INICIAMOS EL TEMA

¿Qué vamos a aprender?

■ El objetivo de esta unidad didáctica es introducir el concepto de función analizando las propiedades de sus gráficas y reconociendo alguno de los tipos de funciones más importantes.

Para empezar leeremos el texto introductorio que destaca la existencia de relaciones entre diferentes variables y utilizaremos la imagen de presentación para ponerlas de manifiesto:

– *¿De qué depende el precio de alquiler de una canoa?*

– *¿De qué depende el precio de pintar una habitación de la casa?*

– *¿Qué dos variables se relacionan en el ejemplo del alquiler de una canoa?*

– *¿Qué dos variables se relacionan en el ejemplo de pintar una habitación?*

– *¿Qué dos variables se relacionan en el ejemplo del beneficio de la venta de un producto?*

■ A continuación revisaremos con atención el índice de contenidos y el esquema de esta unidad didáctica, incidiendo en algunos conceptos básicos:

– *¿Cómo se puede describir una función?*

– *¿Qué características tiene la gráfica de una función?*

– *¿Conoces algún tipo de función?*

Empezamos la unidad

■ El documento *Para empezar...* incluye una colección de ejercicios en la que se utilizan contenidos introducidos anteriormente que son fundamentales para trabajar con funciones:

– En las actividades 1 y 2 se repasan los conceptos de coordenadas cartesianas que se aplican en la representación de funciones.

– La actividad 3 revisa uno de los tipos posibles de relación entre dos variables: la proporcionalidad directa.

– En la actividad 4 se manipulan expresiones algebraicas de sistemas de ecuaciones lineales.

– La actividad 5 trabaja expresiones que encontraremos en funciones cuadráticas.

■ Para concluir esta introducción a la unidad, el alumnado resolverá por parejas las actividades planteadas en el apartado *Para empezar*.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 3.* Leer e interpretar el enunciado que contiene léxico técnico específico.

APRENDER A APRENDER

■ *Acts. 1, 2, 3, 4 y 5.* Propiciar el conocimiento de las propias potencialidades y carencias en el tema que comienza por medio de la realización de estas actividades iniciales.

■ *Acts. 1, 2 y 5.* Saber transformar la información sobre funciones y álgebra, adquirida en cursos anteriores en conocimiento propio.

■ *Esquema pág. 234.* Visualizar y desarrollar la capacidad de comprender e integrar información sintetizada en un esquema.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Texto pág. 234.* Valorar el uso y la necesidad de las funciones para relacionar dos variables y para facilitar la comprensión visual de su nexo.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Actividades.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos previos que se tienen sobre las potencias.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para empezar el tema de las funciones, proponemos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749827

Pediremos a nuestros alumnos que accedan al enlace y sigan las instrucciones, con la intención de detectar los conocimientos previos que tienen sobre funciones y gráficas.

Se compone de una pantalla interactiva, con diferentes apartados. En primer lugar prestaremos atención al esquema conceptual muy completo y detallado de la unidad con una explicación teórico-práctica con soporte acústico y visual que facilita la atención.

También pediremos que realicen los ejercicios autocorrectivos para que ellos mismos comprueben el nivel y los conocimientos de que parten.

A continuación, para seguir introduciendo la unidad preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Qué utilidad crees que tiene la representación gráfica de datos? ¿Por qué se utiliza tanto?*
- *¿Qué es el origen de coordenadas?*

Educamos en valores

Valoración de la tecnología como soporte al desarrollo científico y social

■ La evolución de la sociedad está estrechamente relacionada con el desarrollo de nuevas tecnologías que permiten los avances científicos y sociales.

Este valor se puede trabajar mediante algunas actividades de la unidad didáctica.

– En las págs. 247 y 248 del tema el alumnado aprenderá a utilizar una herramienta de representación de funciones.

– Las actividades de las páginas 246 y 248 darán una idea al alumnado de la rapidez con la que puede resolverse un ejercicio si utilizamos las tecnologías.

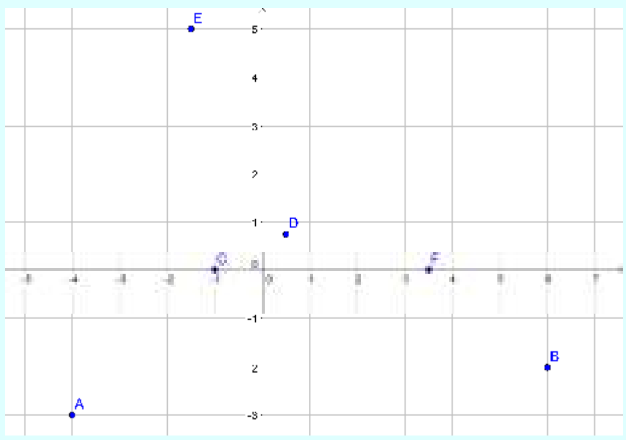
Libro Digital

■ *Actividades autocorrectivas* que el alumnado podrá resolver individualmente y comprobar si las soluciones son correctas. *Actividades abiertas* que el alumnado podrá solucionar y el profesor o profesora posteriormente corregirá.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 235

1. La representación es la siguiente:

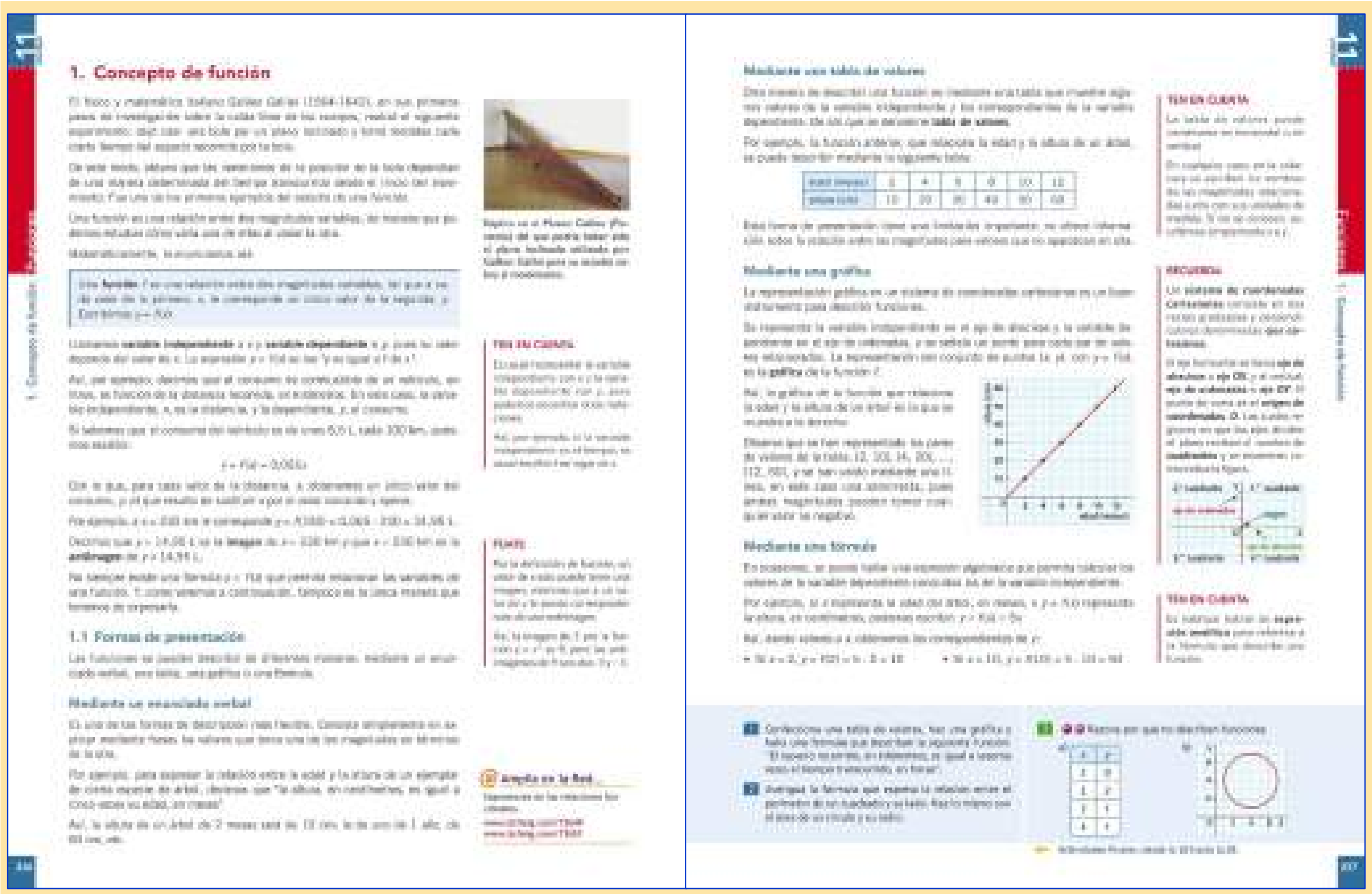


2. Actividad personal. A modo de ejemplo:

(–7, 0), (4, 0), (7, 3)

3. Que dos magnitudes sean proporcionales significa que el aumento o disminución de una, causa una aumento o disminución en la otra en la misma medida.

(Continúa en la página 11-32 de la guía)



1. CONCEPTO DE FUNCIÓN

■ El objetivo básico de esta sección es introducir el concepto de función y la terminología que se emplea al describir una relación funcional.

Para empezar los alumnos y alumnas leerán los tres primeros párrafos analizando la relación funcional que se describe:

- *¿Cuáles son dos las variables que se citan en este experimento?*
- *¿Hay una variable que dependa de la otra?*

■ A continuación leerán la definición de función y el texto que introduce los conceptos de variable independiente, dependiente, imagen i antiimagen:

- *¿Qué es una función?*
- *¿Qué es la variable independiente? ¿Con qué letra se representa?*
- *¿Qué es la variable dependiente? ¿Con qué letra se representa?*
- *¿Cuál es la imagen de 1 en la función representada?*
- *¿Cuál es la antiimagen de 0,065 en esta función?*

■ Es importante destacar el contenido del documento *Fíjate* para que el alumnado sepa distinguir aquellas relaciones que no son funciones debido a que el valor de x tiene más de una imagen.

1.1 Formas de presentación

■ Proseguiremos leyendo el primer subapartado, en el que comentaremos la función descrita verbalmente:

- *¿Cuáles son las dos variables que se relacionan?*
- *¿Cuál es la variable independiente?*
- *¿Cuál es la variable dependiente?*
- *¿Cuál es la altura de un árbol de 24 meses?*

■ Seguidamente seguiremos una metodología similar para presentar las otras formas de descripción de una función:

- *¿Cuál es la variable independiente en la tabla de valores?*
- *¿Cuál la variable dependiente en la gráfica?*
- *¿Cuál es la imagen de 20 en la fórmula propuesta?*

Como repaso de estos conceptos introducidos, el alumnado puede acceder a los recursos indicados en el documento *@Amplía en la Red.*

La nota *Recuerda* nos permite describir la gráfica de una función aplicando la terminología propia de los sistemas de coordenadas.

Después afianzará los conocimientos teóricos adquiridos por medio de los ejercicios planteados en el libro.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Acts. 1 y 2.* Leer, comprender e interpretar los enunciados de los problemas para poder resolverlos.
- *Act. 3.* Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios a partir de la información dada en la gráfica y la tabla.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 3.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridos para resolver los ejercicios propuestos.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 2.* Afrontar los problemas siendo creativo, flexible en los planteamientos y perseverante en la solución, aplicando eficientemente los conocimientos adquiridos.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ El concepto de función se aplica en las actividades de refuerzo 1 y 2, en cuento se utiliza la forma gráfica de las funciones.

✓ Las actividades de ampliación 1 y 2 permitirán evaluar si el alumnado sabe interpretar la forma gráfica de una función analizando los parámetros que se utilizan para su descripción.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Proponemos entrar en el siguiente enlace para practicar la conversión a otros códigos de una relación funcional:

http://www.tiching.com/749828

En esta página web encontrarán un recurso didáctico que con ayuda del aplicativo GeoGebra les permitirá, de forma interactiva, comprobar por ellos mismos los conceptos que hemos explicado.

Les pediremos que resuelvan los seis ejercicios propuestos. Se trata de enunciados verbales de problemas que tendrán que convertir a tablas de valores, gráficas o expresiones algebraicas.

Automáticamente, gracias al aplicativo, verán su representación gráfica y comprobar la relación entre las magnitudes del enunciado.

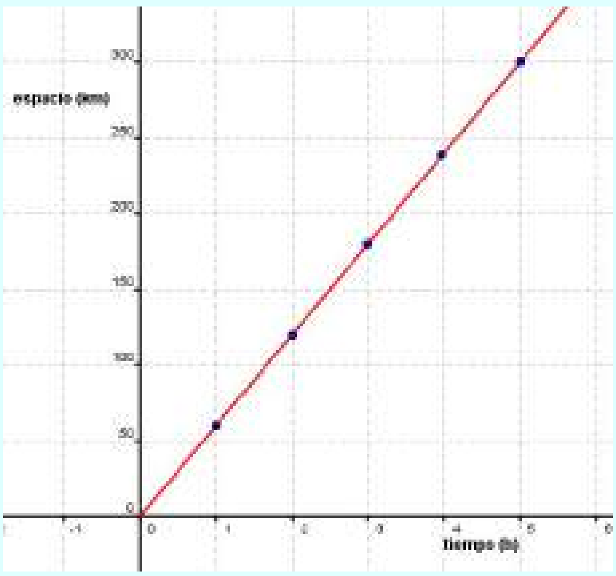
A continuación podemos pedir a los alumnos que formen parejas y que piensen dos enunciados verbales y, sin ayuda del aplicativo, el compañero lo expresará gráficamente.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 237

1. La tabla de valores, la gráfica y la formula son:

Tiempo (h)	1	2	3	4	5
Espacio (km)	60	120	180	240	300



$y = 60 \cdot x$, donde x es el tiempo e y el espacio.

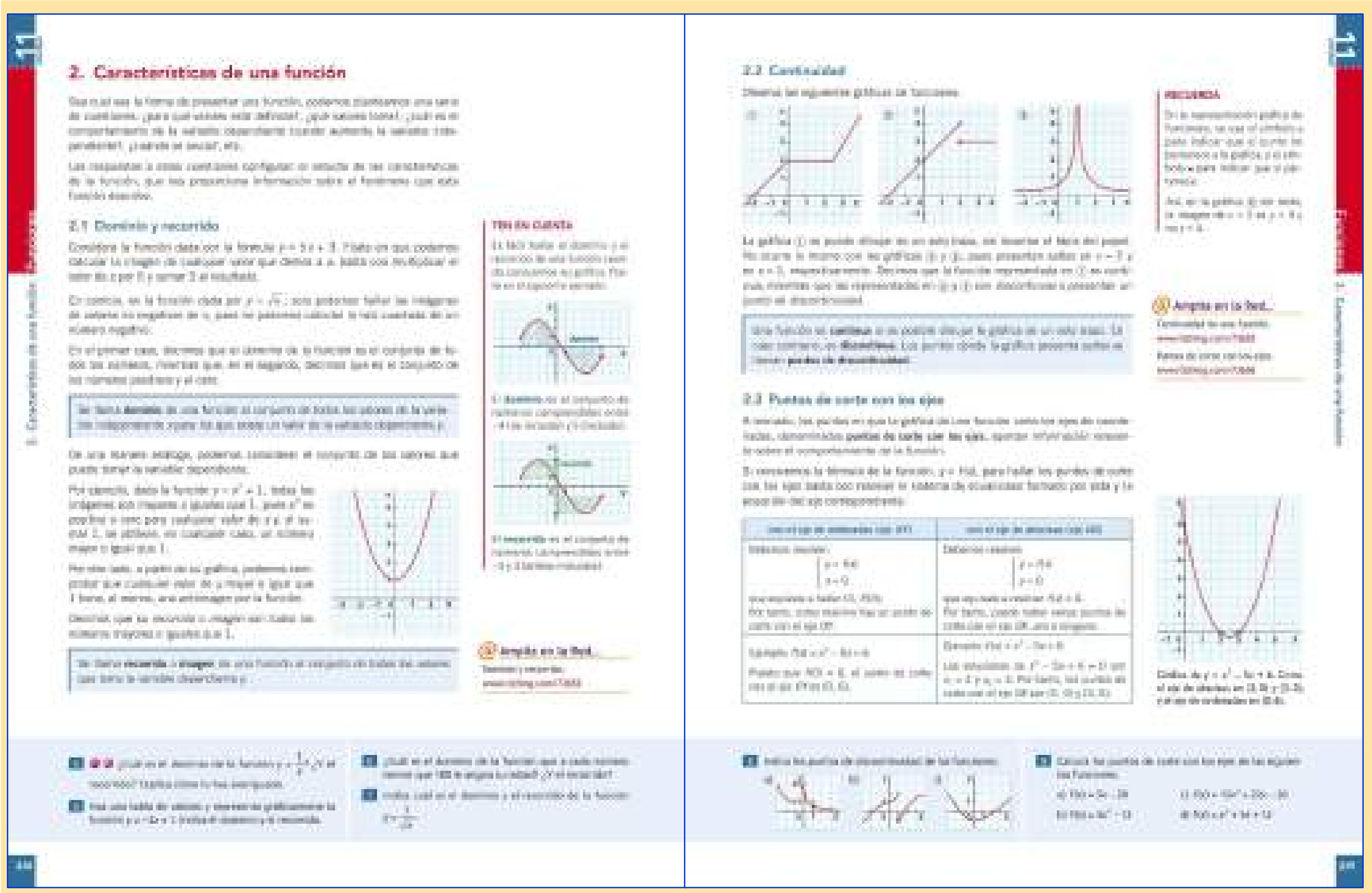
2. Si x representa al lado del cuadrado e $y = f(x)$ representa su perímetro: $y = 4x$.

Si x representa al radio del círculo e $y = f(x)$ representa su área: $y = \pi x^2$.

3. Los razonamientos son los siguientes:

a) No describe a una función porque para el mismo valor $x = 2$, le corresponden dos valores distintos de y: $y = 0$, $y = 2$.

b) No describe a una función porque para un mismo valor de x, por ejemplo $x = 4$, le corresponden dos valores distintos de y: $y = 1$, $y = 7$.



2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

■ En esta sección vamos a analizar las características que nos permiten describir una función y el proceso o fenómeno que representa.

Para empezar, los alumnos y las alumnas leerán los dos primeros párrafos que introducen el objetivo general que nos proponemos alcanzar.

2.1 Dominio y recorrido

■ A continuación pueden leer los cuatro primeros párrafos de este apartado en el que se introduce el concepto de dominio:

– *¿Cuál es el dominio de la función y = 5x +3? ¿por qué?*
– *¿Por qué el dominio de la segunda función no incluye todos los números?*

Seguidamente pueden aplicar la misma metodología para trabajar el concepto de recorrido:

– *¿Qué valores forman el recorrido o imagen de una función?*
– *¿Cuál es el recorrido de la función representada en la gráfica?*

Después pueden leer el documento del margen *Ten en cuenta*, que refuerza la diferencia entre dominio y recorrido de una función a partir de su gráfica.

Para aplicar estos conceptos, el alumnado resolverá las actividades de la página 238 del libro y compararán los resultados obtenidos entre sí:

2.2 Continuidad

■ Seguidamente leerán el texto de este apartado y reconocerán la continuidad y las discontinuidades representadas en las tres gráficas:

– *¿Por qué es continua la función 1?*
– *¿Por qué es discontinua la función 2? ¿Qué representan los círculos blanco y rojo?*
– *¿Por qué es discontinua la función 3?*

2.3 Puntos de corte con los ejes

■ Después de leer este apartado, analizaremos el ejemplo propuesto y comprobaremos los puntos de corte en la gráfica adjunta:

– *¿Cómo se hallan los puntos de corte con el eje OY?*
– *¿Cómo se hallan los puntos de corte con el eje OX?*
– *¿Siempre hay puntos de corte con los ejes?*

A continuación accederán a los recursos web indicados en el epígrafe *@Amplía en la Red* y finalmente pueden resolver por parejas los ejercicios de la página 239 y comprobar las soluciones obtenidas.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 4*. Desarrollar la capacidad de formular y expresar argumentos propios y de generar ideas e hipótesis.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 5, 6 y 7.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, debido al carácter repetitivo de las actividades.
- *Acts. 9.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos para comprobar o razonar la respuesta.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 4*. Ser capaz de proponer ejemplos siendo creativo y mostrar criterio propio al buscar las respuestas.
- *Act. 8*. Identificar en la realización de las actividades y problemas, las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

- ✓ La continuidad de una función y los puntos de corte de la función con los ejes se estudian en la actividad de refuerzo 1.
- ✓ La actividad de ampliación 3 permite aplicar el concepto de continuidad de una función.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Podemos ampliar la información sobre las características de las funciones accediendo a este enlace:

http://www.tiching.com/749829

El proyecto Descartes Ed@d ofrece recursos didácticos para trabajar las funciones. En esta página web los alumnos podrán encontrar las definiciones más relevantes.

Nos interesará que asimilen bien los conceptos de variables, continuidad, dominio y recorrido así como el punto de corte. Para ello, les pediremos que accedan a las actividades interactivas en las que podrán practicar con diferentes ejemplos.

Antes de introducirnos en el recurso, les pediremos que respondan a las siguientes preguntas:

- *¿Sabes qué relaciona una función?*
- *¿Puede una circunferencia ser la gráfica de una función? ¿Por qué?*

Como son actividades autocorrectivas, permiten un aprendizaje autónomo y crean motivación entre ellos.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

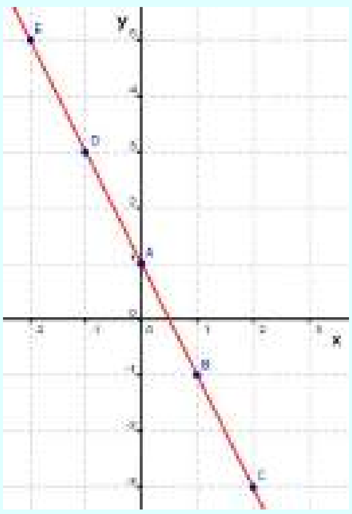
Página 238

4. El dominio es el conjunto de todos los números, excepto el cero. El recorrido es el conjunto de todos los números, excepto el cero.

Para obtener el dominio hemos tenido en cuenta los posibles valores de x, y que no se puede dividir entre cero; y para el recorrido los posibles valores de y, y que al dividir 1 entre cualquier número nunca puede ser cero.

5. La tabla de valores y la gráfica son las siguientes:

x	y
0	1
1	–1
2	–3
–1	3
–2	5



El dominio es el conjunto de todos los números.

El recorrido es el conjunto de todos los números.

6. El dominio es el conjunto de todos los números menores que 100.

El recorrido es el conjunto de todos los números menores que 50.

7. El dominio es el conjunto de todos los números positivos.

El recorrido es el conjunto de todos los números positivos, sino tenemos en cuenta los resultados negativos de la raíz.

Pág. 239

8. Las discontinuidades son:

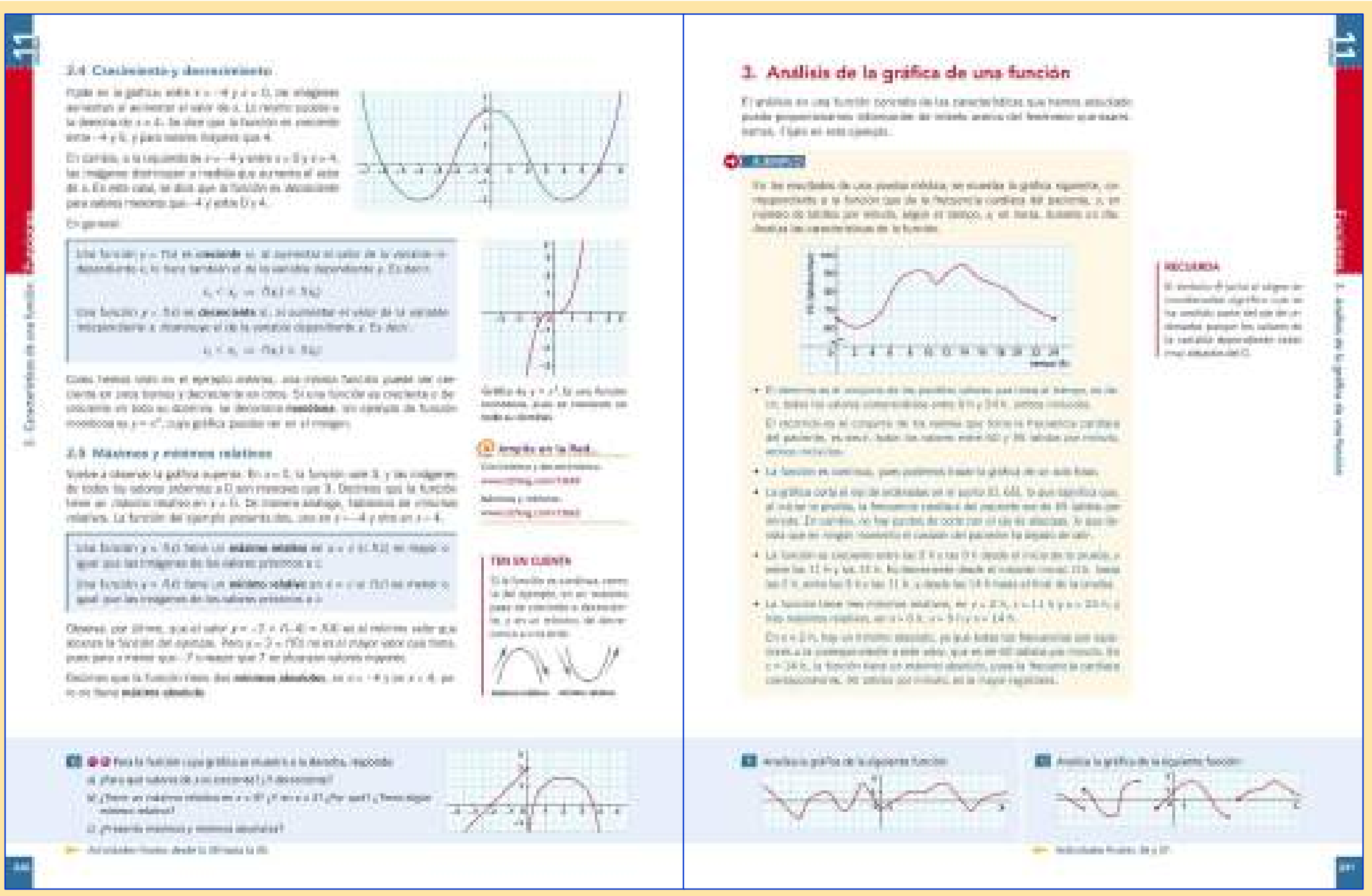
a) $x = -1, x = 1$ b) $x = 1$ c) $x = 0$

9. Los puntos de corte son:

a) Con el eje OY: puesto que $f(0) = -20$, el punto de corte con el eje OY es $(0, -20)$.

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación $5x - 20 = 0$; $5x = 20$; $x = 4$. Por tanto, el punto de corte con el eje OX es $(4, 0)$.

(Continúa en la página 11-32 de la guía)



2. CARACTERÍSTICAS (CONT.) / 3. ANÁLISIS…

2.4 Crecimiento y decrecimiento

■ El objetivo básico de este apartado es identificar el carácter creciente o decreciente de una función o de sus diferentes tramos.

Para empezar leeremos el texto del apartado y comprobaremos la monotonía de las dos funciones que se proponen y se representan*:*

– *¿En qué intervalos es creciente la primera función? ¿Dónde es decreciente?*
– *¿En qué intervalo es creciente la segunda función?*
– *¿Sabrías dibujar la gráfica de una función que no fuera creciente ni decreciente?*

Después pueden practicar estos contenidos en las actividades finales 32 y 33 de la página 250.

2.5 Máximos y mínimos relativos

■ Continuaremos leyendo este apartado, comentando con el alumnado los siguientes puntos destacados:

– *¿Cómo se reconoce un máximo o un mínimo relativo en la gráfica de una función?*
– *¿Qué máximos y mínimos relativos tienen las dos funciones representadas anteriormente?*
– *¿En estas gráficas cuáles son los máximos y mínimos absolutos?*

Leeremos ahora la nota *Ten en cuenta* del margen, que presenta un criterio para identificar los máximos y los mínimos relativos.

A continuación pueden utilizar los recursos de Internet que se indican en el documento *@Amplía en la Red…*

Seguidamente pueden resolver la actividad 10 de la página 240 y las actividades finales 34 y 35 aplicando la identificación de máximos y mínimos.

3. Análisis de la gráfica de una función

■ En esta sección aplicaremos los conceptos anteriores al estudio de la función que describe un determinado proceso o fenómeno.

Las alumnas y los alumnos leerán el ejemplo que se propone e interpretarán la gráfica en el contexto indicado:

– *¿Con qué variable se relaciona el dominio de la función?*
– *¿Con qué variable se relaciona el recorrido de la función?*
– *¿En qué intervalos es creciente?*

Después leerán la nota del margen *Recuerda* que facilita la interpretación de la gráfica.

Finalmente resolverán las actividades 11 y 12 de la página 241 y las actividades finales 36 y 37.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Act. 10.* Leer, comprender e interpretar el enunciado procesando los datos de manera adecuada para responder la actividad.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Act. 10.* Potenciar las habilidades para analizar la información que aparece en una gráfica.

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 10.* Trabajar el análisis de la gráfica de una función y saber extraer toda la información aprendida.

■ *Acts. 11 y 12.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos sobre las funciones.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Acts. 10, 11 y 12.* Reflexionar antes de resolver las actividades y tomar decisiones de forma razonada, aplicando los conocimientos y las estrategias aprendidas de manera sistemática.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ En las actividades de refuerzo 1 y de ampliación 3 se aplica el concepto de crecimiento de una función.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para practicar la interpretación correcta de gráficas de funciones proponemos el recurso del siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749830

El proyecto Gauss contiene actividades interactivas para que los alumnos practiquen y se familiaricen con la lectura y el análisis de una gráfica muy actual como es la telefonía móvil y la aplicación de diferentes tipos de cuotas.

A continuación, ejecutarán las instrucciones y tendrán que resolver las preguntas que se les indican.

Podemos realizarlo en el aula, generando un debate, para que puedan observar como cambian las gráficas en función del criterio que se aplique y que aprendan a fijarse en lo más destacable.

Al terminar, preguntaremos a nuestros alumnos:

- *¿Crees que puede ser útil un control mensual del consumo de telefonía móvil, según tipo de contrato y gasto en minutos?*
- *Busca una factura y comprueba si hay algún gráfico descriptivo y comentadlo en clase.*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 240

10. Las respuestas son las siguientes:

a) Es creciente para valores menores que 2. Y es decreciente para valores mayores que 2.

b) En x = 0 tenemos un máximo relativo, porque ese punto está contenido en la recta creciente.

En x = 2 sí tiene máximo relativo, porque en ese punto la función vale 1,5 y las imágenes de todos los valores próximos a 2 son menores que 1,5.

No tiene ningún mínimo relativo, aunque sí que tiene un máximo absoluto en x = 0.

Página 241

11. El dominio es el conjunto de todos los números reales.

El recorrido: conjunto de todos los números entre 2 y –2 ambos incluidos.

Es continua, pues podemos trazar la gráfica de un solo trazo.

Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –1) y al eje de abscisas en los puntos (1,5; 0), (9, 0), (11, 0), (–1,5; 0), (–3, 0), (–5, 0), (–8, 0) y (–11, 0).

Es creciente desde –9 a –6, desde –4 a –2, desde 0 a 3, desde 5 a 7 y a partir de 10. Es decreciente hasta –9, desde –6 a –4, desde –2 a 0 y desde 7 a 10. Es constante entre 3 y 5.

Tiene tres mínimos relativos, en x = –9, x = –4, x = 0 y x = 10. Tiene tres máximos relativos, en x = –6, x = –2 y x = 7. Hay un mínimo absoluto en x = –9, ya que todos los demás valores de la gráfica están por encima de la imagen de ese valor, que es –2.

12. El dominio es el conjunto de todos los números menores que –4, los números entre –2 (incluido) y 6 (sin incluir) y los números mayores o iguales a 7.

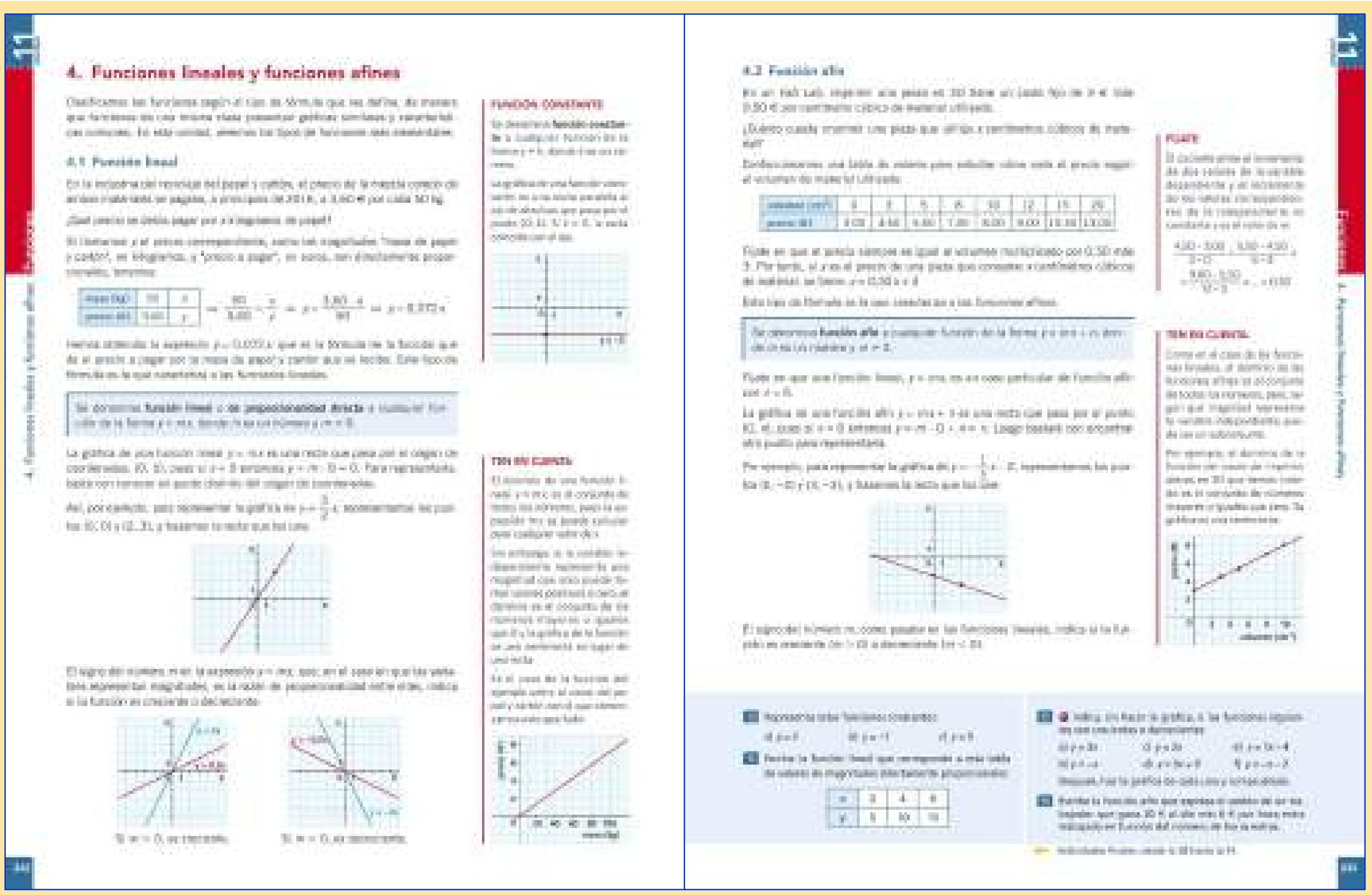
El recorrido: conjunto de todos los números entre –2 y 2.

Es discontinua, pues no podemos trazar la gráfica de un solo trazo.

Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 1) y al eje de abscisas en los puntos (-12, 0), (-9, 0), (-6, 0) , (1, 0), (4, 0), (7, 0).

Es creciente desde -7 a -4, desde -2 a 2, y desde 7 a 11. Es decreciente hasta -7, desde 2 a 6, y desde 11 en adelante.

Tiene un mínimo relativo, en x = –7. Tiene dos máximos relativos, en x = 2 y x = 11. Hay un mínimo absoluto en x = –7, ya que todos los demás valores de la gráfica están por encima de la imagen de ese valor, que es -2. Hay un máximo absoluto en x = 2 y x = 11, ya que todos los demás valores de la gráfica están por debajo de la imagen de ese valor, que es 2.



4. FUNCIONES LINEALES Y FUNCIONES AFINES

■ En esta sección se introducen los principales tipos de funciones cuyo estudio se profundizará en cursos posteriores.

Para empezar leeremos la introducción y la nota del margen *Función constante* que nos permite relacionar la expresión analítica de este tipo de función con su representación gráfica.

Este contenido se puede trabajar con la actividad 14 de la página 243.

4.1 Función lineal

■ A continuación leeremos el ejemplo propuesto en este apartado que sirve para introducir las características de este tipo de funciones:

– *¿Qué relación hay entre las dos magnitudes de una función lineal?*
– *¿Cómo se reconoce la expresión analítica de una función lineal?*
– *¿Cómo se reconoce la gráfica de una función lineal?*
– *¿Cualquier función que pase por el origen de coordenadas es una función lineal?*

Después leerán el último párrafo del apartado comprobarán la relación que existe entre el signo del número *m* de la fórmula de la función y el crecimiento o decrecimiento de dicha función.

Seguidamente pueden leer el documento del margen *Ten en cuenta* que relaciona la representación gráfica de una función lineal con su dominio:

Luego resolverán la actividad 14 de la página 243 y las actividades finales 38 y 39 de la página 251.

4.2 Función afín

■ El objetivo básico de este apartado consiste en introducir las características de las funciones afines siguiendo una metodología similar a la utilizada en el caso de las funciones lineales.

En primer lugar leerán el ejemplo propuesto que conduce a la definición de función afín:

– *¿En qué se diferencia la expresión analítica de una función lineal y de una función afín?*
– *¿Cómo se reconoce la gráfica de una función afín?*

A continuación leeremos las notas del margen *Fíjate* y *Ten en cuenta* que permiten interpretar la gráfica de una función afín.

■ La segunda parte del apartado nos permitirá representar la gráfica de una función afín siguiendo el protocolo descrito.

Finalmente resolverán las actividades 15 y 16 de la página 243 y las actividades finales 40 y 41.

COMPETENCIAS CLAVE

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

- *Act. 16.* Expresar e interpretar de forma escrita los conocimientos adquiridos sobre la función afín.

COMPETENCIA DIGITAL

- *Acts. 13 y 14.* Desarrollar la capacidad de representar datos numéricos de una tabla, en la gráfica que exprese su dominio.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 14.* Representar los valores de las variables de una función y desarrollar la habilidad de aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridos.
- *Act. 15.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades a situaciones parecidas, transformando la información en conocimiento propio.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 16.* Trabajar la confianza en uno mismo y el espíritu de superación, siendo creativo e imaginativo para relacionar situaciones reales con las matemáticas.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ Las actividades de refuerzo 2 y 4 servirá para revisar las propiedades de las funciones afines y lineales.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Naveguemos por Tiching

– Para practicar las funciones lineales y afines les presentaremos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749831

En este caso, es un portal con varios ejercicios sobre la función lineal y la función afín. Nuestros alumnos podrán resolverlos y a continuación verificar el resultado.

Son actividades interactivas con las que podrán comprobar su aprendizaje y si es necesario, consultar la teoría. Es interesante el material autoevaluable porque se lo podemos presentar a los alumnos con el fin de que desarrollen un trabajo autónomo como método para asimilar conceptos matemáticos.

A continuación, les podemos hacer estas preguntas:

- *¿Podrías explicar en qué se parece una función lineal a una afín?*
- *¿Cómo reconocerás rápidamente una gráfica de una función lineal?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 243

13. Las representaciones son:

Ver figura 1 en la página 11-34 de la guía

14. La función es, y = 5x/2 porque 5/2 es l.a razón de proporcionalidad directa.

15. Los pendientes son:

a) Es creciente, pues la pendiente m = 3 es positiva.

b) Es decreciente, pues la pendiente m = –1 es negativa.

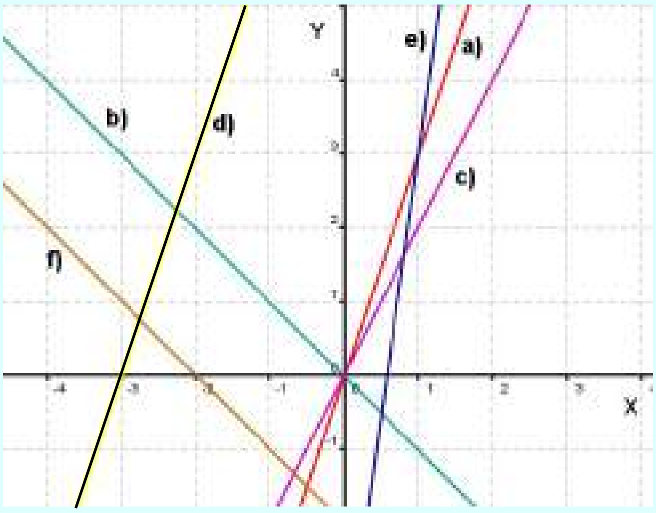
c) Es creciente, pues la pendiente m = 2 es positiva

d) Es creciente, pues la pendiente m = 3 es positiva.

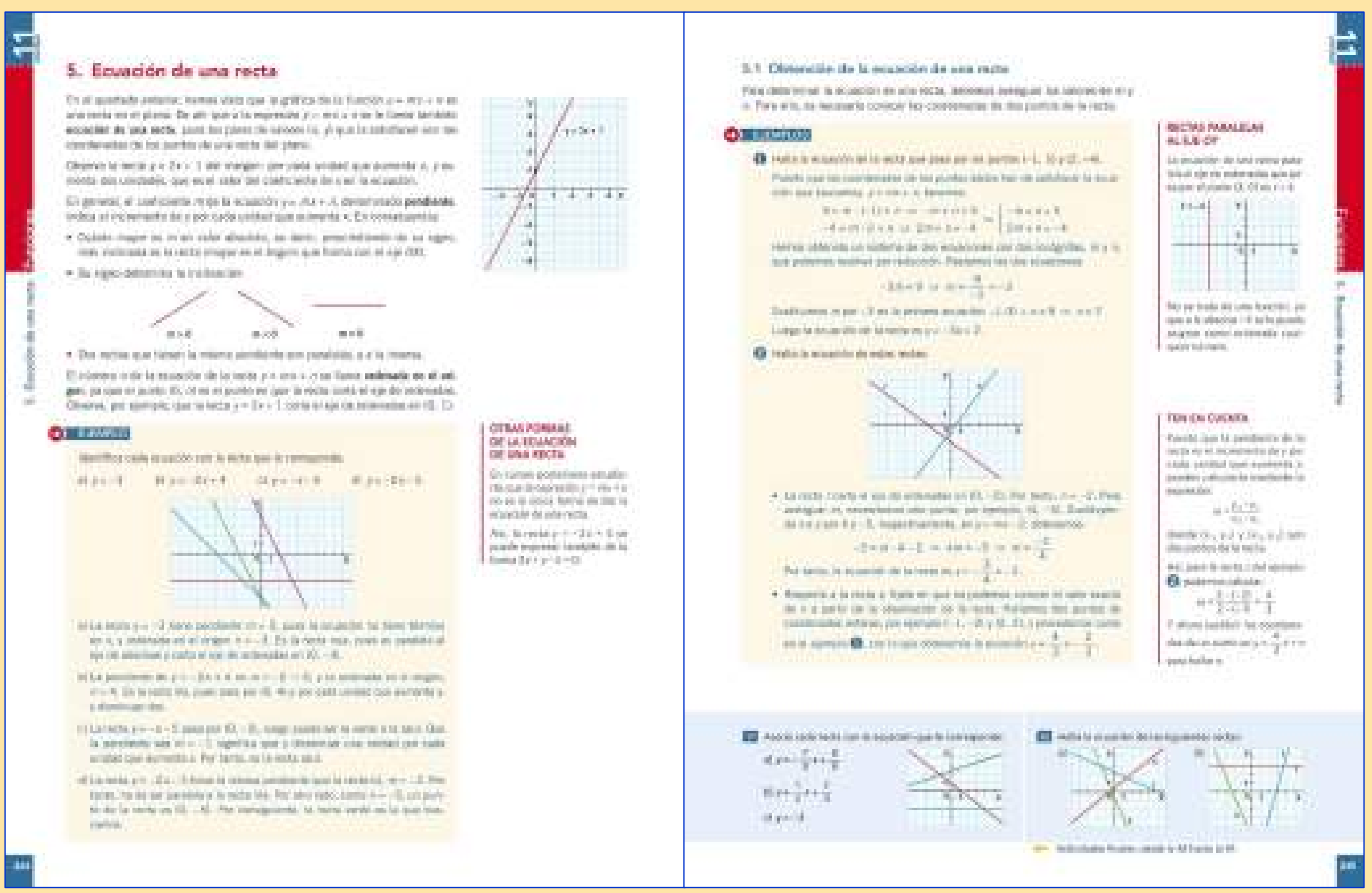
e) Es creciente, pues la pendiente m = 7 es positiva.

f) Es decreciente, pues la pendiente m = –1 es negativa.

Las rectas representadas son las siguientes:



16. Si y es el sueldo diario por trabajar x horas extras, se tiene que la función es: y = 6x + 2



5. Ecuación de una recta

■ En esta sección el objetivo básico es introducir las diferentes formas de ecuación de una recta a partir de la expresión analítica de la función afín.

Para empezar leeremos los dos primeros párrafos y comprobaremos que los puntos de la recta representada en el margen se corresponden con los pares de valores que satisfacen la expresión analítica de la función:

– *¿Cuáles son las coordenadas del punto de la recta cuya abscisa es 2?*
– *¿Se obtiene el mismo valor utilizando la gráfica y la expresión analítica de la función?*

■ A continuación leerán los cuatro siguientes párrafos que hacen referencia al concepto de pendiente y a sus propiedades:

– *¿Qué indica la pendiente de una recta?*
– *¿Qué relación hay entre el valor absoluto de la pendiente y la inclinación de la recta?*
– *¿Qué relación hay entre el signo de la pendiente y su inclinación?*
– *¿Cómo son las pendientes de dos rectas paralelas?*
– *¿Cómo es la pendiente de una recta horizontal?*

Seguidamente leerán el párrafo sobre la ordenada en el origen e identificarán este concepto en la gráfica de la recta anterior.

Después analizarán el ejemplo que se propone relacionando cada recta representada con su ecuación correspondiente.

En la nota *Otras formas de la ecuación de una recta* se puede comentar la existencia de otras expresiones que se introducirán en cursos posteriores.

Estos contenidos se pueden aplicar para resolver la actividad 17 de la página 245 y la actividad final 42 de la página 251.

5.1 Obtención de la ecuación de una recta

■ Analizaremos a continuación el ejemplo resuelto en el este apartado que nos servirá de modelo para obtener la ecuación de una recta:

– *¿Se puede hallar la ecuación de una recta conociendo las coordenadas de uno de sus puntos?*
– *¿Cómo se halla la ecuación de la recta conociendo su pendiente y las coordenadas de uno de sus puntos?*

A continuación leerán la nota *Rectas paralelas al eje OY* reconociendo que no son funciones.

El documento *Ten en cuenta* muestra como calcular la pendiente de una recta a partir de dos de sus puntos.

Después resolverán la actividad 18 de la página 245 y la actividad final 43 de la página 252.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

- *Act. 17.* Desarrollar la capacidad de identificar e interpretar las rectas de una gráfica y sus ecuaciones.

APRENDER A APRENDER

- *Act. 17.* Identificar y manejar en la realización de las actividades las posibles respuestas, tomando decisiones de manera racional.
- *Act. 18.* Desarrollar la capacidad de aplicar los conocimientos sobre la obtención de ecuaciones de una recta, reflexionando a partir de las coordenadas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

- *Act. 18.* Trabajar la autonomía reflexionando con prudencia a la hora de tomar decisiones sin precipitarse en la obtención del resultado.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 2 trabaja con algunos de los elementos característicos de la ecuación de una recta expresada en su forma explícita.

✓ La actividad de refuerzo 4 permite analizar, de forma reiterada, el significado del valor y del signo de la pendiente de una recta.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de ampliar el tema de la ecuación de una recta, propondremos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/749832

Antes de entrar en el enlace propuesto, les preguntaremos:

- *¿Qué es necesario para que dos rectas sean paralelas?*
- *¿En qué influye el signo negativo de la ecuación de una recta?*

En esta página web encontrarán un resumen teórico sobre la ecuación de una recta con ejemplos resueltos y algunos ejercicios para resolver.

Como docentes les podemos proponer que los realicen en su cuaderno, sin mirar el desarrollo y, al terminar, ellos mismos verificarán el proceso seguido.

Además, si nos interesa, podemos sugerirles que visualicen en sus casas un tutorial que se propone al final sobre el tema y que accedan a otras fuentes que se especifican, con más ejercicios para practicar de cara al examen

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 245

17. Las soluciones son:

a) La recta tiene pendiente negativa m = –7/9, por tanto le corresponde la recta de color rojo.

b) La recta tiene pendiente positiva m = 1/3, por tanto le corresponde la recta de color verde.

c) La recta tiene pendiente nula m = 0, es paralela al eje de abscisas, por tanto es la recta de color azul.

18. En todos los casos seguiremos el mismo procedimiento, encontraremos dos puntos de cada recta que deberán satisfacer la ecuación de la recta y = mx + n:

a) Recta *r*: tenemos los puntos (5, 0) y (–4, 4)

$$\begin{cases} 0 = m \cdot 5 + n \\ 4 = m \cdot (-4) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m + n = 0 \\ -4m + n = 4 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

$9m = -4 \Rightarrow m = -4/9$

Sustituimos $m = -4/9$ en la primera ecuación:

$5 \cdot (-4/9) + n = 0 \Rightarrow n = 20/9$

La ecuación de la recta *r* es $y = \dfrac{-4x + 20}{9}$

Recta *s*: tenemos los puntos (2, 2) y (–3, –2).

$$\begin{cases} 2 = m \cdot 2 + n \\ -2 = m \cdot (-3) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 2 \\ -3m + n = -2 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

Sustituimos m = 4/5 en la primera ecuación:

$2 \cdot (4/5) + n = 2 \Rightarrow (8/5) \cdot n = 2 \Rightarrow n = 2/5$

La ecuación de la recta es: $y = \dfrac{4x + 2}{5}$

Recta *t*: tenemos los puntos (1, –3) y (–2, 4).

$$\begin{cases} -3 = m \cdot 1 + n \\ 4 = m \cdot (-2) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + n = -3 \\ -2m + n = 4 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

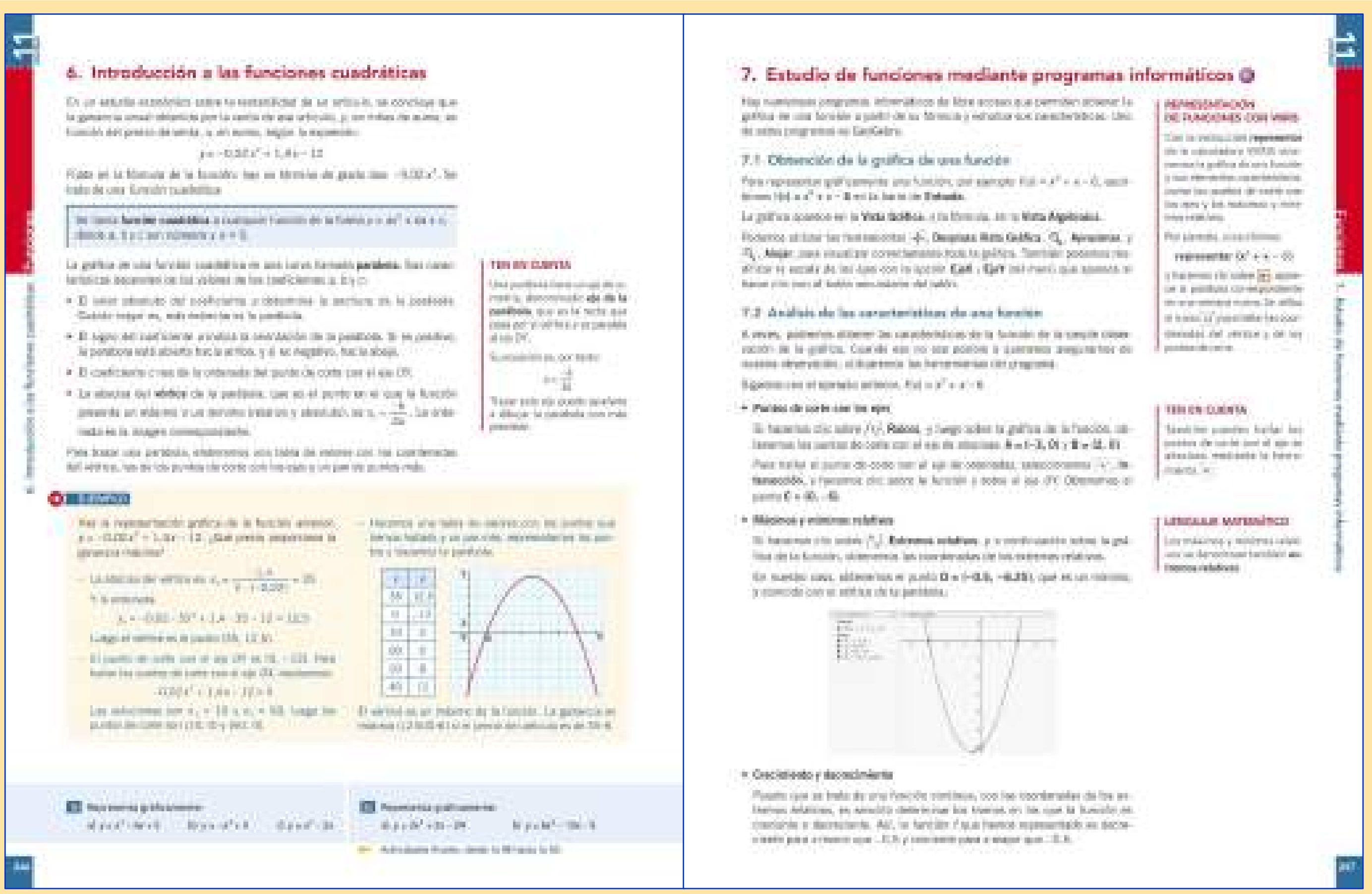
$3m = -7 \Rightarrow m = -7/3$

Sustituimos $m = -7/3$ en la primera ecuación:

$(-7/3) + n = -3 \Rightarrow n = -3 + (-7/3) \Rightarrow n = -2/3$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{-7x - 2}{3}$

(Continúa en la página 11-33 de la guía)


6. Introducción a las funciones cuadráticas

7. Estudio de funciones mediante programas informáticos

6. Introducción a las... / 7. Estudio de...

6. Introducción a las funciones cuadráticas

■ En esta sección el objetivo básico consiste en presentar la expresión analítica y las propiedades de las funciones cuadráticas.

Para empezar leeremos los dos primeros párrafos y la definición de función cuadrática y formularemos estas preguntas a los alumnos y alumnas:

– *¿Cómo se reconoce la expresión analítica de una función cuadrática?*

– *¿Qué coeficiente tiene que ser forzosamente distinto de cero?*

■ A continuación leerán el resto de la sección centrándose en las propiedades de la parábola:

– *¿De qué depende la anchura de la parábola?*

– *¿Cómo se sabe cuál es la orientación de la parábola?*

– *¿Cuál es el punto de corte con el eje OY?*

– *¿Cómo se obtiene el vértice la parábola?*

– *¿Qué es el eje d ela parábola?*

Después interpretarán el ejemplo propuesto que aplica un procedimiento de representación d ela gráfica de una función cuadrática.

Para practicar los contenidos introducidos, pueden resolver las actividades 28 y 29 de la página 246 y las actividades finales 48, 49 y 50 de la página 252.

7 Estudio de las funciones mediante...

■ El objetivo de esta sección es introducir la utilización de algunos programas informáticos que representan funciones a partir de su expresión analítica.

7.1 Obtención de la gráfica de una función

■ Para empezar abrirán el programa GeoGebra y seguirán las indicaciones del texto hasta obtener la representación de la función propuesta.

A continuación pueden seguir las indicaciones del documento *Representación de funciones con WIRIS* y obtener la gráfica de la función anterior utilizando este programa informático.

7.2 Análisis de las características de una función

■ Este apartado presenta algunas herramientas de los programas informáticos que permiten analizar las características de la función propuesta.

Para empezar leerán este texto y comprobarán el resultado obtenido al aplicar las herramientas indicadas.

A continuación, los alumnos y alumnas leerán las notas del margen Ten en cuenta y Lenguaje matemático..

Por último pueden resolver la actividad 21 de la página 248 y la actividad final 51 de la página 252.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Acts. 19 y 20.* Desarrollar la capacidad de representar en una gráfica las funciones cuadráticas propuestas.

■ *Pág. 247, Apdo. 7.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como la el aplicativo WIRIS y GeoGebra que permiten obtener la gráfica de una función a partir de su fórmula y estudiar sus características.

APRENDER A APRENDER

■ *Act. 19.* Aplicar los nuevos conocimientos y capacidades adquiridas para resolver las actividades propuestas.

■ *Act. 20.* Desarrollar o adquirir estrategias de aprendizaje, gracias al carácter repetitivo de las actividades.

■ *Pág. 247, Apdo. 7.* Observar el procedimiento seguido para obtener gráficas con el programa GeoGebra, identificando las estrategias utilizadas, así como el orden de las operaciones, pudiendo utilizarlas para resolverlas y comprobar posteriormente la solución.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La actividad de refuerzo 3 servirá para reconocer las propiedades básicas de una función cuadrática.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Para que practiquen con recursos informáticos para representar gráficamente las funciones, presentaremos este enlace:

http://www.tiching.com/749833

Esta página web presenta un artículo didáctico sobre cómo utilizar el buscador de Google para dibujar gráficas de funciones.

Paso a paso con ejemplos, indica como entrar el texto de la función y ver su representación, así como introducir varias gráficas al mismo tiempo o la posibilidad de manipular la gráfica interactivamente.

Como docentes, podemos plantearles que transformen y que hagan variaciones, jugando con esta herramienta nueva. Para finalizar, les presentaremos estas cuestiones:

- *¿Sabes cómo es el polinomio de una función cuadrática?*
- *Inventa tres y represéntalas. Una de ellas debe ser incorrecta. Proponlas a tus compañeros y deja que descubran el error al representarlas.*
- *¿Se sabe a primera vista hacia dónde se abrirá la parábola de una función cuadrática?*

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 246

19. Las representaciones son:

a) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2{\cdot}1} = 3$$

$y_v = 3^2 - 6{\cdot}3 + 5 = 9 - 18 + 5 = 4$

El vértice es el punto (3, 4).

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 5)

Con el eje OX: resolvemos $x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 1$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (2, 0) y (2, 0).

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	3	0	5	1	2	4
y	–4	5	0	0	–3	–3

Ver figura 2 en la página 11-34 de la guía

b) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$$

$y_v = -0^2 + 5 = 5$

El vértice es el punto (0, 5)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 5)

Con el eje OX: resolvemos $-x^2 + 5 = 0$

$x^2 = 5 \Rightarrow x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$.

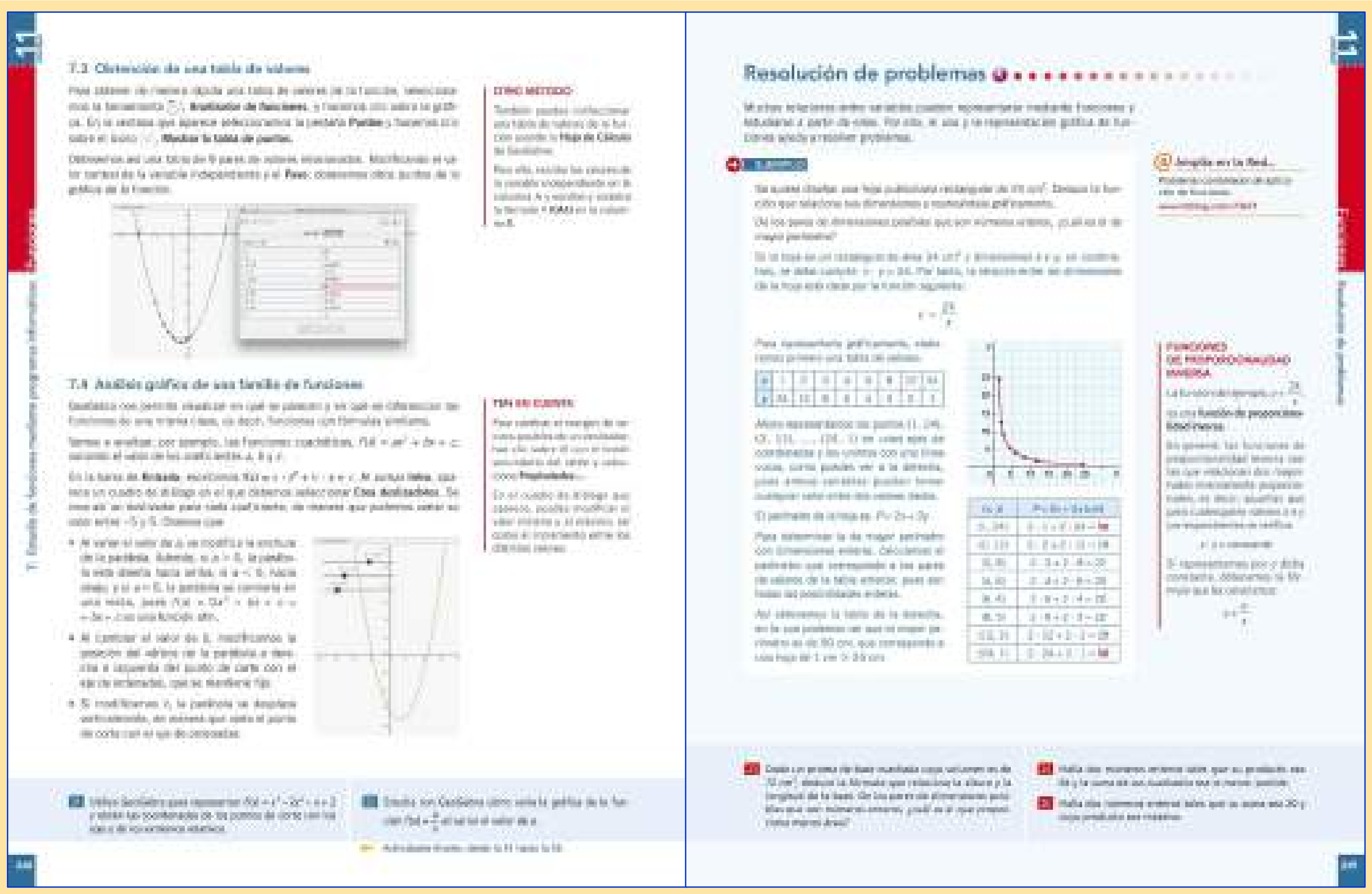
Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$	1	2
y	5	0	0	4	1

Ver figura 2 en la página 11-34 de la guía

(Continúa en la página 11-33 de la guía)


7.3 Obtención de una tabla de valores

7.4 Análisis gráfico de una familia de funciones

Resolución de problemas

7. ESTUDIO DE FUNCIONES MEDIANTE.. (CONT)

7.3. Obtención de una tabla de valores

■ El objetivo de este apartado es confeccionar una tabla de valores de una función utilizando un programa informático.

Para empezar las alumnas y los alumnos abrirán el programa GeoGebra, leerán el texto y seguirán las indicaciones que se proponen:

- *¿Qué opción del programa nos permite analizar las características de una función?*
- *¿Qué pasa si cambiamos el valor general de la variable independiente?*
- *¿Qué ocurre si modificamos el valor del* Paso*?*

■ A continuación pueden leer el documento del margen *Otro método* y confeccionar una tabla de valores de la función utilizando la hoja de cálculo de GeoGebra:

- *¿Qué quiere decir arrastrar una fórmula en una columna?*

Este método también se puede practicar con otras hojas de cálculo convencionales, como *Excel* o *Calc*, que no están especializadas en la representación de gráficas de funciones.

La utilización de Excel o Calc para representar la gráfica de una función es mucho más laboriosa, pero estimula la iniciativa del alumnado.

El procedimiento introducido en este apartado se puede poner en práctica resolviendo la actividad final 52 de la página 252 del libro de texto.

7.4 Análisis gráfico de una familia de funciones

■ En este aparato se propone el estudio de alguna característica en una familia de funciones relacionadas por su expresión analítica.

Para ello leeremos los dos primeros párrafos, abriremos GeoGebra y después observaremos los pasos seguidos para modificar las características de la función.

Por último los alumnos y alumnas pueden resolver la actividad 22 de la página 248 y la actividad final 53 en la página 252 del libro de texto.

Resolución de problemas

■ A continuación el alumnado puede leer el ejemplo propuesto en este apartado que muestra como el análisis de una función puede ayudar a resolver un problema.

Después accederán a los recursos digitales sobre problemas con funciones que se indican en el documento *@Amplía en la Red…*

Finalmente los alumnos y alumnas pueden resolver las actividades 23, 24 y 25 de la página 249 y las actividades finales de las páginas 253 y 254.

COMPETENCIAS CLAVE

COMPETENCIA DIGITAL

- *Acts. 21 y 22.* Trabajar el uso habitual y correcto de los recursos tecnológicos disponibles, como GeoGebra, tal como se propone, para realizar los ejercicios.

APRENDER A APRENDER

- *Acts. 21 y 22.* Aplicar los nuevos conocimientos y procesos adquiridos sobre el manejo de GeoGebra para resolver las actividades propuestas.
- *Acts. 23 y 24.* Buscar una coherencia global de sus conocimientos al ejecutar el plan de resolución de los problemas.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMP.

- *Acts. 23, 24 y 25.* Identificar, en la realización de las actividades las posibles estrategias y respuestas, tomando decisiones de manera racional.
- *Resolución de problemas, pág. 249.* Observar atentamente la resolución de un problema, identificando los pasos y las estrategias utilizadas.

RECURSOS DIDÁCTICOS DE LA GUÍA

✓ La gráfica de la función representada en la actividad de ampliación 3 se puede comprobar utilizando un programa informático.

RECURSOS DIDÁCTICOS

Navegamos por Tiching

– Con la intención de poder repasar los contenidos de esta unidad, proponemos el siguiente enlace:

http://www.tiching.com/738812

En la página se muestran muchos recursos didácticos y actividades para ampliar o reforzar los contenidos estudiados. Concretamente, pediremos que se descarguen todo aquello que haga referencia a las funciones.

Como docentes, podemos plantearles que primero repasen a partir de los ejemplos resueltos y a continuación seleccionar los ejercicios según el ritmo individual de aprendizaje. Contienen soluciones.

También les podemos sugerir que utilicen alguno de los aplicativos estudiados como WIRIS, GeoGebra o Google para representar las funciones.

Este recurso puede resultar muy útil para preparar el examen de la unidad y repasar de forma autónoma los procedimientos aprendidos.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 248

21. La gráfica que obtenemos es la siguiente:

(Ver figura 4 en la página 11-34 de la guía)

Los puntos de corte son: (–1,0), (1, 0), (2, 0) y (0, 2)

El máximo relativo es (–0,22; 2,13) y el mínimo relativo es (1,55; –0,63)

22. Al variar el valor de a, cambia la distancia de las dos ramas de función respecto al origen de coordenadas. Además si a > 0, las dos ramas de la función están en el primer y tercer cuadrante; y si a < 0, las dos ramas de la función están en el segundo y cuarto cuadrante.

Página 249

23. Llamamos x a la longitud de una de las aristas de la base, e y a la altura del prisma, de manera que utilizando la fórmula del volumen del prisma deben cumplir:

$$72 = y \cdot x^2 \Rightarrow y = \frac{72}{x^2}$$

El área de este prisma será pues: $A = 4xy + 2x^2$

Elaboramos una tabla con los pares de dimensiones posibles que son números enteros, y el valor correspondiente del área:

(x,y)	$A = 4xy + 2x^2$
(1, 72)	$4\cdot1\cdot72 + 2\cdot1^2 = 290$
(2, 18)	$4\cdot2\cdot18 + 2\cdot2^2 = 152$
(3, 8)	$4\cdot3\cdot8 + 2\cdot3^2 = 114$
(6, 2)	$4\cdot6\cdot2 + 2\cdot6^2 = 120$

El área menor es 114 cm², que corresponde a un prisma de longitud de la base 3 cm y altura 8 cm.

24. Llamamos x e y a los números, que deberán cumplir:

$$xy = 64 \Rightarrow y = \frac{64}{x}$$

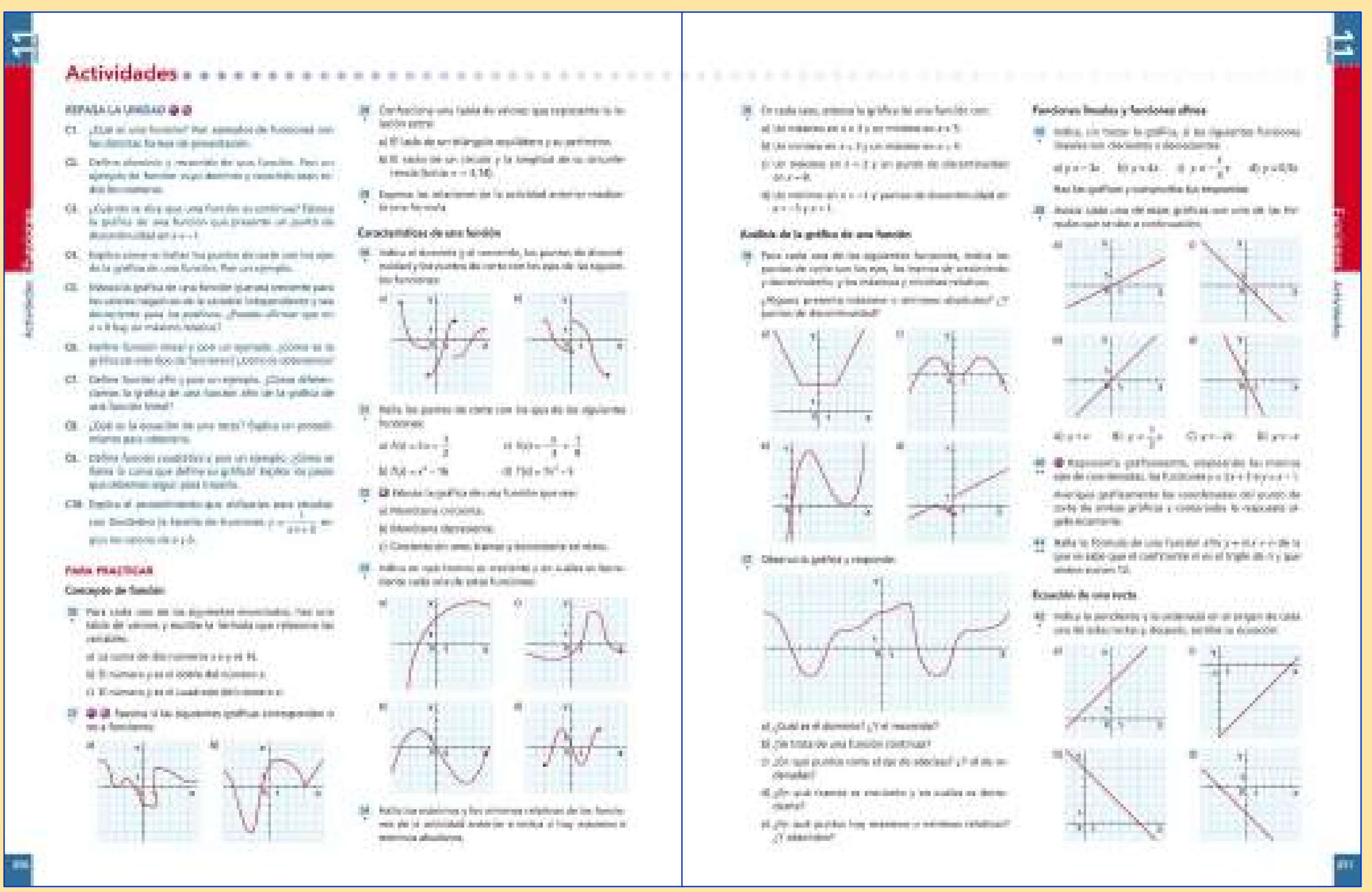
La suma de sus cuadrados es: $S = x^2 + y^2$

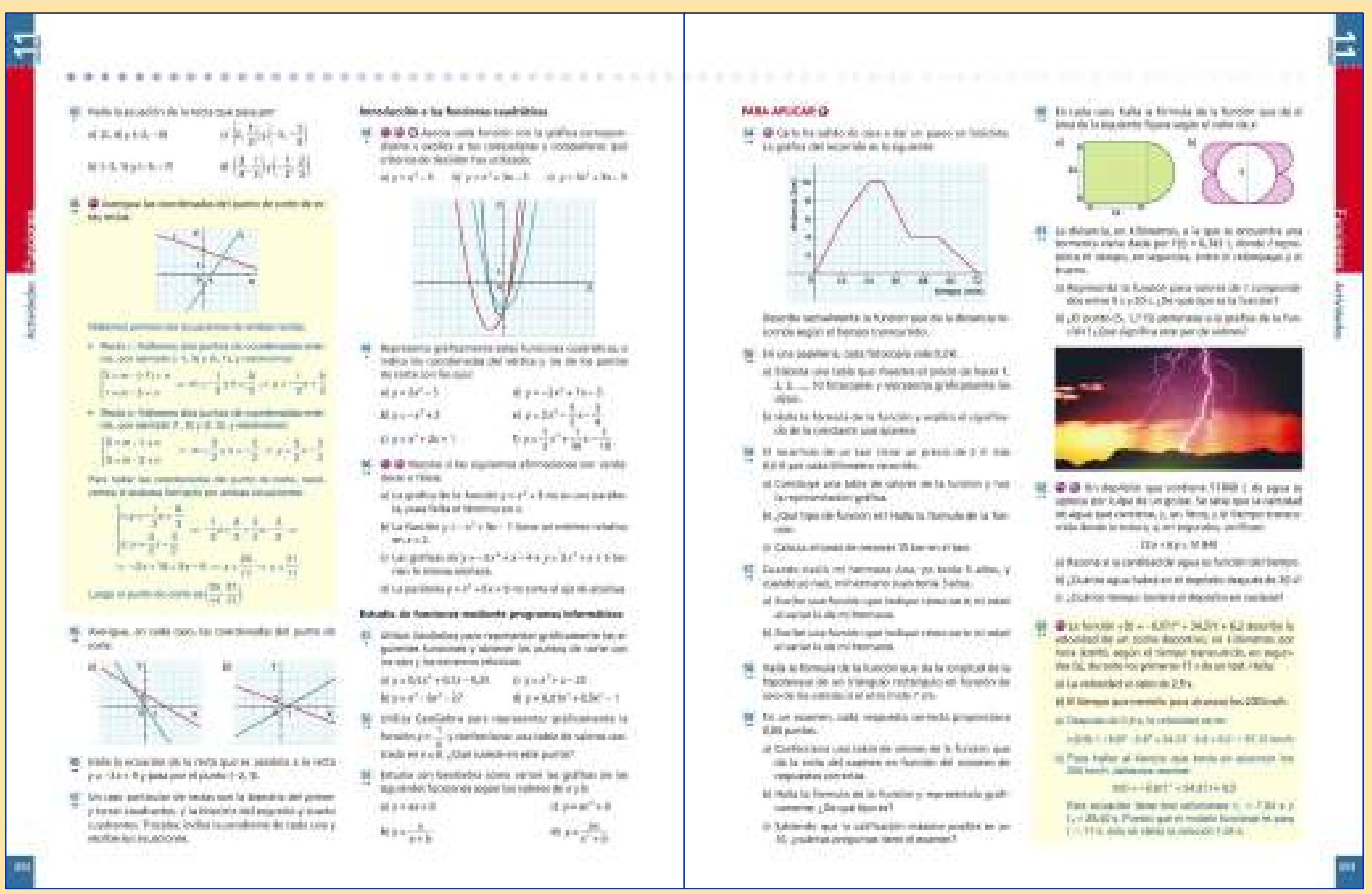
Elaboramos una tabla con los pares de posibles números enteros, y el valor de la suma de sus cuadrados, teniendo en cuenta que los valores de x e y son intercambiables:

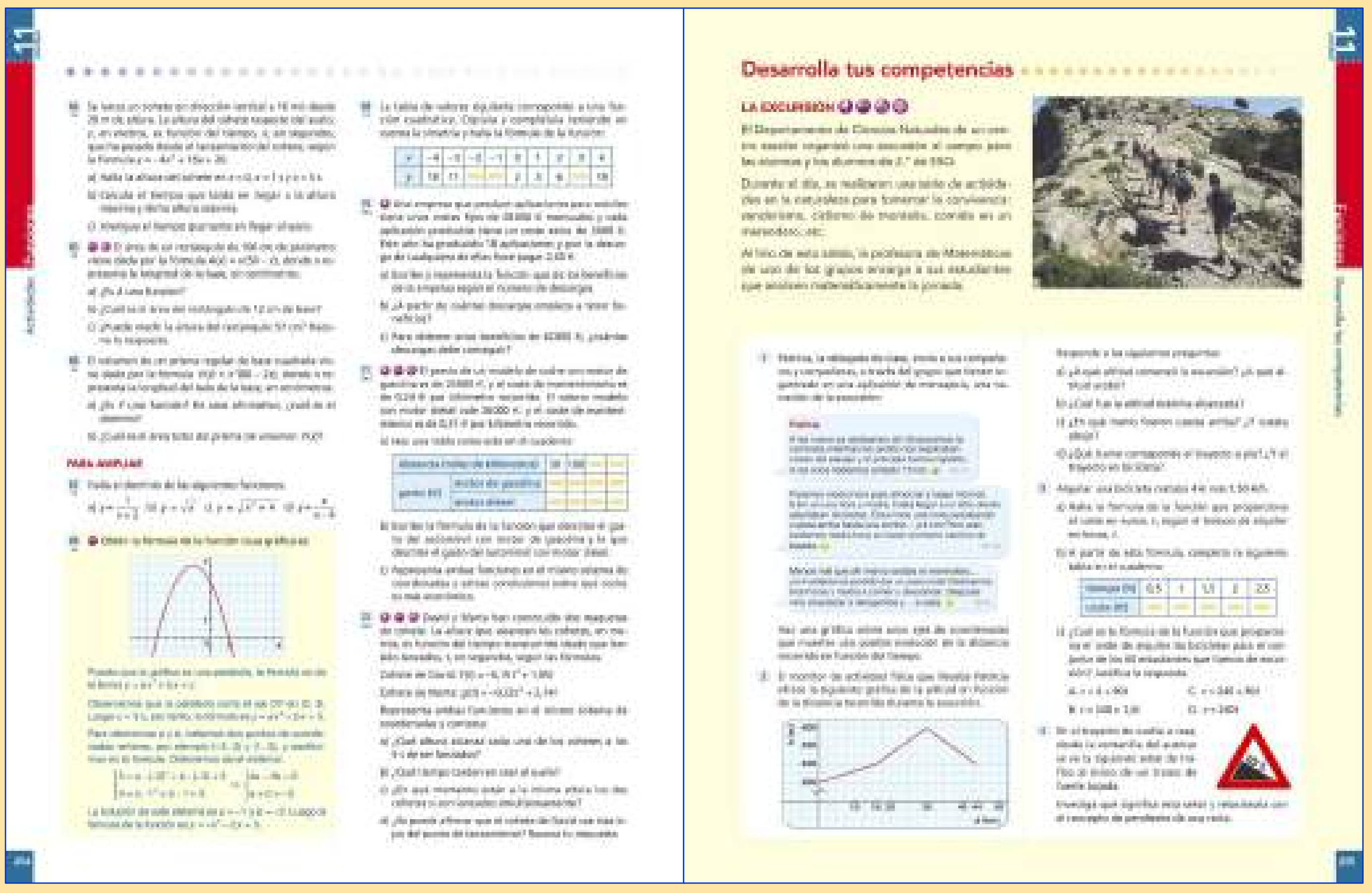
(x,y)	$S = x^2 + y^2$
(1, 64)	$1 + 64^2 = 4097$
(2, 32)	$2^2 + 32^2 = 1028$
(4, 16)	$4^2 + 16^2 = 272$
(8, 8)	$8^2 + 8^2 = 128$

La menor suma de cuadrados es 128, que corresponde a los números 8 y 8.

(Continúa en la página 11-33 de la guía)

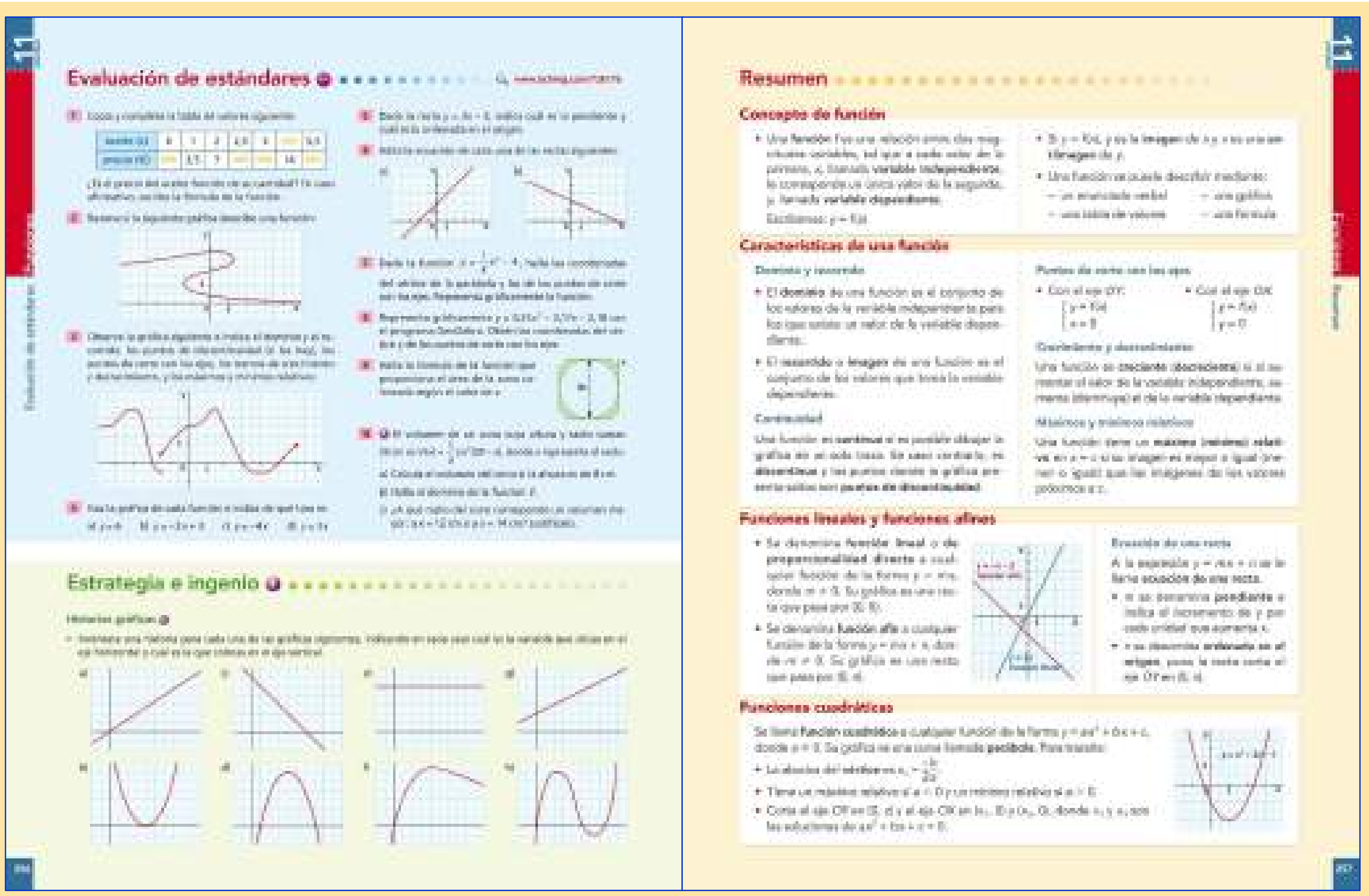

Actividades





Desarrolla tus competencias

LA EXCURSIÓN



Evaluación de estándares

Estrategia e ingenio

Resumen

Concepto de función

Características de una función

Funciones lineales y funciones afines

Funciones cuadráticas

COMUNICACIÓN LINGÜÍSTICA

■ *Repasa la unidad, pág. 250*. Expresar e interpretar de forma oral y escrita los conocimientos adquiridos a lo largo de esta unidad usando el vocabulario incorporado y ade-cuado a los contenidos dados.

■ *Acts. 27, 48, 50, 54, 62, 65, 71 y 72.* Formular y expresar argumentos propios de manera convincente y adecuada al contexto para explicar y justificar la respuesta dada.

■ *Desarrolla…, pág. 255. Estrategia…, pág. 256. Historias gráficas.* Leer y comprender el estímulo de la actividad, generando ideas y supuestos.

COMPETENCIA DIGITAL

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 255.* Buscar, analizar y manejar información en Internet y usar los recursos tecnológicos disponibles.

APRENDER A APRENDER

■ *Repasa la unidad, pág. 250.* Saber transformar la información vista en conocimiento propio, así como ser consciente de las propias capacidades y carencias.

■ *Acts. 27, 40, 48, 50, 62, 65, 71 y 72.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles, aplicando los nuevos conocimientos adquiridos.

■ *Acts. 44, 63 y 68.* Observar la resolución de un problema, identificando las estrategias utilizadas.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 255.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.

■ *Evaluación de estándares, pág. 256*. Ser consciente de las propias capacidades y carencias.

SENTIDO DE INICIATIVA Y ESPÍRITU EMPRENDEDOR

■ *Para aplicar, pág. 253.* Establecer relaciones entre los datos de los problemas, planificar su resolución y buscar soluciones, evaluando las acciones realizadas.

■ *Acts. 32, 70, 71 y 72.* Afrontar una situación problemática aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo de la unidad didáctica, con un criterio propio.

■ *Desarrolla tus competencias, pág. 255.* Buscar las soluciones de forma creativa, mostrando motivación y autonomía en la toma de decisiones.

■ *Evaluación de estándares, pág. 256. Act. 10. Estrategia e ingenio, pág. 256.* Identificar y manejar la diversidad de respuestas posibles.

COMPETENCIAS SOCIALES Y CÍVICAS

■ *Act. 48.* Manejar las habilidades sociales al exponer los criterios utilizados y saber comunicarse de manera constructiva en grupo.

ACTIVIDADES FINALES

■ La sección de *Actividades* incluye una colección de ejercicios, organizados según las secciones de la unidad didáctica, en orden creciente de dificultad, con el fin de afianzar todos los contenidos del tema, desde un punto de vista práctico y teórico.

■ La sección *Desarrolla…* contribuye a fomentar diferentes competencias clave y la utilización de distintos recursos para resolver un planteamiento dado. A través de un caso práctico, el alumno ejercitará su capacidad de análisis y su actitud proactiva en la búsqueda de soluciones, además de poner en práctica los conocimientos adquiridos durante la unidad didáctica.

■ Con la sección de *Evaluación…* se pretende que los alumnos y alumnas valoren el nivel de conocimientos alcanzados. Propone una serie de actividades que repasan la unidad de un modo completo y práctico.

■ La sección *Estrategia…* propone una serie de acertijos o juegos relacionados con los conceptos trabajados durante el tema, con el fin de que el alumnado desarrolle su imaginación y adquiera destreza relacionando ideas.

■ El *Resumen* es la página final de la unidad didáctica que recopila los contenidos del tema organizándolos en un esquema que destaca las relaciones entre los conceptos y los procedimientos estudiados.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 250

REPASA LA UNIDAD

C1. Una función f es una relación entre dos magnitudes variables, tal que a cada valor de la primera, x, le corresponde un único valor de la segunda, y. Se escribe y = f (x).

En un mismo ejemplo, vamos a expresar la relación que hay, en una circunferencia, entre la longitud y su diámetro, en las distintas formas de presentación:

1. Mediante enunciado verbal: "la longitud de una circunferencia es el producto del diámetro por el número pi",
2. Mediante una tabla de valores: la función anterior se expresa así:

Diámetro (cm)	1	2	3	4
Longitud (cm)	3,14	6,24	9,42	12,56

3. Mediante una fórmula: $y = f(x) = \pi \cdot x$, donde x es el diámetro e y la longitud.
4. Mediante una gráfica:

Ver figura 5 en la página 11-35 de la guía

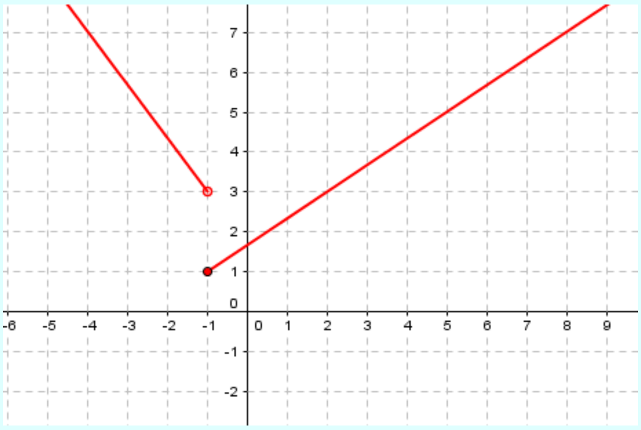
C2. Se llama dominio de una función al conjunto de todos los valores de la variable independiente x para los que existe un valor de la variable dependiente y.

Se llama recorrido o imagen de una función al conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente y.

Por ejemplo, la función y = x + 1

C3. Una función es continua si es posible dibujar la gráfica de un solo trazo. En caso contrario, es discontinua. Los puntos donde la gráfica presenta saltos se llaman puntos de discontinuidad.

Una gráfica discontinua en x = –1 es:



C4. Para hallar los puntos de corte con los ejes basta con resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la función y la ecuación del eje correspondiente.

Por ejemplo, para la función $y = 3x^2 - 12$, calculamos los puntos de corte:

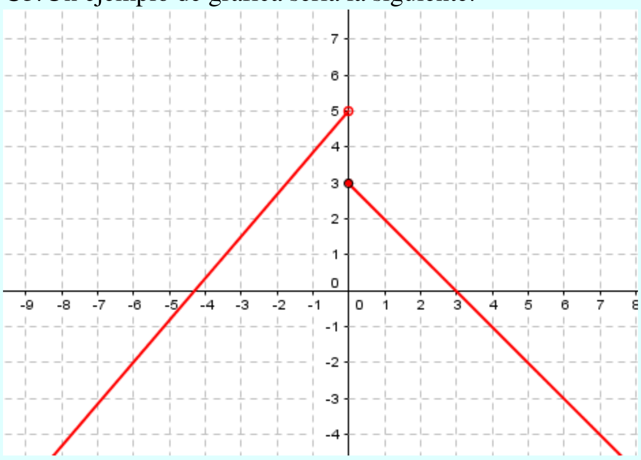
Con el eje OY: para x = 0 es f(0) = –12, así, el punto de corte con el eje OY es (0, –12)

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación $3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 4 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (2, 0) y (–2, 0)

C5. Un ejemplo de gráfica sería la siguiente:



No podemos afirmar que en x = 0 hay un máximo relativo, como se puede observar en la gráfica.

C6. Se llama función lineal o de proporcionalidad directa a cualquier función de la forma y = m x, donde m es un número diferente de cero. Por ejemplo, y = 2x

La gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas (0, 0). Para obtenerla basta con conocer un punto distinto del origen de coordenadas, y trazar la recta que une este punto con el origen de coordenadas.

C7. Se llama función afín a cualquier función de la forma y = m x + n, donde m es un número diferente de cero. Por ejemplo, y = x + 2

Su gráfica se diferencia de la gráfica de una función lineal, en que no pasa por el origen de coordenadas.

C8. La expresión y = m x + n es la ecuación de una recta, pues los pares de valores (x, y) que satisfacen la ecuación son las coordenadas de los puntos de una recta del plano.

Para determinar la ecuación de una recta, debemos averiguar los valores de m y n. Por ejemplo, a partir de las coordenadas de dos puntos (x, y) de la recta. Se sustituyen en la expresión y = m x + n, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas m y n, y al resolverlo obtenemos la ecuación de la recta y = m x + n

C9. Se llama función cuadrática a cualquier función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números y $a \neq 0$. Por ejemplo, $y = x^2 - 2x + 1$

La curva que define su gráfica se llama parábola

Para trazar una parábola, elaboramos una tabla de valores con las coordenadas del vértice, las de los puntos de corte con los ejes y un par de puntos más. La abscisa del vértice de la parábola, que es el punto en el que la función presenta un máximo o un mínimo (relativo y absoluto), es $x_v = \frac{-b}{2a}$, y su ordenada es la imagen correspondiente.

C10. En la barra de Entrada, escribimos f(x) := 1/ (a·x+b). Al pulsar Intro, aparece un cuadro de diálogo en el que debemos seleccionar Crea deslizadores. Se crea así un deslizador para cada coeficiente a y b, de manera que podemos variar su valor entre – 5 y 5, y observar cómo se obtiene la familia de funciones de f(x).

PARA PRACTICAR

26. Las soluciones son las siguientes:

a) Tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	15	14	13	12	11

Fórmula: y = f(x) = 16 - x

b) Tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

Fórmula: y = f(x) = 2x

c) Tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

Fórmula: $y = f(x) = x^2$

27. Las soluciones son:

a) No describe a una función porque para un mismo valor de x, por ejemplo x = 1, le corresponden dos valores distintos de y.

b) Sí describe a una función porque para cada valor de x le corresponde un único valor de y.

28. Las tablas son:

a) El perímetro y es el triple del lado x, por tanto una tabla de valores que representa la relación entre ellas es:

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

b) La longitud y de la circunferencia es el doble de pi por el radio x, por tanto una tabla de valores que representa la relación entre ellas es:

x	1	2	3	4	5
y	6,28	12,56	18,84	25,12	31,4

29. Las relaciones son las siguientes:

a) La fórmula que relaciona el lado x de un triángulo equilátero y su perímetro y es: y = 3x

b) La fórmula que relaciona la longitud y de la circunferencia y su radio x es: $y = 2\pi x$

30. Las soluciones son:

a) El dominio es el conjunto de todos los números entre –4 y 6 (incluidos).

El recorrido es el conjunto de todos los números entre –4 y 4 (incluidos).

Los puntos de discontinuidad son: x = –1, x = 2.

Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –3) y al eje de abscisas en los puntos (–3, 0), (1, 0) y (4, 0).

b) El dominio es el conjunto de todos los números entre –1 (sin incluir) y 4 (incluido).

El recorrido es el conjunto de todos los números entre –4 (incluido) y 2 (sin incluir).

El punto de discontinuidad es: x = 0.

Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –1,5) y al eje de abscisas en los puntos (–2, 0) y (2, 0).

31. Los puntos de corte son:

a) Con el eje OY: puesto que f(0) = 1/2, el punto de corte con el eje OY es (0, 1/2).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación:

$2x + 1/2 = 0 \Rightarrow 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/4.$

Por tanto, el punto de corte con el eje OX es (–1/4, 0)

b) Con el eje OY: puesto que f(0) = –16, el punto de corte con el eje OY es (0, –16).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación:

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -4$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (4, 0) y (–4, 0).

c) Con el eje OY: puesto que f(0) = 1/9, el punto de corte con el eje OY es (0, 1/9).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación:

$$-\frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow -3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1/3$$

Por tanto, el punto de corte con el eje OX es (1/3, 0)

d) Con el eje OY: puesto que f(0) = -5, el punto de corte con el eje OY es (0, -5)

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación

$$7x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{7} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{5}{7}},\ x_2 = -\sqrt{\frac{5}{7}}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $\left(\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\right)$

32. *Ver figura 6 en la página 11-35 de la guía.*

33. Las respuestas son:

a) Es creciente hasta 4. Es decreciente desde 4 en adelante.

b) Es creciente hasta –2 y desde 3 en adelante. Es decreciente desde –2 hasta 3.

c) Es creciente desde -2 hasta 2,5. Es decreciente hasta –2 y desde 2,5 en adelante.

d) Es creciente desde –3 hasta –1 y desde 1 hasta 3. Es decreciente desde –1 hasta 1.

34. Los extremos son

a) Tiene un máximo relativo en x = 4, que a su vez es máximo absoluto. No tiene mínimos.

b) Tiene un máximo relativo en x = -2 y un mínimo relativo en x = 3. No tiene máximos ni mínimos absolutos.

c) Tiene un mínimo relativo en x = -2 y un máximo relativo en x = 2,5. No tiene máximos ni mínimos absolutos.

d) Tiene un mínimo relativo en x = 1, que a su vez es mínimo absoluto. Tiene un máximo relativo en x = –1, que a su vez es máximo absoluto.

Página251

35. Actividad personal. A modo de ejemplo:

Ver figura 7 en la página 11-35 de la guía.

36. Las respuestas son las siguientes:

a) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 3) y al eje de abscisas no lo corta.

Es creciente a partir de 2. Es decreciente hasta –2. Es constante desde –2 a 2

No tiene máximos ni mínimos relativos

Hay un mínimo absoluto en los valores de x entre –2 y 2, ya que todos los demás valores de la gráfica están por encima de las imágenes de esos valores, que es 3.

b) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 0) y al eje de abscisas en los puntos (0, 0) y (6, 0)

Es creciente hasta 2 y a partir de 6. Es decreciente desde 2 a 6

Tiene máximo relativo en x = 2 y mínimo relativo en x = 6. No hay mínimo ni máximo absoluto.

c) Corta al eje de ordenadas en el punto (0; 0,2) y al eje de abscisas en los puntos (0,5; 0), (-4, 0) y (5, 0).

Es creciente hasta -2, y desde 0,5 a 3. Es decreciente desde -2 a 0,5, y desde 3 en adelante.

Tiene mínimo relativo en x = 0,5 y máximo relativo, en x = –2, x = 3.

Hay un máximo absoluto en x = –2, x = 3, ya que todos los demás valores de la gráfica están por debajo de las imágenes de esos valores, que es 2.

d) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –1) y al eje de abscisas en el punto (–2, 0).

Es creciente hasta -2 y a partir de 0. Es decreciente desde -2 a 0.

Tiene máximo relativo en x = –2.

Es discontinua en x = 0.

37. Las respuestas son:

a) El dominio es el conjunto de todos los números y el recorrido es el conjunto de todos los números mayores que 3.

b) Es continua, pues podemos trazar la gráfica de un solo trazo.

c) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 4) y al eje de abscisas en los puntos (–10, 0), (–6, 0), (4, 0) y (8, 0).

d) Es creciente desde –8 a 3, y a partir de 6. Es decreciente hasta –8, y desde 3 a 6.

e) Tiene máximo relativo en x = 3 y mínimo relativo (y absoluto) en x = –8 y x = 6.

38. La evolución de cada recta es:

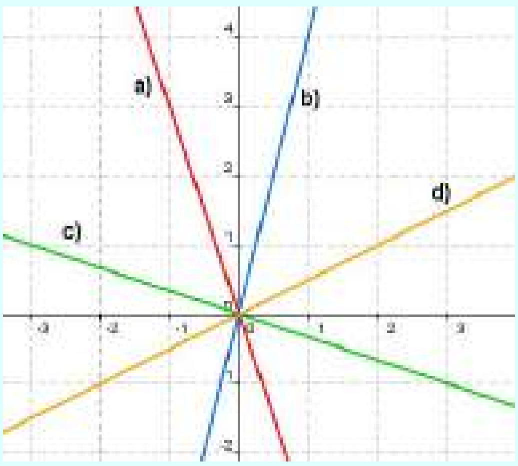
a) Es decreciente, pues la pendiente m = –3 es negativa.

b) Es creciente, pues la pendiente m = 4 es positiva.

c) Es decreciente, pues la pendiente m = –1/3 es negativa.

d) Es creciente, pues la pendiente m = 0,5 es positiva.

Lo comprobamos con las gráficas:

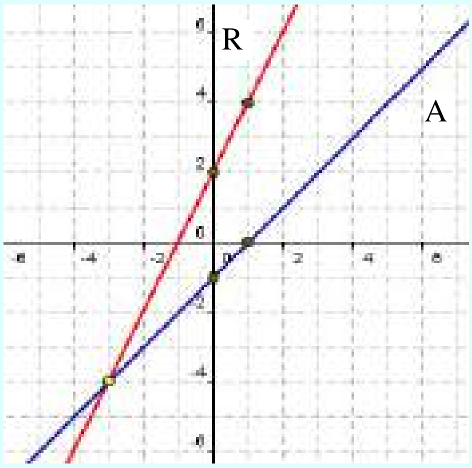


39. Por un lado, en las fórmulas de las ecuaciones de las rectas de A) y B) vemos que tienen pendientes positivas y por tanto crecientes, pero la pendiente de A) es mayor; Luego, la gráfica de a) se asocia a la fórmula de B), y la gráfica de b) a la fórmula de A)

Por otro lado, en las fórmulas de las ecuaciones de las rectas de C) y D) vemos que tienen pendiente negativa y por tanto decrecientes, pero la pendiente de C) es mayor; Luego, la gráfica de c) se asocia a la fórmula de D), y la gráfica de d) a la fórmula de C).

Resumiendo: a) B), b) A), c) D) y d) C).

40. Representamos los puntos (0, 2) y (1,4) y trazamos la recta (R) que los une. Representamos los puntos (0, -1) y (1,0) y trazamos la recta (A) que los une:



Comprobamos algebraicamente que el punto de corte es (–3, –4), resolviendo el sistema por igualación:

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow 2x + 2 = x - 1 \Rightarrow 2x - x = -1 - 2$$

$$\Rightarrow x = -3$$

Y sustituyendo en la segunda ecuación x = –3, obtenemos y: y = -3 – 1 = –4

Por tanto, el punto de corte es (–3, –4)

41. Tenemos en cuenta que m = 3n y m + n = 12, de manera que sustituyendo en la segunda expresión:

$3n + n = 12 \Rightarrow 4n = 12 \Rightarrow n = 3$.

Y por tanto m = 3·3 = 9

La fórmula de la función es y = 9x + 3

42. Las soluciones:

a) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 4), por tanto la ordenada en el origen es n = 4

Pasa por el punto (1, 5) y debe satisfacer la ecuación y = mx + n:
$5 = m \cdot 1 + 4 \Rightarrow m = 5 - 4 \Rightarrow m = 1$ es la pendiente.
Su ecuación es y = x + 4

b) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –8), por tanto la ordenada en el origen es n = –8

Pasa por el punto (8, 0) y debe satisfacer la ecuación y = mx + n:
$0 = m \cdot 8 - 8 \Rightarrow 8m = 8 \Rightarrow m = 1$ es la pendiente.

Su ecuación es y = x – 8

c) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 6), por tanto la ordenada en el origen es n = 6

Pasa por el punto (6, 0) y debe satisfacer la ecuación y = mx + n:

$0 = m\cdot 6 + 6 \Rightarrow 6m = -6 \Rightarrow m = -1$ es la pendiente.

Su ecuación es $y = -x + 6$

d) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, –3), por tanto la ordenada en el origen es n = –3

Pasa por el punto (–3, 0) y debe satisfacer la ecuación y = mx + n:

$0 = m\cdot(-3) - 3 \Rightarrow m = -1$ es la pendiente.

Su ecuación es $y = -x - 3$

43. Las respuestas son:

a) Los puntos (2, 4) y (-2, -4) deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 4 = m\cdot 2 + n \\ -4 = m\cdot(-2) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 4 \\ -2m + n = -4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$4m = 8 \Rightarrow m = 2$

Sustituimos m = 2 en la primera ecuación:

$2\cdot 2 + n = 4 \Rightarrow 4 + n = 4 \Rightarrow n = 0$

La ecuación de la recta es $y = 2x$

b) Los puntos (–3, 1) y (–5, –7) deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 1 = m\cdot(-3) + n \\ -7 = m\cdot(-5) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3m + n = 1 \\ -5m + n = -7 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$2m = 8 \Rightarrow m = 4$

Sustituimos m = 4 en la primera ecuación:

$-3\cdot 4 + n = 1 \Rightarrow -12 + n = 1 \Rightarrow n = 13$

La ecuación de la recta es $y = 4x+13$

c) Los puntos (2, 1/2) y (–3, –1/3) deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = m\cdot 2 + n \\ -\frac{1}{3} = m\cdot(-3) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = \frac{1}{2} \\ -3m + n = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$5m = 5/6 \Rightarrow m = 1/6$

Sustituimos m =1/6 en la primera ecuación:

$2\cdot\frac{1}{6} + n = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} + n = \frac{1}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{6}$

La ecuación de la recta es $y = \frac{x+1}{6}$

d) Los puntos (3/4, 1/3) y (–1/2, 2/3) deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = m\cdot\frac{3}{4} + n \\ \frac{2}{3} = m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9m + 12n = 4 \\ -3m + 6n = 4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción doble:

Multiplicamos la segunda ecuación por 2 y restamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 9m + 12n = 4 \\ -6m + 12n = 8 \end{cases} \Rightarrow 15m = -4 \Rightarrow m = \frac{-4}{15}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por 3 y sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 9m + 12n = 4 \\ -9m + 18n = 12 \end{cases} \Rightarrow 30n = 16 \Rightarrow n = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

La ecuación de la recta es $y = \frac{-4x+8}{15}$

44. Resuelto por el libro.

45. Los puntos de corte son:

a) Ecuación de la recta roja: buscamos dos puntos de coordenadas enteras (–1, 2) y (4, –1), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 2 = m\cdot(-1) + n \\ -1 = m\cdot 4 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m + n = 2 \\ 4m + n = -1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$-5m = 3 \Rightarrow m = -3/5$

Sustituimos m = –3/5 en la primera ecuación:

$\frac{3}{5} + n = 2 \Rightarrow n = \frac{7}{5}$

La ecuación de la recta es $y = \frac{-3x+7}{5}$

Ecuación de la recta azul: buscamos dos puntos de coordenadas enteras (–2, 3) y (2, –3), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 3 = m\cdot(-2) + n \\ -3 = m\cdot 2 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2m + n = 3 \\ 2m + n = -3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$-4m = 6 \Rightarrow m = -6/4 = -3/2$

Sustituimos m = –3/2 en la primera ecuación:

$3 + n = 3 \Rightarrow n = 0$

La ecuación de la recta es $y = \frac{-3}{2}x$

Para obtener el punto de corte resolvemos el sistema por igualación:

$$\begin{cases} y = \frac{-3}{5}x + \frac{7}{5} \\ y = \frac{-3}{2}x \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{5}x + \frac{7}{5} = \frac{-3}{2}x \Rightarrow$$

$-6x + 14 = -15x \Rightarrow 9x = -14 \Rightarrow x = \frac{-14}{9}$

y sustituyendo en la segunda ecuación $x = \frac{-14}{9}$,

obtenemos y: $y = \frac{-3}{2}\cdot\frac{-14}{9} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

El punto de corte es $\left(-\dfrac{14}{9},\dfrac{7}{3}\right)$

b) Ecuación de la recta roja: buscamos dos puntos de coordenadas enteras (–4, 2) y (4, –1), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 2 = m\cdot(-4) + n \\ -1 = m4 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4m + n = 2 \\ 4m + n = -1 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$-8m = 3 \Rightarrow m = -3/8$

Sustituimos m = –3/8 en la primera ecuación:

$$\frac{3}{2} + n = 2 \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{-3}{8}x + \dfrac{1}{2}$

Ecuación de la recta azul: buscamos dos puntos de coordenadas enteras (-3, –2) y (4, 2), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} -2 = m\cdot(-3) + n \\ 2 = m4 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3m + n = -2 \\ 4m + n = 2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$7m = 4 \Rightarrow m = 4/7$

Sustituimos m = 4/7 en la primera ecuación:

$$\frac{-12}{7} + n = -2 \Rightarrow n = \frac{-2}{7}$$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{4x-2}{7}$

Para obtener el punto de corte resolvemos el sistema por igualación:

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3}{8}x + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{4}{7}x - \dfrac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{-3}{8}x + \frac{1}{2} = \frac{4}{7}x - \frac{2}{7} \Rightarrow$$

$-21x + 28 = 32x - 16 \Rightarrow 53x = 44 \Rightarrow x = 44/53$

y sustituyendo en la primera ecuación x = 44/53, obtenemos y:

$$y = \frac{-3}{8}\cdot\frac{44}{53} + \frac{1}{2} = \frac{-33}{106} + \frac{1}{2} = \frac{20}{106} = \frac{10}{53}$$

El punto de corte es $\left(\dfrac{44}{53},\dfrac{10}{53}\right)$

46. Si la recta es paralela tiene la misma pendiente m = –3

Calculamos n sabiendo que la recta pasa por el punto: (-2, 5):

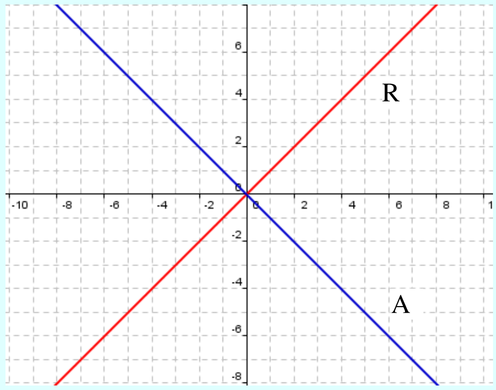
$y = mx + n \Rightarrow 5 = -3\cdot(-2) + n \Rightarrow 5 = 6 + n \Rightarrow n = -1$

La ecuación de la recta es y = –3x – 1

47. La bisectriz del primer y tercer cuadrante (roja, R) tiene pendiente m = 1, y su ecuación en y = x

La bisectriz del segundo y cuarto cuadrante (azul, A) tiene pendiente m = -1, y su ecuación en y = -x

Su representación es la siguiente:



48. Un criterio para asociar cada función con la gráfica correspondiente es obtener la primera coordenada del vértice:

a) $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2} = 0$. Por tanto, corresponde a la gráfica azul

b) $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{2}$. Por tanto, corresponde a la gráfica roja

c) $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2}$. Por tanto, corresponde a la gráfica negra

49. Las soluciones son:

a) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{4} = 0$

$y_v = 2\cdot 0^2 - 5 = -5$

El vértice es el punto (0, –5)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, –5)

Con el eje OX: resolvemos

$2x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 5 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}},0\right)$ y $\left(-\sqrt{\dfrac{5}{2}},0\right)$

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	$\sqrt{5/2}$	$-\sqrt{5/2}$	1	2
y	-5	0	0	-3	3

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

b) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{-2} = 0$

$y_v = -0^2 + 2 = 2$

El vértice es el punto (0, 2)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 2)

Con el eje OX: resolvemos

$-x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $\left(\sqrt{2},0\right)$ y $\left(-\sqrt{2},0\right)$

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1	-1
y	2	0	0	1	1

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

c) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2} = -1$

$y_v = (-1)^2 + 2\cdot(-1) + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

El vértice es el punto (–1, 0)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 1)

Con el eje OX: resolvemos $x^2 + 2x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow x = -1.$

Por tanto, el punto de corte con el eje OX es (–1, 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	-1	0	1	-2	-3
y	0	1	4	1	4

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

d) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-7}{-4} = 1{,}75$

$y_v = -2\cdot(1{,}75)^2 + 7\cdot(1{,}75) - 3 = -6{,}125 + 12{,}25 - 3 = = 3{,}125$

El vértice es el punto (1,75; 3,125)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, -3)

Con el eje OX: resolvemos $-2x^2 + 7x - 3 = 0$

$x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{-4} = \dfrac{-7 \pm 5}{-4} \Rightarrow x_1 = 0{,}5,\ x_2 = 3.$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0,5; 0) y (3, 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	1,75	0	0,5	3	1
y	3,125	-3	0	0	2

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

e) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2{,}5}{4} = 0{,}625$

$y_v = 2\cdot(0{,}625)^2 - 2{,}5\cdot(0{,}625) - 0{,}75 =$

$= 0{,}781 - 1{,}563 - 0{,}75 = -1{,}531$

El vértice es el punto (0,625; –1,531)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0; –0,75)

Con el eje OX: resolvemos

$2x^2 - \dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{4} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 10x - 3 = 0$

$x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100+96}}{16} = \dfrac{10 \pm 14}{16} \Rightarrow x_1 = 1{,}5;\ x_2 = -0{,}25$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0,75; 0) y (0,5; 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0,625	0	1,5	–0,25
y	–1,531	–0,75	0	0

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

f) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-\frac{1}{30}}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{1}{20} = -0{,}05$

$y_v = \dfrac{1}{3}\cdot(-0{,}05)^2 + \dfrac{1}{30}\cdot(-0{,}05) - \dfrac{1}{10} =$

$= 0{,}00083 - 0{,}0017 - 0{,}1 = -0{,}1$

El vértice es el punto (–0,05; –0,1)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0; -0,1)

Con el eje OX: resolvemos $\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{30}x - \dfrac{1}{10} = 0$

$\Rightarrow 10x^2 - x - 3 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+120}}{20} = \dfrac{1 \pm 11}{20} \Rightarrow x_1 = 0{,}6;\ x_2 = -0{,}5$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0,6; 0) y (–0,5; 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	–0,05	0	0,6	–0,5	–7	3
y	–0,1	–0,1	0	0	16	3

Ver figura 8 en la página 11-36 de la guía.

50. Las respuestas son:

a) Falso, sí es una parábola por tener el término en x^2

b) Falso, no tiene mínimo relativo al ser una parábola con el coeficiente a = –1 negativo y por tanto con las ramas hacia abajo (es un máximo relativo)

c) Verdadero, pues tienen el mismo valor absoluto, 3, del coeficiente a

d) Falso, pues si resolvemos la ecuación $x^2 + 6x + 9 = 0$ $\Rightarrow x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = -3$, vemos que corta al eje de abscisas en el punto (–3, 0)

51. Las soluciones son:

a) Los puntos de corte con el eje OX son (0,29; 0) y

(–1,69; 0).

El punto de corte con el eje OY es (0; -0,25).

El vértice, y por tanto el mínimo relativo, es el punto (–0,7; -0,5).

Ver figura 9 en la página 11-36 de la guía.

b) Los puntos de corte con el eje OX son (-3, 0) y (3, 0).

El punto de corte con el eje OY es (0, –27), que es un máximo relativo.

Tiene mínimos relativos en los puntos (1,73; –36) y (–1,73; –36).

Ver figura 9 en la página 11-36 de la guía.

c) El punto de corte con el eje OX es (2,81; 0)

El punto de corte con el eje OY es (0, -25)

No tiene máximo ni mínimos relativos

Ver figura 9 en la página 11-36 de la guía.

d) Los puntos de corte con el eje OX son (–49,96; 0), (1,39; 0) y (–1,43; 0).

El punto de corte con el eje OY es (0, –1).

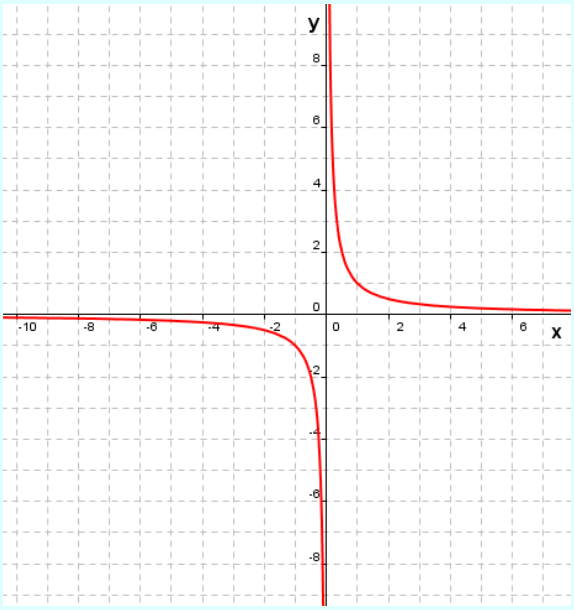
Tiene máximo relativo en el punto (–33,33; 184,19) y mínimo relativo (0, –1).

Ver figura 9 en la página 11-36 de la guía.

52. La tabla de valores es:

x	–0,4	–0,3	–0,2	–0,1	0,1	0,2	0,3	0,4
y	–2,5	–3,33	–5	–10	10	5	3,33	2,5

En el punto x = 0 la función no está definida (no pertenece al dominio).



53. Las respuestas son:

a) $y = ax + b$:

Al variar el valor de a, se modifica la pendiente de la recta. Además, si a > 0 la recta es creciente; si a < 0 la recta es decreciente, y si a = 0 la recta es constante (paralela al eje OX).

Al variar el valor de b, se modifica el punto de corte de la recta con el eje OY. Además, si b > 0 la recta corta el eje por encima del origen de coordenadas; si b < 0 la recta corta al eje por debajo del origen de coordenadas, y si b = 0 la recta pasa por el origen.

b) $y = \dfrac{a}{x + b}$

Al variar el valor de a, se modifica la separación de las dos ramas de la hipérbola. Además, si a > 0 es decreciente; si a < 0 es creciente, y si a = 0 es la recta constante y = 0.

Al variar el valor de b, se modifica la asíntota vertical de la hipérbola. Además, si b > 0 la asíntota está a la izquierda del eje OY; si b < 0 la asíntota está a la derecha del eje OY, y si b = 0 la asíntota es el eje OY.

c) $y = ax^3 + b$:

Al variar el valor de a, se modifica la curvatura de la función. Además, si a > 0 es creciente; si a < 0 es decreciente, y si a = 0 es una recta constante.

Al variar el valor de b, se modifica el punto de corte con el eje OY. Además, si b > 0 corta el eje por encima del origen de coordenadas; si b < 0 corta al eje por debajo del origen de coordenadas, y si b = 0 pasa por el origen de coordenadas.

d) $y = \dfrac{ax}{x^2 + b}$:

Al variar el valor de a, se modifican los intervalos de crecimiento de la función. Además, si a > 0 y b > 0 hay un primer intervalo decreciente, luego otro creciente y finalmente otro decreciente; si a > 0 y b < 0 es decreciente; si a < 0 y b > 0 hay un primer intervalo creciente, luego otro decreciente y finalmente otro creciente; si a < 0 y b < 0 es creciente; y si a = 0 es la recta constante y = 0.

Al variar el valor de b, se modifica la continuidad de la función. Si b > 0 es continua, y si b ≤ 0 es discontinua.

Página 253

54. Carla sale de su casa a una buena velocidad, pero a partir del kilómetro 6, cuando lleva 12 minutos de paseo, empieza a reducir un poco la velocidad. A 10 kilómetros de casa, a los 24 minutos, hace un descanso de unos 7 minutos, y después reanuda la marcha de vuelta a casa. A 4 minutos de su casa vuelve a hacer un descanso de unos 12 minutos, después de los cuales reanuda la marcha y llega a su casa después de 1 hora y 12 minutos desde que salió de casa.

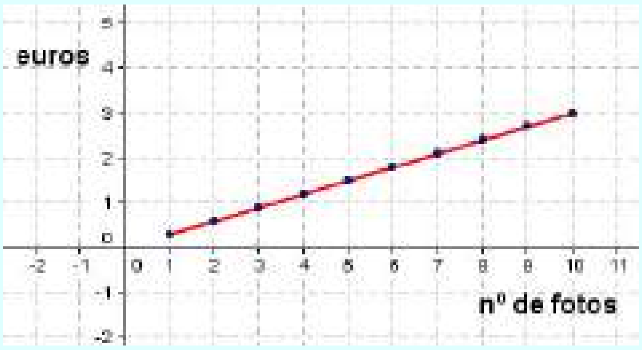
55. Las soluciones son:

a) La tabla de valores es:

Nº de fotos	1	2	3	4	5
Precio (euros)	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5

Nº de fotos	6	7	8	9	10
Precio (euros)	1,8	2,1	2,4	2,7	3

La gráfica es:



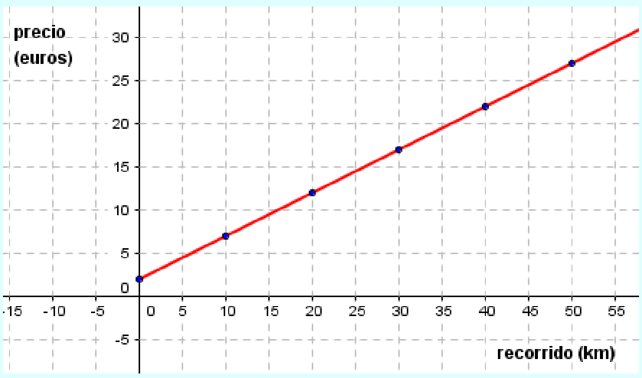
b) La fórmula de la función es y = 0,3x, donde x es el número de fotos e y el precio que cuestan. La constante 0,3 es el precio por unidad de foto.

56. Las soluciones son:

a) La tabla de valores es:

Recorrido (km)	10	20	30	40	50
Precio (euros)	7	12	17	22	27

La gráfica es:



b) Es una función afín. La fórmula de la función es y = 0,5x + 2, donde x es el número de kilómetros recorridos e y el precio que cuesta.

c) Sustituimos x = 15 en la fórmula: y = 0,5·15 + 2 = = 9,5. El coste es de 9,5 euros.

57. Las respuestas son:

a) La función es y = x + 5, donde x es la edad de su hermana Ana e y su edad.

b) La función es y = x – 3, donde x es la edad de su hermano Juan e y su edad, siendo x $\geq$ 3.

58. Aplicamos el teorema de Pitágoras, siendo x uno de sus catetos e y la hipotenusa:

$$y^2 = x^2 + 7^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 49}$$

59. Las soluciones son:

a) La tabla de valores es:

Resp. correctas	1	2	3	4	5
Nota	0,04	0,08	0,12	0,16	0,2

Resp. correctas	10	20	30	40	50
Nota	0,4	0,8	1,2	1,6	2

b) La fórmula es y = 0,04x, que corresponde a una función lineal

La gráfica es:

Ver figura 10 en la página 11-37 de la guía.

c) Sustituimos y = 10 en la fórmula: 10 = 0,04·x

x = 10 : 0,04 = 250. El examen tiene 250 preguntas.

60. Las fórmulas son:

a) El área es la suma del área del cuadrado de lado 2x, y de medio círculo de radio x:

$$y = (2x)^2 + \frac{1}{2}\pi x^2 = 4x^2 + \frac{\pi}{2}x^2 \Rightarrow y = \left(\frac{8+\pi}{2}\right)x^2$$

b) El área es la suma del área de dos círculos de radio x/4, y el área de un cuadrado de lado x, menos el área de un círculo de radio x/2:

$$y = 2\pi\left(\frac{x}{4}\right)^2 + x^2 - \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}\pi + 1\right)x^2$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{8-\pi}{8}\right)x^2$$

61. Las respuestas son:

a) La tabla de valores con aproximaciones es la siguiente:

t	f(t)
0	0
1	0,343
2	0,686
3	1,029
4	1,372
5	1,715
6	2,058
7	2,401
8	2,744
9	3,087
10	3,43

t	f(t)
11	3,773
12	4,116
13	4,459
14	4,802
15	5,145
16	5,488
17	5,831
18	6,174
19	6,517
20	6,86

La gráfica es la siguiente:

Ver figura 11 en la página 11-37 de la guía.

Es una función lineal.

b) Puede verse que aparece en la tabla de valores que hemos realizado en el apartado anterior, luego, el punto sí pertenece a la gráfica de la función.

Significa que cuando transcurren 5 segundos entre el relámpago y el trueno, la tormenta se encuentra a 1,715 km de distancia.

62. Las soluciones son:

a) Sí es una función, porque la cantidad de agua varía en función del tiempo que transcurre desde la rotura

b) Despejamos la y (cantidad de agua) y queda:

y = (-72x + 51840) : 6 $\Rightarrow$ y = -12x + 8640

Sustituimos x = 20 en la expresión anterior:

y = -12·20 + 8640 = -240 + 8640 = 8400.

Quedan 8400 litros de agua en el depósito

c) Sustituimos y = 0 en la fórmula anterior:

$0 = -12x + 8640 \Rightarrow 12x = 8640 \Rightarrow x = 720$

Tardará en vaciarse 720 segundos, es decir, 12 minutos.

63. Resuelto por el libro.

Página 254

64. Las respuestas son las siguientes:

a) Para x = 0: y = 20, luego está a 20 metros de altura.

Para x = 1: $y = -4\cdot 1^2 + 16\cdot 1 + 20 = 32$, luego está a 32 metros de altura.

Para x = 5: $y = -4\cdot 5^2 + 16\cdot 5 + 20 = -100 + 80 + 20 =$ = 0, luego está en el suelo.

b) Calculamos el vértice de la parábola, donde está el máximo:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$y_v = -4\cdot 2^2 + 16\cdot 2 + 20 = -16 + 32 + 20 = 36$

El vértice es el punto (2, 36), por tanto tarda 2 segundos en llegar a la altura máxima y alcanza los 36 metros.

c) Según el apartado a) si x = 5, entonces y = 0. Es decir, en 5 segundos llega al suelo.

65. Las soluciones son:

a) Sí, es la función que calcula el área del rectángulo en función de la base x (la altura es 50 – x).

b) Sustituimos x = 12 en la fórmula del área:

$A(12) = 12\cdot(50 - 12) = 12\cdot 38 = 456$. El área mide 456 cm^2.

c) No, porque si la altura es 50 – x = 57, entonces la base x sería x = 50 – 57 = -7, que es imposible.

66. Las soluciones son:

a) Sí, es una función que calcula el volumen V en función del lado x de la base (la altura es 80 – 2x)

El dominio está formado por el conjunto de números desde 0 hasta 40 (sin incluir), porque para valores mayores o iguales a 40 sería la altura negativa: $80 - 2x \le 0$

b) El área de la base es: x^2

El área lateral es: 4x(80 – 2x)

El área total es, por tanto: $A(x) = 2x^2 + 4x(80 - 2x) =$ $= 2x^2 + 320x - 8x^2 = -6x^2 + 320x$

PARA AMPLIAR

67. El dominio de cada función es:

a) No puede ser $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números excepto el –2.

b) Tiene que ser $x \ge 0$. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números mayores o iguales que cero.

c) Tiene que ser $x^2 + 4 \ge 0$, que ocurre para cualquier x. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números.

d) No puede ser $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$. Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los números excepto el 4.

68. Resuelto por el libro.

69. La tabla completa es:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	18	11	6	3	2	3	6	11	18

La fórmula de la función es: $y = x^2 + 2$.

70. Las respuestas son:

a) Obtenemos la fórmula de la función:

Los beneficios son los ingresos menos los costes

Los costes anuales son:

Costes fijos: 48 000 € · 12 = 576 000 €

Costes extras: 3 600 € · 18 = 64 800 €

Por tanto, los costes son de 576 000 € + 64 800 € = = 640 800 €

Los ingresos, en función del número de descargas x, son: 2,40·x

La función es: y = 2,40x – 640 800

La función representada es la siguiente:

Ver figura 12 en la página 11-37 de la guía.

b) Buscamos el punto de corte con el eje OX, donde la función empieza a ser positiva:

$2{,}40x - 640800 = 0 \Rightarrow x = 640\,800 : 2{,}40 = 267\,000$

Empieza a obtener beneficios a partir de 267 000 descargas.

c) Sustituimos en la fórmula y = 62 000:

$62\,000 = 2{,}40x - 640\,800 \Rightarrow 2{,}40x = 702\,800$

x = 702 800 : 2,40 = 292 833,33

Por tanto, debe conseguir 292 834 descargas.

71. Las respuestas son:

a) La tabla completa es la siguiente:

distancia (miles de km)		50	100	150	200
gasto (€)	**motor gasolina**	36 000	48 000	60 000	72 000
	motor diésel	36 500	47 000	57 500	68 000

b) Fórmula del gasto para gasolina:

y = 0,24x + 24000, donde x es el número de km (en miles) e y el gasto.

Fórmula del gasto para diésel:

y = 0,21x + 26000, donde x es el número de km (en miles) e y el gasto.

c) La representación es la siguiente:

Ver figura 13 en la página 11-38 de la guía.

Es más rentable el gasolina (recta roja, R) hasta los 66.667 km, donde se cortan las dos funciones; a partir de ahí es más rentable el diesel (recta azul, A).

72. Representamos las funciones, obteniendo los vértices y puntos de corte con los ejes:

Cohete de David:

Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1,95}{-0,30} = 6,5$$

$y_v = -0,15\cdot(6,5)^2 + 1,95\cdot 6,5 = 6,34$

El vértice es el punto (6,5; 6,34).

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 0).

Con el eje OX: resolvemos:

$0 = -0,15\cdot t^2 + 1,95\cdot t \Rightarrow t(-0,15t + 1,95) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0$ y $t_2 = 13$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0, 0) y (13, 0).

Cohete de Marta:

Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2,74}{-0,46} = 5,96$$

$y_v = -0,23\cdot(5,96)^2 + 2,74\cdot 5,96 = 8,16$

El vértice es el punto (5,96; 8,16).

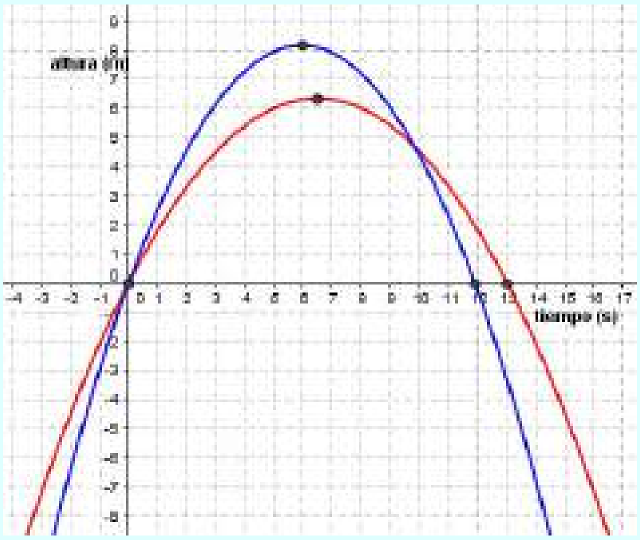
Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 0)

Con el eje OX: resolvemos $0 = -0,23\cdot t^2 + 2,74\cdot t \Rightarrow$

$t(-0,23t + 2,74) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$ y $t_2 = 11,91$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0, 0) y (11,91; 0).



a) Sustituimos t = 5 en ambas funciones:

$f(5) = -0,15\cdot 5^2 + 1,95\cdot 5 = -3,75 + 9,75 = 6$

$g(5) = -0,23\cdot 5^2 + 2,74\cdot 5 = -5,75 + 13,7 = 7,95$

Por tanto, el cohete de David alcanza 6 metros de altura, y el de Marta 7,95 metros.

b) Al caer al suelo la altura es cero, por tanto obtenemos el tiempo a partir de los puntos de corte con el eje OX obtenidos anteriormente. Luego, el cohete de David tarda 13 s, y el de Marta 11,91 s.

c) Calculamos el otro punto de corte de ambas funciones:

$-0,15\cdot t^2 + 1,95\cdot t = -0,23\cdot t^2 + 2,74\cdot t$

$\Rightarrow 0,08t^2 - 0,79t = 0 \Rightarrow t(0,08t - 0,79) = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0$ (se descarta) y $t_2 = 9,875$

Están a la misma altura a los 9,875 segundos.

d) No se puede afirmar que el cohete de David cae más lejos, pues las únicas variables que relacionan las fórmulas son el tiempo y la altura, en ningún caso la distancia desde donde son lanzados.

Página 255

DESARROLLA TUS COMPETENCIAS

1. La gráfica es la siguiente:

2. Las respuestas son:

a) Comenzó a 300 metros de altitud, y acabó a 400 metros.

b) Se alcanzó una altitud máxima de 600 metros.

c) Fueron cuesta arriba desde el inicio hasta el kilómetro 30, y cuesta abajo desde el kilómetro 30 hasta el final de la excursión (km 44).

d) Fueron a pie hasta el kilómetro 16 y en bici desde el kilómetro 16 hasta el final (km 44).

3. Las soluciones son:

a) La función es $c = 1,50\cdot t + 4$

b) Completamos la tabla:

Tiempo (h)	0,5	1	1,5	2	2,5
Coste (€)	4,75	5,50	6,25	7	7,75

c) El coste es de 60·c, es decir,

$60(1,50t + 4) = 90t + 240.$

Por tanto, es la opción C

4. Esta señal indica que la bajada tiene una inclinación del 10%, es decir, que la pendiente de la recta que une el punto inicial de la bajada y el punto final es m = –0,1.

Pág. 256

EVALUACIÓN DE ESTÁNDARES

1. La tabla completa es la siguiente:

Aceite (L)	0	1	2	2,5	3	4	5,5
Precio (€)	0	3,5	7	8,75	10,5	14	19,25

Sí, el precio depende de los litros de aceite, y la fórmula de la función es y = 3,5x, donde x son los litros de aceite e y es el precio.

2. No es una función, porque para ciertos valores de x le corresponden varios valores de y; por ejemplo, para x = 0 le corresponden y = 0,25, y = 1,75, y = 2,75.

3. Dominio: es el conjunto de todos los números desde –4,5 hasta –1,5 y desde –1 hasta 6.

Recorrido: es el conjunto de todos los números desde –0,5 hasta 3.

Puntos de discontinuidad: es discontinua desde –1,5 hasta –1.

Puntos de corte con los ejes: corta al eje OY en (0, 2) y al eje OX en (–2, 0), (3, 0) y (5, 0).

Tramos de crecimiento: Es creciente desde –4,5 hasta –3, desde –1 hasta 1,5 y desde 4,5 hasta 6. Es decreciente desde –3 hasta –1,5 y desde 1,5 hasta 3,3 aproximadamente. Es constante desde 3,3 hasta 4,5.

Extremos relativos: tiene máximos relativos en x = –3 y x = 1,5. No tiene mínimos relativos.

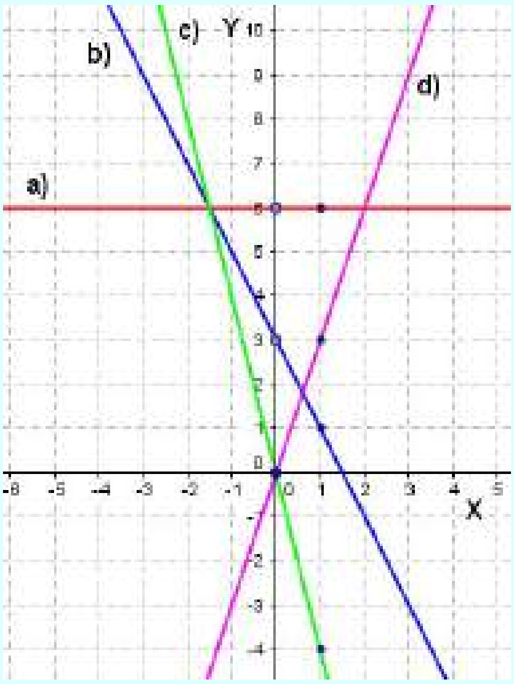
4. Las gráficas son:

a) Representamos los puntos (0, 6) y (1, 6) y trazamos la recta que los une. Es una función constante.

b) Representamos los puntos (0, 3) y (1, 1) y trazamos la recta que los une. Es una función afín.

c) Representamos los puntos (0, 0) y (1, -4) y trazamos la recta que los une. Es una función lineal.

d) Representamos los puntos (0, 6) y (1, 3) y trazamos la recta que los une. Es una función lineal.



5. La recta y = mx + n tiene pendiente m y ordenada en el origen n; por tanto, la pendiente es m = 2 y la ordenada en el origen en n = –3

6. Las ecuaciones son

a) Corta al eje de ordenadas en el punto (0, 3), por tanto n = 3.

Pasa por el punto (–3, 0) que debe satisfacer la ecuación y = mx + 3:
$0 = m\cdot(-3) + 3 \Rightarrow 3m = 3 \Rightarrow m = 1$

La ecuación es y = x + 3

b) Buscamos dos puntos de coordenadas enteras (5, 0) y (–4, 4), que deben satisfacer la ecuación y = mx + n:

$$\begin{cases} 2 = m\cdot 5 + n \\ 4 = m\cdot(-4) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m + n = 0 \\ -4m + n = 4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema obtenido por reducción, restando las dos ecuaciones:

$9m = -4 \Rightarrow m = -4/9$

Sustituimos m = –4/9 en la primera ecuación:
$$5\cdot\frac{-4}{9} + n = 0 \Rightarrow n = \frac{20}{9}$$

La ecuación de la recta es $y = \dfrac{-4x + 20}{9}$

7. Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{0,5} = 0$$

$$y_v = \frac{1}{4}\cdot 0^2 - 4 = -4$$

El vértice es el punto (0, –4).

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

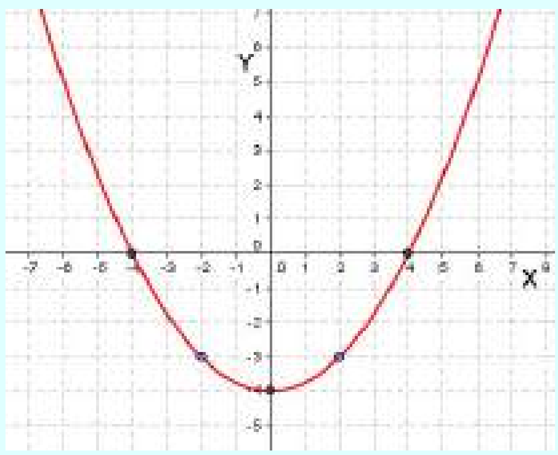
Con el eje OY: (0, –4)

Con el eje OX: resolvemos:

$$\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -4$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (4, 0) y (-4, 0).
Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	4	–4	2	–2
y	–4	0	0	–3	–3



8. La representación es la siguiente:

Ver figura 14 en la página 11-38 de la guía.

El vértice es (6,34; -12,23), el punto de corte con el eje OY es (0; -2,18) y los puntos de corte con el eje OX son (-0,65; 0) y (13,33; 0).

9. El área coloreada se obtiene restando al área del cuadrado de lado 8x, el área del círculo de radio 4x y la del círculo de radio x (4 cuartos de círculo).

El área del cuadrado es: $A_{cu} = (8x)^2 = 64x^2$

El área del círculo mayor es:

$A_{ci1} = \pi(4x)^2 = 3{,}14 \cdot 16x^2 = 50{,}24x^2$

El área del círculo mayor es: $A_{ci2} = \pi x^2 = 3{,}14x^2$

El área de la zona coloreada es:

$A = A_{cu} - A_{ci1} - A_{ci2} = 64x^2 - 50{,}24x^2 - 3{,}14x^2 = 10{,}62x^2$

La fórmula de la función es $A(x) = 10{,}62x^2$

10. Las soluciones son:

a) La altura es $20 - x \Rightarrow 20 - x = 8 \Rightarrow x = 20 - 8 = 12$

Por tanto, el volumen es $V(12) = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 8 =$
$= 1205{,}76 \text{ cm}^3$

b) El dominio es el conjunto de todos los números entre 0 y 20 (sin incluir), porque la altura $20 - x$ tiene que ser positiva, y por tanto x es un valor entre 0 y 20.

c) Si $x = 12 \Rightarrow V(12) = 1205{,}76 \text{ cm}^3$ (calculado en el apartado a)

Si $x = 14 \Rightarrow V(14) = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 14^2 \cdot 6 = 904{,}32 \text{ cm}^3$

Por tanto, el volumen mayor le corresponde al radio x = 12 cm

ESTRATEGIA E INGENIO: HISTORIAS GRÁFICAS

Actividad personal. A modo de ejemplo, especificaremos siempre y frente a x:

a) Velocidad frente a tiempo de un automóvil que acelera con aceleración constante.

b) Velocidad frente a tiempo de un meteorito cuando gira a causa del Sol.

c) Altura frente a velocidad de un esquiador descendiendo una montaña.

d) Profundidad frente a anchura de la trayectoria de un boomerang.

e) Posición frente a tiempo de una persona quieta en un lugar.

f) Interés frente a tiempo. Suponemos un objeto que no sabemos que exite hasta que se ve anunciado en televisión, se alcanza el máximo el día que lo compramos y decae a medida que pasa el tiempo.

g) Velocidad frente a tiempo, de un corredor que había empezado a correr antes de que diesen la salida.

h) Temperatura frente a tiempo de un día y medio en una ciudad con temperaturas nocturnas bajo 0.

SOLUCIONES (CONTINUACIÓN)

(Viene de la página 11-3 de la guía)

4. Las soluciones son las siguientes:

a) $3x - 4 = 0 \rightarrow 3x = 4$

Soluciones: $y = 0$; $x = 4/3$

b) $\begin{cases} 5 = 2m + m + n \\ 1 = m + n \end{cases} \rightarrow 5 = 2m + 1 \rightarrow 2m = 4$

Soluciones: $m = 2$; $n = -1$

5. La resolución es la siguiente:

$$x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-6) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 48}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4}$$

Soluciones: $x_+ = 3/2$; $x_- = -2$

(Viene de la página 11-7 de la guía)

b) Con el eje OY: puesto que $f(0) = -12$, el punto de corte con el eje OY es (0, –12).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación $3x^2 - 12 = 0$; $x^2 = 4$; $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (2, 0) y (–2, 0).

c) Con el eje OY: puesto que $f(0) = -20$, el punto de corte con el eje OY es (0, -20).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación $12x^2 + 22x - 20 = 0$; $6x^2 + 11x - 10 = 0$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-10)}}{2 \cdot 6} = \frac{-11 \pm 19}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-5}{2},\ x_2 = \frac{2}{3}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son $\left(\frac{-5}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

d) Con el eje OY: puesto que $f(0) = 12$, el punto de corte con el eje OY es (0, 12).

Con el eje OX: Resolvemos la ecuación

$x^2 + 5x + 12 = 0$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-23}}{2}$$

La ecuación no tiene solución y por tanto, no hay puntos de corte con el eje OX.

(Viene de la página 11-13 de la guía)

b) Recta *r*: es paralela al eje de abscisas, y por tanto m = 0, y corta al eje de ordenadas en (0, 3), y por tanto n = 3.

La ecuación de la recta es y = 3

Recta *s*: tenemos los puntos (4, 4) y (2, -3).

$$\begin{cases} 4 = m\cdot 4 + n \\ -3 = m\cdot 2 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m + n = 4 \\ 2m + n = -3 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

$2m = 7 \Rightarrow m = 7/2$

Sustituimos m = 7/2 en la primera ecuación:

$4\cdot(7/2) + n = 4 \Rightarrow 14 + n = 4 \Rightarrow n = -10$

La ecuación de la recta es $y = \frac{7}{2}x - 10$

Recta *t*: tenemos los puntos (-1, -3) y (-4, 4).

$$\begin{cases} -3 = m\cdot(-1) + n \\ 4 = m\cdot(-4) + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m + n = -3 \\ -4m + n = 4 \end{cases}$$

Restamos las dos ecuaciones:

$3m = -7 \Rightarrow m = -7/3$

Sustituimos m = –7/3 en la primera ecuación:

$(7/3) + n = -3 \Rightarrow n = -3 - 7/3 \Rightarrow n = -16/3$

La ecuación de la recta es $y = \frac{-7x - 16}{3}$

(Viene de la página 11-15 de la guía)

c) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1$

$y_v = 1^2 - 2\cdot 1 = -1$

El vértice es el punto (1, –1)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, 0)

Con el eje OX: resolvemos $x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (0, 0) y (2, 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	0	1	2	–1	3
y	0	–1	0	3	3

Ver figura 2 en la página 11-34 de la guía

20. Las gráficas son las siguientes:

a) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$

$y_v = 2\cdot(-0{,}5)^2 + 2\cdot(-0{,}5) - 24 = -24{,}5$

El vértice es el punto (–0,5; –24,5)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, –24)

Con el eje OX: resolvemos $2x^2 + 2x - 24 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -4.$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (3, 0) y (–4, 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	–0,5	0	3	–4	1	2
y	–24,5	–24	0	0	–20	–12

Ver figura 3 en la página 11-34 de la guía

b) Calculamos las coordenadas del vértice (x_v, y_v):

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{13}{12} \approx 1{,}08$

$y_v = 6\cdot\left(\frac{13}{12}\right)^2 - 13\cdot\left(\frac{13}{12}\right) - 5 = -\frac{289}{24} \approx -12{,}04$

El vértice es el punto (1,08; –12,04)

Calculamos los puntos de corte con los ejes:

Con el eje OY: (0, –5)

Con el eje OX: resolvemos $6x^2 - 13x - 5 = 0$

$x = \frac{13 \pm \sqrt{169+120}}{12} = \frac{13 \pm 17}{12} \Rightarrow$

$x_1 = 2{,}5;\ x_2 \approx -0{,}33$

Por tanto, los puntos de corte con el eje OX son (2,5; 0) y (–0,33; 0)

Hacemos una tabla de valores, representamos los puntos y trazamos la parábola:

x	1,08	0	2,5	–0,33	-1
y	–12,04	–5	0	0	14

Ver figura 3 en la página 11-34 de la guía

(Viene de la página 11-17 de la guía)

25. Llamamos x e y a los números, que deberán cumplir:

$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$

Elaboramos una tabla con los pares de posibles números enteros, y el valor del producto entre ellos, teniendo en cuenta que los valores de x e y son intercambiables:

(x,y)	xy
(1, 19)	19
(2, 18)	36
(3, 17)	51
(4, 16)	64
(5, 15)	75

(x,y)	xy
(6, 14)	84
(7, 13)	91
(8, 12)	96
(9, 11)	99
(10, 10)	100

El mayor producto lo obtenemos con el par 10 y 10.

FIGURA 1

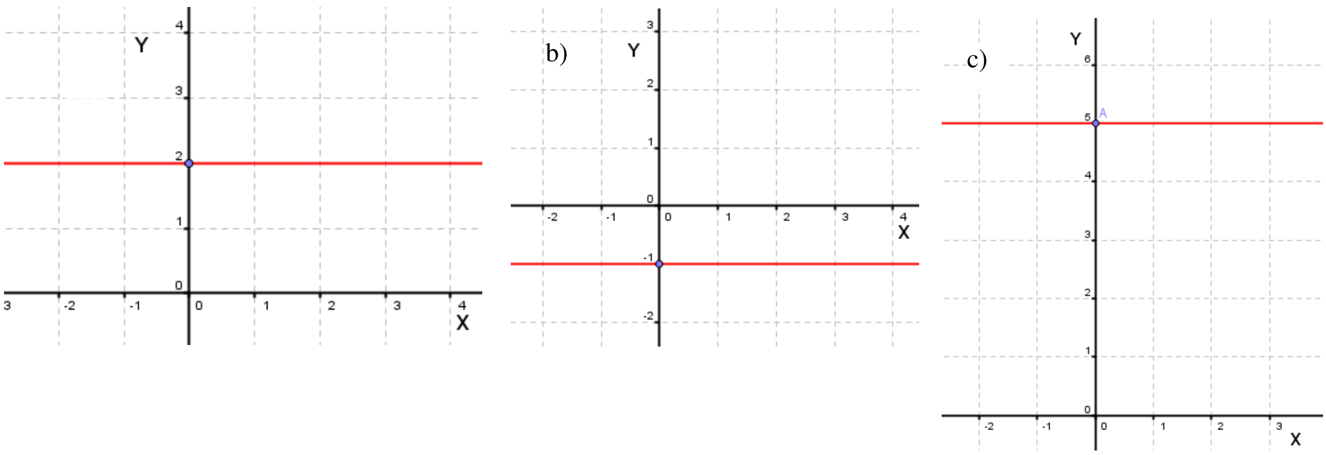


FIGURA 2

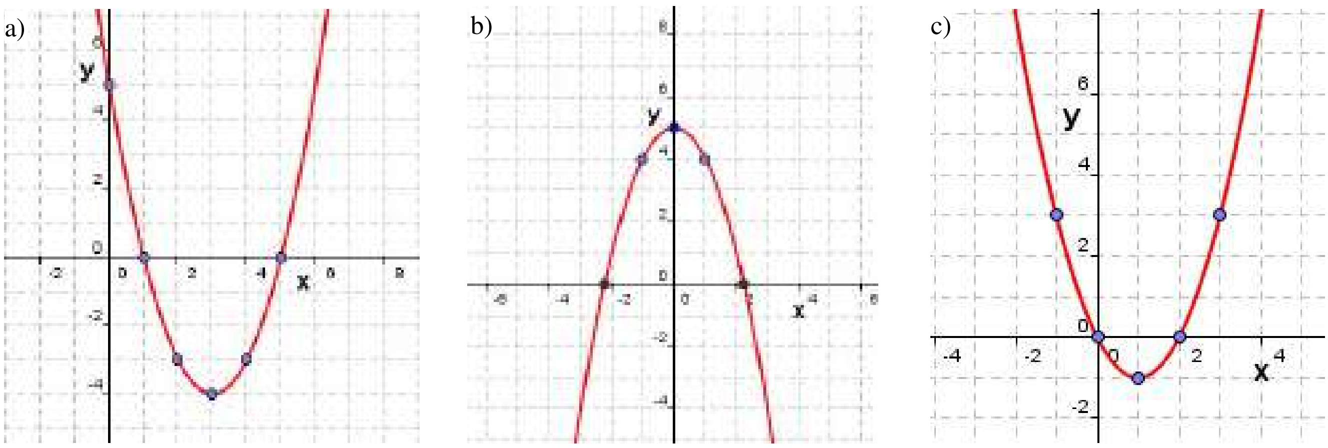


FIGURA 3

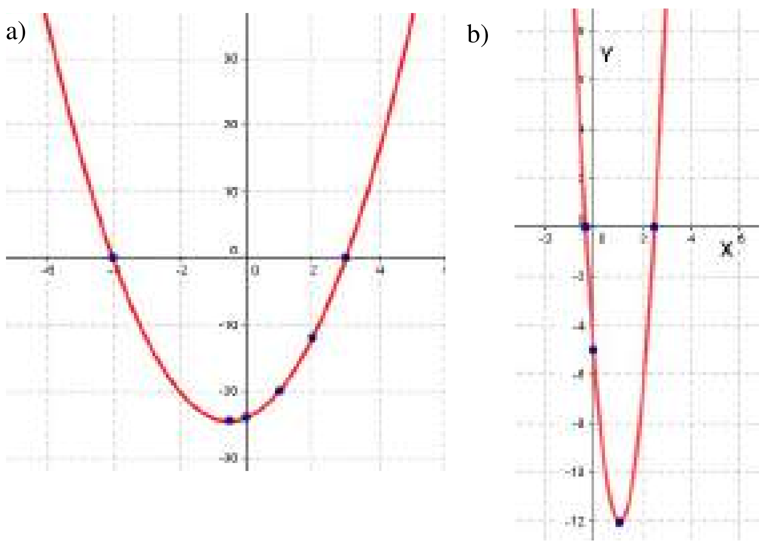


FIGURA 4

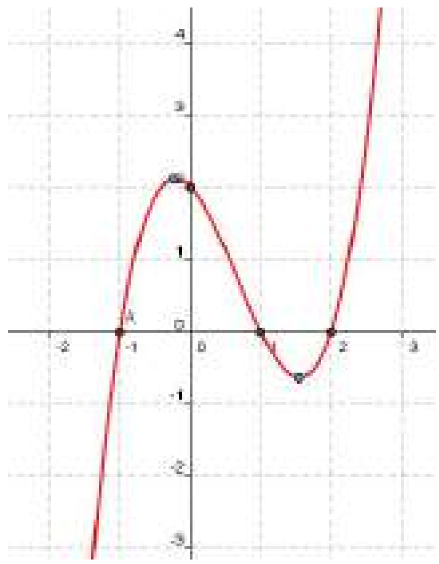


FIGURA 5

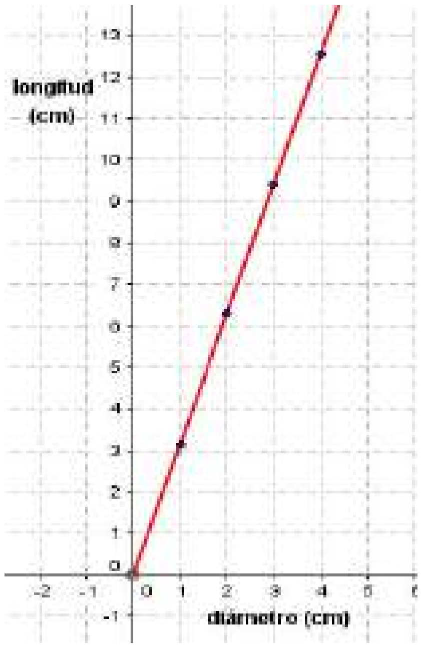


FIGURA 6

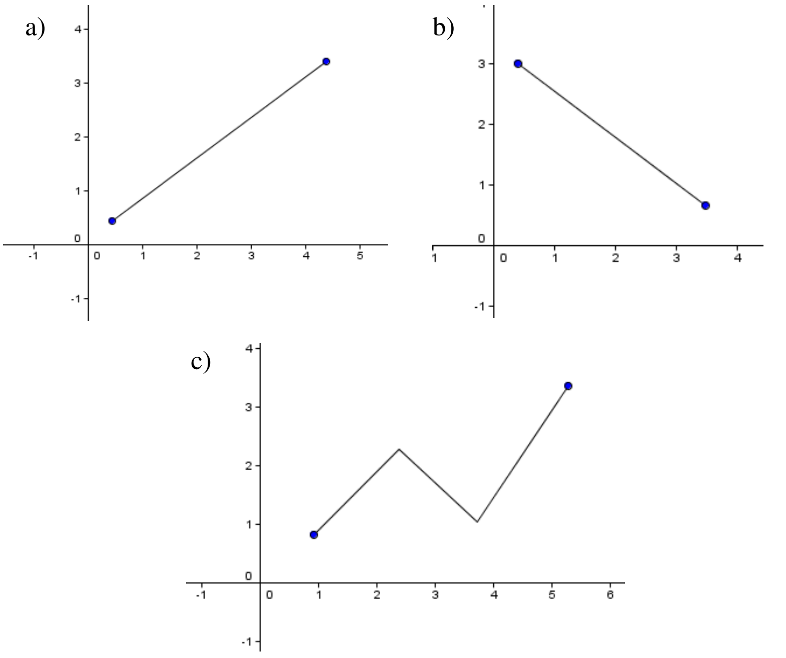


FIGURA 7

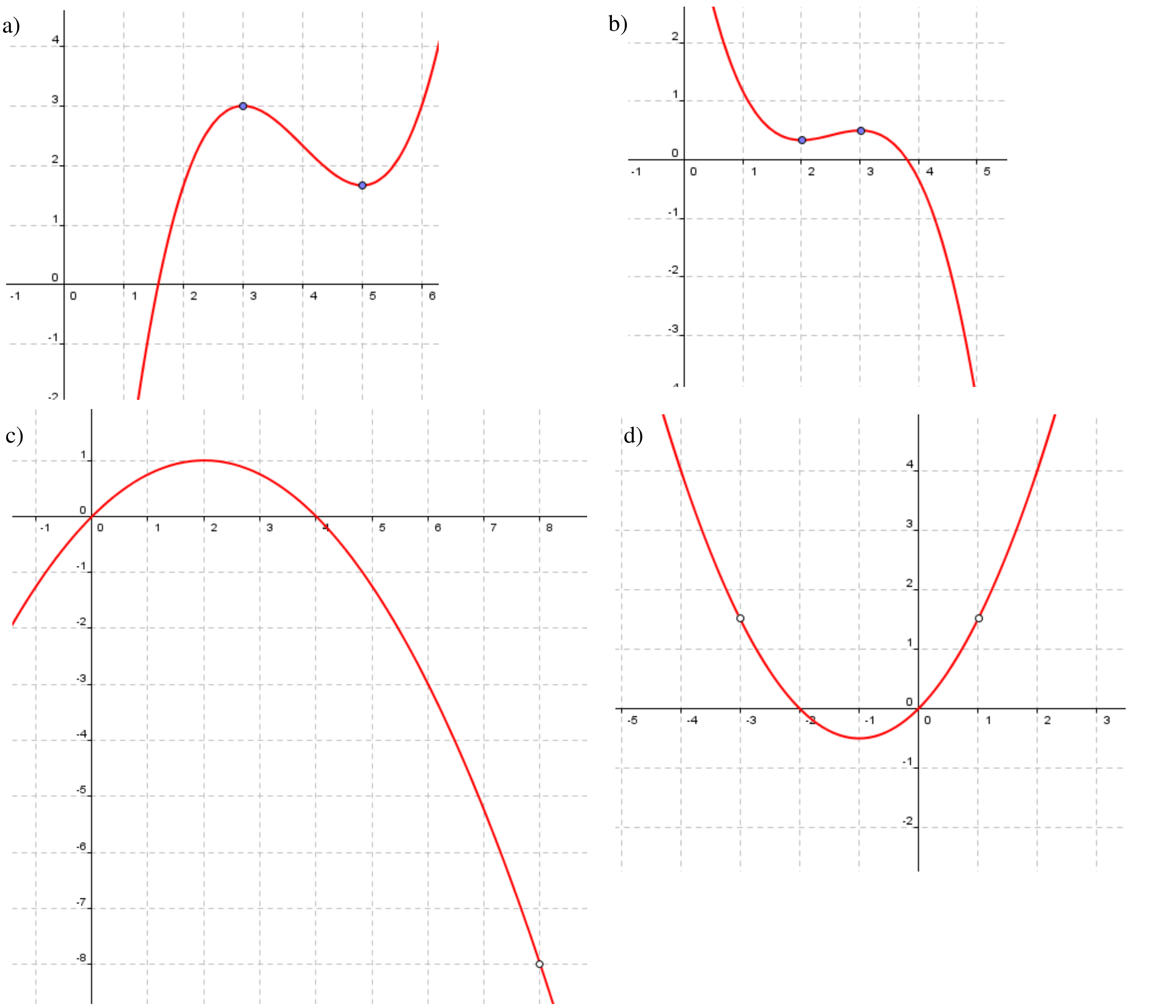


FIGURA 8

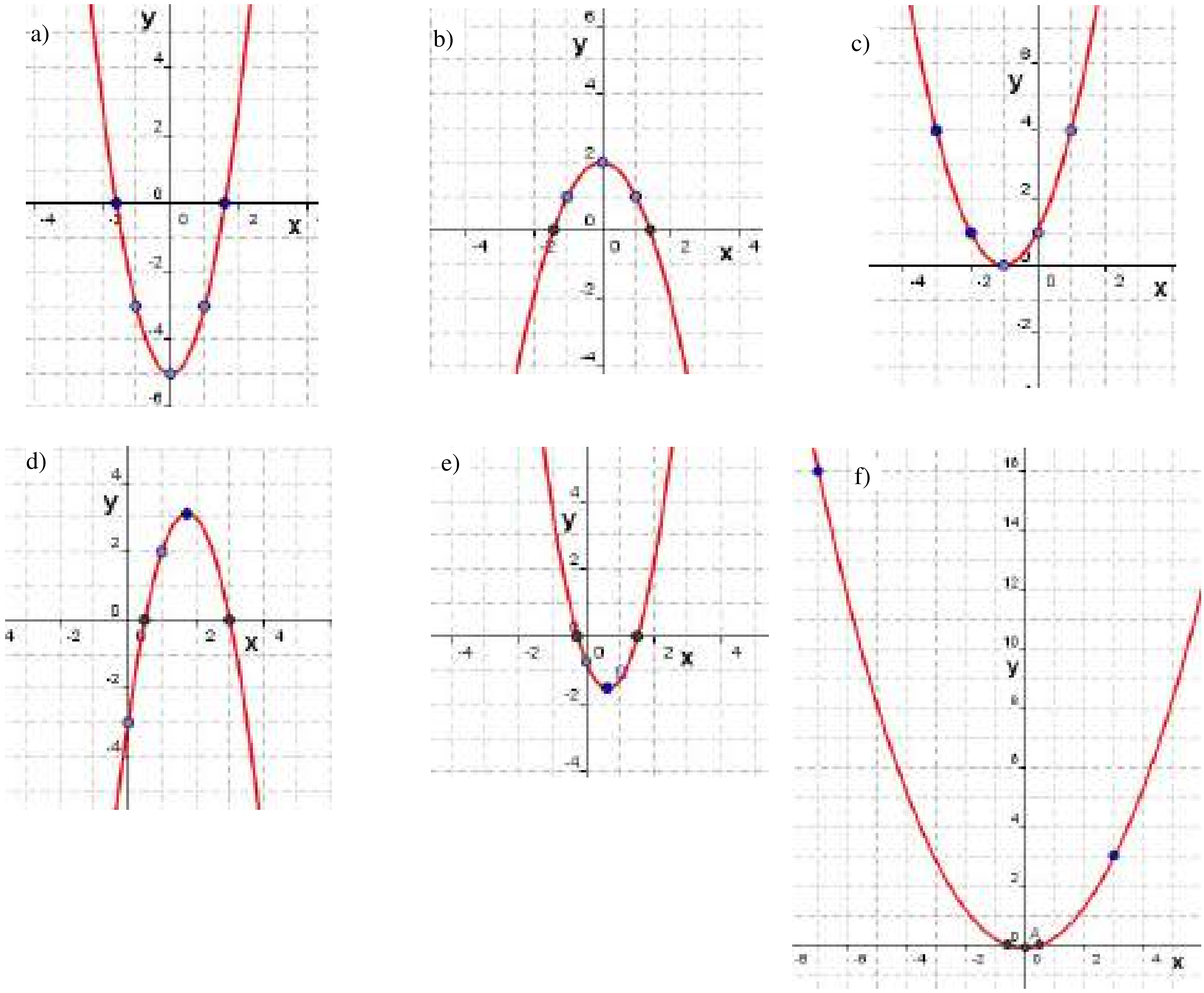


FIGURA 9

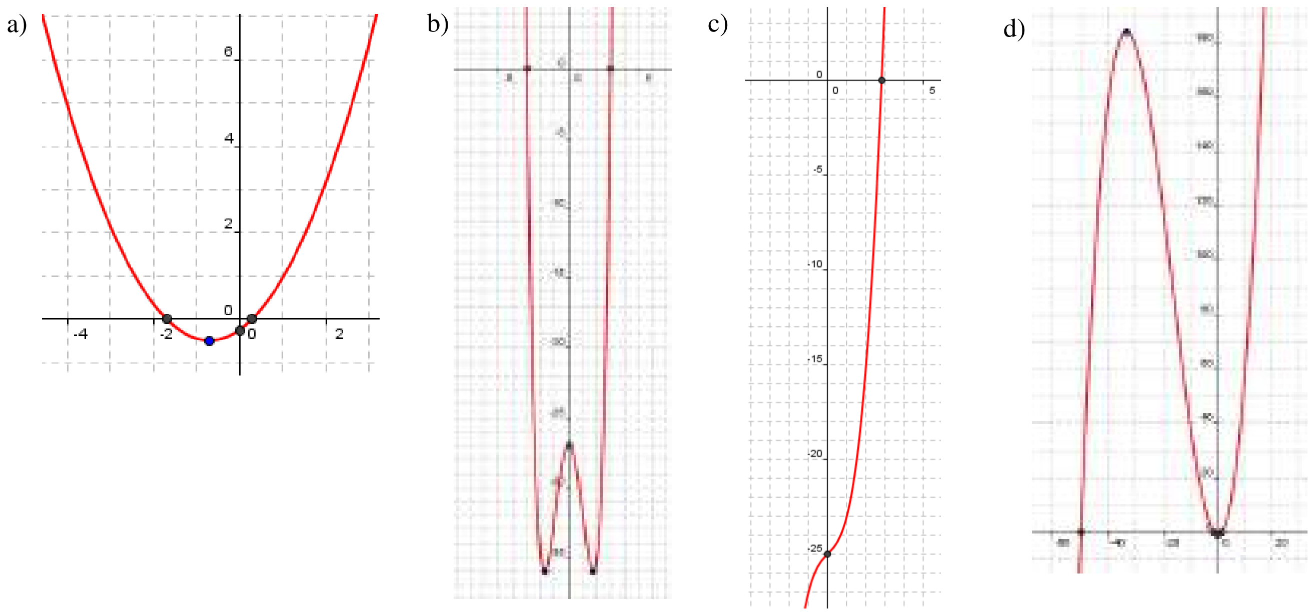


FIGURA 10

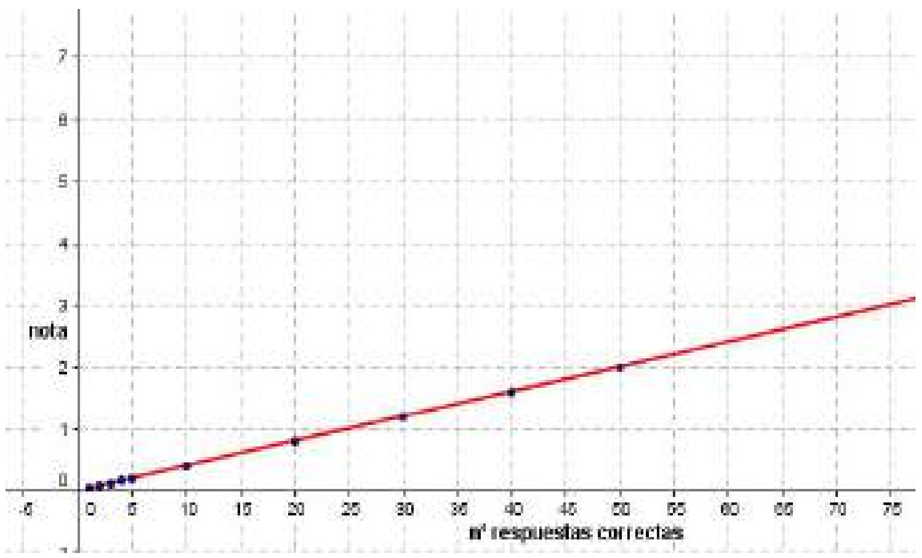


FIGURA 12

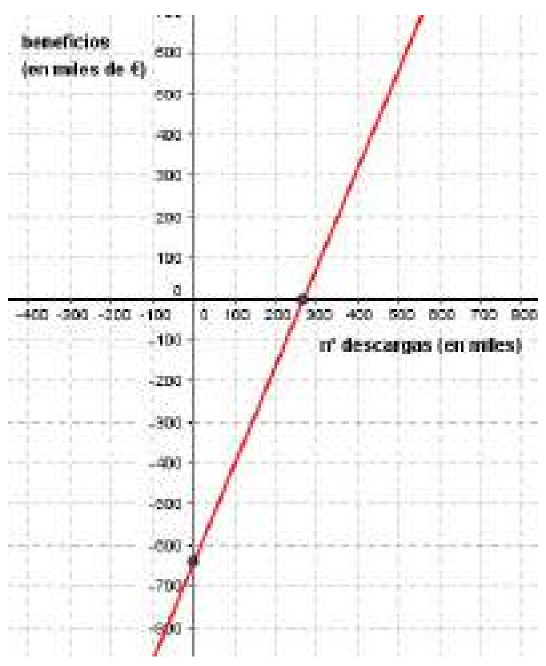


FIGURA 11

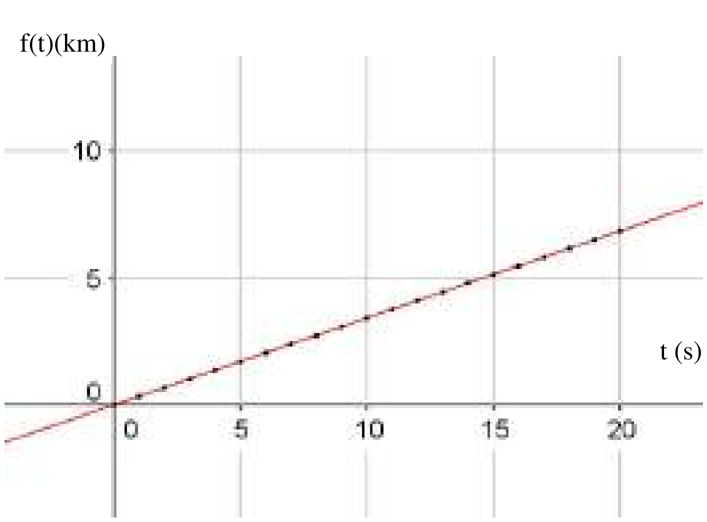


FIGURA 13

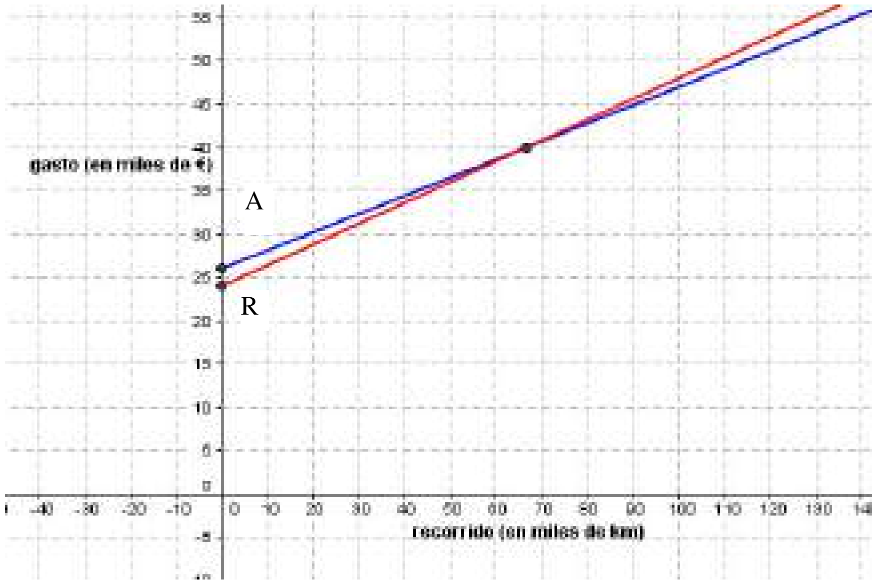
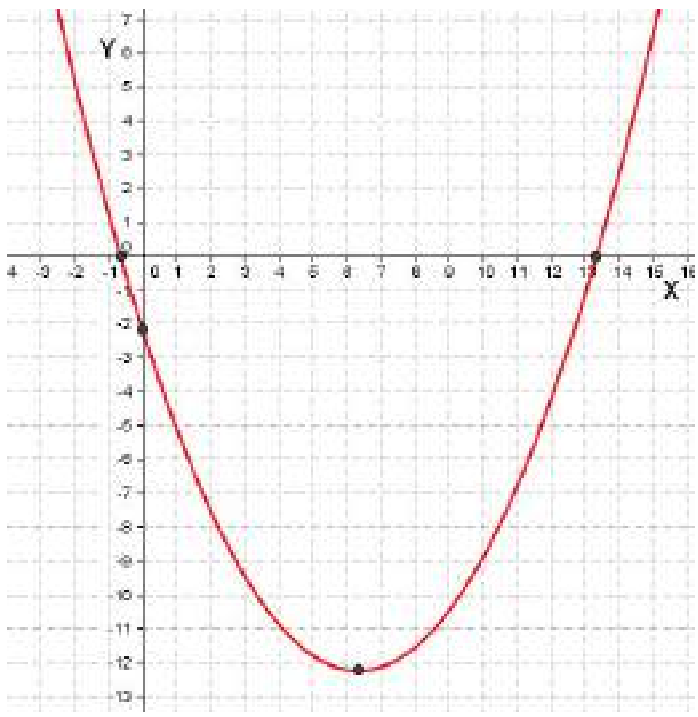


FIGURA 14



DIRECCIONES DE INTERNET

TICHING	WEBS
http://www.tiching.com/738812	http://matematicasiesoja.wordpress.com/2o-eso/
http://www.tiching.com/749827	http://conteni2.educarex.es/mats/11806/contenido/
http://www.tiching.com/749828	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/representaciones/graficas_tablas/actividad.html
http://www.tiching.com/749829	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/EDAD_2eso_funciones/index_2quincena11.htm
http://www.tiching.com/749830	http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/funciones/caracteristicas/mancuentro/actividad.html
http://www.tiching.com/749831	http://www.vitutor.com/fun/2/c_3_e.html
http://www.tiching.com/749832	http://www.profesorenlinea.cl/geometria/Recta_Ecuacion_de.html
http://www.tiching.com/749833	http://aprender-ensenyar-matematicas.blogspot.com.es/2011/12/dibujar-graficas-de-funciones-usando-el.html