b) $(2x-x^2)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 - \binom{4}{1}(2x)^3 \cdot x^2 + \binom{4}{2}(2x)^2 \cdot (x^2)^2 - \binom{4}{3}2x \cdot (x^2)^3 + \binom{4}{4}(x^2)^4 =$

$= x^8 - 8x^7 + 24x^6 - 32x^5 + 16x^4$

c) $\left(3x^2+\dfrac{x}{3}\right)^6 = 729x^{12} + 486x^{11} + 135x^{10} + 20x^9 + \dfrac{5}{3}x^8 + \dfrac{2}{27}x^7 + \dfrac{1}{729}x^6$

d) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^6 = \binom{6}{0}\left(\dfrac{x}{2}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^5\left(\dfrac{1}{x}\right) + \binom{6}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + \binom{6}{3}\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^3 +$

$+ \binom{6}{0}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{x}\right)^4 + \binom{6}{5}\left(\dfrac{x}{2}\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)^5 + \binom{6}{6}\left(\dfrac{1}{x}\right)^6 =$

$= \dfrac{15}{4x^2} + \dfrac{15}{16}x^2 + \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{3}{16}x^4 + \dfrac{1}{x^6} + \dfrac{1}{64}x^6 + \dfrac{5}{2}$

e) $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)^4 = \dfrac{1}{16}x^8 + \dfrac{1}{4}x^5 + \dfrac{3}{8}x^2 + \dfrac{1}{4}x^{-1} + \dfrac{1}{16}x^{-4}$

f) $\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x^2}\right)^5 = \dfrac{1}{243}x^5 + \dfrac{5}{27}x^2 + \dfrac{10}{3}x^{-1} + 30x^{-4} + 135x^{-7} + 243x^{-10}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 52

1. Intervalos y valor absoluto

Hazlo tú

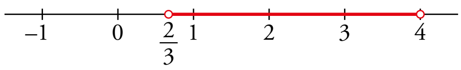
- **¿Para qué valores de x se verifica $|3x - 7| < 5$?**

  Seguimos el razonamiento del apartado a) del ejercicio 1 de esta página:

  $3x - 7 < 5 \;\to\; x < 4$

  $3x - 7 > -5;\;\; 3x > -2 \;\to\; x > \dfrac{2}{3}$

  Los valores que verifican la expresión son los del intervalo $\left(\dfrac{2}{3}, 4\right)$.



2. Propiedades del número áureo

Hazlo tú

- **Prueba que $\phi = 1 + \dfrac{1}{\phi}$.**

  $1 + \dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\phi + 1}{\phi}$

  Aplicando lo demostrado en 2a), que indica que $\phi^2 = 1 + \phi$:

  $\dfrac{\phi + 1}{\phi} = \dfrac{\phi^2}{\phi} = \phi$

3. Demostraciones con radicales

Hazlo tú

- **Prueba: $\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right) = 2$**

  Aplicando lo demostrado en 3a) y 3b):

  $\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right) = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{2})^3}\;\sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3}$

  Por lo tanto la raíz cúbica se compensa con el cubo:

  $(2 + \sqrt{2})\,(2 - \sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2 = 2$

Página 53

4. Racionalización de denominadores

Hazlo tú

- **Racionaliza:** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(2\sqrt{3}+3)}$

Multiplicamos por $\sqrt{2}$ numerador y denominador:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}+3\right)}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}+3\right)}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\left(2\sqrt{3}+3\right)}$$

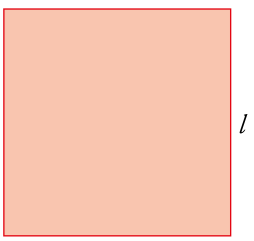
Ahora multiplicamos por el binomio conjugado del denominador:

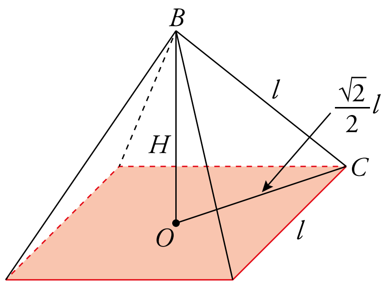
$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\left(2\sqrt{3}+3\right)}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}\left(2\sqrt{3}-3\right)}{2\left(2\sqrt{3}+3\right)\left(2\sqrt{3}-3\right)}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{3}-3\sqrt{2}\sqrt{3}}{2\left(4\cdot 3-9\right)}=\frac{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{6}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

5. Problemas con radicales

Hazlo tú

- **El volumen de una pirámide cuadrangular regular cuyas caras laterales son triángulos equiláteros es $\dfrac{256}{3}\sqrt{2}$ cm^3. Halla la longitud de su arista.**





La arista de la cara triangular es igual a la arista de la base.

$$V_{Pirámide}=\frac{1}{3}A_{base}\cdot H=\frac{1}{3}l^2\cdot H=\frac{256}{3}\sqrt{2}$$

La distancia $\overline{OC}$ es la mitad de la diagonal del cuadrado $\overline{OC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$.

La arista es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura H y el lado $\overline{OC}$.

Por ser la arista igual al lado de la base, $H^2=l^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2=\dfrac{1}{2}l^2$

$$V_{Pirámide}=\frac{1}{3}l^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}l=\frac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3$$

Por tanto, $\dfrac{1}{6}\sqrt{2}\,l^3=\dfrac{256}{3}\sqrt{2}\ \Rightarrow\ l^3=256\cdot 2=512\ \Rightarrow\ l=\sqrt[3]{512}=8$

6. Logaritmos. Propiedades

Hazlo tú

- **Calcula x en estos casos:**

a) $\log_7 x = -2$

b) $\ln 3^{x-1} = 5$

c) $2 \log x - \log 4 = 2 \log 3$

a) $\log_7 x = -2$

Usamos la definición de logaritmo: 2 es el exponente que tiene que tener la base 7, para que nos dé x:

$x = 7^{-2}$; $x = \frac{1}{49}$

b) $\ln 3^{x-1} = 5$

Aplicamos la propiedad de los logaritmos: $\log_a m^n = n\log_a m$.

$$(x-1)\ln 3 = 5 \to x - 1 = \frac{5}{\ln 3} \to x = \frac{5}{\ln 3} + 1 \to x = 5{,}5512$$

c) $2\log x - \log 4 = 2\log 3$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos:

$\log x^2 - \log 4 = \log 3^2$

$\log \frac{x^2}{4} = \log 9$; $\frac{x^2}{4} = 9$

Soluciones: $x = -6$, $x = 6$

Pero como no se pueden tomar logaritmos de números negativos, la única solución válida es $x = 6$.

Página 54

7. Logaritmos. Demostración de propiedades

Hazlo tú

- **Demuestra:** $\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$

$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q$

Llamamos $\log_a P = x$; $\log_a Q = y$

Expresamos P y Q como potencias usando la definición de logaritmo:

$P = a^x$; $Q = a^y$

Demostración:

$$\log_a \frac{P}{Q} = \log_a \frac{a^x}{a^y} = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a P - \log_a Q$$

9. Factoriales y números combinatorios

Hazlo tú

- **Calcula m sabiendo que $\binom{m}{2} = 3!$.**

$\binom{m}{2} = 3!$

$$\frac{m(m-1)}{2 \cdot 1} = 3 \cdot 2 \cdot 15; \; m^2 - m - 12 = 0; \; m = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \begin{cases} m = 4 \\ m = -3 \end{cases}$$

Como m tiene que ser positivo, $m = 4$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.)

Página 55

1. Simplificación de radicales

- **Simplificar las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{3}}{\sqrt{108}}}}$ **b)** $\sqrt{4a^2cd+8abcd+4b^2cd}$

a) $\sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{2^2 3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 3^3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{6\sqrt{3}}}} = \sqrt{3\sqrt{\dfrac{1}{6}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{3^2}{6}}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2}{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2}{3\cdot 2}} = \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}$

b) $\sqrt{4a^2cd+8abcd+4b^2cd} = \sqrt{4cd(a^2+2ab+b^2)} = 2(a+b)\sqrt{cd}$

2. Notación científica

- **Calcular en notación científica sin usar la calculadora y expresar el resultado con tres cifras significativas.**

$$\frac{\mathbf{13{,}3\cdot 10^3-0{,}072\cdot 10^5}}{\mathbf{0{,}85\cdot 10^{-3}-3{,}2\cdot 10^{-4}-4{,}5\cdot 10^{-5}}}$$

$$\frac{13{,}3\cdot 10^3-0{,}072\cdot 10^5}{0{,}85\cdot 10^{-3}-3{,}2\cdot 10^{-4}-4{,}5\cdot 10^{-5}} = \frac{10^3}{10^{-4}}\left(\frac{13{,}3-7{,}2}{8{,}5-3{,}2-0{,}45}\right) = 10^7\,\frac{6{,}1}{4{,}85} = 1{,}26\cdot 10^7$$

3. Cálculo del perímetro con radicales

- **En un trapecio rectángulo, la base menor mide $4-\sqrt{5}$ cm, la base mayor, $7+2\sqrt{5}$ cm y la altura, $4(1+\sqrt{5})$ cm. Hallar el perímetro del trapecio, utilizando radicales.**

Calculamos primero x:

$7+2\sqrt{5}-(4-\sqrt{5}) = x \to x = 3(1+\sqrt{5})$

Calculamos ahora l usando el teorema de Pitágoras:

$l^2 = x^2+h^2 = \left[3(1+\sqrt{5})\right]^2 + [4(1+\sqrt{5})]^2 = 9(1+\sqrt{5})^2 + 16(1+\sqrt{5})^2 = 25(1+\sqrt{5})^2$

Por lo tanto, $l = 5(1+\sqrt{5})$.

Solamente nos queda calcular el perímetro sumando los lados del trapecio:

$P = 7+2\sqrt{5}+(4-\sqrt{5})+4(1+\sqrt{5})+5(1+\sqrt{5}) = 10(2+\sqrt{5})$ cm

4. Propiedades de los logaritmos

- **Simplificar esta expresión y hallar su parte entera:** $\dfrac{1}{\log_{1/3}\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{\log_{1/5}\frac{1}{2}}$

Usando la propiedad indicada transformamos las fracciones, y luego aplicamos la propiedad 4:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3} + \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15}$$

Como $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} = 3$ y $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16} = 4$, la parte entera que buscamos es 3.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 56

Para practicar

Números racionales e irracionales

1 **Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, pertenecen:**

$$5;\ -7;\ \frac{5}{4};\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ 4,\widehat{7};\ \frac{\pi}{2}$$

$5, \sqrt{\frac{18}{2}} \in \mathbb{N}$ $\quad 5, \sqrt{\frac{18}{2}}, -7 \in \mathbb{Z}$ $\quad 5;\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7} \in \mathbb{Q}$ $\quad 5;\ \sqrt{\frac{18}{2}};\ -7;\ \frac{5}{4};\ 4,\widehat{7};\ -\sqrt{3};\ \sqrt[3]{-5};\ \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

2 **¿Cuáles de estos números son irracionales? Expresa como fracción los que sea posible:**

a) $3,181818...$ **b)** $\sqrt{1,\widehat{7}}$ **c)** $\sqrt{8}$ **d)** $1,020020002...$

e) $-4,0333...$ **f)** $\sqrt[3]{81}$ **g)** $1,3999...$ **h)** 2π

a) $3,181818... = \frac{318-3}{99} = \frac{315}{99} = \frac{35}{11}$

b) $\sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{17-1}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

c) $\sqrt{8}$ Irracional.

d) $1,020020002...$ Irracional.

e) $-4,0333... = -\frac{403-40}{90} = -\frac{121}{30}$

f) $\sqrt[3]{81}$ Irracional.

g) $1,3999... = \frac{139-13}{90} = \frac{7}{5}$

h) 2π Irracional.

3 **Indica el conjunto mínimo ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$) al que pertenece cada uno de los siguientes números:**

$$\sqrt{3};\ -\sqrt{121};\ 3,\widehat{17};\ \sqrt{0,81};\ 0,1234...;\ \sqrt[3]{125}$$

$\sqrt{3} \in \mathbb{I}$

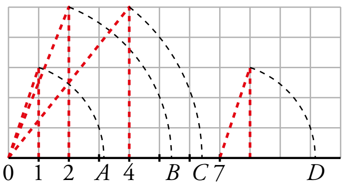
$-\sqrt{121} = -\sqrt{11^2} = -11 \in \mathbb{Z}$

$3,1\widehat{7} \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{0,81} = \sqrt{0,9^2} = 0,9 \in \mathbb{Q}$

$0,1234 ... \in \mathbb{I}$

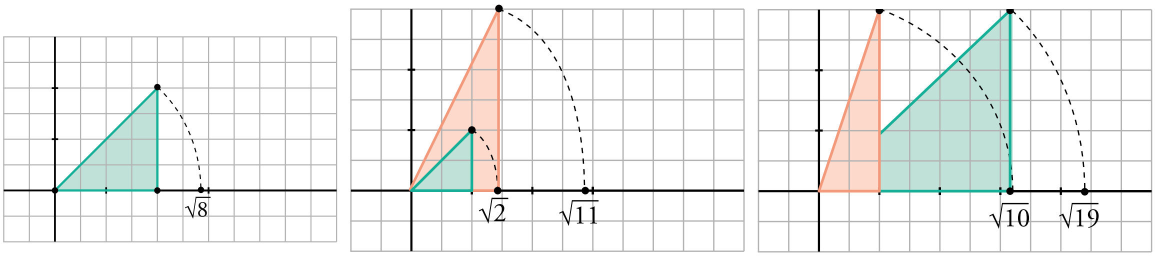
$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \in \mathbb{N}$

4 

¿Qué números irracionales representan los puntos A, B, C y D? Justifica la respuesta.

$A = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\quad B = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ $\quad C = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ $\quad D = 7 + \sqrt{1^2+3^2} = 7 + \sqrt{10}$

5 **Representa los siguientes números sobre la recta real: $\sqrt{8}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{19}$**



Intervalos, semirrectas y valor absoluto

6 **Representa gráficamente y expresa como intervalo o como semirrecta los números que cumplen la condición dada en cada caso.**

a) ***x*** **es menor que –5.**

b) 3 es menor o igual que ***x*****.**

c) ***x*** **está comprendido entre –5 y 1.**

d) ***x*** **está entre –2 y 0, ambos incluidos.**

e) ***x*** **es mayor o igual que –3 y menor que 2.**

a) $x < -5$; $(-\infty, -5)$ b) $3 \le x$; $[3, +\infty)$ c) $-5 < x < 1$; $(-5, 1)$

d) $-2 \le x \le 0$; $[-2, 0]$ e) $[-3, 2)$; $-3 \le x < 2$

7 **Escribe la desigualdad que verifica todo número** ***x*** **que pertenece a estos intervalos o semirrectas:**

a) $[-2, 7]$ **b)** $[13, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 0)$

d) $(-3, 0]$ **e)** $[3/2, 6)$ **f)** $(0, +\infty)$

a) $-2 \le x \le 7$ b) $x \ge 13$ c) $x < 0$

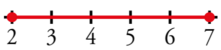
d) $-3 < x \le 0$ e) $\dfrac{3}{2} \le x < 6$ f) $0 < x < +\infty$

8 **Escribe y representa el tramo de recta que corresponde a cada desigualdad.**

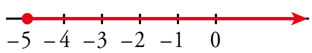
a) $2 \le x \le 7$ **b)** $-5 \le x$

c) $x < -1$ **d)** $5 > x > -3$

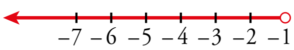
a)



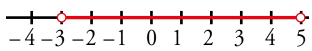
b)



c)



d)



9 **Expresa como un único intervalo.**

a) $[-3, 2] \cap [0, 5]$ **b)** $[2, +\infty) \cap (0, 10)$

c) $(1, 6] \cap [2, 7)$ **d)** $[-1, 3) \cap (0, 4)$

a) $[0, 2]$ b) $[2, 10)$

c) $[2, 6]$ d) $(0, 3)$

10 **Expresa en cada caso $A \cap B$ y $A \cup B$.**

a) $A = [-3, 6]$ $\quad$ $B = (2, +\infty)$

b) $A = [0;\, 2{,}5)$ $\quad$ $B = (-\infty, 4)$

c) $A = (-\infty, -2)$ $\quad$ $B = (-2, +\infty)$

a) $A \cap B = (2, 6]$ $\quad$ $A \cup B = (-3, +\infty)$

b) $A \cap B = [0;\, 2{,}5)$ $\quad$ $A \cup B = (-\infty;\, 2{,}5)$

c) $A \cap B = \varnothing$ $\quad$ $A \cup B = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

11 **Expresa estos conjuntos en forma de intervalo:**

a) $|x| < 7$ $\quad$ **b)** $|x| \geq 5$ $\quad$ **c)** $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \leq 6$ $\quad$ **e)** $|x + 2| > 9$ $\quad$ **f)** $|x - 5| \geq 1$

a) $(-7, 7)$ $\quad$ b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty]$ $\quad$ c) $(-4, 4)$

d) $[-5, 7]$ $\quad$ e) $(-11, 7)$ $\quad$ f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

12 **Escribe mediante intervalos los posibles valores de x para que se pueda calcular la raíz en cada caso.**

a) $\sqrt{x-4}$ $\quad$ **b)** $\sqrt{2x+1}$ $\quad$ **c)** $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3-2x}$ $\quad$ **e)** $\sqrt{-x-1}$ $\quad$ **f)** $\sqrt{1+\dfrac{x}{2}}$

a) $x - 4 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 4;\;\; [4, +\infty)$

b) $2x + 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; 2x \geq -1 \;\Rightarrow\; x \geq -\dfrac{1}{2};\;\; \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right]$

c) $-x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 0;\;\; (-\infty, 0]$

d) $3 - 2x \geq 0 \;\Rightarrow\; 3 \geq 2x \;\Rightarrow\; x \leq ;\;\; \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$

e) $-x - 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; -1 \geq x;\;\; (-\infty, -1]$

f) $1 + \dfrac{x}{2} \geq 0 \;\Rightarrow\; 2 + x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq -2;\;\; [-2, +\infty)$

13 **Se denomina entorno de centro a y radio r al intervalo abierto $(a - r, a + r)$.**

a) Describe como entorno el intervalo $I = (-3, 5)$. Ten en cuenta que el centro es el punto medio entre –3 y 5 y el radio la distancia del centro a uno de sus extremos.

b) Expresa como intervalo el entorno de centro –5,2 y radio 0,8

a) Es el entorno de centro $a = 1$ y radio $r = 4$.

b) $I = (-6;\, 4{,}4)$

14 **Escribe en forma de intervalo los siguientes entornos:**

a) Centro –1 y radio 2

b) Centro 2 y radio 1/3

a) $(-1 - 2, -1 + 2) = (-3, 1)$

b) $\left(2 - \dfrac{1}{3}, 2 + \dfrac{1}{3}\right) = \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

15 **Describe como entornos los siguientes intervalos:**

a) $(-1, 2)$ **b)** $(1{,}3; 2{,}9)$ **c)** $(-2{,}2; 0{,}2)$ **d)** $(-4; -2{,}8)$

a) $C = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$; $R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\rightarrow$ Entorno de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{3}{2}$.

b) $C = \frac{1{,}3+2{,}9}{2} = 2{,}1$; $R = 2{,}9 - 2{,}1 = 0{,}8$ $\rightarrow$ Entorno de centro 2,1 y radio 0,8.

c) $C = \frac{-2{,}2+0{,}2}{2} = -1$; $R = 0{,}2 - (-1) = 1{,}2$ $\rightarrow$ Entorno de centro -1 y radio 1,2.

d) $C = \frac{-4+(-2{,}8)}{2} = -3{,}4$; r = $-2{,}8 - (-3{,}4) = 0{,}6$ $\rightarrow$ Entorno de centro $-3{,}4$ y radio 0,6.

Radicales y potencias

16 **Reduce a índice común y ordena de menor a mayor.**

a) $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[5]{10}$ **d)** $\sqrt[4]{20}$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{5^3}$, $\sqrt[12]{3^4}$, $\sqrt[12]{2^6}$; $\sqrt[12]{125}$; $\sqrt[12]{81}$; $\sqrt[12]{64}$ $\rightarrow$ $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[6]{216}$, $\sqrt[6]{16}$ $\rightarrow$ $\sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776}$, $\sqrt[20]{10\,000}$ $\rightarrow$ $\sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{20^3}$, $\sqrt[12]{9^4}$, $\sqrt[12]{100^2}$; tenemos $\sqrt[12]{10\,000}$; $\sqrt[12]{6561}$; $\sqrt[12]{8000}$ $\rightarrow$ $\sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{20}$

17 **Saca del radical los factores que puedas.**

a) $\sqrt[3]{8a^5}$ **b)** $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$ **c)** $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}$

d) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$ **e)** $\sqrt{4a^2+4}$ **f)** $\sqrt{\frac{a}{9}+\frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$ b) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4}\sqrt{\frac{5}{b}}$

c) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13}$ d) $\frac{4}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$

e) $\sqrt{4(a^2+1)} = 2\sqrt{a^2+1}$ f) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$

18 **Simplifica los siguientes radicales:**

a) $\sqrt[12]{64y^3}$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$ **c)** $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

d) $\sqrt[6]{0{,}027}$ **e)** $\sqrt[8]{0{,}0016}$ **f)** $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

b) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{3}{\sqrt{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

c) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

d) $\sqrt[6]{0{,}027} = \sqrt[6]{10^{-3}3^3} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

e) $\sqrt[8]{0{,}0016} = \sqrt[8]{10^{-4}2^4} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt{\frac{2}{10}}$

f) $\sqrt[4]{1+\frac{9}{16}} = \sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{2^4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

19 **Reduce a índice común y simplifica.**

a) $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{8}$ **c)** $\sqrt[7]{81}\cdot\sqrt{3}$

a) $\dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{4^2}} = \dfrac{\sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{16}} = 1$

b) $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{8} = \sqrt[15]{4^5}\sqrt[15]{8^3} = \sqrt[15]{2^{10}\cdot 2^9} = \sqrt[15]{2^{19}} = 2\sqrt[15]{2^4} = 2\sqrt[15]{2^4} = 2\sqrt[15]{16}$

c) $\sqrt[7]{81}\sqrt[2]{3} = \sqrt[14]{3^8\cdot 3^7} = \sqrt[14]{3^{15}} = 3\sqrt[14]{3}$

20 **Expresa con una única raíz.**

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$ **b)** $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$ **c)** $\left(\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[5]{a^4}\right):\sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4\cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\dfrac{a^{15}\cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}$

Página 57

21 **Efectúa y simplifica, si es posible.**

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{a^2}}\cdot\sqrt{a}$

c) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$ **d)** $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}:\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

a) $\sqrt[6]{2^2\cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt{a} = \sqrt[6]{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2^{12}}} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2^2\cdot 3}}:\sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[6]{2^2\cdot 3}:\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

22 **Completa en tu cuaderno los exponentes que faltan:**

$$\frac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a^{\square}\cdot a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^{\square}\cdot a^2}}} = \frac{a^{\square/\square}}{a^{\square/\square}} = a^{\square/\square}$$

$$\frac{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a^4\cdot a}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3\cdot a^2}}} = \frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{5}{12}}} = a^{\frac{5}{12}}$$

23 **Expresa en forma de potencia de exponente fraccionario.**

a) $\left(4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right):(2\sqrt[4]{4})$ **b)** $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2}$

c) $\sqrt[4]{4^{-1}}\cdot\sqrt[6]{18}\cdot\sqrt[8]{12}$ **d)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

a) $\left(4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right):\left(2\sqrt[4]{4}\right) = 2\cdot\dfrac{4^{\frac{-1}{3}}}{4^{\frac{1}{4}}} = 2\cdot 4^{\frac{-7}{12}} = 2^{\frac{-1}{6}}$

b) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{-1}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

c) $\sqrt[4]{4^{-1}}\cdot\sqrt[6]{18}\cdot\sqrt[8]{12} = 2^{\frac{-2}{4}}\cdot(2\cdot 3^2)^{\frac{1}{6}}\cdot(2^2\cdot 3)^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{-1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{2}{8}}\cdot 3^{\frac{2}{6}+\frac{1}{8}} = 2^{\frac{-1}{12}}\cdot 3^{\frac{11}{24}} = \left(\dfrac{3^{\frac{11}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$

d) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2\sqrt{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{2\cdot 2^{\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{7}{8}}$

24 **Calcula y simplifica.**

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}+\frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $-\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{150}+\sqrt{294}$

a) $25\sqrt{5}+18\sqrt{5}-14\sqrt{5}+6\sqrt{5}=35\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{2^4}+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2\cdot 3^3}-\frac{21}{5}\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=2\sqrt[3]{2}+7\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-\frac{21}{5}\cdot 5\sqrt[3]{2}=-15\sqrt[3]{2}$

c) $-\sqrt{2\cdot 3^3}+3\sqrt{2^3\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 3\cdot 5^2}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 7^2}=-3\sqrt{2\cdot 3}+2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}-5\sqrt{2\cdot 3}+7\sqrt{2\cdot 3}=5\sqrt{6}$

25 **Simplifica las siguientes expresiones:**

a) $\sqrt{18}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{72}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{125}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{81a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2^2\cdot 3}-\sqrt{3^3}+\sqrt{2^3\cdot 3^2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+6\sqrt{2}=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}}-4\sqrt{\frac{2\cdot 3^2}{5^3}}+\frac{7}{2}\sqrt{\frac{2^3}{3^2\cdot 5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-4\frac{3}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{2}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}-\frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{7}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$=\left(1-\frac{12}{5}+\frac{7}{3}\right)\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{14}{15}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $\frac{7}{5}\sqrt[3]{3^4a}-2\sqrt[3]{3a^4}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\frac{7}{5}3\sqrt[3]{3a}-2a\sqrt[3]{3a}-\frac{\sqrt[3]{3a}}{5}=\left(\frac{21}{5}-2a-\frac{1}{5}\right)\sqrt[3]{3a}=(4-2a)\sqrt[3]{3a}$

26 **Racionaliza y simplifica.**

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{1}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$

f) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}$

a) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3^2}}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{6}-2}{3\cdot 2}=\frac{2(\sqrt{6}-1)}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt{6}-1}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2^2\cdot 3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(3-5)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-4}=-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\frac{3(\sqrt{5}+2)}{5-4}=3(\sqrt{5}+2)=3\sqrt{5}+6$

e) $\frac{13\sqrt{10}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}=\frac{13\sqrt{10}(\sqrt{5}+3\sqrt{2})}{5-9\cdot 2}=\frac{65\sqrt{2}+78\sqrt{5}}{-13}=-5\sqrt{2}-6\sqrt{5}$

f) $\frac{(3\sqrt{6}+2\sqrt{2})(3\sqrt{3}-2)}{(3\sqrt{3}+2)(3\sqrt{3}-2)}=\frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\frac{9\sqrt{2\cdot 3^2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{27\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\frac{23\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

27 **Racionaliza y simplifica.**

a) $\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt{50}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}(3-\sqrt{2})}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}}$

e) $\dfrac{5\sqrt{8}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}(\sqrt{8}-2)}$ f) $\dfrac{3}{7-\sqrt{5}}-\dfrac{10}{\sqrt{5}}$

a) $\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{6}-4\sqrt{18}}{36-12}=\dfrac{12-12\sqrt{2}}{24}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{50}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{-2\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{-2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{-2\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\dfrac{-10\sqrt{10}+10}{18}=10\cdot\dfrac{(1-\sqrt{10})}{18}=\dfrac{5(1-\sqrt{10})}{9}$

c) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}\cdot(-3\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{-3\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{-3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{2}\sqrt[3]{3^2}}{6}$

e) $\dfrac{5\sqrt{8}-\sqrt{18}}{\sqrt{2}(\sqrt{8}-2)}=\dfrac{10\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}(2\sqrt{2}-2)}=\dfrac{7\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\dfrac{28\sqrt{2}+28}{16-8}=\dfrac{7\sqrt{2}+7}{2}$

f) $\dfrac{3}{7-\sqrt{5}}-\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}-70+10\sqrt{5}}{\sqrt{5}(7-\sqrt{5})}=\dfrac{13\sqrt{5}-70}{7\sqrt{5}-5}\cdot\dfrac{7\sqrt{5}+5}{7\sqrt{5}+5}=\dfrac{455+65\sqrt{5}-490\sqrt{5}-350}{49\cdot 5-25}=$

$=\dfrac{105-425\sqrt{5}}{220}=\dfrac{21-85\sqrt{5}}{44}$

28 **Compara los números dados utilizando sus cuadrados:**

a) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ y $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$ b) $\sqrt{5}-1$ y $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

a) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=3+2\sqrt{3}\sqrt{5}+5=8+2\sqrt{15} \rightarrow \sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}$

b) $(\sqrt{5}-1)^2=5-2\sqrt{5}+1=6-2\sqrt{5} \rightarrow \sqrt{5}-1=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

29 **Simplifica $\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}$.**

* ***Eleva al cuadrado.***

Veamos que $\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}=\sqrt{2}$.

$\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2=7+\sqrt{13}-2\sqrt{7+\sqrt{13}}\sqrt{7-\sqrt{13}}+7-\sqrt{13}=14-2\sqrt{49-13}=14-12=2 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}=\sqrt{2}$

Logaritmos

30 **Expresa como potencia de la base y calcula aplicando la definición de logaritmo.**

a) $\log_2 1024$ b) $\log 0{,}001$ c) $\log_2 \dfrac{1}{64}$

d) $\log_{\sqrt{3}} 3$ e) $\log_3 \sqrt{3}$ f) $\log_2 \sqrt{8}$

g) $\log_{1/2} \dfrac{2}{\sqrt{2}}$ h) $\log_\pi 1$ i) $\ln \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

a) $\log_2 2^{10}=10$ b) $\log 10^{-3}=-3$ c) $\log_2 2^{-6}=-6$

d) $\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^2=2$ e) $\log_3 3^{1/2}=\dfrac{1}{2}$ f) $\log_2 2^{3/2}=\dfrac{3}{2}$

g) $\log_{1/2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1/2}=-\dfrac{1}{2}$ h) 0 i) $\ln e^{-1/3}=-\dfrac{1}{3}$

31 **Calcula la base de estos logaritmos:**

a) $\log_x 125 = 3$ **b)** $\log_x \frac{1}{9} = -2$ **c)** $\log_x \frac{1}{4} = 2$

d) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ **e)** $\log_x 0{,}04 = -2$ **f)** $\log_x 4 = -\frac{1}{2}$

a) $x^3 = 125 \to x = 5$ b) $x^{-2} = \frac{1}{9} \to x = 3$ c) $x^2 = \frac{1}{4} \to x = \frac{1}{2}$

d) $x^{1/2} = 2 \to x = 4$ e) $x^{-2} = 0{,}04 \to x = 5$ f) $x^{-1/2} = 4 \to x = \frac{1}{16}$

32 **Calcula el valor de x en estas igualdades:**

a) $\log 3^x = 2$ **b)** $\log x^2 = -2$ **c)** $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$ **e)** $\log_7 3x = 0{,}5$ **f)** $3^{2+x} = 172$

a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4{,}19$ b) $2\log x = -2 \to x = \frac{1}{10}$ c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2{,}438$

d) $x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0{,}683$ e) $7^{0{,}5} = 3x \to x = \frac{\sqrt{7}}{3}$ f) $2 + x = \log_3 172 \to x = \log_3 172 - 2$

33 **Si $\log k = x$, escribe en función de x.**

a) $\log 100k$ **b)** $\log \frac{k}{1\,000}$

c) $\log k^3$ **d)** $\log \sqrt[3]{10k}$

e) $\log \frac{1}{k}$ **f)** $(\log k)^{1/2}$

a) $\log 100 + \log k = 2 + x$ b) $\log k - \log 1\,000 = x - 3$

c) $3\log k = 3x$ d) $\frac{1}{3}(\log 10 + \log k) = \frac{1}{3}(1 + x)$

e) $\log 1 - \log k = 0 - x = -x$ f) $\sqrt{x}$

34 **Averigua, en cada caso, la relación entre x, y, z.**

a) $\log z = 2 - \log x - \frac{1}{2}\log y$

b) $\log z = 1 - \frac{1}{2}(\log x - \log y)$

c) $\ln z = 1 - 2\ln x + 2\ln y$

a) $\log z = \log 10^2 - \log x - \log \sqrt{y}$; $\log z = \log \frac{100}{x\sqrt{y}}$; $z = \frac{100}{x\sqrt{y}}$

b) $\log z = \log 10 - \frac{1}{2}\log \frac{x}{y}$; $\log z = \log 10 - \log\sqrt{\frac{x}{y}}$; $\log z = \log \frac{10}{\sqrt{\frac{x}{y}}}$; $z = \frac{10\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

c) $\ln z = \ln e - \ln x^2 + \ln y^2$; $\ln z = \ln \frac{e \cdot y^2}{x^2}$; $z = \frac{e \cdot y^2}{x^2}$

35 **Calcula x en cada caso.**

a) $35 = 21 \cdot 1{,}04^x$ **b)** $1{,}5 \cdot 10^{12} = 2^{-10x}$

c) $\log_x 0{,}3 = 2 - \log_x 2$ **d)** $\ln 5x + \ln \frac{x}{2} = 1$

a) Dividimos ambos miembros de la ecuación entre 21 y simplificamos:

$$\frac{35}{21} = 1{,}04^x \to \frac{5}{3} = 1{,}04^x$$

Aplicamos logaritmo a cada miembro de la ecuación para poder despejar la x, y luego sus propiedades:

$$\log \frac{5}{3} = \log(1{,}04^x) = x\log 1{,}04 \to \frac{\log \frac{5}{3}}{\log 1{,}04} = x$$

Con la calculadora aproximamos x con 4 cifras significativas $x = 13{,}02$.

b) $log\,1{,}5 + log\,10^{12} = -10x\,log\,2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{log\,1{,}5 + log\,10^{12}}{-10\,log\,2}$

c) $log_x 0{,}3 + log_x 2 = 2 \;\rightarrow\; log_x (0{,}3 \cdot 2) = 2 \;\rightarrow\; log_x 0{,}6 = 2 \;\rightarrow\; x^2 = 0{,}6 \;\rightarrow\; x = \sqrt{0{,}6}$

d) $ln\dfrac{5x^2}{2} = 1 \;\rightarrow\; e^1 = \dfrac{5x^2}{2} \;\rightarrow\; x = \sqrt{(2e)/5}$

36 **Calcula la parte entera de las siguientes expresiones:**

a) $\dfrac{1}{log_{18} 20} + \dfrac{1}{log_{25} 20}$ **b)** $\dfrac{1}{log_{1/2}\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{log_{1/5}\frac{1}{3}}$

* ***Fíjate en el ejercicio guiado 4.***

a) $\dfrac{1}{log_{18} 20} + \dfrac{1}{log_{25} 20} = log_{20} 18 + log_{20} 25 = log_{20} 450$

Dado que $20^2 = 400$, la parte entera es 2.

b) $\dfrac{1}{log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}} = log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{10}$

Dado que $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$, la parte entera es 2

37 **Halla con la calculadora y comprueba el resultado mediante potenciación.**

a) $log\,\sqrt{148}$ **b)** $ln\,(2{,}3 \cdot 10^{11})$ **c)** $ln\,(7{,}2 \cdot 10^{-5})$

d) $log_3 42{,}9$ **e)** $log_5 1{,}95$ **f)** $log_2 0{,}034$

a) 1,085

b) $ln\,(2{,}3 \cdot 10^{11}) \approx 26{,}16 \;\rightarrow\; e^{26{,}161} \approx 2{,}3 \cdot 10^{11}$

c) $ln\,(7{,}2 \cdot 10^{-5}) \approx -9{,}54 \;\rightarrow\; e^{-9{,}54} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-5}$

d) $3{,}42 \;\rightarrow\; 3^{3{,}42} \approx 42{,}9$

e) $0{,}41 \;\rightarrow\; 5^{0{,}41} \approx 1{,}95$

f) $-4{,}88 \;\rightarrow\; 2^{-4{,}88} \approx 0{,}034$

38 **Desarrolla las siguientes expresiones:**

a) $log\,\dfrac{a^2\,\sqrt[5]{b^3}}{100c^4}$ **b)** $ln\,\dfrac{\sqrt[4]{x^3} \cdot e^5}{\sqrt{y}}$

a) $log\,a^2\,\sqrt[5]{b^3} - log\,100c^4 = log\,a^2 + log\sqrt[5]{b^3} - log\,10^2 - log\,c^4 = 2log\,a + \dfrac{3}{5}log\,b - 2 - 4log\,c$

b) $ln\dfrac{\sqrt[4]{x^3}\,e^5}{\sqrt{y}} = ln\sqrt[4]{x^3}\,e^5 - ln\sqrt{y} = ln\sqrt[4]{x^3} + ln\,e^5 - ln\sqrt{y} = \dfrac{3}{4}ln\,x + 5 - \dfrac{1}{2}ln\,y$

Página 58

Errores y notación científica

39 **Acota el error que se comete al tomar 1,62 como aproximación del número de oro ϕ.**

E.A. = $|1{,}618033\ldots - 1{,}62| < 0{,}003$

E.R. < 0,003/1,62 = 0,0019

40 **Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.**

a) $\dfrac{(3{,}12 \cdot 10^{-5} + 7{,}03 \cdot 10^{-4})\,8{,}3 \cdot 10^{8}}{4{,}32 \cdot 10^{3}}$

b) $\dfrac{(12,5\cdot 10^7-8\cdot 10^9)\,(3,5\cdot 10^{-5}+185)}{9,2\cdot 10^6}$

c) $\dfrac{5,431\cdot 10^3-6,51\cdot 10^4+385\cdot 10^2}{8,2\cdot 10^{-3}-2\cdot 10^{-4}}$

a) $1,41\cdot 10^2$; E.A. $< 0,005\cdot 10^2 = 0,5$

E.R. $< \dfrac{0,5}{141} < 0,00355$

b) $-1,58\cdot 10^5$; E.A. $< 0,005\cdot 10^5 = 5\cdot 10^2$

E.R. $< \dfrac{5\cdot 10^2}{1,58\cdot 10^5} < 3,16\cdot 10^{-3}$

c) $-2,65\cdot 10^6$; E.A. $< 0,005\cdot 10^6 = 5\cdot 10^3$

E.R. $< \dfrac{5\cdot 10^3}{2,65\cdot 10^6} < 1,89\cdot 10^{-3}$

41 Escribe el radicando en notación científica, calcula y expresa el resultado aproximando a las milésimas.

$$\sqrt{\frac{60\,000^3\cdot 0,00002^4}{100^2\cdot 72\,000\,000\cdot 0,0002^5}}$$

$$\sqrt{\frac{60\,000^3\cdot 0,00002^4}{100^2\cdot 72\,000\,000\cdot 0,0002^5}}=\sqrt{\frac{(6\cdot 10)^4\cdot(2\cdot 10^{-5})^4}{10^4\cdot 72\cdot 10^7\cdot(2\cdot 10^{-4})^5}}=\sqrt{150}=12,247$$

Números combinatorios. Binomio de Newton

42 Calcula.

a) $\dfrac{8!}{5!}$ **b)** $\dfrac{10!}{9!}$ **c)** $\dfrac{5!+4!}{12}$

a) $\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=8\cdot7\cdot6=336$ b) 10

c) $\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+4\cdot3\cdot2\cdot1}{12}=\dfrac{4\cdot3\cdot2\cdot1\,(5+1)}{12}=12$

43 Calcula.

a) $\dbinom{8}{4}$ **b)** $\dbinom{12}{7}$ **c)** $\dbinom{37}{35}$ **d)** $\dbinom{84}{1}$

a) $\dfrac{8!}{4!4!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$ b) $\dfrac{12!}{7!5!}=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792$

c) $\dfrac{37!}{35!2!}=\dfrac{37\cdot36}{2}=666$ d) $\dfrac{84!}{83!1!}=\dfrac{84\cdot83!}{83!1!}=84$

44 Aplica las propiedades de los números combinatorios para obtener n.

a) $\dbinom{6}{n+2}=1$ **b)** $\dbinom{8}{n-3}=8$ **c)** $\dbinom{9}{2}=\dbinom{9}{n}$

d) $\dbinom{13}{n-1}=\dbinom{13}{n+2}$ **e)** $\dbinom{10}{n}+\dbinom{10}{n+1}=\dbinom{11}{7}$ **f)** $\dbinom{n}{7}=\dbinom{n}{9}$

a) $n+2=6 \to n=4$; $n+2=0 \to n=-2$ b) $n-3=1 \to n=4$; $n-3=7 \to n=10$

c) $n=2$ o $n=9-2=7$ d) $n-1+n+2=13$; $2n+1=13 \to n=6$

e) $n=6$ f) $n=7+9=16$

45 **Calcula m en cada caso.**

a) $\binom{m-1}{2} = 15$ b) $\binom{m}{1} + \binom{m}{2} = 21$

a) $\binom{m-1}{2} = 15 \rightarrow (m-1)\cdot(m-2) = 15 \rightarrow \dfrac{m^2-3m+2}{2} = 15 \rightarrow m^2 - 3m - 28 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{9+4\cdot 28}}{2} = \frac{3 \pm 11}{2} \rightarrow m = 7, m = -4$$

Descartando la solución negativa nos queda que $m = 7$.

b) $\binom{m}{1} + \binom{m}{2} = 21 \rightarrow m + \dfrac{m(m-1)}{2} = 21 \rightarrow 2m + m^2 - m = 42 \rightarrow m^2 + m - 42 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\cdot 42}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} \rightarrow m = 6, m = -7$$

Descartando la solución negativa nos queda que $m = 6$.

46 **Simplifica y calcula el valor de n:**

a) $3\binom{n+2}{3} = 5\binom{n+1}{2}$ b) $\dfrac{2n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-4)!}{(n-3)!}$

a) $3\binom{n+2}{3} = 5\binom{n+1}{2} \rightarrow 3\left(\dfrac{(n+2)(n+1)n}{32}\right) = 5\left(\dfrac{(n+1)n}{2}\right)$

Simplificando:

$(n+2)(n+1)n = 5 \cdot (n+1)n$

Eliminamos los términos que son iguales a cada lado de la igualdad y obtenemos:

$n + 2 = 5 \rightarrow n = 3$

b) $\dfrac{2n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n-4)!}{(n-3)!} \rightarrow \dfrac{2n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)!} = \dfrac{(n-4)!}{(n-3)!}$

Simplificando a ambos lados:

$\dfrac{2(n-3)}{(n+1)} = 1 \rightarrow 2n - 6 = n + 1 \rightarrow n = 7$

47 **Desarrolla.**

a) $(a^2 - 3b)^7$ b) $\left(\dfrac{a}{3} + 2b\right)^5$

a) $\binom{7}{0}(a^2)^7 + \binom{7}{1}(a^2)^6(-3b) + \binom{7}{2}(a^2)^5(-3b)^2 + \binom{7}{3}(a^2)^4(-3b)^3 +$

$+\binom{7}{4}(a^2)^3(-3b)^4 + \binom{7}{5}(a^2)^2(-3b)^5 + \binom{7}{6}(a^2)(-3b)^6 + \binom{7}{7}(-3b)^7 =$

$= a^{14} - 21a^{12}b + 189a^{10}b^2 - 945a^8b^3 + 2\,835a^6b^4 - 5\,103a^4b^5 + 5\,103a^2b^6 - 2\,187b^7$

b) $\binom{5}{0}\left(\dfrac{a}{3}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\dfrac{a}{3}\right)^4 2b + \binom{5}{2}\left(\dfrac{a}{3}\right)^3(2b)^2 + \binom{5}{3}\left(\dfrac{a}{3}\right)^2(2b)^3 + \binom{5}{4}\left(\dfrac{a}{3}\right)(2b)^4 + \binom{5}{5}(2b)^5 =$

$= \dfrac{1}{243}a^5 + \dfrac{10}{81}a^4b + \dfrac{40}{27}a^3b^2 + \dfrac{80}{9}a^2b^3 + \dfrac{80}{3}ab^4 + 32b^5$

48 **Halla el noveno término del desarrollo de $(x^2 - y^2)^{12}$.**

Término noveno: $\binom{12}{8}(x^2)^4(-y^2)^8 = 495x^8y^{16}$

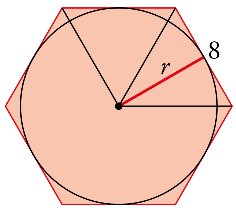
49 **Calcula el quinto término del desarrollo de $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^8$.**

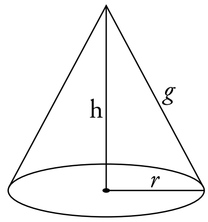
Término quinto: $\binom{8}{4}\left(\frac{1}{x^2}\right)^4(-2x)^4 = \frac{1120}{x^4}$

Para resolver

50 **En un prisma hexagonal de lado 8 dm, y altura 12 dm, se inscribe un cono. Calcula su área lateral con una cifra decimal y da una cota del error absoluto y una cota del error relativo cometidos.**

Vamos a calcular el radio de la base del cono inscrito en el hexágono regular.





$r = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ dm

La altura del cono coincide con la del prisma hexagonal, $h = 12$ dm

La generatriz del cono es $g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 12^2} = 8\sqrt{3}$ dm

La superficie lateral del cono es:

$A_{Lateral} = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 4\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 96\pi = 301{,}59 \text{ dm}^2$

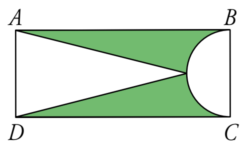
$A_{Lateral} = 301{,}6 \text{ dm}^2$

E.A. $< 0{,}05 \text{ dm}^2$

E.R. $< \frac{0{,}05}{301{,}59} = 1{,}6579 \cdot 10^{-4} = 0{,}00016579$, que equivale a un 0,02 %.

51 **En el rectángulo *ABCD*, $\overline{AB} = 6\sqrt{12}$ y $\overline{AD} = 2\sqrt{18}$ (en cm).**

Calcula el área de la parte coloreada.



- Los lados del rectángulo son *AB* y *AD* cuyas medidas ya tenemos, así que aplicamos la fórmula, aunque antes simplificamos las medidas de los lados:

  $\overline{AB} = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}$

  $\overline{AD} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$

  Directamente: $A_1 = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 12\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} = 72\sqrt{6} \text{ cm}^2$

- Sea h la altura del triángulo y *r* el radio de la semicircunferencia. Vamos a calcularlos.

  Sabemos que $r = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AD}}{2} = 3\sqrt{2}$.

  Vemos también que $\text{h} = \overline{AB} - r = 12\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 3\left(4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$.

  Y ya podemos calcular el área del triángulo:

$$A_2 = \frac{\overline{AD} \cdot \text{h}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \left(4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{2} = \frac{18\sqrt{2} \cdot \left(4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{2} = 9\sqrt{2} \cdot \left(4\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 36\sqrt{6} - 18 =$$

$$= 18\left(2\sqrt{6} - 1\right) \text{ cm}^2$$

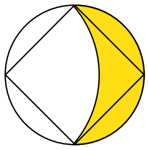
- El área del semicírculo es:

$$A_3 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2}{2} = 9\pi \text{ cm}^2$$

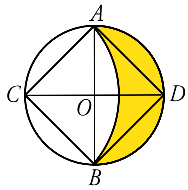
- $A = A_1 - A_2 - A_3 = 72\sqrt{6} - 18\left(2\sqrt{6} - 1\right) - 9\pi = 36\sqrt{6} + 18 - 9\pi = 9\left(4\sqrt{6} + 2 - \pi\right) \text{ cm}^2$

52 **[El uso de los datos que proporciona el enunciado permite que el alumnado trabaje la creación y creatividad (dimensión personal)].**

Si el lado del cuadrado inscrito en la circunferencia mide 1 m, ¿cuál es el área de la parte coloreada?



Llamaremos r al radio de la circunferencia dibujada, D a su diámetro, O al centro de la circunferencia.



- Calculemos el diámetro, D, y el radio, r.

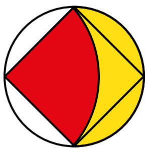
  Como el área del cuadrado $ABCD$ es 1 ya que su lado mide 1, podemos deducir que el área del triángulo ABC es la mitad del área del cuadrado $ABCD$. Así $A_1 = \frac{1}{2}$ y aplicamos la fórmula de su área, sabiendo que el radio es la mitad del diámetro:

$$A_1 = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OC}}{2} = \frac{D \cdot r}{2} = \frac{D \cdot \left(\frac{D}{2}\right)}{2} = \frac{D^2}{4}$$

  Entonces $\frac{D^2}{2} = 1$ y de aquí deducimos que $D = \sqrt{2}$ y $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Busquemos el área de la circunferencia del dibujo, cuyo radio es r: $A_2 = \pi r^2 = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$.

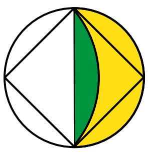
- Busquemos el área de la circunferencia cuyo radio es el lado del cuadrado. Así podremos saber el área roja del dibujo.



$A_3 = \pi r^2 = \pi$ (área de la circunferencia completa)

$A_4 = \frac{\pi}{4}$

- Busquemos ahora el área verde: $A_5 = A_4 - A_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$



- Ya solamente nos queda restar para encontrar el área amarilla:

$$A_6 = \frac{A_2}{2} - A_5 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

53 **La longitud de una barra metálica después de calentarla es $l = l_0(1 + kt)$ donde l_0 es la longitud a 0 °C, t la temperatura final y k el coeficiente de dilatación lineal. Si una barra de plomo mide 1 m a 800 °C, ¿cuál es su longitud a 200 °C? (En el plomo, $k = 3 \cdot 10^{-5}$).**

Calculamos l_0 a partir de la longitud de la barra a 800 °C:

$l = l_0(1 + kt) = l_0(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 800) = l_0\left(\frac{128}{125}\right)$, luego $l_0 = \frac{125}{128}$

Calculamos ahora la longitud de la barra a 200 °C:

$l = l_0(1 + kt) = \frac{125}{128}(1 + 3 \cdot 10^{-5} \cdot 200) = \frac{125}{128} \cdot \frac{503}{500} = \frac{503}{512} = 0{,}98242$ m

54 **La estrella R136a1, descubierta recientemente, está a 165 000 años-luz y tiene una masa actual equivalente a 265 veces la masa del Sol. Expresa la distancia en kilómetros y la masa en kilogramos. Da, en cada caso, cotas del error absoluto y del error relativo.**

Un año luz es aproximadamente $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km.

La distancia de la estrella R136a1 a la Tierra es: $d = 165\,000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 1{,}5609 \cdot 10^{18}$ km

E.A. < $5 \cdot 10^{13}$ km

E.R. < $\frac{5 \cdot 10^{13}}{1{,}5609 \cdot 10^{18}} = 3{,}2033 \cdot 10^{-5} = 0{,}000032$, que equivale al 0,0032 %.

La masa del Sol es, aproximadamente, $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg.

La masa de la estrella R136a1 es: $m = 265 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30} = 5{,}2711 \cdot 10^{32}$ kg

E.A. < $5 \cdot 10^{27}$ kg

E.R. < $\frac{5 \cdot 10^{27}}{5{,}2711 \cdot 10^{32}} = 9{,}4857 \cdot 10^{-6} = 0{,}0000094857$, que equivale al 0,00095 %.

55 **Colocamos en un banco 75 000 € al 4,2 % anual con pago mensual de intereses.**

a) ¿Cuánto dinero tendremos al cabo de 4 años?

b) ¿Cuánto tiempo tardaremos en tener 100 000 €?

a) 75 000 + 75 000 · 0,042 · 4= 87 600 €

b) 100 000 € = 75 000 € + 75 000 · 0,042 · $x \to \frac{25\,000}{75\,000 \cdot 0{,}042} = x \to x = \frac{1}{3 \cdot 0{,}042} = 7{,}936$ años

56 ODS Meta 3.8. **[Tras visionar el vídeo correspondiente a esta meta, el docente puede proponer un debate sobre las causas que provocan las dificultades que tienen muchas personas para acceder a servicios de salud].**

La cantidad de un fármaco que hay en la sangre de un paciente en mg/L al cabo de t horas, después de haberle inyectado puede estimarse mediante la función $f(t) = 5e^{-t/10}$.

¿Cuántas horas tardará en reducirse a la mitad?

Cuando le inyectan el fármaco, $t = 0$, por lo que la cantidad que tiene en sangre es $f(0) = 5e^0 = 5$.

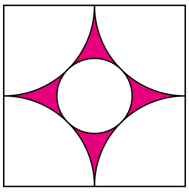
Queremos saber cuánto tiempo tiene que pasar para que el resultado sea $\frac{5}{2}$:

$$f(t) = 5e^{\frac{-t}{10}} = \frac{5}{2} \to e^{\frac{-t}{10}} = \frac{1}{2}$$

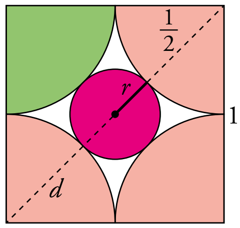
Aplicando el logaritmo neperiano a ambos miembros de la desigualdad:

$$\frac{-t}{10} = ln\left(\frac{1}{2}\right) \to t = -10\,ln\left(\frac{1}{2}\right) = 6{,}93$$

57 **Halla el área de la parte coloreada de esta figura en el que el lado del cuadrado mide 1 m. Expresa el resultado con números irracionales.**



El área pedida es el área del cuadrado, menos cuatro veces el área verde y menos el área roja.



Cuatro veces el área verde es el área de un círculo de radio $\frac{1}{2}$, es decir, $4A_{Verde} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi$

Llamamos d a la diagonal del cuadrado: $d = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Calculamos el radio: $r = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$

El área roja es el área del círculo de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

$A_{Roja} = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi$

$\acute{A}rea\ pedida = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \pi + 1.$

58 **Una escala habitualmente utilizada en la medición de la intensidad de los terremotos es la escala Richter. Los grados de intensidad se calculan mediante la expresión $R = log\ (A/p)$ donde A es la amplitud medida en micrómetros (1 µm = 10^{-4} cm) y p es el periodo medido en segundos.**

¿Cuál es la magnitud de un terremoto en la escala Richter si la amplitud es 10^{-1} cm y su periodo es de 2 segundos?

$A = 10^{-1}\text{ cm} = 10^3\ \mu\text{m}$

$P = 2$ y, por tanto, $R = log\left(\frac{10^3}{2}\right) = 2{,}699\ldots$

Página 59

Cuestiones teóricas

59 **Explica si estas frases son verdaderas o falsas:**

a) Hay números irracionales que son enteros.

b) Todo número irracional es real.

c) Todos los números decimales son racionales.

d) Entre dos números racionales hay infinitos números irracionales.

a) F b) V c) F d) V

60 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) $\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{3}$ **b)** $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$

a) Falso.

Multiplicamos a ambos miembros por $\sqrt{3}$:

$$\sqrt{6}+2\sqrt{5} = \sqrt{6}+6$$

Por tanto, si fuera cierto debería cumplirse que $2\sqrt{5} = 6$.

b) Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)=4 \rightarrow 8-2(16-12)=4 \rightarrow 0=4$

Llegamos a una contradicción y deducimos que la igualdad es falsa.

61 **¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Explica por qué:**

a) $\log m + \log n = \log (m+n)$

b) $\log m - \log n = \dfrac{\log m}{\log n}$

c) $\log m - \log n = \log \dfrac{m}{n}$

d) $\log x^2 = \log x + \log x$

e) $\log (a^2 - b^2) = \log (a+b) + \log (a-b)$

a) Falso. $\log m + \log n = \log (m \cdot n) \neq \log (m+n)$

b) Falso. $\log m - \log n = \log \left(\dfrac{m}{n}\right) \neq \dfrac{\log m}{\log n}$

c) Verdadero. Por una propiedad de los logaritmos.

d) Verdadero. $\log x^2 = \log (x \cdot x) = \log x + \log x$

e) Verdadero. $\log (a^2-b^2) = \log [(a+b)\cdot(a-b)] = \log (a+b) + \log (a-b)$

62 **Razona cuál es la parte entera de los siguientes logaritmos, sin utilizar la calculadora:**

a) $\log 74$ **b)** $\log 2345$ **c)** $\log 567$ **d)** $\log 0{,}037$

e) $\log 0{,}02$ **f)** $\log_{\frac{1}{2}} 28$ **g)** $\log_{\frac{1}{4}} 0{,}3$ **h)** $\ln 5$

a) Parte entera = 1 ya que $10^1=10$ y $10^2=100$.

b) Parte entera = 3 ya que $10^3=1000$.

c) Parte entera = 2 ya que $10^3=1000$.

d) Parte entera = –2 ya que $10^{-1}=0{,}1$ y $10^{-2}=0{,}01$.

e) Parte entera = –2 ya que $10^{-1}=0{,}1$ y $10^{-2}=0{,}01$.

f) Parte entera = –5 ya que $2^4=16$ y $2^5=32$. (Hay que ener en cuenta que $\dfrac{1}{2}=2^{-1}$).

g) Parte entera = 2 ya que $4^{-2}=\dfrac{1}{16}=0{,}06$ y $4^{-1}=0{,}25$.

h) Parte entera = 1 ya que $e^1=2{,}72$ y $e^2=7{,}39$.

63 **El logaritmo en base a de 100 excede en 2 unidades al logaritmo en base a de 25. Calcula a.**

$\log_a 100 = \log_a 25 + 2 \rightarrow \log_a (25\cdot 4) = \log_a 25 + 2 \rightarrow \log_a 25 + \log_a 4 = \log_a 25 + 2$

Por lo tanto: $\log_a 4 = 2$ y $a=2$

Para profundizar

64 **Halla el valor de esta expresión:**

$$(8^{n+1}+8^n)^2 : (4^n-4^{n-1})^3$$

$$\frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3}=\frac{(8^n(8+1))^2}{(4^{n-1}(4-1))^3}=\frac{8^{2n}\cdot 9^2}{4^{3n-3}\cdot 3^3}=\frac{2^{3\cdot 2n}\cdot 3^4}{2^{2(3n-3)}\cdot 3^3}=2^{6n-6n+6}\cdot 3 = 2^6\cdot 3 = 192$$

65 **Averigua el valor de n, m, y p para que se cumpla la siguiente igualdad: $\sqrt[n]{2^m 3^p}=\sqrt[3]{36}\cdot\sqrt[4]{24}$**

$\sqrt[n]{2^m 3^p}=\sqrt[3]{36}\sqrt[4]{24} \rightarrow \sqrt[3]{36}\sqrt[4]{24}=\sqrt[3]{2^2\cdot 3^2}\sqrt[4]{3\cdot 2^3}=\sqrt[12]{2^8 3^8 2^9 3^3}=\sqrt[12]{2^{17}3^{11}} \rightarrow n=12, m=17, p=11$

66 ¿Cuál es el número de cifras de $4^{16} \cdot 5^{25}$?

$4^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^{32-25} \cdot 10^{25} = 2^7 \cdot 10^{25}$

$2^7 = 128$, luego tiene $3 + 25 = 28$ cifras.

67 Demuestra que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Desarrollamos $(1+1)^n$ por el binomio de Newton:

$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$

Por otra parte, $(1+1)^n = 2^n$, luego $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

68 Expresa mediante intervalos o semirrectas los valores de x que cumplen las siguientes desigualdades:

a) $x + |x - 5| > 11$ **b) $|x| - |x + 7| < 0$**

a) $(8, +\infty)$

b) Es cierta siempre y por lo tanto $(-\infty, +\infty)$ porque:

$|x| - |x+7| < |x| - |x| - |7| = -|7| < 0$

69 a) Expresa $10^{136,24}$ en notación científica.

b) Utiliza los logaritmos para expresar 3^{400} en notación científica.

a) $10^{136,24} = 10^{13\,624 \cdot 10^{-2}} = 10^{13\,624 \cdot 10^{-2}}$

b) Buscamos un número x tal que $3^{400} = 10^x$. Aplicando logaritmos:

$log(3^{400}) = log(10^x) \to 400\, log\, 3 = x\, log\, 10 \to 400 \cdot 0{,}477 = x$

Por tanto, podemos expresar: $x = 1{,}908 \cdot 10^2$

70 Determina la parte entera de las siguientes sumas de logaritmos:

a) $log_{\frac{1}{3}} 5 + log_{\frac{1}{8}} 5$ **b) $log_7 \frac{1}{5} + log_{19} \frac{1}{5}$**

a) $log_{\frac{1}{3}} 5 + log_{\frac{1}{3}} 5 = \dfrac{1}{log_5 \frac{1}{3}} + \dfrac{1}{log_5 \frac{1}{8}} = -log_5 \dfrac{1}{3} - log_5 \dfrac{1}{8} = -\left(log_5 \left(\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{8}\right)\right) = -log_5 \dfrac{1}{24} = log_5 24$

Su parte entera es –2.

b) $log_7 \dfrac{1}{5} + log_{19} \dfrac{1}{5} = -log_{\frac{1}{5}} 7 - log_{\frac{1}{5}} 19 = -(log_{\frac{1}{5}} 133)$

Su parte entera es –1.

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 2.1. (EA 2.1.1.-EA 2.1.2.-EA 2.1.3.-EA 2.1.4.-EA 2.1.5.-EA 2.1.6.)

Página 59

1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ pertenecen:

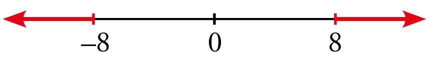
$$-\frac{58}{45};\ \frac{51}{17};\ \frac{\pi}{3};\ \sqrt[4]{-3};\ \sqrt[3]{-8};\ \sqrt[5]{2^3};\ 1{,}0\widehat{7}$$

$\mathbb{N}$: $\frac{51}{17}$ $\mathbb{Z}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$ $\mathbb{Q}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1{,}0\widehat{7}$ $\mathbb{R}$: $\frac{51}{17}$; $\sqrt[3]{-8}$; $-\frac{58}{45}$; $1{,}0\widehat{7}$; $\frac{\pi}{3}$; $\sqrt[5]{2^3}$

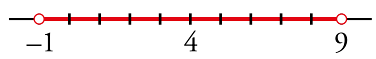
2 Expresa en forma de intervalo y haz la representación en cada caso.

a) $|x| \geq 8$ **b)** $|x-4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$



b) $(-1, 9)$



3 Simplifica.

a) $\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2}$

b) $a\sqrt{a^{-1}} : \sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$

c) $\sqrt{60} \cdot \sqrt[4]{32} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4}$

d) $\frac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5} - \frac{9}{\sqrt{3}}$

a) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} = 5\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $a \cdot a^{-1/2} : a^{-2/3} = a^{1/2+2/3} = a^{7/6}$

c) $\sqrt{60} \cdot \sqrt[4]{32} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \sqrt[4]{2^5} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4} = \sqrt[8]{2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 2^{10}} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4} =$

$= \sqrt[8]{4^9 \cdot 3^4 \cdot 5^4} : \sqrt[8]{4^5 \cdot 5^4} = \sqrt[8]{4^4 \cdot 3^4} = \sqrt{12}$

d) $$\frac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5} - \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{\left(17-9\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3} - 9\left(3\sqrt{3}-5\right)}{\left(3\sqrt{3}-5\right)\cdot\sqrt{3}} = \frac{17\sqrt{3}-27-27\sqrt{3}+45}{\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{3}-5\right)} = \frac{-10\sqrt{3}+18}{9-5\sqrt{3}}$$

Para seguir calculando, multiplicamos por el conjugado del denominador:

$$\frac{-10\sqrt{3}+18}{9-5\sqrt{3}} \cdot \frac{9+5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}} = \frac{-90\sqrt{3}+162-150+90\sqrt{3}}{81-75} = \frac{12}{6} = 2$$

4 Efectúa y simplifica.

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$$

Reducimos las fracciones a común denominador para calcular y simplificar luego:

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right) - \left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)} = \frac{7-2\sqrt{5}\sqrt{7}+5-\left(7+2\sqrt{5}\sqrt{7}+5\right)}{7-5} =$$

$$= \frac{-4\sqrt{35}}{2} = -2\sqrt{35}$$

5 **Dos esferas metálicas de 1 000 kg cada una se atraen con una fuerza de $8,35 \cdot 10^{-9}$ N. ¿A qué distancia se encuentran sus centros? Aplica la Ley de Gravitación Universal:**

$F = G\dfrac{M\,m}{r^2}$ **donde** $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$

Acota el error cometido.

Sustituimos en la fórmula: $8,35 \cdot 10^{-9} = 6,67 \cdot 10^{-11}\dfrac{1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8,35 \cdot 10^{-9} = \dfrac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1000 \cdot 1000}{r^2}$;

$8,35 \cdot 10^{-9} r^2 = 6,67 \cdot 10^{-5}$; $r^2 = \dfrac{6,67 \cdot 10^{-5}}{8,35 \cdot 10^{-9}} = 7\,988$;

$r = \sqrt{7\,988} = 89,376$ m

Sus centros se encuentran aproximadamente a 89,376 m.

La cota del error absoluto es E.A. < 0,0005 m

E.R. < $\dfrac{0,0005}{89,376} = 5,5943 \cdot 10^{-6} = 0,0000055943$, que corresponde al 0,00056 %.

6 **Aplica la definición de logaritmo y obtén x.**

a) $log_3\, x = -\dfrac{1}{4}$ **b)** $ln\,\dfrac{x}{3} = -1$ **c)** $log_x\, 512 = 3$

a) $x = 3^{-(1/4)} \rightarrow x = 0,76$

b) $\dfrac{x}{3} = e^{-1} \rightarrow x = 3 \cdot e^{-1} = 1,10$

c) $x^3 = 512 \rightarrow x = 8$

7 **Aplica las propiedades de los logaritmos y halla A.**

$log\, A = 2\, log\, 3 + 0,5\, log\, 4 - 3\, log\, 2$

$log\, A = log\, \dfrac{3^2 \cdot 4^{0,5}}{2^3} \rightarrow A = \dfrac{9 \cdot 2}{8} = \dfrac{9}{4}$

8 **Calcula x en cada caso.**

a) $2,5^x = 0,0087$ **b)** $e^{-x} = 425$

a) $x\, log\, 2,5 = log\, 0,0087 \rightarrow x = \dfrac{log\, 0,0087}{log\, 2,5} = -5,18$

b) $-x\, ln\, e = ln\, 425 \rightarrow x = -ln\, 425 = -6,05$

9 **El volumen de un cubo es $6\sqrt{6}$ cm³. Halla la diagonal de una cara y la diagonal del cubo.**

D = diagonal del cuadrado

d = diagonal del cubo

a = lado del cubo

$V = a^3 = 6\sqrt{6} \rightarrow a = \sqrt[3]{6\sqrt{6}} = \sqrt[3]{\sqrt{6^3}} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt{6}$ cm

Encontramos D aplicando el teorema de Pitágoras al cuadrado, ya que su diagonal es la hipotenusa:

$D^2 = a^2 + a^2 = 12 \rightarrow D = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

Solamente nos falta encontrar d, y para ello usaremos el triángulo rectángulo formado por D, d y a donde d es la hipotenusa y volveremos a aplicar el teorema de Pitágoras:

$d^2 = D^2 + a^2 = 12 + 6 = 18 \rightarrow d = 9$ cm