UNIDAD 12: Límites de funciones. Continuidad

ACTIVIDADES-PÁG. 276

1. Podemos decir lo siguiente:

a) Para la gráfica del apartado (I):
f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$
f (x) tiende a + ∞ cuando x tiende a – 2 por la izquierda
f (x) tiende a - ∞ cuando x tiende a – 2 por la derecha
f (x) tiende a - ∞ cuando x tiende a 2 por la izquierda
f (x) tiende a + ∞ cuando x tiende a 2 por la derecha
f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.

b) Para la gráfica del apartado (II):
f (x) tiende a 1 cuando x tiende a $-\infty$
f(x) tiende a 1 cuando x tiende a $+\infty$.

c) Para la gráfica del apartado (III)
f (x) tiende a 0 cuando x tiende a $-\infty$
f(x) tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

d) Para la gráfica del apartado (IV):
f (x) tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $-\infty$
f (x) tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.

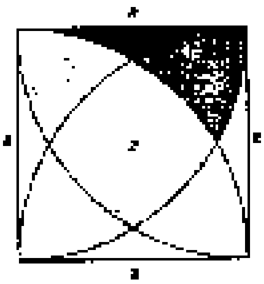
ACTIVIDADES-PÁG. 293

1. Basta con mover el cuadrado para ver que el área de la región limitada es la cuarta parte del cuadrado.

2. Basta conocer el lado del cuadrado que se forma dentro de la figura. La resolución nos recuerda al problema de los *perros guardianes*.

El área de la rosa de 4 pétalos es igual al área del cuadrado rayado más 4 veces el área del pétalo. El área de un pétalo lo puedes encontrar en el problema de los perros guardianes.

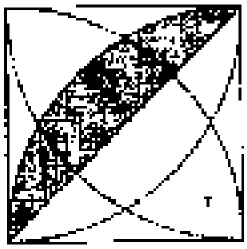
3. La representación geométrica del problema así como su resolución quedan:



Los cálculos quedan:

Área (x) = Área cuadrado – Área triángulo – 2 · Área sector =

$$= a^2 - \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot a^2}{12} = a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$



Área (rayada) = $\frac{1}{4}$ Área círculo – Área triángulo rectángulo =

$$= \frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

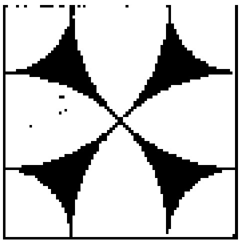
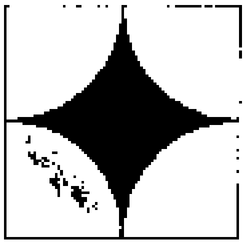
Área (y) = Área triángulo rectángulo – Área (rayada) – 2 · Área (x) =

$$= \frac{a^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2 \cdot a^2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = - a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi \cdot a^2}{12}$$

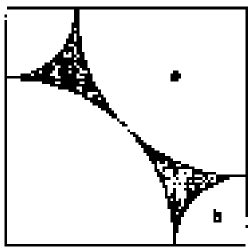
Área (z) = 2 · Área (rayada) – 2 · Área (y) = $= 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) - 2 \cdot a^2 \left(- a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi \cdot a^2}{12}\right) =$

$$= \frac{\pi \cdot a^2}{2} - a^2 + 2a^2 - a^2\sqrt{3} - \frac{\pi \cdot a^2}{6} = a^2 - a^2\sqrt{3} + \frac{\pi \cdot a^2}{3}$$

4. Sean las figuras:

1)  2) 

● En la figura (1) el área pedida es 2 veces el área de una de las aspas rayada en el dibujo adjunto.



Área aspa = Área cuadrado – 2 · Área (a) – 2 · Área (b)

Vamos a hallar el área de la zona (a).

El radio de esta zona es la mitad de la diagonal del cuadrado.

$$D = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2},\ es\ decir,\ r = 5\sqrt{2}$$

$$Área\ (a) = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(5\sqrt{2}\right)^2 = \frac{50\pi}{4} = \frac{25\pi}{2}\ m^2$$

Ahora hallamos el área de la zona (b). El radio de esta zona es el lado del cuadrado menos el radio de la zona (a), es decir, $r = 10 - 5\sqrt{2}$.

$$\acute{A}rea\ (b) = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(10 - 5\sqrt{2}\right)^2 = \frac{(75 - 50\sqrt{2})\pi}{4}\ m^2$$

El área del aspa queda:

$$\acute{A}rea\ aspa = 10^2 - 25\pi - (75 - 50\sqrt{2})\pi = 100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\,\pi$$

El área pedida queda:

$$\acute{A}rea\ \ pedida = 2 \cdot \acute{A}rea\ aspa = 2 \cdot (100 - 100\pi + 50\sqrt{2}\,\pi) = 15{,}97\ m^2$$

● En la figura (2) el área pedida es igual al área del cuadrado de lado 10 m menos el área del círculo de radio 5 m.

Área figura (2) = $10^2 - \pi \cdot 5^2 = 100 - 25\pi = 21{,}46\ m^2$

ACTIVIDADES-PÁG. 295

1. En la imagen tenemos la resolución, con Wiris, de estos límites.

$$\lim_{x \to 0^+} (1+4x)^{\frac{3}{2x^2}} \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2-2x}-3x\right) \rightarrow -\frac{1}{3}$$

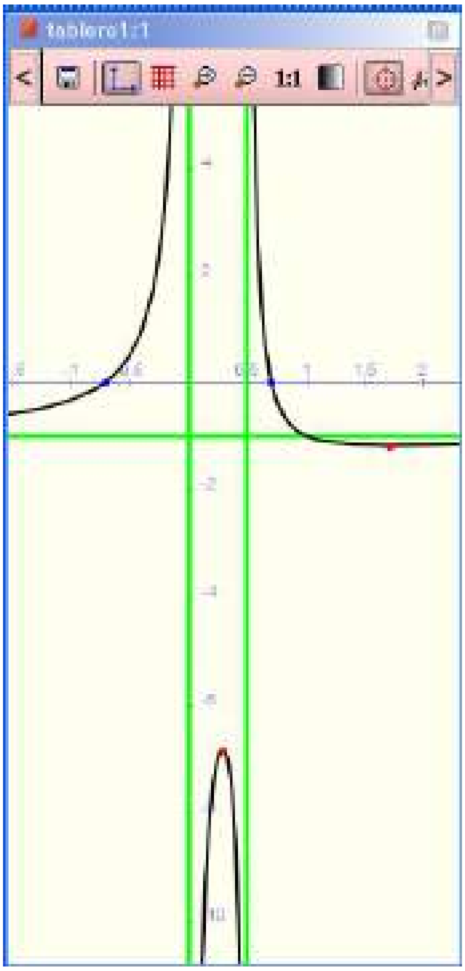
$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2-6x+5}{2\sqrt{x-1}-4} \rightarrow 8$$

2. Con Wiris representamos la función y vemos en la gráfica que tiene dos asíntotas verticales de ecuaciones $x = 0$; $x = 0{,}5$ y una asíntota horizontal de ecuación $y = -1$.

En la misma gráfica estudiamos la continuidad y esta función es continua en R – {0; 0,5}

$$f(x) := \frac{1-2\cdot x^2}{2\cdot x^2 - x} \rightarrow x \mapsto \frac{1-2\cdot x^2}{2\cdot x^2 - x}$$

representar(f(x),{asíntota={color=verde,anchura_línea=3}})



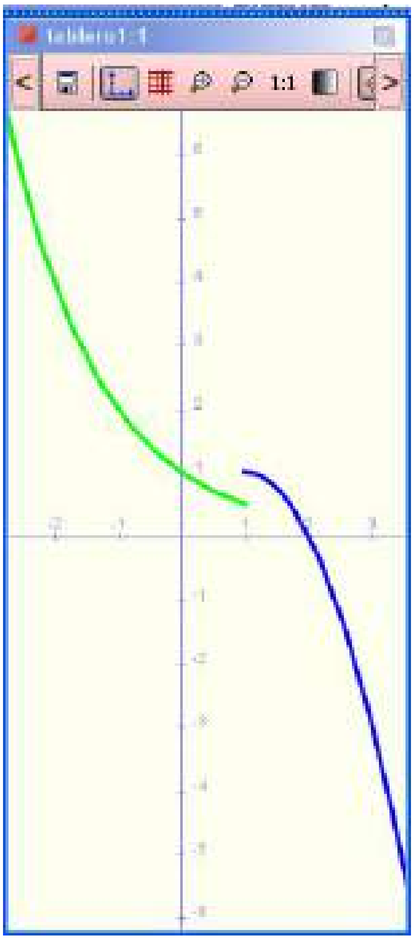
3. Representamos con Wiris estas dos funciones:

a) Esta es una función a trozos y hay que dibujar cada trozo en su intervalo, los dos dibujos dentro del mismo bloque.

dibujar$(2\cdot x-x^2$, 1..+∞,{color=azul,anchura_línea=3}) → tablero1

dibujar$(2^{-x}$, -∞..1,{color=verde,anchura_línea=3}) → tablero1

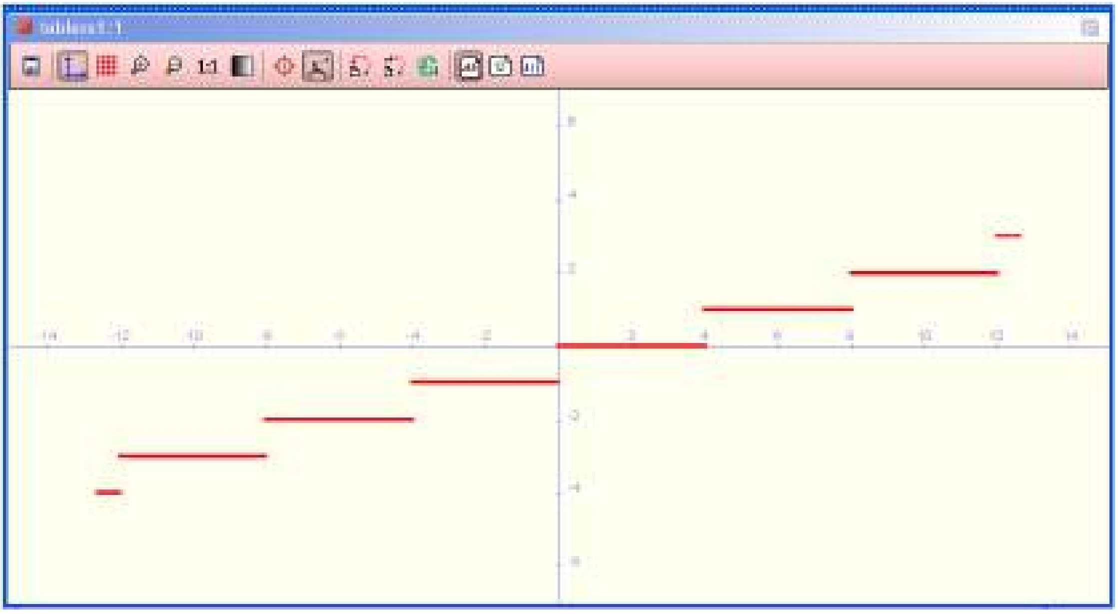
A partir de la gráfica vemos que esta función es continua en R – {1}



b) Para representar la parte entera se escribe **dibujar(suelo(x/4))**

La representamos y a partir de la gráfica vemos que es una función es continua en $R-\{x=4\cdot k\ /\ k\in Z\}$.

$$\text{dibujar}\left(\text{suelo}\left(\frac{x}{4}\right),\{\text{color}=\text{rojo},\text{anchura\_línea}=3\}\right)\rightarrow \text{tablero1}$$



ACTIVIDADES-PÁG. 296

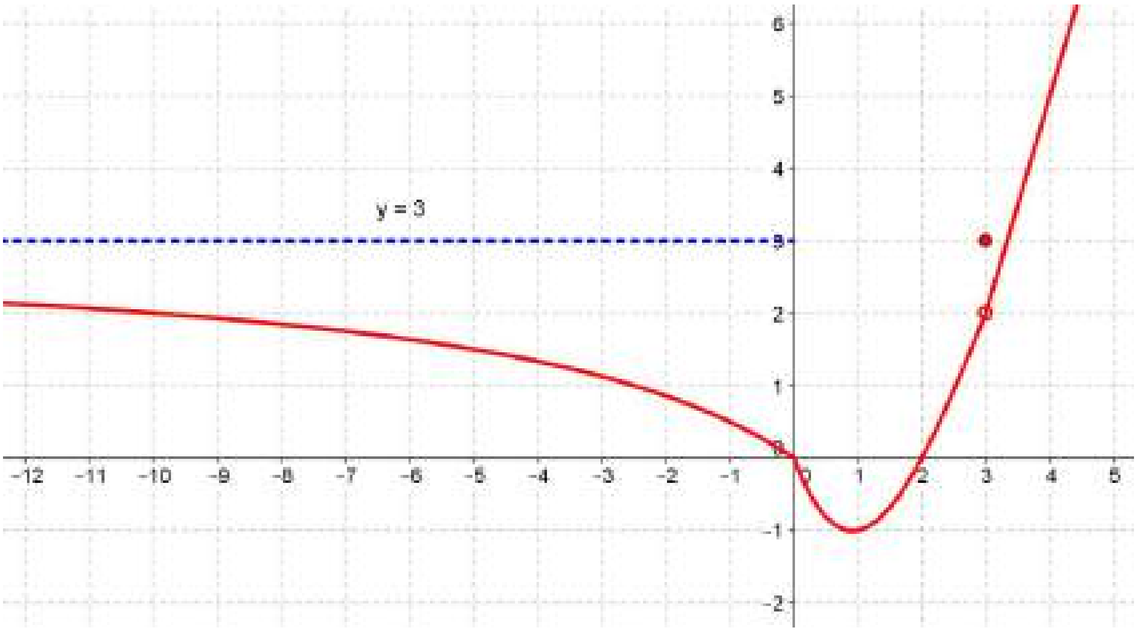
1. Las soluciones pueden verse en la tabla.

Apartados	Gráfica a)	Gráfica b)	Gráfica c)
a) Dom f	R	R	R
b) Im f	[0, 1)	R	[0, + ∞)
c) f (0)	0	2	1
d) f (1)	0	2	0
e) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$	1	1	1
f) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$	0	1	1
g) $\lim_{x\to 0} f(x)$	No existe	1	1
h) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$	1	2	1
i) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$	0	2	2
j) $\lim_{x\to 1} f(x)$	No existe	2	No existe
k) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$	No existe	- ∞	+ ∞

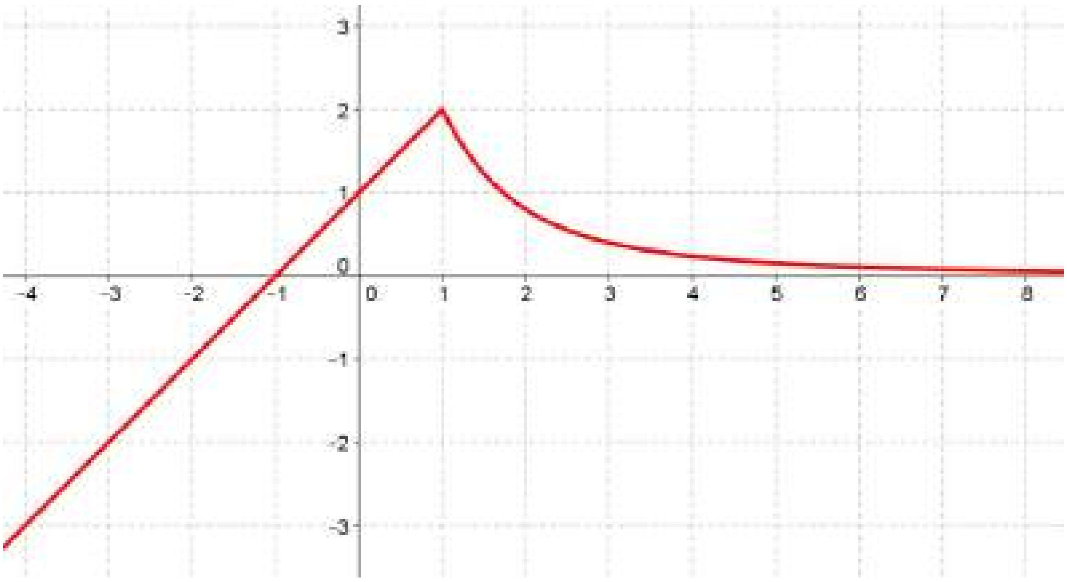
l) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	No existe	$+\infty$	$+\infty$

■ 2. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

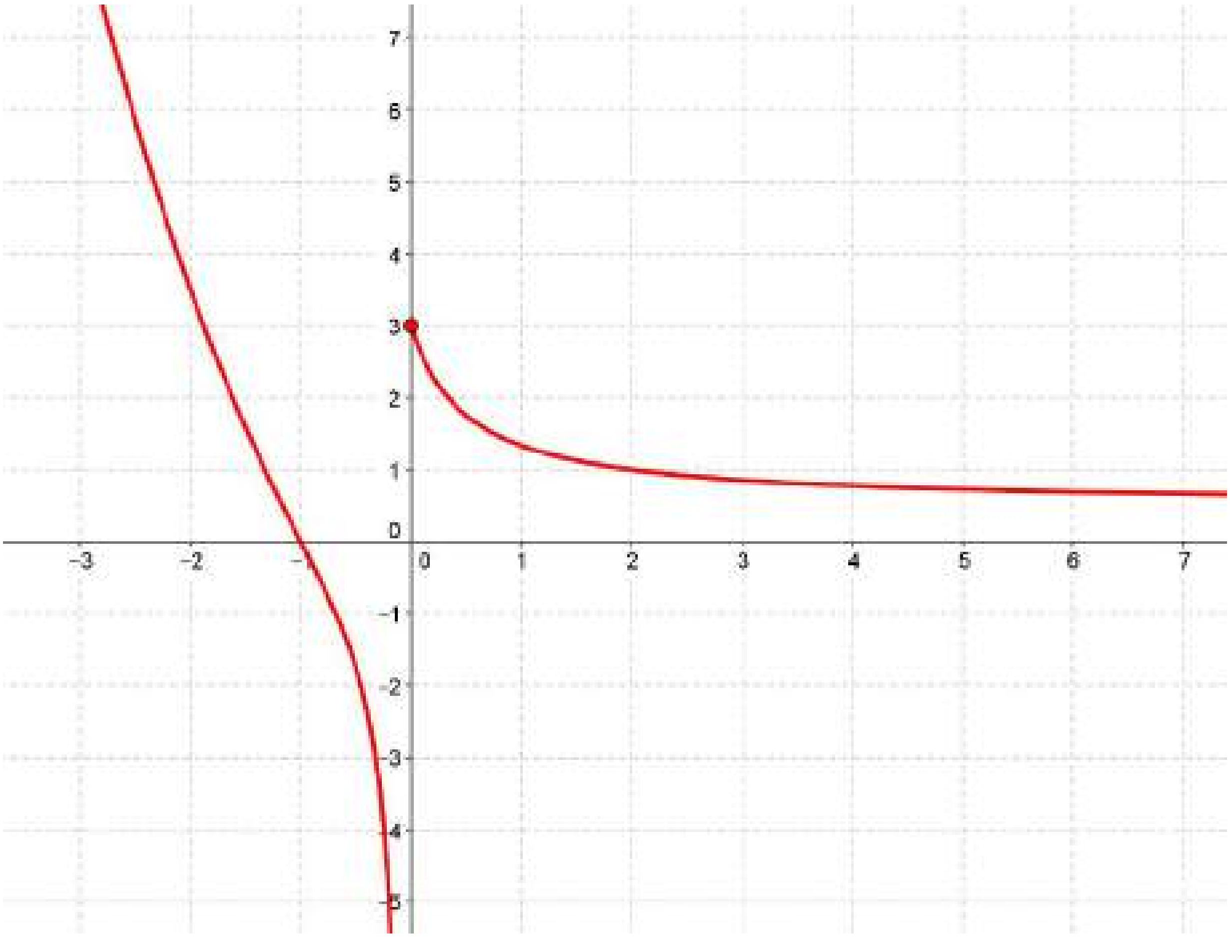
a) Dom f = R; Im f = $[-1, +\infty)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$; f (3) = 3; f (0) = 0 y f (2) = 0



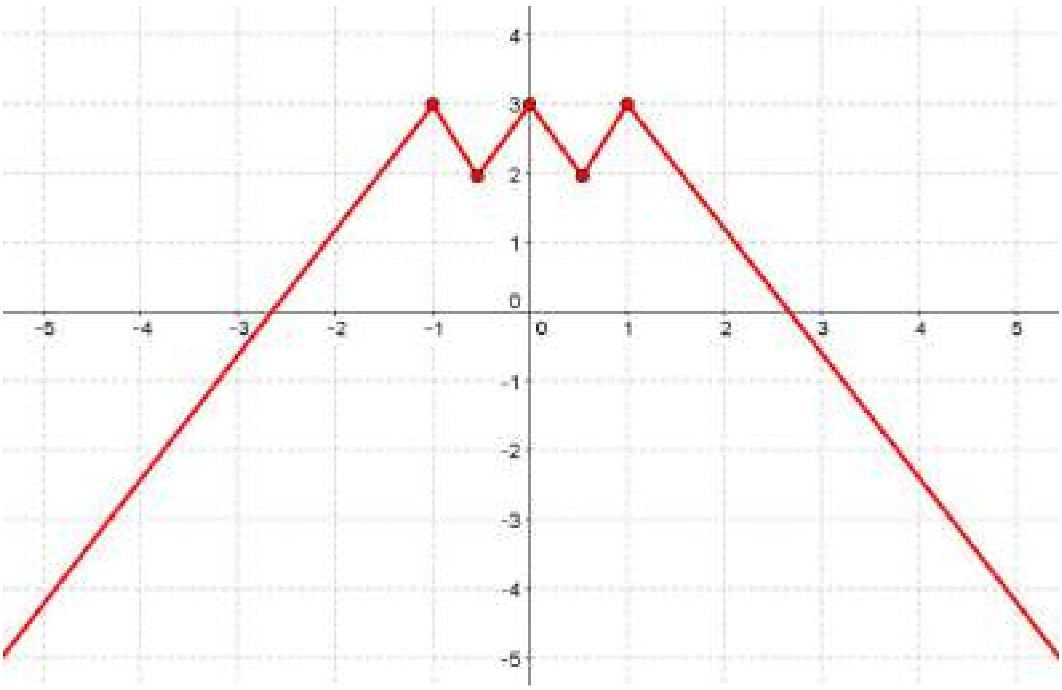
b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$; g (x) estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$; Im g = $(-\infty, 2]$.



c) Dom h = R; Im h = R; $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$



d) $\lim\limits_{x \to -1} j(x) = \lim\limits_{x \to 0} j(x) = \lim\limits_{x \to 1} j(x) = 3$



e) Dom k = R; Im k = $(-\infty, 2]$; $\lim\limits_{x \to 2} k(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} k(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x) = -1$

En esta actividad son incompatibles las condiciones: Im k = $(-\infty, 2]$ y $\lim\limits_{x \to 2} k(x) = +\infty$

Por lo que no existe una función cuya gráfica verifique esas condiciones.

3. La asociación es:

a) con (II) b) con (III) c) con (I)

ACTIVIDADES-PÁG. 297

4. Las soluciones son:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ no existe

d) Asíntotas horizontales: y = 0
Asíntotas verticales: x = - 1

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

h) $\lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = 1$

i) $\lim\limits_{x \to -1^+} g(x)$ no existe

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

k) Asíntotas horizontales: y = 0
Asíntotas verticales: x = - 1

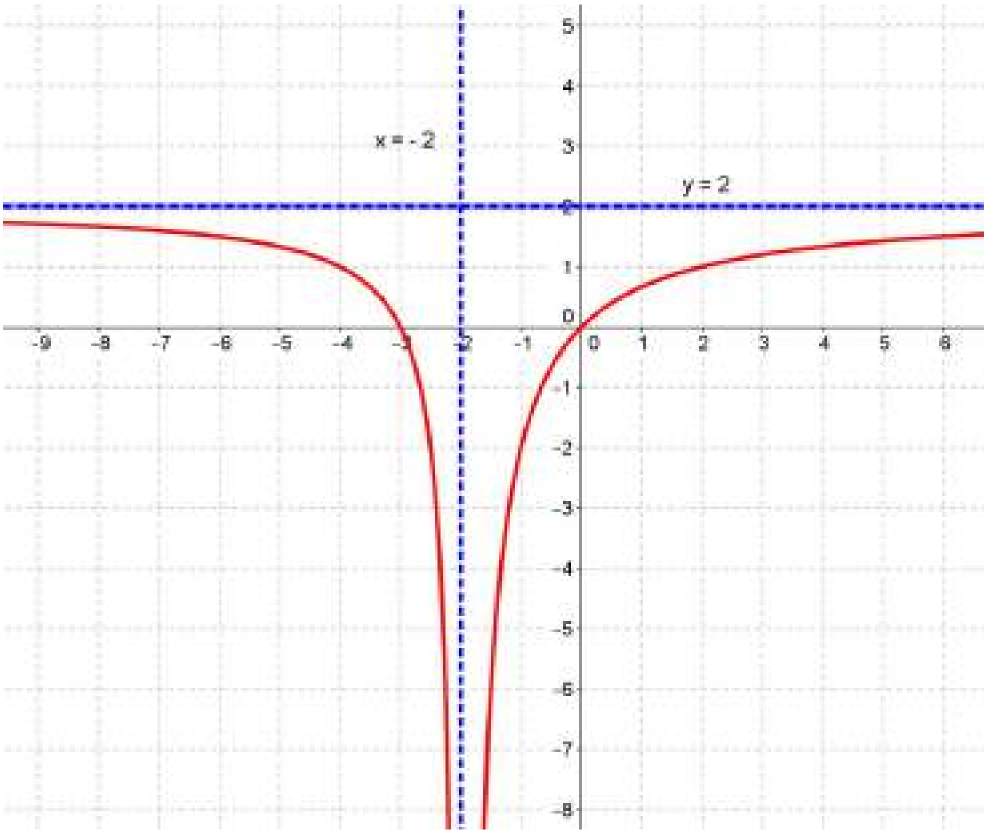
l) $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$ no existe

m) $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = -1$

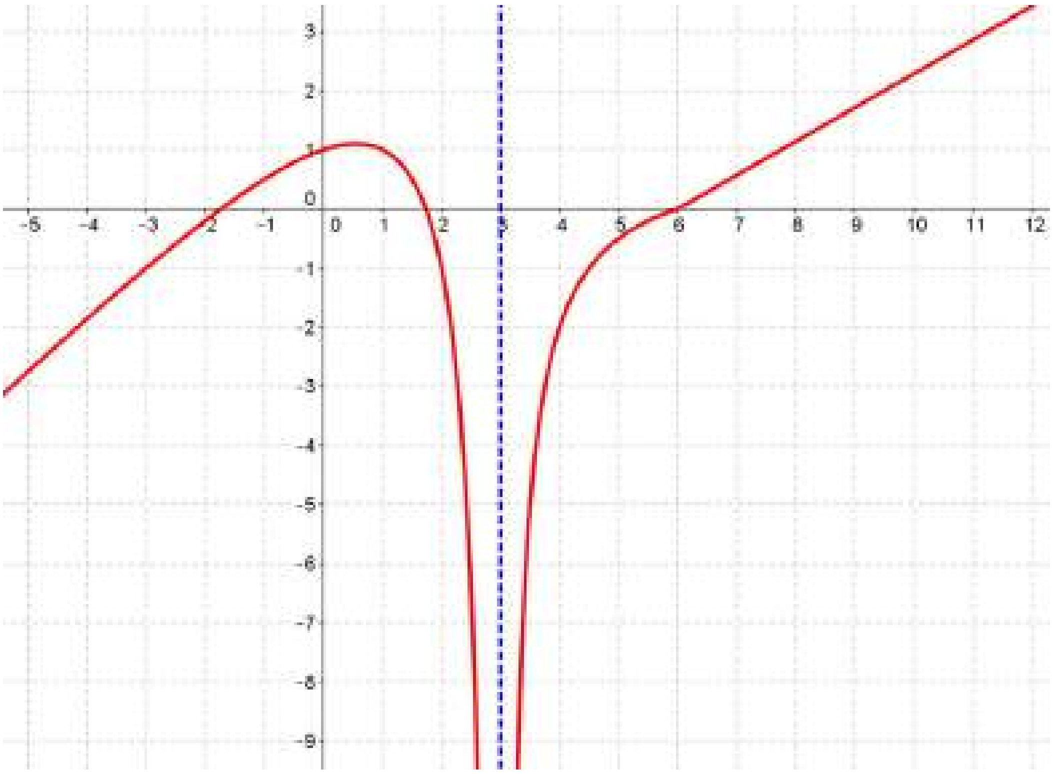
n) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

■ 5. Representa gráficamente funciones que satisfagan las siguientes condiciones:

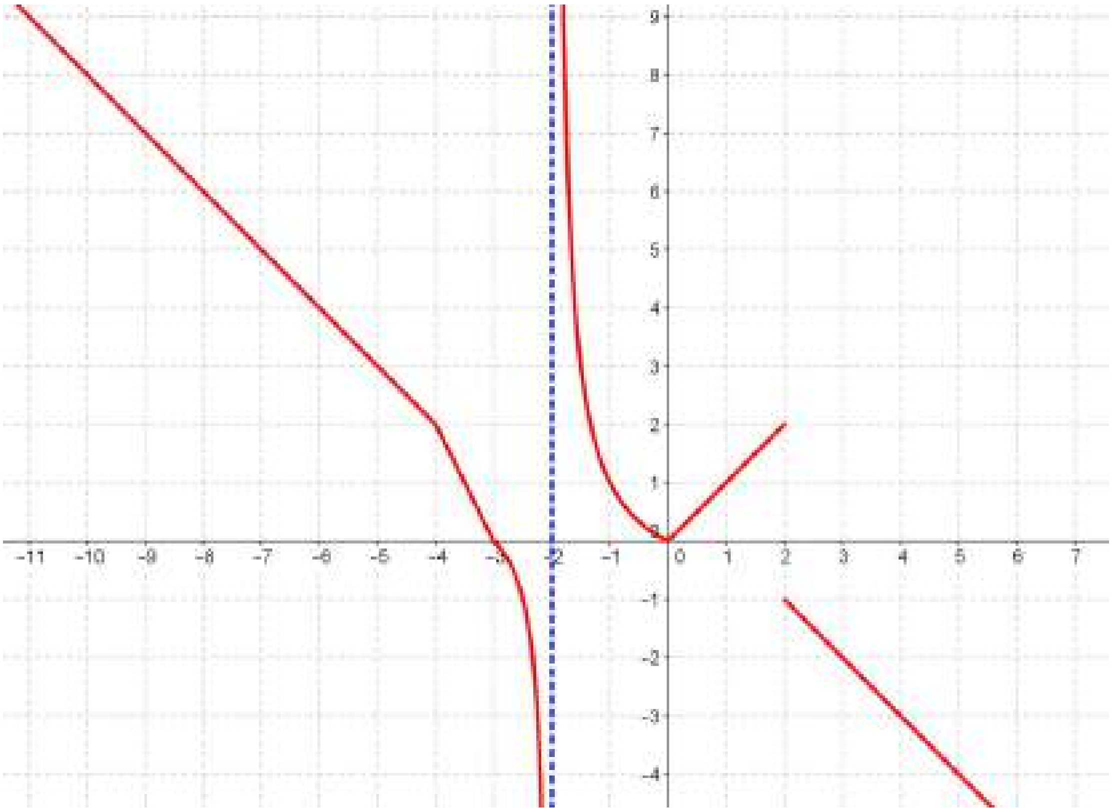
a) Asíntota vertical en x = - 2; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$



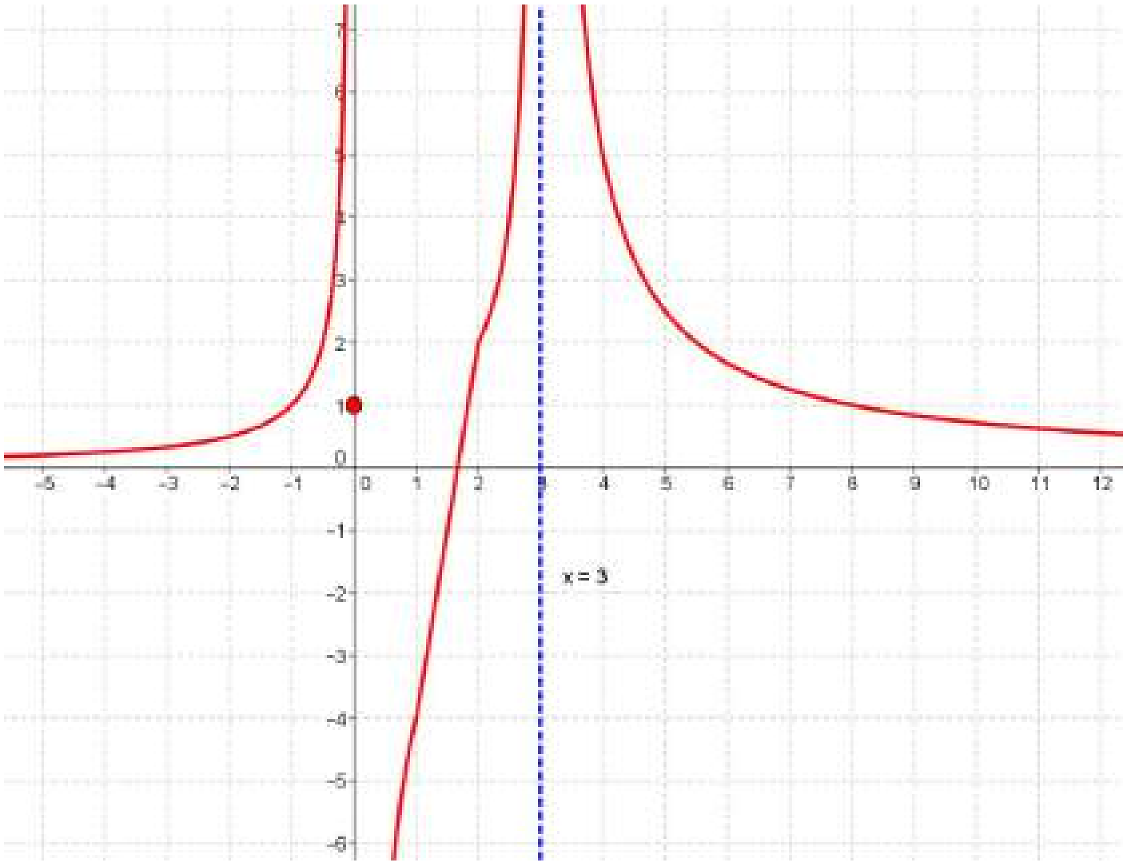
b) $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$



c) h (- 4) = 2; $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -1$



d) t (0) = 1; $\lim\limits_{x \to 0^+} ht(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2} t(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to 3^-} t(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} t(x) = +\infty$



6. Los valores de los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 5 = 5$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-3} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{1}{81}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^7 = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-5) = -5$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^8} = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^8} = 0$

h) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^{11}} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{11}} = 0$

j) $\lim\limits_{x \to -1} x^8 = 1$

k) $\lim\limits_{x \to 0^-} x^{-5} = -\infty$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^4} = +\infty$

m) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^5} = +\infty$

n) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^5} = -\infty$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$

p) $\lim\limits_{x \to 2} x = 2$

ACTIVIDADES-PÁG. 298

7. El valor de los límites es:

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe

d) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 1$

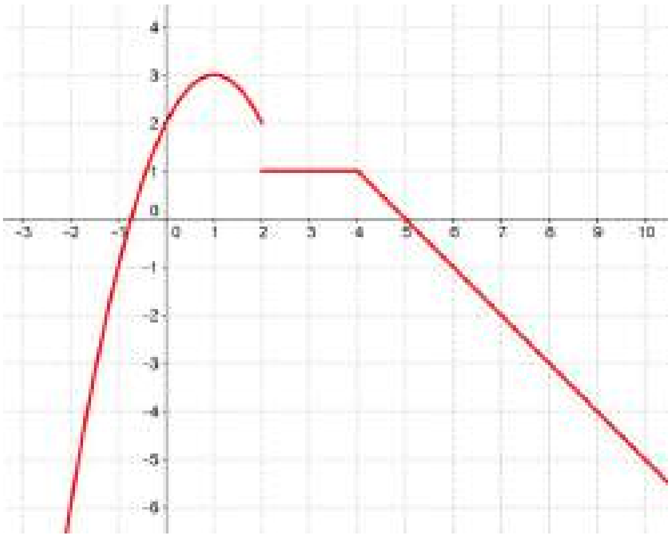
e) $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 1$

f) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 1$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Todo lo anterior puede verse en la gráfica que sigue.



8. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 + 5x - 2) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 5x - 4) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 - 6x^2 - 5) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{2x^3 - 4x + 6} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5x - 7}{-3x^2 - 3x + 4} = -1$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - 2x + 1}{6x^2 + 2x} = -\infty$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{2x} - 5} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 - 2}}{\sqrt[3]{8x^2 - 5x + 3}} = -\infty$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 7}}{4x} = \dfrac{1}{2}$

9. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3x} = -1$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2x}{2x^3 + 3x^2 + 2x} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{5x^2 - 7x - 6} = \dfrac{4}{13}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x} = -\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} = 4$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 + 1} = -\dfrac{4}{3}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 - 3x^3}{x^3 + x^2} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 9}$ no existe (los límites laterales son diferentes)

j) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2 - \sqrt{8 - x}}{3 - \sqrt{5 + x}} = -\dfrac{3}{2}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}} = 1$

l) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} = 2$

10. Los límites son:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ no existe, ya que: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^{+-}} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + x}{x^2} = +\infty$ ya que: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2 + x}{x^2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2 + x}{x^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 5}{|x - 3|} = 7$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x^3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x}{3} \right) [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(x^2 + 2x)}{3x^3} \left[\dfrac{0}{0} \right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x\,(x + 2)}{3x^3} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 1} \right) [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = 2$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} \left(\dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{x^2 + 2} \right) \right] [\infty \cdot 0] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x}{x^2\,(x + 2)(x^2 + 2)} \left[\dfrac{0}{0} \right] =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,(x - 1)}{x^2\,(x + 2)\,(x^2 + 2)}$ no existe, al ser los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x - 1}{x\,(x + 2)\,(x^2 + 2)} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 1}{x\,(x + 2)\,(x^2 + 2)} = -\infty$$

11. Los límites valen:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 2x + 3} - 2x \right) = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x} \left(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x} \right) \right] = \dfrac{3}{2}$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+2}{x+1} - \frac{x^2+1}{x} \right) = -1$

ACTIVIDADES-PÁG. 299

12. Los límites son:

a) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4x+2}{4x-3} \right)^{2x} = e^{\lim_{x \to +\infty} 2x \cdot \left(\frac{4x+2}{4x-3} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{10x}{4x-3}} = e^{\frac{5}{2}}$$

b) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-7}{3x} \right)^{\frac{2x^2+1}{3x}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+1}{3x} \cdot \left(\frac{3x-7}{3x} - 1 \right)} = e^{-\frac{14}{9}}$$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{x+5} \right)^{3x} = 2^{+\infty} = +\infty$

d) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{5x} \right)^{x^2} = e^{\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{5x} - 1 \right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

e) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5} \right)^{\frac{x^2}{2}} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{-5x^3+5x^2}{4x^2-2x-10}} = e^{-\infty} = 0$$

f) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5-3x}{4-3x} \right)^{x-3} = e^{\lim_{x \to +\infty} (x-3) \cdot \left(\frac{5-3x}{4-3x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \to +\infty} \frac{x-3}{-3x+4}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

g) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{2}{x} \cdot (1+3x-1)} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{6x}{x}} = e^6$$

h) Es una indeterminación del tipo 1^{∞}. El valor del límite es:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2+1}{x+1} \right)^{\frac{x^2+3}{x-1}} = e^{\lim_{x \to 1} \frac{x^2+3}{x+1} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x+1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \to 1} \frac{(x^2+3) \cdot x \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)}} = e^2$$

i) $\lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4x^2 - 2}{2x^2 + 1} \right)^{x+3} = 2^{-\infty} = 0.$

13. El valor del parámetro, en cada caso, es:

a) a = 1 b) a = 4 c) a = 1

14. A la vista de la gráfica podemos asegurar que:

a) La gráfica es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

b) La gráfica es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

c) La gráfica es continua para cualquier número real.

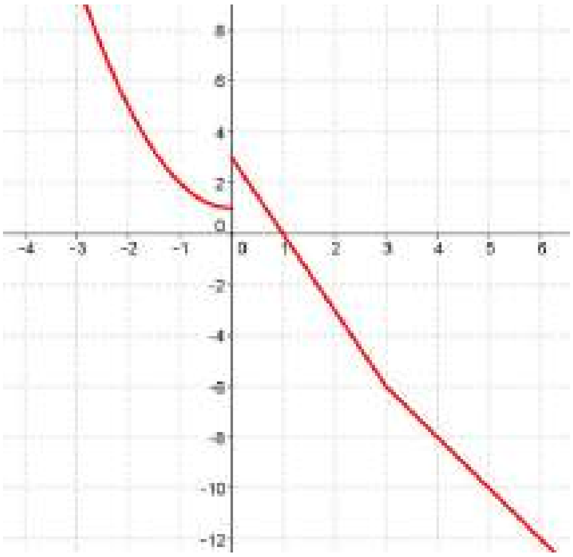
15. Los resultados son:

(I) a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ e) f (0) = 3

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$ f) f (1) = 0

c) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$ g) f (3) = - 6

d) $\lim_{x \to 3} f(x) = -6$



La función es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

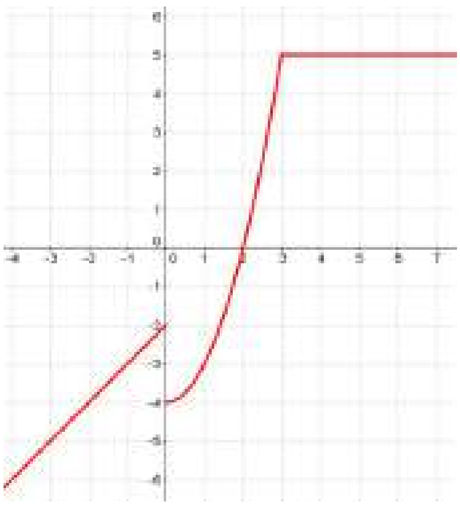
Todo lo anterior puede verse en la gráfica adjunta.

(II) a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$ e) f (0) = - 4

b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -4$ f) f (1) = - 3

c) $\lim_{x \to 1} f(x) = -3$ g) f (3) = 5

d) $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$



La función es continua para cualquier número real excepto para x = 0.

16. Los valores del parámetro a para que las funciones sean continuas es:

a) a = 6 b) a = 1

ACTIVIDADES-PÁG. 300

17. a) La función f (x) es continua en R – {- 3, 3}.

b) La función f (x) es continua en [- 2, 2].

c) La función f (x) no es continua en x = 4.

d) La función f (x) es continua en $\left(-3\,,+\,\infty\right)$.

e) La función f (x) es continua en R.

f) La función f (x) no es continua en x = 2 pues no esta definida.

g) La función f (x) es continua en R.

h) La función f (x) es continua en R - $\left\{\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right\}$

18. La función dada es discontinua evitable en x = 3. La redefinimos y queda:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5x^2-45}{2x-6} & si \quad x\neq 3\\ 15 & si \quad x=3\end{cases}$$

19. a) En este momento hay 4000 águilas. Al cabo de 8 años habrá 7368 águilas y al cabo de 12 años habrá 7556 águilas, es decir, habrá aumentado el número.

b) Calculamos $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{16t+12}{2t+3}\right)=8$, es decir se estabilizará en 8 000 animales.

20. I. La función exponencial es N (t) = 70 · $1{,}1^{t}$

II. La función logística es $N(t)=\dfrac{700}{1+9\cdot e^{-\frac{15t}{100}}}$

a) Resolviendo las ecuaciones $140 = 70\cdot 1{,}1^{t}$ y $140=\dfrac{700}{1+9\cdot e^{-\frac{15t}{100}}}$ obtenemos que con el modelo exponencial han de pasar 7,28 horas y con el modelo logístico han de pasar 5,4 horas.

b) La tabla pedida es:

t	Exponencial	Logística
0	70	70
1	77	80,03990464
2	84,7	91,31109437
3	93,17	103,903478
4	102,487	117,8960781
5	112,7357	133,3515017
6	124,00927	150,3098548
7	136,410197	168,7824405
8	150,0512167	188,7457263
9	165,0563384	210,1361945
10	181,5619722	232,8467645
15	292,4073719	359,4821809
20	470,9249965	483,6809455
25	758,429416	577,9589089

En las tablas anteriores observamos como el crecimiento con la función exponencial es al principio más lento que con la función logística y al pasar las horas es al contrario.

c) Calculamos $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(70 \cdot 1{,}1^t\right) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{700}{1 + 9 \cdot e^{-\frac{15t}{100}}} = 700$

Al pasar las horas el crecimiento exponencial es infinito y en cambio el logístico tiende a 700 que es el número total de individuos. El modelo logístico se ajusta más a este tipo de fenómenos.

ACTIVIDADES-PÁG. 301

a) Las funciones $y = \dfrac{2}{x^n}$ con n par son: $y = \dfrac{2}{x^2}$, $y = \dfrac{2}{x^4}$, $y = \dfrac{2}{x^6}$ …

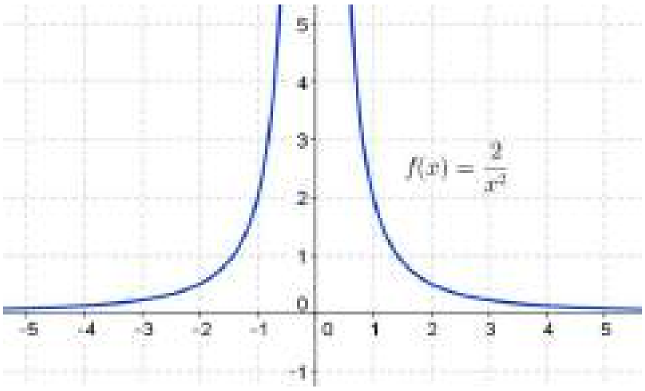
Sus principales características son:

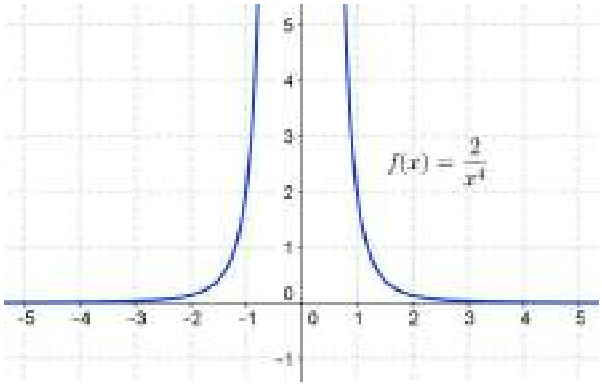
- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: $(0, +\infty)$
- Simetría respecto eje OY, ya que $f(-x) = \dfrac{2}{(-x)^n} = \dfrac{2}{x^n} = f(x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

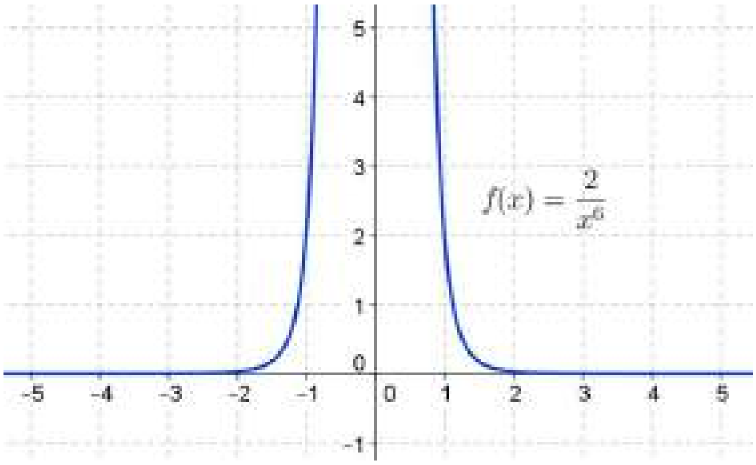
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

- Creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$. La primera derivada es $y' = \dfrac{-2n}{x^{n+1}}$
- Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en R – {0}. La segunda derivada es $y'' = \dfrac{2n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







Las funciones $y = \dfrac{2}{x^n}$ con n impar son: $y = \dfrac{2}{x}$, $y = \dfrac{2}{x^3}$, $y = \dfrac{2}{x^5} \dots$

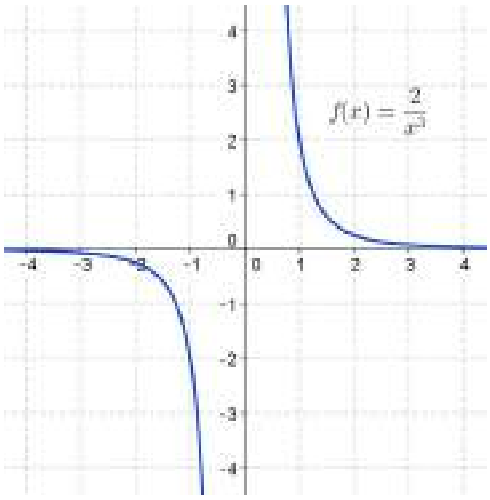
Sus principales características son:

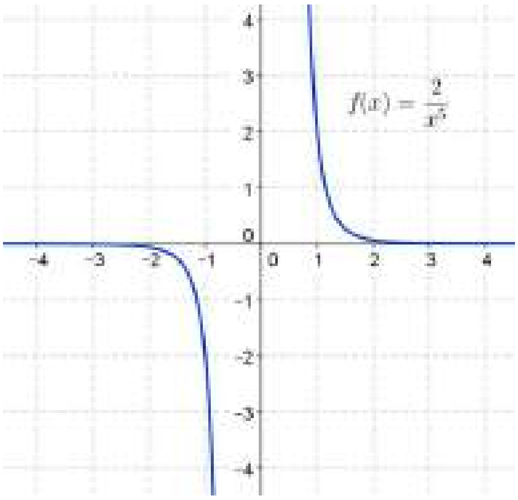
- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: R – {0}
- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f\ (-\ x) = \dfrac{2}{(-\ x)^n} = -\ \dfrac{2}{x^n} = -\ f\ (x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

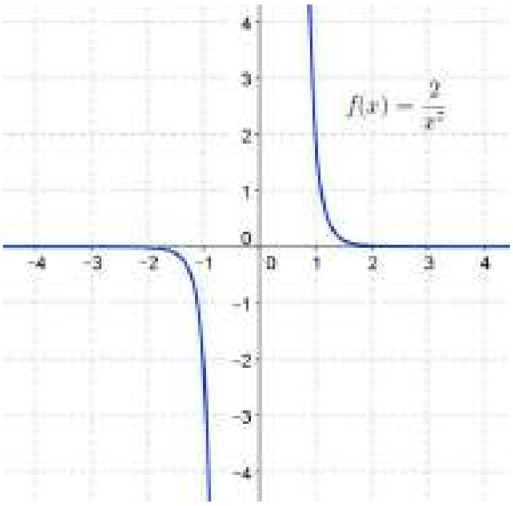
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

- Decreciente en R – {0}. La primera derivada es $y´ = \dfrac{-\ 2n}{x^{n+1}}$
- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(-\infty,\ 0)$ Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(0,\ +\infty)$. La segunda derivada es $y´´ = \dfrac{2n(n\ +\ 1)}{x^{n\ +\ 2}}$

Algunas de las gráficas son:







b) Estudiamos las principales características de las funciones $y = \frac{k}{x^n}$, siendo k un valor cualquiera.

b₁) En el caso k = 0, la función $y = \frac{0}{x^n} = 0$ es una función constante y no comparte las características de la familia de funciones.

b₂) En el caso k > 0 las características de las funciones coinciden con las descritas en el apartado anterior.

b₃) En el caso k < 0, por ejemplo k = - 3, tenemos dos opciones distintas:

(I) Las funciones $y = \frac{-3}{x^n}$ con n par son: $y = \frac{-3}{x^2}$, $y = \frac{-3}{x^4}$, $y = \frac{-3}{x^6}$ …

Sus principales características son:

- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: $(-\infty, 0)$

- Simetría respecto eje OY, ya que $f\ (-\ x) = \dfrac{-\ 3}{(-\ x)^n} = \dfrac{-\ 3}{x^n} = f\ (x)$

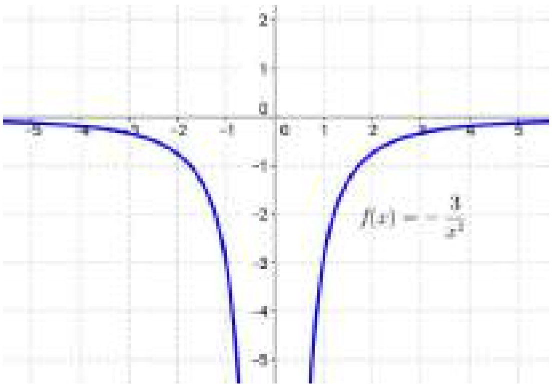
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

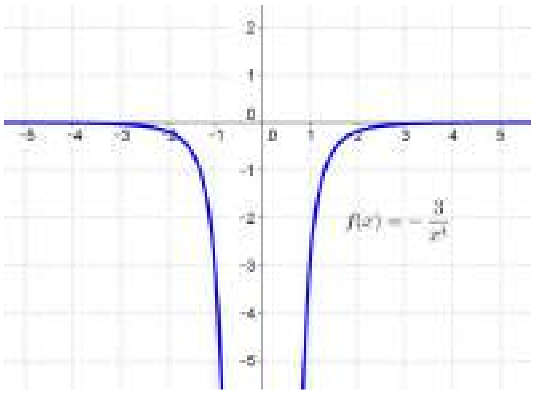
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-\ 3}{x^n} = -\ \infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ 3}{x^n} = -\ \infty \qquad \lim_{x \to -\ \infty} \frac{-\ 3}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\ \infty} \frac{-\ 3}{x^n} = 0$$

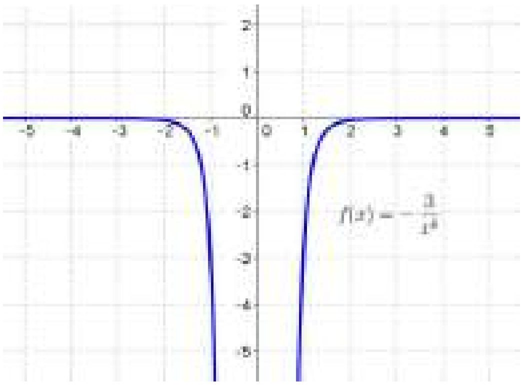
- Decreciente en $(-\ \infty,\ 0)$ y creciente en $(0,\ +\ \infty)$. La primera derivada es $y' = \dfrac{3n}{x^{n+1}}$

- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en R – {0}. La segunda derivada es $y'' = -\dfrac{3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







(II) Las funciones $y = \dfrac{-\ 3}{x^n}$ con n impar son: $y = \dfrac{-\ 3}{x}$, $y = \dfrac{-\ 3}{x^3}$, $y = \dfrac{-\ 3}{x^5} \ldots$

Sus principales características son:

- Dominio: R – {0}.

- Recorrido: R – {0}

- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f\ (-\ x) = \dfrac{-3}{(-\ x)^n} = \dfrac{3}{x^n} = -\ f\ (x)$

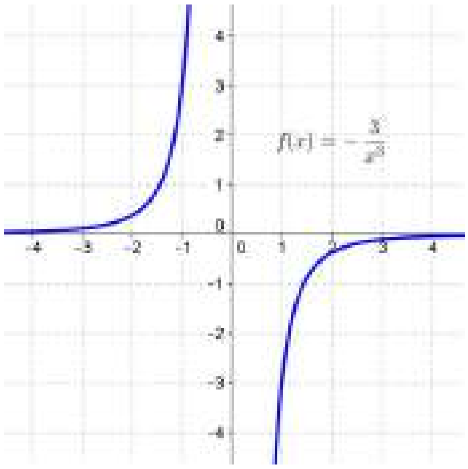
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

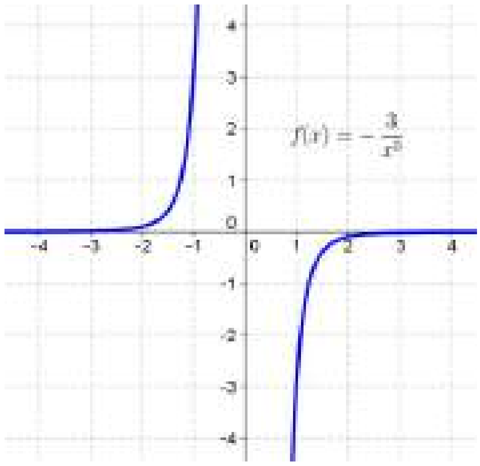
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-3}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{-3}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{x^n} = 0$$

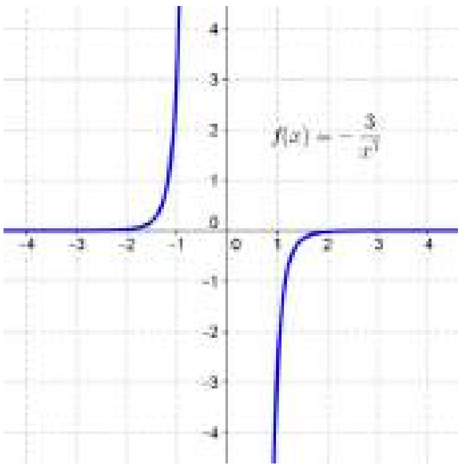
- Creciente en R – {0}. La primera derivada es $y' = \dfrac{3n}{x^{n+1}}$

- Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(-\infty, 0)$. Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(0, +\infty)$. La segunda derivada es $y'' = \dfrac{-3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







c) Las respuestas a los aparatados aparecen a continuación:

c_1) La derivada de la función $y = \dfrac{k}{x^n}$ es $y' = -\dfrac{kn}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a, \dfrac{k}{a^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{a^n} = -\frac{kn}{a^{n+1}}(x - a) \qquad \Rightarrow \qquad knx + a^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A:\begin{cases} knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\dfrac{n+1}{n}a,\, 0\right)$$

$$B:\begin{cases} x = 0 \\ knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k(n+1)}{a^n} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0,\, \dfrac{k(n+1)}{a^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

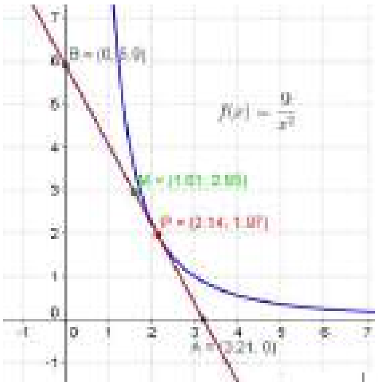
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{k(n+1)}{a^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2a^n}$$

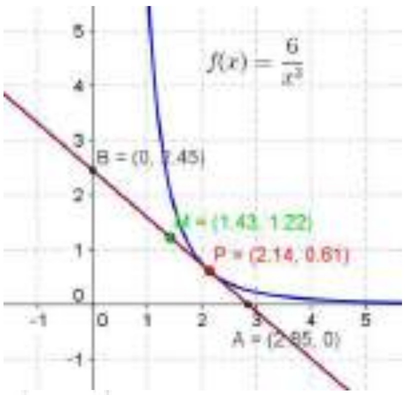
Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

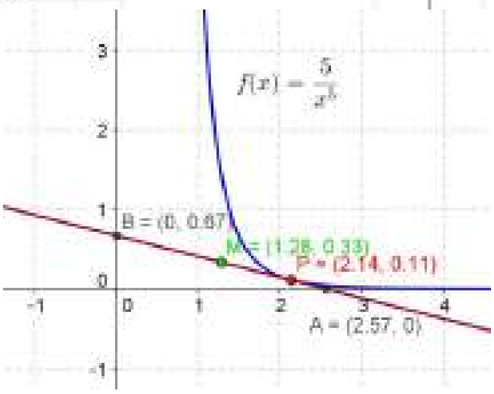
$$x_M = x_P \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{2n}a = a \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{2n} = 1 \;\Rightarrow\; n+1 = 2n \;\Rightarrow\; n = 1$$

$$y_M = y_P \;\Rightarrow\; \frac{k(n+1)}{2a^n} = \frac{k}{a^n} \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{2} = 1 \;\Rightarrow\; n+1 = 2 \;\Rightarrow\; n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M (en color verde), del segmento de extremos A y B no es el punto P (en color rojo). Esto puede observarse en los dibujos que siguen.







c_2) El área del triángulo OAB es:

$$\acute{A}rea = \frac{OA \cdot OB}{2} \quad \Rightarrow \quad \acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} a \right) \cdot \frac{k\ (n+1)}{a^n} \quad \Rightarrow \quad \acute{A}rea = \frac{k\ (n+1)^2}{2na^{n-1}}$$

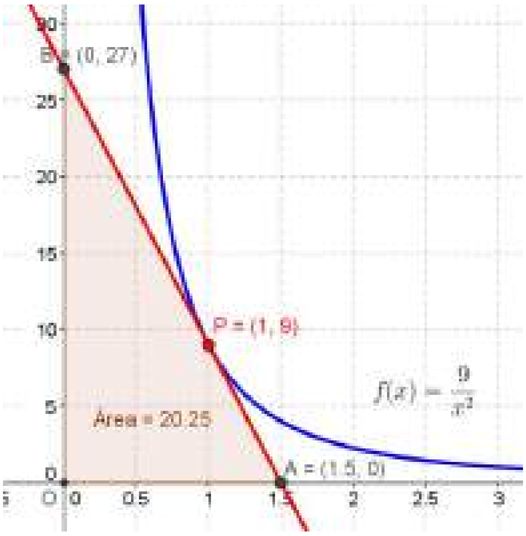
Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

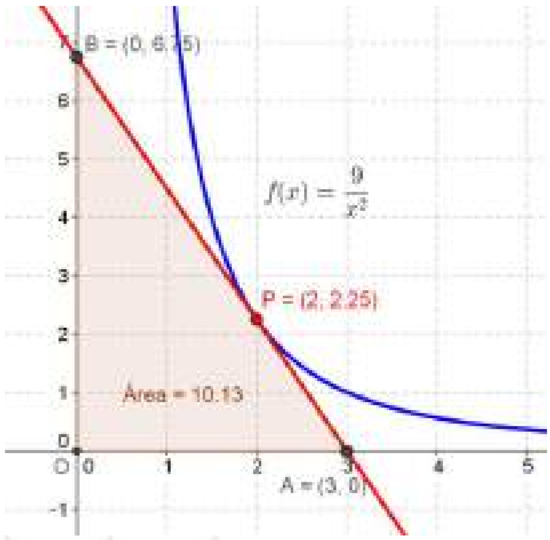
En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f\ (x) = \dfrac{9}{x^2}$ en los puntos de abscisas a = 1, a = 2 y a = 3.

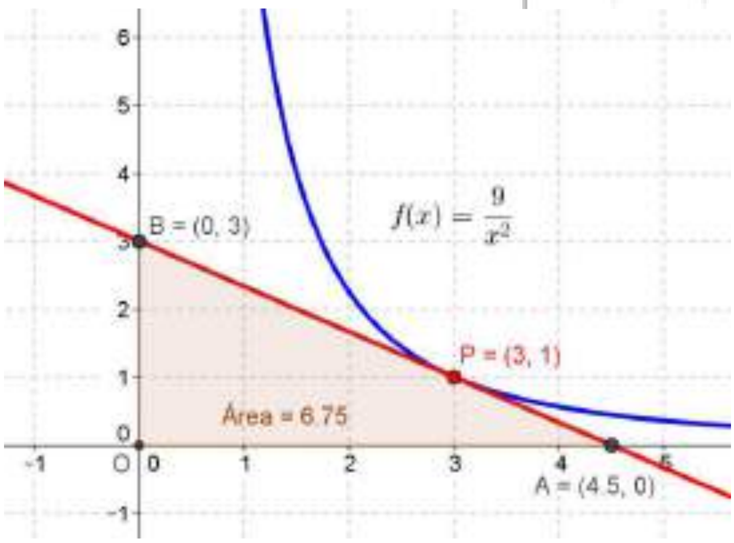
Si k = 9, n = 2 y a = 1, obtenemos: $\acute{A}rea = \dfrac{9\ (2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1^{2-1}} = \dfrac{81}{4} = 20{,}25\ u^2$.

Si k = 9, n = 2 y a = 2, obtenemos: $\acute{A}rea = \dfrac{9\ (2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2^{2-1}} = \dfrac{81}{8} = 10{,}125\ u^2$.

Si k = 9, n = 2 y a = 3, obtenemos: $\acute{A}rea = \dfrac{9\ (2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 3^{2-1}} = \dfrac{81}{12} = 6{,}75\ u^2$.







d) Las respuestas a los apartados aparecen a continuación:

d₁) La derivada de la función $y = \dfrac{k}{nx^n}$ es $y\,' = -\dfrac{k}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a, \dfrac{k}{na^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{na^n} = -\frac{k}{a^{n+1}}(x-a) \quad \Rightarrow \quad knx + na^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A: \begin{cases} knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{n+1}{n}a, 0\right)$$

$$B: \begin{cases} x = 0 \\ knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k(n+1)}{na^n} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, \frac{k(n+1)}{na^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

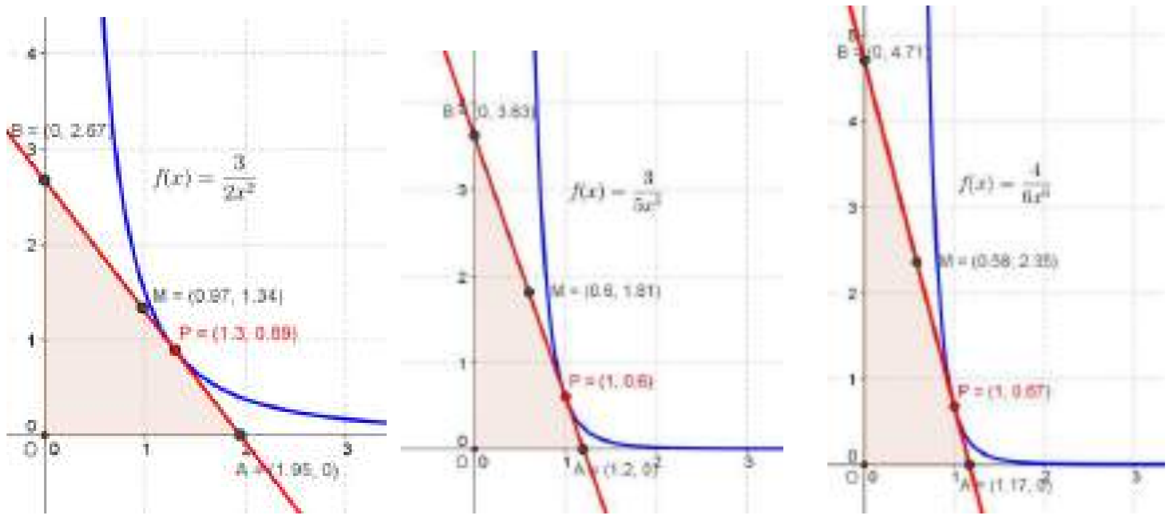
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{k(n+1)}{na^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2na^n}$$

Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

$$x_M = x_P \Rightarrow \frac{n+1}{2n}a = a \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = 1 \Rightarrow n+1 = 2n \Rightarrow n = 1$$

$$y_M = y_P \Rightarrow \frac{k(n+1)}{2na^n} = \frac{k}{na^n} \Rightarrow \frac{n+1}{2} = 1 \Rightarrow n+1 = 2 \Rightarrow n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M, del segmento de extremos A y B nunca coincide con el punto P. Esto puede observarse en los dibujos que siguen.



d_2) El área del triángulo OAB es:

$$Área = \frac{OA \cdot OB}{2} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \, a \right) \cdot \frac{k \; (n+1)}{na^n} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{k \; (n+1)^2}{2n^2 a^{n-1}}$$

Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f\ (x) = \frac{5}{2x^2}$ en los puntos de abscisas a = 1, a = 2 y a = 3.

Si k = 5, n = 2 y a = 1, obtenemos: $Área = \frac{5\ (2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 1^{2-1}} = \frac{45}{8} = 5{,}625\ u^2$.

Si k = 5, n = 2 y a = 2, obtenemos: $Área = \frac{5\ (2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{2-1}} = \frac{45}{16} = 2{,}81\ u^2$.

ZXZxZXZX

Si k = 5, n = 2 y a = 3, obtenemos: $Área = \frac{5\ (2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 3^{2-1}} = \frac{45}{24} = 1{,}875\ u^2$.