

UNIDAD 2: Polinomios. Fracciones algebraicas
ACTIVIDADES-PÁG. 34

1. Los resultados son:

a) $2x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 19x^2 + 27x - 18$ c) $x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$

b) Cociente: $2x^2 + x + 4$; resto: 12 d) $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1$

 2. El valor del parámetro es $a = 3$.

3. Las fracciones simplificadas son:

a) $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{x + 1}{x - 3}$

b) $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(x + 2)^2}{x - 4}$

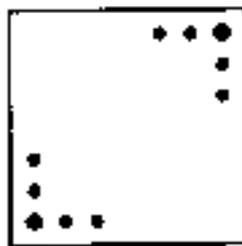
4. Los resultados de las operaciones son:

a) $\frac{x - 2}{x^2 - 1} \cdot \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

b) $\left(x - \frac{x}{x + 1}\right) : \left(x + \frac{x}{x + 1}\right) = \frac{x}{x + 2}$

ACTIVIDADES-PÁG. 47

1. Si cada punto representa una lámpara, la solución quedaría del siguiente modo:


 2. Si hay n calles, el número máximo de cruces es $C_{n, 2} = \frac{n^2 - n}{2}$.

Luego si hay 66 farolas habrá 66 cruces y se cumplirá:

$$\frac{n^2 - n}{2} = 66 \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow n = 12$$

El pueblo tenía 12 calles como mínimo.

3. Ésta es una de las disposiciones en que quedó la cava.

Cómo máximo pudo robar:

$$60 - 42 = 18 \text{ botellas.}$$

La disposición de 42 botellas admite muchas formas diferentes,

1		20
20		1

ACTIVIDADES-PÁG. 49

1. Utilizando el teorema del resto.

$$P\left(\frac{2}{3}\right) = 5 \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + k \cdot \frac{2}{3} + 3 = 5 \Rightarrow \frac{16}{27} + \frac{2k}{3} + 3 = 5 \Rightarrow \frac{2k}{3} = \frac{38}{27} \Rightarrow k = \frac{19}{9}$$

2. a) La factorización del polinomio es $P(x) = 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6 = 2(x^2 + 1)(x + 1)(x - 3)$ y sus raíces son -1 y 3 .

b) La factorización del polinomio es $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 2(x - 1)(x + 2)(x + 1/2)$ y sus raíces son 1 ; -2 y $-1/2$.

En el gráfico pueden verse la resolución de las actividades 1 y 2 con Wiris.

Actividad 1

$P(x) = 2x^3 + k \cdot x + 3 \rightarrow x \rightarrow k \cdot x + 2 \cdot x^3 + 3$

$P\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow \frac{2}{3} \cdot k + \frac{97}{27}$

resolver $\left(\frac{2}{3} \cdot k + \frac{97}{27} = 5, k\right) \rightarrow \left\{\left\{k = \frac{19}{9}\right\}\right\}$

Actividad 2

factorizar $(2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6) \rightarrow 2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$

resolver $(2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 6 = 0) \rightarrow \{\{x = -1\}, \{x = 3\}\}$

factorizar $(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2) \rightarrow (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (2 \cdot x + 1)$

resolver $(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0) \rightarrow \left\{\{x = -2\}, \{x = 1\}, \left\{x = -\frac{1}{2}\right\}\right\}$

3. Operando, obtenemos:

$$a) \frac{3x}{x-2} - \frac{4x^2+5}{x^2-x-2} - \frac{3}{x+1} = \frac{1-x}{x-2}$$

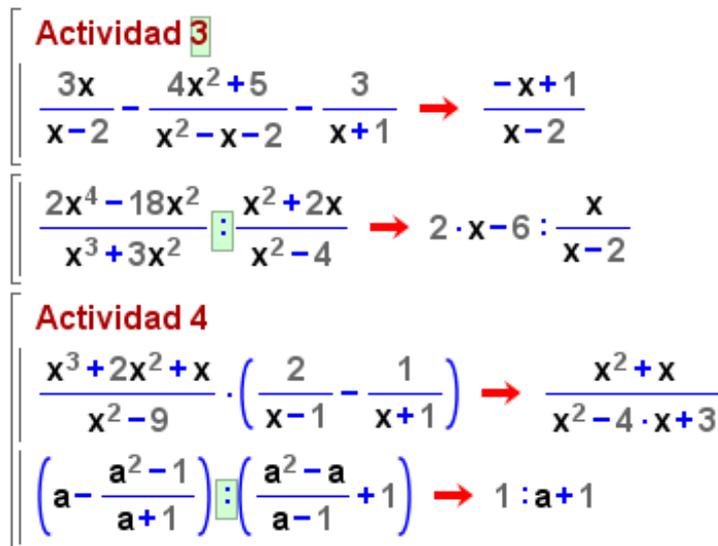
$$b) \frac{2x^4-18x^2}{x^3+3x^2} : \frac{x^2+2x}{x^2-4} = \frac{2x^2-10x+12}{x}$$

4. Operando, obtenemos:

$$a) \frac{x^3+2x^2+x}{x^2-9} \cdot \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{x(x+1)^2}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$b) \left(a - \frac{a^2-1}{a+1} \right) : \left(\frac{a^2-a}{a-1} + 1 \right) = \frac{a+1}{a+1} : \frac{a^2-1}{a-1} = \frac{(a+1)(a-1)}{(a+1)(a^2-1)} = \frac{1}{a+1}$$

En el gráfico pueden verse la resolución de las actividades 3 y 4 con Wiris.



Actividad 3

$$\frac{3x}{x-2} - \frac{4x^2+5}{x^2-x-2} - \frac{3}{x+1} \rightarrow \frac{-x+1}{x-2}$$

$$\frac{2x^4-18x^2}{x^3+3x^2} : \frac{x^2+2x}{x^2-4} \rightarrow 2 \cdot x-6 : \frac{x}{x-2}$$

Actividad 4

$$\frac{x^3+2x^2+x}{x^2-9} \cdot \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \rightarrow \frac{x^2+x}{x^2-4 \cdot x+3}$$

$$\left(a - \frac{a^2-1}{a+1} \right) : \left(\frac{a^2-a}{a-1} + 1 \right) \rightarrow 1 : a+1$$

ACTIVIDADES-PÁG. 50

1. El valor de los parámetros es:

a) $a = 2$ y $b = -1$.

b) $a = 2$ y $b = -5$ o $a = -2$ y $b = 5$.

2. Los resultados de las operaciones son:

a) $A(x) - B(x) + C(x) = -x^3 + x^2 + 5x - 9$

d) $B(x) \cdot C(x) = 6x^4 - 11x^3 + 4x^2$

b) $A(x) - [B(x) + C(x)] = -x^3 + x^2 - x - 1$ e) $[B(x)]^2 = 4x^6 - 4x^5 + x^4$
 c) $B(x) - 2A(x) = -x^2 - 4x + 10$ f) $C(x) \cdot [A(x) + B(x)] = 9x^4 - 15x^3 + 10x^2 - 23x + 20$

3. Los resultados de las operaciones son:

a) $(2 - 3x)^2 = 4 - 12x + 9x^2$ d) $\left(\frac{2}{3} + 9x\right)^2 = \frac{4}{9} + 12x + 81x^2$
 b) $(2x - 5)(2x + 5) = 4x^2 - 25$ e) $(x - 3)^2 - (x + 3)^2 = -12x$
 c) $(3 + x)^3 = 27 + 27x + 9x^2 + x^3$ f) $(4x + 3)^2 - (4x - 3)(4x + 3) = 24x + 18$

4. El valor del polinomio buscado, en cada caso, es:

a) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 8x + 4$ b) $P(x) = 2x^4 - 3x^2$

5. La solución en cada uno de los casos es:

a) Cociente: $4x^4 - 3x^3 - 6x + 7$; Resto: $-3x + 2$. b) Cociente: $5x^2 + 8x - 3$; Resto: $-9x$

6. La tabla completa aparece a continuación.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$5x^4 - 10x^3 + 8x^2 - 3x + 7$	$5x^2 + 3$	$x^2 - 2x + 1$	$3x + 4$
$5x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x - 4$	$5x^2 + 6x + 2$	$x^2 - 1$	$x - 2$
$8x^3 - 4x^2 + 7$	$2x^2 + x - 1$	$4x - 4$	$8x + 3$
$x^5 - 2x^3 - x^2$	$x^2 - 2$	$x^3 - 1$	- 2

7. Los valores numéricos son:

a) -30 ; 0 y 12 b) -5 ; $-\frac{5}{2}y - \frac{55}{32}$

8. Los resultados de cada una de las divisiones es:

a) Cociente: $x^3 - 4x^2 + 4x$; Resto: -2 . b) Cociente: $2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$; Resto: 7.
 c) Cociente: $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$; Resto: 0.

9. El valor en cada caso es: a) $a = -3$ b) $a = -\frac{43}{2}$.

10. Quedaría:

- a) $P(0) = 3$; $P(1) = 3$ y $P(-2) = 3$.
 b) Debe verificarse que $P(-1) = 0$, entonces $k = 4$.
 c) Debe verificarse que $P(-2) = 2$, entonces $a = 23$.
 d) El resto de esta división es $B(0) = -5$.

ACTIVIDADES-PÁG. 51

11. Las raíces son:

- a) 0, 3 y - 3 b) 3 y - 3 c) 1; 3, - 1 y - 3

12. Las descomposiciones pedidas son:

- a) $A(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$
- b) $B(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1 = 9(x - 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$
- c) $C(x) = x^3 + 2x^2 + x = x(x + 1)^2$
- d) $D(x) = x^4 - 29x^2 + 100 = (x + 2)(x + 5)(x - 5)(x - 2)$
- e) $E(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1)(x^2 + 2)$
- f) $F(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)(x^2 + 1)$

13. La solución en cada uno de los casos queda:

- a) $MCD [A(x), B(x)] = x(x + 2)^2$
 $mcm [A(x), B(x)] = x^2(x + 2)^2(x - 1)^2(x + 1)$
- b) $MCD [A(x), C(x)] = x(x - 1)$
 $mcm [A(x), C(x)] = x^3(x + 2)^2(x - 1)^2(x - 2)^3$
- c) $MCD [A(x), B(x), C(x)] = x$
 $mcm [A(x), B(x), C(x)] = x^3(x + 2)^2(x - 1)^2(x - 2)^3(x + 1)$

14. En cada uno de los casos descomponemos los polinomios en factores y calculamos el MCD y el mcm, obteniendo:

- a) $\begin{cases} MCD [A(x), B(x)] = (x - 3)(x + 3) \\ mcm [A(x), B(x)] = (x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1) \end{cases}$
- b) $\begin{cases} MCD [C(x), D(x)] = x - 1 \\ mcm [C(x), D(x)] = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1) \end{cases}$
- c) $\begin{cases} MCD [E(x), F(x)] = 2(x - 2) \\ mcm [E(x), F(x)] = -2(x - 2)(x^2 + x + 1)\left(x + \frac{5}{2}\right) \end{cases}$

15. Se comprueba fácilmente a partir de las descomposiciones de los polinomios:

$$A(x) \cdot B(x) = (x^4 - 9x^2) \cdot (x^3 + 6x^2 + 9x) = x^7 + 6x^6 - 54x^4 - 81x^3$$

$$\text{MCD}[A(x), B(x)] \cdot \text{mcm}[A(x) \cdot B(x)] = (x^2 + 3x) \cdot (x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 27x^2) = x^7 + 6x^6 - 54x^4 - 81x^3$$

16. Queda en cada caso:

$$\text{a) } \frac{x^3 - 2x^2}{x^3 - 4x} = \frac{x}{x + 2}$$

$$\text{c) } \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{x + 3}{(x - 1)^2}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 25}{2x + 10} = \frac{x - 5}{2}$$

$$\text{d) } \frac{5x^3 + x^2 - 5x - 1}{5x^3 - 9x^2 + 3x + 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

17. El polinomio P(x) es:

$$\text{a) } P(x) = x^2 - 1$$

$$\text{c) } P(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$\text{b) } P(x) = x + 5$$

$$\text{d) } P(x) = x^3 - 4x^2$$

18. En cada caso queda:

$$\text{a) } \frac{2x^2 + 2x}{6x^2}, \frac{9x + 15}{6x^2}$$

$$\text{c) } \frac{3x^2 - 6x + 3}{6x^2 - 6x}, \frac{6x + 6}{6x^2 - 6x}, \frac{2x^2}{6x^2 - 6x}$$

$$\text{b) } \frac{2x^2 + 4x}{x^2 - 4}, \frac{x + 3}{x^2 - 4}, \frac{4x^2 - 8x}{x^2 - 4}$$

$$\text{d) } \frac{x^3 - 25x}{3x^2 - 75}, \frac{5}{3x^2 - 75}, \frac{9x^2 + 45x}{3x^2 - 75}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 52

19. Los resultados de las operaciones son:

$$\text{a) } \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} = \frac{4x + 3}{2x^2}$$

$$\text{c) } \frac{3x - 1}{x^2 - 9} - \frac{3}{x + 3} = \frac{8}{x^2 - 9}$$

$$\text{b) } \frac{x + 2}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{5x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{d) } \frac{3x}{x - 3} + \frac{5}{x + 2} = \frac{3x^2 + 11x - 15}{x^2 - x - 6}$$

20. Los resultados de las operaciones son:

$$\text{a) } \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} \cdot \frac{4x^2 + 4}{x^2 - 1} = \frac{4x}{x - 1}$$

$$\text{c) } \frac{x - 1}{2x + 6} : \frac{x^2 - 1}{-3x - 3} = \frac{-3}{2x + 6}$$

$$b) \frac{2x - 6}{x^2 - 1} \cdot \frac{5x + 5}{4x - 12} = \frac{5}{2x - 2}$$

$$d) \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x} : \frac{2x + 6}{4x^2 - 8x + 4} = \frac{2(x + 3)(x - 1)}{x}$$

21. Los resultados de las operaciones son:

$$a) \left(1 + \frac{2}{x}\right) : \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = 1$$

$$d) \left(x + \frac{x}{x - 1}\right) : \left(x - \frac{x}{x - 1}\right) = \frac{x}{x - 2}$$

$$b) \frac{x^2 + 4x}{x^2} : \frac{x^2 - 16}{x^2 + 2x + 1} \cdot \frac{3x - 12}{x^2 - x} = \frac{3(x + 1)^2}{x^2(x - 1)}$$

$$e) \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right) \cdot \frac{x^3 + 9x}{x - 3} = \frac{x^3 + 3x^2 + 9x + 27}{3}$$

$$c) \left(1 - \frac{1}{x}\right) : \frac{x}{x - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}$$

$$f) \frac{x + 1}{2x} \cdot \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x - 1}\right) = \frac{1}{x - x^2}$$

22. Las soluciones quedan:

a) Los valores buscados son: a = 5; b = 2.

$$b) \text{ La igualdad queda: } \frac{10x + 1}{x^2 - 3x - 10} = \frac{51/7}{x - 5} + \frac{19/7}{x + 2}$$

23. En cada caso queda:

a) Obtenemos las raíces de los polinomios a partir de su descomposición factorial:

A (x) = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1). Las raíces son x = -1 y x = 2.

B (x) = x(x + 2)^2. Las raíces son x = 0 y x = -2 (doble).

C (x) = x(x^2 + 9). Las raíz es x = 0.

b) En cada uno de los tres casos:

i) El polinomio que tiene como raíces x = 1, x = 2 y x = 3 es P (x) = a (x - 1)(x - 2)(x - 3).

ii) El polinomio que tiene como raíces x = 0 y x = 1 doble es P (x) = a x (x - 1)^2.

iii) El polinomio que tiene como raíces x = 0 doble y x = -1 triple es P (x) = a x^2 (x + 1)^3.

c) El polinomio es P (x) = x + 2

24. En cada uno de los casos queda:

a) Multiplicando en cruz, obtenemos:

$$(x^2 - 4x + 3) \cdot (x + 2) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$(x^2 + x - 2) \cdot (x - 2) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Luego la igualdad es cierta.

b) Operando obtenemos:

$$1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Luego la igualdad es cierta.

ACTIVIDADES-PÁG. 53

a) En la mesa de tamaño 8 x 6 la bola se mete en la esquina B, como puede verse en el dibujo.

b) La bola ha cruzado 24 cuadrados.

c) La bola ha rebotado 5 veces en los lados de la mesa.

Los mismo ocurriría en las mesas de medidas semejantes: 16 x 12, 24 x 18, etc. En particular en la mesa 4 x 3.

d) Los resultados para las mesas pedidas aparecen a continuación:

- En una mesa 2 x 6, la bola se mete en la esquina C opuesta a A, cruza 6 cuadrados y rebota 2 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 3.

- En una mesa 5 x 10, la bola se mete en la esquina B, cruza 10 cuadrados y rebota una vez en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 2.

- En una mesa 6 x 6, la bola se mete en la esquina C, cruza 6 cuadrados y rebota 0 veces en los lados de la mesa. Lo mismo ocurre en una mesa 1 x 1.

e) En general, para una mesa de tamaño m x n, m y n números naturales, se busca la mesa semejante de dimensiones a x b, siendo a y b primos entre sí y obtenemos:

- Si b es par, la bola se mete en la esquina B, contigua a la de partida A.
- Si b es impar, la bola se mete en la esquina C, opuesta a la de partida A, si a es par; si x es par, la bola se mete en la esquina D.



Determinamos el número de rebotes en las bandas de la mesa de billar y para ello calculamos los rebotes que da la bola en las mesas de las dimensiones particulares que aparecen en el enunciado, obtenemos:

- En la mesa 8 x 6, o en su semejante 4 x 3, da 4 + 3 - 2 = 5 rebotes.
- En la mesa 2 x 6, o en su semejante 1 x 3, da 1 + 3 - 2 = 2 rebotes.
- En la mesa 5 x 10, o en su semejante 1 x 2, da 1 + 2 - 2 = 1 rebote.
- En la mesa 6 x 6, o en su semejante 1 x 1, da 1 + 1 - 2 = 0 rebotes.

En general, en la mesa a x b, da a + b - 2 rebotes; siendo a, b los primos entre sí determinados a partir de m x n, es decir, en una mesa de tamaño m x n, la bola da $\frac{m+n}{m.c.d.(m,n)} - 2$ rebotes.

Haciendo lo mismo para determinar los cuadros que cruza la bola, se llega a que en una mesa de tamaño m x n , la bola cruza $\frac{m \cdot n}{m. c. d. (m, n)}$ cuadros.