UNIDAD 2: Álgebra I: Polinomios, ecuaciones y sistemas

ACTIVIDADES-PÁG. 36

1. Los resultados son:

a) Cociente: $x^2 + x + 4$ y resto: - 2 b) Cociente: $x^3 - 2x^2 + 5x - 10$ y resto: 20

2. Operando obtenemos:

a) $$\frac{x-2}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x^2-4x+4} = \frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+1)} \cdot \frac{x+1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{1}{x^2-3x+2}$$

b) $$\left(x - \frac{x}{x+1}\right) : \left(x + \frac{x}{x+1}\right) = \frac{x^2}{x+1} : \frac{x\cdot(x+2)}{x+1} = \frac{x}{x+2}$$

3. Los resultados son:

a) La expresión es una ecuación con solución x = 2.

b) La expresión es una identidad que se verifica para cualquier valor de x.

4. Si llamamos x al número de piezas que tenía al principio e y al valor inicial de cada pieza, podemos formular el sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 560 \\ (x-1)\cdot(y+10) = 560 \end{cases}$$

La solución del sistema es x = 8 e y = 70. Por tanto, el alfarero tenía 8 piezas al principio.

ACTIVIDADES-PÁG. 53

1. Sí puede ser cierto; se trata de dos padres que se han casado cada uno con la hija del otro.

2. Diremos que:

$a_1 = 7$

$a_2 = 8$

…

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 1 = n + 6$

Además sabemos que $a_n + n = 42$. Sustituyendo y operando, obtenemos n = 18 damas.

Con el valor anterior, tenemos $a_n = 42 - 18 = 24$ caballeros.

Había 18 damas y 24 caballeros.

3. Luís tarda 15 minutos en llegar a la sierra.

La perra, por lo tanto, ha estado moviéndose durante 15 minutos. Por tanto ha recorrido:

$$16\ {}^{km}\!/_{h} : 4\ h = 4\ kilómetros$$

4. Llamando x e y a las incógnitas podemos formular la "igualdad":

$$2000 - 19xy = 9 + x + y$$

Desarrollando los números según la expresión decimal:

$2000 - (1000 + 900 + 10x + y) = 9 + x + y$

Operando, obtenemos la ecuación $11x + 2y = 91$, cuya solución con sentido es $x = 7$, $y = 7$.

Es decir, Astérix nació en el año 1977 y en el año 2000 tenía 23 años.

ACTIVIDADES-PÁG. 55

1. a) La factorización del polinomio es $P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 + 1)(x + 1)(x - 3)$ y sus raíces son -1 y 3.

b) La factorización del polinomio es $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = (x - 1)(x + 2)(2x + 1)$ y sus raíces son 1; - 2 y $-1/2$.

En el gráfico pueden verse la resolución de la actividad 1 con Wiris.

Actividad 1

factorizar$(2x^4-4x^3-4x^2-4x-6) \rightarrow 2\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

resolver$(2x^4-4x^3-4x^2-4x-6=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=3\}\}$

factorizar$(2x^3+3x^2-3x-2) \rightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(2\cdot x+1)$

resolver$(2x^3+3x^2-3x-2=0) \rightarrow \left\{\{x=-2\},\{x=1\},\left\{x=-\frac{1}{2}\right\}\right\}$

2. Los resultados son:

a) $$\left(a - \frac{a^2-1}{a+1}\right) : \left(\frac{a^2-a}{a-1} + 1\right) = \frac{a+1}{a+1} : \frac{a^2-1}{a-1} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)(a^2-1)} = \frac{1}{a+1}$$

b) $$\frac{-2x^2 + 2x + 6}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{-3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{x+2}$$

En el gráfico pueden verse la resolución de la actividad 2 con Wiris.

Actividad 2

factorizar$(2x^4-4x^3-4x^2-4x-6) \rightarrow 2\cdot(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

resolver$(2x^4-4x^3-4x^2-4x-6=0) \rightarrow \{\{x=-1\},\{x=3\}\}$

factorizar$(2x^3+3x^2-3x-2) \rightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(2\cdot x+1)$

resolver$(2x^3+3x^2-3x-2=0) \rightarrow \left\{\{x=-2\},\{x=1\},\left\{x=-\frac{1}{2}\right\}\right\}$

fracciones_simples$\left(\dfrac{-2x^2+2x+6}{x^3+x^2-2x}\right) \rightarrow \{\{-3,x\},\{2,x-1\},\{-1,x+2\}\}$

3. Las soluciones son:

a) Pasamos el paréntesis (14 – x) al segundo miembro y elevamos al cuadrado y operamos:

$$\sqrt{2x^2-3x+10}-(14-x)=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{2x^2-3x+10}=14-x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2x^2-3x+10=196-28x+x^2 \;\Rightarrow\; x^2+25x-186=0$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son x = 6 y x = - 31, que ambas son soluciones de la ecuación inicial.

b) Despejamos x de la primera ecuación, x = y + 4. Sustituimos en la segunda ecuación y obtenemos la ecuación cuadrática $y^2 + 4y + 5 = 0$, que no tiene soluciones reales.

Por tanto, el sistema carece de soluciones.

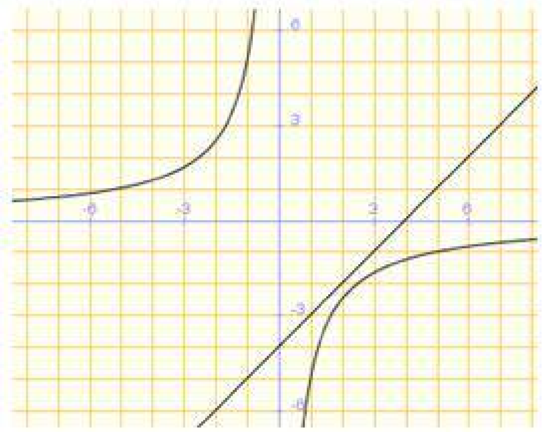
En el gráfico pueden verse la resolución de la actividad 3 con Wiris.

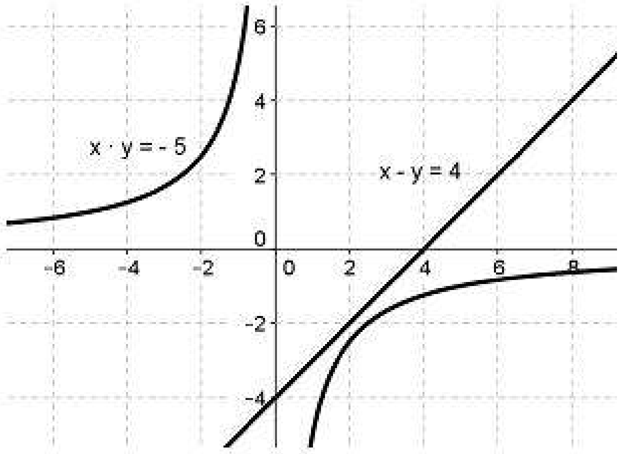
Actividad 3

resolver$(\sqrt{2x^2-3x+10}-(14-x)=0) \rightarrow \{\{x=-31\},\{x=6\}\}$

resolver$\left\{\begin{matrix} x-y=4 \\ x\cdot y=-5 \end{matrix}\right. \rightarrow \{\square\}$

En los dibujos puede verse como la recta y la hipérbola no se cortan.





ACTIVIDADES-PÁG. 56

1. Operando y utilizando la identidad de polinomios, se obtiene a = 2 y b = - 1.

2. En cada uno de los casos descomponemos los polinomios en factores y calculamos el MCD y el mcm.

a) $\begin{cases} A(x) = x(x-3)(x-2) \\ B(x) = (x+3)(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MCD\left[A(x),\ B(x)\right] = (x-2) \\ mcm\left[A(x),\ B(x)\right] = x(x-3)(x-2)(x+3) \end{cases}$

b) $\begin{cases} C(x) = (x+1)(x-2)^2 \\ D(x) = (x+1)(x-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MCD\left[C(x),\ D(x)\right] = (x+1)(x-2) \\ mcm\left[C(x),\ D(x)\right] = (x+1)(x-2)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} E(x) = (x-1)(x+3) \\ D(x) = 4(x-1)^2(x+3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MCD\left[E(x),\ F(x)\right] = (x-1)(x+3) \\ mcm\left[E(x),\ F(x)\right] = 4(x-1)^2(x+3)^2 \end{cases}$

3. Las soluciones de cada apartado son:

a) El resto de dividir P (x) por x - $\frac{1}{2}$ debe ser cero.

$$\text{Resto} = P\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 27.$$

b) Ha de ser divisible por (x – 2) y por (x + 2). Por tanto:

$$\begin{cases} A(2) = 0 \\ A(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 24 + 2a + b = 0 \\ -8 + 24 - 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -32 \\ -2a + b = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -24 \end{cases}$$

c) Queda:

$$\text{Resto} = \left(-\sqrt{3}\right)^5 - 4\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^3 - m\cdot\left(-\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad m = 2.$$

d) Las condiciones del enunciado dan lugar a:

- Para que sea divisible por (x – 2), entonces B (2) = 0.
- Para que sea divisible por (x + 1), entonces B (- 1) = 0.
- Para que dé resto 4 al dividirlo por x, entonces B (0) = 4.

Obtenemos el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y su solución:

$$\begin{cases} 8 + 4a + 2b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

4. Los resultados de las operaciones que siguen son:

a) $\dfrac{5}{x-3} + \dfrac{3x}{x+2} = \dfrac{5x + 10 + 3x^2 - 9x}{(x-3)(x+2)} = \dfrac{3x^2 - 4x + 10}{x^2 - x - 6}$

b) $\dfrac{3x-1}{x^2-9} - \dfrac{3}{x+3} = \dfrac{3x-1}{x^2-9} - \dfrac{3x-9}{x^2-9} = \dfrac{8}{x^2-9}$

c) $\dfrac{4}{x-2} - \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{2x}{x^2-4} = \dfrac{3x+14}{x^2-4}$

d) $\dfrac{2x-6}{x^2-1} \cdot \dfrac{5x+5}{4x-12} = \dfrac{2(x-3)\cdot 5\cdot(x+1)}{(x-1)(x+1)\cdot 4\cdot(x-3)} = \dfrac{5}{2x-2}$

e) $\dfrac{2x+6}{x-1} : \dfrac{3x+9}{x^2-1} = \dfrac{2\,(x+3)\,(x+1)(x-1)}{3(x-1)(x+3)} = \dfrac{2x+2}{3}$

f) $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+5x+6} \cdot \dfrac{2x^2-8}{x^2-x} : \dfrac{2x-10}{x^2+3x} = \dfrac{(x-1)(x-5)\cdot 2\cdot(x+2)\cdot x\cdot(x+3)}{(x+2)\,(x+3)\cdot x\,(x-1)\cdot 2\cdot(x-5)} = x-2$

g) $\left(x - \dfrac{4}{x}\right) \cdot \dfrac{x^2}{x+2} = \dfrac{x^2-4}{x} \cdot \dfrac{x^2}{x+2} = x(x-2)$

h) $\left(x + \dfrac{x}{x-1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{x^2}{x-1} : \dfrac{x^2-2x}{x-1} = \dfrac{x^2\,(x-1)}{(x-1)\cdot x\cdot(x-2)} = \dfrac{x}{x-2}$

5. Las descomposiciones en suma de fracciones simples son:

a) $\dfrac{x+1}{3x^2+x} = \dfrac{-2}{3x+1} + \dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{2x^2-x+1}{x^3-2x^2+3x-6} = \dfrac{x+1}{x^2+3} + \dfrac{1}{x-2}$

c) $\dfrac{2x-10}{x^2+2x-8} = \dfrac{3}{x+4} + \dfrac{-1}{x-2}$

d) $\dfrac{6x^2-5x-2}{x^3-2x^2-4x+8} = \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{3}{(x-2)^2} + \dfrac{4}{x-2}\ \dfrac{2x^2+2x+4}{x^3-4x} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$

e) $\dfrac{2x^2+2x+4}{x^3-4x} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x+2}$

f) $\dfrac{-x^2-2}{x+1} = -x+1+\dfrac{-3}{x+1}$

6. Sea el polinomio P (x) = $ax^2 + bx + c$. Imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

- P (0) = - 6, entonces c = - 6
- Tiene como raíz x = - 2, es decir, P (- 2) = 0 y se tiene que 4a – 2b + c = 0
- Da resto 12 al dividirlo por x – 2, entonces, P (2) = 12 y 4a + 2b + c = 12

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} c = -6 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 6 \\ 4a + 2b = 18 \\ c = -6 \end{cases}$$

La solución es a = 3, b = 3 y c = - 6 y el polinomio buscado es P (x) = $3x^2 + 3x - 6$.

ACTIVIDADES-PÁG. 57

7. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) x = 2

b) x = 0

c) x = 5

d) x = 5

8. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) x = - 1 y x = 0

b) No tiene soluciones reales

e) x = - 3; x = - 1; x = 1 y x = 3

f) x = - 3 y x = 3

c) x = 3 y x = 5

d) x = 0 y x = 3

g) x = 4 y $x = -\frac{1}{2}$

h) x = b – a y x = - a – b

9. Las soluciones quedan:

a) Si una de las soluciones es 1/3, ésta verificará la ecuación, es decir:

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}k-1=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{3}k-\frac{2}{3}=0 \quad\Rightarrow\quad k=2$$

b) Si las soluciones de la ecuación son – 3 y 6, éstas deben verificar la ecuación, por tanto:

$$\begin{cases}(-3)^2-3b+c=0\\ 6^2+6b+c=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3b+c=-9\\ 6b+c=-36\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=-3\\ c=-18\end{cases}$$

c) Las dos soluciones son iguales si el valor del discriminante es nulo, es decir:

$$b^2-4ac=0 \quad\Rightarrow\quad 20^2-4\cdot 2\cdot c=0 \quad\Rightarrow\quad 400-8c=0 \quad\Rightarrow\quad c=50$$

d) Sean x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación. Se cumple:

$$\begin{cases}x_1+x_2=m+4\\ x_1\cdot x_2=18\\ x_1=2x_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=6;\quad x_2=3\ \ y\ \ m=5\\ x_1=-6;\ \ x_2=-3\ \ y\ \ m=-13\end{cases}$$

10. Las soluciones son:

a) Factorizamos el polinomio x^3-2x^2-x+2 y obtenemos $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)$. Las soluciones de la ecuación son $x_1=-1$; $x_2=1$ y $x_3=2$.

b) Operando $x\cdot(x+1)^2-12=x\cdot(5-x)$, obtenemos $x^3+3x^2-4x-12=0$, que factorizada queda $(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x-2)=0$. Las soluciones son $x_1=-3$; $x_2=-2$ y $x_3=2$.

c) Operamos en la ecuación $\frac{x^2-6}{x^2+2}=\frac{21-x^2}{2x^2-23}$ y obtenemos $3x^4-54x^2+96=0$ cuyas soluciones son $x_1=-4$; $x_2=-\sqrt{2}$; $x_3=4$ y $x_4=\sqrt{2}$.

d) Las soluciones de la ecuación $9x^4-85x^2+36=0$ son $x_1=-3$; $x_2=-2/3$; $x_3=3$ y $x_4=2/3$.

e) Las soluciones reales de la ecuación $x^6+19x^3-216=0$ son $x_1=-3$; $x_2=2$.

f) Operando $x^2-3x+1=\frac{2}{x^2-3x}$ se obtiene $x^4-6x^3+10x^2-3x-2=0$.

Factorizando la ecuación obtenemos $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2-3x-1)=0$; cuyas soluciones son:

$$x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \text{ y } x_4 = \frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

11. Las soluciones son:

a) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando, obtenemos:

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = (x-1)^2 \Rightarrow 2x+1 = x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 4.$$

El valor $x_1 = 0$ no es solución, ya que se cumple: $\sqrt{2\cdot 0+1} = 1 \neq -1 = 0-1$.

El valor $x_2 = 4$ es solución, ya que se cumple: $\sqrt{2\cdot 4+1} = 3 = 4-1$.

b) Procediendo como en el caso anterior la ecuación $3\sqrt{3x+4} - 2x = 5$ tiene dos soluciones: $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{11}{4}$

c) La ecuación $\sqrt{x^2+9} + x^2 = 21$ tiene dos soluciones: $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$.

d) La solución de la ecuación $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 3$ es $x_1 = \frac{13}{9}$.

e) La ecuación $\sqrt{2x-1} - \sqrt{2x-4} = 3$ no tiene soluciones.

f) Elevando al cuadrado y operando en la ecuación $\sqrt{x+10} - \frac{6}{\sqrt{x+10}} = 5$ obtenemos como solución los valores $x_1 = -9$ y $x_2 = 26$; aunque sólo este último es la solución de la ecuación dada,

12. Llamando x al cociente, el resto será x y el divisor 2x. La relación entre los elementos de la división permite escribir $595 = 2x\cdot x + x$.

Las soluciones de la ecuación $2x^2 + x - 595 = 0$ son $x_1 = 17$ y $x_2 = -\frac{35}{2}$.

El divisor de esta división es 34 y se cumple $595 = 34\cdot 17 + 17$.

13. El triángulo tiene por catetos x y x – 42 y por hipotenusa 78. El teorema de Pitágoras nos permite escribir:

$$x^2 + (x-42)^2 = 78^2 \Rightarrow 2x^2 - 84x - 4320 = 0$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = 72$ y $x_2 = -30$.

La segunda solución carece de sentido y uno de los catetos mide 72 cm y el otro 30 cm.

14. Llamando x al número e imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{58}{21} \quad \Rightarrow \quad 21x^2 - 58x + 21 = 0$$

Las soluciones son $x_1 = \frac{7}{3}$ y $x_2 = \frac{3}{7}$.

15. Sean x – 1, x y x + 1 los tres números consecutivos. Podemos formular la ecuación:

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 365$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -11$ y $x_2 = 11$.

La primera carece de sentido y los números son 10, 11 y 12.

Los números consecutivos a éstos son 13 y 14, y se cumple también que $13^2 + 14^2 = 365$.

ACTIVIDADES-PÁG. 58

16. Llamamos x al número de estudiantes del curso e y a la cantidad de dinero que paga cada uno. Imponiendo las condiciones del enunciad, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x \cdot y = 2160 \\ (x-3)\cdot(y+8) = 2160 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por sustitución, obtenemos x = 30 e y = 72. Por tanto, en el curso había 30 estudiantes y cada uno debía pagar, en principio, 72 euros.

17. Los sistemas resueltos quedan:

a) Resolvemos el sistema $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 7 \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{25}{3} \end{cases}$ por reducción y obtenemos $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ y_1 = 3 \end{cases}$

b) Resolvemos el sistema $\begin{cases} y = x^2 - 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 3; \quad y_1 = 1 \\ x_2 = -4; \quad y_2 = 8 \end{cases}$

c) Resolvemos el sistema $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 5 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 3; \quad y_1 = 2 \\ x_2 = \frac{7}{3}; \quad y_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

d) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ x \cdot y = 30 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 6; \quad y_1 = 5 \\ x_2 = -6; \quad y_2 = -5 \end{cases}$

e) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 89 \\ x \cdot y = -40 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = -8; \quad y_1 = 5 \\ x_2 = -5; \quad y_2 = 8 \\ x_3 = 5; \quad y_3 = -8 \\ x_4 = 8; \quad y_4 = -5 \end{cases}$

f) Resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y = 52 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 10 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 36; \quad y_1 = 16 \\ x_2 = 16; \quad y_2 = 36 \end{cases}$

g) En el sistema $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ x^2 - xy + y^2 = 43 \end{cases}$ sumamos ambas ecuaciones y restamos ambas ecuaciones, obteniendo el sistema equivalente $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ x \cdot y = 7 \end{cases}$. Resolviendo este último por sustitución obtenemos las soluciones $\begin{cases} x_1 = 7; \quad y_1 = 1 \\ x_2 = -7; \quad y_2 = -1 \\ x_3 = 1; \quad y_3 = 7 \\ x_4 = -1; \quad y_4 = -7 \end{cases}$

h) Resolviendo el sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \end{cases}$ por sustitución y obtenemos $\begin{cases} x_1 = 1; \quad y_1 = 0 \\ x_2 = 17; \quad y_2 = 8 \end{cases}$.

De las dos soluciones anteriores sólo es válida $x_2 = 17$ e $y_2 = 8$.

18. Sean x y x + 100 la medida de sus lados. Se cumplirá x · (x + 100) = 120 000.

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$x^2 + 100x - 120\,000 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 + 4 \cdot 120\,000}}{2} = \frac{-100 \pm 700}{2} = \begin{cases} 300 \\ -400 \end{cases}$$

Las medidas de la finca son 300 y 400 metros.

19. Llamando x a la longitud de la base e y a la altura e imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ x \cdot y = 24 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 6; \; y_1 = 4 \\ x_2 = 4; \; y_2 = 6 \end{cases}$$

Los trozos deben ser de 4 dm y 6 dm.

20. Llamando x al área de un cuadrado e y al área de otro, podemos formular el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3060 \\ x - y = 468 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1764 \; cm^2 \\ y = 1296 \; cm^2 \end{cases}$$

El lado de un cuadrado mide $\sqrt{1764}\, cm = 42 \; cm$ y el del otro $\sqrt{1296}\, cm = 36 \; cm$.

21. Llamamos x al tiempo que tarda el segundo albañil solo en hacer la reparación. De la cantidad de trabajo que hacen los albañiles por separado y juntos podemos formular la ecuación:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4} \Rightarrow 4x+24=6x \Rightarrow 2x=24 \Rightarrow x=12$$

El segundo albañil tardaría en hacer sólo la reparación 12 horas.

22. Las soluciones son:

a) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2 - E_1$ y $E_3 \to E_3$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+y=3 \\ y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ \quad -z=-3 \\ y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = 2; z = 3.

b) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2 - 2E_1$ y $E_3 \to E_3 - 3E_1$
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$ y $E_3 \to 3E_3 - 4E_2$

$$\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x+y-5z=-4 \\ 3x+y-4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3y-9z=-12 \\ 4y-10z=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+2z=4 \\ 3y-9z=-12 \\ 6z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 2; y = 2; z = 2.

c) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to 2E_2 - E_1$ y $E_3 \to 2E_3 - 5E_1$
$E_1 \to E_1$; $E_2 \to E_2$ y $E_3 \to E_3 + E_2$

$$\begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ x+y=1 \\ 5x+2z=-15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ 5y-z=9 \\ -15y+z=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y+z=-7 \\ 5y-z=9 \\ -10y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=7/5 \\ y=-2/5 \\ z=-11 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y sus soluciones son x = 7/5, y = - 2/5, z = -11, con t $\in$ R.

d) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1$ y $E_3 \rightarrow E_3 - E_1$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2$ y $E_3 \rightarrow E_3 - 6E_2$

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x + 3y + 5z = -11 \\ x - 5y + 6z = -29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ y + 3z = -7 \\ 6y - 5z = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ y + 3z = -7 \\ -23z = 69 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = - 1; y = 2; z = - 3.

e) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1$ y $E_3 \rightarrow E_3 - 5E_1$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2$ y $E_3 \rightarrow E_3 - 4E_2$

$$\begin{cases} x + 4y - 8z = 6 \\ 2x + 4y - z = 8 \\ 5x + 4y + 20z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y - 8z = 6 \\ -4y + 15z = -4 \\ -16y + 60z = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y - 8z = 6 \\ -4y + 15z = -4 \\ 0z = -4 \end{cases}$$

El sistema es incompatible y carece de solución.

f) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2 - 3E_1$ y $E_3 \rightarrow E_3 - E_1$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2$ y $E_3 \rightarrow E_3 - 3E_2$

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 6 \\ 3x - 3y + z = -7 \\ x - y + 2z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = 6 \\ -12y + 13z = -25 \\ -4y + 6z = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = 6 \\ -12y + 13z = -25 \\ -5z = 5 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = - 1; y = 1; z = - 1.

g) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2;\ E_3 \rightarrow E_3$ y $E_4 \rightarrow E_4 + E_3$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2;\ E_3 \rightarrow E_3$ y $E_4 \rightarrow E_4 + E_2$

$E_1 \rightarrow E_1;\ E_2 \rightarrow E_2;\ E_3 \rightarrow E_3$ y $E_4 \rightarrow E_4 + E_3$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - t = 1 \\ t - x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - t = 1 \\ -y + t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - t = 1 \\ -z + t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z - t = 1 \\ 0t = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + m \\ y = 2 + m \\ z = 1 + m \\ t = m \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son x = 3 + m, y = 2 + m, z = 1 + m; t = m, con m $\in$ R.

h) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \to E_1;\ E_2 \to E_2 - E_1;\ E_3 \to E_3 - E_1$ y $E_4 \to E_4$

$E_1 \to E_1;\ E_2 \to E_2;\ E_3 \to 2E_3 - E_2$ y $E_4 \to 2E_4 + 3E_2$

$E_1 \to E_1;\ E_2 \to E_2;\ E_3 \to E_3$ y $E_4 \to E_4 - E_3$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+t=1 \\ x+z-t=3 \\ 3y+2z+t=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z \quad =1 \\ -2y-z+t=0 \\ -y \quad -t=2 \\ 3y+2z+t=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z \quad =1 \\ -2y-z+t=0 \\ z-3t=4 \\ z+5t=-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z \quad =1 \\ -2y-z+t=0 \\ z-3t=4 \\ -8t=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \\ t=-1 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = - 1; z = 1; t = - 1.

i) Aplicamos el método de Gauss con las transformaciones que siguen y resolvemos:

$E_1 \to E_1;\ E_2 \to E_2 - 2E_1;\ E_3 \to E_3 - E_1$ y $E_4 \to 3E_4$

$E_1 \to E_1;\ E_2 \to E_2;\ E_3 \to 6E_3 - E_2$ y $E_4 \to 6E_4 - 4E_2$

$$\begin{cases} x+2y-3z=-3 \\ 2x-2y+z=2 \\ x+y-z=0 \\ 3x+2y-2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-3 \\ -6y+7z=8 \\ -y+2z=3 \\ -4y+7z=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-3 \\ -6y+7z=8 \\ -5z=-10 \\ 14z=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado y su solución es x = 1; y = 1; z = 2.

23. Sea el número $\overline{xyz} = 100x + 10 + z$ el número buscado. De las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+x=10 \\ x=y+z \\ \overline{xyz}-\overline{zyx}=297 \end{cases}$$

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$\begin{cases} x+y+x=10 \\ x-y+z=0 \\ 100x+10y+x-(100z+10y+x)=297 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y-z=0 \\ x \quad -z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$$

El número buscado es 532.

ACTIVIDADES-PÁG. 59

24. Llamando x a la edad del padre e y a la edad del hijo obtenemos:

$$\begin{cases} y + \dfrac{x}{3} = \dfrac{x}{2} \\ x - 4 = 11\,(y - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 6y = 0 \\ x - 11y = -40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 8 \end{cases}$$

El padre tiene 48 años y el hijo 8 años.

25. Sea el número $\overline{xyz} = 100x + 10 + z$ el número buscado. De las condiciones del enunciado obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + x = 18 \\ \overline{xyz} - \overline{zyx} = 594 \\ y = \dfrac{x + z}{2} \end{cases}$$

Operando y resolviendo, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + x = 18 \\ 100x + 10y + x - (100z + 10y + x) = 594 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 18 \\ x \quad - z = 6 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \\ z = 3 \end{cases}$$

El número buscado es 963.

26. Llamamos x a la edad del padre, y a la edad de la madre y z a la edad de la hija. Obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 86 \\ y = 3z \\ x - z = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 37{,}2 \\ y = 36{,}6 \\ z = 12{,}2 \end{cases}$$

El padre tiene 37,2 años, la madre 36,6 años y la hija 12,2 años.

27. Llamamos

x: al número de bricks de leche entera
y: al número de bricks de leche semidesnatada
z: al número de bricks de leche desnatada

Imponemos las condiciones del enunciado y obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 10\,400 \\ 0{,}6x + 0{,}55y + 0{,}5z = 5765 \\ x = 0{,}6 \cdot (y + z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3900 \\ y = 3500 \\ z = 3000 \end{cases}$$

La central lechera envasa:

3 900 bricks de leche entera
3 500 bricks de leche semidesnatada
3 000de bricks de leche desnatada.

28. En el equipo A hay x futbolistas y en el equipo B hay y futbolistas. Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x - 3 = y + 3 \\ x + 7 = (y - 7)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 12 \end{cases}$$

Hay 18 futbolistas en el equipo A y 12 futbolistas en el equipo B.

29. En cada uno de los apartados queda:

a) Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$x = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4 \cdot 2\,(m+3)}}{4}$$

Imponiendo la condición del enunciado:

$$\frac{(m+1) + \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)}}{4} - \frac{(m+1) - \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)}}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(m+1)^2 - 8\,(m+3)} = 2 \Rightarrow m^2 - 6m - 27 = 0 \Rightarrow m = 9 \text{ ó } m = -3$$

b) Llamamos y, z a las soluciones de la ecuación. Obtenemos:

$$\begin{cases} y + z = -\dfrac{14}{m} \\ y \cdot z = \dfrac{12}{m} \\ y = 6z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ z = -1 \\ y = -6 \end{cases}$$

c) Si una solución es $x_1 = -\frac{1}{4}$, ésta verifica la ecuación, por tanto:

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + m \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{17}{4}$$

La otra solución es $x_2 = -4$.

d) Resolviendo la ecuación $x^2 - mx + 4 = 0$ obtenemos:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 16}}{2}$$

Las soluciones son iguales si $m^2 - 16 = 0$, lo que implica que $m = \pm\ 4$.

30. Las soluciones son:

a) $(x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2) = 12 \quad \Rightarrow \quad x^4 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$

b) Elevando al cuadrado ambos miembros y operando obtenemos: $x^2 - 2 = 2\sqrt{x^2 - 3}$, y elevando de nuevo obtendríamos: $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$ y ambas soluciones son válidas.

c) Factorizando obtenemos $x^2 (x - 1)(x + 1)(2x + 3) = 0$ y sus soluciones serían las siguientes: x = 0 doble; x = - 1; x = 1 y $x = -\dfrac{3}{2}$.

d) Operando obtenemos $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ cuyas soluciones son: $x = \sqrt{3}$ y $x = -\sqrt{3}$.

e) $x^2 - 8 = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3$ y $x = \pm\sqrt{7}$.

f) $2x - 3 = x + 9 \quad \Rightarrow \quad x = 12$; o bien $2x - 3 = (x + 9) \quad \Rightarrow \quad x = -2$

31. Las soluciones son:

a) x = 3 e y = 1 ó x = - 2 e y = - 4.

b) x = 3, y = 1, z = 3

c) Sumando ambas ecuaciones obtenemos: $(x + y)^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x + y = 6$ o $x + y = -6$ y la solución provendrá de los dos sistemas siguientes:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + xy = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -6 \\ x^2 + xy = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -1 \end{cases}$$

32. Llamando x e y a las dimensiones del jardín e imponiendo las condiciones del problema obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 36 \\ (x+2)(y+2) = xy + 40 \end{cases}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones, todos los valores de x e y que verifiquen la siguiente expresión: $x + y = 18$ con $x \in (0, 18)$ e $y \in (0, 18)$.

33. Llamamos x al número de kilómetros hacia arriba a la ida, y al número de kilómetros hechos en llano y z al número de kilómetros hacia abajo. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 920 \\ \dfrac{x}{80} + \dfrac{y}{100} + \dfrac{z}{120} = 9 \\ \dfrac{x}{120} + \dfrac{y}{100} + \dfrac{z}{80} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 240\ km \\ y = 200\ km \\ z = 480\ km \end{cases}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 60

34. Sean x, y, z el número de participaciones de 1, 2 y 5 euros, respectivamente. Las condiciones del enunciado nos permiten plantear el sistema que sigue. En la primera ecuación se describe el número total de participaciones, en la segunda el importe total y en la tercera la relación entre participaciones de 1 euros y de 5 euros.

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible determinado, es decir, tiene una solución única ya que el determinante de la matriz de los coeficientes vale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Aplicando el método de Gauss, obtenemos:

$$\begin{cases} x + y + z = 260 \\ x + 2y + 5z = 600 \\ x \qquad - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ \quad -y - 4z = -340 \\ \quad y + 3z = 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 260 \\ \quad y + 4z = 340 \\ \qquad -z = -80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 160 \\ y = 20 \\ z = 80 \end{cases}$$

Se han vendido 160 participaciones de 1 euros, 20 participaciones de 2 euros y 80 participaciones de 5 euros.

Puede comprobarse, con facilidad, que la solución obtenida es la correcta:

$$\begin{cases} 160 + 20 + 80 = 260 \\ 160 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 80 = 600 \\ 160 \qquad - 2 \cdot 80 = 0 \end{cases}$$

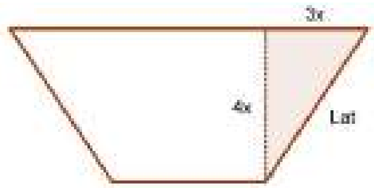
35. a) El área de la sección es el área de un trapecio de bases 4x y 10x y de altura 4x; por tanto, su área, A, será:

$$A = \frac{4x + 10x}{2} \cdot 4x \quad \Rightarrow \quad A = 7x \cdot 4x \quad \Rightarrow \quad A = 28x^2$$

El volumen, V, del canal será el área de la sección por su longitud:

$$V = 28x^2 \cdot 245x = 6860x^3$$

b) Para determinar el área total del canal tenemos que conocer la medida de los lados inclinados de la sección.



Llamando Lat al lado inclinado, calculamos su medida aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo del dibujo cuyos catetos miden 3x y 4x.

$$Lat^2 = (3x)^2 + (4x)^2 \quad \Rightarrow \quad Lat = \sqrt{9x^2 + 16x^2} \quad \Rightarrow \quad Lat = \sqrt{25x^2} = 5x$$

El área total del canal es:

$$A_T = (5x + 4x + 5x) \cdot 245x = 3430x^2$$

c) Si la longitud real del canal es 122,5 m, entonces:

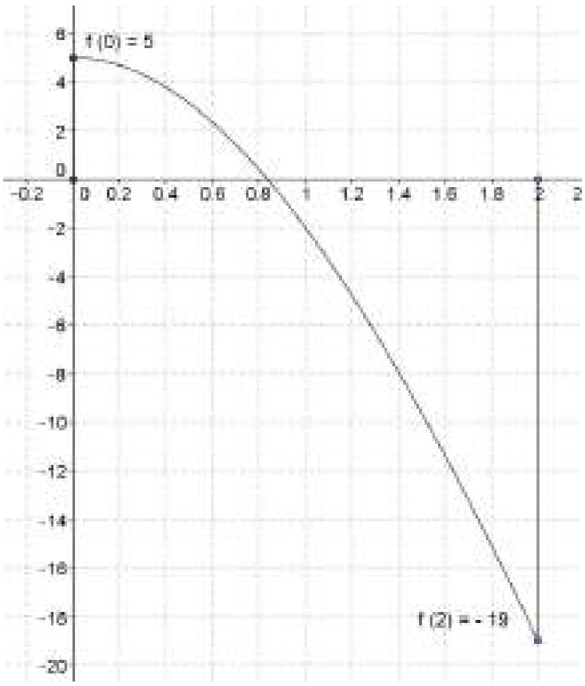
$$245x = 122{,}5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{122{,}5}{245} = 0{,}5$$

El valor del volumen del canal es $V = 6860 \cdot (0{,}5)^3 = 857{,}5$ m^3.

El área total del canal es $A_T = 3430 \cdot (0{,}5)^2 = 857{,}5$ m^2.

36. a) Aplicamos los pasos descritos al polinomio $P(x) = x^3 - 8x^2 + 5$,

Paso 1º. Observamos que P (0) = 5 > 0 y P (2) = 8 – 32 + 5 = -19 < 0, por tanto, hay una raíz entre 0 y 2.



Paso 2º. En el intervalo (0, 2) su punto medio es 1 y P (1) = -2. Este valor es de signo opuesto al de P (0), entonces la raíz está entre 0 y 1.

Paso 2º. En el intervalo (0, 1) su punto medio es 0,5 y P (0,5) = 3,125. Este valor es de signo opuesto al de P (1), luego la raíz está entre 0,5 y 1.

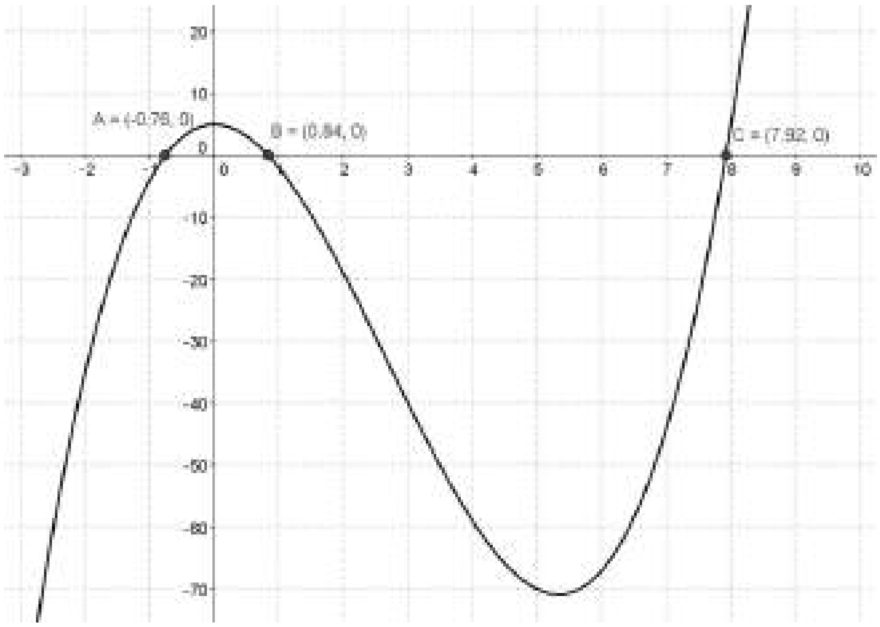
Paso 2º. En el intervalo (0,5; 1) su punto medio es 0,75 y P (0,75) = 0,92. Este valor es de signo opuesto al de P (1), luego la raíz está entre 0,75 y 1.

Paso 2º. En el intervalo (0,75; 1) su punto medio es 0,875 y P (0,875) = - 0,455. Este valor es de signo opuesto al de P (0,75), luego la raíz está entre 0,75 y 0,875.

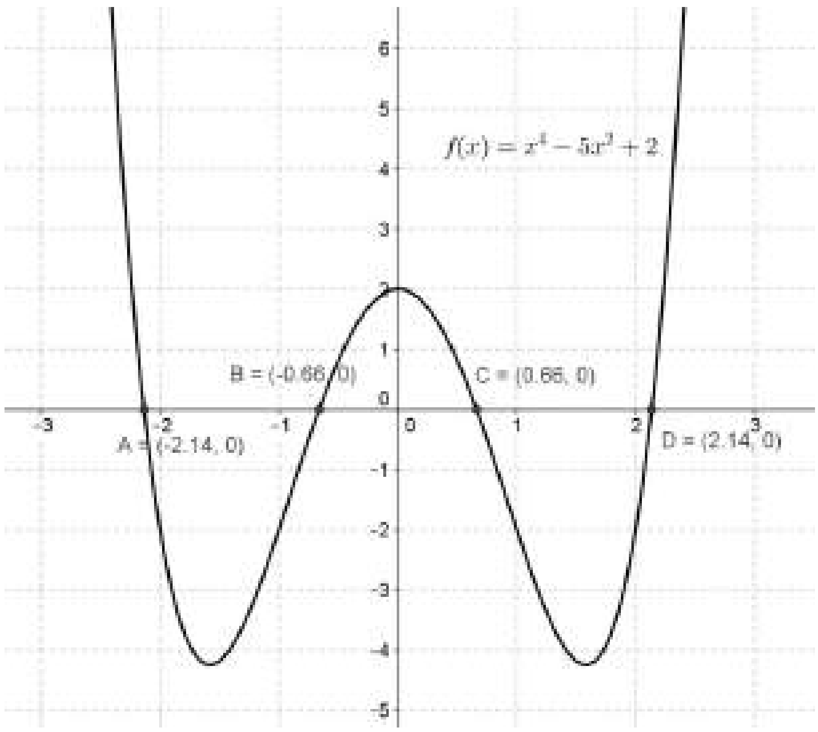
Una estimación razonable sería el punto medio de este intervalo, es decir: $\dfrac{0{,}75 + 0{,}875}{2} = 0{,}8125$.

En la imagen puede verse la raíz encontrada.

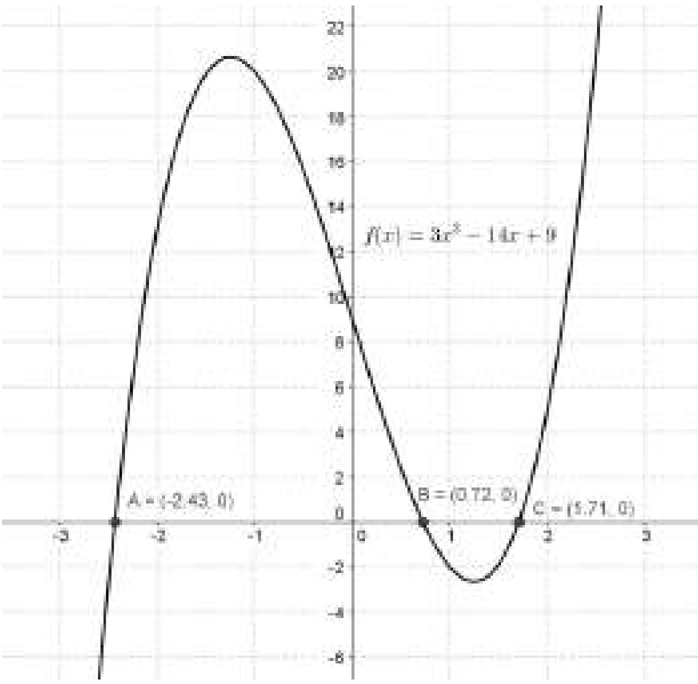
Si realizamos la gráfica de la función polinómica f(x) = $x^3 - 8x^2 + 5$ observamos que tiene tres raíces en los intervalos (- 1, 0), (0, 1) y (7, 8).



b) Procediendo como en el apartado anterior, encontramos las raíces del polinomio Q (x) = $x^4 - 5x^2 + 2$ en los intervalos (- 3, -2); (- 1, 0), (0, 1) y (2, 3). Pueden verse en la gráfica.



c) Las raíces del polinomio R (x) = $3x^3 - 14x + 9$ están en los intervalos (- 3, - 2); (0, 1) y (1, 2). Pueden verse en la gráfica.



37. a) Llamando b al número de coches blancos, **r** el número de coches rojos y **g** al número de coches grises podemos formular el siguiente sistema con las dos condiciones del enunciado:

$$\begin{cases} b + r + g = 24 \\ g = 2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + r + g = 24 \\ -2r + g = 0 \end{cases}$$

Con estas ecuaciones no podemos saber el número **b** de coches blancos que hay en el aparcamiento ya que si resolvemos el sistema anterior (es compatible indeterminado), obtenemos las soluciones:

$$\begin{cases} b = 24 - 3r \\ g = 2r \end{cases}$$

b) Si añadimos la ecuación r + g = 12, el sistema anterior queda:

$$\begin{cases} b + r + g = 24 \\ -2r + g = 0 \\ r + g = 12 \end{cases}$$

Eliminamos la incógnita **g** en la última ecuación haciendo la combinación $E_3 - E_2 \rightarrow E_3$ y resolviendo el sistema resultante, obtenemos:

$$\begin{cases} b + r + g = 24 \\ -2r + g = 0 \\ 3r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12 \\ g = 8 \\ r = 4 \end{cases}$$

Observamos que en el aparcamiento hay 12 coches blancos, 8 grises y 4 rojos.

38. Llamamos x a las personas que pagan la entrada a 9 euros, y a los jubilados y z a los niños.

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ 9x + 1{,}8y + 4{,}5z = 2115 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 150 \text{ pagan la entrada a 9 euros} \\ y = 300 \text{ son jubilados} \\ z = 50 \text{ son niños} \end{cases}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 61

a) En la mesa de tamaño 8 x 6 la bola se mete en la esquina B, como puede verse en el dibujo.

b) La bola ha cruzado 24 cuadrados.

c) La bola ha rebotado 5 veces en los lados de la mesa.

Los mismo ocurriría en las mesas de medidas semejantes: 16 x 12, 24 x 18, etc. En particular en la mesa 4 x 3.

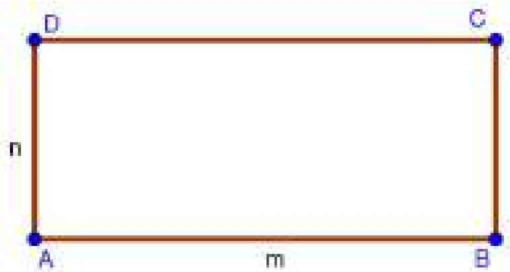
d) Los resultados para las mesas pedidas aparecen a continuación:

● En una mesa 2 x 6, la bola se mete en la esquina C opuesta a A, cruza 6 cuadrados y rebota 2 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 3.

● En una mesa 5 x 10, la bola se mete en la esquina B, cruza 10 cuadrados y rebota una vez en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 2.

● En una mesa 6 x 6, la bola se mete en la esquina C, cruza 6 cuadrados y rebota 0 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 1.

e) En general, para una mesa de tamaño m x n, m y n números naturales, se busca la mesa semejante de dimensiones a x b, siendo a y b primos entre sí y obtenemos:



■ Si b es par, la bola se mete en la esquina B, contigua a la de partida A.

■ Si b es impar, la bola se mete en la esquina C, opuesta a la de partida A, si a es par; si x es par, la bola se mete en la esquina D.

Determinamos el número de rebotes en las bandas de la mesa de billar y para ello calculamos los rebotes que da la bola en las mesas de las dimensiones particulares que aparecen en el enunciado, obtenemos:

- En la mesa 8 x 6, o en su semejante 4 x 3, da 4 + 3 – 2 = 5 rebotes.

- En la mesa 2 x 6, o en su semejante 1 x 3, da 1 + 3 – 2 = 2 rebotes.

- En la mesa 5 x 10, o en su semejante 1 x 2, da 1 + 2 – 2 = 1 rebote.

- En la mesa 6 x 6, o en su semejante 1 x 1, da 1 + 1 – 2 = 0 rebotes.

En general, en la mesa a x b, da a + b - 2 rebotes; siendo a, b los primos entre sí determinados a partir de m x n, es decir, en una mesa de tamaño m x n, la bola da $\frac{m+n}{m.c.d.(m,n)} - 2$ rebotes.

Haciendo los mismo para determinar los cuadros que cruza la bola, se llega a que en una mesa de tamaño m x n, la bola cruza $\frac{m \cdot n}{m.c.d.(m,n)}$ cuadros.