UNIDAD 1: Números Reales

ACTIVIDADES-PÁG. 10

1. Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, obtenemos:

a) $9^2 \cdot 3^{-2} \cdot 27 = (3^2)^2 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^{4-2+3} = 3^5$

b) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^3\right]^{-2} \cdot 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-6} \cdot 5^2 = 5^6 \cdot 5^2 = 5^8$

c) $\dfrac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{9^3 \cdot 25^3 \cdot 4^4} = \dfrac{3^6 \cdot 2^8 \cdot 5^3}{3^6 \cdot 5^6 \cdot 2^8} = \dfrac{1}{5^3} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^3$

2. En las tablas aparecen los valores pedidos.

Truncamiento de	$\sqrt{0{,}6} = 0{,}774\,596\,6...$	$\sqrt{6} = 2{,}449\,489\,7...$
a) A las décimas	0,7	2,4
b) A las milésimas	0,774	2,449
c) A las millonésimas	0,774 596	2,449 489

Redondeo de	$\sqrt{0{,}6} = 0{,}774\,596\,6...$	$\sqrt{6} = 2{,}449\,489\,7...$
a) A las décimas	0,8	2,4
b) A las milésimas	0,775	2,449
c) A las millonésimas	0,774 597	2,449 490

3. Si la velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s, el tiempo que tardará en recorrer 300 km = $3 \cdot 10^5$ m será:

$$t = \frac{3 \cdot 10^5 \ m}{3 \cdot 10^8 \ m/s} = \frac{1}{10^3} \ s = 0{,}001 \ s .$$

El tiempo es una milésima de segundo.

4. Elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos:

$$\left(\sqrt{11 - 4\sqrt{6}}\right)^2 = 11 - 4\sqrt{6}$$

$$\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 8 + 3 - 4\sqrt{6} = 11 - 4\sqrt{6}$$

5. Las raíces enésimas son números reales siempre que:

- **n** sea par y **a** sea un número real no negativo.

- **n** sea impar y **a** sea un número real cualquiera.

ACTIVIDADES-PÁG. 27

1. El valor de la suma es:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2m = m \cdot (m + 1)$$

2. Resolvemos el problema en los siguientes pasos:

● Supongamos que el camello lleva un bidón hasta la mitad del camino, vuelve a Kamal, carga con otro bidón hasta el mismo punto y se bebe uno de los bidones transportados, quedándole otro. Repitiendo el proceso conseguirá llevar 50 bidones hasta la mitad del camino. De aquí repitiendo lo mismo hasta Wadi conseguirá que lleguen 25 según la expresión:

$$25 \text{ bidones} = 100 \cdot \frac{1^2}{2^2}$$

● Si mejoramos al solución conseguiremos que lleguen más bidones, haciendo el camino en tres fases tras el primer tercio, el camello habrá bebido 33,333… bidones y quedan 66,666… En el segundo tercio se bebe 22,222… y quedan 44,444…. En Wadi se bebe 14,81… y quedan 29,629… bidones, es decir:

$$100 \cdot \frac{8}{27} = 100 \cdot \frac{2^3}{3^3} \cong 29{,}63 \ \ \textit{bidones}$$

● Avanzando por cuartos de camino se puede mejorar la solución, llegan:

$$100 \cdot \frac{81}{256} = 100 \cdot \frac{3^4}{4^4} = 100 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cong 31{,}64 \ \ \textit{bidones}$$

● Siguiendo así sucesivamente, se puede decir que en el mejor de los casos llegan:

$$100 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{100} = 100 \cdot \frac{1}{e} = \cong \ 36{,}788 \ \ \textit{bidones}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 29

1. a) Teniendo en cuenta las propiedades de las potencias, obtenemos:

$$\left[\left(\frac{2}{7}\right)^{12} : \left(\frac{7}{2}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-4}\right]^{-2} = \left[\left(\frac{2}{7}\right)^{12} : \left(\frac{2}{7}\right)^{7} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{-4}\right]^{-2} = \left[\left(\frac{2}{7}\right)^{12-7-4}\right]^{-2} =$$

$$= \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{2}\right)^{2} = \frac{49}{4} = 12{,}25$$

b) Operando, obtenemos:

$$\left[3\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{15}\left(2-\frac{1}{2}\right)^2\right]:7=\left[3\cdot\frac{2}{3}-\frac{4}{15}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]:7=\left[2-\frac{3}{5}\right]:7=\frac{7}{5}:7=\frac{1}{5}=0{,}2$$

2. a) Sacando factores de los radicandos y operando, obtenemos:

$$\left(7\sqrt{63}-8\sqrt{\frac{175}{4}}+\frac{4}{3}\sqrt{112}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}=\left(7\cdot 3\sqrt{7}-8\cdot\frac{5\sqrt{7}}{2}+\frac{4}{3}\cdot 4\sqrt{7}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}=$$

$$=\left(21\sqrt{7}-20\sqrt{7}+\frac{16}{3}\sqrt{7}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{19\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}=38$$

b) Racionalizamos los denominadores y operamos, obteniendo:

$$\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}-\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{12-3\sqrt{6}}{15}=\frac{-4}{5}+\frac{8\sqrt{6}}{15}$$

En el gráfico pueden verse la resolución de las actividades 1 y 2 con Wiris.

Actividad 1

$$\left(\left(\frac{2}{7}\right)^{12}/\left(\frac{7}{2}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{-4}\right)^{-2}\rightarrow\frac{49}{4}$$

$$\left(3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{4}{15}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)^2\right)/7\rightarrow\frac{1}{5}$$

Actividad 2

$$\left(7\cdot\sqrt{63}-8\cdot\sqrt{\frac{175}{4}}+\frac{4}{3}\cdot\sqrt{112}\right)\cdot\frac{6}{\sqrt{7}}\rightarrow 38$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{3\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}}\rightarrow\frac{8\cdot\sqrt{6}}{15}-\frac{4}{5}$$

3. a) Operamos en ambos miembros de la igualdad:

En el primer miembro, $\left(\frac{2}{25}\cdot\frac{15}{9}\right)^x=\left(2\cdot 5^{-1}\cdot 3^{-1}\right)^x$

En el segundo miembro, $\frac{625 \cdot 4^2}{81^{-1}} = \left(2^{-4} \cdot 5^4 \cdot 3^4\right) = \left(2 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-1}\right)^{-4}$

Igualando las potencias obtenemos x = - 4.

b) Operamos en ambos miembros de la igualdad:

En el primer miembro, $\left[\left(\frac{1}{9}\right)^3 \cdot (3)^x\right]^{-2} : 27 = \left(3^{-6} \cdot 3^x\right)^{-2} : 3^3 = 3^{12-2x-3} = 3^{9-2x}$

En el segundo miembro, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-6} = \left(3^{-1}\right)^{-6} = 3^6$

Igualando las potencias y los exponentes obtenemos x = $\frac{3}{2}$.

ACTIVIDADES-PÁG. 30

1. Las soluciones pueden verse en la tabla.

	$-\sqrt{49}$	**23,5**	**0**	$\sqrt{11}$	$2,1\widehat{3}$	$-\frac{1,4}{0,5}$	$\frac{23}{3}$	**- 4²**	$\sqrt[3]{-27}$	$\frac{\pi}{5}$
Menor conjunto numérico al que pertenece	**Z**	**Q**	**N**	**R**	**Q**	**Q**	**Q**	**Z**	**Z**	**I**

2. Las siguientes afirmaciones son:

a) Falsa, el número 5, por ejemplo, es real (entero) y no es irracional.

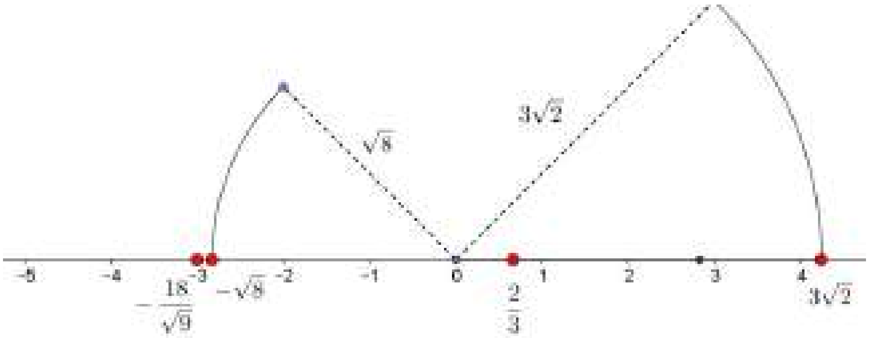
b) Verdadera, por ejemplo, $\frac{15}{3} = 5$ es racional y entero.

c) Verdadero, los números enteros no son decimales.

d) Falsa, los números decimales con infinitas cifras decimales no periódicas no son números racionales

3. Las representaciones pueden verse en los dibujos.

Representación de los números: a) $3\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{8}$ c) $-\dfrac{18}{\sqrt{9}}=-3$ d) $0,\widehat{6}=\dfrac{2}{3}$



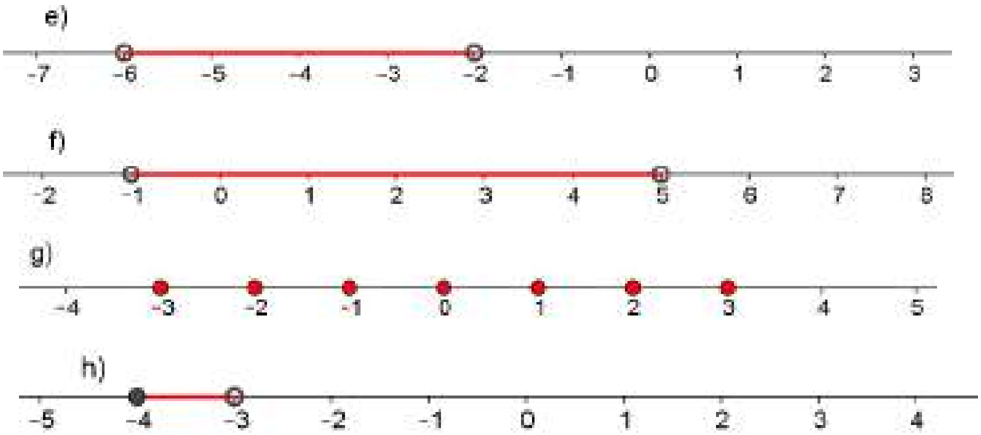
Representación de los conjuntos:

e) A = $\{a \in R \,/\, a < -2 \ y \ a > -6\}$ = (- 6, - 2)

f) E (2, 3) = (- 1, 5)

g) $B=\{x \in Z \,/\, x > 4 \ ó \ x > -4\} = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,\ldots\ldots.\}$

h) $(-\infty,-3)\cap[-4,3]=[-4,-3)$



4. La respuesta puede verse en la tabla que sigue.

Apartado	Conjunto	Acotado	Supremo	Ínfimo	Máximo	Mínimo
a)	$(1, 11)$	Si	11	1	No	No
b)	[- 1, 2)	Si	2	- 1	No	- 1
c)	$[-5, +\infty)$	No	No	- 5	No	- 5
d)	{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}	Si	10	3	10	3
e)	$[-2, +\infty)$	No	No	- 2	No	- 2
f)	$(-\infty, 6)$	No	6	No	No	No
g)	(- 2, 2)	Si	2	- 2	No	No
h)	(- 8, - 4)	Si	- 4	- 8	No	No

5. Las soluciones pueden verse en la tabla.

Apartado	Conjunto	Acotado	Supremo	Ínfimo	Máximo	Mínimo
a)	$(-\infty, -1)$	No	- 1	No	-1	No
b)	[- 10, 12)	Si	12	- 10	No	- 10
c)	$(-6, -4) \cup [3, 5]$	Si	5	- 6	5	No
d)	{- 3, - 1, 1, 3, 5}	Si	5	- 3	5	- 3

6. El centro es el punto $\frac{-3+6}{2} = 1{,}5$ y el radio vale 6 – 1,5 = 4,5.

Por tanto, el entorno buscado es E (1,5; 4,5)

7. a) Las soluciones de la inecuación $|3+2x| \geq 9$ son:

$$|3+2x| \geq 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3+2x \geq 9 & \Rightarrow \quad 2x \geq 6 & \Rightarrow \quad x \geq 3 \\ (-(3+2x) \geq 9 & \Rightarrow \quad -2x \geq 12 & \Rightarrow \quad x \leq -6 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es $(-\infty, -6] \cup [3, +\infty)$. La representación gráfica puede verse en el dibujo.

b) Las soluciones de la inecuación $\left|\frac{x-4}{3}\right| < 2$ son:

$$\left|\frac{x-4}{3}\right| < 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x-4}{3} < 2 & \Rightarrow \quad x-4 < 6 & \Rightarrow \quad x < 10 \\ -\frac{x-4}{3} < 2 & \Rightarrow \quad -(x-4) < 6 & \Rightarrow \quad x > -2 \end{cases}$$

El conjunto de soluciones es (- 2, 10). La representación gráfica puede verse en el dibujo.

ACTIVIDADES-PÁG. 31

8. La tabla completa puede verse a continuación:

Valor exacto	0,654371…	218,75364…	0,07642…	**32,55628…….**	3,42456…
Aproximación decimal a décimas por defecto y cota de error	0,6 0,1	**218,7** **0,1**	0,0 0,1	32,5 0,1	3,4 0,1
Aproximación decimal a milésimas por exceso y cota de error	0,655 0,001	218,754 0,001	0,077 0,001	32,557 0,001	**3,425** **0,001**
Redondeo a centésimas y cota de error	0,65 0,005	218,75 0,005	**0,08** **0,005**	32,56 0,005	3,42 0,005
Truncamiento a diezmilésimas y cota de error	**0,6543** **0,0001**	218,7536 0,0001	0,07642 0,0001	32,5562 0,0001	3,4245 0,0001

9. La asociación de cada número con su aproximación o redondeo es:

a) con 4) b) con 6) c) con 5) d) con 1) e) con 3) f) con 2)

10. Consideramos como valor real $\pi = 3{,}141592$.

Para la fracción $\frac{223}{71}$ obtenemos:

$$\text{Error absoluto} = \left|3{,}141592 - \frac{223}{71}\right| = 0{,}000\ 746...$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\textit{Error absoluto}}{\textit{Valor real}} = \frac{0{,}000\ 746}{3{,}141592} = 0{,}000\ 237...$$

Para la fracción $\frac{22}{7}$ obtenemos:

$$\text{Error absoluto} = \left|3{,}141592 - \frac{22}{7}\right| = 0{,}001\ 265...$$

$$\text{Error relativo} = \frac{\textit{Error absoluto}}{\textit{Valor real}} = \frac{0{,}001\ 265}{3{,}141592} = 0{,}000\ 4022...$$

11. En la tabla aparecen los resultados:

Planeta	Distancia media al Sol en unidades astronómicas (ua)	Orden de magnitud
Mercurio	$3{,}870989 \times 10^{-1}$	10^{-1}
Venus	$7{,}233320 \times 10^{-1}$	10^{0}
Tierra	1×10^{0}	10^{0}
Marte	$1{,}523662 \times 10^{0}$	10^{0}
Júpiter	$5{,}203363 \times 10^{0}$	10^{1}
Saturno	$9{,}537070 \times 10^{0}$	10^{1}
Urano	$1{,}919059 \times 10^{1}$	10^{1}
Neptuno	$3{,}006896 \times 10^{1}$	10^{1}

12. a) Los números en notación científica son:

$x = 0{,}000000000003 = 3 \times 10^{-12}$

$y = 432$ cienmilésimas $= 4{,}32 \times 10^{-3}$

$z = 243$ millones $= 2{,}43 \times 10^{8}$

$t = 623000000000000 = 6{,}23 \times 10^{14}$

b) Los resultados de las operaciones son:

i) $x + y = 4{,}320\ 000\ 003 \times 10^{-3}$

ii) $t - 1000\, z = 6{,}22757 \times 10^{14}$

iii) $x \cdot z \cdot t = 4{,}54167 \times 10^{11}$

iv) $y : x \cdot t = 8{,}9712\ 10^{-1}$

13. Los cálculos quedan:

Si un año-luz son $9{,}4605 \cdot 10^{12}$ km, entonces un minuto-luz será:

$$\frac{9{,}4605 \cdot 10^{12}}{365 \cdot 24 \cdot 60} = 17\ 999\ 429{,}22\ km = 1{,}799\ 9429 \cdot 10^{7}\ km$$

Si un año-luz son $9{,}4605 \cdot 10^{12}$ km, entonces un segundo-luz será:

$$\frac{9{,}4605 \cdot 10^{12}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 299\ 990{,}4871\ km = 2{,}999\ 904871 \cdot 10^{5}\, km$$

La distancia Marte-Sol en el Afelio es 249 100 000 km = $2{,}491 \cdot 10^{8}$ km y en segundos-luz será:

$$\frac{2{,}491 \cdot 10^{8}}{2{,}999904871 \cdot 10^{5}} = 830{,}360\ segundos - luz$$

La distancia Marte-Sol en el Perihelio es 206 700 000 km = $2{,}067 \cdot 10^{8}$ km y en minutos-luz será:

$$\frac{2{,}067 \cdot 10^{8}}{1{,}7999429 \cdot 10^{7}} = 11{,}484\ \min utos - luz$$

ACTIVIDADES-PÁG. 32

14. Las soluciones son:

a) $\sqrt{36a^4b^2} = 6a^2b$

b) $\sqrt[3]{-8x^6y^3} = -2x^2y$

c) $\sqrt[4]{256z^8} = 4z^2$

d) $\sqrt[5]{243x^{15}} = 3x^3$

e) $\sqrt[3]{125a^3b^6} = 5ab^2$

f) $\sqrt[4]{16x^8y^4} = 2x^2y$

15. Las potencias y raíces pedidas son:

a) $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$

b) $3^{3/2} = \sqrt{3^3}$

c) $\sqrt[5]{a^4} = a^{4/5}$

d) $7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-2/3}$

f) $7^{-3/2} = \dfrac{1}{\sqrt{7^3}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{a^3}} = a^{-3/2}$

h) $5^{-2/3} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

16. Los radicales son:

a) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt[5]{ab^2}\right)^3 = \sqrt[5]{a^3b^6}$

c) $\sqrt{5\sqrt[3]{5\sqrt{5}}} = \sqrt[4]{5^3}$

d) $\left(\sqrt{a^3\sqrt{b}}\right)^4 = a^6b$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{a}}} = \sqrt[18]{a}$

f) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a^9}} = \sqrt[12]{a^{13}}$

17. Las expresiones quedan:

a) $\sqrt{500} = 10\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{a^3b^4} = ab\sqrt[3]{b}$

c) $\sqrt[3]{-160} = (-2)\sqrt[3]{20}$

d) $\sqrt[4]{625x^5y^6} = 5xy\sqrt[4]{xy^2}$

e) $\sqrt{64a^7b^5} = 8a^3b^2\sqrt{ab}$

f) $\sqrt[5]{x^5y^7z^9} = xyz\sqrt[5]{y^2z^4}$

g) $\sqrt{9a^2-9} = 3\sqrt{a^2-1}$

h) $\sqrt{x^2+x^2y} = x\sqrt{1+y}$

18. Los radicales quedan:

a) $5\sqrt{3} = \sqrt{75}$

b) $3ab\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{27a^5b^3}$

c) $3\sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{3^7}$

d) $a^4b^2\sqrt{2a^3b} = \sqrt{2a^{11}b^5}$

e) $2\sqrt[3]{2a} = \sqrt[3]{16a}$

f) $4ab\sqrt[3]{2a^2b} = \sqrt[3]{1284a^5b^4}$

19. Las soluciones son:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3^3} = \sqrt{3^4} = 3^2$

b) $\sqrt[3]{a}\cdot a^2 = \sqrt[3]{a^7} = a^{7/3}$

c) $\sqrt[4]{2a^5} : \sqrt[4]{2a^3} = \sqrt{a} = a^{1/2}$

d) $a^{-1}\cdot\sqrt[3]{a^2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} = a^{-1/3}$

e) $\sqrt[5]{3^6} : \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{3^2} = 3^{2/5}$

f) $\sqrt{a} : \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a} = a^{1/6}$

20. Los resultados son:

a) $5\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - \frac{5}{4}\sqrt{3} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$

b) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{2} - \frac{7}{12}\sqrt[3]{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt{50} - \frac{1}{3}\sqrt{8} + \frac{7}{2}\sqrt{18} - \frac{3}{4}\sqrt{98} = \frac{115}{12}\sqrt{2}$

d) $3\sqrt[3]{250} - 15\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{54} = 0$

e) $3\sqrt{36a} - 5\sqrt{4a} - \sqrt{25a} + 6\sqrt{a} = 9\sqrt{a}$

f) $3x^2\sqrt[3]{27x} - 7\sqrt[3]{x^7} - x\sqrt[3]{x^4} = x^2\sqrt[3]{x}$

21. El perímetro del hexágono mide $48\sqrt{3}\ cm \approx 83{,}14\ cm$.

El área del hexágono mide $288\sqrt{3}\ cm^2 \approx 498{,}83 cm^2$.

ACTIVIDADES-PÁG. 33

22. Los resultados son:

a) $\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{28}{3} - 2\sqrt{3}$

b) $2 \cdot \sqrt[3]{60} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{18} = 60$

c) $\left(3\sqrt{5} - 2\right)^2 - 6\sqrt{5} \cdot \left(\sqrt{5} - 2\right) = 19$

d) $\left(\sqrt{2} + 2\right)^2 - \left(\sqrt{2} + 2\right) \cdot \left(\sqrt{2} - 2\right) = 8 + 4\sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{3} = .-\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

f) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{45} - \frac{3}{2}\sqrt{20}\right) \cdot \frac{2}{3}\sqrt{125} = -\frac{50}{3}$

g) $\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{8} + 2\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{72} - \sqrt{20} - \sqrt{2}\right) = 30$

h) $\left(\sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}\right) : \left(\sqrt{245} - \sqrt{20}\right) = 1$

i) $\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)^2-3\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=6-12\sqrt{6}$

j) $\left(\sqrt{75}-\sqrt{27}+2\sqrt{12}\right):3\sqrt{3}=2$

23. Las soluciones son:

a) Los radicales equivalentes a $\sqrt{2}$, y $\sqrt[5]{5}$ son $\sqrt[10]{2^5}=\sqrt[10]{32}$ y $\sqrt[10]{5^2}=\sqrt[10]{25}$; por tanto, $\sqrt[5]{5}<\sqrt{2}$

b) Los radicales equivalentes a $\sqrt[3]{10}$ y $\sqrt[5]{100}$ son $\sqrt[15]{10^5}$ y $\sqrt[15]{10^6}$; por tanto, $\sqrt[3]{10}<\sqrt[5]{100}$

c) Los radicales equivalentes a $\sqrt[3]{2^{-1}}, \sqrt[9]{3}, \sqrt{5}$ son $\sqrt[18]{2^{-6}}, \sqrt[18]{3^2}$ y $\sqrt[18]{5^9}$; por tanto, $\sqrt[3]{2^{-1}}<\sqrt[9]{3}<\sqrt{5}$

d) Los radicales equivalentes a $\sqrt[4]{36}$,. $\sqrt[3]{15}$ y $\sqrt[6]{100}$ son:
$\sqrt[12]{36^3}=\sqrt[12]{46656}$, $\sqrt[12]{15^4}=\sqrt[12]{50625}$ y $\sqrt[12]{100^2}={}^{21}\sqrt[8]{10000}$; por tanto, $\sqrt[6]{100}<\sqrt[4]{36}<.\sqrt[3]{15}$

24. Tras operar obtenemos:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{6}=2\sqrt[12]{54}$

b) $\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[12]{a^7}=\sqrt[12]{a^{25}}$

c) $\sqrt[4]{8a^3b}:\sqrt{2ab}=\sqrt[4]{\dfrac{2a}{b}}$

d) $\dfrac{\sqrt[12]{64}}{\sqrt[4]{4}}=1$

e) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[8]{15625}=25$

f) $\sqrt[4]{a^2b^3}\cdot\sqrt[6]{2a^3b^2}=\sqrt[12]{4a^{12}b^{13}}$

g) $\sqrt{5\sqrt[3]{5^2}}=\sqrt[6]{5^5}$

h) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2^5}$

25. Tras racionalizar se obtiene:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}=2\sqrt[3]{3}$

d) $\dfrac{7}{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{3}}=\dfrac{\sqrt[6]{27\,783}}{3}$

e) $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=6\sqrt{3}+6$

f) $\dfrac{-3}{2\sqrt{3}-3}=-2\sqrt{3}-3$

g) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}=-9+4\sqrt{5}$

h) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{2\sqrt{7}+5}=3-\sqrt{7}$

26. Obviando la constante h = 183 cm en cada una de las series, puede comprobarse, con facilidad, que se cumple:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\varphi$$

$$\varphi^3 = \varphi \cdot \varphi^2 = \varphi \cdot (1+\varphi) = \varphi + \varphi^2$$

$$\varphi^4 = \varphi \cdot \varphi^3 = \varphi \cdot (\varphi + \varphi^2) = \varphi^2 + \varphi^3$$

$$\varphi^5 = \varphi \cdot \varphi^4 = \varphi \cdot (\varphi^2 + \varphi^3) = \varphi^3 + \varphi^4$$

Y así sucesivamente.

También se cumple:

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = 1 + \varphi^{-1} = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi^{-2} = \frac{1}{\varphi^2} = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{6+2\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\varphi}$$

$$\varphi^{-1} + \varphi^{-2} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = \frac{\varphi}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^2} = \frac{\varphi+1}{\varphi^2} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2} = 1$$

Y así sucesivamente.

ACTIVIDADES-PÁG. 34

27. Las soluciones son:

a) $48 + 10\sqrt[3]{9}$ b) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ c) 2

28. Las expresiones racionalizadas y simplificadas son:

a) $\frac{22\sqrt{6}-47}{5}$ b) $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$ c) $1-\sqrt{3}$

29. Los radicales simplificados son:

a) $a^{\frac{1}{72}} = \sqrt[72]{a}$ b) $\frac{6-\sqrt{2}}{17}$ c) 5

30. a) Elevamos los dos miembros al cuadrado y operamos:

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4+2\sqrt{3})\cdot(4-2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 - 2\sqrt{4} = 4 \Rightarrow 8 - 4 = 4.$$

Se verifica la igualdad.

b) Elevamos los dos miembros al cuadrado

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2+2\sqrt{12}+6}{16} \Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{16}$$

Se verifica la igualdad.

31. El valor de las expresiones es:

$$\left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{7+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}} - \frac{7-2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}} = \frac{\left(7+2\sqrt{6}\right)^2 - \left(7-2\sqrt{6}\right)^2}{7^2 - \left(2\sqrt{6}\right)^2} = \frac{56\sqrt{6}}{25}$$

32. a) Partimos de un segmento OA de longitud 1. Por uno de sus extremos levantamos el segmento AB, también de longitud 1. Trazamos el segmento OB que con el punto A forma el triángulo rectángulo OAB.

En el extremo B del segmento OB trazamos el segmento BC perpendicular al anterior. Trazamos el segmento OC y tenemos otro triángulo rectángulo OBC.

En el extremo C repetimos la construcción anterior y así en todos los nuevos puntos que van apareciendo.

b) Para determinar la longitud del segmento OB utilizamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OAB y obtenemos:

$$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Para calcular la longitud del segmento OC con el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OBC y obtenemos:

$$OC = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

Para calcular la longitud del segmento OD repetimos lo anterior en el triángulo rectángulo OCD y obtenemos:

$$OD = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

Para determinar la longitud de los otros segmentos se procede de forma análoga.

Observamos que se obtiene la sucesión de los radicales:

$$OB = \sqrt{2},\ OC = \sqrt{3},\ OD = \sqrt{4} = 2,\ OE = \sqrt{5},\ OF = \sqrt{6},\ OG = \sqrt{7},...$$

c) Para obtener un segmento de longitud $\sqrt{10}$ basta con repetir el proceso de construcción tres pasos más.

33. Expresamos el número $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ en la forma $\sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}}$.

Racionalizamos el radicando: $\sqrt{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$.

Operamos en el radicando: $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

34. a) Los 5 litros de sangre son 5 dm^3. Como cada dm^3 contiene 10^6 mm^3, entonces toda la sangre del paciente, en mm^3, será $5 \cdot 10^6$ mm^3.

Si el número de glóbulos rojos por mm^3 de sangre ha sido de $4{,}8 \cdot 10^6$; el número de glóbulos rojos del paciente serán:

$$(5 \cdot 10^6) \cdot (4{,}8 \cdot 10^6) = 2{,}4 \cdot 10^{13}.$$

b) Un kilómetro tiene 10^6 mm, por tanto, la longitud en kilómetros de todos los glóbulos rojos del paciente serán:

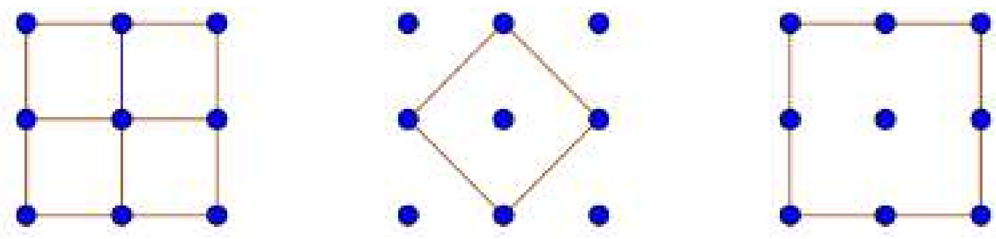
$$(2{,}4 \cdot 10^{13}) : (10^6) = 240\,000 \text{ km}$$

c) Si la longitud del Ecuador es aproximadamente de 40 000 km, el número de vueltas que da la hilera de glóbulos rojos alrededor de la Tierra será:

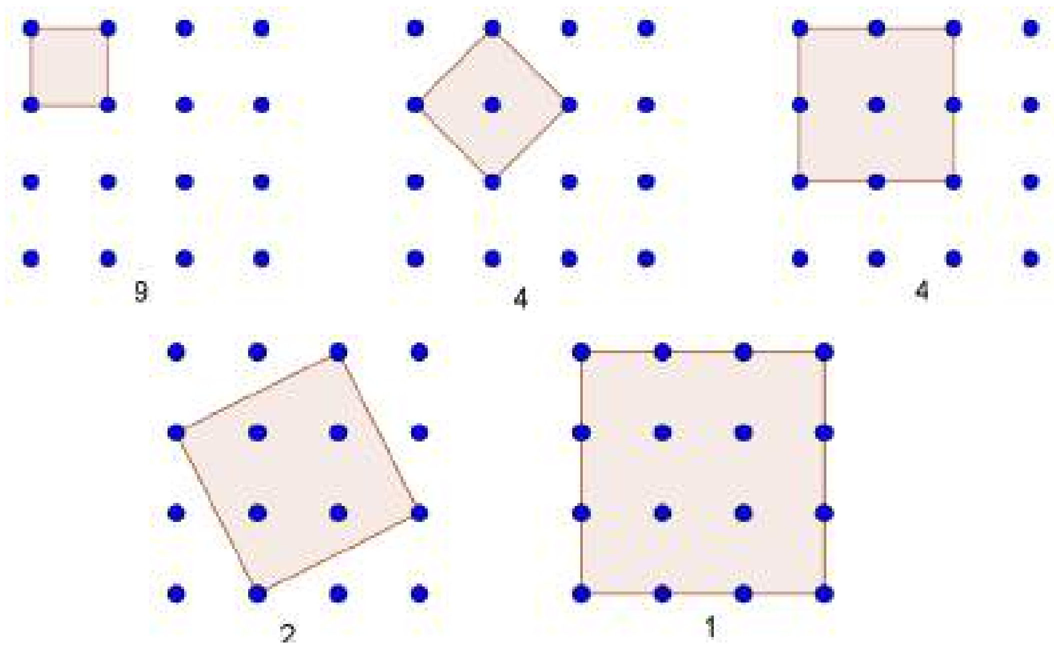
$$240\,000 : 40\,000 = 6.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 35

a) y b) En una cuadrícula de 3 x 3 puntos se pueden dibujar 6 cuadrados de 3 tamaños diferentes.



c) Sobre una cuadrícula de 4 x 4 puntos se pueden dibujar 20 cuadrados de 5 tamaños diferentes.



d) En una cuadrícula de 8 x 8 puntos se pueden dibujar cuadrados de 13 tamaños diferentes y podremos encontrar:

$$1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 6^2 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 4^2 + 5 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 + 7 \cdot 1^2 = 336 \text{ cuadrados.}$$

e) Sobre una cuadrícula de n x n puntos se pueden dibujar cuadrados de 2n - 3 tamaños diferentes y el siguiente número de cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} i \cdot (n-i)^2 = 1 \cdot (n-1)^2 + 2 \cdot (n-2)^2 + 3 \cdot (n-3)^2 + \ldots + (n-1) \cdot 1^2 = \frac{n^4 - n^2}{12}$$