12 DERIVADAS

Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.)

Resuelve

Movimiento de una partícula

Una investigadora, para estudiar el movimiento de una partícula, la ha iluminado con destellos de *flash* cada décima de segundo (0,1 s) durante cuatro segundos. Esta es la fotografía a tamaño real:

1. Aproxima la velocidad de la partícula en el instante $t = 2$ s hallando su velocidad media en los intervalos [2; 2,5] y [2; 2,1]. Para ello, toma medidas sobre la fotografía. Observa que P_2; $P_{2,1}$ y $P_{2,5}$ son las posiciones de la partícula en los instantes 2 s; 2,1 s y 2,5 s, respectivamente.

2. Calcula las velocidades medias anteriores tomando valores sobre la ecuación del movimiento de dicha partícula: $s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$

3. Halla ahora las velocidades medias en los intervalos [2; 2,001] y [2; 2,000001] tomando de nuevo valores sobre la ecuación del movimiento de la partícula. ¿Podemos considerar que esta última velocidad media es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s?

1. La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2{,}5$ es de 12,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{12{,}5}{0{,}5} = 25 \text{ mm/s} = 2{,}5 \text{ cm/s}$$

La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2{,}1$ es de 3,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{3{,}5}{0{,}1} = 33 \text{ mm/s} = 3{,}5 \text{ cm/s}$$

2. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2}(2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2) = 12 \text{ cm} \\ s_2 = \frac{1}{2}(2{,}5^4 - 8 \cdot 2{,}5^3 + 18 \cdot 2{,}5^2) = 13{,}28 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v_1 = \frac{13{,}28 - 12}{0{,}5} = 2{,}56 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_3 = \frac{1}{2}(2{,}1^4 - 8 \cdot 2{,}1^3 + 18 \cdot 2{,}1^2) = 12{,}37 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v_2 = \frac{12{,}37 - 12}{0{,}1} = 3{,}77 \text{ cm/s}$$

3. $$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_4 = \frac{1}{2}(2{,}001^4 - 8 \cdot 2{,}001^3 + 18 \cdot 2{,}001^2) = 12{,}003997 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v = \frac{12{,}003997 - 12}{0{,}001} = 3{,}997 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 12 \text{ cm} \\ s_5 = \frac{1}{2}(2{,}000001^4 - 8 \cdot 2{,}000001^3 + 18 \cdot 2{,}000001^2) = 12{,}000004 \text{ cm} \end{array}\right\} \to v = \frac{12{,}000004 - 12}{0{,}000001} = 4 \text{ cm/s}$$

Sí podemos considerar que esta última velocidad es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s porque el intervalo de tiempo transcurrido es tan solo una millonésima de segundo.

1 ▶ MEDIDA DEL CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.)

Página 318

Hazlo tú

1 Halla la T.V.M. de $y = \sqrt{x-1}$ en [1, 2], [1, 5] y [1, 10].

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{0}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{T.V.M. } [1, 10] = \frac{f(10)-f(1)}{10-1} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{0}}{9} = \frac{1}{3}$$

Piensa y practica

1 Piensa y comparte en pareja. **[La decisión sobre la corrección de las afirmaciones se puede aprovechar para trabajar esta estrategia].**

¿Verdadero o falso?

a) La T.V.M. mide el crecimiento medio de una función en un intervalo.

b) Si f es creciente en $[a, b]$, su T.V.M. en ese intervalo es positiva, y si es decreciente, su T.V.M. es negativa.

c) Si la T.V.M. de f en $[a, b]$ es 0, significa que f es constante en $[a, b]$.

a) Verdadero.

b) Verdadero. El signo de la T.V.M. depende solo del signo del numerador. Si f es creciente $f(b) > f(a)$, luego el numerador es positivo. Si f es decreciente, $f(b) < f(a)$, luego el numerador es negativo.

c) Falso. Solo podemos afirmar que $f(a) = f(b)$. Esto no quiere decir que sea constante.

2 Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:

[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8]

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{0-5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{-4-5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{0-5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{5-5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8)-f(1)}{8-1} = \frac{12-5}{7} = 1$$

3 **Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable [1, 1 + h].**

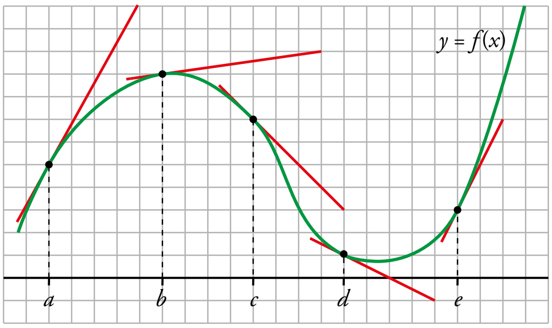
Comprueba que, dando a h los valores adecuados, se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

$$\text{T.V.M. } [1,\ 1+h] = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 8(1+h) + 12 - 5}{h} = \frac{h^2 - 6h}{h} = \frac{h(h-6)}{h} = h - 6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 319

4 **Calcula $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, $f'(d)$ y $f'(e)$.**



PUNTO	PENDIENTE
a	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
b	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
c	$f'(1) = -1$
d	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
e	$f'(10) = 2$

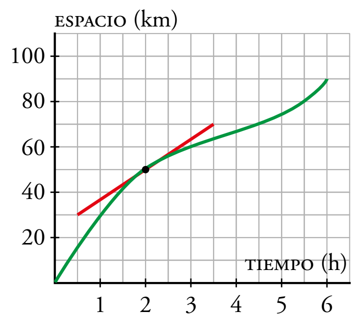
5 Comprobamos. **[El trabajo con la pendiente de la gráfica que propone el ejercicio puede servir para trabajar esta técnica].**

La siguiente gráfica muestra el espacio recorrido por un ciclista a lo largo de una carrera.

a) Calcula su velocidad media entre estas horas:
[1, 2], [1, 3], [1; 4,5], [1; 5,5] y [1, 6]

b) Halla la velocidad que llevaba a las 2 h.

c) Estima su velocidad a las 5 h 30 min.



Vemos los valores que toma la función en cada punto:

$f(1) = 30$ km

$f(2) = 50$ km

$f(3) = 60 \text{ km}$

$f(4,5) = 70 \text{ km}$

$f(5,5) = 80 \text{ km}$

a) $\text{T.V.M.}[1,2] = \dfrac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 20 \text{ km/h}$

$\text{T.V.M.}[1,3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = 15 \text{ km/h}$

$\text{T.V.M.}[1;4{,}5] = \dfrac{f(4,5) - f(1)}{4,5 - 1} = \dfrac{40}{3,5} = 11,43 \text{ km/h}$

$\text{T.V.M.}[1;5{,}5] = \dfrac{f(5,5) - f(1)}{5,5 - 1} = \dfrac{50}{4,5} = 11,1 \text{ km/h}$

b) Aproximamos la velocidad en $t = 2$:

$\dfrac{f(2,5) - f(2)}{0,5} = \dfrac{58 - 50}{0,5} = 16 \text{ km/h}$

$\dfrac{f(2,25) - f(2)}{0,25} = \dfrac{54 - 50}{0,25} = 16 \text{ km/h}$

$\dfrac{f(2) - f(1,5)}{0,5} = \dfrac{50 - 42}{0,5} = 16 \text{ km/h}$

$\dfrac{f(2) - f(1,75)}{0,25} = \dfrac{50 - 46}{0,25} = 16 \text{ km/h}$

Podemos decir entonces que su velocidad a las dos horas es de 16 km/h.

c) Aproximamos la velocidad en $t = 5{,}5$ (es decir, a las 5 h 30 min):

$\dfrac{f(6) - f(5,5)}{0,5} = \dfrac{90 - 80}{0,5} = 20 \text{ km/h}$

$\dfrac{f(5,5) - f(5)}{0,5} = \dfrac{80 - 75}{0,5} = 10 \text{ km/h}$

Haciendo un promedio, podemos decir entonces que su velocidad a las 5 h 30 min es de unos 15 km/h.

2 OBTENCIÓN DE LA DERIVADA A PARTIR DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) **CE 3.3.** (EA 3.3.1.)

Página 321

Hazlo tú

1 **Halla la derivada de $y = \frac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.**

- $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$f(1+h) = \frac{3}{1+h-2} = \frac{3}{h-1}$$

$$f(1) = \frac{3}{1-2} = -2$$

$$f(1+h) - f(1) = \frac{3}{h-1} - (-3) = \frac{3h}{h-1}$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{3h}{h-1}}{h} = \frac{3}{h-1}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$$

- $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

$$f(-1+h) = \frac{3}{-1+h-2} = \frac{3}{h-3}$$

$$f(-1) = \frac{3}{-1-2} = -1$$

$$f(-1+h) - f(-1) = \frac{3}{h-3} - (-1) = \frac{h}{h-3}$$

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\frac{h}{h-3}}{h} = \frac{1}{h-3}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$$

- $f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$

$$f(5+h) = \frac{3}{5+h-2} = \frac{3}{h+3}$$

$$f(5) = \frac{3}{5-2} = 1$$

$$f(5+h) - f(5) = \frac{3}{h+3} - 1 = \frac{-h}{h+3}$$

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{\frac{-h}{h+3}}{h} = -\frac{1}{h+3}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{h+3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Hazlo tú

2 **Halla la derivada de $y = \frac{x^2}{2} + 7x$ en los puntos de abscisas 0, 1, 2, 3, 4 y 5.**

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right) = xh + \frac{h^2}{2} + 7h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{xh + \frac{h^2}{2} + 7h}{h} = x + \frac{h}{2} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(x + \frac{h}{2} + 7\right) = x + 7$$

$f'(0) = 0 + 7 = 7$ $f'(1) = 1 + 7 = 8$ $f'(2) = 9$ $f'(3) = 10$ $f'(4) = 11$ $f'(5) = 12$

Piensa y practica

1 **¿Verdadero o falso?**

a) La derivada de una función, $y = f(x)$, en $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

b) $f'(3) = 0$ significa que la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ es paralela al eje X.

c) Si $f'(2) > 0$, entonces f es creciente en el punto de abscisa 2.

a) Verdadero.

b) Verdadero. La pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es cero, luego la recta es horizontal.

c) Verdadero, debido a la inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

2 **Halla la derivada de $y = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa –2.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2} = \frac{-2+h+2}{2(-2+h)} = \frac{h}{2h-4}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2h-4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = -\frac{1}{4}$$

3 **Halla la derivada de $y = -2x + 4$ en los puntos de abscisas –3, 0, 4 y 7. Explica por qué obtienes en todos los casos el mismo resultado.**

- $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

  $f(-3+h) - f(-3) = -2(-3+h) + 4 - 10 = 6 - 2h - 6 = -2h$

  $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

  $f(h) - f(0) = -2h + 4 - 4 = -2h$

  $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

• $f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

$f(4 + h) - f(4) = -2(4 + h) + 4 - (-4) = -8 - 2h + 8 = -2h$

$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

• $f'(7) = \lim_{h \to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h}$

$f(7 + h) - f(7) = -2(7 + h) + 4 - (-10) = -14 - 2h + 14 = -2h$

$f'(7) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

Como la función es una línea recta, crece o decrece siempre de la misma forma y al ser la derivada una forma de medir el crecimiento de una función, esta debe valer lo mismo en todos los puntos.

4 **Halla la derivada de $y = 3x^2 - 5x + 1$ en los puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.**

Calculamos la derivada de forma general y la evaluamos en cada uno de los puntos pedidos.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x + h) - f(x) = 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1) =$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1 = 3h^2 + 6hx - 5h$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6hx - 5h}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + 6x - 5) = 6x - 5$

$f'(-2) = -17$

$f'(-1) = -11$

$f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 7$

$f'(3) = 13$

$f'(4) = 19$

$f'(5) = 25$

$f'(6) = 31$

3 FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.)

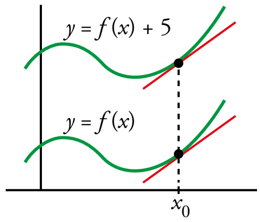
Página 322

1 **[La comprensión del enunciado propuesto sirve para trabajar la destreza comprensión escrita de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

Las rectas tangentes en un punto cualquiera, x_0, a las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f(x) + 5$ son paralelas.

Eso significa que las dos funciones tienen la misma función derivada.



Verdadero, porque al ser paralelas las rectas tangentes en cualquier punto, deben tener la misma pendiente en todos los puntos.

2 **Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y, a partir de ella, calcula $f'(4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(5)$.**

$$\frac{f(x+\text{h})-f(x)}{\text{h}} = \frac{\dfrac{3}{x+\text{h}-2}-\dfrac{3}{x-2}}{\text{h}} = 3\cdot\frac{\dfrac{x-2-x-\text{h}+2}{(x+\text{h}-2)(x-2)}}{\text{h}} = \frac{-3}{(x+\text{h}-2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \lim_{\text{h}\to 0}\frac{f(x+\text{h})-f(x)}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0}\frac{-3}{(x+\text{h}-2)(x-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-3}{4}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{3}$$

$$f'(1) = -3$$

$$f'(5) = \frac{-1}{3}$$

3 **Halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x-3}$ y calcula las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 4$ y $x = 7$.**

$$\frac{f(x+\text{h})-f(x)}{\text{h}} = \frac{\sqrt{x+\text{h}-3}-\sqrt{x-3}}{\text{h}} = \frac{(\sqrt{x+\text{h}-3}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+\text{h}-3}+\sqrt{x-3})}{\text{h}(\sqrt{x+\text{h}-3}+\sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{x+\text{h}-3-(x-3)}{\text{h}(\sqrt{x+\text{h}-3}+\sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{\text{h}+x-3}}$$

$$f'(x) = \lim_{\text{h}\to 0}\frac{f(x+\text{h})-f(x)}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0}\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{\text{h}+x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$f'(7) = \frac{1}{4}$$

4 **Halla la función derivada de $f(x) = x^3 + x^2$.**

$$\frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}} = \frac{(x+\mathrm{h})^3+(x+\mathrm{h})^2-(x^3+x^2)}{\mathrm{h}} = \frac{x^3+3\mathrm{h}x^2+3\mathrm{h}^2x+\mathrm{h}^3+\mathrm{h}^2+2\mathrm{h}x+x^2-x^3-x^2}{\mathrm{h}} =$$

$$= \frac{3\mathrm{h}x^2+3\mathrm{h}^2x+\mathrm{h}^3+\mathrm{h}^2+2\mathrm{h}x}{\mathrm{h}} = 3x^2+3\mathrm{h}x+\mathrm{h}^2+\mathrm{h}+2x$$

$$f'(x) = \lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{f(x+\mathrm{h})-f(x)}{\mathrm{h}} = \lim_{\mathrm{h}\to 0} (3x^2+3\mathrm{h}x+\mathrm{h}^2+\mathrm{h}+2x) = 3x^2+2x$$

4 ▶ REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) **CE 3.3.** (EA 3.3.1.-EA 3.3.2.)

Página 323

1 **Halla las funciones derivadas de estas funciones:**

a) $f(x) = x^5$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **c)** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **d)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **e)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}$

a) $f'(x^5) = 5x^4$

b) $f'\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = f'(x^{-2}) = -2x^{-3} = \dfrac{-2}{x^3}$

c) $f'\left(\sqrt[3]{x}\right) = f'(x^{1/3}) = \dfrac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = f'(x^{2/3}) = \dfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $f'\left(\dfrac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right) = f'\left(\dfrac{x^{3/2}\cdot x^{4/3}}{x^2}\right) = f'\left(x^{5/6}\right) = \dfrac{5}{6}x^{(5/6)-1} = \dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 325

Hazlo tú

1 **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x - 7$ **b)** $g(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{3x^4}$ **c)** $h(x) = \dfrac{3x}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 3 = 20x^3 - 4x + 3$

b) $g(x) = \sqrt{5}\,\sqrt{x} - \sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{x^4} = \sqrt{5}\,x^{1/2} - \sqrt[3]{3}\,x^{4/3}$

$g'(x) = \sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{2}x^{-1/2} - \sqrt[3]{3}\cdot\dfrac{4}{3}x^{1/3} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h(x) = \dfrac{3x}{x^2\,x^{1/3}} = 3x^{-4/3}$

$h'(x) = 3\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\dfrac{4}{x^{7/3}} = -\dfrac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

Hazlo tú

2 **Hazlo tú. Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{5^{4x}}{125}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3}$ **c)** $h(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x}$

a) $f(x) = \dfrac{1}{125}(5^4)^x = \dfrac{1}{125}625^x$

$f'(x) = \dfrac{1}{125}625^x\,ln\,625 = \dfrac{ln\,625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \dfrac{(2x-3)\cdot(x^2+x-3) - (x^2-3x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \dfrac{2x^3 - x^2 - 9x + 9 - (2x^3 - 5x^2 - x + 1)}{(x^2+x-3)^2} = \dfrac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2+x-3)^2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 2 - \dfrac{1}{x}$

$h'(x) = 2x - 5 + \dfrac{1}{x^2}$

Para practicar

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

2 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\,\sqrt{x^3}\,e^x = \sqrt{3}\,x^{3/2}\,e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\,e^x + x^{3/2}\,e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^x + x\sqrt{x}\,e^x\right) = \sqrt{3x}\,e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot cos\ x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\ cos\ x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x\ cos\ x - e^x\ sen\ x)\,2^x - e^x\ cos\ x\ 2^x\ ln\ 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\ cos\ x - e^x\ sen\ x - e^x\ cos\ x\ ln\ 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\,(cos\ x - sen\ x - ln\ 2\ cos\ x)}{2^x}$$

5 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot tg\ x$

$$f'(x) = 3^x \cdot tg\ x + x \cdot 3^x\ ln\ 3 \cdot tg\ x + \frac{x \cdot 3^x}{cos^2\ x}$$

6 $f(x) = \dfrac{log_2\ x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\ 2} \cdot x - lon_2\ x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{ln\ 2} - log_2\ x}{x^2} = \frac{1 - ln\ 2\ log_2\ x}{x^2\ ln\ 2}$$

7 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\,x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\,2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

9 $f(x) = (arc\ sen\ x)(x + 3)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(x + 3) + (arc\ sen\ x) \cdot 1 = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} + arc\ sen\ x$$

10 $f(x) = \dfrac{\textit{arc sen } x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos x - (\textit{arc sen } x)(-\textit{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\cos x + (\textit{arc sen } x)\,\textit{sen } x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sqrt{1-x^2}\,(\textit{arc sen } x)\,\textit{sen } x}{\sqrt{1-x^2}\,\cos^2 x}$$

11 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$$f(x) = \frac{1}{x}5^x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}5^x + \frac{1}{x}5^x \ln 5 = 5^x\,\frac{x\ln 5 - 1}{x^2}$$

Página 326

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

12 $f(x) = \textit{sen } (x^2 - 5x + 7)$

$$f'(x) = (2x-5)\cos(x^2 - 5x + 7)$$

13 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x+3)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$$

14 $f(x) = \textit{sen}^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(\textit{sen}^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\square^2)' = 2\square \\ (\textit{sen}\,\square)' = \cos\square \\ \left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2\textit{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 6\textit{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$

También, usando la fórmula del seno del ángulo doble, podríamos dar el resultado de esta otra manera:

$$f'(x) = 2\textit{sen}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 3\textit{sen}\,(6x+\pi) = -3\,\textit{sen}\,6x$$

15 $f(x) = \dfrac{\log x^2}{x}$

$$f(x) = \frac{2\log x}{x} \to f'(x) = \frac{2(1-\ln 10 \log x)}{x^2 \ln 10}$$

16 $f(x) = \cos(3x - \pi)$

$$f'(x) = -3\,\textit{sen}\,(3x-\pi)$$

17 $f(x) = \sqrt{1+2x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

18 $f(x) = x\, e^{2x+1}$

$f'(x) = e^{2x+1} + x\, e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1}\,(1 + 2x)$

19 $f(x) = \dfrac{sen\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}\; cos\,(x^2+1) + [x\; sen\,(x^2+1)]\,/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \frac{2x\,(1-x^2)\; cos\,(x^2+1) + x\; sen\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

6 ▶ UTILIDADES DE LA FUNCIÓN DERIVADA

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 3.3. (EA 3.3.1.)

Página 328

Hazlo tú

1 **Escribe las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva de la función $f(x) = ln\ (tg\ x)$ en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.**

Para escribir la ecuación de una recta debemos conocer un punto y su pendiente.

Hallamos la ordenada de $x = \frac{\pi}{4}$: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = ln(1) = 0$

Punto de tangencia: $P\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

Hallamos la pendiente de la recta tangente: $m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{tg(x)} \cdot \frac{1}{(cos\,x)^2} = \frac{1}{sen\,x\,cos\,x} \to f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{0,5} = 2 \to y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2x - \frac{\pi}{2}$$

Página 329

Hazlo tú

1 **Halla los puntos singulares de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ y determina los intervalos donde crece o decrece.**

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 0 \to 6x^2 - 6x - 12 = 0 \to x^2 - x - 2 = 0 \to x_1 = -1,\ x_2 = 2$

$f(1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10 \to (-1, 10)$ es un punto singular.

$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 3 = -17 \to (2, -17)$ es otro punto singular.

Teniendo en cuenta las ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = -\infty$

Tenemos que los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ son intervalos de crecimiento. En el intervalo $(-1, 2)$ la función decrece.

7 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 3.3. (EA 3.3.1.-EA 3.3.3.)

Página 331

1 **Dada la función $y = x^3 - 15x^2 + 63x$, halla:**

Su máximo en:

a) [2, 8] **b) [2, 9]** **c) [2, 10]**

Su mínimo en:

d) [2, 8] **e) [1, 8]** **f) [0, 8]**

Llamaremos:

$f(x) = x^3 - 15x^2 + 63x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 30x + 63 = x^2 - 10x + 21$

Veamos dónde se anula la derivada:

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} \rightarrow x = 7,\ x = 3$$

a) En [2,8] tenemos dos puntos singulares en $x = 3$ y $x = 7$. Tenemos que ver qué valores toma la función en dichos puntos, además de en los extremos:

$f(2) = 74$

$f(3) = 81$

$f(7) = 49$

$f(8) = 56 \rightarrow$ Tiene un máximo en $x = 3$.

b) En [2,9] solamente nos falta estudiar la función en $x = 9$:

$f(9) = 81 \rightarrow$ Tiene un máximo en $x = 3$ y $x = 9$.

c) En [2,10] nos falta estudiar la función en $x = 10$:

$f(10) = 130 \rightarrow$ Tiene un máximo en $x = 10$.

d) El mínimo está en $x = 7$.

e) Nos falta estudiar la función en $x = 1$:

$f(1) = 49 \rightarrow$ Tiene dos mínimos en $x = 7$ y $x = 1$.

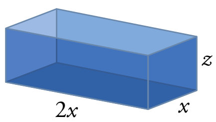
f) Nos falta estudiar la función en $x = 0$:

$f(0) = 0 \rightarrow$ El mínimo está en $x = 0$.

2 **Se quiere construir una pecera de metacrilato ortoédrica abierta por arriba, cuya base es un rectángulo el doble de largo que de ancho y con capacidad de 36 dm³. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para minimizar el gasto de material?**

Si el lado menor de la base está comprendido entre:

a) 1 dm y 2 dm **b) 4 dm y 6 dm** **c) Sin restricciones**



$$V = 36 = 2xxz = 2x^2z \rightarrow z = \frac{18}{x^2}$$

$$S(x) = 2xz + 4xz + 2x^2 = 6xz + 2x^2$$

Sustituimos z en $S(x) = \dfrac{108}{x} + 2x^2$, donde $x > 0$.

a) $x \in [1, 2]$

Veamos los puntos singulares de la función, si pertenecen al intervalo, y qué ocurre en sus extremos:

$S'(x) = -\frac{108}{x^2} + 4x = 0 \rightarrow x = 3$ está fuera de nuestro intervalo.

$S(1) = 110$

$S(2) = 62 \rightarrow$ Tiene un mínimo en $x = 2$.

Las dimensiones serán 2 dm × 4 dm × 4,5 dm.

b) $x \in [4, 6]$

Veamos qué ocurre en los extremos:

$S(4) = 59$

$S(6) = 90 \rightarrow$ Tiene un mínimo en $x = 4$.

Las dimensiones serán 4 dm × 8 dm × 1,125 dm.

c) En este caso solamente sabemos que $x > 0$, y que en $x = 3$ hay un punto singular. Veamos si es mínimo viendo cómo se comporta la función en los extremos:

$\lim_{x \to 0} S(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \infty} S(x) = +\infty \rightarrow x = 3$ es un mínimo

Las dimensiones serán 3 dm × 6 dm × 1 dm.

8 ▶ REGLA DE L'HÔPITAL

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.)

Página 332

1 **Calcula estos límites aplicando la regla de L'Hôpital:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - x^2 - 4x - 2}{x^2 - 4x - 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^4 - 4x^3 - 5x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3\, sen\, x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{ln\,(x + 1)}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x^3 - x^2 - 4x - 2)}{(x^2 - 4x - 5)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 4} = -\dfrac{1}{6}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - 5}{2x + 3} = \dfrac{-1}{7}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^4 - 4x^3 - 5x^2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 6x}{4x^3 - 12x^2 - 10x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \dfrac{6x - 6}{12x^2 - 12x - 10} = \dfrac{3}{5}$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x - 4}{2x - 8} = \dfrac{6}{2} = 3$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2}{3\, senx} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{3\, cos\, x} = \dfrac{0}{3} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx}{ln\,(x + 1)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cos\, x}{\dfrac{1}{x + 1}} = \lim\limits_{x \to 0} cos\, x\,(x + 1) = 1$

2 **Halla estos límites aplicando L'Hôpital:**

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - sen\, x}{cos\, x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{tg\, 3x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log x}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{25x^3}$

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - senx}{cos\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-cos\, x}{-senx} = \dfrac{0}{-1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{tg\, 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{(1 + tg^2\, 3x) \cdot 3} = \dfrac{5}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log\, x}{x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln 10}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln 10} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{25x^3} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{75x^2} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{150x} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{150} = \dfrac{+\infty}{150} = +\infty$

3 **Calcula** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - ln\,(1 + x)}{x\, ln\,(x + 1)}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - ln\,(1 + x)}{x\, ln\,(x + 1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(\dfrac{1}{1 + x}\right)}{ln\,(x + 1) + \dfrac{x}{x + 1}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{(x + 1)\, ln\,(x + 1) + x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\dfrac{x + 1}{x + 1} + ln\,(x + 1) + 1} = \frac{1}{2}$$

9 ▶ REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) **CE 3.4.** (EA 3.4.1.-EA 3.4.2.)

Página 334

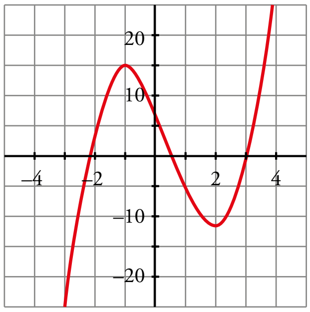
1 **Representa estas funciones:**

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \ \rightarrow \ x_1 = -1, \ x_2 = 2$

Máximo en $(-1, 15)$.

Mínimo en $(2, -12)$.



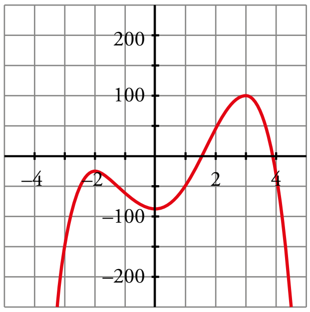
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Máximo en $(-2, -26)$ y en $(3, 99)$.

Mínimo en $(0, -90)$.



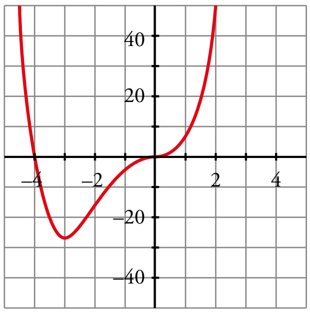
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en $(-3, -27)$.

Punto de inflexión en $(0, 0)$.

$f(x) = 0 \ \rightarrow \ x^3(x+4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(-4, 0)$.



Página 336

2 **Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:**

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

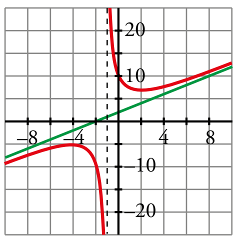
a) $$f'(x) = \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x+11)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \ \rightarrow \ x_1 = 2, \ x_2 = -4$$

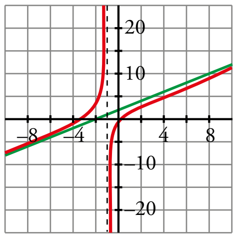
Máximo en $(-4, -5)$. Mínimo en $(2, 7)$.

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

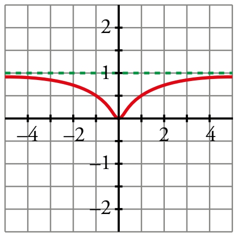


Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–3, 0)

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

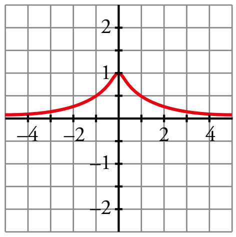
c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$



Mínimo en (0, 0).

Asíntota horizontal: $y = 1$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$

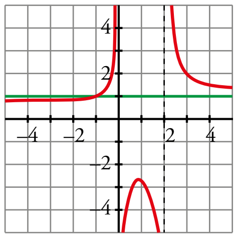


Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$$= \frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \to x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0,73 \\ x_2 = -2,73 \end{cases}$$



Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

• Asíntota horizontal:

$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ es asíntota horizontal

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

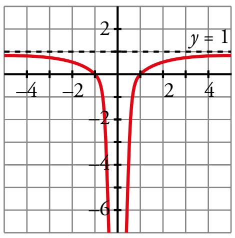
$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$

$f'(x) \neq 0 \to f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.

• Corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0).



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE 3.3. (EA 3.3.1.)

Página 337

Hazlo tú

1. Función derivada a partir de la definición

- **Dada $f(x) = \frac{x}{x+1}$, halla $f'(x)$ aplicando la definición.**

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+h)(x+1) - x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{x^2+x+hx+h-x^2-xh-x}{(x+h+1)(x+1)} =$$

$$= \frac{h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{(x+h+1)(x+1)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Reglas de derivación

- **Halla $f'(x)$ siendo: $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$**

$$f(x) = 2\,ln\,\frac{x+1}{x} = 2\,[ln(x+1) - ln\,x]$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\cdot 1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x(x+1)}$$

3. Ecuación de la recta tangente a una curva, que es paralela a una recta

- **Halla las tangentes a $y = x^3 - 2x^2$ paralelas a $y = -x$.**

Buscamos los valores por los que $f'(x) = -1$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = -1 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} \;\rightarrow\; x = 1,\; x = \frac{1}{3}$$

$f(1) = -1 \;\rightarrow\; P(1, -1)$ es punto de tangencia

La primera tangente es: $y = -1\,(x-1) - 1 \;\rightarrow\; y = -x$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} = -\frac{5}{27} \;\rightarrow\; Q\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{27}\right)$ es punto de tangencia

La segunda tangente es:

$$y = -1\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{27} \;\rightarrow\; y = -x + \frac{4}{27}$$

Página 338

Hazlo tú

4. Tangente común a dos curvas

- **Halla la tangente común a estas curvas:**

$$f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = (x - 2)^2$$

$f'(x) = 2x \rightarrow f'(a) = 2a$

$f(a) = a^2 - 1$

Definimos la recta tangente a f en el punto $(a,\ f(a))$ como:

$y = a^2 - 1 + 2a(x - a) = -a^2 - 1 + 2ax$

$g'(x) = 2(x - 2) \rightarrow g(b) = 2(b - 2)$

$g(b) = (b - 2)^2$

Definimos la recta tangente a g en el punto $(b,\ g(b))$ como:

$y = (b - 2)^2 + 2(b - 2)(x - b) = -b^2 + 4 + (2b - 4)x$

Si las dos tangentes deben ser la misma, sus coeficientes deben ser los mismos, así que:

$$\begin{cases} -a^2 - 1 = -b^2 + 4 \\ 2a = 2b - 4 \rightarrow a = b - 2 \end{cases}$$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$4b - 4 - 1 = 4 \rightarrow b = \frac{9}{4} \rightarrow a = \frac{1}{4}$$

Así la recta tangente a ambas será: $y = -\dfrac{17}{16} + \dfrac{x}{2}$

5. Tangentes trazadas desde un punto exterior a la curva

- **Halla las ecuaciones de las tangentes a la curva $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3$ trazadas desde el punto $A(1, -1)$.**

Buscamos la recta tangente que pasará por un punto $P(a,\ f(a))$ con pendiente $f'(a)$:

$f'(x) = x - 2 \rightarrow f'(a) = a - 2$

$$f(a) = \frac{a^2}{2} - 2a + 3$$

La recta será: $y = f(a) + f'(a)(x - a) = \dfrac{a^2}{2} - 2a + 3 + (a - 2)(x - a) \rightarrow y = -\dfrac{a^2}{2} + 3 + (a - 2)x$

Además sabemos que esta recta pasa por el punto $A(1, -1)$:

$$-1 = -\frac{a^2}{2} + 3 + (a - 2) \rightarrow -\frac{a^2}{2} + a + 2 = 0 \rightarrow a = 1 \pm \sqrt{5}$$

Tenemos dos puntos de tangencia y dos rectas, ambas pasan por A:

$$P\left(1 + \sqrt{5}, 4 - \sqrt{5}\right) \text{ y recta } y = -\frac{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2}{2} + 3 + x\left(-1 + \sqrt{5}\right)$$

$$Q\left(1 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{5}\right) \text{ y recta } y = -\frac{\left(1 - \sqrt{5}\right)^2}{2} + 3 + x\left(-1 - \sqrt{5}\right)$$

6. Coeficientes de una función

- **Calcula los coeficientes a, b, c de la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ para que pase por (0, 5) y tenga un punto singular en (2, –3).**

Pasa por (0, 5) $\to$ $f(0) = c = 5$

Pasa también por su punto singular (2, –3) $\to$ $f(2) = 8a + 2b + 5 = -3$ (1)

Además si es punto singular, en $x = 2$ se anula la derivada de f:

$f'(x) = 3ax^2 + b \to f'(2) = 12a + b = 0 \to b = -12a$

Sustituimos en (1): $-16a = -8 \to a = \dfrac{1}{2} \to b = -6$

La solución buscada es $y = \dfrac{1}{2}x^3 - 6x + 5$

Página 339

Hazlo tú

7. Puntos singulares. Intervalos de crecimiento y decrecimiento

- **a) Halla los puntos singulares de la función:**

$$f(x) = x^3 - 12x - 8$$

b) Escribe sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \to x = \pm 2$ tenemos dos puntos singulares:

$P(2, -24)$

$Q(-2, 8)$

Estudiemos sus ramas infinitas para ver si se trata de mínimos o de máximos:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Por tanto: P es mínimo, Q es máximo.

b) Para ello debemos estudiar el signo de su derivada:

Si $x < -2 \to f'(x) > 0$

Si $-2 < x < 2 \to f'(x) < 0$

Si $2 < x \to f'(x) > 0$

Por tanto:

f decrece en $(-2, 2)$ y crece en $(-\infty, -2)$ y $(2, +\infty)$.

8. Problema de optimización

- **De todos los rectángulos de 36 m de perímetro, halla las dimensiones del que tiene la mayor superficie.**

Llamamos b y h a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

Como el perímetro es 36, se tiene que $2b + 2\text{h} = 36 \to \text{h} = 18 - b$

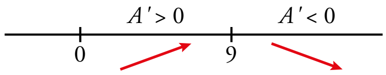
Buscamos el rectángulo de área máxima:

$A = b\text{h} = b(18 - b)$

Hallamos los puntos singulares:

$A' = 0 \to A' = 18 - 2b = 0 \to b = 9$

Estudiamos si el valor obtenido es un máximo:



Por tanto, para $b = 9$ el área es máxima.

Calculamos h: $h = 18 - 9 = 9$ y obtenemos el área máxima $A = 81\ m^2$.

Página 340

Hazlo tú

9. Estudio y representación de una función polinómica

- **Estudia y representa esta función:**

$$f(x) = 1 + (x - 3)^3$$

Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [1 + (x - 3)^3] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 + (x - 3)^3] = -\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3(x - 3)^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$

Como $f(3) = 1$, el punto $(3, 1)$ es el único punto singular.

- Crecimiento y decrecimiento:

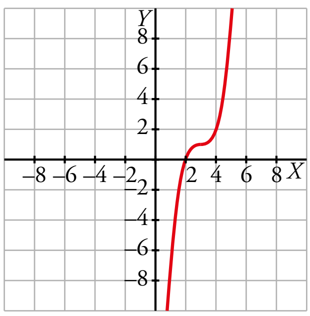
Como $f'(x) = 3(x - 3)^2 > 0$ para todo $x \neq 3$, la función crece a ambos lados de $x = 3$ y no es ni máximo ni mínimo.

- Cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = -26$

$y = 0 \rightarrow 1 + (x - 3)^3 = 0 \rightarrow (x - 3)^3 = -1 \rightarrow x = 2$

- Gráfica:



10. Estudio y representación de una función racional

- **Estudia y representa esta función:**

$$f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}$$

La función no está definida en $x = 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical: $x = 0$

  Posición:

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

- Asíntotas horizontales y oblicuas:

  Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tiene una asíntota oblicua. Dividimos:

  $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} \;\to\;$ La asíntota es $y = 2x$

  Posición:

  Si $x \to -\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} < 0$. Curva bajo la asíntota.

  Si $x \to +\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} > 0$. Curva sobre la asíntota.

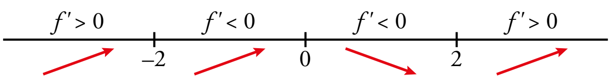
- Puntos singulares:

  $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

  $f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \;\to\; 2x^2 - 8 = 0 \;\to\; x = -2,\; x = 2$

  $f(-2) = -8$, $f(2) = 8$. Por tanto, $(-2, -8)$ y $(2, 8)$ son los puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:



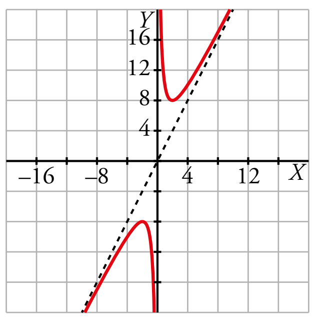
- Cortes con los ejes:

  No corta al eje OY.

  $y = 0 \;\to\; \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \;\to\; 2x^2 + 8 = 0$ No tiene solución (no corta al eje OX).

- Gráfica:

  $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$



Página 341

Hazlo tú

11. Función derivada de funciones definidas «a trozos»

- **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - 1 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

a) Llamamos $f_1(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$ y $f_2(x) = 2x - 5$

Ambas funciones son continuas.

$\left.\begin{array}{l} f_1(4) = \dfrac{4^2}{4} - 1 = 3 \\ f_2(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3 \end{array}\right\}$ Como ambas coinciden, la función es continua en $x = 4$.

$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = \dfrac{x}{2} \to f'_1(4) = 2 \\ f'_2(x) = 2 \to f'_2(4) = 2 \end{array}\right\}$ Como coinciden, la función es derivable en $x = 4$ y $f'(4) = 2$.

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

b) Llamamos $g_1(x) = 3 - x$ y $g_2(x) = x^2 + 3$

Ambas funciones son continuas.

$\left.\begin{array}{l} g_1(-1) = 3 - (-1) = 4 \\ g_2(-1) = (-1)^2 + 3 = 4 \end{array}\right\}$ Como ambas coinciden, la función es continua en $x = -1$.

$\left.\begin{array}{l} g'_1(x) = -1 \to g'_1(-1) = -1 \\ g'_2(x) = 2x \to g'_2(-1) = -2 \end{array}\right\}$ Como son distintas, la función no es derivable en $x = -1$.

La función derivada es $g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Página 342

Hazlo tú

12. Parámetros para que una función sea continua y derivable

- **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en el punto que se indica:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 4x - b & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

Llamamos $f_1(x) = ax^2 + 1$ y $f_2(x) = 4x - b$.

Ambas funciones son continuas.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$, se debe cumplir que $f_1(2) = f_2(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 4a + 1 \\ f_2(2) = 8 - b \end{array}\right\} \text{ Por tanto: } 4a + 1 = 8 - b$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$, se debe cumplir que $f'_1(2) = f'_2(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = 2ax \to f'_1(2) = 4a \\ f'_2(x) = 4 \to f'_2(2) = 4 \end{array}\right\} \text{ Luego } 4a = 4$$

Resolvemos el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{r} 4a + 1 = 8 - b \\ 4a = 4 \end{array}\right\} \to a = 1,\ b = 3$$

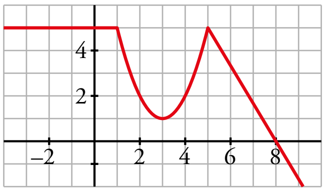
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.2.)

Página 343

1. Derivadas sobre la gráfica

- **Observando la gráfica de esta función $y = f(x)$:**



a) Hallar el valor de $f'(-2)$, $f'(3)$, $f'(6)$.

b) ¿Para qué valores de x es $f'(x) < 0$?

a) $f'(-2) = 0$ porque es constante en las proximidades de $x = -2$.

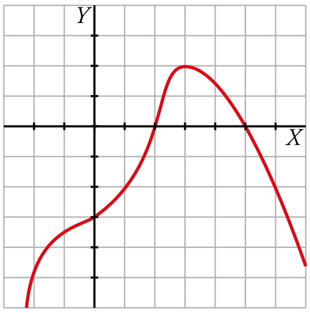
$f'(3) = 0$ porque en $x = 3$ hay un mínimo.

$f'(6) = -\frac{5}{3}$ porque la gráfica es la recta $y = \frac{-5x + 40}{3}$ con pendiente $-\frac{5}{3}$.

b) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$ porque la función es decreciente en estos intervalos.

2. Función polinómica

- **Representar una función polinómica sabiendo que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, que sus puntos de tangente horizontal son (0, –3) y (3, 2), y que corta al eje X solo en $x = 2$ y en $x = 5$.**



3. Producto máximo

- **De todos los pares de números mayores que 0 cuya suma es igual a 12, hallar aquel cuyo producto del cuadrado del mayor por el menor es máximo.**

Buscamos dos números x e y que cumplen:

$x = 2a$, $y = 2t$

donde $t > a > 0$; $a, t \in \mathbb{N}$

Además: $x + y = 12 \to 2a + 2t = 12 \to x = 6 - t$

Definimos la función: $f(t) = (2t)^2\ 2(6 - t) = 48t^2 - 8t^3$

Buscamos sus puntos singulares:

$f'(t) = -24t^2 + 96t = 0 \to t = 0;\ t = \frac{96}{24} = 4$

Descartamos la primera solución ya que por el enunciado sabemos que ninguno de los dos números puede ser 0, por lo que tenemos el punto singular (4, 256) de $f(t)$.

Si $t \in (0, 4) \to f' > 0 \to f$ creciente

Si $t > 4 \to f' < 0 \to f$ decreciente

Por lo que hemos encontrado un máximo. Por tanto, los números son:

$$x = 2a = 4$$

$$y = 2t = 8$$

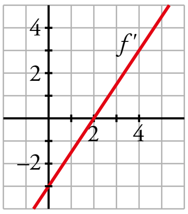
4. Gráfica de la función derivada

- **Esta es la gráfica de f', función derivada de f.**

  a) Obtener $f'(0)$, $f'(2)$ y $f'(4)$.

  b) ¿Tiene f algún punto singular?

  c) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de f.



a) $f'(0) = -3 \quad f'(2) = 0 \quad f'(4) = 3$

b) En $x = 2$ se anula la derivada primera. Además, esta es negativa a la izquierda de 2 y positiva a la derecha. Por tanto, la función pasa de decreciente a creciente en $x = 2$ y este punto es un mínimo.

c) La función decrece en $(-\infty, 2)$ y crece en $(2, +\infty)$.

5. Regla de la cadena

- **Si $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $g(2) = 3$, $g'(2) = 1$, ¿cuál es la ecuación de la tangente a $y = g[f(x)]$ en $x = 1$?**

$g[f(1)] = g(2) = 3$

$D[g[f(1)]] = g'[f(1)] \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 1 \cdot (-1) = -1$

La ecuación de la recta tangente es $y = -1(x - 1) + 3$, es decir, $y = -x + 4$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 344

Para practicar

Tasa de variación media. Definición de derivada

1 **Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:**

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2-x)^3$ **c)** $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{f(3)-f(1)}{2}$

a) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{1/3-1}{2} = -\dfrac{1}{3} \rightarrow$ Decrece

b) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{-1-1}{2} = -1 \rightarrow$ Decrece

c) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{7-1}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

d) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{8-2}{2} = 3 \rightarrow$ Crece

2 **a) Halla la T.V.M. de las funciones** $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ **y** $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ **en el intervalo [1, 1 + h].**

b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo [1; 1,5] utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

a) Para la función $f(x)$:

T.V.M. [1, 1 + h] $= \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{-(1+h)^2+5(1+h)-3-1}{h} = \dfrac{-1-2h-h^2+5+5h-4}{h} = 3-h$

Para la función $g(x)$:

T.V.M. [1, 1 + h] $= \dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{1+h+1}-\dfrac{1}{2}}{h} = \dfrac{\dfrac{2-h-2}{2(2+h)}}{h} = \dfrac{-1}{2h+4}$

b) Para la función $f(x)$:

T.V.M. [1; 1,5] = 3 – 0,5 = 2,5

Para la función $g(x)$:

T.V.M. [1; 1,5] $= \dfrac{-1}{2\cdot 0{,}5+4} = \dfrac{-1}{5}$

3 **a) Compara la T.V.M. de las funciones** $f(x) = x^3$ **y** $g(x) = 3^x$ **en los intervalos [2, 3] y [3, 4], y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.**

b) Calcula el crecimiento en el punto $x = -1$ **de** f **y de** g**.**

a) Para $f(x)$: T.V.M. [2, 3] = 19

T.V.M. [3, 4] = 37

Para $g(x)$: T.V.M. [2, 3] = 18

T.V.M. [3, 4] = 54

b) En [2, 3] crece más $f(x)$.

En [3, 4] crece más $g(x)$.

4 **Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba y su posición viene dada por la función $s(t) = 30t - 5t^2$, donde $s(t)$ es la distancia al suelo en metros y t el tiempo en segundos. Calcula.**

a) La velocidad media entre $t = 0$ y $t = 3$.

b) La velocidad instantánea en $t = 2$ y en $t = 3$.

a) $\dfrac{s(3)-s(0)}{3-0} = \dfrac{45}{3} = 15$ m/s

b) $s'(x) = 30 - 10t$

$s'(2) = 10$ m/s es la velocidad instantánea en $t = 2$

$s'(3) = 0$ m/s es la velocidad instantánea en $t = 3$

5 **Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ b) $f(x) = (2x + 1)^2$ c) $f(x) = 3/x$ d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h)^2-1-2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h^2+2h)-3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3+3h^2+6h-3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3h+6)}{h} = 6$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2(1+h)+1)^2-9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2h+3)^2-9}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h^2+9+12h-9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(4h+12)}{h} = 12$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3/(1+h)-3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3-3-3h}{h(1+h)} = -3$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(1+h+2)^2}-\dfrac{1}{9}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{9-h^2-6h-9}{9(h+3)^2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h^2-6h}{9h(h+3)^2} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h-6}{9(h+3)^2} = \dfrac{-2}{27}$

6 **Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de las rectas tangentes a las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{3x-7}$ en $x = 2$.**

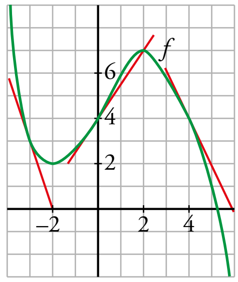
- $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{4(2+h)-(2+h)^2-4}{h} = \dfrac{8+4h-4-4h-h^2-4}{h} = -h$

  $f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-h) = 0$

- $\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3(2+h)-7}-(-1)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3h-1}+1}{h} = \dfrac{3}{3h-1}$

  $g'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{3h-1} = -3$

7 **Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.**



a) ¿Cuál es el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

c) En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

a) $f'(-3) = -3 \qquad f'(0) = \frac{3}{2} \qquad f'(4) = -2$

b) En $x = -2$ y $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada es positiva porque la pendiente de la tangente lo es. Análogamente, la derivada en $x = 3$ es negativa.

8 **Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:**

a) $f(x) = \dfrac{(5x-3)}{2}$ **b)** $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$ **d)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

a) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{5(x+h)-3}{2} - \frac{5x-3}{2}}{h} = \frac{5x+5h-3-5x+3}{2h} = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

b) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+7(x+h)-1-(x^2+7x-1)}{h} = \frac{x^2+2hx+h^2+7x+7h-1-x^2-7x+1}{h} =$$

$$= 2x + h + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h + 7) = 2x + 7$$

c) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-5(x+h)-(x^3-5x)}{h} = \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-5x-5h-x^3+5x}{h} =$$

$$= 3x^2 + 3hx + h^2 - 5$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 - 5) = 3x^2 - 5$$

d) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{x+h-1}{x+h} - \frac{x-1}{x}}{h} = \frac{x(x+h-1)-(x+h)(x-1)}{hx(x+h)} = \frac{x^2+hx-x-(x^2-x+hx-h)}{hx(x+h)} =$$

$$= \frac{1}{x(h+x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x(h+x)} = \frac{1}{x^2}$$

Reglas de derivación

9 **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$

b) $f(x) = 3\cos(2x + \pi)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{7x+1} + \dfrac{\sqrt{2x}}{3}$

f) $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

h) $f(x) = \ln 3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \dfrac{tg\, x}{2}$

j) $f(x) = \sqrt{3}\, arc\, sen\, 2x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = x^2 + 14x - 4$

b) $f(x) = -3\cos 2x$

$f'(x) = -3(-sen\, 2x) \cdot 2 = 6 sen\, 2x$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) Teniendo en cuenta que $\dfrac{\sqrt{2x}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{x}$:

$f'(x) = \dfrac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-7}{(7x+1)^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = 1 \cdot sen\, \dfrac{x}{2} + x \cdot \cos \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = sen\, \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = (x-4)^{-1/2}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x-4)^{-3/2} = -\dfrac{1}{2(x-4)\sqrt{x-4}}$

h) $f(x) = \ln 3 + \ln x + e^{-x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + e^{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} - e^{-x}$

i) $f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\, x}{2}$ o también $f'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x}$

j) $f'(x) = \sqrt{3}\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-4x^2}}$

10 Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.

a) $f(x) = (5x - a)^3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3x} + \frac{x}{a}\right)^4$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(6-x)^2}$

d) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}$

f) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$

h) $f(x) = tg^3\, x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$

j) $f(x) = arc\ tg\ \frac{x^2}{3}$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f(x) = \frac{1}{81}\left(\frac{1}{x} + x\right)^4$

$$f'(x) = \frac{4}{81}\left(\frac{1}{x}+x\right)^3\left(-\frac{1}{x^2}+1\right) = \frac{4}{81}\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^3\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{4}{81}\,\frac{(x^4-1)(x^2+1)^2}{x^5}$$

c) $f(x) = (6-x)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(6-x)^{-1/3}(-1) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{6-x}}$$

d) $f(x) = \frac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$$f'(x) = e^{-2x}\cdot(-2) = -2e^{-2x}$$

e) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}}\cdot\frac{3x^2(x^2-4)-x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^3}}\,\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}\,\frac{x(x^3-12x)}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}\cdot\frac{x^3-12x}{(x^2-4)^2}$$

f) $$f'(x) = \frac{3x^2}{8}e^{2x+1} + \frac{x^3}{8}e^{2x+1}\cdot 2 = \frac{e^{2x+1}}{8}(2x^3+3x^2)$$

g) $$f'(x) = 3x^2\cos^2 3x + x^3\cdot 2\cos 3x\cdot(-\mathrm{sen}\,3x)\cdot 3 = 3x^2[\cos^2 3x - 2x\cos 3x\ \mathrm{sen}\,3x] = 3x^2[\cos^2 3x - x\ \mathrm{sen}\,6x]$$

h) $$f'(x) = 3tg^2\,x^2\cdot(1+tg^2\,x^2)\cdot 2x = 6x\,tg^2\,x^2\cdot(1+tg^2\,x^2)$$

i) $f(x) = \sqrt{7}\sqrt{\ln x}$

$$f'(x) = \sqrt{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{\ln x}}$$

j) $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{x^2+9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{x^2+9}$$

11 **Deriva las siguientes funciones:**

a) $f(t) = \sqrt{t} \cdot \left(\frac{3t+5}{32}\right)$

b) $f(t) = \frac{3t^2+2t}{1-t}$

c) $f(t) = \frac{t}{\ln t} + (\ln t)^2$

d) $f(t) = \sqrt{e^{3t-2}}$

e) $f(t) = \sqrt[3]{\frac{t^2+1}{2t}}$

f) $f(t) = \cos\left(\frac{3t+\pi}{2}\right) + tg^2\, t$

a) $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\frac{3t+5}{32}\right) + \sqrt{t}\left(\frac{3}{32}\right) = \frac{3t+5}{64\sqrt{t}} + \frac{3\sqrt{t}}{32} = \frac{9t+5}{64\sqrt{t}}$

b) $f'(t) = \frac{(6t+2)(1-t)-(3t^2+2t)(-1)}{(1-t)^2} = \frac{-3t^2+6t+2}{(1-t)^2}$

c) $f'(t) = \frac{\ln t - t/t}{(\ln t)^2} + 2\ln t\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(\ln t)^2} + \frac{2\ln t}{t}$

d) $f'(t) = \frac{3}{2}e^{3t-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^{3t-2}}} = \frac{3\sqrt{e^{3t-2}}}{2}$

e) $f'(t) = \frac{1}{3\left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(2t^2)^2-2t^2-2}{4t^2} = \frac{t^2-1}{2t^2\,3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(t+\frac{1}{t}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{t^2-1}{3\sqrt[3]{2}\,t^2\left(t+\frac{1}{t}\right)^{\frac{2}{3}}}$

f) $f'(t) = -\frac{3}{2}sen\left(\frac{(3t+\pi)}{2}\right) + \frac{2tg\,t}{\cos^2 t} = -\frac{3}{2}\left(sen\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3t}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{2tg\,t}{\cos^2 t} =$

$= -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{3t}{2}\right) + \frac{2tg\,t}{\cos^2 t}$

12 **Deriva las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \sqrt{arc\cos e^x}$

b) $f(x) = \log(sen\, x^2)$

c) $f(x) = sen^2\, x + e^{\cos x}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{2x}}{2^{x-1}}$

e) $f(x) = e^{sen\, x} \cdot \ln tg\, x$

f) $f(x) = 3\cos(\ln x)$

g) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

h) $f(x) = arc\,tg\,\frac{1-x}{1+x}$

i) $f(x) = 7^{\sqrt{x}} + \frac{\cos x}{x^2}$

j) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{arc\cos e^x}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x = \frac{-e^x}{2\sqrt{arc\cos e^x\,(1-e^{2x})}}$

b) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{x}{x^2+1}} = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{x}{x^2+1}} \cdot \frac{1(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{x^2+1}{x}\,\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{2x(x^2+1)}$

c) $f'(x) = 2sen\,x\cos x + e^{\cos x}(-sen\,x) = sen\,2x - sen\,x \cdot e^{\cos x}$

d) $f(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \dfrac{x^{1/4}}{2^{x-1}}$

$$f'(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot x^{-3/4} \cdot 2^{x-1} - x^{1/4} \cdot 2^{x-1} \cdot ln\, 2 \cdot 1}{(2^{x-1})^2} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - ln\, 2 \sqrt[4]{x}}{2^{x-1}} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1 - 4x\, ln\, 2}{2^{x+1} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$$

e) $f'(x) = e^{sen\, x} \cdot cos\, x \cdot ln\, tg\, x + e^{sen\, x} \cdot \dfrac{1}{tg\, x} \cdot \dfrac{1}{cos^2 x} = e^{sen\, x}\left(cos\, x \cdot ln\, tg\, x + \dfrac{1}{sen\, x\, cos\, x}\right)$

f) $f'(x) = 3\,[-sen\,(ln\, x)] \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-3\, sen\,(ln\, x)}{x}$

g) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \dfrac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x}}$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2} \dfrac{-1\,(1+x) - (1-x)\,1}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2} \dfrac{-2}{(x+1)^2} = \dfrac{-2}{2+2x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

i) $f'(x) = 7^{\sqrt{x}} \cdot ln\, 7 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{-sen\, x \cdot x^2 - cos\, x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{ln\, 7 \cdot 7^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x\, sen\, x + 2\, cos\, x}{x^3}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x\,(1-e^{-2x})}{e^x\,(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$$f'(x) = \frac{-e^{-2x}\,(-2)\,(1+e^{-2x}) - (1-e^{-2x})\,e^{-2x}\,(-2)}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{2e^{-2x}\,(1+e^{-2x}) + 2e^{-2x}\,(1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$$

13 **Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:**

a) $f(x) = ln\, \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = ln\, \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ **c)** $f(x) = ln\,(x \cdot e^{-x})$

d) $f(x) = log\, \dfrac{(3x-5)^3}{x}$ **e)** $f(x) = log\,(tg\, x)^2$ **f)** $f(x) = log\, \dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$

a) $f(x) = ln\,(x^2+1) - ln\,(x^2-1)$

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{x^4-1} = \dfrac{-4x}{x^4-1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}\,[ln\, x - ln\,(x^2+1)]$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{2x}{x^2+1}\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \dfrac{1-x^2}{2x^3+2x}$

c) $f(x) = ln\, x + ln\, e^{-x} = ln\, x - x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$

d) $f(x) = 3\, log\,(3x-5) - log\, x$

$f'(x) = 3 \cdot \dfrac{3}{3x-5} \cdot \dfrac{1}{ln\, 10} - \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln\, 10} = \dfrac{1}{ln\, 10}\left[\dfrac{9}{3x-5} - \dfrac{1}{x}\right] =$

$= \dfrac{1}{ln\, 10} \cdot \dfrac{9x - 3x + 5}{(3x^2 - 5x)} = \dfrac{6x+5}{ln\, 10\,(3x^2-5x)}$

e) $f(x) = 2\ log\ (tg\ x)$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1 + tg^2\ x}{tg\ x} \cdot \frac{1}{ln\ 10} = \frac{2\,(1 + tg^2\ x)}{tg\ x \cdot ln\ 10}$$

f) $f(x) = -\frac{x}{2} log(e)$

$$f'(x) = -\frac{log(e)}{2}$$

Página 345

Recta tangente y recta normal

14 **Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función f en el punto de abscisa indicado en cada caso.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $f(x) = \frac{2 - x}{x^3}$ **en** $x = -1$

d) $f(x) = ln\ x$ **en** $x = e^2$

e) $f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **en** $x = \frac{\pi}{3}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangente es $y = -1(x - 2) + 0$, es decir, $y = -x + 2$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-1}(x - 2) + 0$, es decir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \frac{1}{4}$

La recta tangente es $y = \frac{1}{4}(x - 3) + 2$, es decir, $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

La recta normal es $y = \frac{-1}{1/4}(x - 3) + 2$, es decir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \frac{-1 \cdot x^3 - (2 - x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{2x - 6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangente es $y = -8(x + 1) - 3$, es decir, $y = -8x - 11$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-8}(x + 1) - 3$, es decir, $y = \frac{1}{8}x - \frac{23}{8}$

d) $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \frac{1}{e^2}$

La recta tangente es $y = \frac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = \frac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal es $y = \frac{-1}{1/e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangente es $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$, es decir, $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$

15 Comprobamos. **[El alumnado puede compartir sus soluciones tal y como indica esta técnica].**

Determina los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$ **b)** $y = \frac{x}{x+2}$ **c)** $y = 4\sqrt{x+3}$ **d)** $y = ln\,(4x - 1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2$

b) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow (x+2)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow \sqrt{x+3} = 1 \rightarrow x = -2$

d) $f'(x) = \frac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \frac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow 4x - 1 = 2 \rightarrow x = \frac{3}{4}$

16 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a f, que sea paralela a la recta dada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paralela a** $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paralela a** $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ **paralela a** $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \rightarrow y = -2x - 1$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente –2 para que sea paralela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \rightarrow 2x + 4 = -2 \rightarrow x = -3$

$f(-3) = -2$ y la recta tangente es $y = -2(x+3) - 2$.

b) La recta tangente debe tener pendiente 6 para que sea paralela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \rightarrow 3x^2 - 3 = 6 \rightarrow x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \to f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \to f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \to y = 5x$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente 5 para que sea paralela.

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 5 \to \frac{5}{(x+2)^2} = 5 \to (x+2)^2 = 1 \to x_1 = -1,\ x_2 = -3$$

Si $x = -1 \to f(-1) = -4$

La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x + 1) - 4$

Si $x = -3 \to f(-3) = 6$

La recta tangente en $x = -3$ es $y = 5(x + 3) + 6$

17 **Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.**

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ **b)** $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ **c)** $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$ **e)** $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

Los puntos donde la recta tangente es horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 6x - 2$

$$f'(x) = 0 \to 6x - 2 = 0 \to x = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{14}{3}$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \to 6x^2 - 6x = 0 \to x = 0,\ x = 1$

$f(0) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(1) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 0$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \to 4x^3 - 12x^2 = 0 \to x = 0,\ x = 3$

$f(0) = 0 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(3) = -27 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y = -27$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = 16 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$.

$f(2) = -16 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

e) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \to \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x^2 - 1 = 0 \to x = -1,\ x = 1$$

$f(-1) = 1 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y = -2$.

$f(1) = 1 \to$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 2$.

f) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

18 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen haciendo $y = 0$.

$y = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \rightarrow f'(-2) = 4$. La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x + 2)$

Si $x = 2 \rightarrow f'(2) = -4$. La recta tangente en $x = 2$ es $y = -4(x - 2)$

Las rectas normales son: en $x = -2$, $y = -\dfrac{1}{4}(x + 2)$ y en $x = 2$, $y = \dfrac{1}{4}(x - 2)$

Puntos singulares: crecimiento y decrecimiento

19 **Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

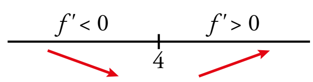
a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ **b)** $f(x) = 12x - 3x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 4$

Como $f(4) = -5$, el punto $(4, -5)$ es un punto singular.

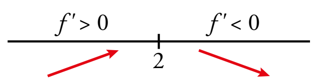


Intervalo de crecimiento $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 12 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12 - 6x = 0 \rightarrow x = 2$

Como $f(2) = 12$, el punto $(2, 12)$ es un punto singular.

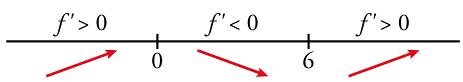


Intervalo de crecimiento $(-\infty, 2)$. Intervalo de decrecimiento $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 6$

Como $f(0) = 0$ y $f(6) = -36$, los puntos $(0, 0)$ y $(6, -36)$ son puntos singulares.

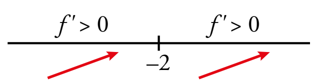


Intervalos de crecimiento $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento $(0, 6)$.

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 12x + 12 = 0 \rightarrow x = -2$

Como $f(-2) = -8$, el punto $(-2, -8)$ es un punto singular.



Intervalo de crecimiento $\mathbb{R}$.

e) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

$f' > 0$	0	$f' < 0$	1	$f' < 0$	2	$f' > 0$
$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Intervalos de crecimiento $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento $(0, 1) \cup (1, 2)$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

No tiene puntos singulares. Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq -2$ y la función no está definida en $x = -2$, los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

20 **Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:**

a) $\boldsymbol{y = x^3 + 3x}$ **b)** $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{x}}$ **c)** $\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$ **d)** $\boldsymbol{y = \ln x}$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$, la función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 0$ y no está definida en $x = 0$, los intervalos de decrecimiento son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq 0$, el intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ en su dominio de definición, el intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

21 **Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:**

a) $\boldsymbol{y = x^3 - 2x^2 + x + 2}$ **b)** $\boldsymbol{y = 3x^2 - x^3}$ **c)** $\boldsymbol{y = x^4 - 8x^2 + 10}$

d) $\boldsymbol{y = -3x^4 - 12x}$ **e)** $\boldsymbol{y = \dfrac{3}{x^2 + 1}}$ **f)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^3 + 4}{x}}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \;\to\; 3x^2 - 4x + 1 = 0 \;\to\; x = \frac{1}{3},\; x = 1$

Como $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{58}{27}$ y $f(1) = 2$, los puntos $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ y $(1, 2)$ son puntos singulares.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Por tanto $\left(\frac{1}{3}, \frac{58}{27}\right)$ es un máximo y $(1, 2)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \;\to\; 6x - 3x^2 = 0 \;\to\; x = 0,\; x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo y $(2, 4)$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \;\to\; 4x^3 - 16x = 0 \;\to\; x = -2,\; x = 0,\; x = 2$

Como $f(-2) = -6$, $f(0) = 10$ y $f(2) = -6$, los puntos $(-2, -6)$, $(0, 10)$ y $(2, -6)$ son puntos singulares.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $(-2, -6)$ y $(2, -6)$ son mínimos.

El punto $(0, 10)$ debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \;\to\; -12x^3 - 12 = 0 \;\to\; x = -1$

Como $f(-1) = 9$ el punto $(-1, 9)$ es un punto singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $(-1, 9)$ es un máximo.

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \;\to\; x = 0$

Como $f(0) = 3$, el punto $(0, 3)$ es un punto singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ Por tanto, $(0, 3)$ es un máximo.

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2}$

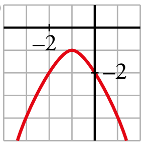
$f'(x) = 0 \;\to\; 2x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \;\to\; x = \sqrt[3]{2}$

Como $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

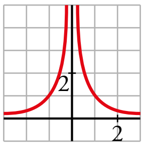
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un mínimo.

22 **Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:**

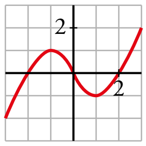
a)



b)



c)



a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gráficas de funciones polinómicas y racionales

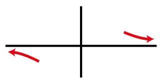
23 **De una función polinómica sabemos que:**

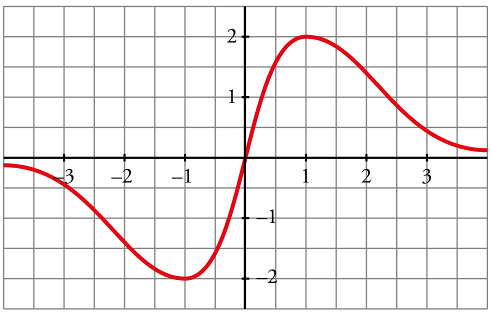
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es igual a 0 solo en (–2, 2) y en (2, –1).**
- **Corta a los ejes solo en (0, 0) y en (4, 0).**

Represéntala gráficamente.

24 **Representa una función continua $f(x)$ de la que sabemos que:**

- **Sus puntos de tangente horizontal son (–1, –2) y (1, 2).**
- **Sus ramas infinitas son así:**

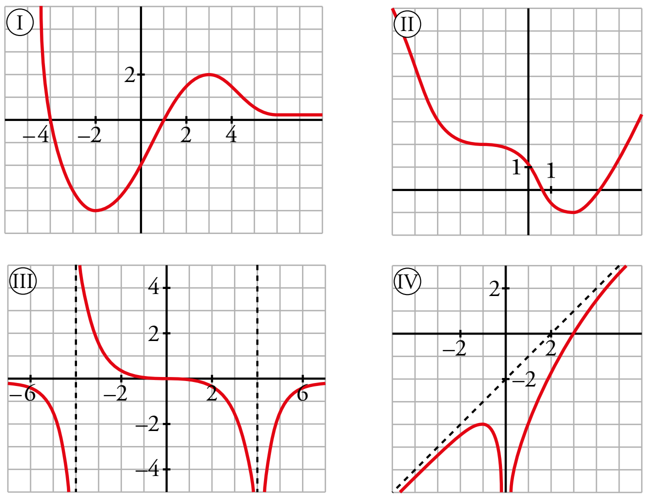




25 **En las siguientes gráficas describe:**

a) Dominio de definición, ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva repecto a ellas.

b) Puntos de tangente horizontal, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos.



a) • Función I:

$Dom = (-\infty, +\infty)$

Tiene una rama parabólica cuando $x \to -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ y la función queda por encima de la asíntota $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.

• Función II:

$Dom = (-\infty, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

No tiene asíntotas.

• Función III:

$Dom = (-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ y la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = -4$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ cuando se acerca a la asíntota por la izquierda, y a $+\infty$ cuando se acerca por la derecha.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal también cuando $x \to +\infty$ y la función queda por debajo de la asíntota.

• Función IV:

$Dom = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$. En ambos casos la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ por los dos lados.

b) • Función I:

Los puntos de pendiente horizontal son $(-2, -4)$ y $(3, 2)$.

El punto $(-2, -4)$ es un mínimo. El punto $(3, 2)$ es un máximo.

La función crece en $(-2, 3)$ y decrece en $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

- Función II:

  Tiene un punto de pendiente horizontal en (–1, 2) y otro en (–2, 2).

  El punto (–1, 2) es un mínimo. El punto (–2, 2) es un punto singular pero no es ni máximo ni mínimo.

  La función crece en (2, +∞) y decrece en (–∞, 2).

- Función III:

  Tiene un punto de pendiente horizontal en (0, 0).

  No tiene ni máximos ni mínimos.

  La función crece en (4, +∞) y decrece en (–∞, –4) ∪ (4, 4).

- Función IV:

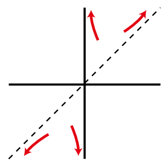
  Tiene un punto de pendiente horizontal en (–1, – 4).

  Solo tiene un punto singular, el máximo (–1, – 4).

  La función crece en (–∞, –1) ∪ (0, +∞) y decrece en (–1, 0).

Página 346

26 Comprueba que la función $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, (–1, –2) y (1, 2); sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto a las asíntotas es la que se indica en la ilustración. Represéntala.



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

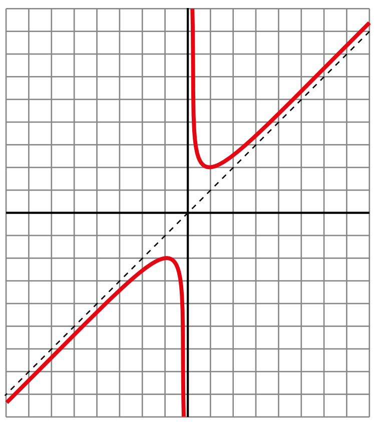
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1, \ x = 1$

Puntos (–1, –2) y (1, 2).

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asíntota vertical en $x = 0$.

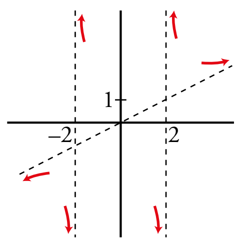
Asíntota oblicua en $y = x$.

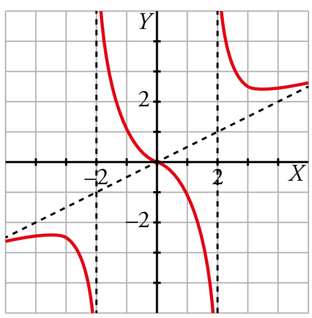


27 Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right), \ (0, 0), \ \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas a la derecha.





28 **Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

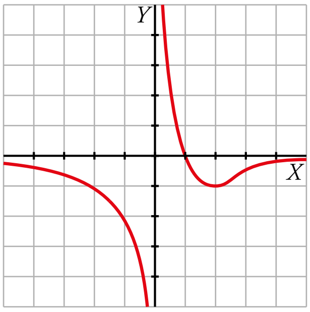
- **Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$**
- **Corta al eje X en $x = 1$.**
- **Asíntota horizontal: $y = 0$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asíntota vertical: $x = 0$**

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$
- **Mínimo en $(2, -1)$.**



29 **Representa $y = f(x)$ de la que conocemos:**

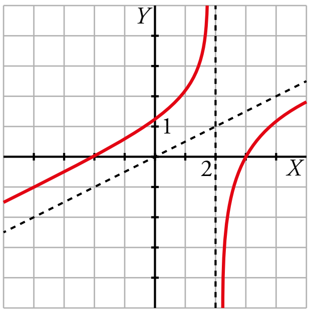
- **Asíntota vertical: $x = 2$**

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$
- **Asíntota oblicua: $y = x/2$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < x/2$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) > x/2$
- **Cortes con los ejes: $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$**



30 **Dada la función $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ comprueba que:**

- **Tiene derivada nula en $(0, 0)$.**
- **La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.**

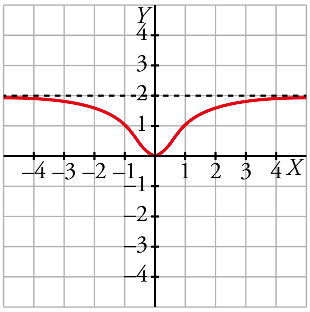
Estudia la posición de la curva con respecto a la asíntota y represéntala.

- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \to$ La derivada en $(0, 0)$ es nula.

- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 \rightarrow$ La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

Como la diferencia siempre es negativa, la función queda por debajo de la asíntota $y = 2$.



31 Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y las ramas infinitas:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ **b)** $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

c) $f(x) = 12x - x^3$ **d)** $f(x) = -x^4 + 4x^2$

a) Buscamos sus puntos singulares:

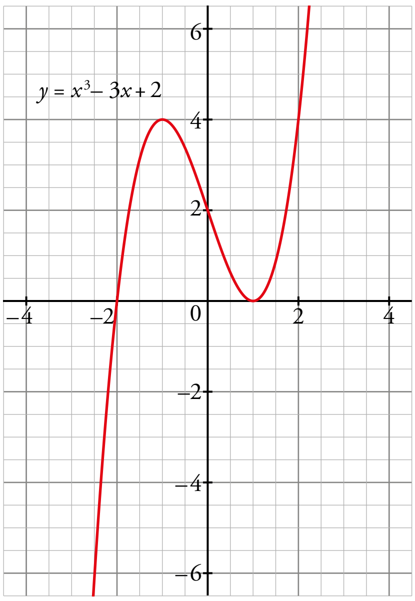
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = 1; x = -1 \rightarrow$ Puntos singulares $A(1, 0)$ y $B(-1, 4)$.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Por tanto, $A(1, 0)$ tiene que ser un mínimo y $B(-1, 4)$ un máximo:



b) Buscamos sus puntos singulares:

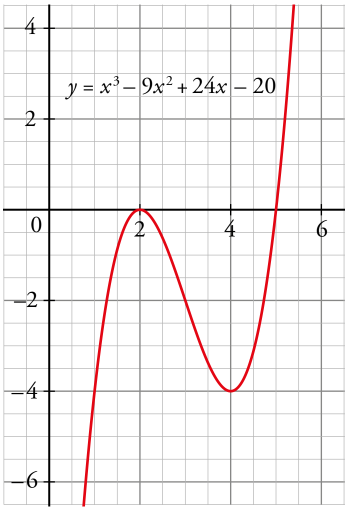
$f'(x) = 12 - 3x^2 \rightarrow x = 4, x = -2 \rightarrow A(4, -4)$ y $B(-2, 0)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Vemos que $A(4, -4)$ tiene que ser un mínimo y $B(2, 0)$ un máximo:



c) Buscamos su puntos singulares:

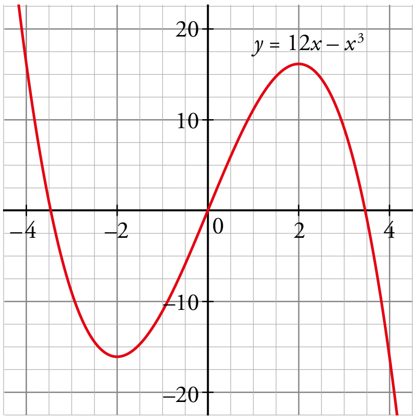
$f'(x) = 12 - 3x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2, x = 2 \;\rightarrow\; A(-2, -16)$ y $B(2, 16)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Vemos que $A(-2, -16)$ tiene que ser un mínimo y $B(2, 16)$ un máximo:



d) Buscamos su puntos singulares:

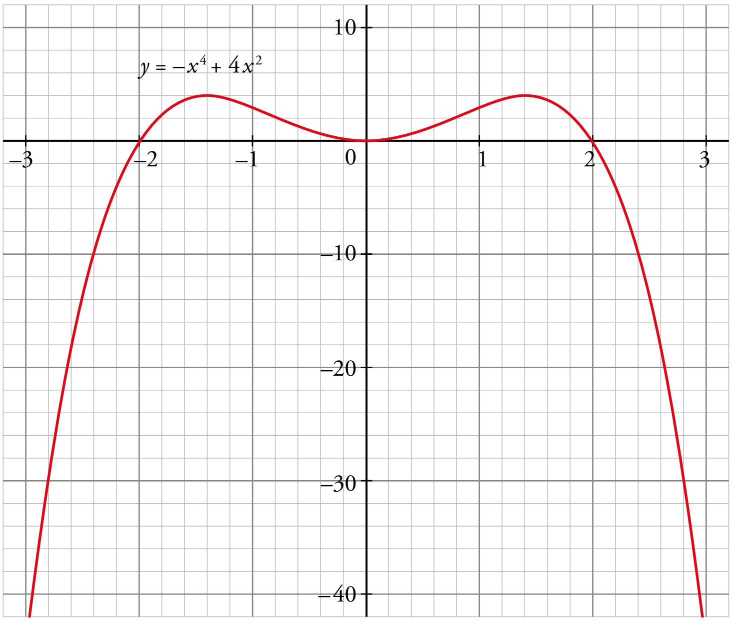
$f'(x) = -4x^3 + 8x = 0 \;\rightarrow\; x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2} \;\rightarrow\; A(0, 0),\; B\left(\sqrt{2}, 4\right),\; C\left(-\sqrt{2}, 4\right)$ son puntos singulares.

Estudiamos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Y entonces $A(0, 0)$ tiene que ser un mínimo, y $B\left(\sqrt{2}, 4\right)$ y $C\left(-\sqrt{2}, 4\right)$ son máximos:



Para resolver

32 ODS Meta 3.7. **[Tras el visionado del vídeo, se puede plantear un debate sobre la urgencia de reducir el vertido de residuos peligrosos al aire, al suelo y al agua].**

La cantidad de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 100 gramos, se puede calcular mediante la función $C(t) = 100 \cdot 0{,}68^t$.

a) Halla la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [5, 7].

b) Halla $C'(2)$ y $C'(10)$.

c) Interpreta los resultados obtenidos.

a) T.V.M. $[0,3] = \dfrac{C(3)-C(0)}{3-0} = \dfrac{100\,(0{,}68^3-1)}{3} = -22{,}85$

T.V.M. $[5,7] = \dfrac{C(7)-C(5)}{7-5} = \dfrac{100\,(0{,}68^7-0{,}68^5)}{2} = -3{,}91$

b) $C'(t) = 100 \cdot 0{,}68^t\, ln(0{,}68)$

$C'(2) = -17{,}83$

$C'(10) = -0{,}815$

Los valores de la T.V.M. nos indican que la variación decrece, es decir que cuanto más tiempo pasa menos material radioactivo queda por cada 100 g. Al inicio, entre 0 y 3 años, la cantidad de material radioactivo decrece más rápidamente.

Así, la función decrece en dichos intervalos, desde el inicio.

Además, su derivada nos confirma que sigue decreciendo a los dos y diez años, y que a los dos años decrecía más que a los diez años porque su derivada es mucho menor. La derivada nos indica la pendiente de la recta tangente en dichos puntos, que va creciendo conforme pasan los años. Es decir, la curva decreciente se va suavizando.

33 **a) Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.**

b) Halla la abscisa del vértice de una parábola cualquiera $y = ax^2 + bx + c$.

a) $f'(x) = 2x + 6 = 0 \to x = -3$

Punto (–3, 2).

b) $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2ax + b = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-b}{2a}$ es la abscisa del vértice.

$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ es la ordenada de vértice.

34 **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \;\rightarrow\; 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \;\rightarrow\; 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \;\rightarrow\; 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

35 **Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \;\rightarrow\; f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \;\rightarrow\; g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \;\rightarrow\; x = 2$$

Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 13 \;\rightarrow\; y = 10x - 7$

Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 16 \;\rightarrow\; y = 10x - 4$

36 **Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \;\rightarrow\; 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 2 \;\rightarrow\; b = \;\; 0 \\ f(1) = 1 \;\rightarrow\; 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

37 **La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?**

Despejamos y de la ecuación de la recta tangente: $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

$f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente en $x = 2$, es decir, $f'(2) = \dfrac{4}{3}$.

Como la recta tangente y la curva pasan por el punto de tangencia, $f(2) = \dfrac{4}{3} \cdot 2 + \dfrac{1}{3} = 3$.

38 **Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (0, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (2, –1) vale 0.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \ \rightarrow \ 1 = c \\ f(2) = -1 \ \rightarrow \ -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \ \rightarrow \ 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

39 **Estudia y representa.**

a) $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2 + 1}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = x^4 + 4x^3}$

c) $\boldsymbol{f(x) = x^5 - 6x^3 - 8x - 1}$ **d)** $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 8x^2 + 2}$

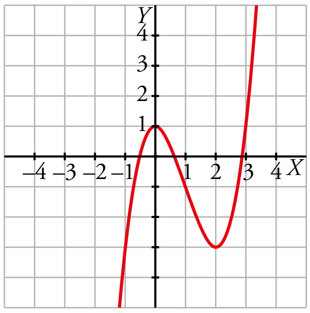
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 3x^2 - 6x = 0 \ \rightarrow \ x = 0, \ x = 2$

$f(0) = 2, \ \ f(2) = -3 \ \rightarrow$ Los puntos singulares son (0, 1) y (2, –3).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$



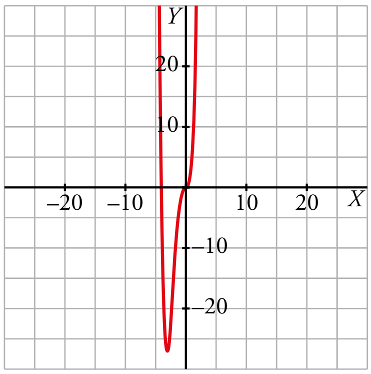
b) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 4x^3 + 12x^2 = 0 \ \rightarrow \ x = -3, \ x = 0$

$f(-3) = -27, \ f(0) = 0 \ \rightarrow$ Los puntos singulares son (–3, –27) y (0, 0).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

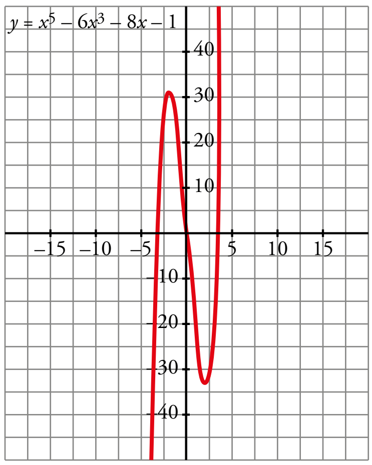


c) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ \begin{cases} x = 2 \ \rightarrow \ f(2) = -33 \ \rightarrow \ (2, -33) \\ x = -2 \ \rightarrow \ f(-2) = 31 \ \rightarrow \ (-2, 31) \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$

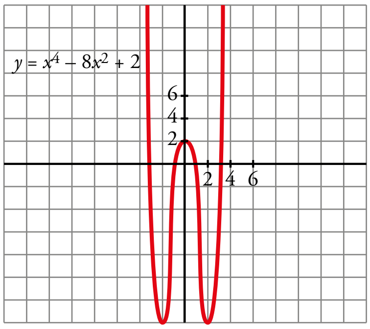


d) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \begin{cases} x = 0 \;\to\; f(0) = 2 \;\to\; (0, 2) \\ x = 2 \;\to\; f(2) = -14 \;\to\; (2, -14) \\ x = -2 \;\to\; f(-2) = -14 \;\to\; (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$



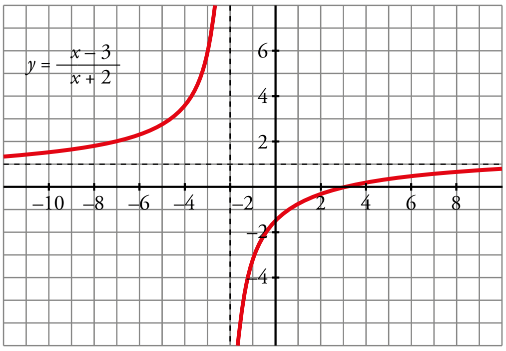
40 **Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

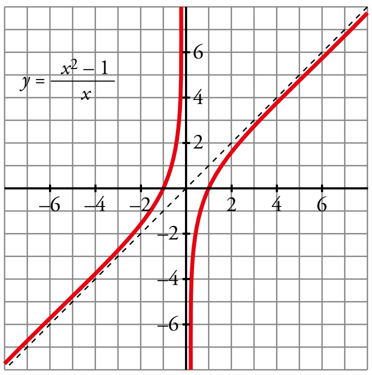
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, (3, 0).



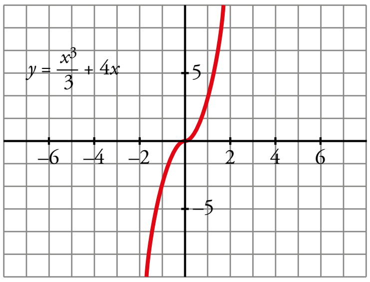
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 0)



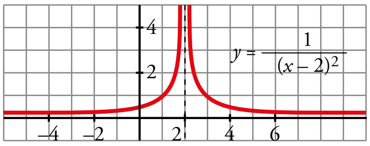
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es (0, 0).



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



41 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

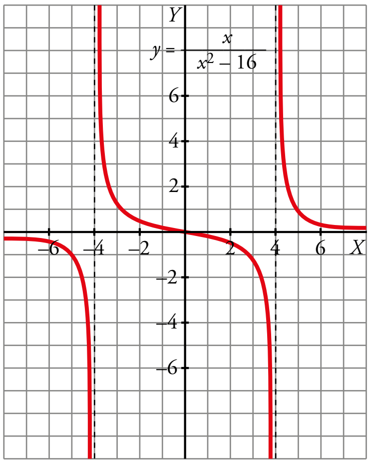
a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ **b)** $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ **c)** $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

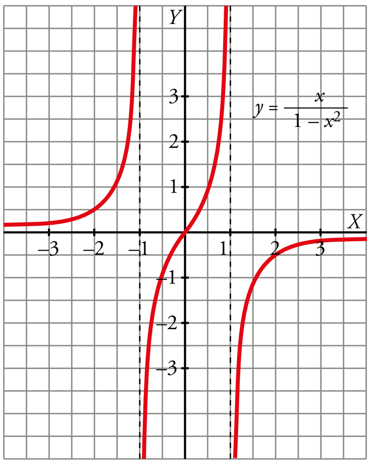


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$

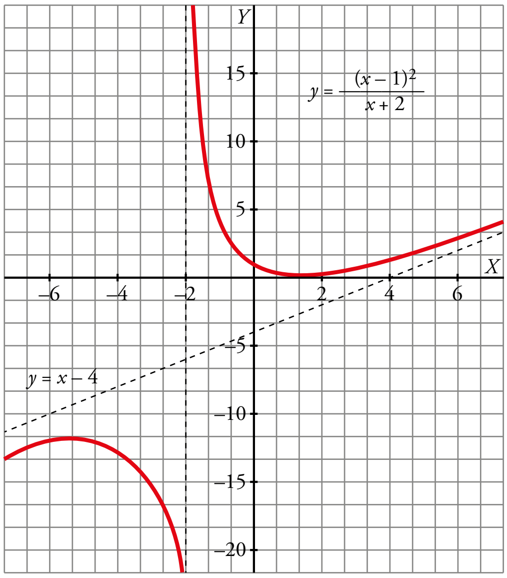
Asíntotas verticales: $x = -2$

Asíntotas oblicuas: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, 0)$, $(-5, 12)$



d) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

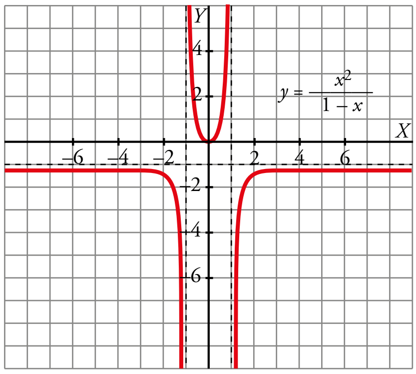
Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0)$



Página 347

42 **Halla las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

b) $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

d) $y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$

a) $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

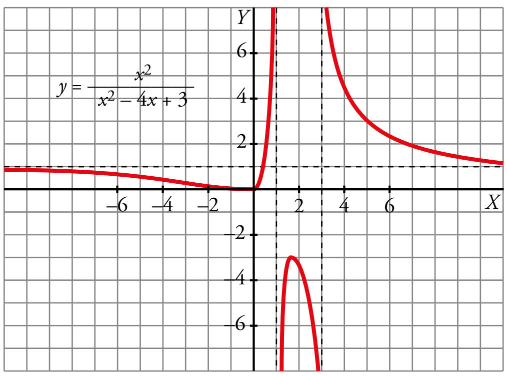
Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = 1$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(0, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$



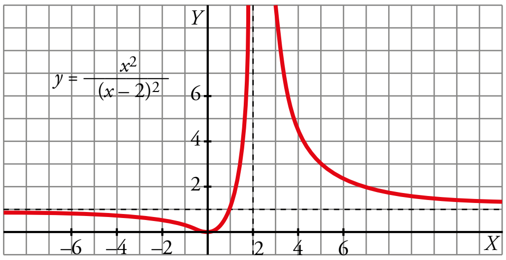
b) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x-2)^3}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son: $(0, 0)$



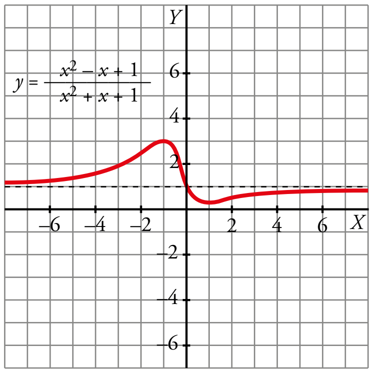
c) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

Asíntotas horizontales: $y = 1$

No hay asíntotas verticales ni oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$, $(-1, 3)$

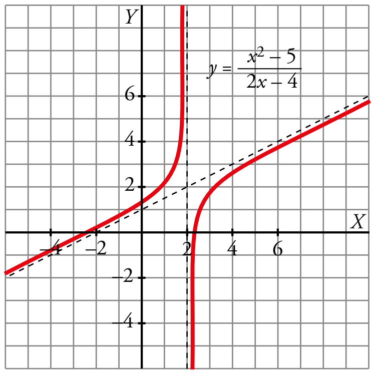


d) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{(2x-4)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.



43 **Calcula el valor de a para que $f(x) = ln\left(\dfrac{x^2}{x+a}\right)$ verifique que $f'(2) = 0$.**

$f(x) = 2ln\, x - ln\,(x + a)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+a} \to f'(2) = 1 - \dfrac{1}{2+a}$

$f'(2) = 0 \to 1 - \dfrac{1}{2+a} = 0 \to a = -1$

44 **Dadas $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a f en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$.**

Como la recta tangente en $x = -2$ es $y = 2x - 3$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 2(-2) - 3 = -7 \\ f'(-2) = 2 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$f'(-2) = 2 \to 6(-2)^2 + 24(-2) + a = 2 \to a = 26$

$f(-2) = -7 \to 2(-2)^3 + 12(-2)^2 + 26(-2) + b = -7 \to b = 13$

45 Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pase por el origen de coordenadas.

- Pendiente de la recta tangente:

  $f'(x) = 2x - 5 \rightarrow f'(1) = -3$

- Punto de tangencia: $x = 1$; $y = 1 - 5 + k \rightarrow (1, -4 + k)$
- Ecuación de la recta tangente:

  $y = -4 + k - 3(x - 1)$

- Para que pase por $(0, 0)$, debe verificarse:

  $0 = -4 + k + 3 \rightarrow k = 1$

46 Halla los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

Si la recta tangente forma un ángulo de 45° con el eje OX, su pendiente es $tg\ 45° = 1$.

Buscamos los puntos donde $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$f'(x) = 1 \rightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = -2$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, -2)$ son los que cumplen las condiciones del problema.

47 Dada la parábola $y = 5 + 6x - 3x^2$, se traza la cuerda que une los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 3$. Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola que es paralela a esa cuerda.

$f(0) = 5$ y $f(3) = -4$. Por tanto, la pendiente de la cuerda que pasa por estos puntos es $\dfrac{-4-5}{3-0} = -3$.

Tratamos de encontrar el punto que cumple la igualdad $f'(x) = -3$:

$f'(x) = 6 - 6x$

$f'(x) = -3 \rightarrow 6 - 6x = -3 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Como $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 5 + 6 \cdot \dfrac{3}{2} - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{29}{4}$, la recta tangente es $y = -3\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{29}{4}$.

48 Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, halla a y b para que f pase por el punto $(1, 3)$ y en ese punto la tangente sea paralela a la recta $y = 4x + 1$.

Pasa por $(1, 3) \rightarrow f(1) = 3 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 3 \rightarrow a + b = 3$

Para que la recta tangente sea paralela a la recta dada, $f'(1) = 4$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 4 \rightarrow 3a \cdot 1^2 + b = 4 \rightarrow 3a + b = 4$

Ahora, resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 3 \\ 3a + b = 4 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$$

49 Dadas $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, represéntalas, halla su punto de corte y comprueba que, en ese punto, tienen una tangente común.

- $f(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

Partiendo de la función x^2 solamente tenemos que trasladarla $\frac{1}{2}$ a la derecha y $\frac{3}{4}$ hacia arriba. Se trata de una parábola de vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

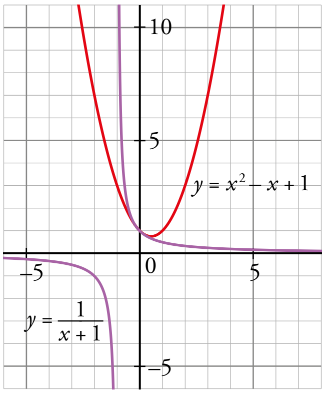
- $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Partiendo de la función $\frac{1}{x}$ solamente tenemos que trasladarla 1 unidad a la izquierda. Su asíntota vertical estará en –1.

Su punto de corte se halla en (0, 1). Veámoslo:

$f(x) = g(x) \;\to\; x^2 - x + 1 = \dfrac{1}{x+1} \;\to\; (x^2 - x + 1)(x+1) = 1 \;\to\; x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = 1 \;\to$

$\to\; x^3 = 0 \;\to\; x = 0$



Veamos que tienen una tangente igual en el punto de corte.

Sabemos que la tangente en el punto (0,1) de f se puede escribir así:

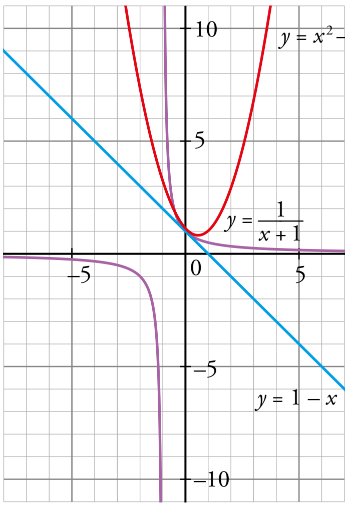
$y = f(0) + f'(0)(x-0) \;\to\; y = 1 + f'(0)\,x$

Y la de la función g: $y = 1 + g'(0)\,x$

Por lo tanto serán la misma recta si $f'(0) = g'(0)$.

$f'(x) = 2x - 1 \;\to\; f'(0) = -1$

$g'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \;\to\; g'(0) = -1 \;\to$ la recta tangente es la misma: $y = 1 - x$



50 **Halla a y b para que $f(x) = ax^2 - 1$ y $g(x) = x^2 + 3x + b$ tengan la misma tangente en $x = 2$.**

Recta tangente a f en $x = 2$: $y = f(2) + f'(2)(x-2)$

Recta tangente a g en $x = 2$: $y = g(2) + g'(2)(x-2)$

Estas dos tangentes serán iguales si $f(2) = g(2)$ y $f'(2) = g'(2)$:

- $f(2) = 4a - 1 = 10 + b = g(2)$ (*)
- $f'(x) = 2ax \to f'(2) = 4a$

  $g'(x) = 2x + 3 \to g'(2) = 7$

Por tanto: $4a = 7 \to a = \dfrac{7}{4}$

Volviendo a (*): $b = -4$

La recta tangente a ambas funciones es $y = 6 + 7(x-2)$.

51 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{1}{x-2}$ que pasa por el punto $P(4, 0)$.**

Buscamos el punto a para definir la tangente de f en a: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

$f(a) = \dfrac{1}{a-2}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2} \to f'(a) = -\dfrac{1}{(a-2)^2}$

La recta tangente es: $y = \dfrac{1}{a-2} - \dfrac{1}{(a-2)^2}(x-a)$

Queremos que dicha tangente pase por el punto $P(4, 0)$:

$0 = \dfrac{1}{a-2} - \dfrac{1}{(a-2)^2}(4-a) \to \dfrac{2(a-3)}{a-2} = 0 \to a = 3 \to y = 1-(x-3) \to y = 4-x$ es la tangente a f en $(3, 1)$ que pasa por P.

52 **Determina, en cada caso, los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo que se indica.**

a) $y = x^2 - 6x - 4,\ x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5,\ x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2,\ x \in [-2, 4]$

d) $y = \dfrac{x}{x^2+1},\ x \in [0, 2]$

Hallamos los puntos singulares que quedan dentro de los diferentes intervalos, evaluamos en ellos y en los extremos de los intervalos.

a) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \to 2x - 6 = 0 \to x = 3$

$f(0) = -4 \quad f(3) = -13 \quad f(5) = -9$

El máximo se encuentra en $x = 0$ y vale -4.

El mínimo se encuentra en $x = 3$ y vale -13.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12x + 12 = 0 \to x = 2$

$f(-1) = -24 \quad f(2) = 3 \quad f(4) = 83$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 83.

El mínimo se encuentra en $x = -1$ y vale -24.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

$f(-2) = -20 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(4) = 16$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 16.

El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale –20.

d) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

$f(0) = 0 \quad f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2} \quad f(2) = \dfrac{2}{5}$

El máximo se encuentra en $x = 1$ y vale $\dfrac{1}{2}$.

El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 0.

53 Halla los máximos y los mínimos de las funciones $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

- $y = sen\ x$

$f'(x) = cos\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3\pi}{2}$

$f(0) = 0 \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \quad f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad f(2\pi) = 0$

El máximo se encuentra en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y vale 1.

El mínimo se encuentra en $x = \dfrac{3\pi}{2}$ y vale –1.

- $y = cos\ x$

$f'(x) = -sen\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow sen\ x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$

$f(0) = 1 \quad f(\pi) = -1 \quad f(2\pi) = 1$

Los máximos se encuentran en $x = 0$ y $x = 2\pi$ y valen 1.

El mínimo se encuentra en $x = \pi$ y vale –1.

54 Estudia el crecimiento de las siguientes funciones y di cuáles son sus máximos y sus mínimos:

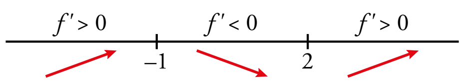
a) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ **c)** $y = ln\ (x^2 + 1)$ **d)** $y = x\ ln\ x$

a) Puntos singulares:

$f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = e^x(x^2 - x - 2)$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 2$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(-1) = \dfrac{5}{e} \rightarrow \left(-1, \dfrac{5}{e}\right)$ es un máximo.

$f(2) = -e^2 \rightarrow (-1, -e^2)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

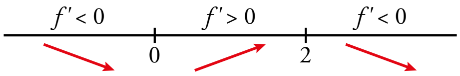
Intervalos de decrecimiento: $(-1, 2)$.

b) Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \;\to\; x = 0,\; x = 2$$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

$f(2) = \frac{4}{e^2} \;\to\; \left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ es un máximo.

Intervalos de crecimiento: $(0, 2)$.

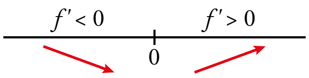
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \;\to\; x = 0$$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(0) = 0 \;\to\; (0, 0)$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(0, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, 0)$.

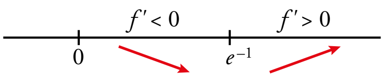
d) $Dom = (0, +\infty)$

Puntos singulares:

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \ln x + 1 = 0 \;\to\; x = e^{-1}$$

Crecimiento y decrecimiento:



$f(e^{-1}) = -e^{-1} \;\to\; (e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo.

Intervalos de crecimiento: $(e^{-1}, +\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(0, e^{-1})$.

55 **Prueba que existe un punto de la curva $y = arc\ tg\ \frac{x-1}{x+1}$ en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.**

La bisectriz del primer cuadrante tiene pendiente 1. Por tanto, el punto en el que la recta tangente es paralela a ella, cumple la ecuación.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = 1 \;\to\; \frac{1}{x^2+1} = 1 \;\to\; x = 0$$

$f(0) = -\frac{\pi}{4} \;\rightarrow\;$ En el punto $\left(0, -\frac{\pi}{4}\right)$ la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

56 **La trayectoria de un móvil viene dada por la función $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. En un punto P de $f(x)$, el móvil deja su trayectoria y continúa en línea recta por la tangente a f en P.**
¿Cuáles deben ser las coordenadas de P para que esa tangente pase por el punto $A(3\ ,\ 0)$?

* ***Fíjate en el problema resuelto 5.***

Si $P(a,\ f(a))$ es el punto por donde pasa la recta tangente a f, podemos escribir la tangente como:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \;\rightarrow\; f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

La recta tangente será: $y = 1 + \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2}$

Queremos que esta tangente pase por $A(3, 0) \;\rightarrow\; 0 = 1 + \frac{1}{a} - \frac{3-a}{a^2} \;\rightarrow\; \frac{a^2 + 2a - 3}{a^2} = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; a = 1;\ a = -3$

Podemos descartar la solución $a = -3$ ya que no pertenece al domino de la función $\rightarrow\; a = 1$.

$f(1) = 2$

$f'(1) = -1$

La tangente será $y = 3 - x$, en el punto buscado, $P(1, 2)$.

57 **[El análisis de la función propuesto permite al alumnado trabajar la iniciativa de la dimensión productiva de esta clave].**

La función $f(x) = \frac{60x}{x^2 + 9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).

a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

a) $f'(x) = \frac{60(x^2+9) - 60x \cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \frac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2+9)^2} = \frac{-60x^2 + 540}{(x^2+9)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 3$ ($x = -3$ no está en el dominio).

Máximo en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \;\rightarrow\;$ asíntota horizontal: $y = 0$

La gráfica sería:

b) Beneficio máximo en $x = 3 \;\rightarrow\;$ A los 3 años.

El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

58 **[El alumnado puede ayudar a sus compañeros en la resolución del problema para trabajar la comunidad y bien común de la dimensión social de esta clave].**

Los costes de producción de un producto (en €) de una empresa vienen dados por: $C = 40\,000 + 20q + q^2$, donde q es el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520 €.

a) Expresar en función de q el beneficio de la empresa cuando se venden todas las unidades.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

a) $B(q) = 520q - C(q) = 500q - 40\,000 - q^2$

b) Para que sea máximo $B'(q) = 0$: $B'(q) = 500 - 2q \rightarrow q = 250$

Vemos que es el máximo, ya que B' es positiva si $q \in (0, 250)$ y negativa si $q > 250$.

59 **Con una barra de hierro de 10 m queremos construir una portería. ¿Cuáles serán sus dimensiones para que su área sea máxima?**

Llamamos x a la medida de los postes y z a la del larguero.

Sabemos que $10 = 2x + z \rightarrow z = 10 - 2x$

Su área será: $A = z \cdot x = (10 - 2x)x = 10x - 2x^2$

Para que sea máxima: $A'(x) = 10 - 4x = 0 \rightarrow x = \frac{10}{4} = 2{,}5 \rightarrow z = \frac{20}{4} = 5$

60 **Halla dos números cuya suma sea 34 y tales que su producto sea máximo.**

Supongamos que los números son x e y:

$x + y = 34 \rightarrow y = 34 - x$

Buscamos el producto máximo:

$P = xy = x(34 - x) = 34x - x^2$

$P' = 34 - 2x$

$P' = 0 \rightarrow 34 - 2x = 0 \rightarrow x = 17 \rightarrow y = 17$

Comprobamos que el valor obtenido es un máximo del producto

$P' > 0$ | 17 | $P' < 0$

Por tanto, los números son $x = 17$, $y = 17$ y el producto máximo es 289.

61 **Encuentra dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima.**

Sean x, y los números positivos.

$xy = 100 \rightarrow y = \frac{100}{x}$

La suma es $S = x + y = x + \frac{100}{x}$

Queremos encontrar la suma mínima:

$S' = 1 - \frac{100}{x^2}$

$S' = 0 \rightarrow 1 - \frac{100}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 10 \rightarrow x = 10$ (solo es válido el resultado positivo)

Veamos si es un mínimo:

0 | $S' < 0$ | 10 | $S' > 0$

Por tanto, cuando $x = 10$, $y = \frac{100}{10} = 10$, se obtiene la suma mínima, que es $S = 20$.

62 **El área de un rectángulo es 180 cm². ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo?**

Llamamos z a su base y x a su altura.

$\text{Área} = zx = 180 \;\rightarrow\; z = \dfrac{180}{x}$

$\text{Perímetro} = 2x + 2z = 2x + 2\left(\dfrac{180}{x}\right)$

$P(x) = 2x + \dfrac{360}{x} \;\rightarrow\; P'(x) = 2 - \dfrac{360}{x^2} = 0$ para que sea mínimo $\rightarrow\; x = \pm 6\sqrt{5}$

Descartamos la solución negativa ya que x es la medida de uno de los lados.

$x = 6\sqrt{5} \;\rightarrow\; z = \dfrac{180}{6\sqrt{5}} = \dfrac{30}{\sqrt{5}} = \dfrac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$

Por tanto, se trata de un cuadrado.

Sabemos que $x = 6\sqrt{5}$ es mínimo ya que:

$P'(x) < 0$ si $0 < x < 6\sqrt{5} \;\rightarrow P$ decrece

$P'(x) > 0$ si $x > 6\sqrt{5} \;\rightarrow P$ crece

63 **Halla la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 30 cm cuya área sea la mayor posible.**

* ***Llama x a la mitad de la base.***

Si llamamos x a la mitad de la base y h a la altura del triángulo, el lado desigual mide $2x$ y cada uno de los lados iguales mide $\dfrac{30 - 2x}{2} = 15 - x$.

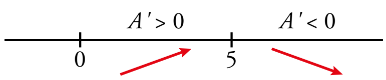
Por el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{(15 - x)^2 - x^2} = \sqrt{225 - 30x}$

El área del triángulo es $A = \dfrac{2x\sqrt{225 - 30x}}{2} = x\sqrt{225 - 30x}$

$A' = \sqrt{225 - 30x} + \dfrac{x(-30)}{2\sqrt{225 - 30x}} = \dfrac{225 - 30x - 15x}{\sqrt{225 - 30x}} = \dfrac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}}$

$A' = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}} = 0 \;\rightarrow\; 225 - 45x = 0 \;\rightarrow\; x = 5$ cm

Comprobamos si hemos obtenido un máximo.



En efecto, $x = 5$ cm es un máximo. La base mide 10 cm, la altura mide $h = \sqrt{225 - 150} = 5\sqrt{3}$ cm y el área máxima es $A = 25\sqrt{3}$ cm².

64 **De todos los ortoedros de base cuadrada y área total igual a 20 cm² halla las dimensiones del que tiene el mayor volumen.**

Supongamos que x es el lado de la base cuadrada y que y es la altura del ortoedro.

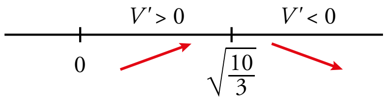
El área total es igual a 20 cm² $\rightarrow\; 2x^2 + 4xy = 20 \;\rightarrow\; y = \dfrac{10 - x^2}{2x}$

El volumen del ortoedro es $V = x^2 y = x^2\,\dfrac{10 - x^2}{2x} = \dfrac{10x - x^3}{2}$.

Hallamos el valor de x que da el volumen máximo.

$V' = \dfrac{10 - 3x^2}{2}$

$V' = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{10 - 3x^2}{2} = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ (el resultado negativo no tiene sentido).



La altura es $y = \dfrac{10 - \sqrt{10/3}^2}{2\sqrt{10/3}} = \sqrt{\dfrac{10}{3}}$ y el volumen máximo, $V = \dfrac{10}{3}\sqrt{\dfrac{10}{3}}$ cm^3.

Página 348

65 Aplica la regla de L'Hôpital para resolver estos límites:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{sen\, x}$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x}{5x}$ **c)** $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x^2 + 5x - 1}$ **d)** $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{ln\,(2x+1)}$

e) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - sen\, x}{sen\, x}$ **f)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x + tg\, x}$ **g)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{(e^x - 1)^2}$ **h)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{4[x - ln\,(1+x)]}{x\, ln\,(1+x)}$

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{cos\, x} = 1$

b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x}{5x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + tg^2 x}{5} = \frac{1}{5}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\, x}{x^2 + 5x - 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{2x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(2x+5)} = 0$

d) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{ln\,(2x+1)} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\frac{2}{2x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x(2x+1)}{2} = +\infty$

e) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - sen\, x}{sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{cos\, x} = 0$

f) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x + tg\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{cos\, x}{1 + 1 + tg^2 x} = \frac{1}{2}$

g) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{(e^x - 1)^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{2(e^x - 1)e^x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{2e^{2x} - 2e^x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{cos\, x}{4e^{2x} - 2e^x} = \frac{1}{2}$

h) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{4[x - ln\,(1+x)]}{x\, ln\,(1+x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{4\left[1 - \frac{1}{1+x}\right]}{ln\,(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \cdot \frac{x}{1+x}}{\frac{(1+x)\, ln\,(1+x) + x}{1+x}} =$

$\displaystyle = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{(1+x)\, ln\,(1+x) + x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{4}{ln\,(1+x) + \frac{1+x}{1+x} + 1} = \frac{4}{2} = 2$

66 Estudia la continuidad y la derivabilidad de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 5 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x - 2} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} e^x + 2 & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Llamemos $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ y $f_2(x) = -2x + 5$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 1 \\ f_2(2) = 1 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $f(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$f'_1(x) = 2x - 2$ y $f'_2(x) = -2$

$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = 2 \\ f'_2(2) = -2 \end{array}\right\}$ Como $f'_1(2) \neq f'_2(2)$, la función $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

La derivada queda así:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Llamemos $g_1(x) = 2x - 5$ y $g_2(x) = \sqrt{x-2}$. Ambas funciones son continuas y derivables donde están definidas.

$\left.\begin{array}{l} g_1(3) = 1 \\ g_2(3) = 1 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $g(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$g'_1(x) = 2$ y $g'_2(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$

$\left.\begin{array}{l} g'_1(3) = 2 \\ g'_2(3) = 1/2 \end{array}\right\}$ Como $g'_1(3) \neq g'_2(3)$, la función $g(x)$ no es derivable en $x = 3$.

La derivada queda así:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) Llamemos $h_1(x) = e^x + 2$ y $h_2(x) = x^2 + x + 3$. Ambas funciones son continuas y derivables.

$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = 3 \\ h_2(0) = 3 \end{array}\right\}$ Por tanto, la función $h(x)$ también es continua en el punto de ruptura y, en consecuencia, lo es en todo $\mathbb{R}$.

$h'_1(x) = e^x$ y $h'_2(x) = 2x + 1$

$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 1 \\ h'_2(0) = 1 \end{array}\right\}$ Como $h'_1(0) = h'_2(0)$, la función $h(x)$ es derivable en $x = 0$ y $h'(0) = 1$.

La derivada queda así:

$$h'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

67 Calcula, en cada caso, los valores de m y n para que las funciones siguientes sean derivables en $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} mx^2 + nx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2nx - 4 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \le 0 \\ mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $j(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - nx - 4 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

a) Llamemos $f_1(x) = x^2 - 5x + m$ y $f_2(x) = -x^2 + nx$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = -6 + m \\ f_2(2) = -4 + 2n \end{array}\right\} \to -6 + m = -4 + 2n$$

$f'_1(x) = 2x - 5$ y $f'_2(x) = -2x + n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = -1 \\ f'_2(2) = -4 + n \end{array}\right\} \to -1 = -4 + n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -6 + m = -4 + 2n \\ -1 = -4 + n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 8,\ n = 3.$$

b) Llamemos $g_1(x) = mx^2 + nx - 3$ y $g_2(x) = 2nx - 4$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 1$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(1) = m + n - 3 \\ g_2(1) = 2n - 4 \end{array}\right\} \to m + n - 3 = 2n - 4$$

$g'_1(x) = 2mx + n$ y $g'_2(x) = 2n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 1$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} g'_1(1) = 2m + n \\ g'_2(1) = 2n \end{array}\right\} \to 2m + n = 2n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} m + n - 3 = 2n - 4 \\ 2m + n = 2n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 1,\ n = 2.$$

c) Llamemos $h_1(x) = (x - 1)^3$ y $h_2(x) = mx + n$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = 0$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = -1 \\ h_2(0) = n \end{array}\right\} \to n = -1$$

$h'_1(x) = 3(x - 1)^2$ y $h'_2(x) = m$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = 0$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 3 \\ h'_2(0) = m \end{array}\right\} \to m = 3$$

d) Llamemos $j_1(x) = mx^2 + 3x$ y $j_2(x) = x^2 - nx - 4$. Ambas funciones son continuas y derivables por ser polinómicas.

Para que la función sea continua en el punto de ruptura $x = -2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} j_1(-2) = 4m - 6 \\ j_2(-2) = 2n \end{array}\right\} \to 4m - 6 = 2n$$

$j'_1(x) = 2mx + 3$ y $j'_2(x) = 2x - n$

Para que sea derivable en el punto de ruptura $x = -2$ debe ser:

$$\left.\begin{array}{l} j'_1(-2) = -4m+3 \\ j'_2(-2) = -4-n \end{array}\right\} \to -4m+3 = -4-n$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4m-6 = 2n \\ -4m+3 = -4-n \end{array}\right\} \to \text{Los valores son } m = 2,\ n = 1.$$

Cuestiones teóricas

68 Comprueba que la función $y = (2 - x)^3$ pasa por los puntos (0, 8), (2, 0) y (3 –1) y que su derivada se anula en el punto (2, 0). ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto? Justifica tu respuesta.

Llamamos $f(x) = (2-x)^3$. Comprobamos que los puntos pertenecen a f:

(0, 8): $f(0) = 2^3 = 8$

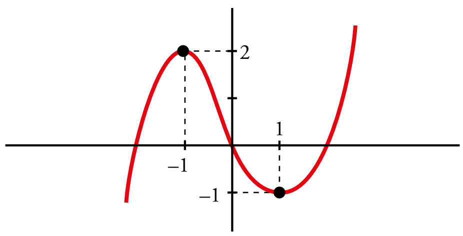
(2, 0): $f(2) = (2-2)^3 = 0$

(3, –1): $f(3) = (-1)^3 = -1$

$f'(x) = 3(2-x)^2(-1) \to f'(2) = 0$

El punto no puede ser máximo: si fuera máximo la función debería crecer a la izquierda del punto (2, 0), pero tenemos el punto (0, 8) y nuestra función es polinómica, no tiene asíntotas, por lo que no puede ser un máximo. Tampoco puede ser un mínimo, por la existencia del punto (3, –1), así que será punto singular pero ni máximo ni mínimo.

69 Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo [–1, 1] y positiva para cualquier otro valor de x.

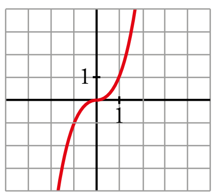


70 Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?

Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

71 Esta es la gráfica de la función $y = x^3$.



a) ¿Tiene algún punto singular?

b) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$?

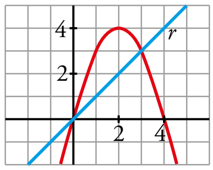
c) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en $x = 0$?

a) El punto (0, 0) tiene tangente horizontal. Este es el único punto singular.

b) La función es creciente en $x = 0$.

c) La recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

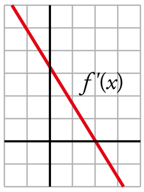
72 **¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en el que la tangente sea paralela a la recta r? En caso afirmativo, hállalo.**



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ \text{Pendiente de la recta} = 1 \end{array}\right\} \; 4 - 2x = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

Punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

73 **Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.**



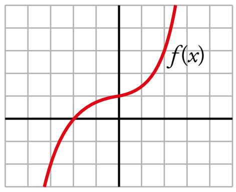
a) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

a) Sí, en $x = 2$, puesto que $f'(2) = 0$.

b) Si $x < 2$ es creciente, pues $f' > 0$; y si $x > 2$ es decreciente, pues $f' > 0$.

74 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$.**



¿Cuál será la gráfica de una función $y = g(x)$ tal que $g'(x) = f'(x)$ y $g(0) = -1$?

Como $f(0) = 1$, debe ser $g(x) = f(x) - 2$, es decir, sería la misma gráfica que la de $f(x)$ pero desplazada dos unidades hacia abajo. De esta forma:

$g(0) = f(0) - 2 = 1 - 2 = -1$

$g'(x) = D[f(x) - 2] = f'(x)$

75 **Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$ y $f(x) = e^{2x}$ halla, en cada caso, f', f'', f''', f^{IV}. ¿Cuál será la derivada enésima de cada una de las funciones dadas?**

- $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$

  $f'(x) = 4x^3 - 10x + 6$

  $f''(x) = 12x^2 - 10$

  $f'''(x) = 24x$

  $f^{IV}(x) = 24$

  $f^{V}(x) = 0$ y, desde esta, todas las derivadas sucesivas siguientes.

- $f(x) = e^{2x}$

  $f'(x) = 2\,e^{2x}$

  $f''(x) = 4\,e^{2x}$

  $f'''(x) = 8\,e^{2x}$

  $f^{IV}(x) = 16\,e^{2x}$

  La fórmula general, teniendo en cuenta que los coeficientes son potencias de base 2, es:

  $f^{n)}(x) = 2^n e^{2x}$

76 **Sabemos que $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Halla, si es posible:**

a) $f'[g(2)]$ **b)** $f'[g(x)]$ **c)** $g'[f(4)]$ **d)** $[f(g(x))]'$

$Dom\ f = \mathbb{R} - \{3\}$

$Dom\ g = \mathbb{R}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x-3)^2} \rightarrow Dom\ f' = \mathbb{R} - \{3\}$

$g'(x) = 2x \rightarrow Dom\ g' = \mathbb{R}$

a) $f'(g(2)) = f'(5) = -\frac{1}{4}$

Podemos hacer el cálculo porque $g(2) \in Dom\ f'$.

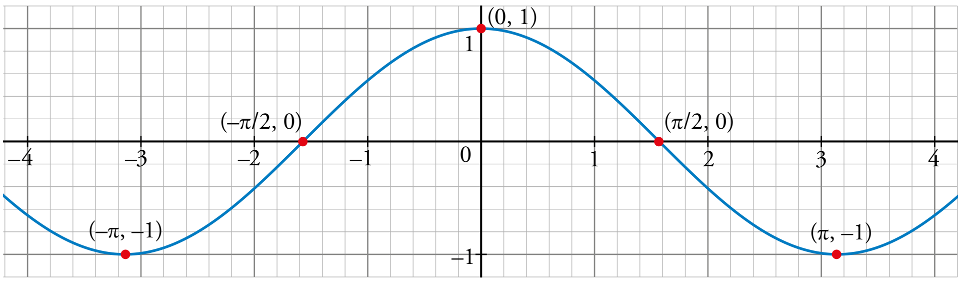
b) $f'(g(x)) = f'(x^2+1) = -\frac{1}{(x^2-2)^2}$ si $x \neq \pm\sqrt{2}$

Podemos calcular $f'(g(x))$ pero no en todos los puntos del recorrido de $g(x)$, solamente si lo restringimos antes.

c) $g'(f(4)) = g'(1) = 2$

d) $\left[f(g(x))\right]' = \left[f(x^2+1)\right]' = \left[\frac{1}{x^2-2}\right]' = -\frac{2x}{(x^2-2)^2}$ definida si $x \neq \pm\sqrt{2}$.

77 **¿Cuál es la mayor pendiente que puede tener una tangente a la curva $y = cos\ x$?**



Dibujamos $f(x) = cos\,x$, y estudiamos la función entre $[-\pi, \pi]$. Será suficiente porque sabemos que la gráfica se repite.

Vemos que la tangente en $-\pi$ será horizontal, con pendiente cero. Si buscamos valores de x en el intervalo $\left(-\pi, \frac{-\pi}{2}\right)$ la pendiente de su tangente empieza a crecer hasta llegar a $x = -\frac{-\pi}{2}$, donde tendrá pendiente positiva máxima. A partir de ahí empieza a disminuir otra vez.

Veámoslo analíticamente:

Queremos saber cuándo será máxima la pendiente de una tangente a $f(x)$, es decir, cuándo será máxima $f'(x) = -sen\ x$. Para ello vemos dónde se anula su derivada:

$f''(x) = -cos\ x = 0 \ \rightarrow\ x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$

Veamos si alguno de ellos es máximo de f':

Si $x \in \left(-\pi, \frac{-\pi}{2}\right) \ \rightarrow\ f''(x) > 0 \ \rightarrow\ f'$ es creciente

Si $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ \rightarrow\ f''(x) < 0 \ \rightarrow\ f'$ es decreciente

Si $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \ \rightarrow\ f''(x) > 0 \ \rightarrow\ f'$ es creciente

Por lo tanto su mayor pendiente será en el punto $\frac{-\pi}{2}$ y su valor: $f'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -sen\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1$

Para generalizarlo diremos que su mayor pendiente será en los puntos: $x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x - 24$

78 **Sabemos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ y $h(x) = e^{f(x)}$. ¿Cuál de estos tres valores corresponde a $h'(0)$?:**

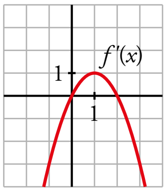
a) $\frac{1}{e}$ **b)** 0 **c)** 1

$h'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

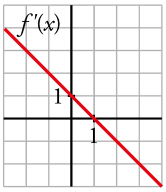
Por tanto, $h'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$, que se corresponde con c).

79 **¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una curva que tiene un máximo en $x = 1$? ¿Por qué?**

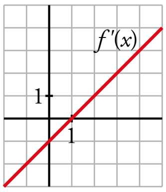
a)



b)

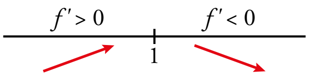


c)



La gráfica del apartado b), porque $f'(1) = 0$.

Además,



En consecuencia, $x = 1$ es un máximo.

80 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) **Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en $x = a$.**

b) **Si $f'(a) = 0$, entonces f no crece ni decrece en $x = a$.**

c) **Si f es decreciente en $x = a$, entonces $f'(a) < 0$.**

d) **Si la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es $y = 3x - 5$, entonces $f'(2) = 3$ y $f(2) = 1$.**

e) **Si $f'(5) = 0$ y f es creciente para cualquier otro valor de x, entonces f no tiene tangente horizontal en $x = 5$.**

f) **La función $tg\, x$ no tiene puntos singulares.**

a) Verdadero.

b) Falso. Hay funciones con puntos singulares donde la función es creciente. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en el punto singular (0, 0).

c) Falso. La función $f(x) = -x^3$ siempre es decreciente y $f'(0) = 0$.

d) Verdadero. $f'(2)$ es la pendiente de la tangente y $(2, f((2)) = (2, 1)$ es el punto de tangencia.

e) Falso. Tiene un punto de inflexión, es decir, de tangente horizontal.

f) Verdadero. La derivada, $1/cos^2(x)$, nunca se anula.

Página 349

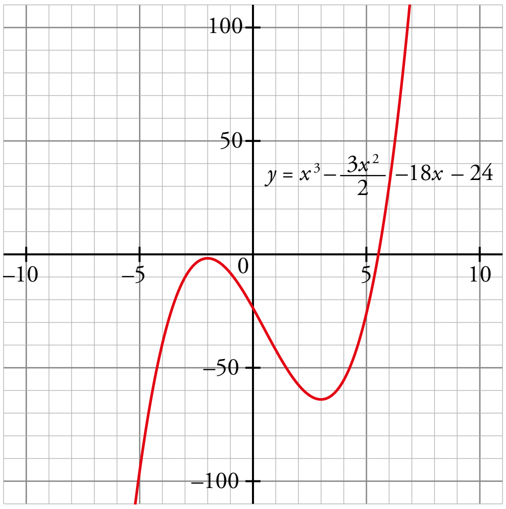
81 **Sea f una función polinómica de tercer grado tal que $f'(-2) = 0$ y $f'(3) = 0$. Dibuja si es posible una función en cada uno de los siguientes casos:**

a) **No existe ningún valor del intervalo (–2, 3) en el que $f(x) = 0$.**

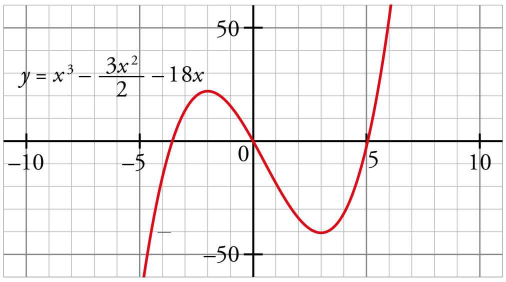
b) **Existe un solo valor de x en el intervalo (–2, 3) en el que $f(x) = 0$.**

c) **Existen dos valores de x en el intervalo (–2, 3) en los que $f(x) = 0$.**

a) Sí es posible, pueden ser puntos singulares sin que la gráfica corte el eje de abscisas entre ellos, por debajo del eje de las x: $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x - 24$

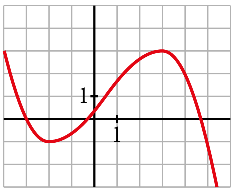


b) Sí es posible, la gráfica puede dibujar un máximo en –2 y un mínimo en 3 pasando por el (0, 0), como por ejemplo: $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x$



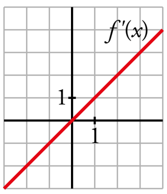
c) No es posible. Para ello debería tener otro máximo o mínimo en el intervalo descrito. Eso no es posible ya que su derivada es de segundo grado y tendrá dos soluciones como mucho. Por lo que no puede tener más máximos ni mínimos

82 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**

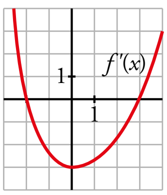


¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de $f'(x)$? Justifícalo:

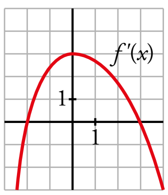
a)



b)



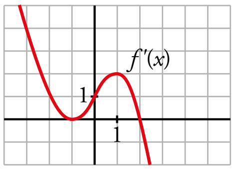
c)

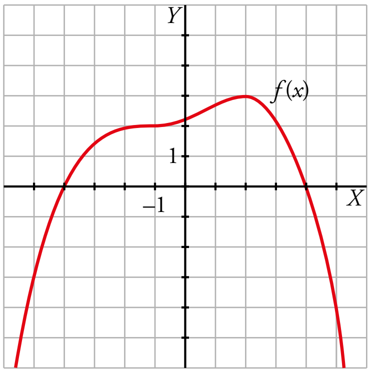


La gráfica del apartado c), porque $f'(-2) = f'(3) = 0$ al ser $x = -2$ y $x = 3$ puntos singulares de $f(x)$.
Como $f(x)$ crece en el intervalo (–2, 3), $f'(x) > 0$ y esto solo ocurre en el apartado c). El resto de la gráfica de c) es coherente con la de $f(x)$.

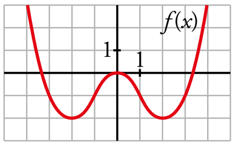
Para profundizar

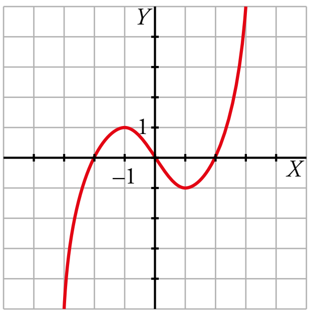
83 **Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$ y que tiene por gráfica de su función derivada $f'(x)$ la siguiente:**





84 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y representa de forma aproximada la función $y = f'(x)$.**





85 **Demuestra que no es posible trazar una recta tangente a la curva $f(x) = 4x - x^2$ desde el punto $A(2, -3)$.**

Si existe un punto $(a, f(a))$ por el que pase una tangente, esta será:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$

$f'(x) = 4 - 2x = 0 \;\rightarrow\; y = (4a - a^2) + (4 - 2a)(x - a)$

Si dicha tangente contiene al punto $A(2, -3)$: $-3 = (4a - a^2) + (4 - 2a)(2 - a) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; -3 = 4a - a^2 + 8 - 4a - 4a + 2a^2 \;\rightarrow\; a^2 - 4a + 11 = 0 \;\rightarrow\; a = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 44}}{2}$

No tiene solución en los reales $\rightarrow$ No existe la tangente buscada.

86 **Halla los lados del rectángulo de área máxima entre todos los que tienen la diagonal igual a 12 cm.**

Llamemos x, y a la base y a la altura del rectángulo, respectivamente.

$x^2 + y^2 = 12^2 \;\rightarrow\; y = \sqrt{144 - x^2}$

El área del rectángulo es:

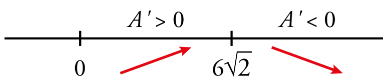
$A = xy = x\sqrt{144 - x^2}$

Hallamos el valor que da el área máxima:

$$A' = \sqrt{144 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = \frac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}}$$

$A' = 0 \;\to\; \dfrac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = 0 \;\to\; 144 - 2x^2 = 0 \;\to\;$ Obtenemos solo una solución válida: $x = 6\sqrt{2}$ cm.

Comprobamos que es un máximo:



Los lados $x = 6\sqrt{2}$ cm, $y = \sqrt{144 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$ cm nos dan el rectángulo de área máxima, que es $A = 72$ cm^2.

87 **Se quiere construir un barril cilíndrico con una capacidad de 150 L. Halla el radio y la altura del cilindro para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.**

Sean r y h el radio y la altura del cilindro, respectivamente.

$\pi r^2 \mathrm{h} = 150 \;\to\; \mathrm{h} = \dfrac{150}{\pi r^2}$

La cantidad de chapa es igual a la suma del área lateral más las áreas de las tapas:

$$A = 2\pi r\mathrm{h} + 2\pi r^2 = 2\left(\pi r\frac{150}{\pi r^2} + \pi r^2\right) = 2\left(\frac{150}{r} + \pi r^2\right)$$

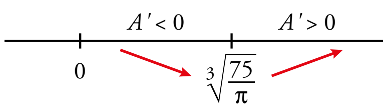
Hallamos el valor que da el área mínima.

$$A' = 2\left(-\frac{150}{r^2} + 2\pi r\right)$$

$$A' = 0 \;\to\; -\frac{150}{r^2} + 2\pi r = 0 \;\to\; 2\pi r = \frac{150}{r^2} \;\to\; r^3 = \frac{150}{2\pi} \;\to\; r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}} \;\to$$

$$\to\; \mathrm{h} = \frac{150}{\pi r^2} = \frac{150}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$$

Comprobamos que $r = \sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$ es un mínimo:



Por tanto, las medidas son $r = \sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$ dm, $\mathrm{h} = 2\sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$ dm.

88 **Halla las asíntotas de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ y estudia la posición, de la curva con respecto a ellas. Calcula los puntos singulares y representa la función.**

Asíntotas oblicuas:

Como la función no es un cociente de polinomios, hallamos las asíntotas oblicuas usando límites.

Recordemos que si la asíntota es $y = ax + b$, entonces:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = 0$$

Cuando $x \to +\infty$, la asíntota oblicua es $y = x$.

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \text{ (porque } x \text{ es negativa)}$$

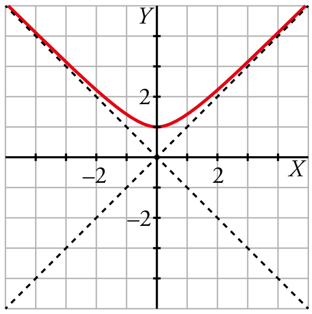
$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - (-x)\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = 0$$

Cuando $x \to -\infty$, la asíntota oblicua es $y = -x$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Esta derivada solo se anula si $x = 0$. Como $f(0) = 1$, el único punto singular es $(0, 1)$.

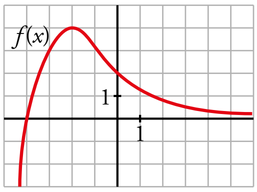


AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 3.3. (EA 3.3.1.) **CE3.4.** (EA 3.4.1.-EA 3.4.2.)

Página 349

1 Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde.



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

a) T.V.M. $[0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

T.V.M. $[-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a –1. Por tanto, $f'(0) = -1$.

2 Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$$\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$$

$$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3 Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}\right)$ **c)** $f(x) = cos^2\, \pi x$ **d)** $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

a) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - 4x^{-3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^3}$$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + ln\, e^{-x} = ln\, x - ln\, 3 - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

c) $f'(x) = 2\pi\, cos\, \pi\, x(-sen\, \pi x) = -2\pi\, cos\, \pi x \cdot sen\, \pi x$

d) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^2 D\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right) = 3\dfrac{x^4}{(x - 2)^2} \cdot \dfrac{2x(x - 2) - x^2}{(x - 2)^2} = \dfrac{3x^4(x^2 - 4x)}{(x - 2)^4}$

4 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = ln\, x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Punto de tangencia: $x = 1$, $y = ln\, 1^2 = 0 \to P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \to f'(1) = 2$

Ecuación: $y = 0 + 2(x - 1) \to y = 2x - 2$

5 **Halla los puntos singulares de la función $y = 2 + (1 - x)^3$. ¿Tiene máximo o mínimo relativo esa función?**

$f(x) = 2 + (1 - x)^3 \to f'(x) = 3(1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2$

$f'(x) = 0 \to -3(1 - x)^2 = 0 \to 1 - x = 0 \to x = 1$

$f(1) = 2 + (1 - 1)^3 = 2$

Punto singular: (1, 2).

Como $f'(x) = -3(1 - x)^2$ es menor que 0 para cualquier valor de $x \neq 1$, f es decreciente en todo su dominio y, por tanto, el punto singular no es máximo ni mínimo.

6 **Estudia y representa la función $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$. Indica sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

Estudiemos sus puntos singulares y su crecimiento mediante su derivada:

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = 0 \to x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \to x = -3;\ x = 1$$

$P(-3, 9)$ y $Q\left(1; \frac{5}{3}\right)$ son puntos singulares. Veamos si son máximo o mínimo:

$x < -3$: $f' > 0 \to f$ creciente

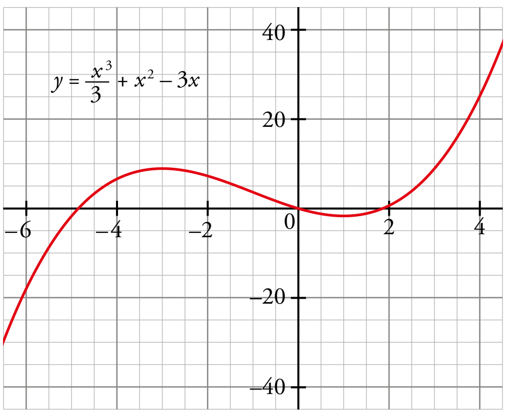
$-3 < x < 1$: $f' < 0 \to f$ decreciente

$x > 1$: $f' > 0 \to f$ creciente $\to P(-3, 9)$ es máximo y $Q\left(1; \frac{5}{3}\right)$ es mínimo

Estudiemos sus ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



7 **Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$.**

a) Estudia las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas.

b) Halla los máximos y los mínimos.

c) Represéntala.

a) • Asíntotas verticales. Recta $x = 2$ porque este valor anula el denominador pero no el numerador.

IZQUIERDA: $\dfrac{1,99^2 - 2\cdot 1,99 + 4}{2 - 1,99} = 398 \to f(x) \to +\infty$

DERECHA: $\dfrac{2,01^2 - 2\cdot 2,01 + 4}{2 - 2,01} = -402 \to f(x) \to -\infty$

• Ramas infinitas. Como la diferencia entre los grados del numerador y del denominador es 1, tiene una asíntota oblicua.

$\dfrac{x^2 - 2x + 4}{-x + 2} = -x - \dfrac{4}{x - 2} \to$ La recta $y = -x$ es la asíntota oblicua.

$f(x) - (-x) = -\dfrac{4}{x - 2}$

Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-x) > 0 \to$ La función está encima de la asíntota.

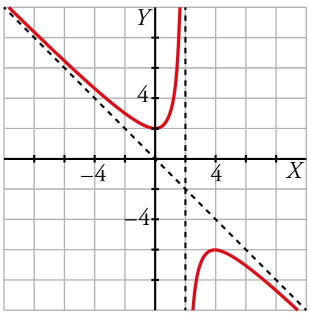
Si $x \to +\infty$, $f(x) - (-x) < 0 \to$ La función está debajo de la asíntota.

b) $f'(x) = \dfrac{(2x - 2)(2 - x) - (x^2 - 2x + 4)\cdot(-1)}{(2 - x)^2} = \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2}$

$f'(x) = 2 \to \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2} = 0 \to -x^2 + 4x = 0 \to x = 0,\ x = 4$

$f(0) = 0,\ f(4) = -6 \to$ Los puntos $(0, 2)$ y $(4, -6)$ son puntos singulares, donde el primero es un mínimo y el segundo es un máximo.

c)



8 **Estudia y representa $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.**

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$. Posición $\begin{cases} x \to 0^-, & f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+, & f(x) \to -\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1;\ y = 1$. Posición $\begin{cases} x \to +\infty, & f(x) < 1 \\ x \to -\infty, & f(x) < 1 \end{cases}$

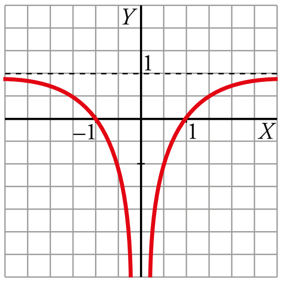
Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x\,x^2 - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2)^2} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{2}{x^3} = 0$. No tiene solución.

No tiene puntos singulares.

Esta es su gráfica:



9 **Calcula el valor de b y c para que la función $y = x^3 + bx^2 + c$ tenga un punto singular en $P(2, -3)$.**

Si $P(2, -3)$ es un punto singular, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -3 \\ f'(2) = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 + b \cdot 2^2 + c = -3 \\ 3 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} 4b + c = -11 \\ 4b = -12 \end{array}\right\} \to b = -3,\ c = 1$$

10 **Calcula dos números cuya suma sea 50 y tales que la suma de sus cuadrados sea mínima.**

Sean x e y dos números.

$x + y = 50 \to y = 50 - x$

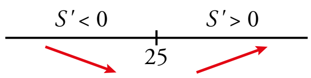
La suma de los cuadrados es $S = x^2 + y^2 = x^2 + (50 - x)^2 = 2x^2 - 100x + 2\,500$

Buscamos que la suma de cuadrados sea mínima:

$S' = 4x - 100$

$S' = 0 \to 4x - 100 = 0 \to x = 25 \to y = 50 - 25 = 25$

Ahora comprobamos si el valor $x = 25$ es un mínimo:



Por tanto, cuando $x = y = 25$ se obtiene la suma de cuadrados mínima que es, $S = 1\,250$.