UNIDAD 13: Introducción a las derivadas

ACTIVIDADES-PÁG. 302

1. Las soluciones aparecen en la tabla.

	[0, 3]	[3, 6]
a) $f_1(x) = 2x$	2	2
b) $f_2(x) = 2x + 3$	2	2
c) $f_3(x) = x^2$	3	9
d) $f_4(x) = 2^x$	$\frac{7}{3} = 2{,}33$	$\frac{56}{3} = 18{,}67$

2. El valor de los límites es:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 6$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\dfrac{4}{(x-2)^2}$

3. La ecuación de la recta que pasa por P (- 2, 3) y con pendiente $-\frac{1}{3}$ es x +3y = 7.

La ecuación de la recta perpendicular a la anterior en P (- 2, 3) es 3x – y = - 9.

4. La ecuación de la recta tangente a $y = 2x^2 - 4x + 6$ en el punto P (0, 6) es 4x + y = 6.

ACTIVIDADES-PÁG. 319

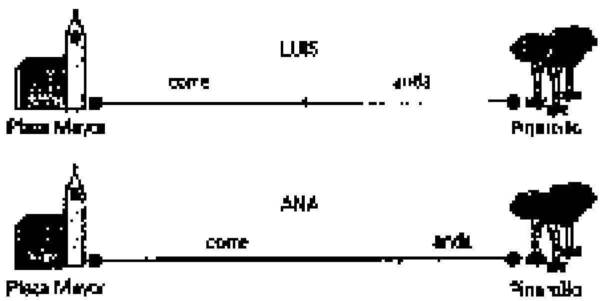
1. Podemos representar el problema en un gráfico.

En el gráfico está muy clara la situación del problema y la solución del mismo.

Efectivamente, hay un punto por el que pasa a la misma hora, y es el punto (*) en el que se encuentran los dos trayectos, el de ida y el de vuelta.

2. Cuando Luis está en la mitad del camino, comienza a andar, luego la otra mitad va a velocidad más lenta.

En cambio, Ana, al correr la mitad del tiempo, corre más de la mitad del camino, por lo que menos de la mitad lo hace andando, así llega antes Ana.



3. El primer cirujano se pone el guante (A) dentro del otro (B), es decir, se pone (A) y encima se pone (B).

El segundo cirujano se pone el guante (B) por la cara que no ha tocado al herido.

El tercer cirujano se pone el guante (A) dándole la vuelta y encima de éste (B) con que han operado los otros dos cirujanos.

ACTIVIDADES-PÁG. 321

1. En la imagen vemos la resolución de esta actividad

$$f(x) := (e)^{(\cos(2\cdot x))^2}\cdot \operatorname{sen}(2\cdot x) \rightarrow x \mapsto e^{(\cos(2\cdot x)^2)}\cdot \operatorname{sen}(2\cdot x)$$

$$f' \rightarrow x \mapsto -4\cdot\left(\cos(2\cdot x)\cdot e^{\cos(2\cdot x)^2}\cdot \operatorname{sen}(2\cdot x)^2\right)+2\cdot\left(\cos(2\cdot x)\cdot e^{\cos(2\cdot x)^2}\right)$$

$$g(x) := \left(\frac{2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right) \rightarrow x \mapsto \frac{2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$$

$$g' \rightarrow x \mapsto \frac{2}{(x+4)\cdot\sqrt{x}+4\cdot x}$$

2. En la imagen vemos la resolución de esta actividad.

a) Para la función y = f(x) obtenemos su derivada en x = - 1 y la ecuación de las recta tangente en x = -1 que es $y = \frac{-1}{3}x+\frac{1}{6}$, y la de la recta normal $y = 3x+\frac{7}{2}$.

b) Para la función y = g(x) obtenemos su derivada en x = 0 y la ecuación de la recta tangente en x = 0 que es y = π; la de la recta normal no la determina al ser x = 0.

$$f(x) := \frac{3\cdot x}{2\cdot x-4} \rightarrow x \mapsto \frac{3\cdot x}{2\cdot x-4}$$

$$f' \rightarrow x \mapsto \frac{3}{-x^2+4\cdot x-4}$$

$$f'(-1) \rightarrow -\frac{1}{3}$$

$$t(x)=f'(-1)\cdot(x+1)+f(-1) \rightarrow x \mapsto -\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{6}$$

$$n(x)=\frac{-1}{f'(-1)}\cdot(x+1)+f(-1) \rightarrow x \mapsto 3\cdot x+\frac{7}{2}$$

$$g(x) := 4\cdot \operatorname{atan}\left(\sqrt{2\cdot x^4+1}\right) \rightarrow x \mapsto 4\cdot \operatorname{atan}\left(\sqrt{2\cdot x^4+1}\right)$$

$$g' \rightarrow x \mapsto \frac{8\cdot x^3}{(x^4+1)\cdot\sqrt{2\cdot x^4+1}}$$

$$g'(0) \rightarrow 0$$

$$t(x)=g'(0)\cdot(x-0)+g(0) \rightarrow x \mapsto \pi$$

$$n(x)=\frac{-1}{g'(0)}\cdot(x-0)+g(0)$$

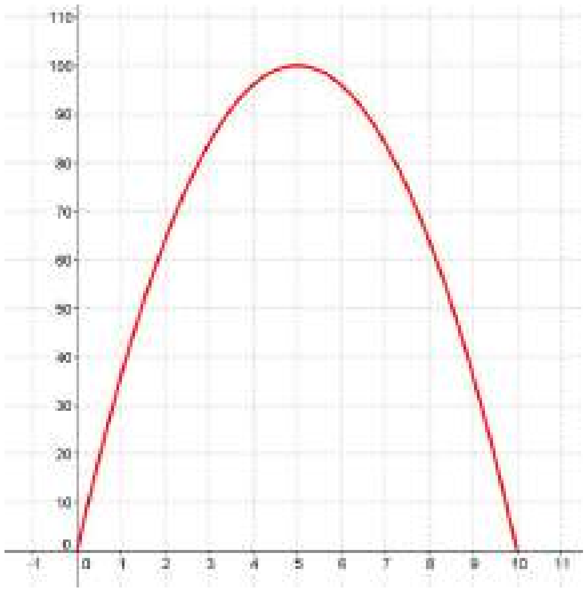
ACTIVIDADES-PÁG. 322

1. Las soluciones pueden verse en la tabla.

	[- 2, 3]	[0, 4]	[2, 5]
a) f (x) = 2x + 4	2	2	2
b) g (x) = 7x – x^3	0	- 9	- 32
c) $h\ (x) = \sqrt{x+6}$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$	$\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{4} = 0{,}18$	$\frac{\sqrt{11}-\sqrt{8}}{3} = 0{,}16$
d) $t\ (x) = \frac{2}{x^2-1}$	$-\frac{1}{12} = -\,0{,}083$	$\frac{8}{15} = 0{,}53$	$-\frac{7}{36} = -\,0{,}19$

2. Las soluciones son:

a) La gráfica la podemos ver en el dibujo.



b) Las tasas de variación medias son:

TVM [1; 1,5] = 30 m/s

TVM [1; 3] = 24 m/s

TVM [1; 5] = 16 m/s

c) Los valores anteriores son las velocidades medias que alcanza el balón en cada uno de los intervalos citados.

3. Las tasas pedidas son:

$$TVM\ [1,\ e] = \frac{\ln\ e - \ln\ 1}{e-1} = \frac{1}{e-1} = 2{,}7183\,;\ \ TVM\ [e,\ e^2] = \frac{\ln\ e^2 - \ln\ e}{e^2 - e} = \frac{1}{e^2-e} = 0{,}2141$$

4. La velocidad media entre los instantes 2,5 y 6 vale 13 m/s.

La velocidad instantánea en el instante 2,5 vale 6 m/s.

La velocidad instantánea en el instante 6 vale 20 m/s.

5. a) Las tasas de variación media del efecto son: TVM [0,2] = 0,1768 y TVM [0, 4] = 0,125.

b) En la gráfica podemos ver que en las cuatro primeras horas aumenta el efecto del fármaco, no así en las siguientes.

a) $f(x) = 8 + x$ b) $g(x) = 2 - x^2$ c) $t(x) = \dfrac{1}{x+1}$

6. El valor de las derivadas es:

a) $f'(1) = -6$ b) $f'(2) = \dfrac{1}{4}$ c) $f'(7) = \dfrac{2}{5}$

7. Los resultados pueden verse en la tabla.

Función	Tangente	Pendiente	Ángulo con OX
a) $f(x) = 8 + x$	$y = x + 8$	1	45º
b) $g(x) = 2 - x^2$	$y = 2$	0	0º
c) $t(x) = \dfrac{1}{x+1}$	$y = -x + 1$	- 1	135º

8. La recta tangente en el punto P (0, 5) es $2x + y = 5$.

9. Los puntos de ordenada 5 son P (1, 5) y Q (5, 5).

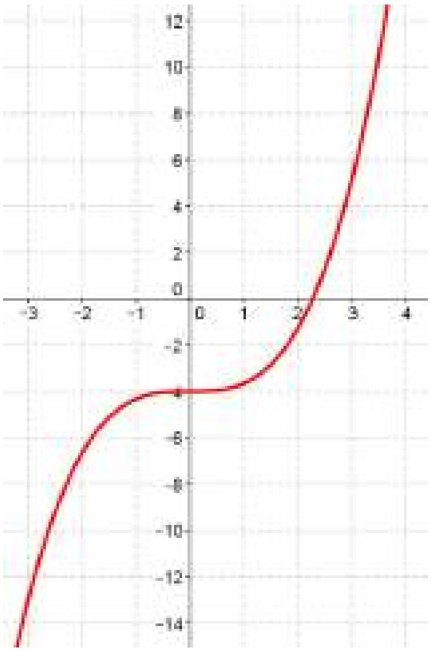
Las rectas tangente y normal en el punto P (1, 5) son, respectivamente: $8x + y = 13$ y $x - 8y = -39$.

Las rectas tangente y normal en el punto Q (5, 5) son, respectivamente: $8x - y = 35$ y $x + 8y = 45$.

10. No hay ningún punto de la curva $f\ (x) = \frac{1}{3}x^3 - 4$ cuya tangente sea paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante (en esta curva todas las pendientes de las tangentes son positivas o nulas).

En el punto (0, - 4) la recta tangente será paralela al eje de abscisas.

Todo lo anterior puede verse en la gráfica.



ACTIVIDADES-PÁG. 323

11. Los valores que se piden son: f ´(2) = 0 y $f\ ´\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3{,}75} = -0{,}27$

12. La función buscada es f (x) = 2x – 3.

13. Se corresponde con la gráfica del apartado b).

La gráfica de f ´(x) tiene por ecuación f ´(x) = - 4x + 4, entonces f (x) = - 2x^2 + 4x.

14. Las funciones derivadas son:

a) f ´(x) = 5

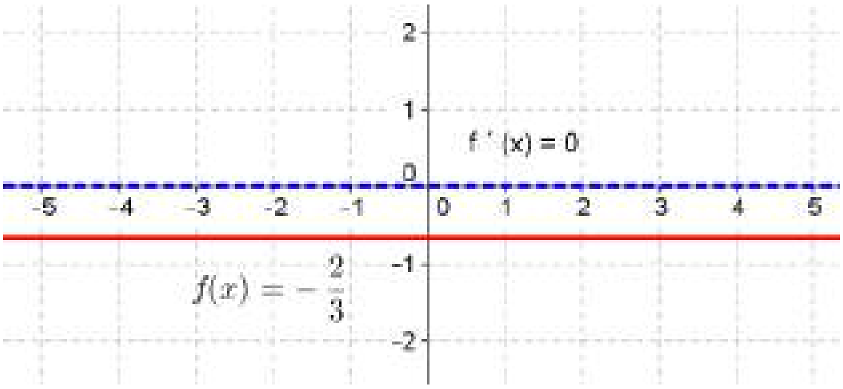
b) f ´ (x) = 32x – 24

c) f ´ (x) = - 3x^2 + 2

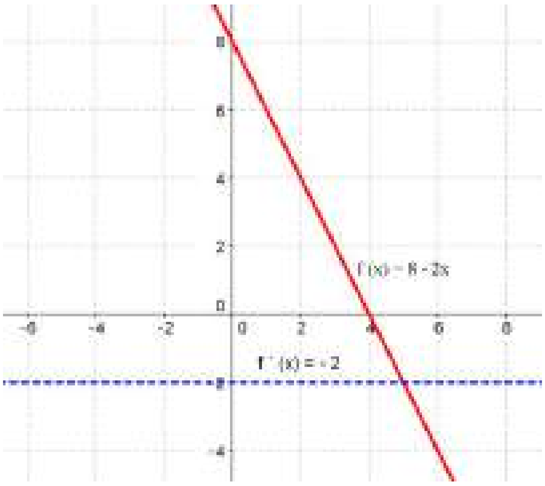
d) $f\ ´\ (x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

15. Las funciones y sus derivadas aparecen a continuación. En las representaciones las gráficas de las funciones son las líneas continuas y rojas y las gráficas de las funciones derivadas son las azules y discontinuas.

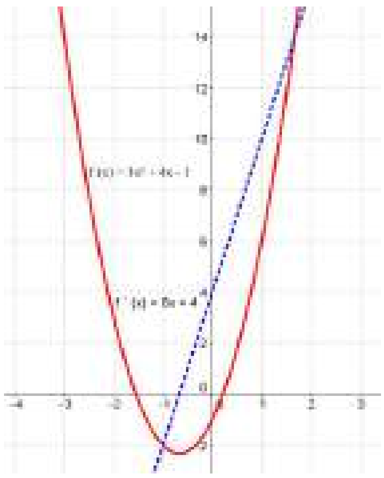
a) $f(x) = -\dfrac{2}{3}$ $\qquad$ $f'(x) = 0$



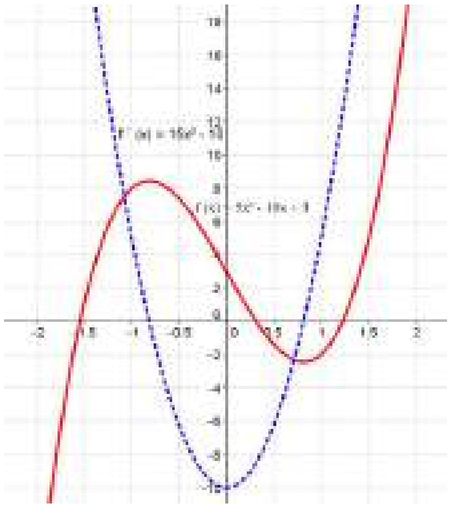
b) $f(x) = 8 - 2x$ $\qquad$ $f'(x) = -2$



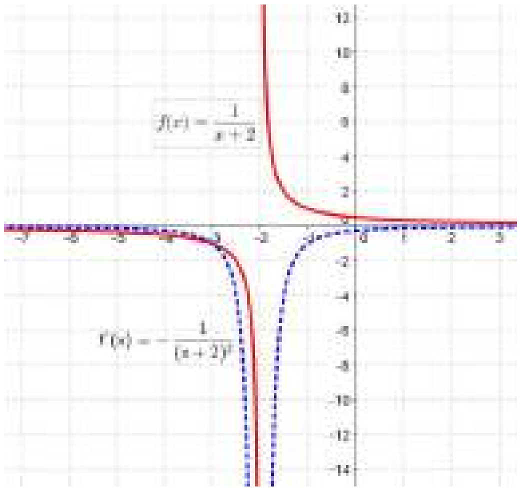
c) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$ $\qquad$ $f'(x) = 6x + 4$



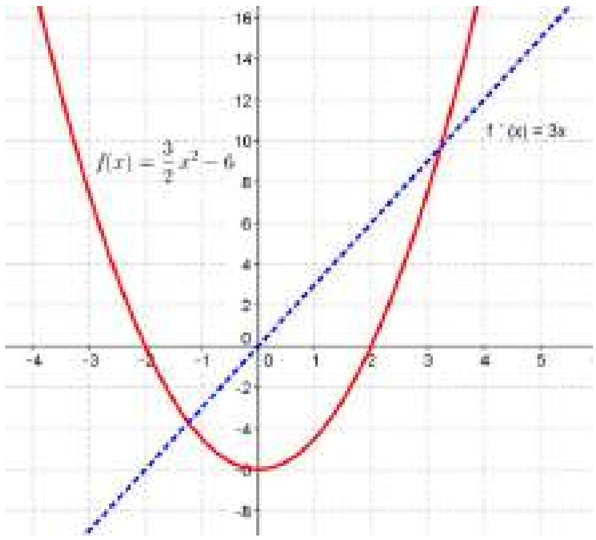
d) $f(x) = 5x^3 - 10x + 3$ $\qquad$ $f'(x) = 15x^2 - 10$



e) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ $\qquad$ $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2}$



f) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 6$ $\qquad$ $f'(x) = 3x$



16. Se debe verificar que: f´(x) = g´(x); es decir la ecuación $3x^2 - 6x = 9 - 12x$; de donde obtenemos las soluciones 1 y -3.

Para la función y = f (x) los puntos son A_1 (1, 2) y A_2 (- 3, - 50), en ambos las pendientes de las rectas tangentes valen – 3 y 45, respectivamente.

Para la función y = g (x) los puntos son B_1 (1, 3) y B_2 (- 3, - 81), en ambos las pendientes de las rectas tangentes valen – 3 y 45, respectivamente.

ACTIVIDADES-PÁG. 324

17. Las derivadas son:

a) $D[x^8] = 7x^8$

b) $D\left[\dfrac{2}{x^3}\right] = -\dfrac{6}{x^4}$

c) $D\left[3\sqrt[5]{x}\right] = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^4}}$

d) $D[5x^2 + 4x - 1] = 10x + 4$

e) $D\left[\dfrac{x^2 - 1}{4}\right] = \dfrac{x}{2}$

f) $D\left[\dfrac{3}{2x - 5}\right] = -\dfrac{6}{(2x - 5)^2}$

g) $D\left[\dfrac{4}{\left(x^4 + 3x^2 - 2\right)^3}\right] = \dfrac{-48x^3 - 72x}{(x^4 + 3x^2 - 2)^4}$

h) $D[(x - 2x^2)^3] = 3 \cdot (1 - 4x) \cdot (x - 2x^2)^2$

i) $D\left[\dfrac{-1}{\sqrt{3 + 2x^2}}\right] = \dfrac{2x}{(3 + 2x^2)\sqrt{3 + 2x^2}}$

18. Las derivadas son:

a) $D\left[5^{\frac{x}{4}}\right] = \dfrac{\ln 5}{4} \cdot 5^{\frac{x}{4}}$

b) $D[2 \cdot 3^{2x}] = 4 \cdot \ln 3 \cdot 3^{2x}$

c) $D\left[e^x - e^{-x}\right] = e^x + e^{-x}$

d) $D\left[5^{3x} \cdot 3^{5x}\right] = (3 \ln 5 + 5 \ln 3) \cdot 5^{3x} \cdot 3^{5x}$

e) $D\left[\dfrac{e^{-2x}}{4}\right] = -\dfrac{1}{2}\, e^{-2x}$

f) $D[(e^{2x} + 1)^4] = 8 \cdot e^{2x} \cdot (e^{2x} + 1)^3$

19. Las derivadas son:

a) $D[\ln (7x^2 - 1)] = \dfrac{14x}{7x^2 - 1}$

b) $D[\ln (2 - x^3)^2] = -\dfrac{6x^2}{2 - x^3}$

c) $D[\ln (e^x \cdot 2x)] = \dfrac{x + 1}{x}$

d) $D\left[\ln \sqrt{4x^3 - 9}\right] = \dfrac{6x^2}{4x^3 - 9}$

e) $D[\log_3 (x^2 - 1)] = \dfrac{2x}{\ln 3 \cdot (x^2 - 1)}$

f) $D\left[\ln\left(\dfrac{2 - 5x}{2 + 5x}\right)\right] = \dfrac{20}{25x^2 - 4}$

g) $D[\ln (\ln x)] = \dfrac{1}{x \cdot \ln x}$

h) $D\left[\ln\left(x^2 \cdot \sqrt{9 - x^2}\right)\right] = \dfrac{18 - 3x^2}{9x - x^3}$

i) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}\right)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{x} \cdot (x - 1)}$

20. Las derivadas son:

a) $D[\text{sen } 3x] = 3 \cdot \cos (3x)$

b) $D[3 \text{ sen } x] = 3 \cdot \cos x$

c) $D\left[sen\left(\frac{x}{3}\right)\right] = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

d) $D\left[sen\left(\frac{3}{x}\right)\right] = -\frac{3}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{3}{x}\right)$

e) $D[\text{sen } x^3] = 3x^2\cdot\cos x^3$

f) $D[\text{sen}^3 x] = 3\cdot\text{sen}^2 x\cdot\cos x$

g) $D[\cos x^{-4}] = 4\cdot x^{-5}\cdot\text{sen } x^{-4}$

h) $D[\cos(x+\pi)] = -\text{ sen }(x+\pi)$

i) $D[\cos^2(2x^3+1)] = -12x^2\cdot\cos(2x^3+1)\cdot\text{sen}(2x^3+1)$

j) $D\left[\sqrt[3]{sen\ 3x}\right] = sen^{-2/3}(3x)\cdot\cos(3x)$

k) $D[\text{tg}(x^2+2)] = 2x + 2x\cdot\text{tg}^2(x^2+2)$

l) $D\left[\sqrt{tg\ x}\right] = \frac{1+tg^2 x}{2\sqrt{tg\ x}}$

m) $D[\text{tg } 3^x] = \ln 3\cdot 3^x\cdot[1+\text{tg}^2(3^x)]$

n) $D\left[tg\ \sqrt{x}\right] = \frac{1+tg^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

ñ) $D[\text{tg}^3(x+1)] = 3\cdot\text{tg}^2(x+1)\cdot 3\cdot\text{tg}^4(x+1)$

o) $D[\text{arcos}(\ln x)] = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

p) $D[\text{arcsen}(x-3)^2] = \frac{2(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^4}}$

q) $D\left[arc\,tg\ \sqrt{4x}\right] = \frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)}$

21. Los valores de las derivadas son:

a) $f'(x) = \frac{4x^4-1}{2x^2\sqrt{1+4x^4}}$ $Df(1) = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

b) $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{8 + x^2}}$ D g (0) = $\dfrac{\sqrt{8}}{8}$

c) h ´ (x) = 12 · cos 3x · sen 3x D h (π) = 0

d) $j'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x - 1)^2}$ D j (0) no existe (la función j (x) no está definida en el 0.

ACTIVIDADES-PÁG. 325

22. a) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x}\right] = \dfrac{-1-3x}{2\sqrt{1+x}}$

b) $D\left[\sqrt[3]{3x^5 + 4}\right] = \dfrac{5x^4}{\sqrt[3]{(3x^5+4)^2}}$

c) $D\left[\dfrac{2x^2+1}{2x^2-1}\right] = -\dfrac{8x}{(2x^2-1)^2}$

d) $D[(7x^2 - 3).(5x - 4)^5] = (245x^2 - 56x - 75) \cdot (5x - 4)^4$

e) $D[\ln 6 \cdot 6^x] = (\ln 6)^2 \cdot 6^x$

f) $D\left[5^x \cdot \sqrt{3+5^x}\right] = \ln 5 \cdot 5^x \cdot \sqrt{3+5^x} + \dfrac{\ln 5 \cdot 5^{2x}}{2\sqrt{3+5^x}}$

g) $D\left[\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}\right] = \dfrac{8}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)^2}$

h) $D\left[\dfrac{e^{x^2}}{x}\right] = \dfrac{e^{x^2}\cdot(2x^2-1)}{x^2}$

i) $D\left[\dfrac{x^2}{3^{2x}}\right] = \dfrac{2x - 2\cdot\ln 3\cdot x^2}{3^{2x}}$

j) $D[(x^2 + 1)^2 \cdot e^{2x}] = 2\,(x^2 + 1) \cdot e^x \cdot (x + 1)^2$

k) $D\left[\ln\sqrt{x^2(4x-1)}\right] = \dfrac{6x-1}{4x^2 - x}$

l)

$$D\left[2^{\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x} \cdot (2\sqrt{x})^8\right] = \frac{2^{\sqrt{x}} \cdot \ln 2}{2\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x} \text{ "}\cdot \left(2\sqrt{x}\right)^8 + \frac{2^{\sqrt{x}}}{2x} \cdot \left(2\sqrt{x}\right)^8 + 2^{\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x} \cdot 1024x^3$$

m) $D[x^2 \ln x + x \ln x^2] = (2x + 2) \cdot \ln x + (x + 2)$

n) $D[\ln (e^{-x} - 2x^6] = \dfrac{e^{-x} + 12x^5}{2x^6 - e^{-x}}$

ñ) $D\left[\dfrac{1}{1+x} + \ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)\right] = -\dfrac{2+x}{(1+x)^2}$

o) $D[\text{sen } 7x \cdot 7^{2x}] = 7^{2x} \cdot [7 \cdot \cos(7x) + 2 \cdot \ln 7 \cdot \ \text{sen}(7x)]$

p) $D[\ln(\ln \text{sen } x)] = \dfrac{\cot g\ x}{\ln(\text{sen } x)}$

q) $D\left[\dfrac{2.\text{sen}2x}{\cos 2x - 2}\right] = \dfrac{4 \ - 8 \cdot \cos(2x)}{(\cos(2x) - 2)^2}$

r) $D[x^a \cdot a^x \cdot e^{ax}] = x^{a-1} \cdot a^x \cdot e^{ax} \cdot [a + x \cdot \ln a + ax]$

s) $D[\text{sen}^4 x^3 \cdot \cos^3 x^4] = 12x^2 \cdot \text{sen}^3 (x^3) \cdot \cos(x^3) \cdot \cos^3 (x^4) - 12x^3 \cdot \text{sen}^4 (x^3) \cdot \cos^2 (x^4) \cdot \text{sen}(x^4)$

t) $D\left[\ln\left(\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)\right] = \dfrac{2}{\text{sen}\, x}$

u) $D\left[tg^2 (2x - \pi)\right] = 4\ tg(2x - \pi) \cdot\ [1 + tg^2\ (2x - \pi)]$

v) $D\left[arctg\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right] = \dfrac{1}{1+x^2}$

w) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+\text{sen } x}{1-\text{sen } x}}\right] = \sqrt{\dfrac{1-\text{sen } x}{1+\text{sen } x}} \cdot \dfrac{\cos x}{(1-\text{sen } x)^2} \ = \dfrac{1}{1-\text{sen } x}$

x) $D\left[\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)\right] = \dfrac{9}{x^3 + 9x}$

y) $D\left[arcsen\ \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}\ (1-x^2)}$

z) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]=-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

23. a) La velocidad media en el intervalo [2, 4] fue de 6 m/s.

b) La velocidad de la pelota fue de 12 m/s en el instante t = 2; esto sucedió a la altura de 12 m.

24. La derivada pedida es $f^{(10)}(x) = 3^{10} \cdot e^{-3x}$

25. La derivada es positiva para los valores de x pertenecientes a $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

26. La derivada enésima es $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{(x-1)^n}$.

Por tanto, $f^{(2016)}(x) = -\dfrac{2015\,!}{(x-1)^{2016}}$

27. La recta tangente en el punto (8, 6) es $4x - y = 26$.

28. La recta tangente es $\sqrt{5}\,x - y = 1$.

ACTIVIDADES-PÁG. 326

29. Hay dos puntos de coordenadas P (1, 2) y Q (1, - 10).

Hallamos la pendiente de todas las rectas tangentes a esta circunferencia:

$2x + 2yy' + 6 + 6y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\dfrac{x+3}{y+4}$

● La recta tangente en P es: $y - 2 = -\dfrac{2}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{8}{3}$.

● La recta tangente en Q es: $y + 10 = \dfrac{2}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{32}{3}$.

30. Los valores son m = - 3 y n = 4 y la función será $y = -3x^2 + 4x + 3$.

31. La demostración queda:

Sea la función $y = e^{ax} \cdot \text{sen } bx$, derivamos e introducimos en la expresión a demostrar.

$y' = a \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx + b \cdot e^{ax} \cdot \cos bx \quad \Rightarrow \quad y'' = a^2 \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx + 2ab \cdot e^{ax} \cdot \cos bx - b^2 \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx$

Introducimos las derivadas en la expresión a demostrar:

$$2a\, y' - y'' = a^2 \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx + b^2 \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx = (a^2 + b^2) \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx = (a^2 + b^2) \cdot y$$

32. Llamamos h a la altura del cono y r al radio de la base. El volumen vendrá dado por $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$.

Hemos de calcular dh/dt cuando h = 1,75 m y dV/dt = 0,3.

Como h = r obtenemos $V = \frac{1}{3}\pi \cdot h^3$. Derivando obtenemos: $\frac{dV}{dt} = \pi \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$.

De donde $\frac{dh}{dt} = \frac{0{,}3}{\pi \cdot 1{,}75^2} = 0{,}031$ m/min.

33. La recta tiene por ecuación $y = -2x + 9$ y la parábola $y = 0{,}2\,x^2 - 2{,}8\,x + 9{,}8$.

34. a) El radio inicial es R (0) = 0,5 cm. Para que el radio sea de 2,5 cm han de pasar 2,13 minutos.

b) La tasa de variación del radio respecto al tiempo viene dada por $\frac{dR}{dt} = \frac{162 \cdot t^2}{(t^3 + 12)^2}$.

c) El área de la mancha es $A(t) = \pi \cdot R^2$ y $\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot \frac{6 + 5t^3}{t^3 + 12} \cdot \frac{162 \cdot t^2}{(t^3 + 12)^2}$ y para R = 4; t = 3,48 minutos y la tasa de variación del área de la mancha es 16,83 m^2/min.

35. a) N (0) = 600 avispas.

b) Hallamos N´(5); $N'(t) = 60 \cdot e^{0{,}3t}$; N´(5) = 268,9 avispas/día.

c) Hallamos t para que N´(t) = 13284,38 y obtenemos t = 18 días.

36. a) Estas funciones se cortan en el punto P (2, 6).

b) La recta tangente a la primera curva en el punto P tiene por pendiente $m_1 = 4$ y por ecuación $y = 4x - 2$.

La recta tangente a la segunda curva en el punto P tiene por pendiente $m_2 = 9$ y por ecuación $y = 9x - 12$.

Hallamos el ángulo que forman estas rectas con la fórmula:

$$tg\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \text{ y obtenemos } \alpha = 7{,}70^\circ$$

ACTIVIDADES-PÁG. 327

Ofrecemos bibliografía sobre la relación entre matemáticas y ciclismo.

CORBALÁN, Fernando. (201) *Matemáticas de cerca.* Graó. Barcelona.

ORTEGA, Tomás. (2005). *Conexiones matemáticas.* Graó. Barcelona.

SORANDO MUZÁS, J. M. (2012) *Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula.* Revista Números. Volumen 80.

SORANDO MUZÁS, J. M. http://catedu.es/matematicas_mundo/

http://plataformarecorridosciclistas.org/2009/11/22/rampas-maximas-superadas-en-competicion/