UNIDAD 15: Introducción a las integrales y sus aplicaciones

ACTIVIDADES-PÁG. 350

1. Las primitivas son:

a) Primitivas de f (x) = 3x son: $F_1(x) = \frac{3x^2}{2} + 5$ y $F_2(x) = \frac{3x^2}{2} - 10$.

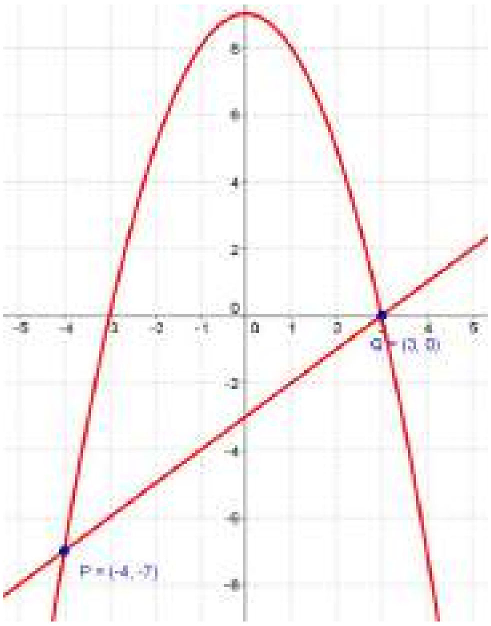
b) Primitivas de $f(x) = 4x^2$ son: $F_1(x) = \frac{4x^3}{3} + 3$ y $F_2(x) = \frac{4x^3}{3} - 7$.

c) Primitivas de f (x) = sen x son: $F_1(x) = -\cos x + \pi$ y $F_2(x) = -\cos x - 2$.

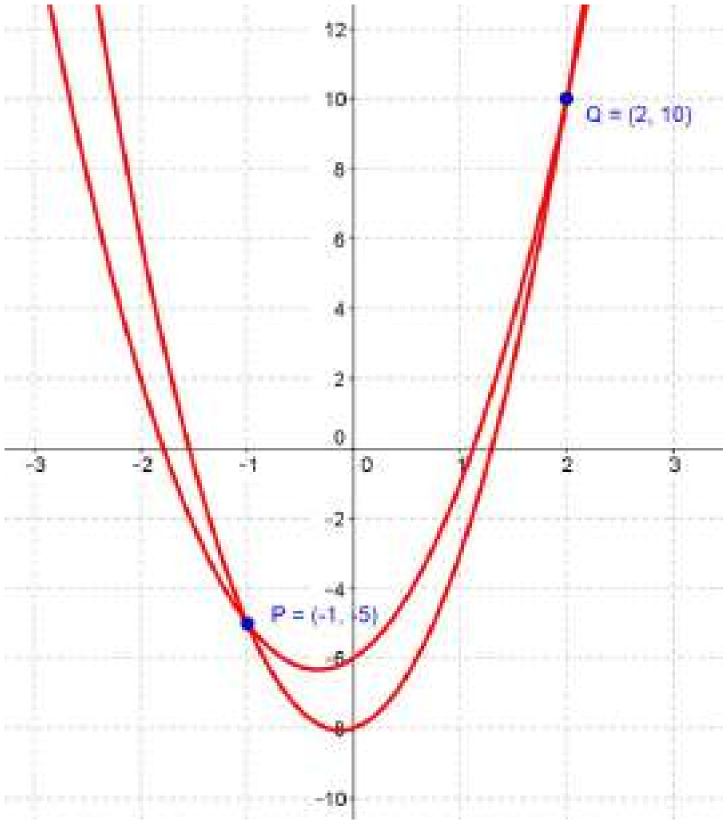
d) Primitivas de $f(x) = e^x$ son $F_1(x) = e^x - 1$ y $F_2(x) = e^x + 4$.

2. El área del recinto es de 17 uc.

3. a) Los puntos de intersección de la parábola y la recta son P (- 4, - 7) y Q (3, 0). El recinto puede verse en el dibujo.



b) Los puntos de intersección de la parábola y la recta son P (- 1, - 5). Y Q (2, 10). El recinto puede verse en el dibujo.



ACTIVIDADES-PÁG. 365

1. La estrategia consiste en establecer una analogía con el cuadrado mágico 3 x 3 que contiene los nueve primero números naturales 1, 2…, 8 y 9 y la constante mágica 15.

Hay que utilizarlo como si se jugase al tres en raya.

2. En total el nabab tenía 36 gemas y 6 hijos.

Al mayor le da $1+\frac{35}{7}=6$ gemas. Quedan 30.

Al 2º le da $2+\frac{28}{7}=6$ gemas. Quedan 24.

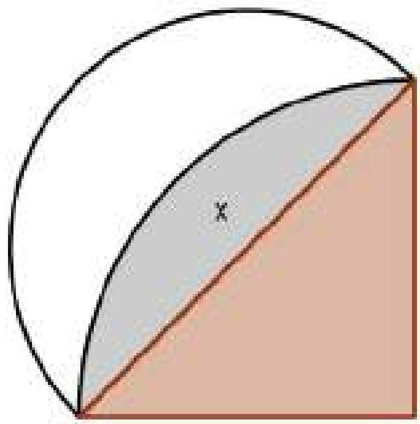
Al 3º le da $31+\frac{21}{7}=6$ gemas. Quedan 18.

Al 4º le da $1+\frac{14}{7}=6$ gemas. Quedan 12.

Al 5º le da $1+\frac{7}{7}=6$ gemas. Quedan 6.

Al 6º le da 6 gemas.

3. La solución queda:



Área del triángulo = $\frac{r^2}{2}$.

Área lúnula = $\frac{1}{2}$ · Área semicírculo – Área (x).

Área (x) = $\frac{1}{4}$ · Área círculo – Área triángulo = $\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$.

$$\text{Área lúnula} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{4} + \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2}.$$

Ambas áreas son iguales.

4. Cortó la cadena en 4 trozos de 1, 2, 4 y 8 cm cada uno.

- El primer día le dio 1 cm.
- El segundo día le dio el trozo de 2 cm y le devolvió la patrona el de 1 cm.
- El tercer día le dio el trozo de 1 cm, luego la patrona tiene 1 cm y 2 cm.
- El cuarto día le dio el trozo de 4 cm y la patrona le devolvió los dos trozos que tenía.
- Así sucesivamente.

ACTIVIDADES-PÁG. 366

1. En la imagen vemos la resolución de esta actividad.

$$\int \frac{(3\cdot x+2)^3}{x} \rightarrow 8\cdot \ln(|x|) + (9\cdot x^3 + 27\cdot x^2) + 36\cdot x$$

$$\int \frac{8\cdot x}{\sqrt{5\cdot x^2+7}} \rightarrow \frac{40\cdot x^2+56}{5\cdot\sqrt{5\cdot x^2+7}}$$

$$\int \frac{\frac{2}{3}\cdot x - 5}{\sqrt{12-7\cdot x^2}} \rightarrow \frac{-15\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{-7\cdot x^2+12}\cdot \operatorname{asen}\left(\frac{\sqrt{21}\cdot x}{6}\right) + (14\cdot x^2-24)}{21\cdot\sqrt{-7\cdot x^2+12}}$$

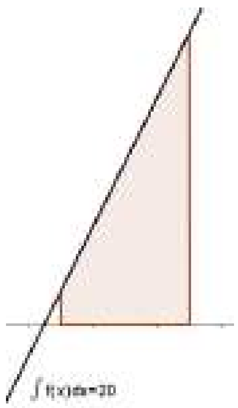
2. En la imagen tenemos las soluciones de estas integrales definidas.

$$\int_0^2 \left(6+\frac{3}{2}\cdot x^3\right)^5 \cdot 4\cdot x^2 \rightarrow 5031936$$

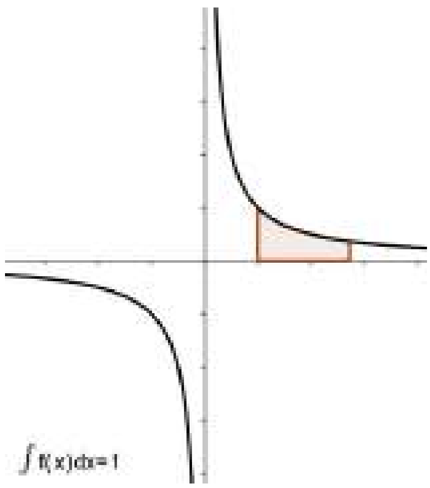
$$\int_{-1}^1 \frac{6\cdot x\cdot \cos(x^2)}{2+3\cdot \operatorname{sen}(x^2)} \rightarrow 0.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 367

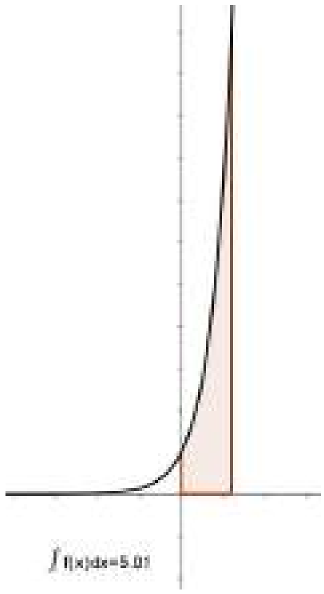
1. Procediendo como se indica en el texto obtenemos un área de 20 unidades cuadradas.



2. En este caso obtenemos un área de 1 unidad cuadrada.



3. En este caso obtenemos un área de 5,01 unidades cuadradas.



ACTIVIDADES-PÁG. 368

1. Las primitivas son:

a) Primitivas de f (x) = $3x^2$ son: F_1 (x) = $x^3 + 3$; F_2 (x) = $x^3 - 5$ y F_3 (x) = $x^3 - \pi$.

b) Primitivas de f (x) = $2x - 5$ son: F_1 (x) = $x^2 - 5x + 1$; F_2 (x) = $x^2 - 5x - \sqrt{2}$ y F_3 (x) = $x^2 - 5x + 3$

c) Primitivas de f (x) = 3 cos (3x) son: F_1 (x) = sen 3x; F_2 (x) = sen (3x) + 1 y F_3 (x) = sen (3x) – 2.

2. La primitiva es f (x) = ln $|x - 2|$.

3. Las funciones buscadas son:

a) f (x) = $x^4 - x^2 + 3$

b) $f\ (x) = -\dfrac{1}{2}\cos\ 2x + \dfrac{3}{2}$

4. Derivando F (x) = $3\,x\,e^{3x} - e^{3x} + 3$ obtenemos:

$$F\,'(x) = 3e^{3x} + 3x \cdot e^{3x} \cdot 3 - e^{3x} \cdot 3 = 9x \cdot e^{3x} = f\,(x)$$

5. Las integrales quedan:

a) $\int 7x^6\ dx = x^7 + C$

b) $\int \frac{3}{5x^4}\ dx = -\frac{1}{5x^3} + C$

c) $\int 2\sqrt[4]{x^3}\ dx = \frac{8}{7}\sqrt[4]{x^7} + C$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2}\ dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

e) $\int \frac{3x^4 - 5\sqrt{x}}{x}\ dx = \frac{3}{4}x^4 - 10\sqrt{x} + C$

f) $\int x^3\ (4x^4 - x)\ dx = \frac{x^8}{2} - \frac{x^5}{5} + C$

g) $\int (2-3x)^{10}\ dx = -\frac{1}{33}(2-3x)^{11} + C$

h) $\int (7x^2+3)^6 \cdot 3x\, dx = \frac{3}{98}(7x^2+3)^7 + C$

i) $\int \frac{1}{(5x-1)^3}\ dx = -\frac{1}{10\ (5x-1)^2} + C$

j) $\int \frac{tg\ x}{\cos^2\ x}\ dx = \frac{tg^2\ x}{2} + C$

k) $\int 9\ sen\ x \cos\ x\ dx = \frac{9}{2}\ sen^2\ x + C$

l) $\int \frac{\ln\ x}{2x} dx = \frac{1}{4}\ln^2\ x + C$

6. Las funciones primitivas son:

a) $\int e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

b) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{\ln 2} 2^{\sqrt{x} + C}$

c) $\int 3^{x^3 + 2} \cdot x^2 \; dx = \frac{1}{3 \ln 3} \, 3^{x^3 + 2} + C$

d) $\int \sqrt{5^x} \; dx = \frac{2}{\ln 5} \sqrt{5^x + C}$

e) $\int e^{sen\, 2x} \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{sen\, 2x} + C$

f) $\int \frac{e^{\ln x}}{3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{\ln x} + C$

7. Las funciones primitivas son:

a) $\int \frac{2x}{5x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{5} \ln \left(5x^2 + 1\right) + C$

b) $\int \cot g \; x \; dx = \ln \left| sen \; x \right| + C$

c) $\int \frac{2x^2}{3x^3 - 7}\, dx = \frac{2}{9} \ln \left|3x^3 - 7\right| + C$

d) $\int \frac{6x - 9}{x^2 - 3x + 2}\, dx = 3 \ln \left| x^2 - 3x + 2\right| * C$

e) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 2}\, dx = - \ln \left| e^{-x} - 2\right| + C$

f) $\int \frac{4}{x \cdot \ln x}\, dx = 4 \ln \left| \ln x \right| + C$

8. Las funciones primitivas son:

a) $\int sen \; 2x \; dx = - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

b) $\int 3x \cdot \cos \left(x^2 + 1\right) \, dx = \frac{3}{2} \; sen \; \left(x^2 + 1\right) + C$

c) $\int \left[1 + tg^2 (7x)\right] \; dx = \frac{1}{7} \; tg \; (7x) + C$

d) $\int \frac{2\,e^{x}}{\cos^2 e^{x}}\,dx = 2\ tg\ x + C$

e) $\int \sec^2 x\,dx = tg\ x + C$

f) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}\ sen\ \sqrt{x} + C$

ACTIVIDADES-PÁG. 369

9. Las integrales son:

a) $\int \frac{2}{9x^2+1}\,dx = \frac{2}{3}\ arctg\ (3x) + C$

b) $\int \frac{5}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx = \frac{5}{4} arcsen\ (4x) + C$

c) $\int \frac{6x}{9+16x^4}\,dx = \frac{1}{4}\ arctg\left(\frac{4}{3}x^2\right) + C$

d) $\int \frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx = arcsen\left(\frac{2}{3}x\right) + C$

e) $\int \frac{5\,e^{2x}}{2e^{4x}+1}\,dx = \frac{5\sqrt{2}}{4}\ arctg\left(\sqrt{2}\ e^{2x}\right) + C$

f) $\int \frac{8}{-9x^2-18}\,dx = -\frac{4\sqrt{2}}{9}\ arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) + C$

10. Las integrales son:

a) $\int \left(\frac{3}{x^4} - \frac{5}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{x} - 8\right)dx = -\frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x^5} + 4\ln|x| - 8x + C$

b) $\int \frac{4x^4}{3-2x^5}\,dx = -\frac{2}{5}\ln\left|3-2x^5\right| + C$

c) $\int \frac{3}{5x^2+16}\,dx = \frac{\sqrt{15}}{20}\ arctg\left(\frac{\sqrt{5}}{4}x\right) + C$

d) $\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{x} + C$

e) $\int \sqrt{4x^3 - 12} \cdot 5x^2\, dx = \frac{10}{36}\sqrt{(4x^3 - 12)^3} + C$

f) $\int \frac{3-2x}{4x^2+9}\, dx = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{4}\ln\left|4x^2 + 9\right| + C$

g) $\int sen^3\, 5x \cdot \cos\, 5x\, dx = \frac{1}{20} sen^4\, (5x) + C$

h) $\int \frac{2e^{tg\, x}}{\cos^2 x}\, dx = 2\, e^{tg\, x} + C$

i) $\int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 + e^{-x}}}\, dx = -\, 2\sqrt{1 + e^{-x}} + C$

j) $\int 6x \cdot e^{4x^2}\, dx = \frac{3}{4} e^{4x^2} + C$

k) $\int \frac{2x^2 + 4}{x^3 + 6x}\, dx = \frac{2}{3}\ln\left|x^3 + 6x\right| + C$

l) $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}\, dx = -\frac{1}{\ln\, x} + C$

m) $\int \frac{x + 2}{\sqrt{1 - 4x^2}}\, dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1 - 4x^2} + arcsen\, (2x) + C$

n) $\int \frac{sen\, 4x}{2 + \cos\, 4x}\, dx = -\frac{1}{4}\ln\left|2 + \cos\, 4x\right| + C$

p) $\int \frac{(2x-3)^2}{x} dx = 2x^2 - 12x + 9\ln\left|x\right| + C$

11. Los valores de las integrales definidas son:

a) $\int_0^2 (x^2 - 3x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{10}{3} = -\, 3{,}33$

b) $\int_2^3 \frac{1}{x-1}\, dx = \left[\ln\, (x-1)\right]_2^3 = \ln\, 2 = 0{,}69$

c) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^3}\, dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{1}^{2} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

d) $\int_{-1}^{0} x \cdot e^{x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_{-1}^{0} = \frac{1-e}{2} = -0{,}86$

e) $\int_{0}^{1} 3^{-x}\, dx = \left[-\frac{3^{-x}}{\ln 3} \right]_{0}^{1} = \frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 27} = 0{,}61$

f) $\int_{-1}^{1} \frac{4x}{x^2+3}\, dx = \left[2 \ln (x^2+3) \right]_{-1}^{1} = 0$

g) $\int_{3}^{9} \sqrt{2x-2}\, dx = \left[\frac{1}{3} \sqrt{(2x-2)^3} \right]_{3}^{9} = 18{,}67$

h) $\int_{0}^{1} (3x+1)^4\, dx = \left[\frac{1}{15} (3x+1)^5 \right]_{0}^{1} = 68{,}2$

i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\, dx = \left[\frac{1}{3} sen\,(3x) \right]_{0}^{\pi/2} = -\frac{1}{3} = -0{,}33$

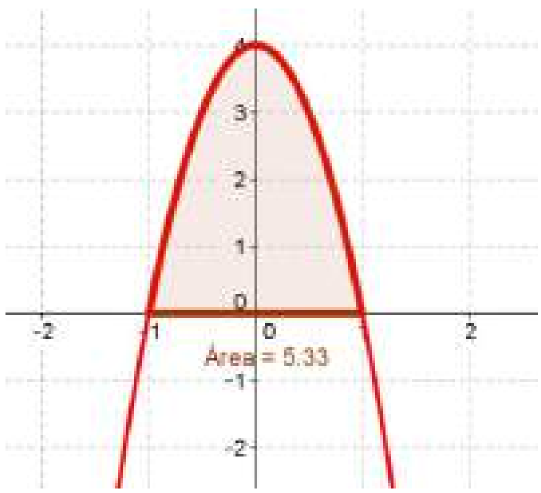
j) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left[3 \cdot arcsenx \right]_{0}^{1/2} = \frac{\pi}{2}$

k) $\int_{0}^{2} \frac{3+x}{x^2+4}\, dx = \left[\frac{3}{2} arctg \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(x^2+4 \right) \right]_{0}^{2} = 1{,}52$

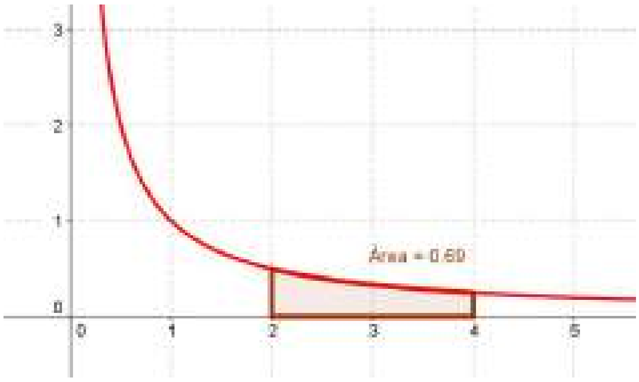
l) $\int_{0}^{3\pi/4} 2 \cdot tg\ x\, dx = \left[-2 \ln |\cos x| \right]_{0}^{3\pi/4} = 0{,}69$

12. El valor de las áreas, en cada caso, es:

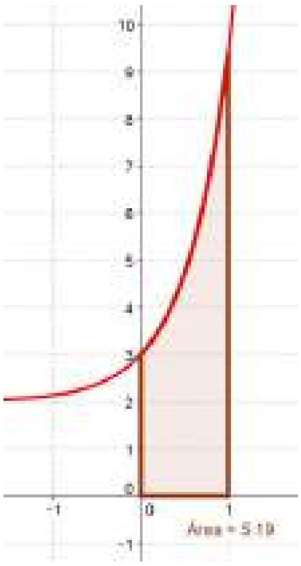
a) $\int_{-1}^{1} (4-4x^2)\, dx = \left[4x - \frac{4}{3} x^3 \right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3} = 5{,}33$



b) $\int_2^4 \frac{1}{x}\, dx = [\ln |x|]_2^4 = \ln 2 = 0{,}69$



c) $\int_0^1 (e^{2x} + 2)\, dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x\right]_0^1 = \frac{e^2 + 3}{2} = 5{,}19$



ACTIVIDADES-PÁG. 370

13. Las integrales son:

a) $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

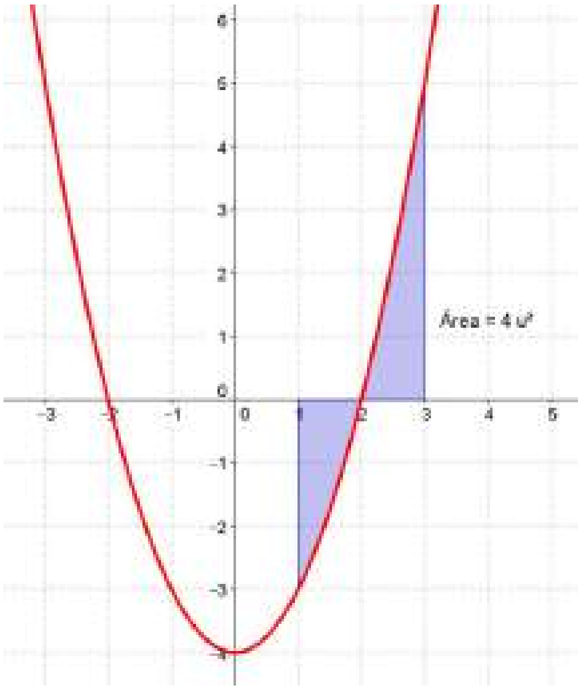
b) $\int_a^c f(x)\, dx - \int_c^d f(x)\, dx$

c) $\int_a^c [f(x) - g(x)]\, dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\, dx$

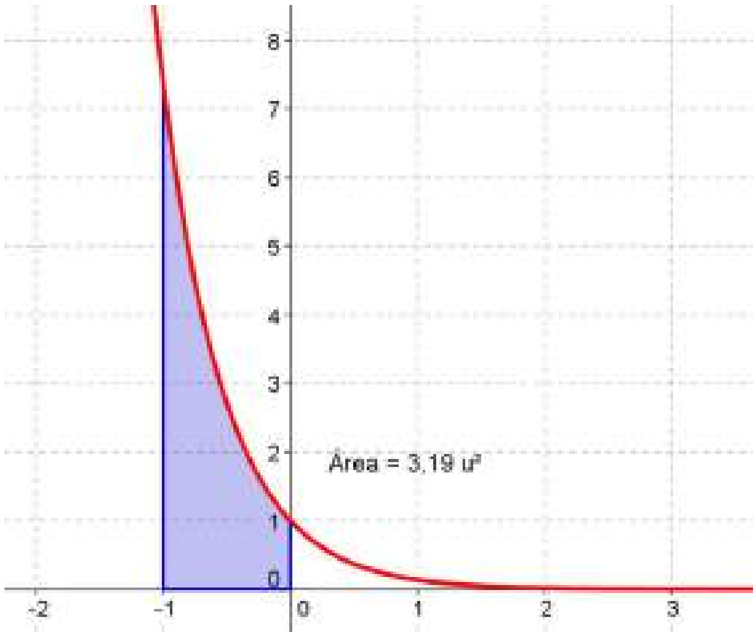
14. Las regiones pueden verse en los dibujos, así como el valor de las áreas de las mismas.

a) Área $= \int_1^3 (x^2-4)\,dx = -\int_1^2 (x^2-4)\,dx + \int_2^3 (x^2-4)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3 =$

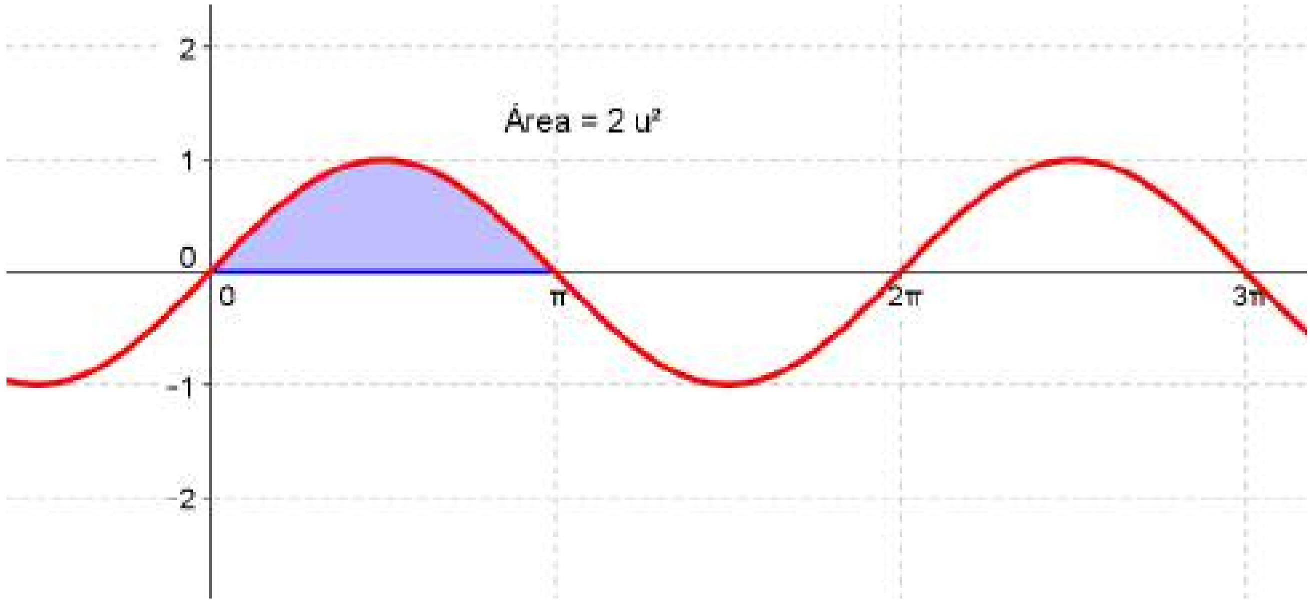
$$= -\left(-\frac{16}{3}-\left(-\frac{11}{3}\right)\right) + \left(-3-\left(-\frac{16}{3}\right)\right) = \frac{5}{3}+\frac{7}{3} = 4\ u^2.$$



b) Área $= \int_{-1}^0 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^0 = \left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{e^2}{2}\right) = \frac{e^2-1}{2} = 3{,}19\ u^2.$



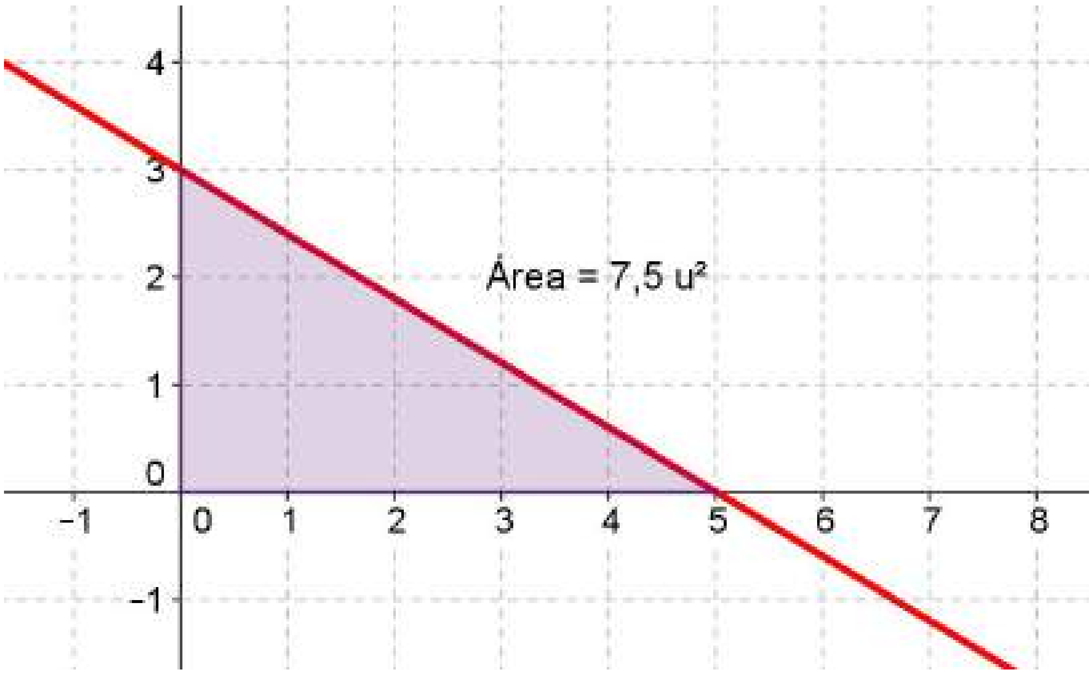
c) $\text{Área} = \int_0^{\pi} sen\ x\ dx = \left[-\cos\ x\right]_0^{\pi} = (-\cos\ \pi) - (-\cos\ 0) = 2\ u^2.$



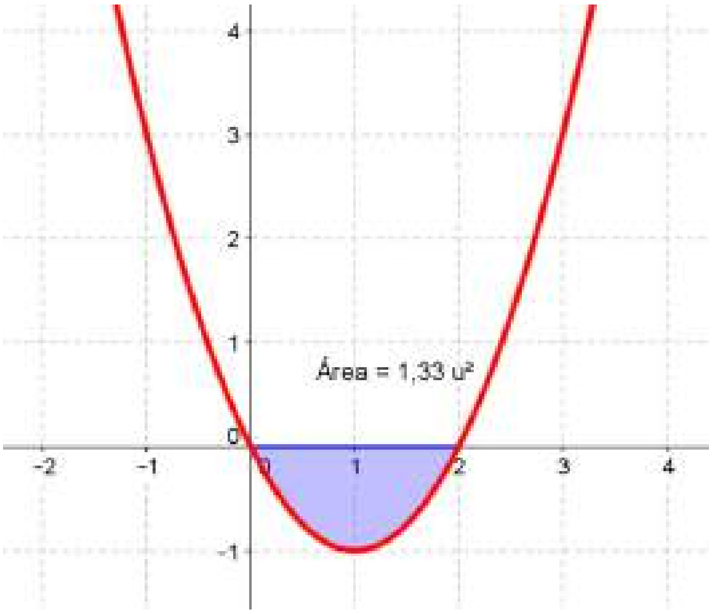
15. Los recintos pueden verse en los dibujos, así como las áreas de los mismos:

a) 3x + 5y = 15; eje OX; eje OY

a) $\text{Área} = \int_0^5 \left(-\frac{3}{5}x + 3\right) dx = \left[-\frac{3}{10}x^2 + 3x\right]_0^5 = \left(-\frac{75}{10} + 15\right) = 7{,}5\ u^2.$

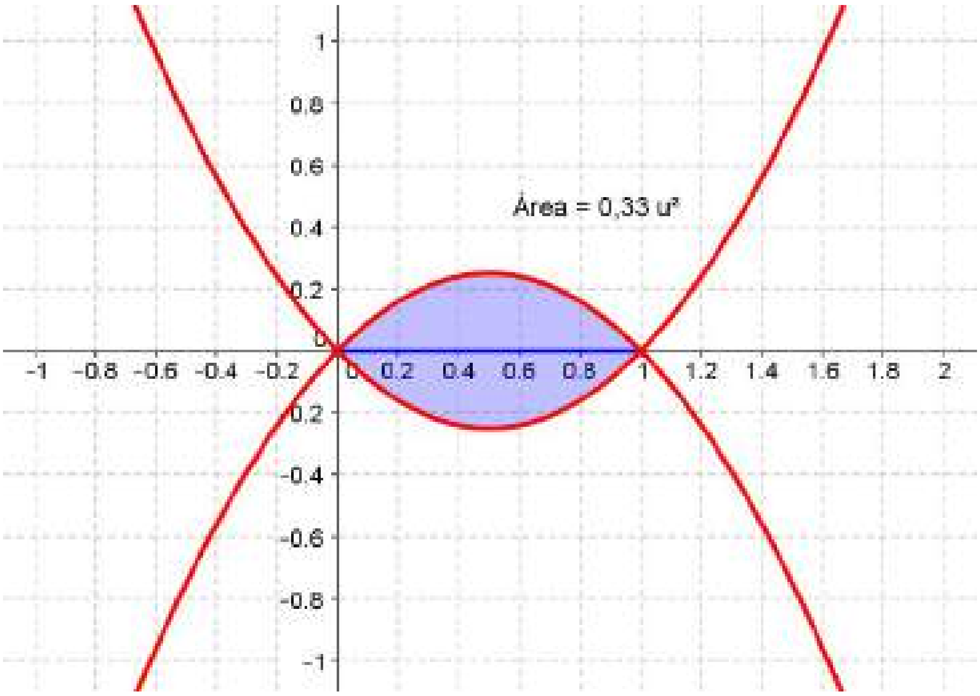


b) $\text{Área} = -\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{4}{3} = 1{,}33\ u^2.$



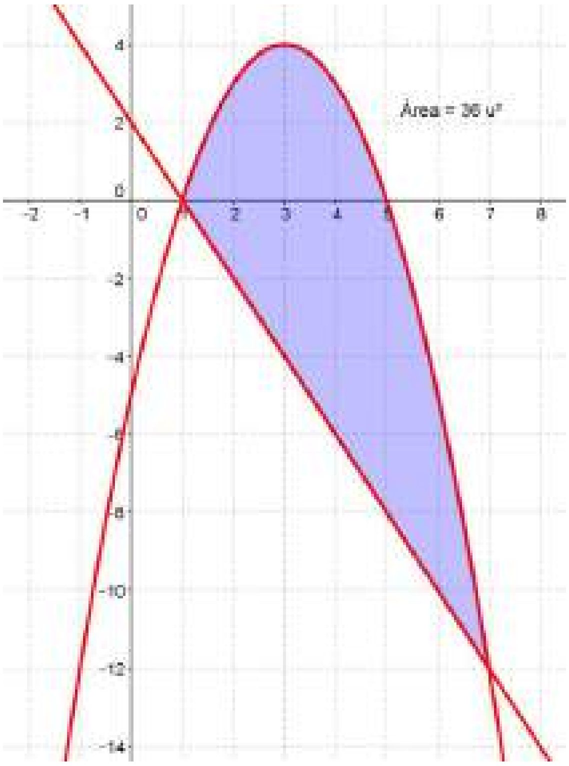
c) $\text{Área} = \int_0^1 \left(-x^2 + x\right) dx = -\int_0^1 (x^2 - x)\ dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$

$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} = 0{,}33\ u^2.$

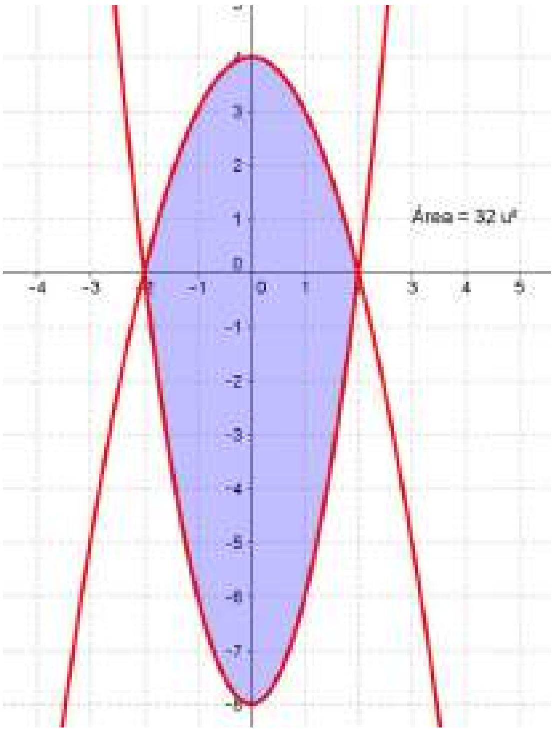


d) Área = $\int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx + \int_5^7 (-x^2 + 6x - 5)\ dx - \int_1^7 (2 - 2x)\ dx =$

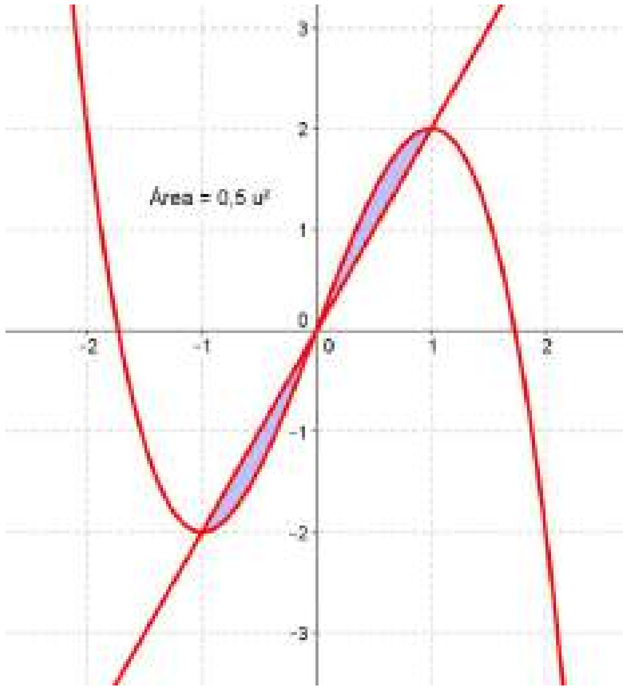
$= 10{,}66 - 10{,}66 - (-36) = 36\ u^2.$



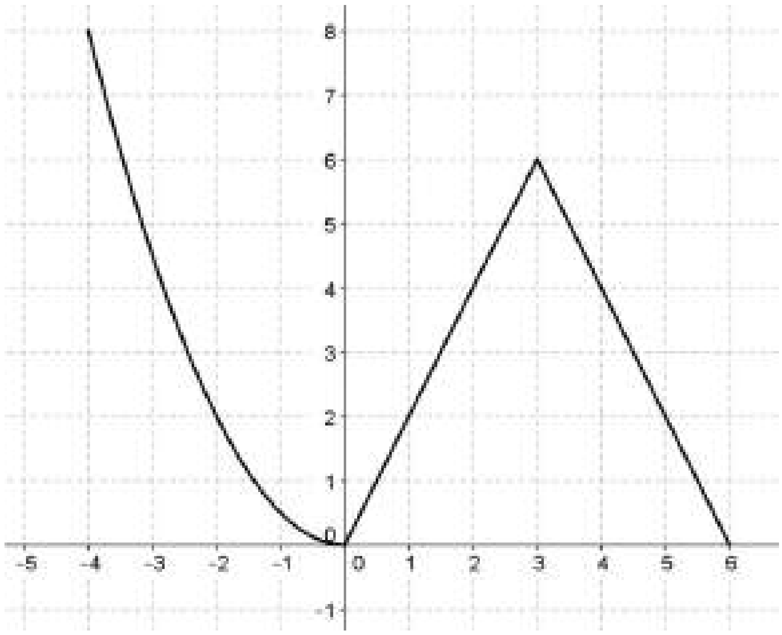
e) Área = $\int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx - \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\ dx = 10{,}67 - (-21{,}33) = 32\ u^2$



f) Área = $2 \cdot \left[\int_0^1 (3x - x^3)\,dx - \int_0^1 2x\,dx\right] = 2 \cdot \left[\frac{5}{4} - 1\right] = \frac{1}{2} = 0{,}5\ u^2$

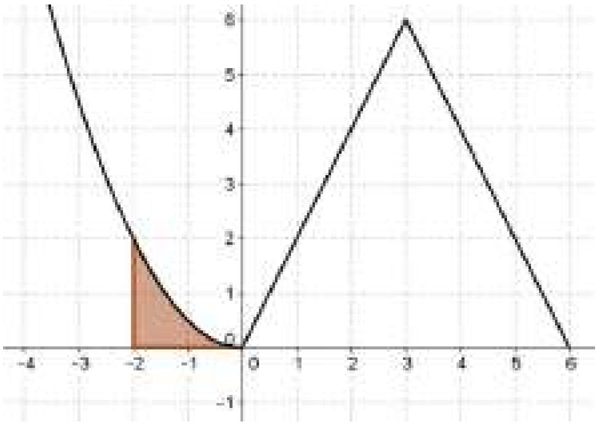


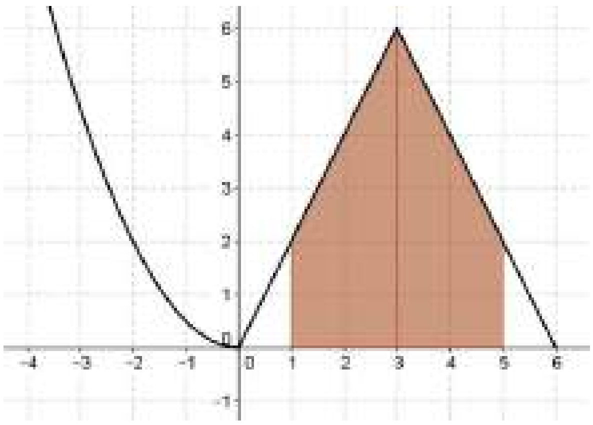
16. La gráfica de la función f (x) puede verse en el dibujo:



El valor de las integrales es:

$$\int_{-2}^{0} f\ (x)\ dx = \int_{-2}^{0} f\ (x)\ dx = \frac{4}{3}\ u^2 \qquad \int_{1}^{5} f\ (x)\ dx = \int_{1}^{3} 2x\ dx + \int_{3}^{5} (12-2x)\ dx = 16\ u^2$$





17. Las funciones que verifican f ´´ (x) = 6x – 6 son: f ´ (x) = $\int (6x-6)\, dx = 3x^2 - 6x + C$.

Como f ´ (-2) = 0 entonces C = -24 y f ´ (x) = $3x^2 - 6x - 24$.

Hallamos f(x) = $\int (3x^2 - 6x - 24)\ dx = x^3 - 3x^2 - 24x + K$.

Como f (0) = -2, entonces K = -2.

Por tanto, la función es f (x) = $x^3 - 3x^2 - 24x - 2$

18. Sea P el punto de coordenadas $\left(a, \frac{1}{2}a^2\right)$. La ecuación de la recta tangente a la curva dada en P es:

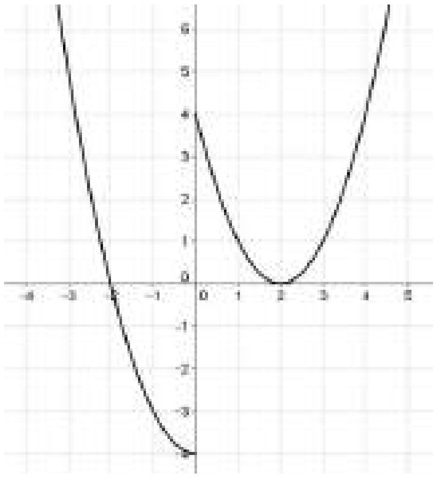
$$y = ax - \frac{1}{2}a^2$$

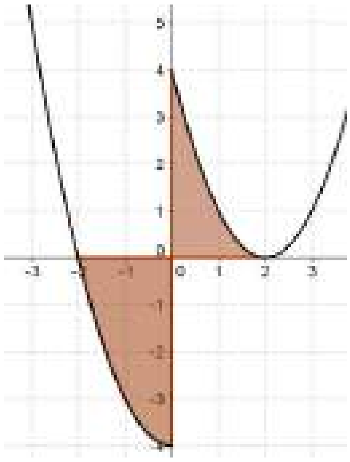
Imponiendo las condiciones del problema obtenemos que:

$$\int_{0}^{a} \frac{1}{2}x^2\ dx - \int_{a/2}^{a} \left(ax - \frac{1}{2}a^2\right) dx = 9 \ \Rightarrow\ \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{8} = 9 \ \Rightarrow\ a = 6.$$

El punto es P (6, 18).

19. a) Las gráficas de la función y de la cenefa aparecen en los dibujos:





b) El área de la región sombreada es:

$$Área = \int_0^{-2} (x^2 - 4)\ dx + \int_0^2 (x-2)^2\ dx = 8\ u^2$$

c) El precio de este trozo de cenefa es $8 \cdot 120 = 960$ €

20. a) Para conseguir el ahorro durante los primeros seis años calculamos:

$$\int_0^{10} (5000 + 12000x)\ dx = 650\ 000\ €$$

Durante los 10 primeros años esta empresa ahorra 650 000 €

b) Como el precio de compra es 116 000 €, el número t de años que tardará en amortizarla viene dado por:

$$\int_0^{t} (5000 + 12000x)\ dx = 100\ 000 \ \Rightarrow\ 5000t + 6000t^2 = 100\ 000 \ \Rightarrow\ t = 3{,}94\ años.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 371

a) Expresamos la hipérbola x · y = 1 como la función $y = \frac{1}{x}$. La derivada de la función es $y\,' = -\frac{1}{x^2}$. Sea $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t) \qquad \Rightarrow \qquad x + t^2 y = 2t$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A:\begin{cases} x + t^2 y = 2t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (2t, 0)$$

$$B:\begin{cases} x = 0 \\ x + t^2 y = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2}{t} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, \frac{2}{t}\right)$$

Comprobamos que $P\left(t, \frac{1}{t}\right)$ es el punto medio del segmento de extremos A = (2t, 0) y $B = \left(0, \frac{2}{t}\right)$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2t + 0}{2} = t = x_P \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{2}{t}}{2} = \frac{1}{t} = y_P$$

El área del triángulo OAB es:

$$Área = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{2}{t} \quad \Rightarrow \quad Área = 2\ u^2$$

b) Visualizamos esta situación con GeoGebra:

b_1) Dibujamos la función introduciendo en el Campo de entradas f (x) = 1/x.

b_2) Con *Desplaza Vista Gráfica* ampliamos la zona del dibujo.

b_3) Con *Punto en Objeto* dibujamos el punto P sobre la gráfica de la función.

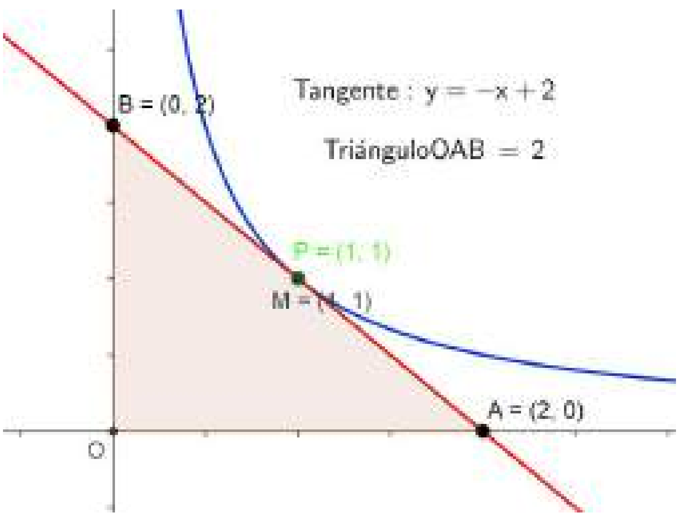
b_4) Con la herramienta *Tangentes* dibujamos la tangente a la curva en el punto P.

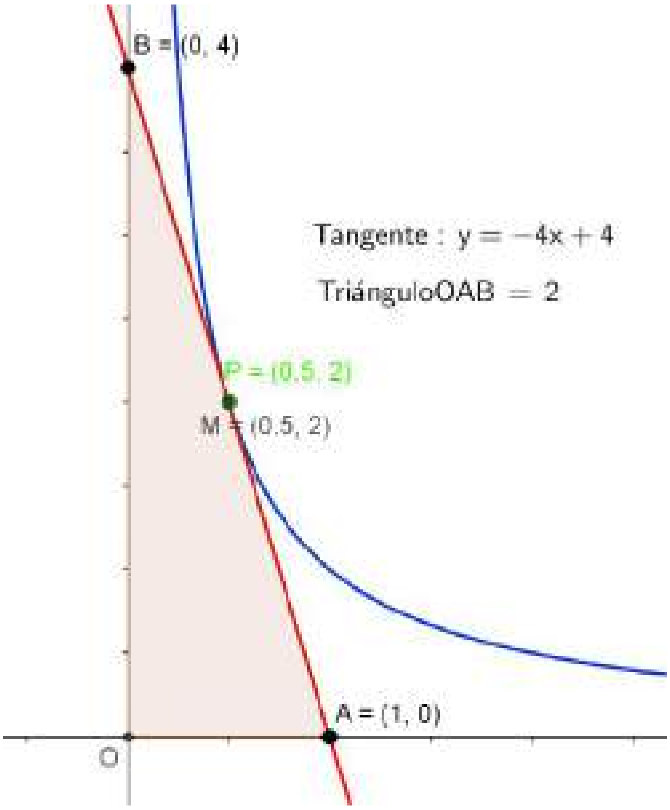
b_5) Con *Intersección de Dos Objetos* hallamos los puntos A, sobre OX, y B, sobre OY.

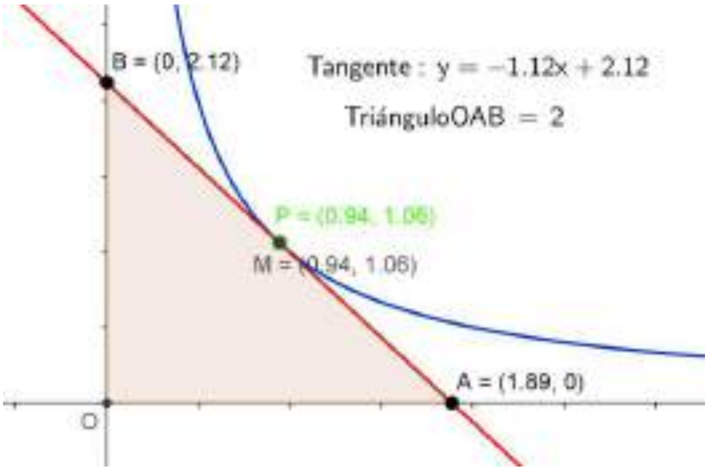
b_6) Con *Punto Medio o Centro* hallamos el punto medio, M, del segmento de extremos A y B.

b_7) Con la herramienta *Polígono* dibujamos el triángulo OAB.

b_8) Con *Elige y Mueve* desplazamos el punto P sobre curva y observamos que los puntos A y B se desplazan sobre los ejes coordenados, pero el punto M y el punto P coinciden, además el triángulo OAB cambia de forma y su área no varía y vale siempre 2 unidades cuadradas.







c) La derivada de la función $y = \dfrac{k}{x}$ es $y' = -\dfrac{k}{x^2}$. Sea $P\left(t, \dfrac{k}{t}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{t} = -\frac{k}{t^2}(x - t) \qquad \Rightarrow \qquad kx + t^2 y = 2kt$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A: \begin{cases} kx + t^2 y = 2kt \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (2t, 0)$$

$$B: \begin{cases} x = 0 \\ kx + t^2 y = 2kt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2k}{t} \end{cases} \Rightarrow B = \left(0, \frac{2k}{t}\right)$$

Comprobamos que $P\left(t, \frac{k}{t}\right)$ es el punto medio del segmento de extremos A = (2t, 0) y $B = \left(0, \frac{2k}{t}\right)$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2t + 0}{2} = t = x_P \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \frac{2k}{t}}{2} = \frac{k}{t} = y_P$$

El área del triángulo OAB es:

$$Área = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \Rightarrow Área = \frac{1}{2} \cdot 2t \cdot \frac{2k}{t} \Rightarrow Área = 2k\ u^2$$

Notas:

1. El área del triángulo, que depende del valor del parámetro k, no depende de la situación del punto de tangencia P.

2. Las características del triángulo sí dependen de la situación del punto P.

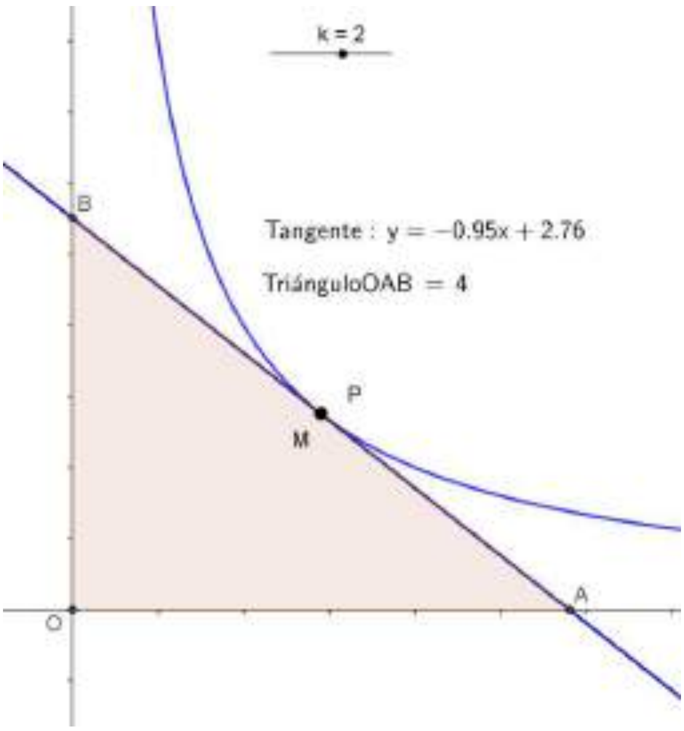
Visualizamos esta situación con GeoGebra:

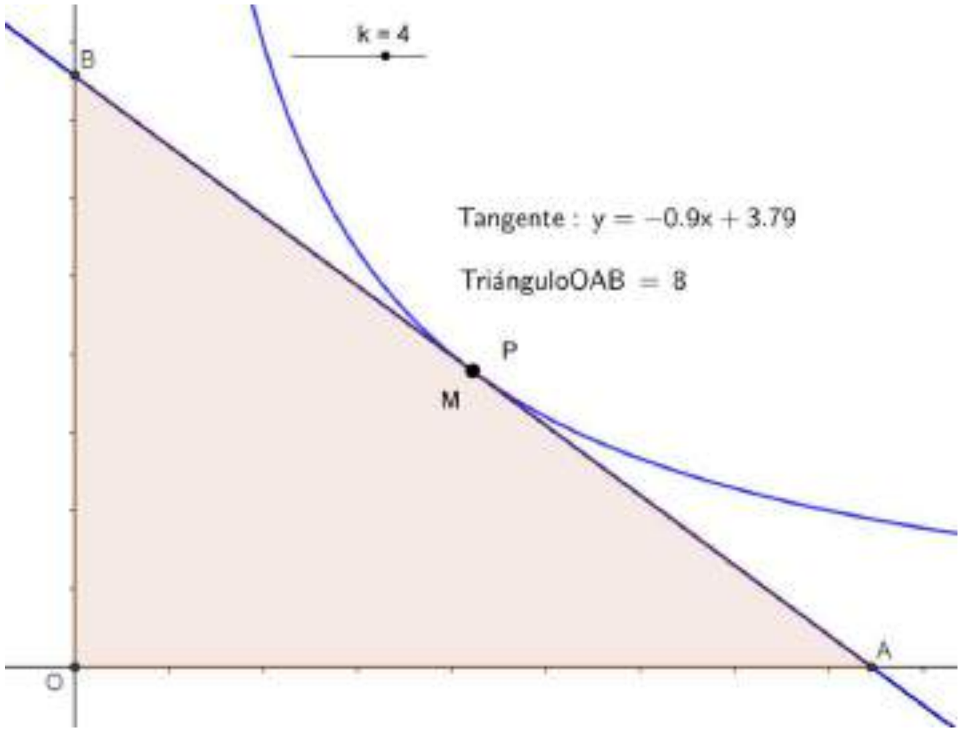
a) Insertamos un deslizador al que denominamos k.

b) Dibujamos la función introduciendo en el Campo de entradas f (x) = k/x.

c) Repetimos los mismos pasos que en la construcción anterior

d) Con *Elige y Mueve* desplazamos el deslizador y el punto P sobre curva y observamos lo que





c_1) Si el triángulo de vértices O (0, 0), A = (2t, 0) y $B = \left(0,\ \frac{2k}{t}\right)$ es isósceles se cumplirá:

$$OA = OB \quad \Rightarrow \quad 2t = \frac{2k}{t} \quad \Rightarrow \quad 2t^2 = 2k \quad \Rightarrow \quad t^2 = k \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{k}$$

Las coordenadas de $P\left(t,\ \frac{k}{t}\right)$ serán $P\left(\pm\sqrt{k},\ \pm\sqrt{k}\right)$.

c_2) La longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices O (0, 0), A = (2t, 0) y $B = \left(0,\ \frac{2k}{t}\right)$ es:

$$L_{hip}(t) = L_{AB}(t) = \sqrt{(2t)^2 + \left(\frac{2k}{t}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{t^4 + k^2}{t^2}}$$

Derivamos y anulamos la derivada para obtener: $L'(t) = \frac{2t^2}{\sqrt{t^2 + k^2}} \cdot \frac{t^4 - k^2}{t^3}$

$$L'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^4 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^4 = k^2 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{k}$$

Las coordenadas de $P\left(t,\ \frac{k}{t}\right)$ serán $P\left(\pm\sqrt{k},\ \pm\sqrt{k}\right)$.