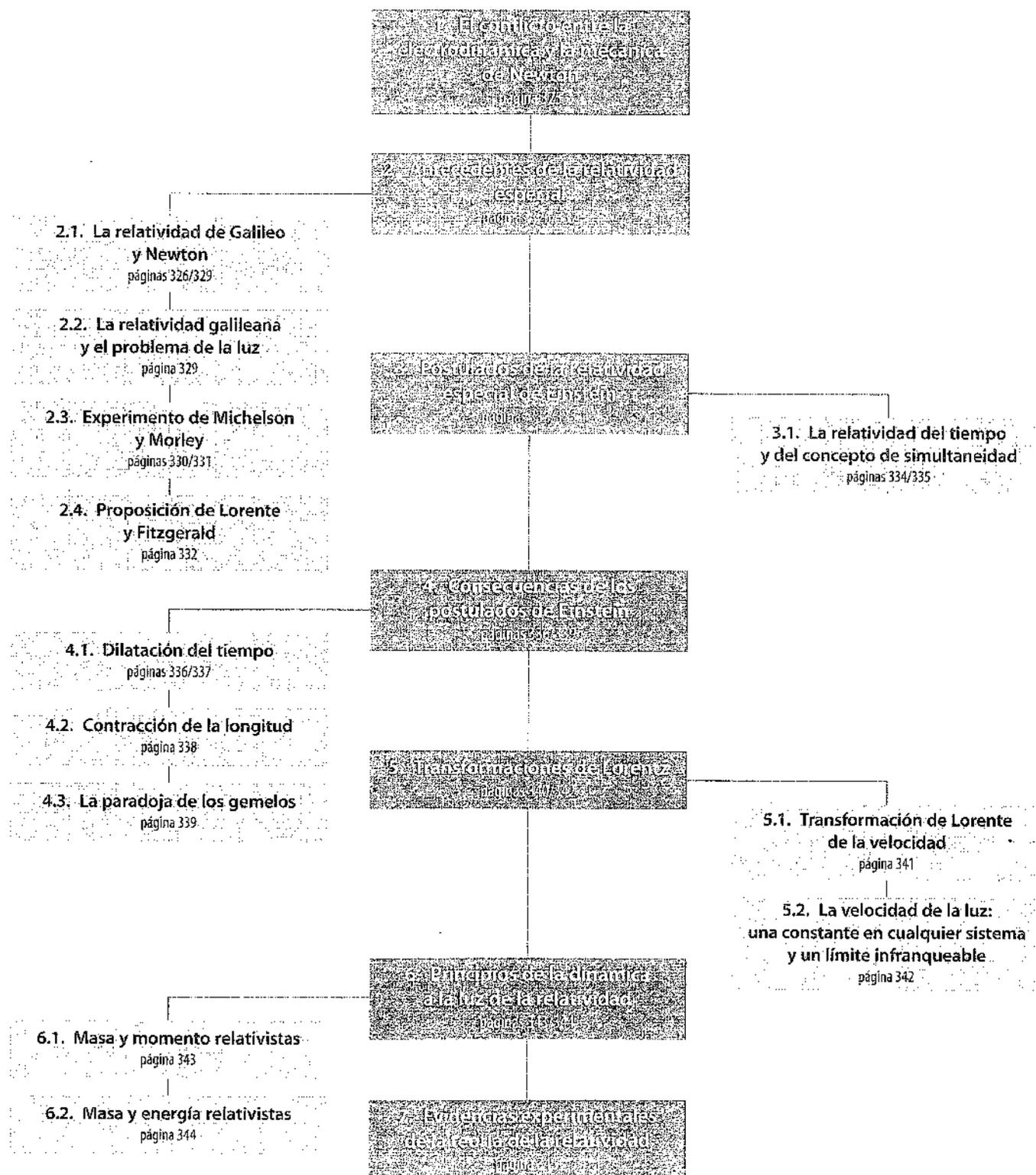


12

Principios de la relatividad especial

E S Q U E M A D E L A U N I D A D



Cuestiones previas (página 324)

1. Como sabes, la velocidad de la luz en el vacío de unos 300 000 km/s. Ahora bien, ¿qué valor tendría para un observador que se desplazara a 50 000 km/s en la misma dirección de propagación de la luz?

Si el observador se desplaza en la misma dirección y sentido que la velocidad de la luz, la velocidad relativa entre ambos sistemas sería la velocidad de la luz que observa la persona:

$$\vec{v} = \vec{v}_O - \vec{v}_O = 300\,000 \text{ km/h} - 50\,000 \text{ km/h} = 250\,000 \text{ km/h}$$

2. ¿Es el tiempo una variable independiente, es decir, transcurre por igual para todos los observadores, con independencia de si se mueven o no?

No es independiente, el tiempo será distinto para dos observadores en movimiento relativo de uno con respecto al otro.

3. Imagínate un objeto que se mueve a la velocidad de la luz con respecto a un observador O' que, a su vez, se mueve a la velocidad de la luz en relación con otro observador O que está en reposo. ¿A qué velocidad se mueve el objeto con respecto a O?

Se mueve a la velocidad c, debido a que la velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas inerciales, con independencia de su movimiento relativo.

4. ¿En qué consiste la «paradoja de los gemelos»?

La paradoja de los gemelos consiste en dos gemelos imaginarios que uno de ellos emprende un viaje a velocidades próximas a la de la luz; el tiempo pasaría más lentamente que para su hermano, por lo que, a su regreso, lo encontraría envejecido.

Actividades (páginas 328/345)

1. Una trainera emplea 10 min en recorrer 4 km cuando navega a favor de la corriente. Esos mismos 4 km los recorre en 24 minutos al navegar a contracorriente.

¿Cuál es la velocidad de la trainera y la de la corriente con respecto a un observador que se halla en reposo en la orilla?

La velocidad de la trainera cuando navega a favor de la corriente es, desde el punto de vista de un observador situado en tierra $v + v_c$, donde v es la velocidad de la trainera con respecto al agua, y v_c es la velocidad de la corriente.

Por tanto, al navegar a favor de la corriente, se debe cumplir que:

$$d = (v + v_c) t$$

Es decir:

$$4\,000 \text{ m} = (v + v_c) \cdot 600 \text{ s}$$

Por otro lado, al navegar a contracorriente:

$$d = (v - v_c) t'$$

Es decir:

$$4\,000 \text{ m} = (v - v_c) \cdot 1\,440 \text{ s}$$

De ambas expresiones obtenemos que:

$$v + v_c = 6,67 \text{ m/s}$$

$$v - v_c = 2,78 \text{ m/s}$$

Resolviendo el sistema, encontramos que:

$$v = 4,73 \text{ m/s}$$

$$v_c = 1,94 \text{ m/s}$$

2. La posición de una partícula según el sistema O es $\vec{r} = (4t^2 - 2t)\vec{i} - t^2\vec{j} + 2\vec{k}$ m, mientras que con respecto a O' es $\vec{r}' = (4t^2 + 3t)\vec{i} - t^2\vec{j} - 4\vec{k}$ m.

a) ¿Cuál es la velocidad relativa entre ambos sistemas?

b) ¿Se cumplen las leyes físicas por igual en ambos sistemas? Demuéstralo.

a) La velocidad relativa entre ambos sistemas vendrá dada por:

$$\vec{v} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'}$$

donde:

$$\vec{v}_O = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8t - 2)\vec{i} - 2t\vec{j} \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{O'} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = (8t + 3)\vec{i} - 2t\vec{j} \text{ m/s}$$

Por lo que:

$$\vec{v} = \vec{v}_O - \vec{v}_{O'} = -5\vec{i} \text{ m/s}$$

Es decir, O' se aleja relativamente de O hacia la izquierda.

b) Si la aceleración de la partícula que miden ambos observadores es la misma, las leyes físicas serán iguales para ambos.

Como las aceleraciones coinciden (bajo la suposición de que el tiempo transcurre por igual en ambos sistemas):

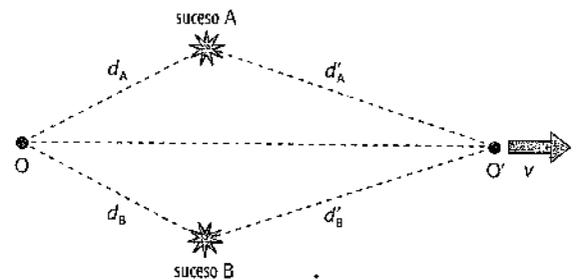
$$\vec{a}_O = \frac{d\vec{v}_O}{dt} = 8\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m/s}^2$$

$$\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} = 8\vec{i} - 2\vec{j} \text{ m/s}^2$$

las leyes físicas que describen ambos observadores serán también las mismas.

3. Dos observadores se mueven relativamente uno con respecto al otro; ¿podrían estar de acuerdo sobre la simultaneidad de dos sucesos en alguna circunstancia?

Podrían estar de acuerdo, por ejemplo, si los dos sucesos ocurren en posiciones equidistantes para cada uno de los observadores:



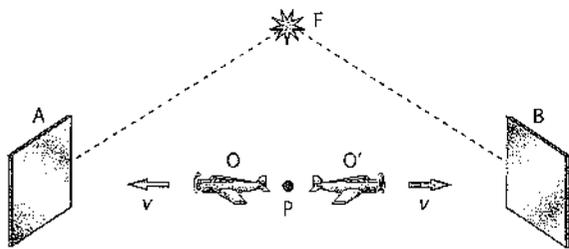
Para O, $d_A = d_B$, y, del mismo modo, para O', $d'_A = d'_B$.

Por tanto, ambos observadores estarían de acuerdo en este caso sobre la simultaneidad de los sucesos.

4. Para cierto sistema de referencia, un suceso A ocurre antes que otro B. ¿Podría ocurrir lo contrario en otro sistema de referencia?

Podría ocurrir, en efecto, lo contrario en otro sistema de referencia. Supongamos, por ejemplo, que una misma señal de luz es enviada desde un foco F equidistante con respecto a las pantallas A y B reflectantes.

Para el observador O, que se dirige hacia A desde el punto P con una velocidad v , la luz llega a A antes que a B. Por el contrario, para el observador O' que se dirige hacia B desde P, la luz llega a B antes que a A.



- 5 Un viaje interestelar a un sistema planetario extrasolar ha durado, según los relojes de a bordo de la nave, 4 años, a una velocidad constante de $0,9 \cdot c$. ¿Cuánto tiempo ha durado el viaje según el centro de control de Tierra?

Para el control de Tierra, la duración del viaje es de:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,9 \cdot c)^2}{c^2}}} = 2,29$$

Por tanto:

$$\Delta t = 9,16 \text{ años}$$

- 6 Una vara de 1 m de longitud se mueve con respecto a nuestro sistema de referencia con una velocidad de $0,7 \cdot c$. ¿Cuál sería la longitud que mediríamos? ¿A qué velocidad debería moverse la vara para que su longitud fuera de 50 cm para nosotros?

La longitud que mediríamos vendría dada por:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,714 \text{ m}$$

Para que su longitud fuese de 0,5 m medida en nuestro sistema, su velocidad tendría que ser de $0,867 \cdot c$, como vamos a comprobar.

Si $l' = 0,5 \text{ m}$, entonces:

$$0,5 = 1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = 0,25$$

Es decir:

$$v = \sqrt{0,75} \cdot c = 0,867 \cdot c$$

- 7 Los astronautas de una nave interestelar que viaja al 99% de la velocidad de la luz deciden emplear una hora de su tiempo para la comida. ¿Cuánto dura esta para el centro de control de Tierra?

Para el control de Tierra, la comida duraría siete horas, pues:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

y sustituyendo los datos:

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,99 \cdot c)^2}{c^2}}} = 7 \text{ h}$$

- 8 ¿Podría una persona que viviera 90 años hacer un viaje de ida y vuelta a un sistema estelar que se encontrara a 100 años luz? Explica tu respuesta.

Podría, en efecto, realizar el viaje. Si se desplazara, por ejemplo, a una velocidad de $0,99 \cdot c$, la distancia entre la Tierra y el sistema estelar, medida en su sistema, sería:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 100 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,99 \cdot c)^2}{c^2}}$$

Es decir:

$$l' = 14,1 \text{ años luz}$$

Por tanto, el tiempo que emplearía en su trayecto de ida y vuelta sería de:

$$\Delta t' = \frac{2l'}{v} = \frac{2 \cdot 14,1 \cdot c}{0,99 \cdot c} = 28,48 \text{ años}$$

Por el contrario, para una persona en Tierra habrían transcurrido 202 años.

- 9 ¿Qué contracción de longitud experimentaría el diámetro terrestre (12 740 km) desde un sistema de referencia con respecto al cual la Tierra se moviera a 30 km/s?

La longitud medida desde el sistema de referencia sería de:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo los datos:

$$l' = 12\,740 \cdot \sqrt{1 - \frac{30^2}{300\,000^2}}$$

Es decir:

$$l' = 12\,739,999\,94 \text{ km}$$

Por tanto, la contracción del diámetro terrestre vendría dado por:

$$\Delta l = l - l' = 6,37 \cdot 10^{-5} \text{ km} = 0,063\,7 \text{ m} = 6,37 \text{ cm}$$

- 10 ¿Podría viajar un equipo de astronautas a un sistema estelar que se encontrara a 500 años luz (suponiendo que no hubiese problemas técnicos y que la tripulación dispusiese de métodos de protección frente a la radiación inducida)?

Podría viajar si se desplazase a una velocidad de $0,999 \cdot c$, en cuyo caso, para el equipo de astronautas, la distancia al sistema estelar sería de:

$$l' = 500 \cdot \sqrt{1 - \frac{(0,999 \cdot c)^2}{c^2}} = 22,35 \text{ años luz}$$

El tiempo que emplearían en el viaje de ida y vuelta el equipo de astronautas, sería de:

$$\Delta t' = \frac{2l'}{v} = \frac{2 \cdot 22,35 \cdot c}{0,999 \cdot c} = 44,74 \text{ años}$$

Por el contrario, para un observador en Tierra habrían transcurrido 1 001 años.

- 11 Dos cuerpos, A y B, se alejan de un observador O en el mismo sentido y con una velocidad de $0,5 \cdot c$ y de $0,3 \cdot c$, respectivamente, en relación con O.

a) ¿Cuál es la velocidad de A medida desde B?

b) ¿Concuerda el resultado anterior con el que se obtendría aplicando la transformación galileana?

a) La velocidad de A medida desde B vendría dada por la expresión de la transformación de Lorentz de la velocidad (12.16):

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

Sustituyendo los datos, llegamos a:

$$v'_x = \frac{0,5 \cdot c - 0,3 \cdot c}{1 - \frac{0,3 \cdot c}{c^2} \cdot 0,5 \cdot c} = 0,235 \cdot c$$

b) El resultado, evidentemente, no concuerda con el que obtendríamos aplicando la transformación de Galileo, que sería:

$$v'_x = v_x - v = 0,5 \cdot c - 0,3 \cdot c = 0,2 \cdot c$$

- 12** Un fotón en reposo tiene una energía cero, lo que significa que su masa en reposo es también cero. ¿Qué sentido físico encierra esta aseveración?

El significado físico de esta aseveración es que un fotón no puede existir en reposo, lo que es consistente con la propia naturaleza de la luz: no es posible que la luz esté en reposo. Como se ha demostrado en el subepígrafe 5.2, incluso para un observador que se moviera a la velocidad de la luz, esta seguiría moviéndose a la velocidad c ; en consecuencia, un fotón nunca podría estar en reposo. Su existencia solo es posible a la velocidad de la luz.

- 13** Un muón tiene una energía en reposo de 105,7 MeV y se mueve con una velocidad igual a $0,7 \cdot c$. Calcula su energía total, su energía cinética y su momento lineal.

La energía total es:

$$E_{\text{total}} = \gamma m_0 c^2 = \gamma E_0$$

donde E_0 es la energía en reposo.

Puesto que $v = 0,7 \cdot c$, entonces:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,4$$

Y por tanto:

$$E_{\text{total}} = 147,98 \text{ MeV}$$

La energía cinética del muón es la diferencia entre la energía total y la energía en reposo, E_c , por lo que:

$$E_c = E_{\text{total}} - E_0 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = 42,28 \text{ MeV}$$

Por otra parte, el momento lineal será:

$$p = \gamma m_0 v = \gamma m_0 \cdot 0,7 \cdot c = \frac{\gamma m_0 c^2 \cdot 0,7}{c} = \frac{0,7 \cdot E_{\text{total}}}{c} = 103,586 \text{ MeV}/c$$

Esta unidad, MeV/c , es la más conveniente para el momento lineal relativista.

Cuestiones y problemas (páginas 348/349)

Guía de repaso

- 1** ¿Qué propiedades mecánicas se le asignaban al «éter luminífero» para explicar el elevado valor de la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas?

La elasticidad y rigidez.

- 2** ¿Qué es lo que afirma el principio de relatividad de Galileo y Newton?

Las leyes físicas son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.

- 3** ¿Es distinta la distancia entre dos puntos medida por observadores situados en sistemas de referencia inerciales galileanos? ¿Por qué?

La distancia medida entre dos puntos es la misma. Es una de las consecuencias de las transformaciones galileanas.

- 4** ¿Es distinta la velocidad de un cuerpo observada desde dos sistemas de referencia inerciales galileanos que se desplazan con movimiento relativo uno con respecto al otro? ¿Por qué?

Es distinta ya que depende del movimiento relativo entre ambos.

- 5** ¿Es invariable la aceleración en todos los sistemas de referencia inerciales galileanos? Explica qué implicaciones tiene este hecho.

Si es invariable y tiene dos implicaciones muy importantes: la primera que las leyes físicas son las mismas para observadores que se encuentren en sistemas de referencias inerciales; la segunda, que es imposible conocer si un sistema de referencia está en reposo absoluto o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme.

- 6** ¿Por qué motivo se esperaba observar un desplazamiento de las franjas de interferencia en el experimento llevado a cabo por Michelson y Morley? ¿Qué significaba la ausencia de ese desplazamiento?

Debido a la diferencia de velocidades entre ambos haces estos llegarían con un ligero desfase de tiempo. Esta ausencia de desplazamiento se debe a que los haces se movían con una velocidad constante, independiente de su orientación.

- 7** ¿Qué concluyeron Michelson y Morley acerca del éter luminífero y de la velocidad relativa de la Tierra con respecto a aquel?

Que la velocidad de la luz es siempre constante, independientemente del movimiento del foco emisor. Además supusieron que el éter pertenecía en reposo con respecto a la superficie terrestre.

- 8** ¿Qué propusieron Lorentz y Fitzgerald para explicar los resultados negativos del experimento de Michelson y Morley? ¿En qué se basaban su propuesta?

Propusieron la hipótesis de la contracción de la longitud de los cuerpos en movimiento a través del éter. Se basaban en que las interacciones electrostáticas entre átomos y moléculas, al propagarse por el éter, se verían afectadas por el movimiento de traslación a través del mismo.

- 9** ¿Cuáles son los dos postulados de la relatividad especial de Einstein?

Primer postulado: todas las leyes físicas se cumplen por igual en todos los sistemas de referencias inerciales.

Segundo postulado: la velocidad de la luz en el vacío es la misma en todos los sistemas de referencias inerciales y es, además, independiente del movimiento de la fuente emisora y del observador.

- 10** ¿Qué consecuencia se deriva de los postulados de Einstein en relación con el tiempo?

Que el tiempo es relativo, y el intervalo de tiempo entre dos sucesos depende del sistema de referencia.

- 11** Dos sucesos son simultáneos en un sistema de referencia determinado; ¿lo son también en cualquier otro sistema de referencia inercial? ¿Por qué motivo?

En otro sistema de referencia no serían simultáneos. El intervalo de tiempo medido entre dos sucesos es distinto para sistemas de referencia inerciales en movimiento relativo.

- 12** ¿Es igual el intervalo de tiempo entre dos sucesos para dos observadores inerciales estacionarios uno con respecto al otro?

El intervalo de tiempo es igual si los dos sucesos ocurren en el mismo punto.

- 13** ¿En qué consiste la dilatación del tiempo? ¿Cuál es su fórmula?

Que el tiempo no es algo absoluto y que transcurre más lentamente para observadores que se mueven con velocidades cercanas a la de la luz. Su fórmula es la expresión 12.11.

- 14** ¿Es igual la distancia entre dos puntos para dos observadores inerciales einsteinianos?

Debido a una de las consecuencias de los postulados de Einstein; la contracción de la longitud.

- 15** ¿Qué fórmula expresa la relación existente entre las longitudes medidas por dos observadores inerciales que se desplazan con velocidad relativa v ? ¿Con qué nombre se conoce dicha fórmula?

Se conoce con el nombre de la fórmula de la contracción de la longitud y viene formulada en la expresión 12.12.

- 16** ¿Por qué se les atribuye significados físicos tan distintos a la contracción de Lorentz-Fitzgerald y a la de Einstein a pesar de tener idéntica formulación?

En la contracción de Lorentz-Fitzgerald no cuestiona el marco newtoniano, lo único que pretende es adaptar la realidad a los resultados. En cambio, la proposición de Einstein altera de manera notable los conceptos de espacio y tiempo.

- 17** ¿En qué consiste la paradoja de los gemelos?

La paradoja de los gemelos consiste en dos gemelos imaginarios que uno de ellos emprende un viaje a velocidades próximas a la de la luz; el tiempo pasaría más lentamente que para su hermano, por lo que, a su regreso, lo encontraría envejecido.

- 18** ¿Cuáles son las transformaciones de Lorentz que relacionan las coordenadas espacio-temporales de un observador O' con las de O ?

Las expresiones son las siguientes:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)\end{aligned}$$

- 19** ¿Qué ocurre con las transformaciones de Lorentz cuando se cumple que $v \ll c$?

Se convierten en las transformaciones galileanas.

- 20** ¿Por qué se afirma que la velocidad de la luz constituye un límite insuperable? ¿Qué implicaciones tiene este hecho en las leyes de la dinámica de Newton?

La velocidad de la luz constituye un límite insalvable porque no existe ningún cuerpo que pueda desplazarse a velocidades mayores que la de la luz. Fue un resultado que se deduce de las transformaciones de Lorentz y viene avalado por el experimento de Michelson.

Tiene implicaciones sobre dos conceptos; masa y momento lineal; en relación con la masa, esta permanece invariable y no depende del estado de movimiento, en cuanto al momento lineal permanece constante en sistemas o cuerpos aislados.

- 21** ¿Por qué se define una masa relativista? ¿Qué condiciones ha de cumplir dicha masa?

De la formulación original de la segunda ley de Newton, como la velocidad no puede crecer infinitamente, tendremos que admitir que la masa se incrementa con la velocidad. Dicha masa debe alcanzar un valor infinito cuando $v = c$. Además la masa debe coincidir con la del cuerpo medida en reposo relativista (cuando $v = 0$).

- 22** ¿Qué es la energía en reposo de un cuerpo o partícula? ¿Tenemos evidencias experimentales de su existencia?

Es una energía que no presenta dependencia con la velocidad y su expresión es: $E = mc^2$.

Las evidencias experimentales quedan demostradas en las reacciones nucleares.

- 23** ¿Qué concluye la teoría de la relatividad acerca de la masa y la energía?

La masa es una forma de energía.

- 24** Elabora un cuadro-esquema que recoja las relaciones y diferencias entre la relatividad galileana y la einsteiniana.

El siguiente cuadro-esquema tiene carácter orientativo:

Relatividad galileana	Relatividad einsteiniana
Concepto de tiempo. El tiempo entre dos sucesos es siempre el mismo medido desde cualquier sistema de referencia. El tiempo es absoluto y no depende del observador ni de su movimiento relativo.	Concepto de tiempo. El tiempo es relativo, y el intervalo entre dos sucesos depende del sistema de referencia y del movimiento relativo.
Concepto de distancia. La distancia entre dos puntos es invariable para cualquier sistema de referencia inercial. El espacio es absoluto y no depende del observador ni de su movimiento relativo.	Concepto de distancia. La distancia entre dos puntos es distinta según la mida un observador estacionario o uno que se encuentre en movimiento relativo entre ambos. Únicamente tiene sentido hablar de espacio-tiempo y no de espacio como realidad absoluta.
Transformaciones de la posición y la velocidad entre sistemas inerciales. Se llevan a cabo mediante las transformaciones galileanas.	Transformaciones de la posición y la velocidad entre sistemas inerciales. Se realizan mediante las transformaciones de Lorentz, que conducen a la constancia de c , a su carácter de velocidad límite y a la paradoja de que $c + c = c$.

Transformaciones de Galileo

- 25** Dentro de un vagón de tren que se mueve con una velocidad de 90 km/h, un pasajero lanza una pelota con una velocidad de 30 km/h a una persona que viaja en la parte trasera. ¿A qué velocidad se desplaza la pelota para esta última persona?

Puesto que ambos se encuentran en el mismo sistema inercial, la velocidad que miden para la pelota es la misma, es decir, 30 km/h.

Relatividad especial de Einstein

- 26** ¿Podrían ser simultáneos dos sucesos para dos observadores inerciales si la velocidad relativa que existe entre ambos es de $0,5 \cdot c$?

Sí podría ser simultáneo, pero con la condición expuesta y explicada en la actividad número 3.

- 27** ¿Qué opinas de la siguiente proposición: «Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema inercial, tampoco lo serán en otro estacionario con respecto al anterior»?

La proposición es falsa. Imaginemos que el observador O se encuentra situado entre los puntos A y B a la misma distancia de ambos, en los que se hallan dos potentes reflectores.

Por el contrario, el observador O' está, por ejemplo, en la misma dirección, pero más próximo a B que a A . Si el observador O lanza un destello, percibirá los reflejos de A y B a la vez. Por tanto, los sucesos A y B son simultáneos para él.

Sin embargo, para O' el suceso B tiene lugar antes que A y no son, por tanto, simultáneos. En consecuencia, no estarán de acuerdo sobre la simultaneidad, pese a hallarse ambos observadores estacionarios uno con respecto al otro.

- 28** ¿Qué opinas de la siguiente proposición: «Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema inercial determinado, no lo serán en ningún sistema inercial»?

Como acabamos de ver en la cuestión anterior, la proposición es falsa, pues es más general que la anterior.

29 ¿Sería posible rejuvenecer viajando a velocidades próximas a las de la luz?

No sería posible en absoluto. La percepción del tiempo para el viajero no cambia con respecto a la que tenía en Tierra; por tanto, no rejuvenece ni envejece más lentamente según su propia percepción. Sin embargo, sí parecería hacerlo para un observador que estuviera en la Tierra, el cual percibiría que el tiempo transcurre más lentamente para aquel.

30 Si la velocidad de la luz es la mayor posible, ¿resulta congruente afirmar que un astronauta que viaja a una velocidad inferior a la de la luz tarda 6 años en recorrer cierta distancia si la luz lo hace en 10 años?

La luz tarda diez años desde la percepción temporal de un observador que esté en Tierra. Sin embargo, el astronauta solo puede tardar seis años desde su propia percepción, es decir, según los relojes de a bordo. El que el tiempo empleado según sus relojes sea menor se debe a que, en su sistema, la longitud resulta contraída.

En cualquiera de los casos, el viaje, según los relojes terrestres, nunca sería inferior a diez años. Por tanto, la aparente incongruencia radica en que el tiempo se ha medido en distintos sistemas de referencia que se encuentran en movimiento relativo.

31 ¿Implica el fenómeno de la dilatación del tiempo que una persona vive más tiempo al viajar en una nave que se desplaza a velocidades próximas a las de la luz? ¿Percibe esta persona un envejecimiento más lento?

No lo implica. Véase la explicación de la actividad final número 30.

32 En el interior de una nave que se mueve con una velocidad de $0,8 \cdot c$ hay una vara de dos metros. ¿Qué longitud medirá el astronauta de su interior?

La longitud que medirá el astronauta del interior de la nave será de 2 m, pues la vara no se mueve con respecto al astronauta.

33 Si pasáramos junto a un planeta con una velocidad próxima a la de la luz, ¿veríamos contraídas las dimensiones del planeta?

Solo veríamos contraída la dimensión en la dirección del movimiento. Así pues, a ojos del observador de la nave, el planeta adquiriría la forma de un elipsoide, es decir, la que tiene un balón de rugby.

D.34 ¿Por qué no apreciamos nunca la contracción de la longitud en las experiencias cotidianas?

No apreciamos esto porque a las velocidades cotidianas, el factor γ es básicamente igual a 1.

35 **PAU** Si la vida media propia de un muón es de 2 microsegundos, determina:

a) Su vida media desde el sistema terrestre si se mueve con una velocidad de $0,99 \cdot c$.

b) La distancia que recorrerá, desde el punto de vista del sistema terrestre, antes de desintegrarse.

c) La distancia que recorrerá desde el punto de vista de su propio sistema.

a) Desde el sistema terrestre, la vida propia de un muón sería de:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 7,088$$

Por tanto:

$$\Delta t = 14,17 \mu\text{s}$$

b) La distancia que recorrerá desde el punto de vista terrestre será:

$$d = v \Delta t = (0,99 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 14,17 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 4208,5 \text{ m}$$

c) Desde el punto de vista del sistema centrado en el muón, dicha distancia es:

$$d' = v \Delta t' = (0,99 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 594 \text{ m}$$

D.36 ¿A qué velocidad relativa debería moverse una nave para que la distancia entre dos puntos se redujera en un 40% con respecto a la distancia medida desde la Tierra?

Si la distancia entre dos puntos ha de reducirse un 40%, entonces:

$$l' = 0,6 \cdot l$$

Por lo que:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Es decir:

$$0,6 \cdot l = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

La velocidad relativa de la nave es:

$$v = 0,8 \cdot c$$

37 **PAU** Una astronauta de 40 años de edad deja en la Tierra a una hija de 10 años. ¿Cuánto tiempo debería estar viajando en una nave que surca el espacio a $0,95 \cdot c$, para que, al regresar, su hija sea 10 años mayor que ella? Determina el tiempo en ambos sistemas.

La edad de la astronauta, a su regreso, es de $40 + \Delta t'$ años, mientras que la de la hija que dejó en Tierra será de $10 + \Delta t$. Puesto que la madre es a su regreso, diez años más joven que la hija, debe cumplirse que:

$$40 + \Delta t' = (10 + \Delta t) - 10 \Rightarrow 40 + \Delta t' = \Delta t$$

Por otra parte, $\Delta t = \gamma \Delta t'$, por lo que tendremos que:

$$40 + \Delta t' = \gamma \Delta t' \Rightarrow 40 = \Delta t' (\gamma - 1)$$

Es decir:

$$\Delta t' = \frac{40}{\gamma - 1}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,95 \cdot c)^2}{c^2}}} = 3,2$$

Por tanto:

$$\Delta t' = 18,18 \text{ años}$$

mientras que:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = 58,18 \text{ años}$$

Es decir, desde el punto de vista del sistema terrestre, la astronauta debería estar viajando durante un período de 58,18 años a esa velocidad, mientras que desde el punto de vista de la propia astronauta, habrán transcurrido 18,18 años.

38 María y Ana son dos gemelas que tienen 30 años de edad. María emprende un viaje de ida y vuelta a la estrella Sirio, situada a 8,7 años luz de la Tierra, a una velocidad de $0,95 \cdot c$. ¿Qué edades tendrán las dos hermanas cuando María regrese a la Tierra?

Desde el punto de vista de Ana, que se ha quedado en Tierra, el tiempo transcurrido ha sido de:

$$\Delta t = \frac{2d}{v} = \frac{2 \cdot 8,7 \cdot c}{0,95 \cdot c} = 18,31 \text{ años}$$

mientras que el tiempo transcurrido en el sistema de María es:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = 5,72 \text{ años}$$

pues:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,95 \cdot c)^2}{c^2}}} = 3,2$$

De este modo, a su regreso, María se conservará más joven (35,72 años), mientras que Ana tendrá 48,31 años.

- 39 [PAU]** Una nave realiza un viaje interestelar a $0,999 \cdot c$. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido según los relojes terrestres si, según los de a bordo, la nave lleva 4 años viajando?

El tiempo transcurrido según los relojes terrestres viene dado por:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 22,36$$

Por tanto:

$$\Delta t = 89,44 \text{ años}$$

- 40 [PAU]** Con respecto a un observador estacionario, la longitud de una nave en reposo es de 50 m. ¿Qué longitud medirá el mismo observador cuando la nave se mueva con una velocidad de $2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$?

La longitud que medirá vendrá dada por:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo los datos ofrecidos, se obtiene:

$$l' = 50 \cdot \sqrt{1 - \frac{(2,4 \cdot 10^8)^2}{(3 \cdot 10^8)^2}} = 30 \text{ m}$$

Transformaciones de Lorentz

- 41** ¿Por qué motivo no cambia el parámetro γ en las transformaciones de Lorentz de O a O' con respecto a las transformaciones de O' a O?

Dicho parámetro no cambia porque no puede admitirse ningún sistema de referencia privilegiado fijo o en reposo. Es decir, dos sistemas se mueven relativamente entre sí, de modo que cada uno percibe que el otro se aleja con cierta velocidad. Por este motivo, el factor γ debe ser el mismo en las transformaciones directa e inversa.

- 42 [PAU]** Un móvil, A, se desplaza con una velocidad de $0,9 \cdot c$ en la dirección positiva del eje X con respecto a un observador O. Otro móvil, B, se desplaza con una velocidad de $0,8 \cdot c$ con respecto a A, también en la dirección positiva del eje X. ¿Cuál es la velocidad de B con respecto a O?

Denominamos v'_x a la velocidad de B con respecto a A. Del mismo modo, denominaremos v a la velocidad de A con respecto a O. Así pues, para determinar la velocidad de B con respecto a O, hay que realizar la transformación inversa de la velocidad de Lorentz.

Para ello, partimos de la expresión 12.16:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

Se trata de determinar v'_x , conocidas $v_x = 0,8 \cdot c$, y $v = 0,9 \cdot c$. Despejando, obtenemos:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x}$$

Sustituyendo los valores ofrecidos, se obtiene:

$$v'_x = \frac{0,8 \cdot c - 0,9 \cdot c}{1 + \frac{0,9 \cdot c}{c^2} \cdot 0,8 \cdot c} = 0,988 \cdot c$$

Observa que el resultado de la transformación galileana nos habría llevado a una velocidad superior a c .

$$v_x = v'_x + v = 0,8 \cdot c + 0,9 \cdot c = 1,7 \cdot c$$

- 43 [PAU]** Una nave espacial avanza en la dirección negativa del eje X con una velocidad de $0,9 \cdot c$ con respecto a la Tierra, mientras otra lo hace en la dirección positiva del eje X con la misma velocidad en relación con nuestro planeta.

Determina:

- a) La velocidad relativa de una nave con respecto a la otra.
b) Esa velocidad, pero aplicando las transformaciones galileanas.

- a) Consideremos como sistema O' la nave que avanza en el sentido negativo del eje X. En ese caso:

$$v = -0,9 \cdot c$$

$$v_x = 0,9 \cdot c$$

Por tanto, la velocidad de la otra nave con respecto a la primera será:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} v_x} = 0,994 \cdot c$$

- b) Aplicando las transformaciones galileanas, esta velocidad sería:

$$v'_x = v_x - v = 1,8 \cdot c$$

Masa y energía relativistas

- 44** ¿Qué significado físico tiene afirmar que la masa en reposo de un fotón es nula?

Véase la resolución de la actividad número 12.

- 45** Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y razona tu respuesta: «A velocidades próximas a la de la luz, la masa de las partículas aumenta».

La proposición puede considerarse verdadera, pero haciendo una matización: la masa de las partículas aumenta si se incrementa la velocidad, hasta un valor próximo al de la luz.

Así pues, la masa no aumenta por el hecho de moverse a una velocidad próxima a la de la luz que sea constante, sino por el incremento de la velocidad.

- 46** ¿Qué le sucede a la masa de una partícula cuando aumenta su energía cinética? ¿Y a la velocidad?

Para velocidades no relativistas, un aumento de la energía cinética no supone ningún cambio en la masa de una partícula, pero sí un incremento de su velocidad. Sin embargo, a velocidades relativistas, una elevación de la energía cinética sí puede conllevar un aumento de la velocidad.

Ahora bien, la velocidad tiene un límite superior y para $v = c$, la energía cinética sería infinita. Esto se debe a que, a velocidades relativistas, un aumento de energía cinética se traduce en un incremento de masa.

¿A qué velocidad será la masa de un cuerpo el doble que la que tiene en reposo?

Si la masa relativista ha de ser el doble que la masa en reposo, entonces:

$$\gamma m_0 = 2 \cdot m_0 \Rightarrow \gamma = 2$$

Por tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2$$

la velocidad pedida es:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c$$

Comentario: resulta conveniente expresar v como $v = xc$ y determinar x como se explica en el problema resuelto número 4 (página 347). Haciéndolo así, se obtiene:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

48 PAU Un neutrón tiene una energía en reposo de 939,573 MeV. ¿Cuál es su masa (en kg) en dicho estado?

La energía en reposo viene dada por la siguiente expresión:

$$E_0 = m_0 c^2$$

Luego, si:

$$E_0 = 939,573 \cdot 10^6 \text{ eV} = 1,5033 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

entonces:

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2} = \frac{1,5033 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

49 PAU Un neutrón se mueve con una velocidad de $0,9 \cdot c$.

- a)** ¿Cuál es su masa relativista?
b) ¿Cuál será entonces su momento lineal?
a) La masa relativista del neutrón será:

$$m_{\text{relativista}} = \gamma m_0$$

donde $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Por otro lado:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,29$$

Por tanto:

$$m_{\text{relativista}} = \gamma m_0 = 3,84 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

b) El momento lineal valdrá, entonces:

$$p = m_{\text{relativista}} v = \gamma m_0 \cdot 0,9 \cdot c = 1,03 \cdot 10^{-18} \text{ kg m/s}$$

50 PAU Un haz de protones se acelera hasta alcanzar una energía de 900 MeV. Calcula la velocidad de dichas partículas. Datos: $m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Si la energía cinética que adquieren es de 900 MeV ($1,44 \cdot 10^{-10} \text{ J}$), entonces:

$$E_c = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = 1,44 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

De donde:

$$\gamma - 1 = \frac{1,44 \cdot 10^{-10} \text{ J}}{m_0 c^2} = 0,956 \Rightarrow \gamma = 1,956$$

Si consideramos v en términos de c (véase problema resuelto número 4), x valdrá:

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cong 0,86$$

Por tanto:

$$v = 0,86 \cdot c = 2,57 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

51 PAU Un mesón π^0 tiene una energía en reposo de 135 MeV y se mueve con una velocidad de $0,85 \cdot c$. Determina:

- a)** Su energía total.
b) Su energía cinética.
c) Su momento lineal.

a) La energía total del mesón viene dada por:

$$E_{\text{total}} = \gamma m_0 c^2 = \gamma E_0$$

donde E_0 es la energía en reposo y, por otro lado:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,898$$

De este modo:

$$E_{\text{total}} = 256,23 \text{ MeV}$$

b) La energía cinética es:

$$E_c = E_{\text{total}} - E_0 = 121,23 \text{ MeV}$$

c) El momento lineal es:

$$p = \gamma m_0 v = \frac{\gamma m_0 c^2 \cdot 0,85}{c} = 217,80 \text{ MeV/c}$$

52 PAU La energía total de una partícula es el doble que su energía en reposo. ¿Con qué velocidad se mueve?

Puesto que $E_{\text{total}} = \gamma m_0 c^2$, y $E_0 = m_0 c^2$, si $E_{\text{total}} = 2 \cdot E_0$:

$$\gamma = 2$$

Por tanto, la velocidad de la partícula será $v = xc$, donde x valdrá:

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \cong 0,866$$

Así pues, la velocidad es de $0,866 \cdot c$.