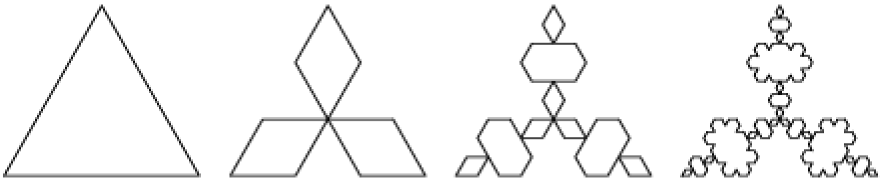
Como vemos en la tabla la sucesión de los perímetros es una sucesión geométrica de razón 4/3. Por lo que su longitud es infinita pues $\lim_{n\to+\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{n-2}}a = +\infty$. La sucesión de las áreas es una sucesión geométrica de razón 4/9. Su superficie es finita pues: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

La propiedad que tienen estas curvas es que siendo su longitud infinita encierran una superficie finita.

La curva "Anticopo de nieve" es la que vemos en el dibujo:



Es la configuración opuesta al copo de nieve. Se forma del mismo modo pero metiendo los triángulos hacia adentro.

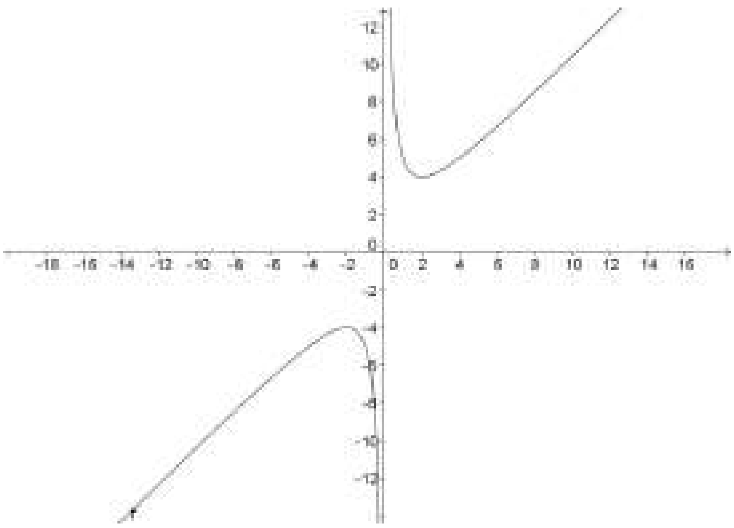
Se obtienen los mismos resultados que en la anterior y tienen la misma propiedad.

UNIDAD 10: Propiedades globales de las funciones

ACTIVIDADES-PÁG. 226

1. El día 31 de julio ocupará una superficie de $1\cdot 1{,}08^{31} = 10{,}87$ cm^2

2. La gráfica buscada podría ser la siguiente:



3. Las características de las funciones aparecen en la tabla.

Características	**a)**	**b)**	**c)**
Dominio	R	R	R
Recorrido	$[0, +\infty)$	[- 1, 1]	R
Simetría	Eje OY	Origen de coordenadas	No tiene
Acotación	Acotada inferiormente	Acotada	No acotada
Extremos relativos	Mínimos en (- 2, 0) y (2, 0) Máximo en (0, 4)	Máximos en $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 1\right)$ con k ∈ Z Mínimos en $\left(\frac{3\pi}{4} + k\pi, -1\right)$ con k ∈ Z	Mínimo en (0, - 1) Máximo en (2, 3)
Periodicidad	No tiene	Periodo T = π	No tiene
Tendencias	$Si\ x \to -\infty \Rightarrow f\ (x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty \Rightarrow f\ (x) \to +\infty$	No tiene	$Si\ x \to -\infty \Rightarrow f\ (x) \to +\infty$ $Si\ x \to +\infty \Rightarrow f\ (x) \to -\infty$

ACTIVIDADES-PÁG. 241

1. Designamos los colores por: rojo (*R*), verde (*V*), azul (*Z*) y amarillo (*A*); y las cuatro formas por: cuadrada (*C*), circular (*O*), triangular (*T*) y pentagonal (*P*).

Por ensayo y error las colocamos en un tablero 4 x 4, cumpliendo las condiciones que marca el enunciado.

Una solución es:

RC	VO	ZT	AP
ZP	AT	RO	VC
AO	ZC	VP	RT
VT	RP	AC	ZO

Podemos encontrar hasta 72 soluciones distintas.

2. El número total de amanitas ha de ser múltiplo de 9 menos 1, es decir, 8 amanitas. Haciendo el problema mediante ecuaciones:

$$\frac{8}{9}x + \frac{8}{9} = x \qquad \Rightarrow \qquad x = 8 \text{ amanitas}$$

3. El enunciado del problema nos muestra que el número de cajitas de zumo debe ser un número impar. Por ensayo y error dirigido obtenemos:

Hay 7 cajitas de zumo.

El 1º amigo se bebe 7/2 + 0,5 = 4 cajitas. Quedan 3 cajitas.

El 2º amigo se bebe 3/2 + 0,5 = 2 cajitas. Queda 1 cajita.

El dueño de la casa se bebe 1/2 + 0,5 = 1 cajita.

Luego, efectivamente, había inicialmente 7 cajitas de zumo.

Este problema se puede resolver también por medio de ecuaciones.

4. Sea *n* un número real.

Veamos si $n^2 (n^2 - 1) = \dot{12}$

$n^2 (n^2 - 1) = n \cdot n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)$

Si $n = \dot{3}$, entonces $n - 1 = \dot{2}$ y también $n + 1$; por lo que $n \cdot (n - 1) \cdot (n + 1)$ es múltiplo de 12.

Si $n - 1 = \dot{3}$, entonces $n = \dot{2}$; por lo que $n \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ es múltiplo de 12.

Si $n + 1 = \dot{3}$, entonces $n = \dot{2}$; por lo que $n \cdot (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ es múltiplo de 12.

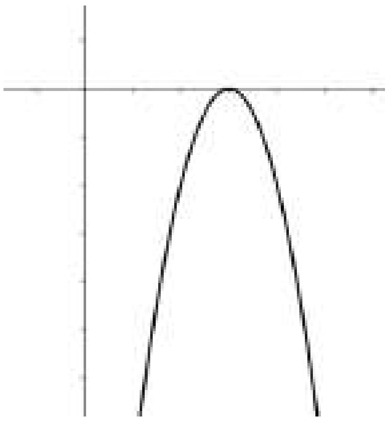
Por tanto en todos los casos se cumple $n^2 (n^2 - 1)$ = múltiplo de 12.

ACTIVIDADES-PÁG. 243

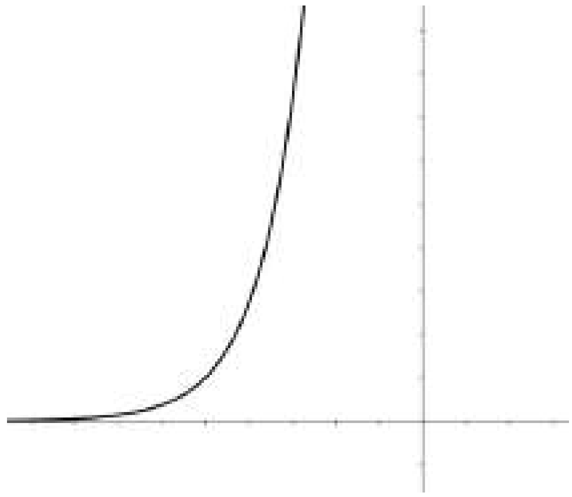
1. a) Introducimos en la pantalla que aparece, después de pulsar la tecla, la expresión:

-X^2 + 12 * X - 36

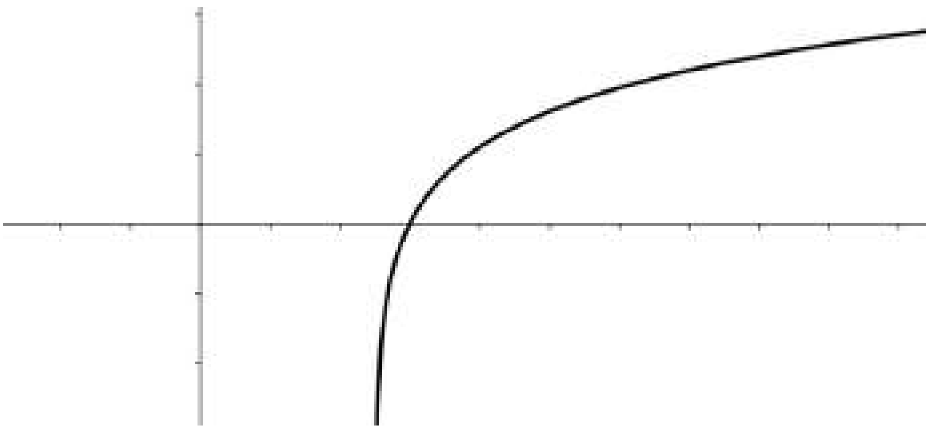
Pulsamos la tecla GRAPH para representar la función, y modificamos las opciones de la pantalla con la WINDOW tecla . Obtenemos la gráfica del dibujo.



b) Procediendo como en el apartado anterior y tecleando **e^(X+5)**, obtenemos:



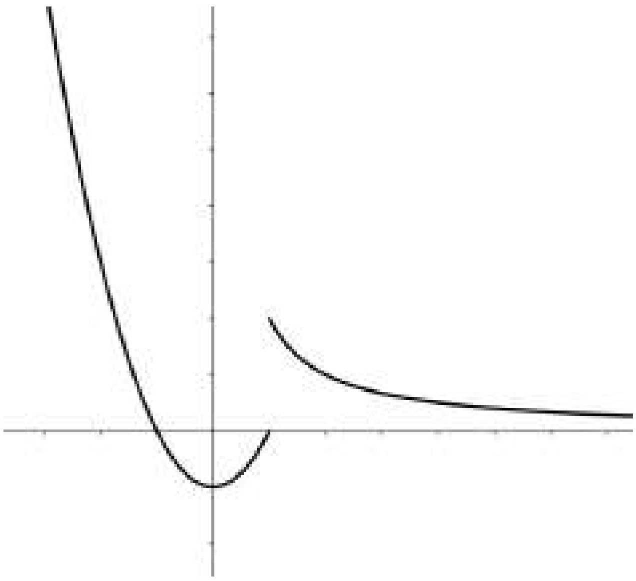
c) Procediendo como en los apartados anteriores y tecleando **ln(2*X-5)**, obtenemos:



2. a) Escribimos en **Y_1=** la expresión:

(X^2 – 1) * (X < 1) + (2/X) * (X ≥ 1)

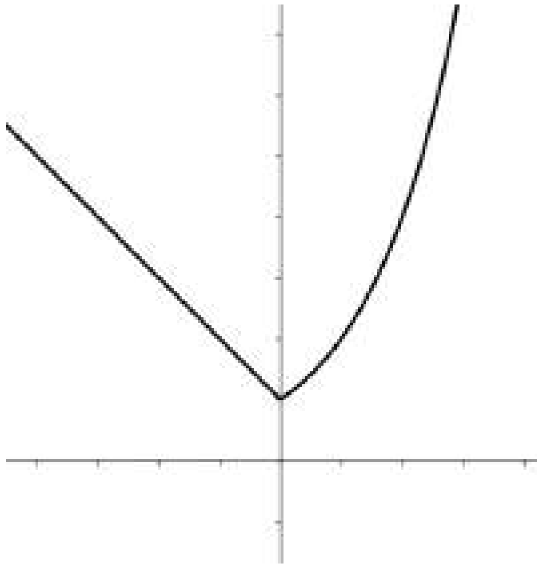
y obtenemos la gráfica:



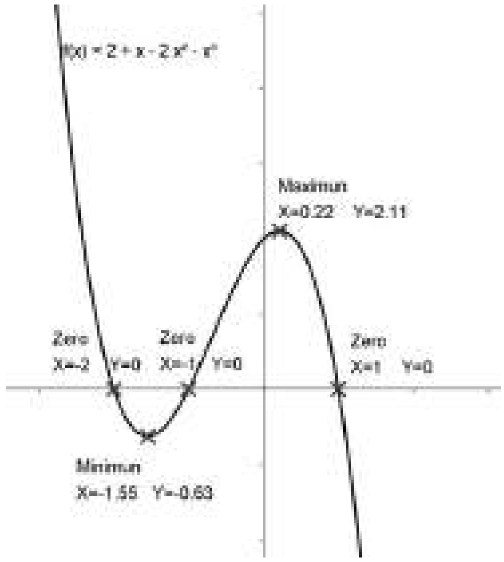
b) Escribimos en **Y1=** la expresión:

(-X + 1) * (X ≤ 0) + (2^X) * (X > 0)

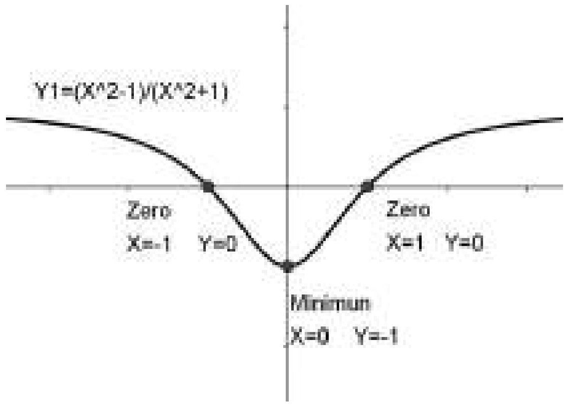
y obtenemos la gráfica:



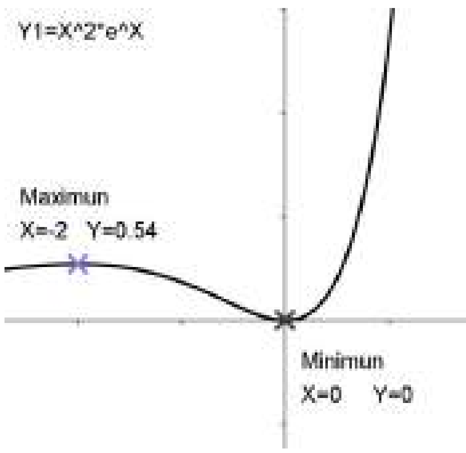
3. a) Representamos la función f (x) = 2 + x - 2x^2 – x^3 y con las opciones del menú que ofrece la tecla 2nd CALC obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene tres cortes con OX en los puntos (- 2, 0); (- 1, 0) y (1, 0); un máximo relativo en (0,22; 2,11) y un mínimo relativo en (- 1,55; - 0,63).



b) Para la función g (x) = $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ procedemos como en el apartado anterior y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene dos cortes con OX en los puntos (- 1, 0) y (1, 0) y un mínimo relativo en (0, - 1).



c) Para la función h (x) = $x^2 \cdot e^x$ procedemos como en los apartados anteriores y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene un corte con OX en el punto (0, 0); un máximo relativo en (-2; 0,54) y un mínimo relativo en (0, 0).



ACTIVIDADES-PÁG. 244

1. En la tabla aparecen los resultados.

Valores	a) $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$	b) $g(x) = \sqrt{x+1}$	c) $h(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x}}$
- 2	Si	No	Si
- 1/2	Si	Si	Si
0	No	Si	Si
1/3	Si	Si	Si
1	Si	Si	No
$\sqrt{3}$	Si	Si	No
2	Si	Si	No

2. Las respuestas son:

a) Dom f = R; Im f = $(-\infty, 0]$

b) Dom f = [- 2,5; 2,5] Im f = {- 2, - 1, 0, 1, 2}

c) Dom f = $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ Im f = $(0, +\infty)$

3. Los dominios de las funciones son:

a) Dom f = R

b) Dom f = R – {0, - 2}

c) Dom f = [- 2, 2]

d) Dom f = R

e) Dom f = $(-2, +\infty)$

f) Dom f = R

g) Dom f = R

h) Dom f = $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

i) Dom f = R – { k · π; k ∈ Z}

4. a) Siempre se verifica que $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ por tanto si sumamos 2 en todos los miembros se mantiene la desigualdad $-1 + 2 \leq 2 + \cos 2x \leq 1 + 2$, de donde, $1 \leq 2 + \cos 2x \leq 3$, por lo que la función dada esta acotada entre 1 y 3

b) Por un lado $\frac{6}{x^2+3} > 0$ siempre, pues esta función racional siempre es positiva.

Por otro lado vamos a ver que $\frac{6}{x^2+3} \leq 2$; $\frac{6}{x^2+3} - 2 = \frac{-2x^2}{x^2+3} \leq 0$ siempre.

Por tanto $0 < \frac{6}{x^2+3} \leq 2$ es decir esta acotada por 0 y 2.

5. a) Dom f = R – {- 2, 2}; Im f = R.

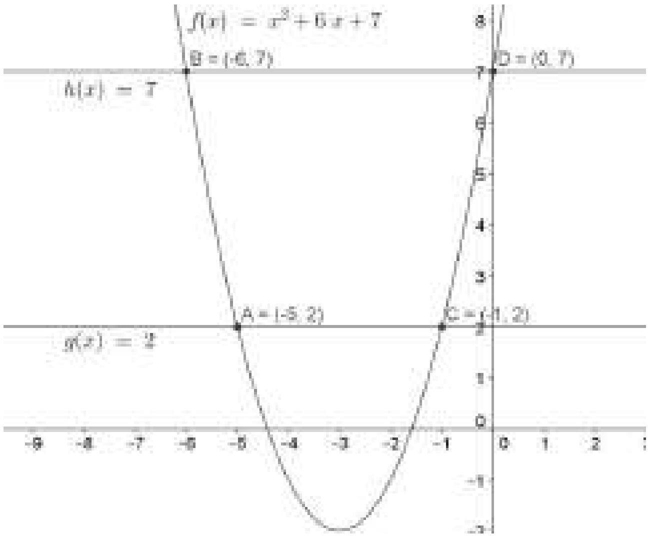
Estrictamente creciente en $(-\infty, -3{,}46) \cup (3{,}46\,;+\infty)$.
Estrictamente decreciente en $(-3{,}46\,;3{,}46) - \{-2\,,2\}$.
Tiene un máximo relativo en (- 3,46; - 5,2) y mínimo relativo en (3,46; 5,2).

b) Dom f = R; Im f = $(-\infty\,,0]$
Estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$.
Estrictamente decreciente en $(0\,,+\infty)$.
Máximo relativo (0, 0).

6. a) Se han de verificar las siguientes inecuaciones: $2 \leq x^2 + 6x + 7 \leq 7$.

Las soluciones son todos los valores de x pertenecientes a $[-6, -5] \cup [-1\,,0]$.

En el dibujo vemos también la solución:



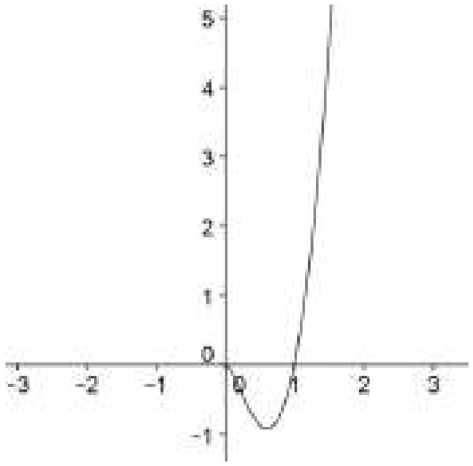
b) Se ha de verificar que $(x + 2)^2 + 6(x + 2) + 7 > x^2 + 6x + 7$.

De donde obtenemos $x > -4$.

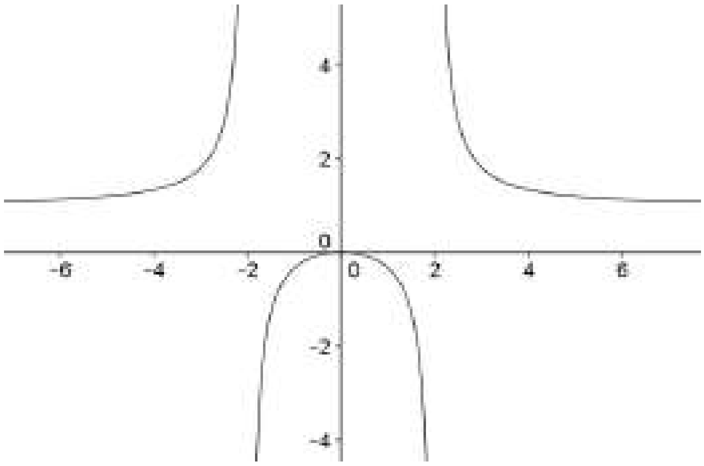
ACTIVIDADES-PÁG. 245

7. Las gráficas pueden ser como las que aparecen el los gráficos que sigue.

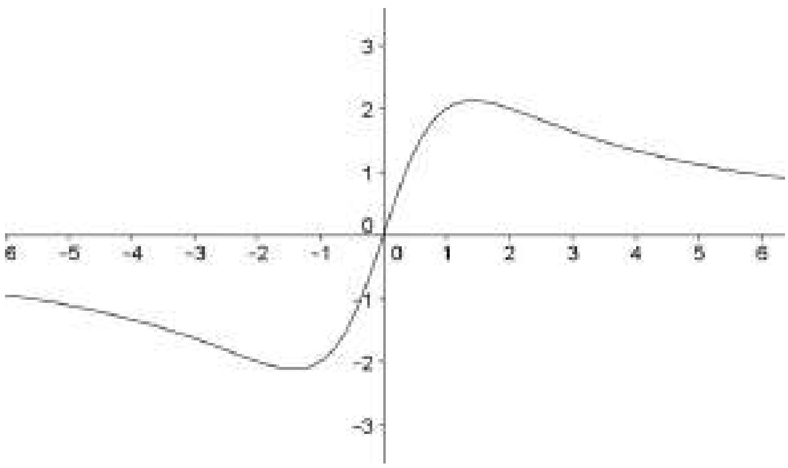
a)



b)



c)



8. Las características de las funciones aparecen en la tabla.

Características	a) y = f (x)	b) y = g (x)
Dominio	R	R
Recorrido	$[0, +\infty)$	[- 1, 1]
Acotación	Acotada inferiormente	Acotada
Monotonía	Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ Creciente en (0, 2)	Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ Creciente en (-1,1)
Extremos relativos	Mínimo en (0, 0) Máximo en (2; 0,54)	Mínimo en (- 1, - 1) Máximo en (1, 1)
Simetría	No tiene	Respecto del origen de coordenadas

9. Las respuestas son:

a) Simétrica respecto al origen de coordenadas.

b) Simétrica respecto al eje de ordenadas.

c) Simétrica respecto al eje de ordenadas.

d) Simétrica respecto al eje de ordenadas.

e) Simétrica respecto al origen de coordenadas.

f) Carece de simetría.

10. Ambas funciones son periódicas, entendiendo que continúan de igual forma a izquierda y derecha. La función y = f (x) tiene de periodo T = 2 y la función y = g (x) tiene de periodo T = 5.

11. Las respuestas aparecen a continuación.

a) $(f + h)(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 - 4}$ Dom (f + g) = R - $\{+2, -2\}$

b) $(f \cdot h)(x) = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$ Dom (f · h) = R - $\{+2\}$

c) $(f : g)(x) = \dfrac{x+2}{(x-2) \cdot e^{2x}}$ Dom (f · g) = R - $\{+2\}$

d) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}$ Dom (f^{-1}) = R - $\{+1\}$

e) $((f - h) \cdot g)(x) = \dfrac{(x^2 + 4x + 8)e^{2x}}{x^2 - 4}$ Dom ((f - h) · g) = R - $\{+2, -2\}$

f) $(g + h)(x) = e^{2x} - \dfrac{4}{x^2 - 4}$ Dom (g + h) = R - $\{+2, -2\}$

g) $g^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right)$ Dom $g^{-1} = (0, +\infty)$

12. Las funciones y valores pedidos son.

a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x+11}{(x+4)^2}$

c) $(h \circ h \circ h)(x) = x$

b) $(g \circ g)(-4) = 2$

d) $(h \circ f)(1) = 4/5$

ACTIVIDADES-PÁG. 246

13. a) El parámetro vale a = - 3.

b) El parámetro vale a = - 3

14. Las funciones inversas pedidas son:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{2}x - 6$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{1-2x}$

c) $f^{-1}(x) = \log_2(x-3)$

d) $f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2}{3}$

e) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 - 2}{3}$

f) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3 + 3}{2}$

15. Resolvemos la ecuación $\left|\dfrac{2-x}{x}\right| = \dfrac{2}{x+1}$ y obtenemos x = 1; x = - 2; x = $\dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

16. a) Llamando x a la longitud de la base, la función que nos permite hallar el área es A(x) = x (20 – x).

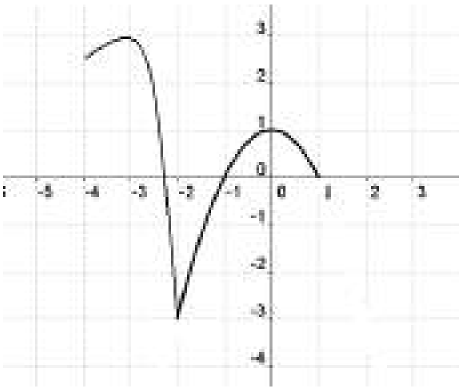
El dominio de esta función es (0, 20) y el recorrido (0, 100]

b) Llamando x al número de estudiantes que van al museo la función que da el precio a pagar por cada uno de ellos es: P(x) = 600 / x.

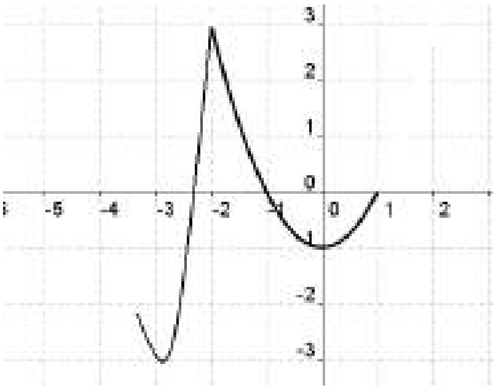
El dominio de esta función es [1, 50] y el recorrido es [12, 600]

17. La función buscada es f (r) = 450 r – (π + 4) r^2

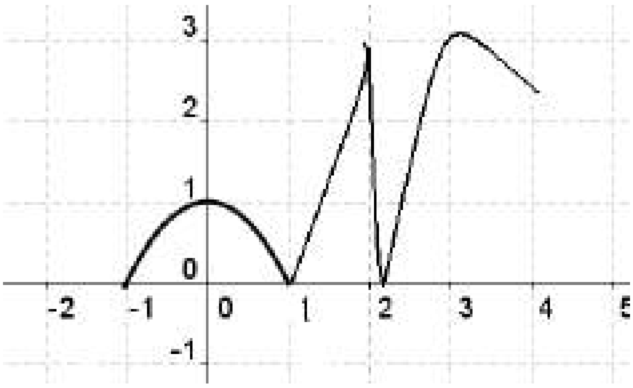
18. a) La simétrica respecto a OY quedaría:



b) La simétrica respecto del origen sería:



c) La gráfica de la función y $=|f(x)|$ sería:



19. La función buscada es $f(x)=\begin{cases} 400 & si \quad 0<x<30 \\ 12x & si \quad 30\leq x\leq 60 \\ 50+8x & si \quad x>60 \end{cases}$

20. Las respuestas a los apartados son:

a) El beneficio es de 338,56 €.

b) La función beneficio es B(x) = $\frac{104}{9}x - \frac{7}{100}x^2 - \frac{35}{3}$

c) El beneficio es nulo si vende aproximadamente 1 kg o 164 kg.

ACTIVIDADES-PÁG. 247

Ofrecemos bibliografía sobre la relación entre matemáticas y deporte.

BOLT, B. y HOBBS, D. (1991). *101 proyectos matemáticos.* Labor. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (2007) *Matemáticas en la vida misma.* Graó. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (201) *Matemáticas de cerca.* Graó. Barcelona.

ORTEGA, Tomás. (2005). *Conexiones matemáticas.* Graó. Barcelona.

SORANDO MUZÁS, J. M. (2012) *Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula.* Revista Números. Volumen 80.

SORANDO MUZÁS, J. M. http://catedu.es/matematicas_mundo/

VV. AA. (2013). *Matemáticas y deporte.* Revista UNO. Graó. Barcelona.