UNIDAD 15: Distribuciones bidimensionales. Correlación y regresión

ACTIVIDADES-PÁG. 338

1. La media y la desviación típica valen: $\mu = 39{,}825$ y $\sigma = 14{,}76$.

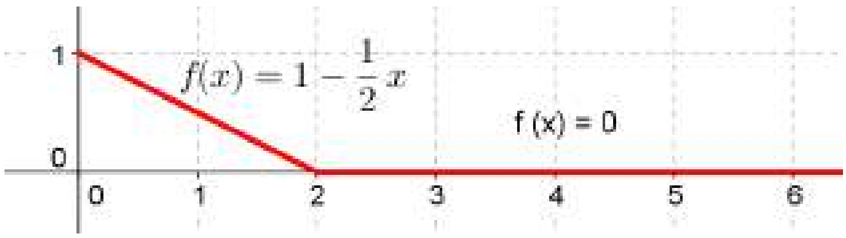
En $(\mu - \sigma,\ \mu + \sigma)$ = (25,065; 54,585) hay 410 personas, es decir, el 68,33%.

En $(\mu - 2\sigma,\ \mu + 2\sigma)$ = (10,305; 69,345) hay 558 personas, es decir, el 93%.

En $(\mu - 3\sigma,\ \mu + 3\sigma)$ = (- 4,455; 84,105) hay 594 personas, es decir, el 99%.

2. Ambas áreas miden 1,5 unidades cuadradas.

3. La representación gráfica la podemos ver en el gráfico:



El área del recinto señalado es $\frac{9}{16} = 0{,}5625\ u^2$

ACTIVIDADES-PÁG. 353

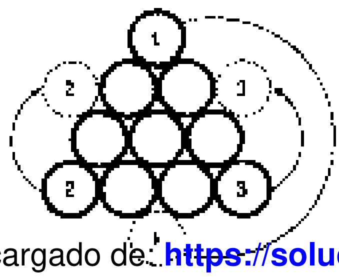
1. Cada día asciende 30 m y resbala 20 m, en realidad asciende 10 m.

Luego al cabo de 27 días ha ascendido 270 m, y ya el día 28 asciende a la superficie, pues asciende 30 m y 270 + 30 = 300 m.

El caracol tarda 28 días en salir.

2. La solución puede verse en el esquema:

Simplemente cambiando tres monedas, las señaladas con los números 1, 2 y 3, el triángulo se invierte.



3. Llamamos $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$ y elevamos al cuadrado: $x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}$

Operamos y obtenemos:

$$x^2 = 1 + x \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{5}$$

La solución con sentido es $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$, que es el número de oro.

4. Comenzando el problema desde el final:

Ave 8ª le da 1 + 1 = 2
Ave 7ª (tiene 6), le da 3 + 1 = 4 y le quedan 2.
Ave 6ª (tiene 14), le da 7 + 1 = 8 y le quedan 6.
Ave 5ª (tiene 30), le da 15 + 1 = 16 y le quedan 14.
Ave 4ª (tiene 62), le da 31 + 1 = 32 y le quedan 30.
Ave 3ª (tiene 126), le da 63 + 1 = 64 y le quedan 62.
Ave 2ª (tiene 254), le da 127 + 1 = 128 y le quedan 126.
Ave 1ª (tiene 510), le da 255 + 1 = 256 y le quedan 254.

Al principio tenía 510 granos de maíz.

5. Las pesas que necesitamos ha de ser de 1, 3, 9 y 27 kg.

Las pesadas son:

1 kg = 1
2 kg = 3 – 1
3 kg = 3
4 kg = 3 + 1
5 kg = 9 – 3 – 1
6 kg = 9 – 3
7 kg = 9 – 3 + 1
8 kg = 9 – 1
9 kg = 9
10 kg = 9 + 1
Y así sucesivamente.

La suma de los números significa que las pesas se colocan en el mismo plato de la balanza, y la diferencia, que se colocan en platos diferentes.

ACTIVIDADES-PÁG. 354

1. En este ejercicio la variable aleatoria tiene una distribución normal N (100, 15). Lo resolvemos accediendo al menú DISTR de la calculadora.

a) Queremos hallar P (X = 80) y para ello elegimos **normalpdf(80,100,15)** y obtenemos 0,0109.

b) Queremos hallar P (92 ≤ X ≤ 112) y para ello elegimos **normalcdf(92,112,100,15)** y obtenemos 0,4912.

2. En este ejercicio la variable aleatoria tiene una distribución normal N (150000, 8000). Lo resolvemos accediendo al menú DISTR de la calculadora.

a) Queremos hallar P (X ≥ 165000) y para ello elegimos **normalcdf(1650000,1000000,150000,8000)** y obtenemos 0,0304 . Al no tener el límite superior ponemos un valor muy grande.

b) Queremos hallar P (130000 ≤ X ≤ 160000) y para ello elegimos **normalcdf(130000,160000,150000,8000)** y obtenemos 0,8881 es decir el 88,81% de los congeladores.

c) En este caso queremos hallar el valor de a de modo que P(X ≤ a) = 0,68 y para ello elegimos **invNorm(0.68, 150000, 8000)** y obtenemos 153741,59 , es decir que 153 742 es el número máximo de horas que duran el 68% de los congeladores.

3. En este ejercicio la variable aleatoria tiene una distribución binomial B(25; 0,03). Lo resolvemos accediendo al menú DISTR de la calculadora.

a) Queremos hallar P(X ≤ 4) y para ello elegimos **binomcdf(25,0.03,4)** y obtenemos 0,9992.

b) Para hallar la probabilidad de que al menos haya 18 chips buenos, hallamos la probabilidad de que como máximo haya 7 defectuosos. Para ello hallamos P(X ≤ 7) mediante **binomcdf(25,0.03,7)** y obtenemos 0,9999.

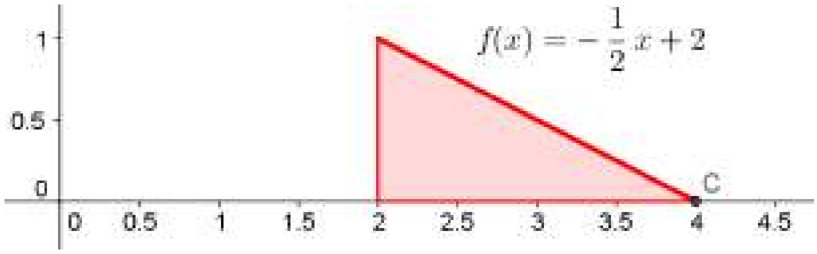
b) Queremos hallar P (8 ≤ X ≤ 10) y como sabemos que P (8 ≤ X ≤ 10) = P (X = 8) + P (X = 9) + P(X = 10) introducimos en la calculadora: **binompdf(25,0.03,8)+ binompdf(25,0.03,9)+ binompdf(25,0.03,10)** y obtenemos $4{,}4873\cdot 10^{-7}$.

ACTIVIDADES-PÁG. 356

1. I) La representación gráfica puede verse en el gráfico.

Es una función de densidad al cumplirse:

- $f_1\ (x) \geq 0\ \ \forall\ x$
- Área recinto $= \dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$



Las probabilidades pedidas son:

a) $P(2{,}5 \leq X \leq 3{,}5) = 0{,}5$

c) $P(X \geq 2{,}4) = 0{,}64$

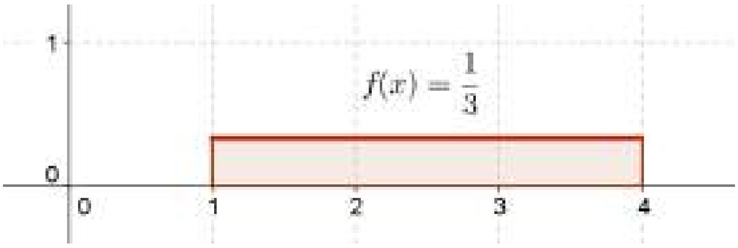
b) $P(X \leq 3) = 0{,}75$

d) $P(X = 3{,}65) = 0$

II) La representación gráfica puede verse en el gráfico.

Es una función de densidad al cumplirse:

- $f_1\ (x) \geq 0\ \ \forall\ x$
- Área recinto $= 3 \cdot \dfrac{1}{3} = 1$



Las probabilidades pedidas son:

a) $P(2{,}5 \leq X \leq 3{,}5) = 0{,}33$

c) $P(X \geq 2{,}4) = 0{,}53$

b) $P(X \leq 3) = 0{,}67$

d) $P(X = 3{,}65) = 0$

2. Los valores del parámetro son: a) $m = \dfrac{1}{6}$ y b) $m = -\dfrac{1}{2}$

3. La solución es:

a) La gráfica 1 se corresponde con la distribución N (7; 1,5).
La gráfica 2 se corresponde con la distribución N (5; 1,5).
La gráfica 3 se corresponde con la distribución N (5; 3,5).

b) Las plantas más altas corresponden a la distribución N (7; 1,5). En las otras distribuciones, las medias de las alturas coinciden, y en N (5; 1,5) están más agrupadas, respecto a la media, que en N (5; 3,5).

4. En la tabla de la distribución normal encontramos:

a) P ($Z \leq 1{,}25$) = 0,8944

b) P ($Z \geq 0{,}75$) = 1 – P ($Z \leq 0{,}75$) = 0,2266

c) P (Z ≤ - 1,56) = P (Z ≥ 1,56) = 0,0594

d) P (- 0,32 ≤ Z ≤ 0,32) = 2 · P (0 ≤ Z ≤ 0,32) = 2 · [P (Z ≤ 0,32) – P (Z ≤ 0)] = 0,251

5. En la tabla de la distribución normal encontramos:

a) a = 2,48 b) a = 1,36 c) a = 2,10 d) a = -1,28

6. Tipificamos la variable y posteriormente consultamos la tabla de la distribución normal:

a) P (X ≤ 6,32) = 0,5636

b) P(X ≥ 5,2) = 0,6554

c) P (X ≤ 4,5) = 0,2266

d) P (5 ≤ X ≤ 7) = 0,3829

7. Tipificamos la variable y posteriormente consultamos la tabla de la distribución normal:

a) k = 7,14

b) k = 6,74

c) P (0 ≤ X ≤ k) = P (X ≤ k) – 0,5; k = 11,61

d) P (6 - k ≤ X ≤ 6 + k) = P (X ≤ 6 + k) – P (X ≤ 6 - k); k = 2,35

8. La probabilidad es: P (18 ≤ X ≤ 30) = 0,4339.

ACTIVIDADES-PÁG. 357

9. Es una distribución normal N (192; 12).

La probabilidad pedida es:
P (X ≤ 186) = P (Z ≤ - 0,5) = P (Z ≥ 0,5) = 1 – P (Z ≤ 0,5) = 0,3085

10. Es una distribución normal N (170; 3).

- P (155 ≤ X ≤ 165) = P (- 5 ≤ Z ≤ - 1,67) = P (Z ≤ 5) - P (Z ≤ 1,67) = 0,0478, es decir, 48 batas.
- P (165 ≤ X ≤ 175) = P (- 1,67 ≤ Z ≤ 1,67) = 2 · P (0 ≤ Z ≤ 5) =

  = 2 · (0,9525 – 0,5) = 0,905, es decir, 905 batas.
- P (175 ≤ X ≤ 185) = P (1,67 ≤ Z ≤ 5) = P (Z ≤ 5) - P (Z ≤ 1,67) = 0,0475, es decir, 48 batas.

11. La solución queda:

a) $P\left(X \geq 8\right) = P\left(\frac{X-9}{3} \geq \frac{8-9}{3}\right) = P\left(Z \geq -\frac{1}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{3}\right) = 0{,}6306$

b) $P\left(X \leq 5\right) = P\left(\frac{X-9}{3} \leq \frac{5-9}{3}\right) = P\left(Z \leq -\frac{4}{3}\right) = P\left(Z \geq \frac{4}{3}\right) = 1 - 0{,}9082 = 0{,}0918$

c) $P\left(11 \le X \le 13\right) = P\left(\dfrac{11-9}{3} \le \dfrac{X-9}{3} \le \dfrac{13-9}{3}\right) = P\left(\dfrac{2}{3} \le Z \le \dfrac{4}{3}\right) =$

$$= P\left(Z \le \frac{4}{3}\right) - P\left(Z \le \frac{2}{3}\right) = 0{,}1613$$

12. La solución queda:

a) $P\left(13 \le t \le 21\right) = P\left(\dfrac{13-17}{3} \le Z \le \dfrac{21-17}{3}\right) = P\left(-1{,}33 \le Z \le 1{,}33\right) =$

$$= 2 \cdot P\ (Z \le 1{,}33) = 2 \cdot P(\ Z \le 1{,}33) - 1 = 0{,}8176$$

b) $P\left(X \le t\right) = P\left(Z \le \dfrac{t-17}{3}\right) = 0{,}95 \;\Rightarrow\; \dfrac{t-17}{3} = 1{,}645 \;\Rightarrow\; t = 21{,}935 \approx 22$ minutos.

13. La solución es:

a) $P\left(X \le 28\right) = P\left(Z \le \dfrac{28-30}{5}\right) = P\left(Z \le -0{,}4\right) = 1 - P\left(Z \ge 0{,}4\right) = 0{,}3346$

b) $P\left(25 \le X \le 35\right) = P\left(\dfrac{25-30}{5} \le Z \le \dfrac{35-30}{5}\right) = P\left(-1 \le Z \le 1\right) =$

$$= 2 \cdot [P\ (Z \le 1) - P(Z \le 0)] = 0{,}6826$$

Es decir, el 68,26%.

c) $P\left(X \le t\right) = 0{,}80 \;\Rightarrow\; P\left(Z \le \dfrac{t-30}{5}\right) = 0{,}80 \;\Rightarrow\; \dfrac{t-30}{5} = 0{,}84 \;\Rightarrow\; t = 34{,}2$ minutos.

14. La variable se ajusta a una normal N (60; 3).

a) $P\left(X \ge 62\right) = P\left(Z \ge \dfrac{62-60}{3}\right) = P\left(Z \ge 0{,}67\right) = 1 - P\left(Z \le 0{,}67\right) = 0{,}2514 \;\Rightarrow\; 25{,}14\%$

Por lo tanto hay 201 adultos con el dedo corazón más largo de 62 mm.

b) $P\left(X \le 57\right) = P\left(Z \le -1\right) = P\left(Z \ge 1\right) = 1 - P\left(Z \le 1\right) = 0{,}1587$

Es el 16,87% que suponen 127 adultos.

c) $P\left(60 \le X \le 66\right) = P\left(0 \le Z \le 2\right) = P\left(Z \le 2\right) - P(Z \le 0) = 0{,}4772$

Es el 47,72% que suponen 382 adultos.

15. La solución queda:

a) P (salga 0 una sola vez) = $\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot 3 = 0{,}243$

b) Es una distribución binomial B (100; 0,1) y la aproximamos a una distribución normal N (10; 3).

$$P\left(X > 12\right) = P\ (X' \geq 12{,}5) = P\left(Z \geq \frac{12{,}5 - 10}{3}\right) = P\left(Z \geq 0{,}83\right) =$$
$$= 1 - P\left(Z \leq 0{,}83\right) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$$

16. Llamamos k a la nota mínima a partir de la cual se conseguirá el sobresaliente. Debe cumplirse:

$$P\left(X \leq k\right) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{X - 5{,}5}{1{,}5} \leq \frac{k - 5{,}5}{1{,}5}\right) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad \frac{k - 5{,}5}{1{,}55} = 1{,}282 \quad \Rightarrow \quad k = 7{,}423$$

De igual forma, la calificación de notable:

$$P\left(X \leq k\right) = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{X - 5{,}5}{1{,}5} \leq \frac{k - 5{,}5}{1{,}5}\right) = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad \frac{k - 5{,}5}{1{,}55} = 0{,}525 \quad \Rightarrow \quad k = 6{,}2875$$

ACTIVIDADES-PÁG. 358

17. Es una distribución binomial $B\left(360, \frac{1}{6}\right)$ y la aproximaremos por una distribución normal.

Quedaría: $\mu = 360 \cdot \frac{1}{6} = 60 \ y\ \sigma = \sqrt{360 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 7{,}07$

La probabilidad es:

$$P\left(X \leq 55\right) = P\ (\ X' \leq 55{,}5) = P\left(\frac{X' - 60}{7{,}07} \leq \frac{55{,}5 - 60}{7{,}07}\right) = P\ (Z \leq -\ 0{,}64) = 1 -\ P(Z \leq 0{,}64) = 0{,}2611$$

18. Las probabilidades son:

a) P ($X \geq 13$) = 0,2119 b) P ($X \leq 7$) = 0,0548 c) P ($X \geq 10$) = 0,6554

19. La probabilidad es: P ($0{,}3 \leq X \leq 0{,}75$) = 0,9710

20. La desviación típica es 0,8.

Las probabilidades son:

a) P ($1 \leq X \leq 3$) = 0,7887 b) P ($X \leq$ p) = 0,25; p = 1,46

21. La longitud sigue una distribución normal N(60, 5). Las probabilidades son:

a) P (X ≥ 64) = 0,2119

b) P (55 ≤ X ≤ 65) = 0,6827

c) $P\left(X \geq 66 \middle/ \geq 64\right) = \dfrac{P\ (X \geq 66)}{P\ (X \geq 64)} = 0{,}5432$

22. El peso sigue una distribución normal N (1,5; σ).

Se cumple:

P (X ≥ 2,5) = 0,15, entones, P (X ≤ 2,5) = 0,85, por tanto $\dfrac{2{,}5 - 1{,}5}{\sigma} = 1{,}0364$ y σ = 0,965.

23. Hallamos la media μ y la desviación típica σ .

P (X ≥ 100) = 0,2; $P\left(Z \geq \dfrac{100-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{100-\mu}{\sigma} = 0{,}842$

P(X ≤ 60) = 0,08; $P\left(Z \leq \dfrac{60-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}08 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{60-\mu}{\sigma} = -\,1{,}405$

Resolvemos el sistema y obtenemos $\mu = 85$ y $\sigma = 17{,}8$

24. Es una distribución binomial B (1000; 0,03) que aproximamos a una distribución normal N (30; 5,39) al ser la media $\mu = 1000 \cdot 0{,}03 = 30$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}97} = 5{,}39$.

Hallamos la probabilidad P (25 < X < 40) = P (25,5 ≤ X ´ ≤ 39,5) = 0,7591.

25. Es una distribución binomial B (75; 0,9) que aproximamos a distribución normal N (67,5; 2,6) al ser La media $\mu = 75 \cdot 0{,}9 = 67{,}5$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{75 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = 2{,}6$.

Hallamos la probabilidad P (X ≥ 65) = P (X´ ≥ 64,5) = 0,8757

26. Las soluciones son:

a) Es una distribución binomial B (20 ; 0,85).

Hallamos la probabilidad P (X ≤ 18) = 1 – P (X = 19) – P (X = 20) = 0,8244

b) Es una distribución binomial B (500; 0,85) que aproximamos a una normal N (425; 7,98) al ser la media $\mu = 500 \cdot 0{,}85 = 425$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15} = 7{,}98$.

Hallamos la probabilidad P (X > 450) = P (X ≥ 450,5) = 0,0007.

27. Es una distribución normal N (6,5; 1,75).

a) Calculamos la nota S a partir de la cual calificará con sobresaliente: P (X ≥ S) = 0,12 por lo que P (X ≤ S) = 0,88, entonces:

$$P\left(Z \leq \frac{S-6{,}5}{1{,}75}\right) = 0{,}88 \ \Rightarrow \ \frac{S-6{,}5}{1{,}75} = 1{,}175 \ \Rightarrow S = 8{,}56$$

La nota a partir de la cual calificará el profesor con sobresaliente es S = 8,56.

b) Si quiere calificar con notable al 35% de los alumnos, contando los sobresalientes, quedaría que la nota N a partir de la cual obtendrá notable es P (X ≥ N) = 0,47, es decir, P (X ≤ N) = 0,53, entonces:

$$P\left(Z \leq \frac{N-6{,}5}{1{,}75}\right) = 0{,}53 \ \Rightarrow \ \frac{N-6{,}5}{1{,}75} = 0{,}076 \ \Rightarrow N = 6{,}63.$$

El valor 6,63 es la nota a partir de la cual calificará el profesor con notable, hasta el 8,56 a partir del cual calificará con sobresaliente.

ACTIVIDADES-PÁG. 359

a) $24\,(1 + 0{,}08)^{390} = 2{,}6 \cdot 10^{14}$ \$

b) $24\,(1 + r)^{390} = 1000$ \$; r = 0,961% anual