# 11 LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS

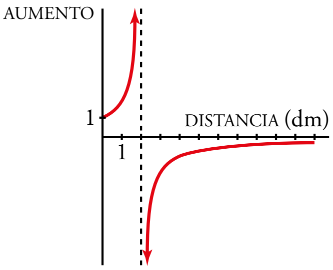
Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

C.E.: CE 1.11. (EA 1.11.1.) CE 1.12. (EA 1.12.1.)

Página 287

## Resuelve

### A través de una lupa




**El *aumento* $A$ producido por cierta lupa viene dado por la siguiente ecuación:**

$$A = \frac{2}{2-d}$$

**donde $d$ es la *distancia* (en decímetros) entre el objeto que queremos observar y la lupa.**

**Si acercamos el objeto a la lupa hasta tocarla $(d = 0)$, su tamaño se mantiene igual. Esto, en términos de límites, se escribe así:**

$$\lim_{d \to 0} A = 1$$

**¿Cómo se escribiría lo siguiente en términos de límites?**

**a) Si acercamos el objeto a 2 dm, aproximadamente, se hace más y más grande. Además, el objeto se verá al derecho si $d < 2$, o invertido, si $d > 2$.**

$$\lim_{d \to 2^-} A = \ldots \qquad \lim_{d \to 2^+} A = \ldots$$

**b) Si alejamos la lupa del objeto, este se ve cada vez más pequeño.**

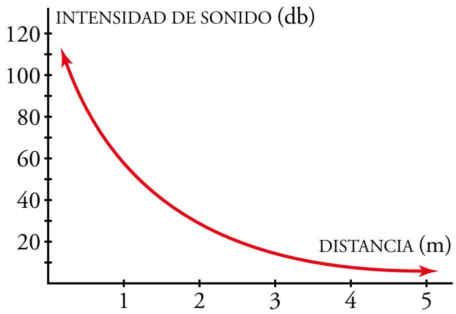
$$\lim_{d \to +\infty} A = \ldots$$

a) $\lim\limits_{d \to 2^-} A = +\infty$

$\lim\limits_{d \to 2^+} A = -\infty$

b) $\lim\limits_{d \to +\infty} A = 0$

### Ruido y silencio




**Si acercamos la oreja a un foco de sonido, este se hace insoportable. Si la alejamos mucho, deja de oírse. Traduce estos hechos a límites, llamando $I$ a la *intensidad del sonido* (en decibelios) y $d$ a la *distancia* (en metros) a la que nos colocamos del foco emisor:**

$$\lim_{d \to 0} I = \ldots \qquad \lim_{d \to +\infty} I = \ldots$$

$\lim\limits_{d \to 0} I = +\infty \qquad \lim\limits_{d \to +\infty} I = 0$

# 1 ▶ COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN EL INFINITO

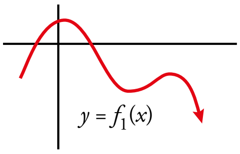
C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

## Página 289

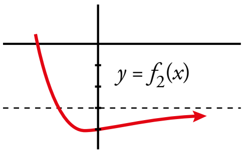
**1** Cabezas pensantes. **[La búsqueda de los límites propuestos, permite trabajar esta técnica].**

**Di el límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:**

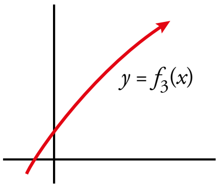
**a)**



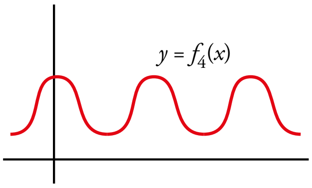

**b)**




**c)**




**d)**




a) $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$   b) $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$   c) $\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$   d) $\lim_{x \to +\infty} f_4(x)$ no existe.

# 2 ▸ CALCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES CUANDO $x \to +\infty$

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2.(EA 3.2.1.)

## Página 290

**1** **Di el valor del límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:**

**a)** $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ **b)** $f(x) = 5x^3 + 7x$

**c)** $f(x) = x - 3x^4$ **d)** $f(x) = \frac{1}{3x}$

**e)** $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ **f)** $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$ b) $+\infty$

c) $-\infty$ d) $0$

e) $0$ f) $-\infty$

**2** **Como $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, halla un valor de $x$ para el cual sea $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.**

Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

**3** **Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - 10x} = 0$, halla un valor de $x$ para el cual sea $\frac{1}{x^2 - 10x} < 0{,}0001$.**

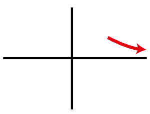
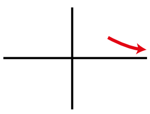
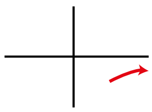
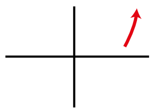
Por ejemplo, para $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}0000\overset{\frown}{01}$.

## Página 291

**4** **Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:**

**a)** $f(x) = \frac{1}{3x}$ **b)** $f(x) = \frac{3}{x}$ **c)** $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ **d)** $f(x) = 3x - 5$

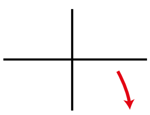
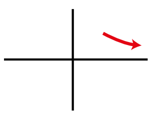
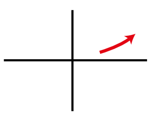
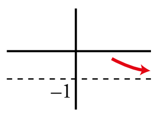
a) $0$ b) $0$ c) $0$ d) $+\infty$

**5** **Calcula $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y representa sus ramas:**

**a)** $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2 - 3}{1 + 2x^3}$ **c)** $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ **d)** $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$

a) $-\infty$ b) $0$ c) $+\infty$ d) $-1$

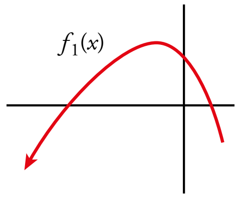
# 3 ▶ LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to -\infty$

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

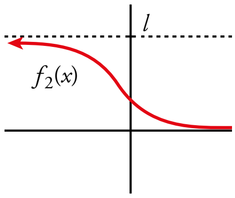
## Página 292

**1** **Indica el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes funciones:**

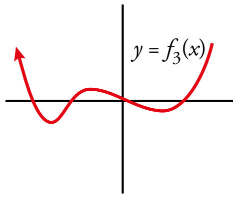
**a)**



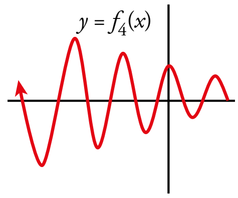

**b)**




**c)**




**d)**




a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$    b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = l$    c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty$    d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) =$ no existe

# 4 ▶ CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES CUANDO $x \to -\infty$

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

## Página 293

**1 Halla los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ de las funciones siguientes:**

**a)** $f(x) = -2x^3 + 7x^2$ **b)** $f(x) = 3x^4 - 7x$

**c)** $f(x) = 10^x$ **d)** $f(x) = \sqrt{5x - 8}$

**e)** $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 1}$ **f)** $f(x) = -5^x$

a) $\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x) = \lim_{x \to -\infty} 3x^4 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} (3x^4 - 7x) = \lim_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$

c) $\lim_{x \to -\infty} 10^x = 0$

Ya que para $x = -10$, $10^{-10} = \frac{1}{10^{10}} = 0{,}00000000001$ y análogamente ocurriría para valores negativos de $x$ menores que $-10$.

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que $\lim_{x \to +\infty} 10^x = +\infty$.

d) El límite cuando $x$ tiende a $-\infty$ no tiene sentido porque la función está definida para $x \geq \frac{8}{5}$.

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{5x - 8} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$.

e) No tiene sentido calcular ninguno de los dos límites porque el dominio de definición de la función es el intervalo $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

f) $\lim_{x \to -\infty} -5^x = 0$

Ya que para $x = -10$, $-5^{-10} = -\frac{1}{5^{10}} = -0{,}0000001024$ y análogamente ocurriría para valores negativos de $x$ menores que $-10$.

De forma similar a la anterior, podemos comprobar que $\lim_{x \to +\infty} -5^x = -\infty$.

**2 Halla los límites cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$ de las funciones siguientes:**

**a)** $f(x) = \sqrt{3 - x}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2 + 3}{-x^3}$

**c)** $f(x) = \frac{-x^3}{x^2 + 3}$ **d)** $f(x) = \frac{5x^3 - 10}{3x^3 + 10x^2}$

a) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{3 - x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$ porque el radicando tiende a $+\infty$.

El límite cuando x tiende a $+\infty$ no tiene sentido porque la función está definida solo cuando $x \leq 3$.

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 3}{-x^3} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x} = 0$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{-x^3} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x} = 0$$

Términos de mayor grado.

c) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{x^2+3} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3}{x^2+3} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$$

Términos de mayor grado.

d) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3}{3x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3}{3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

Términos de mayor grado.

# 5 ▸ COMPORTAMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. LÍMITES Y CONTINUIDAD

C.E.: CE 1.11. (EA 1.11.1.) CE 1.12.(EA 1.12.1.) CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) CE 3.2. (EA 3.2.1.-EA 3.2.2.-EA 3.2.3.)

## Página 294

**1** **Comprueba que $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$ dando a $x$ valores menores que 1, cada vez más próximos a 1, como, por ejemplo, 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; …**

$x = 0{,}9 \to \frac{1}{(0{,}9-1)^2} = 100$

$x = 0{,}99 \to \frac{1}{(0{,}99-1)^2} = 10\,000$

$x = 0{,}999 \to \frac{1}{(0{,}999-1)^2} = 1\,000\,000$

$x = 0{,}9999 \to \frac{1}{(0{,}9999-1)^2} = 100\,000\,000$

$\vdots$

$x = \underset{n\text{ - veces}}{0{,}99\ldots99} \to \frac{1}{(0{,}99\ldots9-1)^2} = \underset{2n\text{ - veces}}{100\ldots0}$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

**2** **Comprueba, dando valores a la variable $x$, las siguientes igualdades:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2+5) = 6$

a) $x = 0{,}9 \to \frac{1}{0{,}9-1} = -10$

$x = 0{,}99 \to \frac{1}{0{,}99-1} = -100$

$x = 0{,}999 \to \frac{1}{0{,}999-1} = -1\,000$

$\vdots$

$x = \underset{n\text{ - veces}}{0{,}9\ldots9} \to \frac{1}{\underset{\text{n - veces}}{0{,}9\ldots9}-1} = -\underset{n\text{ - veces}}{10\ldots0}$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$

b) $x = 0{,}9 \to (0{,}9)^2 + 5 = 5{,}81$

$x = 0{,}99 \to (0{,}99)^2 + 5 = 5{,}9801$

$x = 0{,}999 \to (0{,}999)^2 + 5 = 5{,}998001$

$x = 0{,}9999 \to (0{,}9999)^2 + 5 = 5{,}99980001$

Luego $\lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 5) = 6$

## Página 295

### Ejercicios

- **Comprueba que**

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} (x^2+5) = 6$$

**dando a $x$ los valores: 2; 1,5; 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001; …**

- $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

$x = 2 \to \frac{1}{(2-1)^2} = 1$

$x = 1{,}5 \to \frac{1}{(1{,}5-1)^2} = 4$

$x = 1{,}1 \to \frac{1}{(1{,}1-1)^2} = 100$

$x = 1{,}01 \to \frac{1}{(1{,}01-1)^2} = 10\,000$

$x = 1{,}001 \to \frac{1}{(1{,}001-1)^2} = 1\,000\,000$

$x = 1{,}0001 \to \frac{1}{(1{,}0001-1)^2} = 100\,000\,000$

Luego $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

- $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

$x = 2 \to \frac{1}{2-1} = 1$

$x = 1{,}5 \to \frac{1}{1{,}5-1} = 2$

$x = 1{,}1 \to \frac{1}{1{,}1-1} = 10$

$x = 1{,}01 \to \frac{1}{1{,}01-1} = 100$

$x = 1{,}001 \to \frac{1}{1{,}001-1} = 1\,000$

$x = 1{,}0001 \to \frac{1}{1{,}0001-1} = 10\,000$

Luego $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

- $\lim_{x\to 1^+} (x^2+5) = 6$

$x = 2 \to (2)^2 + 5 = 9$

$x = 1{,}5 \to (1{,}5)^2 + 5 = 7{,}25$

$x = 1{,}1 \to (1{,}1)^2 + 5 = 6{,}21$

$x = 1{,}01 \to (1{,}01)^2 + 5 = 6{,}0201$

$x = 1{,}001 \to (1{,}001)^2 + 5 = 6{,}002001$

$x = 1{,}0001 \to (1{,}0001)^2 + 5 = 6{,}00020001$

Luego $\lim_{x\to 1^+} (x^2+5) = 6$

## Página 297

**3** **Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y qué tipo de discontinuidad presenta:**

**a)** $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-3x}{x}$

**c)** $y = \dfrac{x^2-3}{x}$ **d)** $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) Rama infinita en $x = 3$ (asíntota vertical).

b) Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 4$.

**4** **Explica por qué son continuas las siguientes funciones y determina el intervalo en el que están definidas:**

**a)** $y = x^2 - 5$ **b)** $y = \sqrt{5-x}$

**c)** $y = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x < 3 \\ x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ **d)** $y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica.

b) Está definida y es continua en $(-\infty, 5]$.

Las funciones dadas mediante una expresión analítica sencilla (las que conocemos) son continuas donde están definidas.

c) Está definida en todo $\mathbb{R}$. Es continua, también, en todo $\mathbb{R}$. El único punto en que se duda es el 3: las dos ramas toman el mismo valor para $x = 3$.

$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$

Por tanto, las dos ramas empalman en el punto $(3, 5)$. La función es también continua en $x = 3$.

d) También las dos ramas empalman en el punto $(2, 2)$. Por tanto, la función es continua en el intervalo en el que está definida: $[0, 5)$.

**5** **Halla $m$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$:**

$$y = \begin{cases} x^2-5 & \text{si } x < 3 \\ mx+10 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$y$ es continua en $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ por serlo las funciones $f_1(x) = x^2 - 5$ y $f_2(x) = mx + 10$.

Hemos de procurar, pues, que también lo sea en el punto de empalme, $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} y = f_1(3) = (3)^2 - 5 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} y = f_2(3) = 3m + 10 \end{array}\right\} 4 = 3m + 10 \to 3m = 4 - 10 \to 3m = -6 \to m = \frac{-6}{3} \to m = -2.$$

Para que $y$ sea continua en $x = 3$, ha de ser $m = -2$.

**6** **Calcula $m$ y $n$ para que $f$ sea continua en todo $\mathbb{R}$:**

$$y = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 0 \\ x^2+mx+n & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 45-x^2 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

$y$ es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, 6) \cup (6, +\infty)$ por serlo las funciones $f_1(x) = 2x + 3$, $f_2(x) = x^2 + mx + n$ y $f_3(x) = 45 - x^2$.

Hemos de procurar, pues, que también lo sea en los puntos de empalme.

- $x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(0) = 3 \\ f_2(0) = n \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} y = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} y = n \end{array}\right\} 3 = n$$

Para que $y$ sea continua en $x = 0$ ha de ser $n = 3$.

- $x = 6$

$$\left.\begin{array}{l} f_2(6) = 36 + 6m + 3 \\ f_3(6) = 45 - 36 = 9 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 6^-} y = 6m + 39 \\ \lim\limits_{x \to 6^+} y = 9 \end{array}\right\} 6m + 39 = 9 \to 6m = -30 \to m = -\frac{30}{6} \to m = -5.$$

Si $m = -5$ y $n = 3$, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

**7** **Calcula $p$ y $q$ para que $f$ sea continua en $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} px + 2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \le x \le 5 \\ -\frac{1}{5}x + q & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$ por serlo las funciones $f_1(x) = px + 2$, $f_2(x) = 4$ y $f_3(x) = -\frac{1}{5}x + q$.

Hemos de procurar, pues, que también lo sea en los puntos de empalme.

- $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 2p + 2 \\ f_2(2) = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2p + 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} 2p + 2 = 4 \to 2p = 20 \to p = 1.$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ ha de ser $p = 1$.

- $x = 5$

$$\left.\begin{array}{l} f_2(5) = 4 \\ f_3(5) = -1 + q \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -1 + q \end{array}\right\} 4 = -1 + q \to q = 5.$$

Si $p = 1$ y $q = 5$, entonces $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

# 6 CÁLCULO DE LÍMITES EN UN PUNTO

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

## Página 298

**1 Calcula razonadamente el valor de los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) $-1$

## Página 299

**2 Calcula $n$ para para que exista el límite en $x = -1$.**

$$f(x) = \begin{cases} n - x^3 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 4 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ tenga límite en $x = -1$ ha de cumplirse $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f_1(x) = f_1(-1) = n - (-1)^3$ pues $f_1(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to -1} f_1(x)$ coincide con $f_1(-1)$.

$f_1(-1) = n + 1$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f_2(x) = f_2(-1) = 2\,(-1) + 4 = 12$ pues $f_2(-1)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to -1} f_2(x)$ coincide con $f_2(-1)$.

Ha de cumplirse, pues, $n + 1 = 2 \to n = 1$.

Para $n = 1$, $f(x)$ tiene límite en $-1$ y vale 2:

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$.

**3 Calcula $k$ para que esta función tenga límite en $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k & \text{si } x \le 3 \\ 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

**Halla su límite en $x = 0$ y en $x = 11$.**

Para que $f(x)$ tenga límite en $x = 3$ ha de cumplirse $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} f_1(x) = f_1(3)\ 3^3 - 2 \cdot 3 + k = 27 - 6 + k = k + 21$ pues $f_1(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to 3} f_1(x)$ coincide con $f_1(3)$.

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f_2(x) = f_2(3) = 7$ pues $f_2(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto $\lim\limits_{x \to 3} f_2(x)$ coincide con $f_2(3)$.

Ha de cumplirse, pues, $k + 21 = 7 \to k = -14$.

Para $k = -14$, $f(x)$ tiene límite en 3 y vale 7.

Digamos, también, en consecuencia, para $k = -14$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = f_1(0) = 0^3 - 2 \cdot 0 - 14 = -14$

$\lim\limits_{x \to 11} f(x) = f(11) = f_2(11) = 7$

**4** **Halla el límite de esta función en $x = 0$, $x = 3$ y $x = 4$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3 & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

- Límite en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 - 5x + 3) = 0^3 - 5 \cdot 0 + 3 = 3$$

- Límite en $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^3 - 5x + 3) = 3^3 - 5 \cdot 3 + 3 = 15$$

- Límite en $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x^3 - 5x + 3) = 4^3 - 5 \cdot 4 + 3 = 47$$

**5** **Halla el límite de esta función en $x = 3$:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x < 3 \\ -x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

**Halla también su límite en $x = 1$ y en $x = 7$.**

- $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} f_2(x) = f_2(3) = -3 + 2 = -1.$
- $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} f_1(x) = f_1(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 7.$
- $\lim_{x \to 7} f(x) = \lim_{x \to 7} f_2(x) = f_2(7) = -7 + 2 = -5.$

## Página 301

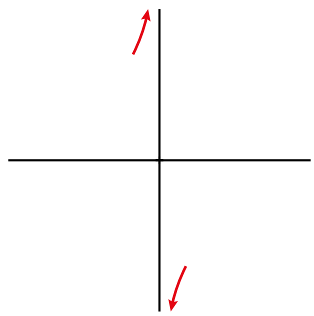
**6** **Calcula cada uno de los siguientes límites y representa los resultados:**

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x-3}{x}$  b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x-3}{x^2}$  c) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

a) El denominador se anula en $x = 0$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \;\rightarrow\; \dfrac{-0{,}01 - 3}{-0{,}01} = 301 \;\rightarrow\; \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x} = +\infty$

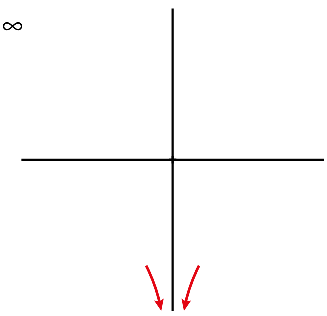
DERECHA: $x = 0{,}01 \;\rightarrow\; \dfrac{0{,}01 - 3}{0{,}01} = -299 \;\rightarrow\; \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x} = -\infty$



b) El denominador se anula en $x = 0$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \;\rightarrow\; \dfrac{-0{,}01 - 3}{(-0{,}01)^2} = -30\,100 \;\rightarrow\; \lim_{x \to 0^-} \dfrac{x-3}{x^2} = -\infty$

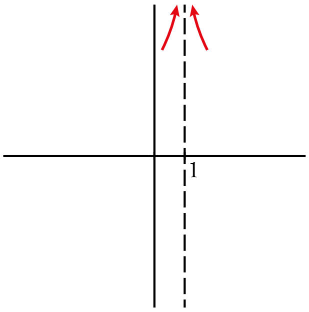
DERECHA: $x = 0{,}01 \;\rightarrow\; \dfrac{0{,}01 - 3}{0{,}01^2} = -29\,900 \;\rightarrow\; \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x^2} = -\infty$



c) El denominador se anula en $x = 1$, pero no el numerador. Por tanto, el límite es infinito, con signo más o menos.

IZQUIERDA: $x = 0{,}99 \rightarrow \dfrac{0{,}99^3}{(0{,}99-1)^2} = 9\,703 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

DERECHA: $x = 1{,}01 \rightarrow \dfrac{1{,}01^3}{(1{,}01-1)^2} = 10\,303 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$



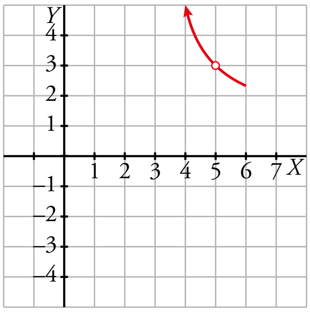

**7** **a)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3-5x^2}{x^2}$

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 5$.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2-8x+15} = \lim_{x \to 5} \frac{x+1}{x-3} = 3$$



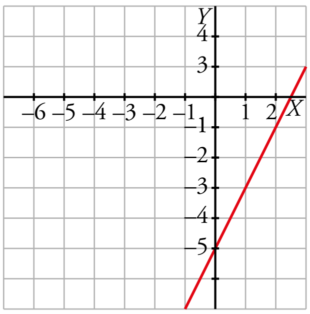

b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 0$.

Simplificamos la fracción:

$$\frac{2x^3-5x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x-5)}{x^2} = 2x-5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3-5x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} (2x-5) = -5$$

$y = 2x - 5$



**8** **a)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3+3x^2}{x^4}$

a) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 1$.

Simplificamos la fracción $\to \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = \dfrac{(x+5)(x-1)}{x(x-1)^2} = \dfrac{x+5}{x(x-1)}$

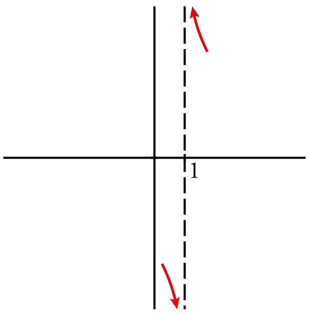
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+5}{x(x-1)}$ $\to$ Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$.

Estudiamos el signo de la función a uno y otro lado de 1.

IZQUIERDA: $x = 0{,}99 \to \dfrac{0{,}99^2+4\cdot 0{,}99-5}{0{,}99^3-2\cdot 0{,}99^2+0{,}99} = -605 \to \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = -\infty$

DERECHA $x = 1{,}01 \to \dfrac{1{,}01^2+4\cdot 1{,}01-5}{1{,}01^3-2\cdot 1{,}01^2+1{,}01} = 595 \to \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+4x-5}{x^3-2x^2+x} = +\infty$

Por tanto, el límite pedido no existe.




b) Tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 0$.

Simplificamos la fracción $\to \dfrac{x^3+3x^2}{x^4} = \dfrac{x^2(x+3)}{x^4} = \dfrac{x+3}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3+3x^2}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+3}{x^2}$ $\to$ Ahora se anula el denominador, pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$.

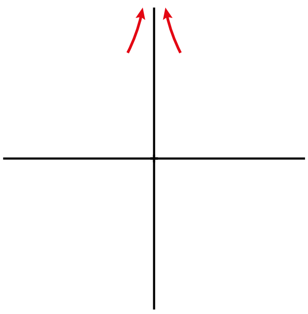
Estudiamos la función a uno y otro lado de 0.

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{(-0{,}01)^3+3\cdot(-0{,}01)^2}{(-0{,}01)^4} = 29\,900 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3+3x^2}{x^4} = +\infty$

DERECHA $x = 0{,}01 \to \dfrac{0{,}01^3+3\cdot 0{,}01^2}{0{,}01^4} = 30\,100 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3+3x^2}{x^4} = +\infty$

Por tanto, el límite de esta función cuando $x \to 0$ es $+\infty$.

$y = \dfrac{x+3}{x^2}$



# 7 RAMAS INFINITAS. ASÍNTOTAS

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

## Página 303

**1 Determina las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas:**

**a)** $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ **b)** $y = \dfrac{3x^2-7}{x-2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x}$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x^2}$ **e)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

a) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{3 \cdot 1{,}99+1}{1{,}99-2} = -697 \to \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x+1}{x-2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{3 \cdot 2{,}01+1}{2{,}01-2} = 703 \to \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x+1}{x-2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{x-2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{x-2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3$$

Términos de mayor grado.

Por tanto, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal.

Para saber la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal, debemos tener en cuenta que

$$y = \frac{3x+1}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}.$$

Cuando $x \to +\infty$ el cociente $\dfrac{7}{x-2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota.

Cuando $x \to -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

b) Como el denominador se anula cuando $x = 2$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-7}{x-2} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{3 \cdot 1{,}99^2-7}{1{,}99-2} = -488{,}03 \to \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = -\infty$

DERECHA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{3 \cdot 2{,}01^2-7}{2{,}01-2} = 512{,}03 \to \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$

Términos de mayor grado.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} \underset{\downarrow}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$$

Términos de mayor grado.

Por tanto, no tiene asíntotas de este tipo.

Ahora estudiamos las asíntotas oblicuas:

$y = \dfrac{3x^2 - 7}{x - 2} = 3x + 6 + \dfrac{5}{x - 2}$

La recta $y = 3x + 6$ es una asíntota oblicua ya que $\dfrac{5}{x - 2}$ tiende a 0 cuando $x \to \pm\infty$.

Cuando $x \to +\infty$ el cociente $\dfrac{5}{x - 2}$ toma valores positivos y la función está por encima de la asíntota oblicua.

Cuando $x \to -\infty$, ocurre lo contrario y la función está por debajo de la asíntota.

c) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{1}{-0{,}01} = -100 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

DERECHA: $x = 0{,}01 \to \dfrac{1}{0{,}01} = 100 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Cuando $x \to +\infty$, la función es positiva y está por encima de la asíntota horizontal. Cuando $x \to -\infty$, la función es negativa y está por debajo de la asíntota.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

d) Como el denominador se anula cuando $x = 0$, estudiamos en ese punto la existencia de una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{-x^2} = \dfrac{1}{0} = -\infty$ porque la función siempre toma valores negativos.

Por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x^2} = 0$

Por tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Como la función siempre toma valores negativos, está por debajo de la asíntota horizontal.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

e) La función está definida cuando $x^2 - 9 > 0$, es decir, cuando $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. En los puntos –3 y 3 se producen divisiones entre 0. Vamos a estudiar en ellos la existencia de asíntotas, pero solo podremos calcular límites por uno de los lados en cada punto.

$\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \dfrac{1}{0} = +\infty$

Porque la función siempre es positiva. Luego las rectas $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

La recta $y = 0$ es claramente una asíntota horizontal porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0$.

Tanto si $x \to +\infty$ como si $x \to -\infty$, la función queda por encima de la asíntota horizontal por tomar valores positivos.

No tiene asíntotas oblicuas porque los límites en el infinito de la función no son infinitos.

# 8 ▶ RAMAS INFINITAS EN LAS FUNCIONES RACIONALES

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) CE 3.2. (EA 3.2.1.-EA 3.2.2.-EA 3.2.3.)

## Página 305

**1** **Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones y, a partir de ellas, perfila la forma de la curva:**

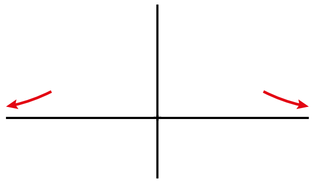
a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ c) $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ d) $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

e) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ f) $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ g) $y = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$ h) $y = \dfrac{2x^3-3x^2}{x-1}$

a) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. Asíntota: $y = 0$

Como la función siempre es positiva, queda por encima de la asíntota.

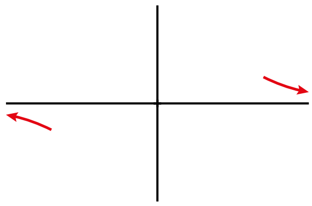


b) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$. Asíntota: $y = 0$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

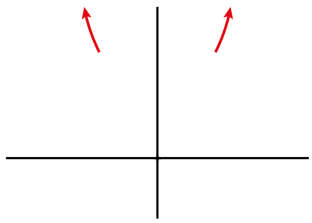
$$f(x) - 0 = \frac{x}{1+x^2} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por encima de la asíntota} \\ - \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \end{cases}$$



c) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x) = 2$, tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4}{x^2+1} = +\infty \to$ Las ramas parabólicas son hacia arriba.

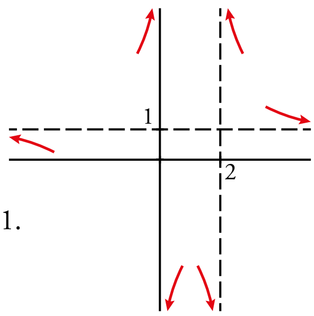


d) Asíntotas verticales. Obtenemos las raíces del denominador:

$x^2 - 2x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 2$ son asíntotas porque el numerador no se anula en estos valores.

Estudiamos la posición de la curva respecto a ellas:

| | PRÓXIM. $x = 0$ | | PRÓXIM. $x = 2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | –0,01 | 0,01 | 1,99 | 2,01 |
| $\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$ | + | – | – | + |



Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$. Asíntota: $y = 1$.

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

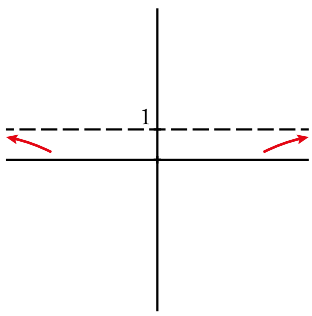
$$f(x) - 1 = \frac{x^2+2}{x^2-2x} - 1 = \frac{2+2x}{x^2-2x} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por encima de la asíntota} \\ - \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \end{cases}$$

e) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula.

Ramas en el infinito: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$. Asíntota: $y = 1$

Estudiamos el signo de su diferencia con la asíntota:

$$f(x) - 1 = \frac{-1}{1+x^2} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \\ - \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \end{cases}$$



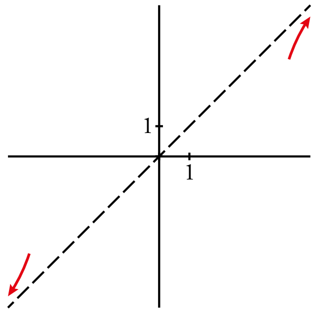
f) Asíntotas verticales. No tiene porque el denominador no se anula nunca.

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x)$ = 1, tiene una asíntota oblicua.

$y = \dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{x^2-1}$ $\to$ La recta $y = x$ es la asíntota.

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - x = \frac{-x}{x^2+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \\ + \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por encima de la asíntota} \end{cases}$$




g) Asíntota vertical: $x = -1$ porque se anula el denominador y no el numerador.

Estudiamos su posición:

IZQUIERDA: $f(-1{,}01) = \dfrac{(-1{,}01)^2 + 3 \cdot (-1{,}01)}{-1{,}01+1} = 200{,}99$ (positivo)

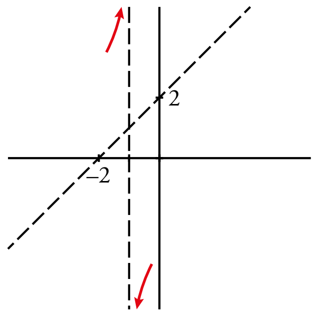
DERECHA: $f(-0{,}99) = \dfrac{(-0{,}99)^2 + 3 \cdot (-0{,}99)}{-0{,}99+1} = -198{,}99$ (negativo)

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x)$ = 1, tiene una asíntota oblicua.

$y = \dfrac{x^2+3x}{x+1} = x + 2 - \dfrac{2}{x+1}$ $\to$ La recta $y = x + 2$ es la asíntota.

Estudiamos la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$f(x) - (x+2) = \frac{-2}{x+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \to \text{Por debajo de la asíntota} \\ + \text{ si } x \to -\infty \to \text{Por encima de la asíntota} \end{cases}$$




h) Asíntota vertical: $x = 1$ porque se anula el denominador y no el numerador.

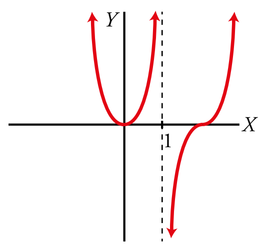
Estudiamos su posición:

IZQUIERDA: $f(0{,}99) = \dfrac{2 \cdot (0{,}99)^3 - 3 \cdot (0{,}99)^2}{0{,}99-1} = 99{,}97$ (positivo)

DERECHA: $f(1{,}01) = \dfrac{2 \cdot (1{,}01)^3 - 3 \cdot (1{,}01)^2}{1{,}01-1} = -99{,}97$ (negativo)

Ramas en el infinito: como *grado de* $P(x)$ – *grado de* $Q(x)$ = 2, tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x-1} +\infty \to \text{Rama parabólica hacia arriba} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x-1} +\infty \to \text{Rama parabólica hacia arriba} \end{cases}$$



# 9 RAMAS INFINITAS EN LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

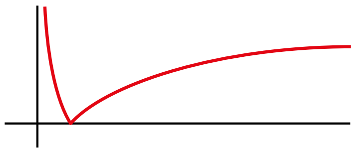
C.E.: CE 1.12. (EA 1.12.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

## Página 306

**1** ¿Qué te hace decir eso? **[La decisión sobre las afirmaciones puede completarse a través de las tres fases que propone esta estrategia].**

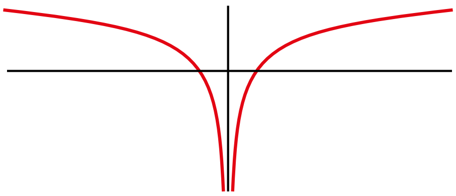
**¿Verdadero o falso?**

**a) La función $y = |log_2 x|$ se representa así:**



**Tiene dos ramas infinitas: una asíntota vertical en $y = 0$ y una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.**

**b) La función $y = log_2 |x|$ se representa así:**



**Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y sendas ramas parabólicas en $-\infty$ y en $+\infty$.**

a) Falso. Tiene una asíntota vertical en $x = 0$ no en $y = 0$.

b) Verdadero.

# EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.)

Página 307

## 1. Cálculo de límites de una función en un punto

### Hazlo tú

- **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminación. Tenemos que simplificar la fracción.

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \frac{(x-1)^2}{2x(x-1)} = \frac{x-1}{2x}; \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 2x} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x} = 0$$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2} = \dfrac{-2}{0} = -\infty$ porque el denominador siempre es positivo y el numerador siempre es negativo en las proximidades del punto $x = -2$. (En este caso no son necesarios los límites laterales).

c) Multiplicamos el numerador y el denominador por el binomio conjugado del numerador. Después dividimos ambos por $x$.

$$\frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{x} = \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1$$

## 2. Cálculo de límites cuando x → +∞ y x → –∞

### Hazlo tú

- **Calcula** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **en los siguientes casos:**

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-5}$ d) $f(x) = \dfrac{5x+3}{x^2-2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ porque el radicando es tan grande como queramos dando a $x$ valores muy grandes.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ por una razón análoga a la anterior.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

Términos de mayor grado.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} \underset{\downarrow}{=} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

Términos de mayor grado.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-5} \underset{\downarrow}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Términos de mayor grado.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+3}{x^2-2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x+3}{x^2-2} = 0$ porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

## Página 308

### 4. Límites y continuidad de una función definida «a trozos»

**Hazlo tú**

- **Halla el límite de la función**

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x < 3 \\ x - 2, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

**en $x = 0$ y en $x = 3$. Estudia su continuidad.**

- En $x = 0$ como $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x - 3 = -3$.

- $x = 3$ es el «punto de ruptura». Por ello hay que estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} (x - 2) = 1 \end{array} \right\} \text{No coinciden, por tanto, no existe } \lim_{x \to 3} f(x).$$

$f$ es discontinua en $x = 3$ porque no existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; en ese punto la función tiene un salto infinito.

Por estar formada por funciones polinómicas, $f$ es continua para todo número real distinto de 3. Lo expresamos así $\mathbb{R} - \{3\}$.

### 5. Función continua en un punto

**Hazlo tú**

- **Halla el valor de $k$ para que la función $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

Estudiamos la continuidad en el «punto de ruptura» $x = 1$.

$f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = 2 - 5 = -3$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} 2x - 5 = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} x + k = k + 1 \end{array} \right\} \text{Para que exista } \lim_{x \to 3} f(x) \text{ debe ser } -3 = k + 1 \;\to\; k = -4.$$

Para $k = -4$, f es continua en $x = 1$. Además $f$ es continua en $\mathbb{R}$, porque lo son $f_1(x) = 2x - 5$ y $f_2(x) = x - 4$ es todo $\mathbb{R}$.

## Página 309

### 6. Ramas infinitas y asíntotas

**Hazlo tú**

- **Estudia las asíntotas de las siguientes funciones:**

**a)** $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

a) • Asíntotas verticales:

$x - 2 = 0 \;\to\; x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 1}{x - 2} = \dfrac{5}{0} = \pm\infty \;\to\; x = 2$ es una asíntota vertical.

Si $x \to 2^-$, $\left( f(x) = \dfrac{+}{-} = - \right)$ $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $\left( f(x) = \dfrac{+}{+} = + \right)$ $f(x) \to +\infty$

- Asíntotas horizontales:

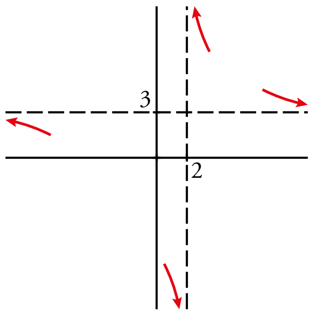
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x-1}{x-2} = 3$; $y = 3$ es una asíntota horizontal.

  Estudiamos la posición de la curva.

  $f(x) - 3 = \dfrac{3x-1}{x-2} - 3 = \dfrac{5}{x-2}$

  Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 > 0$. La curva está sobre la asíntota.

  Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 < 0$. La curva está bajo de la asíntota.




b) • Asíntotas verticales. No tiene porque su denominador nunca se anula.

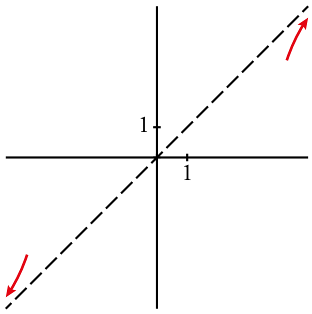
- Asíntotas horizontal u oblicua.

  Como el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador, hay asíntota oblicua. Dividiendo obtenemos:

  $\dfrac{x^3}{x^2+2} = x - \dfrac{2x}{x^2+2} \to y = x$ es asíntota oblicua.

  Estudiamos la posición:

  $d = f(x) - y = -\dfrac{2x}{x^2+2} \begin{cases} \text{Si } x \to +\infty \ (d < 0) \ f(x) < y \\ \text{Si } x \to -\infty \ (d > 0) \ f(x) > y \end{cases}$




c) • Asíntotas verticales:

  $x^2 - 4 = 0 \to x = \pm 2$

  $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty \to x = 2$ es una asíntota vertical.

  Si $x \to 2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right) \to f(x) \to -\infty$.

  Si $x \to 2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right) \to f(x) \to +\infty$.

  $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2-4} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty \to x = -2$ es una asíntota vertical.

  Si $x \to -2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right) \to f(x) \to +\infty$.

  Si $x \to -2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right) \to f(x) \to -\infty$.

- Asíntotas horizontales:

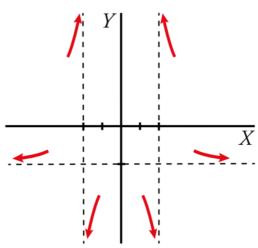
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4} = 1 \to y = 1$ es una asíntota horizontal.

  Estudiamos la posición de la curva:

  $f(x) - 1 = \dfrac{x^2}{x^2-4} - 1 = \dfrac{x^2 - x^2 + 4}{x^2-4} = \dfrac{4}{x^2-4}$

  Si $x \to +\infty$, $f(x) - 1 > 0 \to$ La curva está sobre la asíntota.

  Si $x \to -\infty$, $f(x) - 1 > 0 \to$ La curva está sobre la asíntota.



# EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 3.2. (EA 3.2.1.)

Página 310

## 1. Límites de una función definida «a trozos»

- **Dada la función**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x - 5 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 9x - x^2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

**hallar** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (9x - x^2) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
- Como $x = 0$ es un punto de ruptura, debemos calcular límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{0} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3x - 5) = -5$

El límite en $x = 0$ no existe.

## 2. Parámetros de una función que cumple ciertas condiciones

- **Hallar $a$, $b$ y $c$ en $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x - c}$ para que tenga como asíntotas $x = 2$ e $y = 2x - 1$.**

Para que $x = 2$ sea una asíntota vertical, el denominador se debe anular en este punto.

$2 - c = 0$ 8 $c = 2$

Luego $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx}{x - 2}$

Dividimos los polinomios para calcular la asíntota oblicua:

$$\frac{ax^2 + bx}{x - 2} = ax + 2a + b + \frac{4a + 2b}{x - 2}$$

Por tanto, $\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases}$, de donde $a = 2$, $b = -5$

## 3. Ramas infinitas en funciones exponenciales y logarítmicas

- **Estudiar y representar las ramas infinitas de las funciones siguientes:**

**a)** $f(x) = 1{,}5^x$

**b)** $f(x) = 0{,}4^x - 2$

**c)** $f(x) = \ln(2x - 4)$

a) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

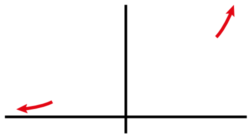
• Asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1{,}5^x = +\infty$ por ser una función exponencial con base mayor que 1.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1{,}5^x = 0$ por el mismo motivo.

Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to +\infty$.



b) • Asíntotas verticales. No tiene por ser continua.

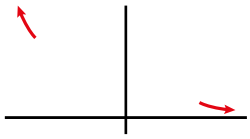
• Asíntotas horizontales.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}4^x - 2 = -2$, ya que $0{,}4^x \to 0$ cuando $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}4^x - 2 = +\infty$, ya que $0{,}4^x \to \infty$ cuand $x \to -\infty$.

Luego $y = -2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$.



c) El dominio de definición de la función es el intervalo $(2, +\infty)$ ya que se debe cumplir que $2x - 4 > 0$. En el dominio es una función continua y no tiene asíntotas verticales.

Estudiamos el comportamiento cerca del punto $x = 2$ por la derecha. Podemos verlo evaluando algunos puntos.

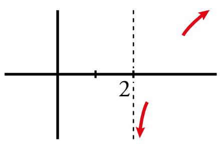
$x = 2{,}001 \;\to\; ln\,(2 \cdot 2{,}001 - 4) = -6{,}2$

$x = 2{,}0001 \;\to\; ln\,(2 \cdot 2{,}0001 - 4) = -8{,}5$

$\lim\limits_{x \to 2^+} ln\,(2x - 4) = -\infty$

Luego $x = 2$ es una asíntota vertical cuando $x \to 2^+$.

Tiene una rama parabólica en el infinito de crecimiento cada vez más lento hacia arriba por ser una función logarítmica y $\lim\limits_{x \to +\infty} ln\,(2x - 4) = +\infty$.




## 4. Asíntota oblicua en funciones irracionales

• **Hallar las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$.**

$y = ax + b$ es asíntota oblicua de $f$ si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ y $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$

• Calculamos $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} \underset{\downarrow}{=} \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 1 = 1$

Términos de mayor grado.

• Calculamos $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left[\sqrt{x^2 + 4} - 1 \cdot x\right] = \infty - \infty$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\left(\sqrt{x+4}+x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4}+x} =$$

$$= \frac{4}{\infty + \infty} = \frac{4}{\infty} = 0.$$

Luego la asíntota oblicua es: $y = 1 \cdot x + 0 \;\rightarrow\; y = x.$

## 5. Límites de valor absoluto

- **Calcular** $\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2\,|x|}{x}}$**.**

Definimos $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,|x|}{x}$ por intervalos.

Definimos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{x^2 + 2x}{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Calculamos $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x - 2 = -2$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 2 = 2$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} \;\rightarrow\;$ No existe límite.

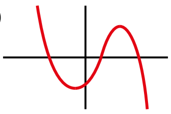
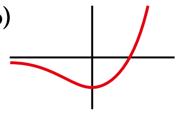
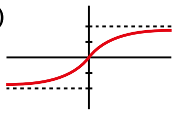
# EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

## Página 311

### Límite cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$

**1** **Determina cuál es el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ en las siguientes gráficas:**

**a)**  **b)**  **c)** 

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

**2** **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de las siguientes funciones. Representa los resultados que obtengas.**

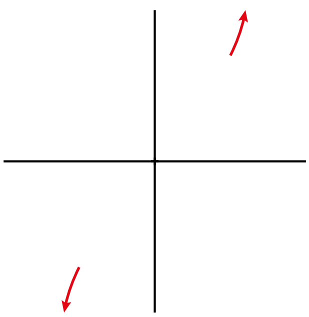
**a)** $f(x) = x^3 - 10x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **c)** $f(x) = 7 - 3x$

**d)** $f(x) = -x^2 + 8x + 9$ **e)** $f(x) = 1 - (x - 2)^2$ **f)** $f(x) = 7x^2 - x^3$

**g)** $f(x) = (5 - x)^2$ **h)** $f(x) = (x + 1)^3 - 2x^2$

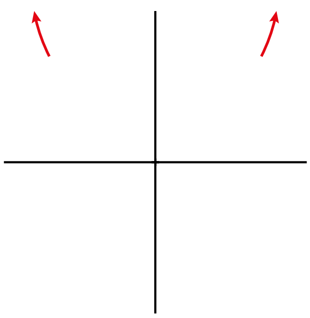
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 10x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 10x) = -\infty$



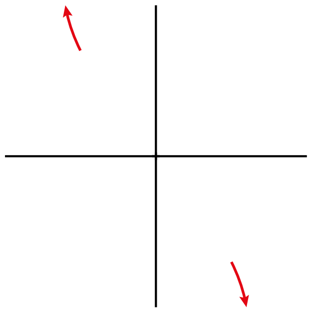
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$



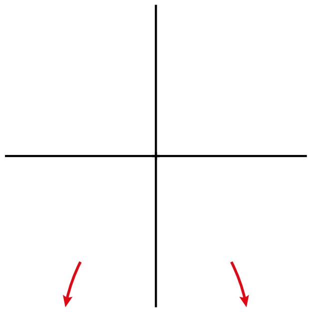
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7 - 3x) = +\infty$



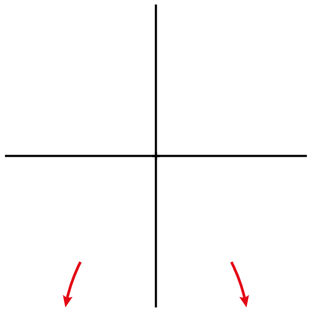
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$



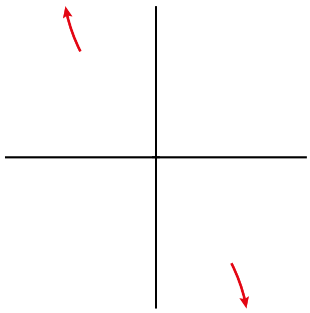
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$



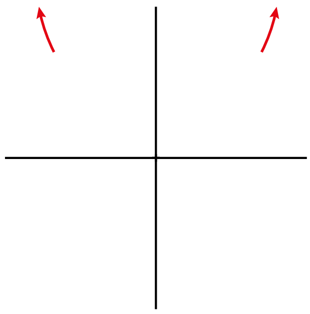
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x^2 - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^2 - x^3) = +\infty$



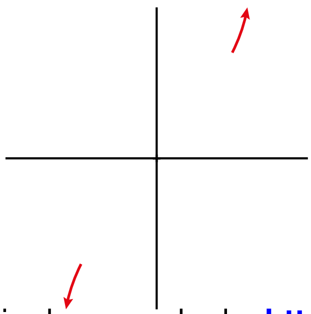
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - x)^2 = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = -\infty$



**3** **Halla el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ de cada una de estas funciones:**

**a)** $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3-7}{4x^2+3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

**d)** $f(x) = \dfrac{-3}{x^2+2x-4}$ **e)** $f(x) = \dfrac{5^{-x}}{2}$ **f)** $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x-3} = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x-3} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-7}{4x^2+3} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-7}{4x^2+3} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{x^2+2x-4} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3}{x^2+2x-4} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5^{-x}}{2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5^{-x}}{2} = +\infty$

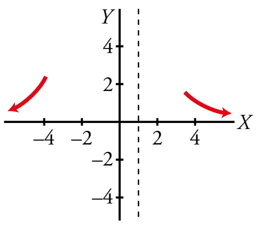
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \dfrac{1}{x^2} = 3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} 3 - \dfrac{1}{x^2} = 3$

**4** **Calcula los límites de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa las ramas que obtengas:**

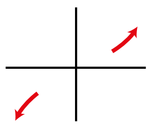
**a)** $f(x) = \dfrac{3}{(x-1)^2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-2x^2}{3-x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

**d)** $f(x) = \dfrac{x^2+5}{1-x}$ **e)** $f(x) = \dfrac{2-3x}{x+3}$ **f)** $f(x) = \dfrac{3-2x}{5-2x}$

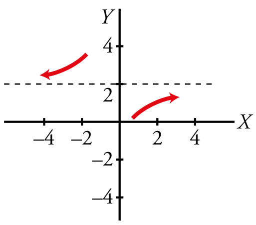
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2} = 0$



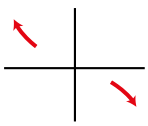

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



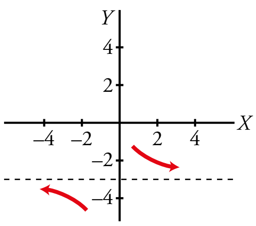
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-1}{x+2} = 2$



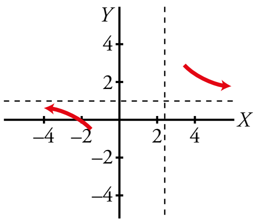

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x} = +\infty$



e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2-3x}{x+3} = -3$



f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x} = 1$



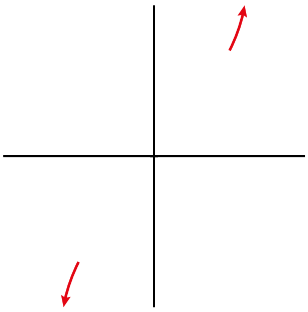

**5** **Calcula el límite cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$ y representa los resultados.**

**a)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ $\qquad$ **b)** $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ $\qquad$ **c)** $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

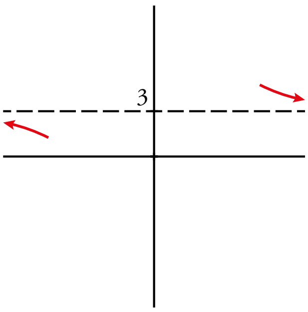
**d)** $f(x) = \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$ $\qquad$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2}$ $\qquad$ **f)** $f(x) = \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9}$

Para calcular estos límites debemos tener en cuenta la regla de los grados del numerador y del denominador.

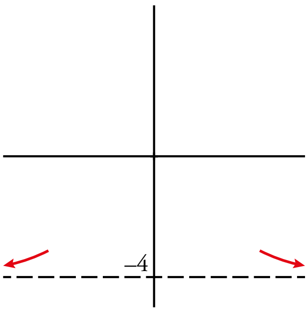
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$



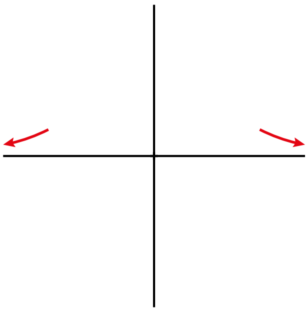
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$



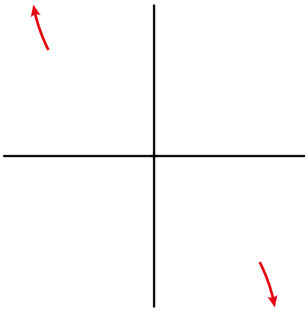

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$



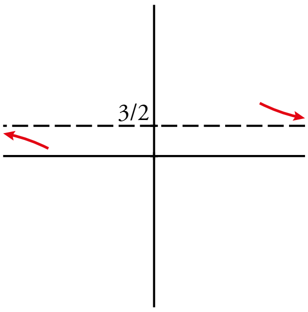
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$



e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = -\infty$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = +\infty$



f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 3/2$ $\quad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 3/2$




**6** **Di cuál es el límite de las siguientes funciones cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 5-x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ $\quad\quad$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

**c)** $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 4 \\ log_2 x & \text{si } x > 4 \end{cases}$ $\quad\quad$ **d)** $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x < 2 \\ 1+2^{-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (5-x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3-x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x = \log_2 \infty = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 2^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{2^x} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -3x = +\infty$

## Límite en un punto

**7** **Calcula los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos\frac{x}{3} - 3tg\, x\right)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \log_2\left(\frac{3x - 5}{4 - x}\right)$

**d)** $\lim\limits_{x \to 1/2} e^{2x - 1}$ **e)** $\lim\limits_{x \to e} \ln\sqrt{x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{x - 2}$

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$ está definida y es continua en $x = 1$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1} = \sqrt[3]{1 - 2 + 1} = 0$.

b) $f(x) = \cos\frac{x}{3} - 3\,\text{tg}x$ está definida y es continua en $x = 0$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cos\frac{x}{3} - 3\text{tg}\, x\right) = \cos 0 - 3\text{tg}\, 0 = 1$.

c) $f(x) = \log_2 2\left(\frac{3x - 5}{4 - x}\right)$ está definida y es continua en $x = 2$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 2} \log_2\left(\frac{3x - 5}{4 - x}\right) = \log_2\left(\frac{6 - 5}{4 - 2}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

d) $f(x) = e^{2x - 1}$ está definida y es continua en $x = 1/2$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1/2} e^{2x - 1} = e^{1 - 1} = e^0 = 1$.

e) $f(x) = \ln\sqrt{x}$ está definida y es continua en $x = e$.

Por tanto, $\lim\limits_{x \to e} \ln\sqrt{x} = \ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}\ln e = 1/2$.

f) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$.

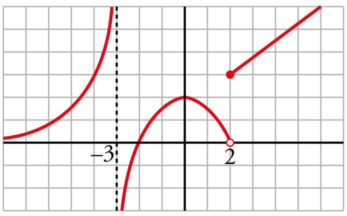
$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{x - 2} = \frac{2}{0} = \infty$.

Veamos el signo:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x}{x - 2} = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x}{x - 2} = +\infty$.

**8** **Sobre la gráfica de la siguiente función $f(x)$, halla:**




**a)** $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

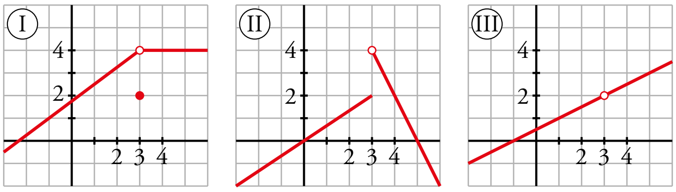
**d)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2

d) 0 e) 3 f) 0

**9** **Relaciona cada una de estas expresiones con su gráfica:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$  **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$  **c)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **no existe**




a) III  b) I  c) II

**10** **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, **halla:**

**a)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$  **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$  **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) 5

b) 4

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

**11** **Dada la función** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x>3 \end{cases}$ **calcula:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$  **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$  **c)** $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

a) Como $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$.

b) $x = 3$ es el punto de ruptura. Usaremos límites laterales.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2x = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{0}{0} \to \text{Indeterminación.} \end{cases}$$

Para calcular el límite por la derecha necesitamos simplificar la fracción:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x} = 2$$

Luego los límites laterales son distintos y $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe.

c) Como $5 > 3$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{8}{5}$.

**12** **En la función** $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x<-1 \\ 3x-1 & \text{si } -1 \leq x < 4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$, **halla:**

**a)** $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$  **b)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$  **c)** $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$

a) $x = -1$ es un punto de ruptura. Usaremos límites larerales para calcular el límite.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2-2) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (3x-1) = -4 \end{cases}$$ Por tanto, no existe el límite.

b) $x = 4$ es un punto de ruptura. Usaremos límites laterales para calcular el límite.

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} (3x - 1) = 11 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} (4\sqrt{x} + 3) = 11 \end{cases} \quad \text{Por tanto,} \quad \lim_{x \to 4} f(x) = 11$$

c) Como $9 > 4$, $\lim\limits_{x \to 9} f(x) = \lim\limits_{x \to 9} (4\sqrt{x} + 3) = 15$

**13** **Calcula los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

**d)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ **e)** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(2x + 3)}{x} = 3$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)} = \dfrac{3}{-1} = -3$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = -\dfrac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x + 3)}{(x + 3)(x + 1)} = -\dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 2$

## Página 312

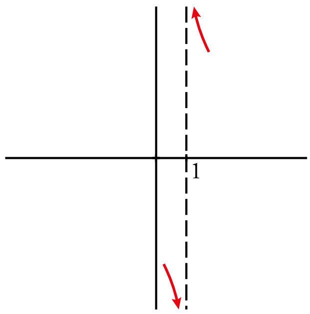
**14** **Resuelve los siguientes límites y representa los resultados:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2}$

**c)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x - 1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

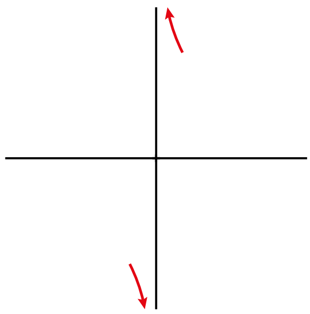
- Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right) f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right) f(x) \to +\infty$




b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

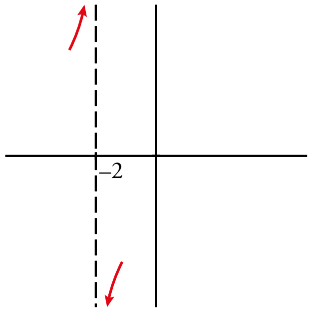
$\dfrac{x^2 + x}{x^2} = \dfrac{x(x + 1)}{x^2} = \dfrac{x + 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + 1}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$

- Si $x \to 0^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right) f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 0^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right) f(x) \to +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x} = \dfrac{4}{0} = \pm\infty$

- Si $x \to -2^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$
- Si $x \to -2^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$



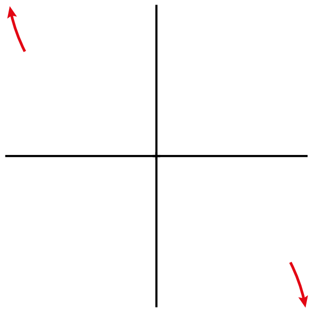

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \dfrac{x^3}{x^2(x^2 - 10)} = \dfrac{x}{x^2 - 10}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 - 10} = 0$

$f(0)$ no está definido.

Si $x < 0,\ f(x) > 0$ y si $x > 0,\ f(x) < 0$



**15** **Calcula los siguientes límites y representa los resultados:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

**c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

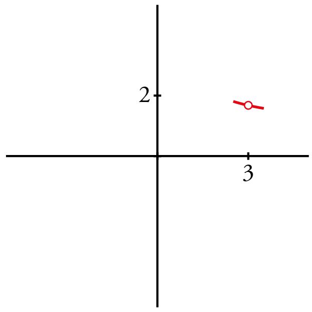
**e)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{x(x - 3)} = \dfrac{x + 2}{x}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 2}{x} = \dfrac{5}{3}$

Dando a $x$ valores próximos a 3 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.

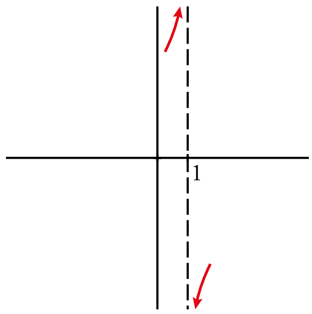



b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

Simplificamos: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 1)^2} = \dfrac{x - 2}{x - 1}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 2}{x - 1} = \infty$

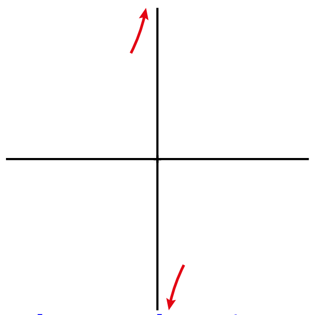
- Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = +\right)\ f(x) \to +\infty$
- Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = -\right)\ f(x) \to -\infty$




c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

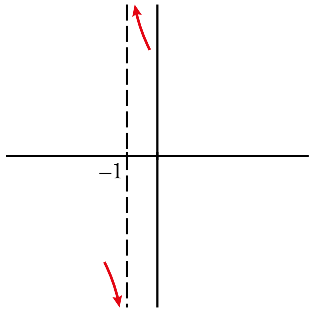
$\dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \dfrac{x(x - 2)}{x^2(x + 1)} = \dfrac{x - 2}{x(x + 1)}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 2}{x(x + 1)} = \dfrac{-2}{0} = \pm\infty$



- Si $x \to 0^- \;\to\; \left(f(x) = \frac{-}{-} = +\right)\; f(x) \to +\infty$
- Si $x \to 0^+ \;\to\; \left(f(x) = \frac{-}{+} = -\right)\; f(x) \to -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

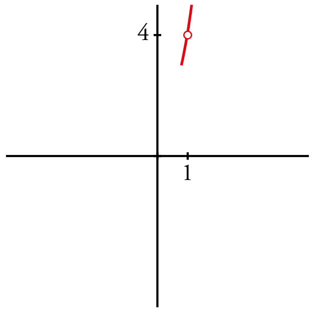



$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

- Si $x \to -1^- \;\to\; \left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)\; f(x) \to -\infty$
- Si $x \to -1^+ \;\to\; \left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)\; f(x) \to +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.

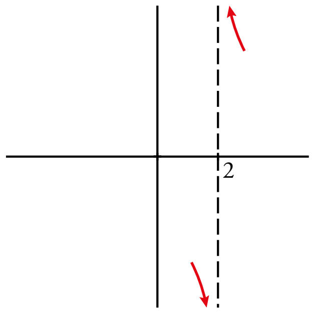



$$\frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)} = \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} = (x^2 + 1)(x + 1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} [(x^2 + 1)(x + 1)] = 4$$

Dando a $x$ valores próximos a 1 podemos averiguar cómo se acerca por ambos lados.

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminación.




$$\frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{2(x+2)}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+2)}{x-2} = \frac{8}{0} = \pm\infty$$

- Si $x \to 2^- \;\to\; \left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)\; f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 2^+ \;\to\; \left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)\; f(x) \to +\infty$

**16 Calcula.**

**a)** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{7 - 5x}{x^2 + 1}\right)^{2 - 5x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x + 4}{x^2 + 1}\right)^5$

**c)** $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x}}{1 + \cos x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 10} \log (2\sqrt{3x - 5})^3$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{7 - 5x}{x^2 + 1}\right)^{2 - 5x} = \left(\dfrac{7 - 5}{1 + 1}\right)^{2 - 5} = \left(\dfrac{2}{2}\right)^{-3} = 1$

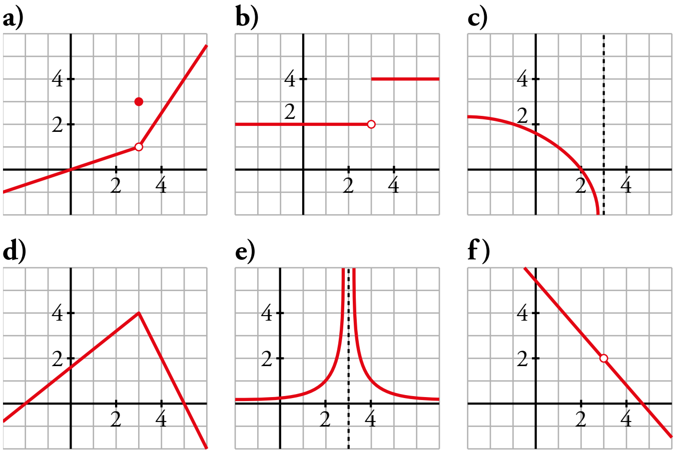
b) $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x + 4}{x^2 + 1}\right)^5 = \log_2 \left(\dfrac{6 + 4}{4 + 1}\right)^5 = \log_2 (2)^5 = 5 \log_2 2 = 5$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x}}{1 + \cos x} = \dfrac{e^1}{1} = e$

d) $\lim\limits_{x \to 10} \log (2\sqrt{3x - 5})^3 = 3 \log (2\sqrt{3 \cdot 10 - 5}) = 3 \log 10 = 3$

## Continuidad de una función

**17** **¿Cuál de estas funciones es continua en $x = 3$? Señala, en cada una de las otras, la razón de su discontinuidad:**




a) Discontinuidad de tipo IV en $x = 3$, porque el valor de la función no coincide con el límite en el punto.

b) Discontinuidad de salto finito (tipo II). La función existe en $x = 3$, pero los límites laterales, aunque existen, son distintos.

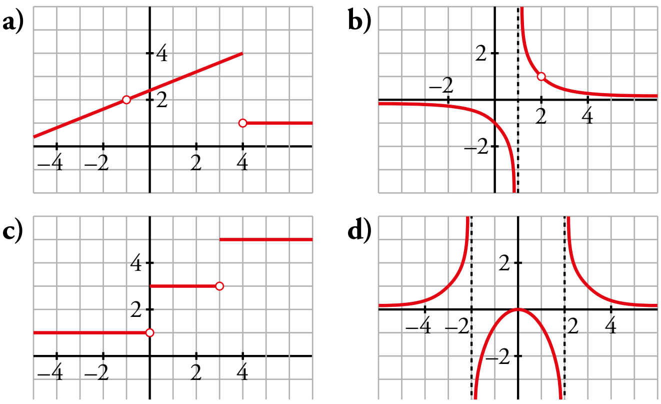
c) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene un asíntota vertical por la izquierda en $x = 3$.

d) Continua.

e) Discontinuidad de salto infinito (tipo I). Tiene una asíntota vertical en $x = 3$.

f) Discontinuidad de tipo III. La función no está definida en $x = 3$, pero existe el límite en dicho punto.

**18** **Cada una de las siguientes funciones tiene uno o más puntos donde no es continua. Indica cuáles son esos puntos y el tipo de discontinuidad:**




a) Discontinuidad de tipo III en $x = -1$.

Discontinuidad de salto finito en $x = 4$ (tipo II).

b) Discontinuidad de salto infinito en $x = 1$ (tipo I).

Discontinuidad de tipo III en $x = 2$.

c) Discontinuidades de salto finito en $x = 0$ y $x = 3$ (tipo II).

d) Discontinuidades de salto infinito en $x = -2$ y $x = 2$ (tipo I).

**19** **Comprueba que solo una de estas funciones es continua en $x = 1$. Explica la razón de la discontinuidad en las demás:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x\neq 1 \\ -1 & \text{si } x=1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x<1 \\ x-3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

a) La función no está definida en $x = 1$. Por otro lado:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x+2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 3 = 3 \end{cases}$$ Luego existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

Por tanto, tiene una discontinuidad de tipo III en $x = 1$.

b) $f(1) = -1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x = 2$$

En este caso, tiene una discontinuidad de tipo IV.

c) $f(1) = 1 - 3 = -2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} -2 = -2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x-3) = -2 \end{cases}$$

Esta función es continua en $x = 1$.

d) La función no está definida en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

- Si $x \to 1^-$ $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+$ $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

La función tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I) en $x = 1$.

**20** **Comprueba si las siguientes funciones son continuas en los puntos de ruptura:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x<-1 \\ x^2+3 & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$

**c)** $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x<0 \\ x-2 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x<3 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

a) $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (3-x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2+3) = 4 \end{cases}$$ La función es continua en $x = -1$.

b) $f(1)$ no está definido.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 2^{x-1} = 1 \end{cases}$$ La función tiene una discontinuidad del tipo III en $x = 1$.

c) $f(0) = 0 - 2 = -2$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{4-x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x-2) = -2 \end{cases}$$ La función tiene una discontinuidad de salto finito (tipo II) en $x = 0$.

d) $f(3) = \dfrac{2}{3-2} = 2$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} (5-x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2}{x-2} = 2 \end{cases}$$ La función es continua en $x = 3$.

**21** **Estas funciones, ¿son discontinuas en algún punto?**

**a)** $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \ne -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{si } x<2 \\ x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x<3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x>3 \end{cases}$

a) La función está formada por un trozo de parábola y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (1-x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0 \end{cases}$$

La función también es continua en $x = 1$, por tanto, no es discontinua en ningún punto.

b) Esta función coincide con la parábola $y = x^2$ salvo en el punto $x = -1$. Luego tiene una discontinuidad de tipo IV en dicho punto.

c) La función está formada por un trozo de hipérbola, la cual no está definida en $x = 0$ $\left(f(0) = \dfrac{4}{0} = \infty\right)$, y otro de recta, luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(2) = 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2 \end{cases}$$

La función también es continua en $x = 2$, por tanto, solo tiene discontinuidad de tipo III en $x = 0$.

d) La función está formada por dos trozos de funciones cuyas expresiones analíticas son elementales (correctamente definidas), luego el único punto posible de discontinuidad sería el punto de ruptura. Estudiamos la continuidad en él.

$f(3)$ no está definido.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2^{x-3} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 \end{cases}$$ En el punto $x = 3$ hay una discontinuidad de salto finito (tipo II).

**22** **Determina para qué números reales son continuas las siguientes funciones:**

**a)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^2+5x+4}$

**d)** $f(x) = ln(x^2-2x)$ **e)** $y = 2^{3-x}$ **f)** $f = |x - 5|$

a) $f(x)$ por un lado es un cociente, luego los posibles puntos de discontinuidad son aquellos que anulan el denominador,

$$\sqrt{x-1} = 0 \to x-1 = 0 \to x = 1 \to \text{Punto de discontinuidad}$$

Por otro lado hay que calcular los puntos para los que la raíz no existe, que son aquellos que hacen negativo el radicando,

$$x-1<0 \ \to \ x<1$$

Conclusión: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervalo $(-\infty, 1]$, luego su dominio es $(1, +\infty)$.

b) Por un lado se trata de un cociente, luego los puntos donde no es continua son aquellos que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Puntos de discontinuidad}$$

Por otro lado hay que ver los puntos para los que la raíz no existe, que son aquellos que hacen negativo al radicando

$$x + 2 < 0 \rightarrow x < -2$$

Conclusión: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-1}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervalo $(-\infty, -2]$ y en los puntos 1 y $-1$. Luego el dominio es $[-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

c) Se trata de una raíz, luego hay que ver en qué puntos no existe la raíz, que son aquellos que hacen negativo el radicando.

$$x^2 + 5x + 4 < 0$$

$$x^2 + 5x + 4 < 0 \rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

Para $x = -1$ y $x = -4$ se anula la ecuación

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & \\ & -4 & & -1 & & 0 & \end{array}$$

$x^2 + 5x + 4 < 0$ si $x \in (-4, -1)$

Conclusión: $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervao $(-4, -1)$.

Luego el dominio es $(-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$

d) $f(x)$ es un logaritmo neperiano, luego hay que ver en qué puntos se cumple $x^2(x - 2) \leq 0$.

$$x^2 - 2x \leq 0 \rightarrow x(x-2) \leq 0$$

$$x = 0$$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$$

$$\begin{array}{cccccl} - & & + & & + & \rightarrow x \\ & 0 & & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccl} - & & - & & + & \rightarrow (x-2) \\ & 0 & & 2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccl} + & & - & & + & \rightarrow x(x-2) \\ & 0 & & 2 & & \end{array}$$

Luego en $x \in [0, 2]$ $f_1(x) = x^2 - 2x$ es negativa o cero.

Conclusión: $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ menos en el intervalo $[0, 2]$. Luego el dominio es $(-\infty, 0) \cup -(2, +\infty)$

e) Se trata de una función exponencial con exponente polinómico, luego es continua para todo $\mathbb{R}$.

f) Definimos la función a trozos.

$$|x - 5| = 0 \rightarrow f(x) \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Se trata de una función cuyas ramas son polinómicas, luego son continuas en su dominio de definición.

Solo hay que comprobar que sea continua en el "punto de ruptura" $x = 5$.

$$f(5) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^-} f(x)$$

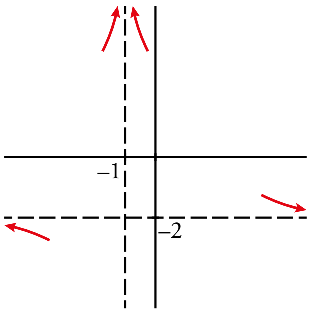
$$\left.\begin{array}{r} f(5) = 5 - 5 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 5 - 5 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -5 + 5 = 0 \end{array}\right\} f \text{ es continua en todo } \mathbb{R}$$

## Asíntotas

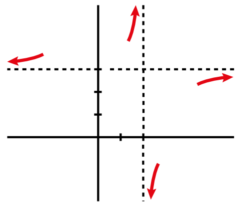
**23** **De una función $y = f(x)$ conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.**

$$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \to -1^-, \ f(x) \to +\infty \\ \text{si } x \to -1^+, \ f(x) \to +\infty \end{cases} \qquad y = -2 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, \ f(x) > -2 \\ \text{si } x \to -\infty, \ f(x) < -2 \end{cases}$$

**Representa esta información.**




**24** **Esta gráfica muestra la posición de la curva $y = f(x)$ respecto da sus asíntotas. Di cuáles son estas y describe su posición.**



- Asíntota vertical: $x = 2$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

- Asíntota horizontal: $y = 3$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 > 0$

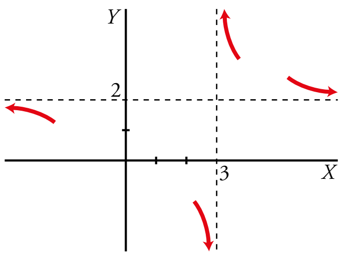
  Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 < 0$

**25** **Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a cada una de ellas:**

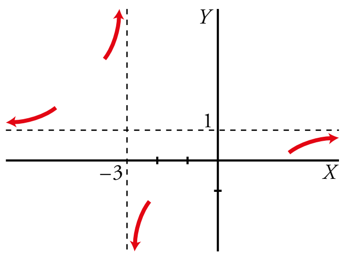
**a)** $y = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ **c)** $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$

**d)** $y = \dfrac{2}{1-x}$ **e)** $y = \dfrac{1}{2-x}$ **f)** $y = \dfrac{4x+1}{2x-3}$

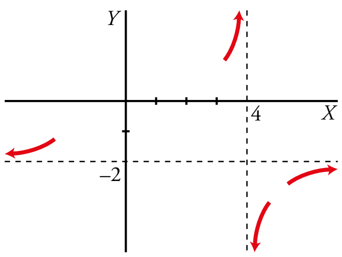
a) Asíntotas: $x = 3$; $y = 2$



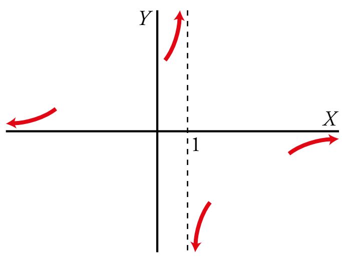

b) Asíntotas: $x = -3$; $y = 1$



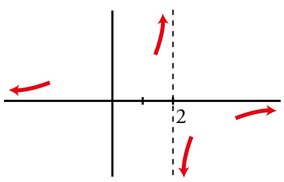

c) Asíntotas: $x = 4$; $y = -2$



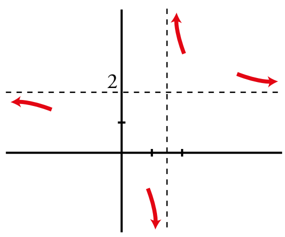

d) Asíntotas: $x = 1$; $y = 0$




e) Asíntotas: $x = 2$; $y = 0$




f) Asíntotas: $x = \dfrac{3}{2}$; $y = 2$



## Página 313

**26 Estudia las asíntotas de las siguientes funciones y su posición respecto a la gráfica:**

**a)** $y = \dfrac{3x+1}{2x-3}$  **b)** $y = \dfrac{2x+1}{x^2}$  **c)** $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

**d)** $y = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$  **e)** $y = \dfrac{4}{x^2-2x}$  **f)** $y = \left(\dfrac{3x}{x-2}\right)^2$

a) • Asíntotas verticales:

$2x-3=0 \;\to\; 2x=3 \;\to\; x=\dfrac{3}{2} \;\to$ Posible asíntota vertical.

• $x = \dfrac{3}{2}$

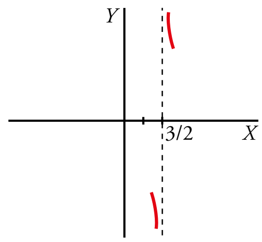
$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{\frac{9}{2}+1}{0} = \infty \;\to\; \text{Estudiamos los signos.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} \frac{3x+1}{2x-3} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} \frac{3x+1}{2x-3} = +\infty \end{array}\right\} \to \text{Hay una asíntota vertical en } x = \frac{3}{2}.$$

Estudiamos la posición:

si $x \to \dfrac{3}{2}^-$, $f(x) \to -\infty$

si $x \to \dfrac{3}{2}^+$, $f(x) \to +\infty$




• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

↓

Términos de mayor grado.

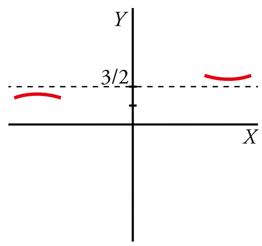
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{2x-3} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

↓

Términos de mayor grado.

Luego $y = \dfrac{3}{2}$ es asíntota horizontal.

Estudiamos la posición:




$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x-1}{2x-3} - \frac{3}{2}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{6x-2-6x+9}{2(2x-3)}\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{7}{2(2x-3)}\right] = 0^+ \;\to\; \text{La curva está por encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3x-1}{2x-3} - \frac{3}{2}\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{7}{2(2x-3)}\right] = 0^- \;\to\; \text{La curva está por debajo de la asíntota.}$$

• Asíntotas oblicuas:

No hay, ya que hay una asíntota horizontal.

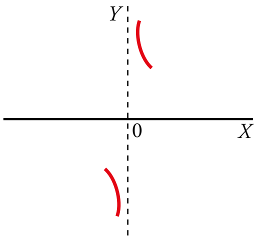
b) • Asíntotas verticales:

$x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ Posible asíntota vertical.

• $x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x+1}{x^2} = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow$ Estudiamos los signos.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2x+1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2x+1}{x^2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ Hay una asíntota vertical en $x = 0$.




Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

• Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado.}}}{\frac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0^+$

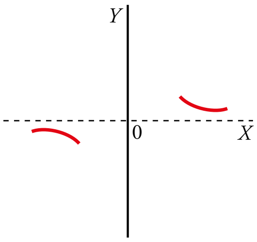
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado.}}}{\frac{-\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0^-$

Luego $y = 0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos la posición:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{2x+1}{x^2} - 0\right] = 0^+ \rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{2x+1}{x^2} - 0\right] = 0^- \rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.




• Asíntotas oblicuas:

No hay porque hay horizontales.

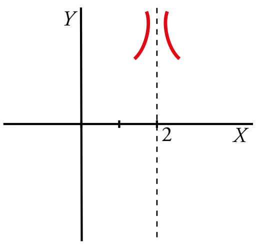
c) • Asíntotas verticales:

$(x-2)^2 = 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$ Posible asíntota vertical.

• $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{4}{0} = \infty \rightarrow$ Estudiamos los signos.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2}{(x-2)^2} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow$ Hay una asíntota vertical en $x = 2$.




Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow 2^-$, $f(x) \rightarrow +\infty$

si $x \rightarrow 2^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

• Asíntotas horizontales:

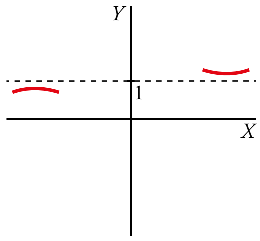
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado.}}}{\frac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} 1 = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 1 = 1$$

$\downarrow$

Términos de mayor grado.

Luego $y = 1$ es asíntota horizontal.




Estudiamos la posición:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{x^2}{(x-2)^2} - 1 \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{x^2 - x^2 + 4x - 4}{(x-2)^2} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x-4}{x^2 - 4x + 4} = 0^+ \;\to\; \text{La curva está por encima.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[ \frac{x^2}{(x-2)^2} - 1 \right] = \lim_{x \to -\infty} \left[ \frac{4x-4}{x^2 - 4x + 4} \right] = 0^- \;\to\; \text{La curva está por debajo.}$$

- Asíntotas oblicuas:

No hay porque hay horizontales.

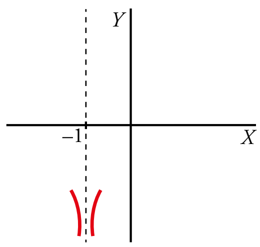
d) • Asíntotas verticales:

$(x-1)^2 = 0 \;\to\; x + 1 = 0 \;\to\; x = -1 \;\to$ Posible asíntota vertical.

- $x = -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{-2}{(x+1)^2} = \frac{-2}{0} = -\infty \;\to\; \text{Estudiamos los signos.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} \dfrac{-2}{(x+1)^2} = -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} \dfrac{-2}{(x-2)^2} = -\infty \end{array}\right\rangle \to \text{Hay una asíntota vertical en } x = -1.$$




Estudiamos la posición:

si $x \to -1^-$, $f(x) \to -\infty$

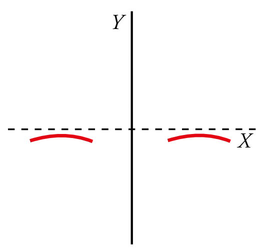
si $x \to -1^+$, $f(x) \to -\infty$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{(x-1)^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{(x+1)^2} = 0$$

Luego $y = 0$ es asíntota horizontal.




Estudiamos la posición:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{-2}{(x+1)^2} - 0 \right] = 0^- \;\to\; \text{La curva está por debajo.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[ \frac{-2}{(x+1)^2} - 0 \right] = 0^- \;\to\; \text{La curva está por debajo.}$$

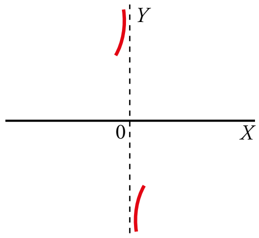
- Asíntota oblicua:

No hay porque hay horizontal.

e) • Asíntotas verticales:

$x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x(x-2) = 0 \;\rightarrow\; \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \end{array} \right\rangle$ Posibles asíntotas verticales.

• $x = 0$

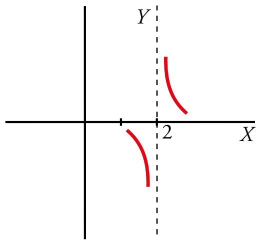



$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{x^2 - 2x} = \dfrac{4}{0} = \infty \;\rightarrow$ Estudiamos los signos.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{4}{x^2 - 2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{4}{x^2 - 2x} = -\infty$

• $x = 2$




$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4}{x^2 - 2x} = \dfrac{4}{0} = \infty \;\rightarrow$ Estudiamos los signos.

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4}{x^2 - 2x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4}{x^2 - 2x} = +\infty$

• Asíntotas horizontales:

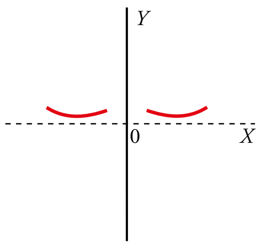
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{+\infty} = 0^+$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \to +\infty} x^2$$

Luego $y = 0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos la posición:




$$\lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{4}{x^2 - 2x} - 0 \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2} = 0^+ \;\rightarrow$$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x \to -\infty} \left[ \frac{4}{x^2 - 2x} - 0 \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to +-\infty} \frac{4}{x^2} = 0^+ \;\rightarrow$$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

• Asíntota oblicua:

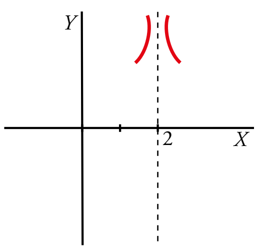
No tiene por tener asíntota horizontal.

f) • Asíntotas verticales:

$x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow$ Posible asíntota vertical.

• $x = 2$

$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \left( \dfrac{3x}{x-2} \right)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \left( \dfrac{3x}{x-2} \right)^2 = +\infty \end{array} \right\rangle \;\rightarrow$ Hay una asíntota vertical en $x = 2$.




Estudiamos la posición:

si $x \to 2^-$, $f(x) \;\rightarrow\; +\infty$

si $x \to 2^+$, $f(x) \;\rightarrow\; +\infty$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2}{x^2-4x+4} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado}}}{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{9x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 9 = 9$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado}}}{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{9x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 9 = 9$$

Luego $y = 9$ es asíntota horizontal.

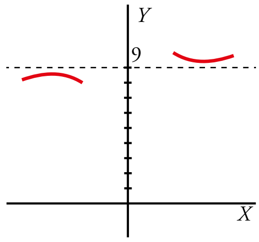
Estudiamos la posición:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 - 9\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{9x^2 - 9(x-2)^2}{(x-2)^2}\right] = \lim_{x \to +\infty} = \left[\frac{36x-36}{(x-2)^2}\right] =$$

$= 0^+ \longrightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{3x}{x-2}\right)^2 - 9\right] = \lim_{x \to -\infty} = \left[\frac{36x-36}{x^2-4x+4}\right] =$$

$= 0^- \longrightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.




**27 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas:**

**a)** $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

**b)** $y = \dfrac{3}{x^2+1}$

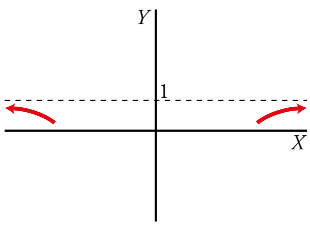
**c)** $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$

**d)** $y = \dfrac{x^4}{x-1}$

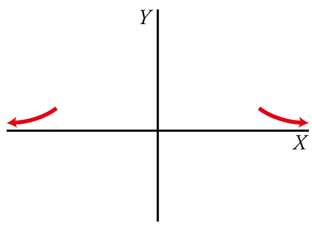
**e)** $y = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$

**f)** $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$

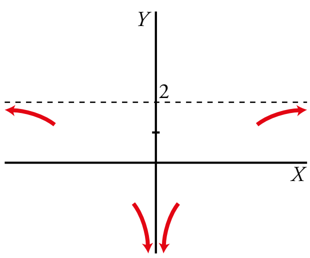
a) Asíntota: $y = 1$



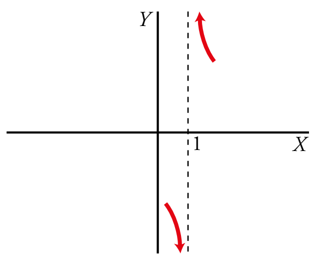

b) Asíntota: $y = 0$



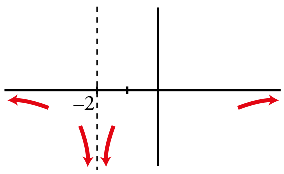

c) Asíntotas: $x = 0$; $y = 2$



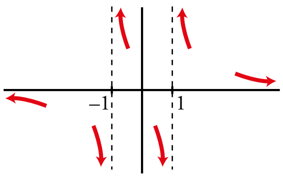

d) Asíntota: $x = 1$



e) Asíntotas: $x = -2;\ y = 0$




f) Asíntotas: $x = 1,\ x = -1;\ y = 0$




**28** **Cada una de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua. Hállala y estudia la posición de la curva respecto a ella:**

**a)** $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$

**b)** $f(x) = \dfrac{3+x-x^2}{x}$

**c)** $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{2x}$

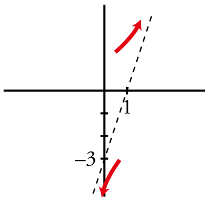
**d)** $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$

**e)** $f(x) = \dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$

**f)** $f(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

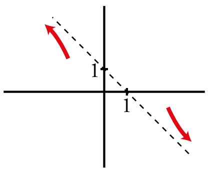
a) $\dfrac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$

Asíntota oblicua: $y = 3x - 3$



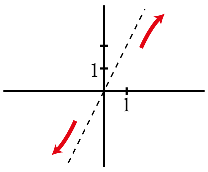

b) $\dfrac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$

Asíntota oblicua: $y = -x + 1$



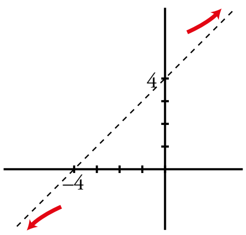

c) $\dfrac{4x^2-3}{2x} = 2x - \dfrac{3}{2x}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



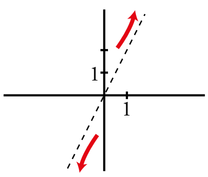

d) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \dfrac{10}{x-3}$

Asíntota oblicua: $y = x + 4$



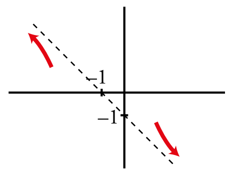

e) $\dfrac{2x^3-3}{x^2-2} = 2x + \dfrac{4x-3}{x^2-2}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



f) $\dfrac{-2x^2+3}{2x-2} = -x-1+\dfrac{1}{2x-2}$

Asíntota oblicua: $y = -x-1$




**29** **Estudia las ramas infinitas de las siguientes funciones. Si tienen asíntotas, determina su posición con la curva:**

**a)** $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

**b)** $y = \dfrac{x^3-2x^2+3x-6}{2(x-2)^2}$

**c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

**d)** $y = \dfrac{x^3-4x^2+8x-12}{x-3}$

a) • Asíntotas verticales:

El denominador se anula cuando $x = 2$, $x = -2$. Calculamos:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{-8}{0} = \pm\infty \rightarrow x = -2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow -2^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

si $x \rightarrow -2^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3}{x^2-4} = \frac{8}{0} = \pm\infty \rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow 2^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

si $x \rightarrow 2^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

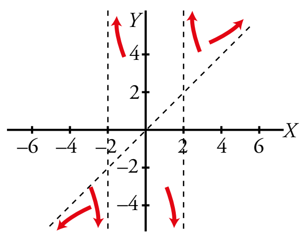
• Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{(x+2)(x-2)}$$

La recta $y = x$ es la asíntota oblicua. Estudiamos la posición:

$$f(x) - x = \frac{x^3}{x^2-4} - x = \frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4} = \frac{4x}{x^2-4}\begin{cases} + \text{ Si } x \to +\infty \\ - \text{ Si } x \to -\infty \end{cases}$$



b) • Asíntotas verticales:

El denominador no se anula para ningún valor de $x$, luego $f(x)$ no tiene asíntotas verticales:

• Ramas en el infinito:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+x+1} = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2+x+1} = 1\end{array}\right\} \to y = 1 \to \text{Asíntota horizontal.}$$

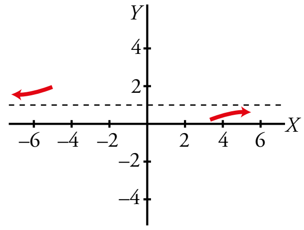
Estudiamos la posición:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+x+1} - 1\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{x^2+x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x-1}{x^2+x+1} = 0^- \to$$

$\to$ La curva está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+x+1} - 1\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{x^2+x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x-1}{x^2+x+1} = 0^+ \to$$

$\to$ La curva está por encima de la asíntota.




c) • Asíntotas verticales:

El denominador se anula cuando $x = 2$. Calculamos:

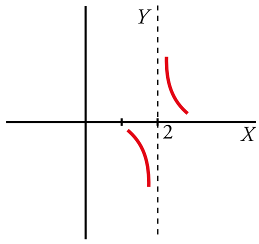
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{0}{0} \to \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x^2+3)}{2(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{2(x-2)};\ \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+3}{2(x-2)} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical. Estudiamos la posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$



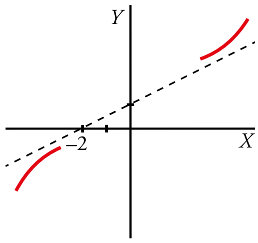

• Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{2(x-2)} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{7}{2x-4}$$

La recta $y = \frac{x}{2} + 1$ es la asíntota oblicua. Estudiamos la posición:

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{7}{2x-4} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$




d) • Asíntotas verticales:

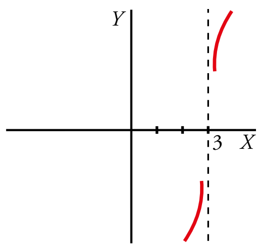
El denominador se anula cuando $x = 3$. Calculamos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x-3} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Estudiamos la posición:

Si $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$

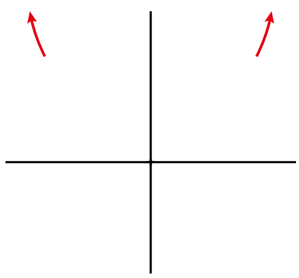



• Ramas en el infinito:

Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 2, tiene ramas parabólicas de crecimiento cada vez más rápido y ambas son hacia arriba porque:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x-3} = +\infty$$



## Para resolver

**30 Calcula, en cada caso, el valor de $k$ para que la función $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$  b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$  d) $f(x) = \begin{cases} kx - 2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\}$ $5 = 3 + k \to k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\}$ $5 = 4 + 2k \to k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \to k = 1$

d) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = k - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \sqrt{4} = 2 \end{array}\right\}$ $k - 2 = 2 \to k = 4$

**31 Calcula $k$ para que las siguientes funciones sean continuas en el punto donde cambia su definición. Estudia después su continuidad:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} & \text{si } x \ne 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$  b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x - 1} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$  d) $f(x) = \begin{cases} e^{k - \sqrt{x}} & \text{si } x < 4 \\ \log_2 (x - 2) & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

a) Comenzamos estudiando el punto $x = 5$.

$f(5) = k$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{x(x-5)} = \dfrac{x+5}{x}$

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x+5}{x} = 2$

Si $k = 2$, la función es continua en $x = 5$.

Observamos que el denominador también se anula en $x = 0$, luego $f(0)$ no existe. Además:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{-25}{0} = \pm\infty$

Por tanto, en $x = 0$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

b) Comenzamos estudiando el punto $x = 1$.

$f(1) = k$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{0}{0} \to \text{Indeterminación.}$$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{x}{x+2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}$$

Si $k = \frac{1}{3}$, la función es continua en $x = 1$.

Vemos que el denominador también se anula en $x = -2$, luego $f(-2)$ no existe. Además,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \frac{6}{0} = \pm\infty$$

Por tanto, en $x = -2$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

c) Comenzamos estudiando el punto $x = 3$.

$f(3) = \sqrt{4} = 2$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{k}{x-1} = \frac{k}{2}$$

$$\frac{k}{2} = 2 \to k = 4$$

Si $k = 4$, la función es continua en $x = 3$.

Observamos que el denominador también se anula en $x = 1$, luego $f(1)$ no existe. Además:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{4}{x-1} = \frac{4}{0} = \pm\infty$$

Por tanto, en $x = 1$ tiene una discontinuidad de salto infinito (tipo I). En el resto de los puntos es continua.

d) Comenzamos estudiando el punto $x = 4$.

$f(4) = \log_2(4-2) = \log_2 2 = 1$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} e^{k - \sqrt{x}} = e^{k-2}$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \log_2(x-2) = \log_2 2 = 1$$

$$e^{k-2} = 1 \to \ln e^{k-2} = \ln 1 \to (k-2)\ln e = 0 \to k - 2 = 0 \to k = 2$$

Si $k = 2$, la función es continua en $x = 4$.

**32 Determina *a* y *b* para que esta función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \le x \le 3 \\ ax - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad en los puntos de ruptura.

- $x = -2$

$f(-2) = 4$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -2^-} 3x + b = -6 + b \\ \lim_{x \to -2^+} 4 = 4 \end{cases}$$

Por tanto, $-6 + b = 4 \to b = 10$ para que exista el límite y la función sea continua en $x = -2$.

- $x = 3$

  $f(3) = 4$

  $$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 3^-} 4 = 4 \\ \lim_{x \to 3^+} ax - 2 = 3a - 2 \end{cases}$$

  Por tanto $3a - 2 = 4 \to a = 2$ para que exista el límite y la función sea continua en $x = 3$.

  Si $a = 2$ y $b = 10$ la función es continua en los puntos de ruptura. En los demás puntos también es continua por estar formada por trozos de rectas.

**33 Calcula los siguientes límites:**

**a)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x}$ **b)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$ **c)** $\lim_{x \to -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

**d)** $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$ **e)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$ **f)** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

* *Fíjate en el apartado a) del ejercicio resuelto 2.*

Calcularemos estos límites usando el criterio de los grados del numerador y del denominador.

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+3}}{x} = 0$ b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} = 3$ c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4-x^3}} = 0$ e) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2} = +\infty$ f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2} = \sqrt{2}$

**34 Halla las ramas infinitas de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas:**

**a)** $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 1{,}5^x - 1$ **c)** $y = 2 + e^x$ **d)** $y = e^{-x} + 1$

**e)** $y = log\,(x-3)$ **f)** $y = 1 - ln\,x$ **g)** $y = ln\,(2x+4)$ **h)** $y = ln\,(x^2+1)$

a) $\lim_{x \to +\infty} 2^{x+3} = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \to -\infty} 2^{x+3} = 0$ (asíntota horizontal).

b) $\lim_{x \to +\infty} (1{,}5^x - 1) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \to -\infty} (1{,}5^x - 1) = -1$ (asíntota horizontal).

c) $\lim_{x \to +\infty} (2 + e^x) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

$\lim_{x \to -\infty} (2 + e^x) = 2$ (asíntota horizontal).

d) $\lim_{x \to +\infty} (e^{-x} + 1) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = 1$ (asíntota horizontal).

$\lim_{x \to -\infty} (e^{-x} + 1) = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido).

e) Su dominio es $(3, +\infty)$.

$\lim_{x \to +\infty} log\,(x-3) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim_{x \to 3^+} log\,(x-3) = -\infty$ (asíntota vertical).

f) Su dominio es $(0, +\infty)$.

$\lim_{x \to +\infty} (1 - ln\,x) = -\infty$ (rama parabólica hacia abajo de crecimiento cada vez más lento).

$\lim_{x \to -\infty} (1 - ln\,x) = +\infty$ (asíntota vertical).

g) Su dominio es $(-2, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln(2x + 4) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim\limits_{x \to -2^+} ln(2x + 4) = -\infty$ (asíntota vertical).

h) Su dominio es $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x^2 + 1) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

$\lim\limits_{x \to -\infty} ln(x^2 + 1) = +\infty$ (rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más lento).

**35 Halla el límite de estas funciones en los puntos que anulan su denominador y di cuáles son sus asíntotas verticales:**

**a)** $f(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

**b)** $g(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2}$

a) Hallamos las raíces del denominador.

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$

- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

  $\dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{(4x + 3)(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)^2} = \dfrac{4x + 3}{x - 2}$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} =$

  $= \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x + 3}{x - 2} = \dfrac{5}{4}$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

  $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x + 3}{x - 2} = \dfrac{11}{0} = \pm\infty$

  IZQUIERDA: $x = 1{,}99 \to \dfrac{4 \cdot 1{,}99 + 3}{1{,}99 - 2} = -1\,096 \to \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = -\infty$

  DERECHA: $x = 2{,}01 \to \dfrac{4 \cdot 2{,}01 + 3}{2{,}01 - 2} = 1\,104 \to \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = +\infty$

b) Hallamos las raíces del denominador.

$x^4 + 2x^3 - 8x^2 = 0 \to x_1 = -4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$

- $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

  $\dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{(x - 2)(x + 4)^2}{x^2(x + 4)(x - 2)} = \dfrac{x + 4}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{-32}{0} = \pm\infty$

  IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{-0{,}01 + 4}{(-0{,}01)^2} = 39\,900 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = +\infty$

  DERECHA: $x = 0{,}001 \to \dfrac{0{,}01 + 4}{0{,}01^2} = 40\,100 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

  $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 4}{x^2} = \dfrac{3}{2}$

Las asíntotas verticales son:

- De $f(x)$, la recta $x = 2$.
- De $g(x)$, la recta $x = 0$.

**36 Halla las asíntotas de las siguientes funciones y representa su posición respecto a la curva:**

**a)** $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-x}}$  **b)** $f(x) = \dfrac{1}{e^{x}-1}$  **c)** $f(x) = \dfrac{1}{2-\log_2 x}$

a) • Asíntotas verticales:

Buscamos aquellos puntos que anulan el denominador:

$1 + e^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x} = -1 \rightarrow$ No es posible ya que $e^{a} > 0$.

Luego no hay asíntotas verticales.

• Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{1+e^{-x}} = \dfrac{3}{1+e^{-\infty}} = \dfrac{3}{1+0} = 3 \rightarrow y = 3$ es asíntota horizontal, si $x \rightarrow +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{1+e^{-x}} = \dfrac{3}{1+e^{\infty}} = \dfrac{3}{1+\infty} = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal, si $x \rightarrow -\infty$.

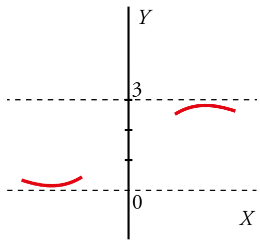
Estudiamos sus posiciones:

$y = 3 \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{1+e^{-x}} - 3\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-3-3e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3e^{-x}}{1+e^{-x}} = 0^{-} \rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

$y = 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3}{1+e^{-x}} - 0\right) = \dfrac{3}{+\infty} = 0^{+} \rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.




• Asíntota oblicua:

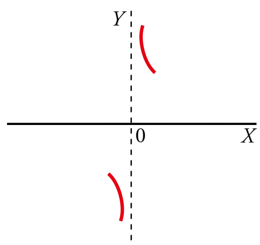
No hay ya que hay asíntota horizontal.

b) • Asíntotas verticales:

Buscamos aquellos puntos que anulan el denominador:

$e^{x} - 1 = 0 \rightarrow e^{x} = 1 \rightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{e^{x}-1} = \pm\infty \rightarrow x = 0$ es una asíntoma vertical.




Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow 0^{-}, f(x) \rightarrow -\infty$

si $x \rightarrow 0^{+}, f(x) \rightarrow +\infty$

• Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{x}-1} = \dfrac{1}{e^{+\infty}-1} = \dfrac{3}{+\infty} = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horizontal, si $x \rightarrow +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{e^{x}-1} = \dfrac{1}{e^{-\infty}-1} = \dfrac{1}{0-1} = -1 \rightarrow y = -1$ es asíntota horizontal, si $x \rightarrow -\infty$.

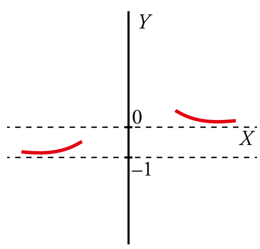
Estudiamos las posiciones:

$y = 0 \rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{e^{x}-1} - 0\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^{x}-1} = \dfrac{1}{+\infty} = 0^{+} \rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

$y = -1 \rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{e^{x}-1} + 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1+e^{x}-1}{e^{x}-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{x}}{e^{x}-1} = 0^{+} \rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.



- Asíntota oblicua:

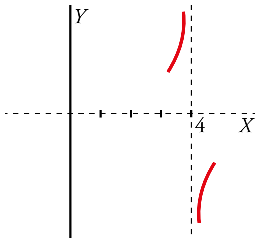
  No hay por haber asíntota horizontal.

c) • Asíntotas verticales:

Buscamos aquellos puntos que anulan el denominador:

$2 - log_2\, x = 0 \;\rightarrow\; log_2\, x = 2 \;\rightarrow\; 2^2 = x \;\rightarrow\; x = 4$

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1}{2 - log_2\, x} = \dfrac{1}{2-2} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty \;\rightarrow\; x = 4$ es una asíntoma vertical.




Estudiamos la posición:

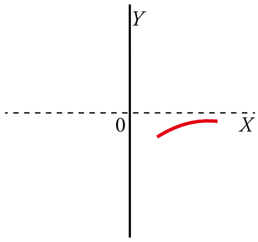
si $x \to 4^-, f(x) \to +\infty$

si $x \to 4^+, f(x) \to -\infty$

- Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2 - log_2\, x} = \dfrac{1}{2-(+\infty)} = \dfrac{1}{-\infty} = 0 \;\rightarrow\; y = 0$ es asíntota horizontal.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{2 - log_2\, x}$ no existe, ya que el dominio de definición de $\log_2 x$ es $(0, +\infty)$.




Estudiamos la posición:

$y = 0 \;\rightarrow\; \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2 - log_2\, x} - 0\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2 - log_2\, x} = \dfrac{1}{-\infty} = 0^- \;\rightarrow$

$\rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

- Asíntotas oblicuas:

Si $x \;\rightarrow +\infty$ no hay, ya que hay asíntota horizontal.

Si $x \;\rightarrow -\infty$ no existe $log_2\, x$.

**37** **Determina el límite de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ cuando $x \to 0$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. Di cuáles son sus asíntotas y sitúa la curva respecto a ellas.**

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{0} = \pm\infty$

  La recta $x = 0$ es una asíntota vertical. Estudiamos su posición:

  Si $x \to 0^-, \; f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 0^+, \; f(x) \to +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = 1$, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal por la derecha.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = -1$ (numerador y denominador tienen distinto signo).

  La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal por la izquierda.

  Si $x \to +\infty, \; f(x) - 1 = \dfrac{\sqrt{x^2+3} - x}{x} > 0$, la función está encima de la asíntota.

  Si $x \to -\infty, \; f(x) - (-1) = \dfrac{\sqrt{x^2+3} + x}{x} < 0$, la función está debajo de la asíntota.

**38** **Considera las funciones $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$ definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Halla las asíntotas de las funciones $f(x) = \dfrac{1}{sen\, x}$; $g(x) = \dfrac{1}{cos\, x}$; $h(x) = \dfrac{1}{1-2cos\, x}$ y sitúa la curva respecto a ellas.**

Solo tiene sentido el estudio de las asíntotas verticales.

- $f(x) = \dfrac{1}{sen\, x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

  $sen\, x = 0 \;\to\; x = 0,\; x = \pi,\; x = 2\pi$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to \pi^-$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to \pi^+$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 2\pi^-$, $f(x) \to -\infty$

- $g(x) = \dfrac{1}{cos\, x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

  $cos\, x = 0 \;\to\; x = \dfrac{\pi}{2},\; x = \dfrac{3\pi}{2}$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to \dfrac{\pi}{2}^-$, $g(x) \to +\infty$

  Si $x \to \dfrac{\pi}{2}^+$, $g(x) \to -\infty$

  Si $x \to \dfrac{3\pi}{2}^-$, $g(x) \to -\infty$

  Si $x \to \dfrac{3\pi}{2}^+$, $g(x) \to +\infty$

- $h(x) = \dfrac{1}{1-2\,cos\, x}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$

  $1 - 2cos\, x = 0 \;\to\; x = \dfrac{\pi}{3},\; x = \dfrac{5\pi}{3}$ son asíntotas verticales.

  Posición:

  Si $x \to \dfrac{\pi}{3}^-$, $h(x) \to -\infty$

  Si $x \to \dfrac{\pi}{3}^+$, $h(x) \to +\infty$

  Si $x \to \dfrac{5\pi}{3}^-$, $h(x) \to +\infty$

  Si $x \to \dfrac{5\pi}{3}^+$, $h(x) \to -\infty$

**39** ODS Meta 14.4. **[Tras el visionado del vídeo el docente puede plantear un análisis de las consecuencias que pueden tener las malas prácticas pesqueras].**

**El número de peces de una piscifactoría evoluciona según la función $f(t) = 50 + \dfrac{100t^2}{t^2+1}$ ($t$ en días).**

**a) Prueba que la población de peces se recupera durante la primera semana.**

**b) ¿El crecimiento será indefinido o se estabilizará?**

a) Calculamos una tabla con los valores de la primera semana.

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(t) | 50 | 100 | 130 | 140 | 144 | 146 | 147 |

Podemos comprobar que el número crece pero de una forma cada vez más lenta.

b) Para estudiar el comportamiento de la función a largo plazo podemos calcular $\lim_{x \to +\infty} \left(50 + \dfrac{100t^2}{t^2+1}\right) = 150$.

Este resultado indica claramente que el crecimiento tiende a estabilizarse.

## Página 314

**40** **Una fábrica produce chips para aparatos electrónicos. El coste de fabricación viene dado por la función de expresión $C(x) = \dfrac{6}{1-e^{-x}}$ donde $x$ es la cantidad de chips fabricados (en miles) y $C(x)$ el coste total (en millones de euros).**

**a) Calcula e interpreta $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x)$.**

**b) Llamamos $C_m(x)$ al coste medio de fabricación de un chip. Expresa $C_m(x)$ en función de $x$ y calcula e interpreta $\lim\limits_{x \to +\infty} C_m(x)$.**

Función coste $C(x) = \dfrac{6}{1-6^{-x}}$ $\begin{cases} x = \text{n.º chips fabricados} \\ C = \text{millones de euros} \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to \infty} C(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6}{1-e^{-x}} = \dfrac{6}{1-e^{-\infty}} = \dfrac{6}{1-0} = 6 \to$

(al ser $x$ n.º de chips, se supone que se van a fabricar cada vez más, luego $x \to +\infty$)

$\to$ Interpretación: el coste al fabricar un gran número de chips se estabiliza en 6 millones de euros.

b) $Cm(x)$ coste medio

$$Cm(x) = \frac{\frac{6}{(1-e^{-x})}}{x} = \frac{6}{x(1-e^{-x})} \to Cm(x) = \frac{1}{x(1-e^{-x})}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x(1-e^{-x})} = \frac{6}{+\infty} = 6$$

Interpretación: si la producción es muy alta el coste de cada chip se va reduciendo tendiendo a cero.

**41** **Calcula el valor de $a$ y $b$, para que la función $f(x) = \dfrac{ax+b}{2x-1}$ corte al eje de ordenadas en (0, 3) y verifique $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.**

**¿Cuáles son sus asíntotas?**

$f(x) = \dfrac{ax+b}{2x-1}$

- Si corta al eje de ordenada, en (0, 3) $\to$ El (0, 3) es un punto de la función:

  $3 = \dfrac{a \cdot 0 + b}{2 \cdot 0 - 1} \to 3 = -b \to b = -3$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \to \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax-3}{2x-1} = 3 \to \dfrac{a}{2} = 3 \to a = 6$

  $f(x) = \dfrac{6x-3}{2x-1}$ corta al eje de ordenadas en (0, 3) y verifica que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

**42** **Determina el valor de $a$ y de $b$ de modo que las rectas $x = 3$ e $y = \dfrac{3}{2}$ sean asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{ax+3}{bx-4}$.**

**¿Puede tener asíntota oblicua?**

Para que $x = 3$ sea una asíntota, el denominador se debe anular en ese punto. Luego:

$b \cdot 3 - 4 = 0 \to b = \dfrac{4}{3}$

$$f(x) = \frac{ax+3}{\frac{4}{3}x - 4} = \frac{3ax+9}{4x-12}$$

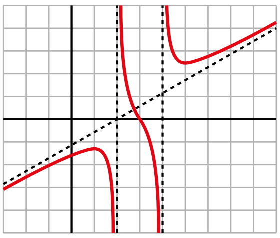
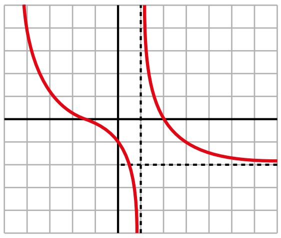
Para que $y = \dfrac{3}{2}$ sea una asíntota horizontal tiene que ocurrir que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

Por otro lado, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3ax+9}{4x-12} = \dfrac{3a}{4}$

Por tanto, $\dfrac{3a}{4} = \dfrac{3}{2} \to a = 2$

No puede tener asíntota oblicua.

**43** **Observa la gráfica de las siguientes funciones y describe sus ramas infinitas, sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas:**

**a)**  **b)** 

a) Asíntotas verticales: rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 4^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 4^+$, $f(x) \to +\infty$

Asíntota oblicua: recta $y = \frac{x}{2} - 1$

Posición:

Si $x \to +\infty$, $f(x) > \frac{x}{2} - 1$

Si $x \to -\infty$, $f(x) < \frac{x}{2} - 1$

b) Asíntotas verticales: recta $x = 1$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Asíntota horizontal: recta $y = -2$ en $+\infty$

Si $x \to +\infty$, $f(x) > 2$

Rama parabólica hacia arriba de crecimiento cada vez más rápido en $-\infty$.

**44** **Representa, en cada caso, una función que cumpla las condiciones dadas.**

**a)** $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$, $f(x) < 3$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

**b)** $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $f(x) < 1$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $f(x) > -1$

**c)** **Asíntota vertical:** $x = 1$

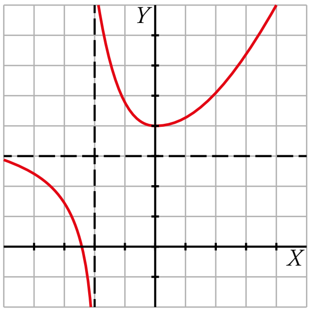
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

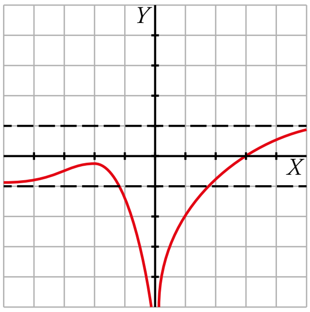
**Asíntota oblicua:** $y = x + 2$

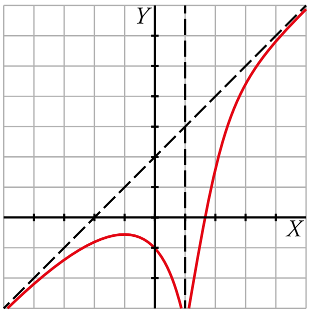
**diferencia** $[f(x) - y] < 0$ **si** $x \to \pm\infty$

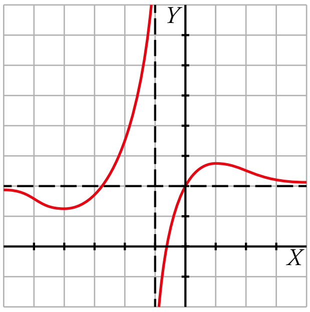
**d)** $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $f(x) > 2$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $f(x) < 2$

a) 


b) 


c) 


d) 


**45 Dada la función** $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \le 2 \\ ln\,(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$**, calcula el valor de $a$ y de $b$ para que $f$ sea continua y su gráfica pase por el origen de coordenadas.**

Para que su gráfica pase por el origen de coordenadas, $f(0) = 0$.

Por tanto, $2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 + b = 0$, de donde vemos que $b = 0$.

Exigimos la continuidad en el punto de ruptura:

$f(2) = 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 = 2a + 8$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (2x^2 + ax) = 2a + 8 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} ln\,(x-1) = 0 \end{cases} \qquad \text{Luego } 2a + 8 = 0 \;\to\; a = -4$$

La función es continua en el resto de $\mathbb{R}$ porque está formada por dos trozos: uno de parábola y otro de función logarítmica bien definido.

**46 Calcula el valor de $a$ para que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x}{x+1} - ax$ sea un número real.**

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \frac{3x^2 - 5x}{x+1} - ax \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5x - ax^2 - ax}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3-a)x^2 - (5+a)x}{x+1}$$

Para que el límite sea un número real, el grado del numerador debe ser igual al del denominador. Por tanto:

$3 - a = 0 \;\to\; a = 3$, resultando ser el límite igual a $-8$.

**47 Halla los siguientes límites (utiliza la calculadora).**

**a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{ln\,x}$

**c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^5}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,(2x+3)}{x^2}$

**e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^4)$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0$ porque para $x = 100 \;\to\; \dfrac{100^3}{e^{100}} = 3{,}7201 \cdot 10^{-38}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ porque para $x = 10\,000 \to \frac{10\,000}{\ln 10\,000} = 1\,085{,}7$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^5} = +\infty$ porque para $x = 100 \to \frac{e^{100} - 1}{100^5} = 2{,}6881 \cdot 10^{33}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{x^2} = 0$ porque para $x = 100 \to \frac{\ln(2 \cdot 100 + 3)}{100^2} = 0{,}00053$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - x^4) = +\infty$ porque para $x = 100 \to 2^{100} - 100^4 = 1{,}2677 \cdot 10^{30}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75x - x^2) = -\infty$ porque para $x = 100 \to 0{,}75^{100} - 100^2 = -10\,000$

**48 La función $f(x) = \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$ es discontinua en $x = 3$ y $x = -3$. Estudia el tipo de discontinuidad que presenta en esos puntos según los valores de $m$.**

La función $f(x)$ en los puntos $x = 3$ y $x = -3$ no está definida.

- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $3^3 + m \cdot 3^2 + 9 = 0$, es decir, si $m = -4$, tendríamos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

  Por tanto, si $m = -4$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2 - x - 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 3}{x+3} = \frac{1}{2}$

  La discontinuidad en $x = 3$ es evitable del tipo III.

  Para $m = -4$, en $x = -3$ tenemos una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque:

  $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{-54}{0} = \pm\infty$

- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $(-3)^3 + m \cdot (-3)^2 + 9 = 0$, es decir, si $m = 2$, tendríamos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.

  Por tanto, si $m = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{(x+3)(x^2 - x + 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 - x + 3}{x - 3} = \frac{-5}{2}$

  y tenemos una discontinuidad evitable de tipo III en $x = -3$.

  Para $m = 2$, en $x = 3$ hay una discontinuidad de salto infinito (tipo I) porque:

  $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \frac{54}{0} = \pm\infty$

Si $m \neq -4$ y $m \neq 2$, las discontinuidades en $x = 3$ y $x = -3$ son de salto infinito (tipo I) porque el numerador de la función no se anula.

**49 Halla los siguientes límites:**

**a)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2}$

**b)** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1}$

**c)** $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5}$

**d)** $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5}$

* *Fíjate en el apartado d) del ejercicio resuelto 2.*

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \frac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \frac{(x - \sqrt{2x})(x + \sqrt{2x})}{(x-2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x^2 - 2x}{(x-2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x}{x + \sqrt{2x}}$$

$$\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x}{x + \sqrt{2x}} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{4-x}-1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x-3}{\sqrt{4-x}-1} = \frac{(x-3)(\sqrt{4-x}+1)}{(\sqrt{4-x}-1)(\sqrt{4-x}+1)} = \frac{(x-3)(\sqrt{4-x}+1)}{3-x} = \sqrt{4-x}+1$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{4-x}-1} = \lim_{x \to 3} \sqrt{4-x}+1 = 2$$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \frac{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{2(x-5)}{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)} = \frac{2}{\sqrt{2x-1}+3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{2}{\sqrt{2x-1}+3} = \frac{1}{3}$$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

$$\frac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5} = \frac{(x-7)(\sqrt{3x+4}+5)}{(\sqrt{3x+4}-5)(\sqrt{3x+4}+5)} = \frac{(x-7)(\sqrt{3x+4}+5)}{3x-21} = \frac{(x-7)(\sqrt{3x+4}+5)}{3(x-7)} = \frac{\sqrt{3x+4}+5}{3}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{3x+4}-5} = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{3x+4}+5}{3} = \frac{10}{3}$$

## Cuestiones teóricas

**50** **[La justificación de los ejemplos es una oportunidad para trabajar la destreza expresión escrita de esta clave].**

**¿Verdadero o falso? Justifica la respuesta y pon ejemplos.**

**a) Si no existe $f(2)$, no se puede calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.**

**b) Si no existe $f(1)$, $f(x)$ no puede ser continua en $x = 1$.**

**c) Una función no puede tener dos asíntotas horizontales.**

**d) Una función puede tener cinco asíntotas verticales.**

**e) La recta $x = 1$ es asíntota vertical de $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.**

**f) La función $y = 2^{-x}$ no tiene asíntotas.**

**g) $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{4-x} = \lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{4-x}$**

a) Falso. En una discontinuidad evitable de tipo III no existe la función en un punto pero sí existe el límite.

b) Verdadero, ya que no se cumple una de las condiciones de la continuidad.

c) Verdadero. Si tuviera tres o más asíntotas horizontales, dos de ellas coincidirían por uno de los extremos del eje $OX$ y esto es imposible porque la función no puede tender simultáneamente a dos resultados diferentes.

d) Verdadero. Incluso puede tener infinitas asíntotas verticales, como ocurre con la función $y = tg\, x$.

e) Falso. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminación.

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} =$$

$= \lim\limits_{x \to 1} (\sqrt{x}+1) = 1+1 = 2 \to$ No hay asíntota vertical en $x = 1$

f) Falso. Porque $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$ y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

g) Falso.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{4-x} \ \text{ no existe} \\ \lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{4-x} \ \text{ sí existe}\end{array}\right\} \text{Luego la igualdad es falsa.}$$

**51** **Dada la función $f(x) = a^{xn} + bx^{n-1} + \ldots + h$, justifica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:**

**a) Si $a > 0$ y $n$ es par, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.**

**b) Si $a > 0$ y $n$ es impar, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.**

**c) Si $a < 0$ y $n$ es par, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.**

**d) Si $a < 0$ y $n$ es impar, entonces $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$**

a) Falso.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser $n$ par y $a > 0$.

b) Falso.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser $n$ impar y $a > 0$.

c) Verdadero.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ porque $ax^n < 0$ al ser $n$ par y $a < 0$.

d) Verdadero.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ porque $ax^n > 0$ al ser $n$ impar y $a < 0$.

**52** **Pon un ejemplo de una función que tenga una asíntota vertical en $x = 2$ y que exista $f(2)$.**

Respuesta abierta.

Si tiene asíntota vertical en $x = 2$, esto quiere decir que puede ser un cociente en el cual se anula el denominador para $x = 2$.

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-2)}$$

Para que exista $f(2)$ definimos las funciones en dos ramas:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

**53** **Escribe una función cuyo denominador se anule en $x = 1$ y que no tenga asíntota vertical en ese punto.**

Respuesta abierta.

Si se anula el denominador en $x = 1$ $\rightarrow$ Debe llevar el factor $(x - 1)$.

Como no hay asíntota vertical en $x = 1$ $\rightarrow$ El factor $(x - 1)$ se puede simplificar al calcular el $\lim\limits_{x \to 1}$.

Por ejemplo: $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} \rightarrow f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

**54** **La función $y = 2^{1/x}$, ¿tiene límite cuando $x \to 0$?**

$\lim\limits_{x \to 0} 2^{1/x} = 2^{\pm\infty}$

Estudiamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{1/x} = 2^{\pm\infty} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} 2^{1/x} = 2^{-\infty} = 0$

Por tanto, no existe el límite dado.

## Para profundizar

### Página 315

**55** **Calcula los siguientes límites:**

**a)** $\lim_{x \to \pm\infty} x|x-1|$ **b)** $\lim_{x \to \pm\infty} (|x| + x - 3)$

**c)** $\lim_{x \to \pm\infty} (|x+4| + |x|)$ **d)** $\lim_{x \to \pm\infty} (|x+2| - |x|)$

a) $\lim_{x \to +\infty} x(x-1) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} x(-x+1) = \lim_{x \to -\infty} -x^2 + x = -\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} (|x| + x - 3) = \lim_{x \to +\infty} (x + x - 3) = \lim_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (|x| + x - 3) = \lim_{x \to -\infty} (-x + x - 3) = \lim_{x \to +\infty} -3 = -3$

c) $\lim_{x \to +\infty} (|x+4| + |x|) = \lim_{x \to +\infty} (x + 4 + x) = \lim_{x \to +\infty} (2x + 4) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (|x+4| + |x|) = \lim_{x \to -\infty} (-x - 4 - x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x - 4) = +\infty$

d) $\lim_{x \to +\infty} (|x+2| - |x|) = \lim_{x \to +\infty} (x + 2 - x) = \lim_{x \to +\infty} 2 = 2$

$\lim_{x \to -\infty} (|x+2| - |x|) = \lim_{x \to -\infty} (-x - 2 + x) = \lim_{x \to +\infty} -2 = -2$

**56** **Halla las asíntotas de las funciones siguientes:**

**a)** $y = \dfrac{|x|}{2-x}$ **b)** $y = \dfrac{|2x+4|}{x}$ **c)** $y = \dfrac{|2x-1|}{x}$

a) • Verticales: $x = 2$

Posición:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

• Horizontales:

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{|x|}{2-x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2-x} = -1$. La recta $y = -1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{2-x} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{2-x} = 1$. La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

b) • Verticales: $x = 0$

Posición:

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

• Horizontales:

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{|2x+4|}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+4}{x} = 2 \to y = 2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{|2x+4|}{x} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{-2x-4}{x} = -2 \to y = -2$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

c) • Verticales: $x = 1$

Posición:

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

- Horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|2x+1|}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2.$$ La recta $y=2$ es una asíntota horizontal cuando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|2x+1|}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+1}{x-1}=-2.$$ La recta $y=-2$ es una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$.

**57** **Demuestra que la recta $y = 2x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$ de la función $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.**

- Asíntota oblicua: $y = ax + b$.

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to+\infty}2=2$$

↓ Términos de mayor grado

$$b=\lim_{x\to+\infty}[x+\sqrt{x^2+1}-2x]=\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+1}-x]=\infty-\infty \to \text{Indeterminación}$$

Multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1})^2-x^2}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty}=0$$

Luego la asíntota oblícua es: $y=2x+0 \to y=2x$.

**58** **Halla los siguientes límites:**

**a)** $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{2x+1}-3}$ **b** $\displaystyle\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{2x+1}-3}=\frac{0}{0}\to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{2x+1}-3}=\frac{(\sqrt{6x+1}-5)(\sqrt{6x+1}+5)(\sqrt{2x+1}+3)}{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{6x+1}+5)(\sqrt{2x+1}+3)}=\frac{(6x-24)(\sqrt{2x+1}+3)}{(2x-8)(\sqrt{6x+1}+5)}=$$

$$=\frac{6(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}{2(x-4)(\sqrt{6x+1}+5)}=\frac{3(\sqrt{2x+1}+3)}{\sqrt{6x+1}+5}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim_{x\to4}\frac{3(\sqrt{2x+1}+3)}{\sqrt{6x+1}+5}=\frac{9}{5}$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5}=\frac{0}{0}\to$ Indeterminación.

$$\frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5}=\frac{(\sqrt{3x-2}-5)(\sqrt{3x-2}+5)(\sqrt{2x+7}+5)}{(\sqrt{2x+5}+5)(\sqrt{3x-2}+5)(\sqrt{2x+7}+5)}=\frac{(3x-27)(\sqrt{2x+7}+5)}{(2x-18)(\sqrt{3x-2}+5)}=$$

$$=\frac{3(x-9)(\sqrt{2x+7}+5)}{2(x-9)(\sqrt{3x-2}+5)}=\frac{3(\sqrt{2x+7}+5)}{2(\sqrt{3x-2}+5)}$$

$$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{3x-2}-5}{\sqrt{2x+7}-5}=\lim_{x\to9}\frac{3(\sqrt{2x+7}+5)}{2(\sqrt{3x-2}+5)}=\frac{3}{2}$$

**59** **Calcula las asíntotas verticales de $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ y estudia la posición de la función respecto de ellas. ¿Tiene asíntota horizontal?**

El dominio de definición de la función es la solución de la inecuación $x^2-1>0$, es decir, $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Las asíntotas verticales son las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Solo podemos acercarnos por un lado en cada una de las asíntotas.

Posición:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Veamos ahora las asíntotas horizontales. Usamos la regla de los grados del numerador y del denominador.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Por tanto, no tiene asíntotas horizontales.

**60 Halla las asíntotas de $y = 2x - 2^{-x}$.**

- Asíntotas verticales:

  $\lim_{x \to a} (2x - 2^{-x}) = 2a - 2^{-a} \to$ Al ser $a$ un número real $x \to a$, el valor del límite es un número real $\to$

  $\to$ No hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

  $\lim_{x \to +\infty} (2x - 2^{-x}) = \lim_{x \to +\infty} 2x - \lim_{x \to +\infty} 2^{-x} = \infty - 0 = \infty \to$ No hay asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

  $\lim_{x \to -\infty} (2x - 2^{-x}) = -2(+\infty) - (+\infty) = -\infty \to$ No hay asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

- Asíntota oblicua:

  Debido a la función $2^{-x}$, vemos si $x \to +\infty$ y si $x \to -\infty$

  $\boxed{x \to +\infty}$

- $a = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 2^{-x}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x} - \frac{2^{-x}}{x}\right) \to 2 - \lim_{x \to +\infty} \frac{2^{-x}}{x} = 2 - 0 = 2$

- $b = \lim_{x \to +\infty} \left[(2x - 2^{-x}) - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} -2^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2^x}\right) = 0$

  Luego la asíntota oblicua es: $y = 2x$ si $x \to +\infty$

  $\boxed{x \to -\infty}$

- $a = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 2^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} + \lim_{x \to -\infty} \frac{2^{-x}}{-x} = 2 + \infty = \infty \to$

  $\to$ No hay asíntota oblicua.

**61 Determina cuál debe ser el valor $a$ y $b$ para que se cumpla la igualdad: $\lim_{x \to +\infty} \left(ax + b - \frac{2x^2 - 1}{x + 2}\right) = 0$**

$$\lim_{x \to +\infty} \left(ax + b - \frac{(2x^2-1)}{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(ax + \frac{2bx^2 - b}{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax(x+2) + 2b\,x^2 - b}{x+2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} = \frac{ax^2 + 2ax + 2b\,x^2 - b}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(a+2b) + 2ax - b}{x+2} = 0 \to$$

$\to$ El grado del numerador debe ser menor que el grado del denominador $\to$

$\to (a+2b)x^2 + 2a\,x - b$ debe ser un polinomio de grado 0 $\to \left\{\begin{matrix} a + 2b = 0 \\ 2a = 0 \end{matrix}\right\}$

$2a = 0 \to \boxed{a = 0} \to 2b = 0 \to \boxed{b = 0}$

**62 Calcula el valor de $a$ y $b$ para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$. ¿Para estos valores tiene $f$ alguna asíntota?**

$$f(x) = \begin{cases} a - 2^x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ ln\,(x + b) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ tiene que ocurrir: $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

- $f(0) = 1$
- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a - 2x = a$

  $\boxed{a = 1}$
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} ln\,(x + b) = ln\, b$

  $ln\, b = 1 \;\to\; \boxed{b = e}$

  $$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ ln\,(x + e) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función está definida por ramas, las tres ramas son continuas en los intervalos en los que están definidas, luego $f(x)$ no tiene ninguna discontinuidad.

**63 Calcula $a$ y $b$ para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(2, 3)$ y tenga una asíntota oblicua de pendiente 4:**

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{a - x}, \quad a \neq 0$$

**¿Cuál será esa asíntota oblicua?**

- Como pasa por $(2, 3) \;\to\; x = 2, y = 3 \;\to\; 3 = \dfrac{4a + b}{a - 2} \;\to\; 3a - 6 = 4a + b \;\to\; -6 = a + b$
- Como $y = 4x + b$ es asíntota oblicua $\;\to\; 4 = \lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} \;\to\; \lim_{x \to \infty} \dfrac{\frac{ax^2 + b}{a - x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 + b}{ax - x^2} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$

  $= \lim_{x \to \infty} = \dfrac{ax^2}{-x^2} = \lim_{x \to \infty} (-a) = -a$

  Luego $4 = -a \;\to\; \boxed{a = -4}$

  Tenemos: $\left.\begin{matrix} -6 = a + b \\ a = -4 \end{matrix}\right\} \to -6 = -4 + b \;\to\; \boxed{b = -2}$

  La asíntota oblicua es: $y = 4x - 2$

# AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 3.2. (EA 3.2.1-EA 3.2.2.-EA 3.3.3.)

## Página 315

**1** **Calcula el límite de $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \le 3 \\ x^2-x-7, & x>3 \end{cases}$ en los puntos de abscisas 0, 3 y 5. Di si $f$ es continua en esos puntos.**

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \le 3 \\ x^2-x-7, & x>3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{array} \right\} \text{ No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$, porque no tiene límite en ese punto.

**2** **Halla los siguientes límites:**

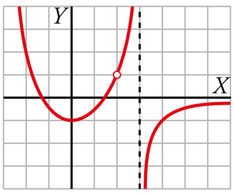
**a)** $\lim_{x \to 0} 2^{x-1}$ **b)** $\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ **c)** $\lim_{x \to 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

a) $\lim_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

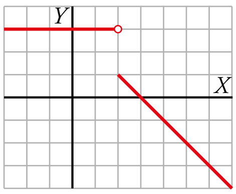
b) $\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{49}} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \to 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (Si $x \to 4^+$ o si $x \to 4^-$, los valores de la función son positivos).

**3** **a)**




**b)**




**Halla, en cada caso, los siguientes límites:**

$$\lim_{x \to 3} f(x); \quad \lim_{x \to 2} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

a) $\lim_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\}$ No tiene límite en $x = 3$.

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 2} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array} \right\}$ No tiene límite en $x = 2$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

**4** **Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.**

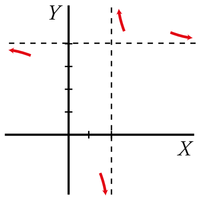
Simplificamos: $\dfrac{4x^2}{x^2 - 2x} = \dfrac{4x}{x - 2} \rightarrow y = \dfrac{4x}{x - 2}$

- Asíntota vertical: $x = 2$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x-2} = +\infty \end{cases}$

- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x}{x-2} = 4;\ y = 4$

Posición: $\begin{cases} x \rightarrow +\infty, & y > 4 \\ x \rightarrow -\infty, & y < 4 \end{cases}$




**5** **Justifica qué valor debe tomar $a$ para que la función $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.**

$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La función es continua para valores de $x$ menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{cases}$

Para que exista el límite, debe ser: $a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

**6** **Halla el límite de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ cuando $x \rightarrow 3;\ x \rightarrow 2;\ x \rightarrow +\infty;\ x \rightarrow -\infty$ y representa la información que obtengas.**

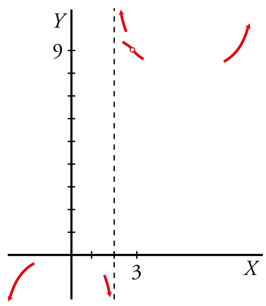
- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{0}{0}$

  Simplificamos: $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x^2}{x-2}$

  $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x-2} = 9$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x-2} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

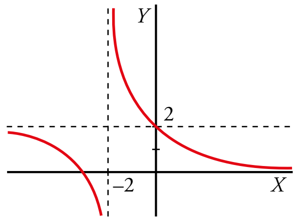
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$



**7** **Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:**

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$  b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$  d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$




**8** **Estudia, en cada caso, las ramas infinitas y las asíntotas de la función y sitúa la curva respecto a ellas:**

a) $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$  b) $f(x) = \dfrac{-2x^2}{2x - 3x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$  d) $f(x) = 3 - 2^{-x}$

a) • Asíntotas verticales.

$1 - x^2 = 0 \to x^2 = 1 \to x = \pm 1 \to$ Posibles asíntotas verticales

$\boxed{x = 1}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x}{1 - x^2} = \dfrac{2}{0} = \infty \to$ Hay una asíntota vertical en $x = 1$

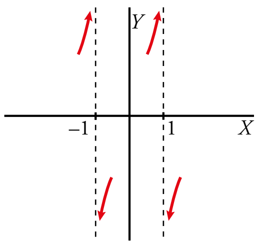
Estudiamos la posición:

si $x \to 1^-, f(x) \to +\infty$

si $x \to 1^-, f(x) \to +\infty$

$\boxed{x = -1}$

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x}{1 - x^2} = \dfrac{-2}{0} = -\infty \to$ Hay una asíntota vertical en $x = -1$




Estudiamos la posición:

si $x \to -1^-, f(x) \to +\infty$

si $x \to -1^+, f(x) \to -\infty$

• Ramas en el infinito:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{1 - x^2} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{-x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{-x} = \dfrac{2}{-\infty} = 0^-$

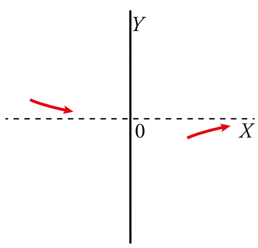
↓

Términos de mayor grado

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{1 - x^2} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{-x} = \dfrac{2}{\infty} = 0^+$

↓

Términos de mayor grado




Luego $y = 0$ es asíntota horizontal.

Estudiamos la posición:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2x}{1 - x^2} - 0\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{1 - x^2} = 0^- \to$ La curva está por debajo de la asíntota.

$\lim\limits_{x \to -+\infty} \left[\dfrac{2x}{1 - x^2} - 0\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{1 - x^2} = 0^+ \to$ La curva está por encima de la asíntota.

• Asíntotas oblicuas no hay ya que hay asíntota horizontal.

b) • Asíntotas verticales:

$$2x - 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x(2-3x) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2 - 3x = 0 \;\rightarrow\; 2 = 3x \;\rightarrow\; x = 2/3 \end{cases}$$

$x = 0$, $x = 2/3$ $\rightarrow$ Posibles asíntotas verticales.

$\boxed{x = 0}$

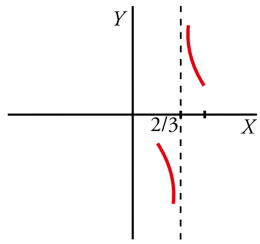
$$\lim_{x \to 0} \frac{-2x^2}{2x - 3x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x^2}{x(2-3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{2-3x} = \frac{0}{2} = 0 \;\rightarrow$$

$\rightarrow$ No hay asíntota vertical en $x = 0$.

$\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$$\lim_{x \to 2/3} \frac{-2x^2}{2x - 3x^2} = \frac{-8/9}{0} = \infty \;\rightarrow\; \text{Estudiamos los signos.}$$

$$\lim_{x \to 2/3} \frac{-2x}{2-3x} = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-/3} \frac{-2x}{2-3x} = \frac{-4/3}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+/3} \frac{-2x}{2-3x} = \frac{-4/3}{0^-} = +\infty \end{cases} \rightarrow$$




$\rightarrow$ Hay una asíntota vertical en $x = \frac{2}{3}$.

Estudiamos la posición:

si $x \rightarrow 2^-/3$, $f(x) \rightarrow -\infty$

si $x \rightarrow 2^-/3$, $f(x) \rightarrow +\infty$

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2}{2x - 3x^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado}}}{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x^2}{-3x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \;\rightarrow$$

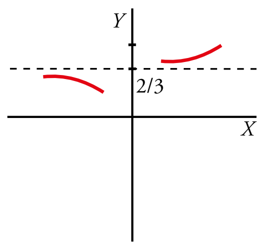
$\rightarrow$ Asíntota horizontal $y = \frac{2}{3}$.

Estudiamos la posición:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{-2x^2}{2x - 3x^2} - \frac{2}{3} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2 - 4x + 6x^2}{3(2x - 3x^2)} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado}}}{\frac{\infty}{\infty}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{-3x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{3x} = 0^+ \;\rightarrow\; \text{La curva está por encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[ \frac{-2x^2}{2x - 3x^2} - \frac{2}{3} \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{2x - 3x^2} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Términos de mayor grado}}}{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{-3x^2} =$$




$$= \lim_{x \to -+\infty} \frac{-4}{-3x} = 0^- \;\rightarrow\; \text{La curva está por debajo de la asíntota.}$$

• Asíntotas oblicuas no hay ya que hay asíntota horizontal.

c) No tiene asíntotas verticales porque $x^2 + 4 \neq 0$ para cualquier valor de $x$.

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 4} = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 4} = -\infty$.

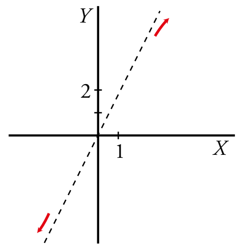
Tiene una asíntota oblicua, porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 & x^2+4 \\ \cline{2-2} -2x^3-8x & 2x \\ \quad\ -8x & \end{array}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2+4} = 2x - \frac{8x}{x^2+4}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Posición $\begin{cases} x \to +\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \\ x \to -\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \end{cases}$




d) • Asíntotas verticales:

$f(x) = 3 - \dfrac{1}{2^x}$ el denominador nunca se hace cero $\to$

$\to$ No hay asíntotas verticales.

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} (3 - 2^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} \left(3 - \frac{1}{2^x}\right) = 3 - 0 = 3 \ \to\ y = 3 \ \to$$

$$\downarrow$$

$$2^{+\infty} = +\infty$$

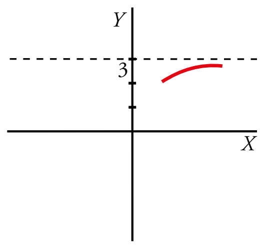
$\to$ Es asíntota horizontal si $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (3 - 2^{-x}) = 3 - \infty \to -\infty \to$ No hay asíntota horizontal.

Estudiamos la posición para $y = 3$

$$\lim_{x\to+\infty} \left((3 - 2^{-x}) - 3\right) = \lim_{x\to+\infty} (-2^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2^x}\right) = 0^- \ \to$$

$\to$ La curva está por debajo de la asíntota.




• Asíntota oblicua:

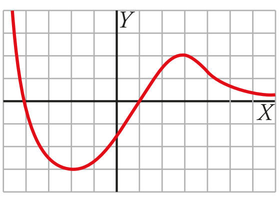
Si $x \to +\infty$ $\to$ No hay, ya que hay asíntotas horizontales.

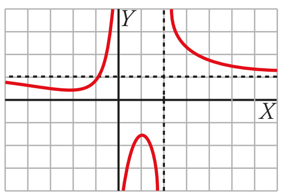
Si $x \to -\infty$ $\to$ puede ser que tenga asíntota oblicua.

$y = ax + b$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{3 - 2^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{-3}{x} - \frac{2^{-x}}{x}\right) = +\infty \ \to$$ No hay asíntota oblicua.

**9** **Observa estas gráficas y describe sus ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva con respecto a ellas.**




a) • No hay asíntotas verticales.

• $y = 0$ es asíntota horizontal si $x \to +\infty$.

La curva está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0) = 0^+$$

• No hay asíntota oblicua.

• Rama infinita si $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

b) • Asíntotas verticales:

$x = 0$, $x = 2$

Estudiamos las posiciones:

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

b) • Asíntota horizontal $y = 1$:

Estudiamos la posición:

$x \to -\infty$, $f(x)$ por debajo de la asíntota $\to \lim_{x \to -\infty} (f(x) - 1) = 0^-$

$x \to +\infty$, $f(x)$ por encima de la asíntota $\to \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 1) = 0^+$