

# 2 SUCESIONES

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) C.E. 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4 - EA 1.7.5.)

Página 61

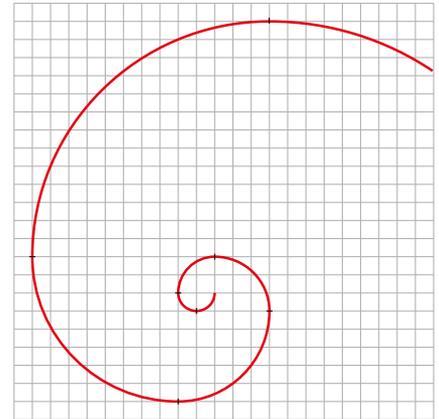
## Resuelve

### Una hermosa curva

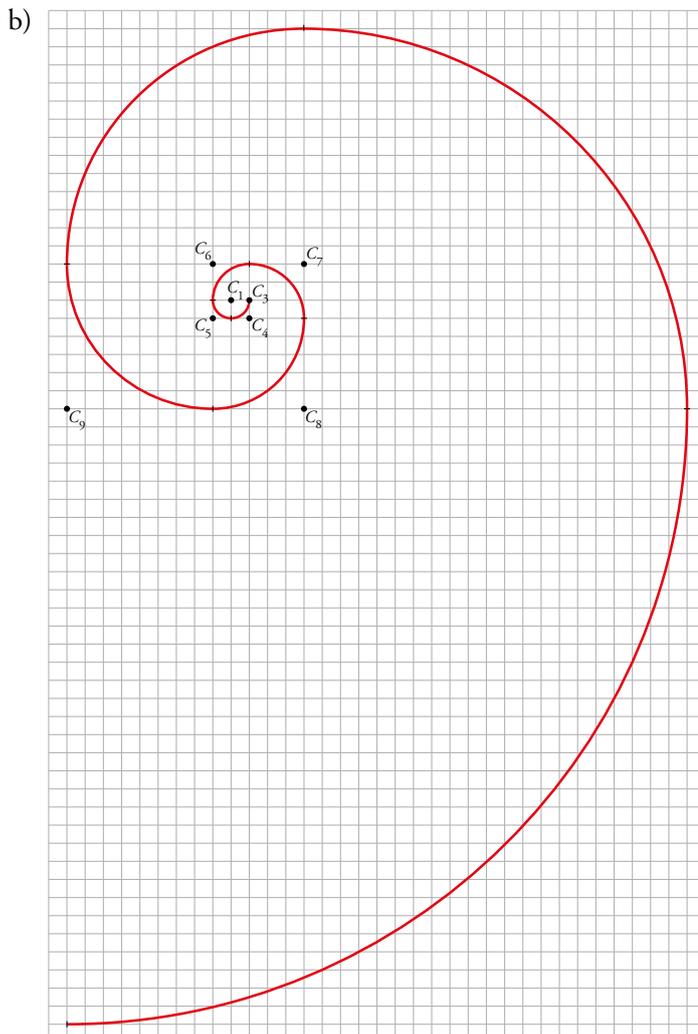
La curva de la derecha está construida con ocho arcos de circunferencia. Los siete primeros son de un cuarto de circunferencia. El octavo, es solo un trocito.

- Localiza los centros y averigua los radios de los ocho arcos dibujados. ¿Ves la relación de los radios con la sucesión de Fibonacci?
- Reproduce la curva en tu cuaderno completando el octavo tramo y añadiendo el noveno. ¿Qué radio tiene este último?
- Como ves, esta curva se podría ir ampliando indefinidamente. Di cuáles serían los radios de los siguientes cinco tramos (10.º, 11.º, ...).

- Los dos primeros centros de arcos de circunferencia coinciden  $C_1 = C_2$  y están representados como un único centro. El centro del tercer arco es  $C_3$  y así sucesivamente.



Los radios de los arcos de circunferencias coinciden con los términos de la sucesión de Fibonacci. Es decir, si llamamos  $r_i$  al radio de centro  $C_i$ ,  $r_1 = r_2 = 1$ ,  $r_3 = 2$ ,  $r_4 = 3$ ,  $r_5 = 5$ ,  $r_6 = 8$ ,  $r_7 = 13$ ,  $r_8 = 21$ .



El último radio es  $r_9 = 34$ .

- $r_{10} = 55$ ,  $r_{11} = 89$ ,  $r_{12} = 144$ ,  $r_{13} = 233$ ,  $r_{14} = 377$

# 1 ► CONCEPTO DE SUCESIÓN

C.E.: CE 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 63

**1** Obtén los seis primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:

$$a_n = n^2 + 2n$$

$$b_n = (-1)^{n+1} n^2$$

$$c_n = (-1)^n (2n + 1)$$

$$d_n = (-2)^n$$

$$e_1 = 3, e_2 = -1,$$

$$e_n = e_{n-2} + 2e_{n-1}$$

$$f_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

$$g_n = \frac{n^2+1}{n^2+2n}$$

$$h_n = n! - (n-1)!$$

$$i_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_n = n^2 + 2n \rightarrow a_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3, a_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8, a_3 = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15,$$

$$a_4 = 4^2 + 2 \cdot 4 = 24, a_5 = 5^2 + 2 \cdot 5 = 35, a_6 = 6^2 + 2 \cdot 6 = 48$$

$$b_n = (-1)^{n+1} n^2 \rightarrow b_1 = (-1)^{1+1} \cdot 1^2 = 1, b_2 = (-1)^{1+2} \cdot 2^2 = -4, b_3 = (-1)^{1+3} \cdot 3^2 = 9,$$

$$b_4 = (-1)^{1+4} \cdot 4^2 = -16, b_5 = (-1)^{1+5} \cdot 5^2 = 25, b_6 = (-1)^{1+6} \cdot 6^2 = -36$$

$$c_n = (-1)^n (2n + 1) \rightarrow c_1 = (-1)^1 (2 \cdot 1 + 1) = -3, c_2 = (-1)^2 (2 \cdot 2 + 1) = 5, c_3 = (-1)^3 (2 \cdot 3 + 1) = -7,$$

$$c_4 = (-1)^4 (2 \cdot 4 + 1) = 9, c_5 = (-1)^5 (2 \cdot 5 + 1) = -11, c_6 = (-1)^6 (2 \cdot 6 + 1) = 13$$

$$d_n = (-2)^n \rightarrow d_1 = (-2)^1 = -2, d_2 = (-2)^2 = 4, d_3 = (-2)^3 = -8,$$

$$d_4 = (-2)^4 = 16, d_5 = (-2)^5 = -32, d_6 = (-2)^6 = 64$$

$$e_1 = 3, e_2 = -1, e_3 = 3 + 2 \cdot (-1) = 1, e_4 = -1 + 2 \cdot 1 = 1, e_5 = 1 + 2 \cdot 1 = 3, e_6 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$$

$$f_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \rightarrow f_1 = \frac{(-1)^1}{2 \cdot 1 - 1} = -1, f_2 = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{1}{3}, f_3 = \frac{(-1)^3}{2 \cdot 3 - 1} = -\frac{1}{5},$$

$$f_4 = \frac{(-1)^4}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{7}, f_5 = \frac{(-1)^5}{2 \cdot 5 - 1} = -\frac{1}{9}, f_6 = \frac{(-1)^6}{2 \cdot 6 - 1} = \frac{1}{11}$$

$$g_n = \frac{n^2+1}{n^2+2n} \rightarrow g_1 = \frac{1^2+1}{1^2+2 \cdot 1} = \frac{2}{3}, g_2 = \frac{2^2+1}{2^2+2 \cdot 2} = \frac{5}{8}, g_3 = \frac{3^2+1}{3^2+2 \cdot 3} = \frac{2}{3},$$

$$g_4 = \frac{4^2+1}{4^2+2 \cdot 4} = \frac{17}{24}, g_5 = \frac{5^2+1}{5^2+2 \cdot 5} = \frac{26}{35}, g_6 = \frac{6^2+1}{6^2+2 \cdot 6} = \frac{37}{48}$$

$$h_n = n! - (n-1)! \rightarrow h_1 = 1! - (1-1)! = 0, h_2 = 2! - (2-1)! = 1, h_3 = 3! - (3-1)! = 4,$$

$$h_4 = 4! - (4-1)! = 18, h_5 = 5! - (5-1)! = 96, h_6 = 6! - (6-1)! = 600$$

$$i_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow i_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2, i_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, i_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27},$$

$$i_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}, i_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125}, i_6 = \left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 = \frac{117649}{46656}$$

**2** Da el término general o el criterio de recurrencia (o ambas cosas) de las siguientes sucesiones:

a) 3, 8, 13, 18, 23, ...

b) 1, 8, 27, 64, 125, ...

c) 0, 3, 8, 15, 24, ...

d) 1, -3, 5, -7, 9, ...

e) 1, -2, 6, -24, 120, ...

f) 1, 4, 8, 11, 22, 25, ...

g)  $\frac{2}{4}, \frac{5}{9}, \frac{8}{16}, \frac{11}{25}, \frac{14}{36}, \dots$

h)  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

i) 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...

j)  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

- a) Cada término es 5 unidades mayor que el término anterior de la sucesión.  $a_n = 5n - 2$   
 Por recurrencia:  $a_1 = 3$ ,  $a_n = a_{n-1} + 5$ .
- b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa en la sucesión.  $b_n = n^3$
- c) Cada término es una unidad menor que el cuadrado del lugar que ocupa.  $c_n = n^2 - 1$
- d) Son los números impares con los signos + y - alternativamente.  $d_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$
- e) Son los números factoriales con los signos + y - alternativamente.  $e_n = (-1)^{n+1}n!$   
 Por recurrencia:  $e_1 = 1$ ,  $e_n = e_{n-1} \cdot (-n)$ .
- f) El primer término impar es 1 y los demás términos impares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.  
 El primer término par es 4 y los demás términos pares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.  
 $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 4$ . Para  $n$  impar,  $f_n = f_1 + 7(n - 2)$ . Para  $n$  par,  $f_n = f_1 + 7(n - 3)$ .
- g) Cada numerador es 3 unidades mayor que el numerador anterior. Cada denominador es el cuadrado del número natural siguiente al lugar que ocupa.  $g_n = \frac{3n - 1}{(n + 1)^2}$
- h) Los denominadores son los números naturales. Cada numerador es una unidad inferior a su denominador.  $h_n = \frac{n - 1}{n}$
- i) Por recurrencia:  $i_1 = 1$ ,  $i_2 = 3$ ,  $i_n = i_{n-1} + i_{n-2}$ .
- j) Son los inversos de los números naturales con los signos + y - alternativamente.  $j_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

## 2 ▶ ALGUNAS SUCESIONES ESPECIALMENTE INTERESANTES

C.E.: todos los tratados en la unidad excepto el 1.9. (EA todos los tratados en la unidad excepto el 1.9.1.)

Página 65

**1** En las siguientes sucesiones identifica las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. Añade dos términos y escribe su término general:

- |                                  |                                |
|----------------------------------|--------------------------------|
| a) 3, 7, 11, 15, 19, ...         | b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, ...     |
| c) 3, 6, 12, 24, 48, ...         | d) 1, 3, 9, 27, 81, ...        |
| e) 5, -5, 5, -5, 5, ...          | f) 10, 7, 4, 1, -2, ...        |
| g) 100; 50; 25; 12,5; ...        | h) 12, 12, 12, 12, ...         |
| i) 3, -5, 7, -9, 11, ...         | j) 2 840; 284; 28,4; ...       |
| k) 90, -30, 10, -10/3, 10/9, ... | l) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; ... |

a) Progresión aritmética en la que  $a_1 = 3$  y  $d = 4$ .

$$a_6 = 23, a_7 = 27. \text{ Término general: } a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$$

b) No es una progresión.

$$b_7 = 24, b_8 = 31. \text{ Término general: } b_n = 3 + \frac{n(n-1)}{2}$$

c) Progresión geométrica en la que  $c_1 = 3$  y  $r = 2$ .

$$c_6 = 96, c_7 = 192. \text{ Término general: } c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

d) Progresión geométrica en la que  $d_1 = 1$  y  $r = 3$ .

$$d_6 = 243, d_7 = 729. \text{ Término general: } d_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

e) Progresión geométrica en la que  $e_1 = 5$  y  $r = -1$ .

$$e_6 = -5, e_7 = 5. \text{ Término general: } e_n = 5 \cdot (-1)^{n-1}$$

f) Progresión aritmética en la que  $f_1 = 10$  y  $d = -3$ .

$$f_6 = -5, f_7 = -8. \text{ Término general: } f_n = 10 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 13$$

g) Progresión geométrica en la que  $g_1 = 100$  y  $r = \frac{1}{2}$ .

$$g_5 = 6,25, g_6 = 3,125. \text{ Término general: } g_n = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

h) Es a la vez una progresión aritmética de diferencia  $d = 0$  y una progresión geométrica de razón  $r = 1$ .

$$h_5 = 12, h_6 = 12. \text{ Término general: } h_n = 12$$

i) No es una progresión.

$$i_6 = -13, i_7 = 15. \text{ Término general: } i_n = (-1)^{n+1}(2n + 1)$$

j) Progresión geométrica en la que  $j_1 = 2 840$  y  $r = \frac{1}{10}$ .

$$j_4 = 2,84, j_5 = 0,284. \text{ Término general: } j_n = 2 840 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

k) Progresión geométrica en la que  $k_1 = 90$  y  $r = -\frac{1}{3}$ .

$$k_6 = \frac{-10}{27}, k_7 = \frac{10}{81}. \text{ Término general: } k_n = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

l) Progresión aritmética en la que  $l_1 = 17,4$  y  $d = -1,6$ .

$$l_5 = 11, l_6 = 10,4. \text{ Término general: } l_n = 17,4 + (n - 1) \cdot (-1,6) = -1,6n + 19$$

**2** En 1a) halla  $S_{20}$ .

$$a_{20} = 4 \cdot 20 - 1 = 79; S_{20} = \frac{(3+79) \cdot 20}{2} = 820$$

3 En 1f) halla  $S_{15}$ .

$$f_{15} = -3 \cdot 15 + 13 = -32; S_{15} = \frac{(10 + (-32)) \cdot 15}{2} = -165$$

4 En 1d) halla  $S_{10}$ .

$$d_{10} = 3^9 = 19\,683; S_{10} = \frac{19\,683 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = 29\,524$$

5 En 1k) halla  $S_{10}$ .

$$k_{10} = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = -\frac{10}{2187}; S_{10} = \frac{-\frac{10}{2187} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 90}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{147\,620}{2187}$$

6 ¿En cuáles de las sucesiones del ejercicio 1 puedes hallar la suma de los infinitos términos? Hazlo.

En las de los apartados g), j) y k) porque las razones son, en valor absoluto, menores que 1.

$$\text{En el caso del apartado g), } S_{\infty} = \frac{100}{1 - \frac{1}{2}} = 200.$$

$$\text{En el caso del apartado j), } S_{\infty} = \frac{2840}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{28\,400}{9}.$$

$$\text{En el caso del apartado k), } S_{\infty} = \frac{90}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{135}{2}.$$

7 Calcula.

a)  $1^2 + 2^2 + \dots + 30^2$

b)  $1^3 + 2^3 + \dots + 15^3$

c)  $20^2 + 21^2 + \dots + 30^2$

d)  $16^3 + 17^3 + \dots + 30^3$

a)  $\frac{30 \cdot (30+1) \cdot (60+1)}{6} = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} = 9\,455$

b)  $\frac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 14\,400$

c)  $20^2 + 21^2 + \dots + 30^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + \dots + 19^2) = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} - \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} = 6\,985$

d)  $16^3 + 17^3 + \dots + 30^3 = (1^3 + 2^3 + \dots + 30^3) - (1^3 + 2^3 + \dots + 15^3) = \frac{30^2 \cdot 31^2}{4} - \frac{15^2 \cdot 16^2}{4} = 201\,825$

8 Calcula.

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3$$

Ten en cuenta que, por ejemplo,  $6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 8 \cdot 3^3$  y que  $20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 8 \cdot 10^3$ .

$$\begin{aligned} 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3 &= (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \dots + (2 \cdot 10)^3 = \\ &= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 3^3 + \dots + 2^3 \cdot 10^3 = \\ &= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) = 8 \cdot \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 8 \cdot 3\,025 = 24\,200 \end{aligned}$$

- 9 Calcula el 6.º término de la sucesión de Fibonacci,  $f_6 = 8$ , aplicando la fórmula.

$$f_6 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^6 - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^6 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} [(9+4\sqrt{5}) - (9-4\sqrt{5})] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 8\sqrt{5} = 8$$

- 10  [El cálculo de los elementos de la sucesión a partir de los datos del enunciado permite al alumnado trabajar la iniciativa (dimensión personal)].

Observa que como  $|1 - \phi| < 1$ , para valores «algo grandes» de  $n$ , el número  $(1 - \phi)^n$  es «pequeño». Por tanto, podemos hallar los términos avanzados de la sucesión de Fibonacci, de forma aproximada, prescindiendo del sustraendo:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\phi^n - (1 - \phi)^n] \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^n$$

Por ejemplo, para calcular  $f_{13} = 233$  procederíamos así:  $f_{13} \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^{13}$ . Hazlo y comprueba que el error cometido es menor que 0,001. Calcula de este modo  $f_{20}$ .

El error cometido es igual a  $\left| \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{13} \right| \approx 8,5837 \times 10^{-4}$ , que es inferior a 0,001.

$$f_{20} \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{20} = 6765$$

- 11 La sucesión de Lucas también tiene relación con el mundo vegetal. Se define así:

$$l_1 = 1, l_2 = 3, l_n = l_{n-2} + l_{n-1}$$

Como ves, es muy parecida a la de Fibonacci.

- a) Halla sus 11 primeros términos.  
b)  $l_1 + l_2 + \dots + l_n = l_{n+2} - 3$ . Compruébalo para  $n = 6$ .  
c) Esta sucesión se relaciona con la de Fibonacci así:

$$f_n = \frac{l_{n-1} + l_{n+1}}{5}$$

Compruébalo hallando los 10 primeros términos de la sucesión de Fibonacci a partir de la de Lucas.

a)  $l_1 = 1, l_2 = 3, l_3 = 4, l_4 = 7, l_5 = 11, l_6 = 18, l_7 = 29, l_8 = 47, l_9 = 76, l_{10} = 123, l_{11} = 199$

b)  $1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 = 44$

$$47 - 3 = 44$$

c)  $f_2 = \frac{l_1 + l_3}{5} = \frac{1+4}{5} = 1, f_3 = \frac{l_2 + l_4}{5} = \frac{3+7}{5} = 2, f_4 = \frac{l_3 + l_5}{5} = \frac{4+11}{5} = 3, f_5 = \frac{l_4 + l_6}{5} = \frac{7+18}{5} = 5, f_6 = \frac{l_5 + l_7}{5} = \frac{11+29}{5} = 8,$

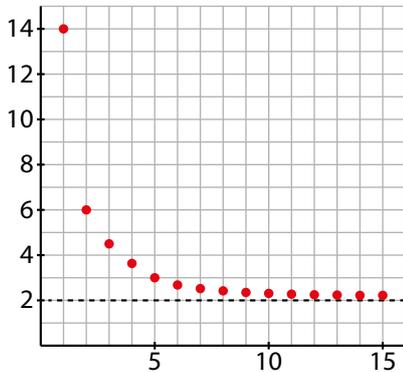
$$f_7 = \frac{l_6 + l_8}{5} = 13, f_8 = \frac{l_7 + l_9}{5} = 21, f_9 = \frac{l_8 + l_{10}}{5} = 34, f_{10} = \frac{l_9 + l_{11}}{5} = 55$$

### 3 ▶ LÍMITE DE UNA SUCESIÓN

C.E.: CE 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 67

- 1 Representa en tu cuaderno los 15 primeros términos de la sucesión  $a_n = \frac{4n+10}{2n-1}$  y asigna un valor a su límite.



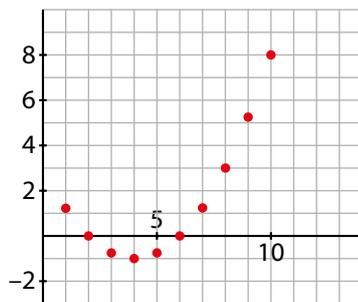
$$a_1 = 14, a_2 = 6, a_3 = 4,4; a_4 \approx 3,71;$$

$$a_5 \approx 3,33; \dots, a_{10} \approx 2,63; \dots;$$

$$a_{100} \approx 2,06; \dots; a_{1000} \approx 2,006; \dots$$

$$\lim a_n = 2$$

- 2 Representa los 10 primeros de  $a_n = \frac{n^2}{4} - 2n + 3$  y asigna un valor a su límite.



$$b_1 = 1,25; b_2 = 0; b_3 = -0,75;$$

$$b_4 = -1; b_5 = -0,75; b_6 = 0;$$

$$b_7 = 1,25; b_8 = 3; b_9 = 5,25; b_{10} = 8, \dots,$$

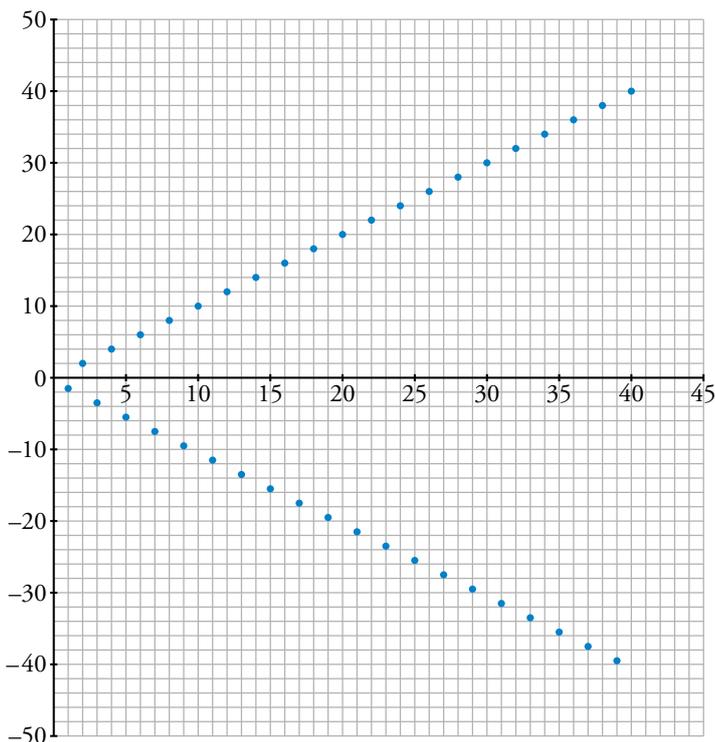
$$b_{100} = 2303, \dots$$

$$\lim b_n = +\infty$$

- 3 Representa los primeros términos de  $c_n = (-1)^n \cdot n$  y describe su comportamiento.

¿Podríamos afirmar que  $\lim c_n = l$  o que  $\lim c_n = +\infty$ ?

¿O acaso que  $\lim c_n = -\infty$ ?



Se trata de una sucesión oscilante porque su representación gráfica da saltos hacia arriba y hacia abajo. No tiene límite porque los términos no se acercan a ningún valor concreto. Tampoco tiene límite  $+\infty$  porque los términos impares (que son negativos) se hacen cada vez más pequeños. Análogamente, tampoco tiene límite  $-\infty$ .

Página 69

**4** Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica su límite:

a)  $a_n = \frac{2n-3}{6}$                       b)  $b_n = \frac{2n-3}{n+5}$

c)  $c_n = 3 - 2^n$                       d)  $d_n = 5 - \frac{1}{n^3}$

a)  $a_{10} \approx 2,83$ ;  $a_{100} \approx 32,83$ ;  $a_{1000} \approx 332,83$ ; ...  $\lim a_n = +\infty$

b)  $b_{10} \approx 1,133$ ;  $b_{100} \approx 1,876$ ;  $b_{1000} \approx 1,987$ ; ...  $\lim b_n = 2$

c)  $c_{10} = -1\,021$ ;  $c_{100} \approx -1,27 \cdot 103$ ; ...  $\lim c_n = -\infty$

d)  $d_{10} = 4,999$ ;  $d_{100} = 4,999999$ ; ...  $\lim d_n = 5$

**5** Di, razonadamente, cuáles de las siguientes sucesiones tienen límite:

a)  $a_n = -\frac{2}{n^2}$                       b)  $b_n = (-1)^n \frac{n}{n+4}$

c)  $c_n = (-1)^n n^2$                       d)  $d_n = (-1)^n \frac{2}{n^2}$

a)  $a_{10} = -0,02$ ;  $a_{100} = -0,0002$ ;  $a_{1000} = -0,000002$ ; ...  $\lim a_n = 0$ .

b)  $b_{10} \approx 0,714$ ;  $b_{11} \approx -0,733$ ;  $b_{100} \approx 0,962$ ;  $b_{101} \approx -0,962$ ; ...

Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a -1.  
La sucesión no tiene límite.

c)  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = 4$ ,  $c_3 = -9$ ,  $c_4 = 16$ ,  $c_5 = -25$ ; ...

Los términos impares son negativos y tienden a  $-\infty$ ; los términos pares son positivos y tienden a  $+\infty$ . Es una sucesión oscilante. No tiene límite.

d)  $d_1 = -2$ ;  $d_2 = 0,5$ ; ...;  $d_{100} = 0,0002$ ;  $d_{101} = -0,000196$ ; ...  $\lim d_n = 0$ .

## 4 ▶ ALGUNOS LÍMITES IMPORTANTES

C.E. CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1-EA 1.6.2.) C.E. 1.8. (EA 1.8.1.-EA 1.8.2.-EA 1.8.3.-EA 1.8.4-EA 1.8.5.) C.E. 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 71

- 1 a) Calcula  $\left(1 - \frac{1}{80}\right)^{80}$  y comprueba que «se parece mucho» a  $e^{-1} = \frac{1}{e}$ . Haz lo mismo con  $\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}$ .

¿Podemos suponer que  $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ ?

- b) Calcula  $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}$  y comprueba que es aproximadamente igual a  $e^{-1}$ .

¿Podemos suponer también que la sucesión  $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$  tiende a  $e^{-1}$ ?

a)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$$a_{80} = \left(1 - \frac{1}{80}\right)^{80} = \left(\frac{79}{80}\right)^{80} \approx 0,36557$$

$$a_{1000} = \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000} = \left(\frac{999}{1000}\right)^{1000} \approx 0,36770$$

$$e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,36788$$

Observamos que los resultados se acercan cada vez más a  $\frac{1}{e}$ .

Comprobándolo con algún término más avanzado, sí podríamos suponerlo.

b)  $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} = \frac{16481}{44800} \approx 0,36788$

Sí podemos suponerlo. Además, esta sucesión se acerca mucho más rápido a  $\frac{1}{e}$  que la del apartado

a), puesto que el término décimo de la sucesión ya es casi  $\frac{1}{e}$ .

- 2  [La demostración propuesta permite trabajar esta estrategia compartiendo cada alumno y alumna el resultado obtenido con un compañero o compañera].

Teniendo en cuenta que el término general de la sucesión de Fibonacci para  $n$  «grande» es:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\phi^n - (1 - \phi)^n] \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \text{ demuestra que } \lim \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi.$$

$$\text{Para } n \text{ «grande», } \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}\phi^{n+1}}{\sqrt{5}\phi^n} = \phi, \text{ luego } \lim \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi.$$

- 3 Sabiendo que  $f_n$  es el término general de la sucesión de Fibonacci, calcula los siguientes límites:

a)  $\lim \frac{f_n}{f_{n+2}}$                       b)  $\lim \frac{f_n}{f_{n+3}}$

Razonando de forma análoga al problema anterior,  $\lim \frac{f_n}{f_{n+2}} = \frac{1}{\phi^2} = \phi^{-2}$  y  $\lim \frac{f_n}{f_{n+3}} = \frac{1}{\phi^3} = \phi^{-3}$ .

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

Página 72

### 1. Dos sucesiones convergentes

Hazlo tú

- La suma de los términos de una progresión geométrica,  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ , con  $r < 1$  es 4.

La suma de los términos de lugar impar,  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots$ , es  $\frac{8}{3}$ .

Calcula  $a_1$  y  $r$ .

Como nos dice el enunciado:

$$S = 4; S_{\text{IMPAR}} = \frac{8}{3}; r < 1$$

Sabemos que por ser progresión geométrica, la suma también es igual a  $S = \frac{a_1}{1-r} = 4^{(*)}$ .

Además, los términos impares forman una progresión geométrica cuyo primer término es  $a_1$  y su razón es  $r^2$ . Por tanto:

$$S_{\text{IMPAR}} = \frac{a_1}{1-r^2} = \frac{8}{3}^{(**)}$$

Dividiendo (\*) entre (\*\*):

$$\frac{a_1}{1-r} : \frac{a_1}{1-r^2} = 4 : \left(\frac{8}{3}\right) \rightarrow \frac{a_1(1-r^2)}{a_1(1-r)} = \frac{4 \cdot 3}{8} \rightarrow \frac{a_1(1-r)(1+r)}{a_1(1-r)} = \frac{3}{2} \rightarrow 1+r = \frac{3}{2} \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

Volviendo a (\*):

$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{a_1}{1/2} = 4 \rightarrow a_1 = 2$$

### 2. Dos progresiones aritméticas

Hazlo tú

- Escribe en función de  $S$  la suma,  $S_{\text{IMPAR}}$ , de los diez primeros términos de lugar impar de la progresión aritmética anterior.

$$S_{\text{IMPAR}} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{17} + a_{19}$$

$$S_{\text{PAR}} = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14} + a_{16} + a_{18} + a_{20}$$

$$a_n = a_{n-1} + 5$$

$$\text{Así: } S_{\text{PAR}} = (a_1 + 5) + (a_3 + 5) + \dots + (a_{17} + 5) + (a_{19} + 5) = S_{\text{IMPAR}} + 50$$

$$\text{Y sabemos que } S = S_{\text{IMPAR}} + S_{\text{PAR}} \rightarrow S = S_{\text{IMPAR}} + 50 + S_{\text{IMPAR}} \rightarrow S_{\text{IMPAR}} = \frac{S}{2} - \frac{50}{2} = \frac{S}{2} - 25.$$

### 3. Los cuadrados van a contracorriente

Hazlo tú

- Halla la suma:

$$-1 + 2 + \dots + 7 - 8 + 9 + \dots + 26 - 27 + 28 + \dots + 63 - 64 + 65 + \dots + 999 - 1000$$

(suma de los 1000 primeros naturales pero con los cubos perfectos con signo menos).

Calculamos la suma de los mil primeros números naturales sabiendo que forman una progresión aritmética.

$$S_{1000} = \frac{(1+1000) \cdot 1000}{2} = 500500$$

Ahora debemos restar dos veces la suma de los primeros 10 cubos perfectos:

$$S_{c_{10}} = 1^3 + 2^3 + \dots + 10^3 = \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 3025$$

Por tanto, la suma pedida es  $S_{1000} - 2 \cdot S_{c_{10}} = 500\,500 - 2 \cdot 3\,025 = 494\,450$ .

## Página 73

### 4. Término general

Hazlo tú

• **Halla el término general de estas sucesiones:**

a)  $\frac{2}{-1}, \frac{5}{1}, \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \dots$

b) 5,23; 5,2323; 5,232323; ...

c)  $\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-2}{5}, \dots$

a) No es una progresión aritmética ni geométrica.

Los numeradores son una unidad mayor que los cuadrados perfectos.

Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia  $d = 2$ .

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{-1 + (n-1) \cdot 2} = \frac{n^2 + 1}{2n - 3}$$

b) Podemos escribir así los términos de la sucesión:

$$b_1 = 5 + \frac{23}{100}, \quad b_2 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000}, \quad b_3 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000}$$

$$\text{Luego } b_n = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \dots + \frac{23}{100^n} = 5 + 23 \cdot \left( \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots + \frac{1}{100^n} \right) =$$

$$= 5 + 23 \cdot \left( \frac{\frac{1}{100} - \frac{1}{100^{n+1}}}{1 - \frac{1}{100}} \right) = 5 + 23 \cdot \left( \frac{1 - \frac{1}{100^n}}{100 - 1} \right) = 5 + 23 \cdot \left( \frac{1}{99} - \frac{1}{99 \cdot 100^n} \right) = 5 + \frac{23}{99} - \frac{23}{99 \cdot 100^n}$$

c) Se trata de una progresión aritmética de diferencia  $d = \frac{-3}{5}$ .

$$c_n = \frac{7}{5} + (n-1) \cdot \left( -\frac{3}{5} \right) = \frac{10 - 3n}{5}$$

### 5. Límite de sucesiones

Hazlo tú

• **Estudia los límites de las siguientes sucesiones:**

a)  $a_n = \frac{5n+7}{2n-1}$

b)  $b_n = \frac{(-1)^n n^2 + 4}{n+2}$

a)  $a_{100} = \frac{5 \cdot 100 + 7}{2 \cdot 100 - 1} = \frac{507}{199} \approx 2,5477$

$$a_{1000} = \frac{5 \cdot 1000 + 7}{2 \cdot 1000 - 1} = \frac{5007}{1999} \approx 2,5048$$

$$a_{10000} = \frac{5 \cdot 10000 + 7}{2 \cdot 10000 - 1} = \frac{50007}{19999} \approx 2,5005$$

Observamos que los términos independientes del numerador y del denominador se hacen insignificantes comparados con los múltiplos de  $n$ .

Por tanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+7}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{2n} = \frac{5}{2} = 2,5$

$$b) b_{100} = \frac{(-1) \cdot 100^2 + 4}{100 + 2} = -98$$

$$b_{1000} = \frac{(-1) \cdot 1000^2 + 4}{1000 + 2} = -998$$

$$b_{10000} = \frac{(-1) \cdot 10000^2 + 4}{10000 + 2} = -9998$$

De forma similar al apartado anterior, los términos independientes son insignificantes comparados con los otros términos.

$$\text{Por tanto, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)n^2 + 4}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)n = -\infty$$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 74

### 1. Paso de decimal periódico a fracción

- Utilizar las sucesiones para pasar el número periódico  $5,4\overline{7}$  a fracción.

$$5,4777\dots = 5,4 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + \dots$$

$$a_1 = \frac{7}{100}, a_2 = \frac{7}{1000}, a_3 = \frac{7}{10000}; r = \frac{1}{10}; S_\infty = \frac{\frac{7}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{90}$$

$$5,4 = \frac{54}{10} = \frac{27}{5}$$

$$5,4777\dots = \frac{27}{5} + \frac{7}{90} = \frac{493}{90}$$

### 2. Intereses bancarios

- Se hace un depósito de 5000 € en un banco que paga un interés del 4% anual. ¿Cuántos años se ha de dejar para superar los 8000 €?

En  $n$  años el capital se multiplicará por  $1,04^n$ .

$$8000 = 5000 \cdot 1,04^n \rightarrow \frac{8000}{5000} = 1,04^n \rightarrow 1,6 = 1,04^n \rightarrow$$

$$\rightarrow \log 1,6 = n \cdot \log 1,04 \rightarrow n = \frac{\log 1,6}{\log 1,04} \approx 11,984$$

Por tanto, superará los 8000 € a los 12 años.

### 3. Límites de sucesiones

- Hallar el límite de las siguientes sucesiones:

a)  $\frac{4}{3}, 7, -10, -\frac{13}{3}, -\frac{16}{5}, \dots$

b)  $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \dots$

a)  $\frac{4}{3}, \frac{7}{1}, \frac{10}{-1}, \frac{13}{-3}, \frac{16}{-5}, \dots$

Los numeradores forman una progresión aritmética de diferencia  $d = 3$ .

Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia  $d = -2$ .

$$a_n = \frac{4 + (n-1) \cdot 3}{3 + (n-1) \cdot (-2)} = \frac{3n+1}{-2n+5}$$

$$a_{1000} = \frac{3 \cdot 1000 + 1}{-2 \cdot 1000 + 5} = -\frac{3001}{1995} \approx -1,5043 \quad a_{10000} = \frac{3 \cdot 10000 + 1}{-2 \cdot 10000 + 5} = -\frac{30001}{19995} \approx -1,5004$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{-2n+5} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

b)  $b_1 = \sqrt{3} = 3^{1/2}$      $b_2 = \sqrt{3\sqrt{3}} = (3 \cdot 3^{1/2})^{1/2} = 3^{1/2+1/4}$      $b_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = (3 \cdot (3 \cdot 3^{1/2})^{1/2})^{1/2} = 3^{1/2+1/4+1/8}$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  es la suma de los elementos de una progresión geométrica de razón  $r = \frac{1}{2}$ .

La suma es  $S_\infty = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ .

Luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3^1 = 3$

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 75

### Para practicar

#### Criterio para formar sucesiones

1 Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:

- a)  $a_n = 3 + \frac{2}{10^n}$       b)  $b_n = \frac{n^2 - 1}{n}$       c)  $c_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$   
 d)  $d_n = 2^{-n}$       e)  $e_n = n!$       f)  $f_n = \frac{(-1)^n \cdot n - n}{2}$
- a)  $a_1 = 3,2$ ;  $a_2 = 3,02$ ;  $a_3 = 3,002$ ;  $a_4 = 3,0002$ ;  $a_5 = 3,00002$   
 b)  $b_1 = 0$ ;  $b_2 = \frac{3}{2}$ ;  $b_3 = \frac{8}{3}$ ;  $b_4 = \frac{15}{4}$ ;  $b_5 = \frac{24}{5}$   
 c)  $c_1 = 1$ ;  $c_2 = \frac{5}{3}$ ;  $c_3 = 2$ ;  $c_4 = \frac{11}{5}$ ;  $c_5 = \frac{7}{3}$   
 d)  $d_1 = \frac{1}{2}$ ;  $d_2 = \frac{1}{4}$ ;  $d_3 = \frac{1}{8}$ ;  $d_4 = \frac{1}{16}$ ;  $d_5 = \frac{1}{32}$   
 e)  $e_1 = 1$ ;  $e_2 = 2$ ;  $e_3 = 6$ ;  $e_4 = 24$ ;  $e_5 = 120$   
 f)  $f_1 = -1$ ;  $f_2 = 0$ ;  $f_3 = -3$ ;  $f_4 = 0$ ;  $f_5 = -5$

2 Escribe el término general de estas sucesiones:

- a)  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$       b)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$   
 c)  $\frac{1}{5}, \frac{4}{7}, \frac{9}{9}, \frac{16}{11}, \dots$       d)  $0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}, \dots$   
 e)  $2, 5, 10, 17, 26, \dots$       f)  $1, 3, 6, 10, 15, \dots$
- a)  $a_n = \frac{n}{n-1}$   
 b)  $b_n = \frac{1}{n+1}$   
 c) Los numeradores son cuadrados perfectos y los denominadores forman una progresión aritmética.  

$$c_n = \frac{n^2}{5 + (n-1) \cdot 2} = \frac{n^2}{2n+3}$$
  
 d)  $d_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$   
 e)  $e_n = n^2 + 1$   
 f)  $f_1 = 1$ ;  $f_2 = 1 + 2$ ;  $f_3 = 1 + 2 + 3$ ;  $f_4 = 1 + 2 + 3 + 4$ ; ...;  $f_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3 Escribe los 8 primeros términos de estas dos sucesiones cuyas leyes de recurrencia son:

- a)  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$       b)  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_n = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$   
 a)  $0, 2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{21}{16}, \frac{43}{32}, \dots$       b)  $1, 2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{128}, \dots$

**4** Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones. Halla tres términos más de cada una.

a) 4, 7, 3, -4, -7, ...

b) 2, 3,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ , ...

a)  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 7$ ,  $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$  para  $n > 2$

b)  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 3$ ,  $b_n = \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$  para  $n > 2$

### Progresiones aritméticas

**5** De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:

a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; ...

b) 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; ...

c) 1, 2, 4, 7, 11, ...

d) 14, 13, 11, 8, 4, ...

e)  $\frac{3}{4}$ , 1,  $\frac{5}{4}$ ,  $\frac{3}{2}$ ,  $\frac{7}{4}$ , ...

f) 1,  $\frac{89}{100}$ ,  $\frac{78}{100}$ ,  $\frac{67}{100}$ ,  $\frac{56}{100}$ , ...

a) Es una progresión aritmética con  $a_1 = 1,2$  y  $d = 1,2$ .

$$a_n = 1,2 + (n-1) \cdot 1,2 = 1,2n.$$

b) Es una progresión aritmética con  $b_1 = 5$  y  $d = -0,4$ .

$$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0,4) = -0,4n + 5,4.$$

c) y d) no son progresiones aritméticas.

e) La sucesión es una progresión aritmética de diferencia  $d = \frac{1}{4}$ .

$$e_n = \frac{3}{4} + (n-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{n+2}{4}$$

f) La sucesión es una progresión aritmética de diferencia  $d = \frac{-11}{100}$ .

$$f_n = 1 + (n-1) \cdot \left(-\frac{11}{100}\right) = \frac{111-11n}{100}$$

**6** Di cuáles de estas sucesiones son progresiones aritméticas:

a)  $a_n = 3n$

b)  $b_n = 5n - 4$

c)  $c_n = \frac{1}{n}$

d)  $d_n = \frac{8-3n}{4}$

e)  $e_n = 5 + \frac{n}{2}$

f)  $f_n = n^2 - 1$

a)  $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con  $d = 3$ .

b)  $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con  $d = 5$ .

c)  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = \frac{1}{3}$ ,  $c_4 = \frac{1}{4}$ , ...

$$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}. \text{ No es una progresión aritmética.}$$

d)  $d_n - d_{n-1} = \frac{8-3n}{4} - \frac{8-3(n-1)}{4} = \frac{8-3n-8+3n-3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con  $d = \frac{-3}{4}$ .

e)  $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n-1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

Es una progresión aritmética con  $d = \frac{1}{2}$ .

f)  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 3$ ,  $f_3 = 8$ ,  $f_4 = 15$ , ...

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$ . No es una progresión aritmética.

**7** Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas y comprueba los resultados con la calculadora:

a) 3, 6, 9, 12, 15, ...                      b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; ...

c)  $c_n = 4n - 2$                                   d)  $d_n = \frac{1-2n}{2}$

a)  $a_1 = 3$ ;  $a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3 + 75) \cdot 25}{2} = 975$$

b)  $b_1 = 5$ ;  $b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0,1 = 2,6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5 + 2,6) \cdot 25}{2} = 95$$

c)  $c_1 = 2$ ;  $c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2 + 98) \cdot 25}{2} = 1250$$

d)  $d_1 = \frac{-1}{2}$ ;  $d_{25} = \frac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(\frac{-1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312,5$$

**8** Halla la suma de los términos  $a_{25}$  hasta  $a_{30}$ , ambos inclusive, de las progresiones del ejercicio anterior. Comprueba los resultados con la calculadora.

a)  $a_{25} = 3 + 24 \cdot 3 = 75$                                    $a_{30} = 3 + 29 \cdot 3 = 90$

La suma es:  $\frac{(75 + 90) \cdot 6}{2} = 495$

b)  $b_{25} = 5 + 24 \cdot (-0,1) = 2,6$                                    $b_{30} = 5 + 29 \cdot (-0,1) = 0,1$

La suma es:  $\frac{(2,6 + 0,1) \cdot 6}{2} = 8,1$

c)  $c_{25} = 4 \cdot 25 - 2 = 98$                                    $c_{30} = 4 \cdot 30 - 2 = 118$

La suma es:  $\frac{(98 + 118) \cdot 6}{2} = 648$

d)  $d_{25} = \frac{1-2 \cdot 25}{2} = -\frac{49}{2}$                                    $d_{30} = \frac{1-2 \cdot 30}{2} = -\frac{59}{2}$

La suma es:  $\frac{\left[-\frac{49}{2} + \left(-\frac{59}{2}\right)\right] \cdot 6}{2} = -162$

### Progresiones geométricas

**9** De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y su término general.

a) 32, 16, 8, 4, 2, ...                                  b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; ...

c) 1, 4, 9, 16, 25, ...                                  d)  $\sqrt{2}$ , 2,  $2\sqrt{2}$ , 4,  $4\sqrt{2}$ , ...

a) Es una progresión geométrica con  $a_1 = 32$  y  $r = \frac{1}{2}$ .

$$a_6 = 1, \quad a_7 = \frac{1}{2}, \quad a_8 = \frac{1}{4}; \quad a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica;  $b_6 = 36$ ,  $b_7 = 49$ ,  $b_8 = 64$ ,  $b_n = n^2$ .

c) Es una progresión geométrica con  $c_1 = 1$  y  $r = 0,1$ .

$$c_6 = 0,00001; c_7 = 0,000001; c_8 = 0,0000001; c_n = 1 \cdot 0,1^{n-1} = 0,1^{n-1}$$

d) Es una progresión geométrica con  $d_1 = \sqrt{2}$  y  $r = \sqrt{2}$ .

$$d_6 = 8; d_7 = 8\sqrt{2}; d_8 = 16; d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n.$$

**10** Calcula la suma de los 25 primeros términos de estas progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:

a)  $a_1 = 32$ ,  $r = 1/2$

b)  $a_1 = 10$ ,  $r = 1/10$

c)  $a_1 = 2^{-10}$ ,  $r = 2$

d)  $a_1 = -5$ ,  $r = -1/4$

Comprueba los primeros resultados con la calculadora.

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r - 1}, S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r}$$

$$a) S_{25} = \frac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63,99999809 \approx 64$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{32}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{32}{\frac{1}{2}} = 64$$

$$b) S_{25} = \frac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{10} - 1} \approx 11,1 \approx \frac{100}{9}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{32}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11,1$$

$$c) S_{25} = \frac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2 - 1} = 32767,99902 \approx 32768$$

No se puede calcular  $S_{\infty}$  porque  $|r|$  no es menor que 1.

$$d) S_{25} = \frac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4$$

$$S_{\infty} = \frac{-5}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$$

**11** Halla la suma de los términos  $a_{10}$  hasta  $a_{20}$ , ambos inclusive, de la progresión geométrica de  $a_1 = 1/512$  y  $r = -2$ . Comprueba el resultado con la calculadora.

$$a_{10} = \frac{1}{512} \cdot (-2)^9 = -1$$

$$a_{20} = \frac{1}{512} \cdot (-2)^{19} = -1024$$

$$\text{La suma es } \frac{(-2) \cdot (-1024) - (-1)}{-2 - 1} = -683.$$

## Suma de potencias

**12** Calcula.

a)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2$

b)  $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2$

$$a) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2 = \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 42925$$

$$b) 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2) = 2^2 \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171700$$

**13** Calcula.

$$21^3 + 22^3 + \dots + 58^3 + 59^3 + 60^3$$

$$\begin{aligned} 21^3 + 22^3 + \dots + 58^3 + 59^3 + 60^3 &= (1^3 + 2^3 + \dots + 60^3) - (1^3 + 2^3 + \dots + 20^3) = \\ &= \frac{60^2 \cdot 61^2}{4} - \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 3304800 \end{aligned}$$

**14** Comprueba con la calculadora los resultados de las dos actividades anteriores.

En el ejercicio 12a) tecleamos  $\square$ SHIFT,  $\square$ X $\square$  e introducimos los datos teniendo en cuenta que el primer término es 1, el último es 50 y la sucesión es  $x^2$ . El resultado es 42925.

En el ejercicio 12b), el primer término es 1, el último es 50 y la sucesión es  $(2x)^2$ . El resultado es 171700.

En el ejercicio 13, el primer término es 21, el último es 60 y la sucesión es  $x^3$ . El resultado es 3304800.

**Límites**

**15** Calcula los términos  $a_{10}$ ,  $a_{100}$  y  $a_{1000}$ , en estas sucesiones e indica cuál es su límite:

a)  $a_n = \frac{1}{n-1}$                       b)  $a_n = \frac{2n+5}{n}$

c)  $a_n = \frac{5}{n} - 1$                       d)  $a_n = 3 - 7n$

a)  $a_{10} = 0, \widehat{1}$ ;  $a_{100} = 0, \widehat{01}$ ;  $a_{1000} = 0, \widehat{001}$   
 $\lim a_n = 0$

b)  $a_{10} = 2,5$ ;  $a_{100} = 2,05$ ;  $a_{1000} = 2,005$   
 $\lim a_n = 2$

c)  $a_{10} = -0,5$ ;  $a_{100} = -0,95$ ;  $a_{1000} = -0,995$   
 $\lim a_n = -1$

d)  $a_{10} = -6,7$ ;  $a_{100} = -697$ ;  $a_{1000} = -6997$   
 $\lim a_n = -\infty$

**16** Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica el límite de cada una:

a)  $a_n = 5n - 10$                       b)  $b_n = \frac{n-3}{n+1}$

c)  $c_n = \frac{n}{2n+1}$                       d)  $d_n = 10 - 5n + n^2$

e)  $e_n = 1 - (n+2)^2$                       f)  $f_n = \frac{n \cdot (-1)^n}{n+1}$

g)  $g_n = (-1)^n \cdot (n-1)^2$                       h)  $h_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

i)  $i_n = n \cdot (-1)^n - n^2$                       j)  $j_n = \frac{3n}{n^2+1}$

k)  $k_n = \frac{5}{3n+2}$                       l)  $l_n = (-1)^{n+1}$

a)  $a_{10} = 40$ ;  $a_{100} = 490$ ;  $a_{1000} = 4990$   
 $\lim a_n = +\infty$

b)  $b_{10} = 0,63$ ;  $b_{100} \approx 0,9603$ ;  $b_{1000} \approx 0,996$   
 $\lim b_n = 1$

c)  $c_{10} \approx 0,476$ ;  $c_{100} \approx 0,498$ ;  $c_{1000} \approx 0,4998$

$$\lim c_n = 0,5 = \frac{1}{2}$$

d)  $d_{1000} = 10 - 5 \cdot 1000 + 1000^2 = 995010$ ;  $d_{10000} = 10 - 5 \cdot 10000 + 10000^2 = 99950010$

$$\lim d_n = +\infty$$

e)  $e_{1000} = 1 - (1000 + 2)^2 = -1004003$ ;  $e_{10000} = 1 - (10000 + 2)^2 = -100040003$

$$\lim e_n = -\infty$$

f)  $f_{1000} = \frac{1000 \cdot (-1)^{1000}}{1000+1} = \frac{1000}{1001}$ ;  $f_{1001} = \frac{1001 \cdot (-1)^{1001}}{1001+1} = -\frac{1001}{1002}$

La sucesión de los términos pares tiende a 1 y la de los impares a  $-1$ , luego no tiene límite (además, es oscilante).

g)  $g_{1000} = (-1)^{1000} \cdot (1000 - 1)^2 = 998001$ ;  $g_{1001} = (-1)^{1001} \cdot (1001 - 1)^2 = -1000000$

Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a  $+\infty$  y los impares tienden a  $-\infty$ . Luego no tiene límite.

h)  $h_{1000} = \frac{(-1)^{1000}}{1000^2} = \frac{1}{1000000}$ ;  $h_{1001} = \frac{(-1)^{1001}}{1001^2} = -\frac{1}{1002001}$

Aunque la sucesión es oscilante, todos los términos tienden a 0, luego  $\lim h_n = 0$ .

i)  $i_{1000} = 1000 \cdot (-1)^{1000} - 1000^2 = -999000$ ;  $i_{1001} = 1001 \cdot (-1)^{1001} - 1001^2 = -1003002$

Cuando  $n$  es grande, el primer término apenas influye en  $n^2$  y, por tanto,  $\lim i_n = \lim -n^2 = -\infty$ .

j)  $j_{1000} = \frac{3 \cdot 1000}{1000^2 + 1} = \frac{3000}{1000001}$ ;  $j_{10000} = \frac{3 \cdot 10000}{10000^2 + 1} = \frac{30000}{100000001}$

Observamos que el término independiente del denominador es insignificante con respecto a  $n^2$ .

$$\lim j_n = \lim \frac{3n}{n^2} = \lim \frac{3}{n} = 0$$

k)  $k_{1000} = \frac{5}{3 \cdot 1000 + 2} = \frac{5}{3002}$ ;  $k_{10000} = \frac{5}{3 \cdot 10000 + 2} = \frac{5}{30002}$

$$\lim k_n = 0$$

l)  $l_{1000} = (-1)^{1000+1} = -1$ ;  $l_{1001} = (-1)^{1001+1} = 1$

Esta sucesión no tiene límite porque los términos pares siempre valen  $-1$  y los impares,  $1$ .

## Página 76

### Para resolver

#### 17 Calcula la suma de:

a) Los números impares de tres cifras.

b) Los cuadrados de los números impares de tres cifras.

a) Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101+999) \cdot 450}{2} = 247500$$

b) Primero calcularemos:

$$\begin{aligned} 101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 999^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 999^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2) = \\ &= \frac{999 \cdot 1000 \cdot 1997}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 332162150 \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 999^2 = (101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 999^2) - (102^2 + 104^2 + 106^2 + \dots + 998^2)$$

Por otra parte:

$$102^2 + 104^2 + 106^2 + \dots + 998^2 = (2 \cdot 51)^2 + (2 \cdot 52)^2 + (2 \cdot 53)^2 + \dots + (2 \cdot 499)^2 = 4 \cdot (51^2 + 52^2 + \dots + 499^2)$$

Y de la misma forma que al principio,

$$51^2 + 52^2 + \dots + 499^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 499^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2) = \frac{499 \cdot 500 \cdot 999}{6} - \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 41498825$$

Finalmente,

$$101^2 + 103^2 + 105^2 + \dots + 999^2 = 332\,162\,150 - 4 \cdot 41\,498\,825 = 166\,166\,850$$

**18** ¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que  $a_1 = 7$  y  $d = 7$ .

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35350$$

**19** En una progresión aritmética sabemos que  $d = 3$ ,  $a_k = 34$  y  $S_k = 133$ . Calcula  $k$  y  $a_1$ .

$$\left. \begin{aligned} a_k &= a_1 + (k-1) \cdot d \rightarrow 34 = a_1 + (k-1) \cdot 3 \\ S_k &= \frac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} \rightarrow 133 = \frac{(a_1 + 34) \cdot k}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$34 = a_1 + 3k - 3 \rightarrow a_1 = 37 - 3k$$

$$133 = \frac{(37 - 3k + 34) \cdot k}{2} \rightarrow 266 = (71 - 3k)k$$

$$26 = 71k - 3k^2 \rightarrow 3k^2 - 71k + 266 = 0$$

$$k = \frac{71 \pm \sqrt{5041 - 3192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1849}}{6} = \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} k = 14/3 \text{ (no vale)} \\ k = 19 \end{cases}$$

$$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \rightarrow a_1 = -20$$

**20** En una progresión geométrica de razón  $r = 3$  conocemos  $S_6 = 1456$ . Calcula  $a_1$  y  $a_4$ .

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot 5 - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728a_1}{2} = 364a_1 = 1456 \rightarrow a_1 = 4$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$$

**21** La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y  $a_2 = 1$ . Calcula  $a_1$  y la razón.

$$\left\{ \begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{r} \\ S_\infty &= \frac{a_1}{1-r} = \frac{1/r}{1-r} = \frac{1}{r-r^2} = 4 \rightarrow 1 = 4r - 4r^2 \end{aligned} \right.$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \rightarrow r = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow r = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = 2$$

**22** Sabemos que la suma de 138 números naturales consecutivos es 30291. ¿Cuáles son el primero y el último?

Supongamos que el primer término es  $k$ . Entonces el último será  $k + 137$ , luego:

$$30291 = \frac{(k + k + 137) \cdot 138}{2} \rightarrow k = 151 \text{ es el primer número natural y } k + 137 = 288 \text{ es el último}$$

**23** Calcula la suma de todos los términos comprendidos entre el 10 y el 20, ambos inclusive, de estas sucesiones dadas por recurrencia:

a)  $a_1 = 20$ ,  $a_n = a_{n-1} + 4$

b)  $b_1 = 7$ ,  $b_2 = 13$ ,  $b_n = b_{n-2} + 12$

c)  $c_1 = 0,625$ ,  $c_n = 2c_{n-1}$

d)  $d_1 = 4$ ,  $d_2 = 6$ ,  $d_n = d_{n-2} \cdot \frac{9}{4}$

a) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que  $a_1 = 20$  y  $d = 4$ .

$$a_{10} = 20 + 9 \cdot 4 = 56; \quad a_{20} = 20 + 19 \cdot 4 = 96$$

$$\text{La suma es: } \frac{(56 + 96) \cdot 11}{2} = 836$$

b) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que  $b_1 = 7$  y  $d = 6$ .

$$b_{10} = 7 + 9 \cdot 6 = 61; \quad b_{20} = 7 + 19 \cdot 6 = 121$$

$$\text{La suma es: } \frac{(61 + 121) \cdot 11}{2} = 1001$$

c) En esta ocasión tenemos una progresión geométrica en la que  $c_1 = 0,625$  y  $r = 2$ .

$$c_{10} = 0,625 \cdot 2^9 = 320; \quad c_{20} = 0,625 \cdot 2^{19} = 327\,680$$

$$\text{La suma es: } \frac{2 \cdot 327\,680 - 320}{2 - 1} = 655\,040$$

d) Esta sucesión es una progresión geométrica en la que  $d_1 = 4$  y  $r = \frac{3}{2}$ .

$$d_{10} = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{19\,683}{128}; \quad d_{20} = 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{19} = \frac{11\,622\,261\,467}{131\,072}$$

$$\text{La suma es: } \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{11\,622\,261\,467}{131\,072} - \frac{19\,683}{128}}{\frac{3}{2} - 1} \approx 26\,294,5$$

**24** Halla la suma de todos los términos a partir del décimo de esta sucesión:  $a_1 = 6\,144$ ,  $a_2 = 3\,072$ ,

$$a_n = \frac{1}{4} a_{n-2}$$

La sucesión dada es una progresión geométrica de razón  $r = \frac{1}{2}$ . Por tanto, se puede calcular la suma de los infinitos términos de la sucesión.

$$a_{10} = 6\,144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 12$$

$$\text{La suma pedida es } \frac{12}{1 - \frac{1}{2}} = 24.$$

**25** Una célula alcanza la madurez y se reproduce por mitosis (se divide en dos) al cabo de 40 min. Partiendo de un cultivo de 625 células, ¿cuántas tendremos al cabo de 4 horas?

Observemos la sucesión:

$$a_1 = 625 \quad (\text{cultivo de partida})$$

$$a_2 = 625 \cdot 2 = 1\,250 \quad (40 \text{ min})$$

$$a_3 = 1\,250 \cdot 2 = 625 \cdot 2^2 = 2\,500 \quad (80 \text{ min})$$

Vemos que los términos forman una progresión geométrica de razón  $r = 2$ .

$$\text{El término general es } a_n = 625 \cdot 2^{n-1}.$$

Por otro lado, 4 h = 4 · 60 min = 240 min se corresponden con  $n = 7$ .

$$\text{El número de células es } a_7 = 625 \cdot 2^6 = 40\,000.$$

- 26** **ODS** **Meta 12.1.** [Tras la visualización del vídeo, el alumnado puede debatir sobre cómo afecta el incremento de la población mundial a la disponibilidad de recursos naturales para mantener el estilo de vida actual].

En la primera década del siglo XXI la población de Angola creció un 2,5 % anualmente. Si a finales de 2010 había 23 millones de habitantes, ¿cuántos había a comienzos del año 2001?

Si llamamos  $P$  a la población a comienzos de 2001, la población evolucionará de la siguiente forma:

- Finales de 2001:  $P\left(1 + \frac{2,5}{100}\right)$

- Finales de 2002:  $P\left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^2$

...

- Finales de 2010:  $P\left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{10}$

Por tanto,  $P\left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{10} = 23 \rightarrow P \cdot 1,025^{10} = 23 \rightarrow P = \frac{23}{1,025^{10}} \approx 17\,967\,563$  habitantes.

- 27** Se sabe que los ángulos de cierto pentágono están en progresión aritmética. Si el menor mide  $50^\circ$ , halla los demás.

\* *Recuerda la suma de los ángulos de un pentágono.*

La suma de los ángulos de un pentágono es:  $180^\circ \cdot (5 - 2) = 540^\circ$

Si  $d$  es la diferencia de dicha progresión, tenemos que:  $\frac{(50 + 50 + 4d) \cdot 5}{2} = 540$

de donde se obtiene que  $d = 29$  y los demás ángulos son:  $79^\circ$ ,  $108^\circ$ ,  $137^\circ$  y  $166^\circ$ .

- 28** Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que su perímetro es de 48 cm.

Llamamos a los lados  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  y  $a_6$ .

Sabemos que  $a_6 = 13$  cm y que  $S_6 = 48$ . Por tanto:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \rightarrow 13 = a_1 + 5d \rightarrow a_1 = 13 - 5d \\ S_6 = \frac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} \rightarrow 48 = (13 - 5d + 13) \cdot 3 \rightarrow 48 = (26 - 5d) \cdot 3 \end{cases}$$

$$48 = 78 - 15d \rightarrow 15d = 30 \rightarrow d = \frac{30}{15} = 2 \rightarrow d = 2$$

$$a_1 = 13 - 5 \cdot 2 = 13 - 10 = 3 \rightarrow a_1 = 3$$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

- 29** En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?

$$a_7 = 16 \rightarrow a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \rightarrow d = 1,2$$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos  $n$  para que  $a_n = 28$  m:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 8,8 + (n - 1) \cdot 1,2 = 28 \rightarrow 8,8 + 1,2n - 1,2 = 28 \rightarrow 1,2n = 20,4 \rightarrow n = 17$$

La fila 17 está a 28 metros.

**30** La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20 % de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?

– Al cabo de 1 año valdrá  $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0,8 \text{ €}$

– Al cabo de 2 años valdrá  $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0,8^2 \text{ €}$

...

– Al cabo de 10 años valdrá  $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0,8^{10} \approx 429496,73 \text{ €}$

**31** El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6% con abono mensual de intereses. ¿Cuánto dinero tendremos un año después si no hemos sacado nada en ese tiempo?

\* Un 6% anual corresponde a  $\frac{6}{12} = 0,5\%$  mensual.

– Al cabo de 1 mes tendremos  $\rightarrow 5\,000 \cdot 1,005 \text{ €}$

– Al cabo de 2 meses tendremos  $\rightarrow 5\,000 \cdot 1,005^2 \text{ €}$

...

– Al cabo de 12 meses tendremos  $\rightarrow 5\,000 \cdot 1,005^{12} \approx 5\,308,39 \text{ €}$

**32** Utiliza las sumas de una progresión geométrica para obtener las fracciones generatrices de estos decimales periódicos:

a)  $2,\widehat{4}$

b)  $1,\widehat{72}$

c)  $0,\widehat{35}$

d)  $3,\widehat{75923}$

\* Ten en cuenta el ejercicio guiado 1.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2,444\dots &= 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots = 2 + 4 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) = \\ &= 2 + 4 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2 + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{22}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 1,727272\dots &= 1 + \frac{72}{100} + \frac{72}{10000} + \frac{72}{100000} + \dots = 1 + 72 \cdot \left( \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + \dots \right) = \\ &= 1 + 72 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + 72 \cdot \frac{1}{99} = \frac{19}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 0,35555\dots &= \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots = \frac{3}{10} + 5 \cdot \left( \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots \right) = \\ &= \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{1}{90} = \frac{16}{45} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 3,75923923923\dots &= 3 + \frac{75}{100} + \frac{923}{100000} + \frac{923}{10000000} + \dots = \\ &= \frac{375}{100} + 923 \cdot \left( \frac{1}{100000} + \frac{1}{10000000} + \dots \right) = \\ &= \frac{375}{100} + 923 \cdot \frac{\frac{1}{100000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{375}{100} + 923 \cdot \frac{1}{99900} = \frac{93887}{24975} \end{aligned}$$

**33** Calcula el límite de cada una de estas sucesiones:

a)  $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

b)  $b_n = \frac{5^n}{n^7}$

c)  $c_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+3}$

d)  $d_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

e)  $e_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n}}$

f)  $f_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+2}}$

g)  $g_n = \frac{(1+n)^3}{(n+2)^2}$

h)  $h_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

a)  $a_{1000} = 1 + \frac{1}{2^{1000}} \approx 1$

Vemos que el límite es 1 porque el segundo sumando tiende a 0.

b)  $b_{10} = \frac{5^{10}}{10^7} = \frac{125}{128}$ ;  $b_{100} = \frac{5^{100}}{100^7} = 7,8886 \times 10^{55}$ ;  $b_{150} = \frac{5^{150}}{150^7} = 4,1007 \times 10^{89}$

Como se puede ver la sucesión crece indefinidamente y el límite es  $+\infty$ .

c)  $c_{10} = 0,7864$ ;  $c_{100} = 0,9798$ ;  $c_{1000} = 0,9980$

$\lim c_n = 1$

d)  $d_{10} = 0,5025$ ;  $d_{100} = 0,500025$ ;  $d_{1000} = 0,50000025$

$\lim d_n = 0,5 = \frac{1}{2}$

e)  $e_{10} = 9,80$ ;  $e_{100} = 30,1$ ;  $e_{1000} = 94,90$

$\lim e_n = +\infty$

f)  $f_{10} = 1,756$ ;  $f_{100} = 1,973$ ;  $f_{1000} = 1,997$

$\lim f_n = 2$

g)  $g_{10} = 9,24$ ;  $g_{100} = 99,03$ ;  $g_{1000} = 999,003$

$\lim g_n = +\infty$

h)  $h_{10} = 0,760$ ;  $h_{100} = 0,909$ ;  $h_{1000} = 0,969$

$\lim h_n = 1$

**34** Calcula el término general y el límite de estas sucesiones:

a)  $\frac{3}{-2}, \frac{5}{-7}, \frac{7}{-12}, \frac{9}{-17}, \frac{11}{-22}, \dots$

b)  $\frac{7}{1}, \frac{4}{4}, \frac{1}{9}, \frac{-2}{16}, \frac{-5}{25}, \dots$

c)  $\frac{-99}{10}, \frac{-96}{20}, \frac{-91}{30}, \frac{-84}{40}, \frac{-75}{50}, \dots$

a) Tanto las sucesiones de los numeradores como las de los denominadores son progresiones aritméticas.

$$a_n = \frac{3 + (n-1) \cdot 2}{-2 + (n-1) \cdot (-5)} = \frac{2n+1}{-5n+3} \quad \lim a_n = -\frac{2}{5}$$

b) La sucesión de los numeradores es una progresión aritmética y la de los denominadores es la sucesión de los cuadrados de los números naturales.

$$b_n = \frac{7 + (n-1) \cdot (-3)}{n^2} = \frac{-3n+10}{n^2} \quad \lim b_n = 0$$

c) La sucesión de los numeradores se obtiene restando a 100 los cuadrados de los números naturales. Los denominadores son los múltiplos de 10.

$$c_n = \frac{100 - n^2}{10n} \quad \lim c_n = -\infty$$

**35** Sabiendo que  $S = 1 + a + a^2 + \dots + a^{10}$ , escribe en función de  $S$  la suma  $1 + a + a^2 + \dots + a^{21}$ .

Llamemos  $T$  a la suma que buscamos:  $T = 1 + a + a^2 + a^3 + a^{21}$

$$T = 1 + \dots + a^{10} + a^{11} + \dots + a^{21} = S + a^{11} + \dots + a^{21} = S + a^{11} (1 + \dots + a^{10}) = S + a^{11}S$$

**36** Halla el término general y estudia el límite de esta sucesión:

$$2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \dots$$

$$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$$

$$a_1 = 2; a_2 = \sqrt{2} \approx 1,4142; a_3 = \sqrt[3]{2} \approx 1,2599; a_4 = \sqrt[4]{2} \approx 1,1892; \dots; a_{10} \approx 1,0718$$

$$a_{100} \approx 1,00696; \lim a_n = 1$$

**37** Comprueba que la sucesión  $\sqrt{7}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[6]{7}, \dots$  es una progresión geométrica. Calcula el siguiente término.

Comprobaremos que es una progresión geométrica viendo que la división entre dos términos consecutivos es constante e igual a  $r$ :

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[6]{7^2}}{\sqrt[6]{7^3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{7}}$$

Calculamos el siguiente término:

$$a_4 = a_3 \frac{1}{\sqrt[6]{7}} = \frac{\sqrt[6]{7}}{\sqrt[6]{7}} = 1$$

**38** ¿Cuántos términos de la progresión aritmética  $1, 4, 7, \dots$  tienen menos de cinco cifras?

Tenemos la progresión aritmética  $1, 4, 7, \dots$  cuyo primer término es  $a_1 = 1$  y  $d = 3$ .

$$a_2 = 4 = a_1 + 1$$

$$a_3 = 7 = a_1 + 2d$$

Si escribimos su término general:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$$

Queremos saber hasta qué término tenemos 4 cifras, es decir:

$$a_n < 10\,000 \rightarrow 3n - 2 < 10\,000 \rightarrow 3n < 10\,002 \rightarrow n < 3\,334$$

Por lo tanto si cogemos  $n = 3\,333$  tenemos el término  $a_{3\,333} = 3 \cdot (3\,333) - 2 = 9\,997$

Así podemos encontrar 3 333 términos con menos de cinco cifras.

**39** La suma de los  $n$  primeros términos de una sucesión viene dada por  $S_n = n^2 + n + 5$ . Halla  $a_{15}$ .

$$\text{Si } n = 15 \rightarrow S_{15} = 15^2 + 15 + 5 = 225 + 20 = 245$$

$$\text{Si } n = 14 \rightarrow S_{14} = 14^2 + 14 + 5 = 215$$

También sabemos que:

$$S_{15} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15} = S_{14} + a_{15} \rightarrow a_{15} = S_{15} - S_{14} \rightarrow a_{15} = 245 - 215 = 30$$

**40 a) Demuestra que:**

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

**b) Calcula la suma de los cuadrados de los 50 primeros números pares.**

**c) Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares menores que 100.**

$$a) 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = (2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + (2 \cdot 4)^2 + (2 \cdot 5)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

$$b) 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2) = 2^2 \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$$

$$c) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2) = \\ = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650$$

**41 Halla la siguiente suma:**

$$11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \dots + 33^3$$

$$\text{Llamamos } S = 11^3 + 13^3 + \dots + 31^3 + 33^3.$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \dots + 32^3 + 33^3 = \frac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 314\,721$$

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 32^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \dots + 16^3) = 8 \cdot \frac{16^2 \cdot 17^2}{4} = 147\,968$$

Por tanto:

$$1^3 + 3^3 + \dots + 9^3 + 11^3 + 13^3 + \dots + 31^3 + 33^3 = 314\,721 - 147\,968 = 166\,753$$

$$S = 166\,753 - (1^3 + 3^3 + \dots + 9^3) = 166\,753 - 1\,225 = 165\,528$$

**Página 77**

### Cuestiones teóricas

**42** Sea  $a_n$  una progresión aritmética con  $d = \frac{1}{10}$ . ¿Cuál es su límite?

$$a_2 = a_1 + d = a_1 + \frac{1}{10}$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = a_1 + \frac{2}{10}$$

$$a_n = a_1 + \frac{n-1}{10}$$

Calculamos términos grandes para ver cuál es su límite:

$$a_{10} = a_1 + \frac{9}{10}$$

$$a_{100} = a_1 + \frac{99}{10} = a_1 + 9 + \frac{9}{10}$$

$$a_{1000} = a_1 + \frac{999}{10} = a_1 + 99 + \frac{9}{10}$$

Como vemos que buscando términos cada vez mayores hay una cantidad que no para de crecer (9, 99, 999, 9 999...), esta sucesión tiende a infinito.

**43** Si  $a_n$  es una progresión geométrica con  $r = \frac{1}{3}$ , ¿cuál es su límite?

Al ir multiplicando por  $\frac{1}{3}$  sucesivamente, los términos se van aproximando a cero.

Es decir,  $\lim a_n = 0$ .

**44** Si la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 5, ¿qué podemos decir del valor de  $r$ ?

Inventa un ejemplo con  $r$  positivo en el que se verifique esto. Inventa otro ejemplo con  $r$  negativo.

Podemos decir que  $|r| < 1$  porque se pueden sumar sus infinitos términos.

Con  $r > 0$  tenemos, por ejemplo:  $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \dots$  ya que  $S_{\infty} = \frac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5$ .

Con  $r < 0$  tenemos, por ejemplo:  $\frac{20}{3}, -\frac{20}{9}, \frac{20}{27}, -\frac{20}{81}, \dots$

En este caso  $S_{\infty} = \frac{\frac{20}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 5$

**45** La sucesión 3, 3, 3, 3, ... puede considerarse una progresión aritmética y también geométrica. ¿Cuál es la diferencia en el primer caso? ¿Y la razón en el segundo?

- Es una progresión aritmética con  $d = 0$ .
- También es una progresión geométrica con  $r = 1$ .

**46** En una progresión geométrica cualquiera,  $a, ar, ar^2, \dots$ , comprueba que:

$$a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$$

¿Se verifica también que  $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$ ? Enuncia una propiedad que exprese los resultados anteriores.

$$\left. \begin{aligned} a_1 \cdot a_6 &= a \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^5 \\ a_2 \cdot a_5 &= (a \cdot r) \cdot (a \cdot r^4) = a^2 \cdot r^5 \\ a_3 \cdot a_4 &= (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^3) = a^2 \cdot r^5 \end{aligned} \right\} \text{ Son iguales}$$

$$\left. \begin{aligned} a_3 \cdot a_7 &= (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^6) = a^2 \cdot r^8 \\ a_4 \cdot a_6 &= (a \cdot r^3) \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^8 \end{aligned} \right\} \text{ Son iguales}$$

### Para profundizar

**47** Calcula el límite de cada una de estas sucesiones:

a)  $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

b)  $\frac{1^2}{1^3}, \frac{1^2 + 2^2}{1^3 + 2^3}, \frac{1^2 + 2^2 + 3^2}{1^3 + 2^3 + 3^3}, \dots$

c)  $\frac{1 \cdot 1^2}{1^3}, \frac{2 \cdot (1^2 + 2^2)}{1^3 + 2^3}, \frac{3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2)}{1^3 + 2^3 + 3^3}, \dots$

d)  $\frac{1 \cdot 2^2}{1^3}, \frac{2 \cdot (2^2 + 4^2)}{1^3 + 2^3}, \frac{3 \cdot (2^2 + 4^2 + 6^2)}{1^3 + 2^3 + 3^3}, \dots$

a)  $a_n = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \left( \frac{(1+n) \cdot n}{2} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{n+n^2}{2} \right) = \frac{n^2 + n}{2n^2}$

Hallamos el límite:  $a_{10} = 0,55$ ;  $a_{100} = 0,505$ ;  $a_{1000} = 0,5005$ ;  $\lim a_n = 0,5 = \frac{1}{2}$

b) Usamos los resultados de la página 65 de esta unidad para el numerador y el denominador.

$$b_n = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} = \frac{4n+2}{3n^2+3n}; \lim \frac{4n+2}{3n^2+3n} = 0$$

c) Cada término de esta sucesión es igual al correspondiente de la anterior multiplicado por el lugar que ocupa. Es decir:

$$c_n = n \cdot b_n = \frac{4n^2+2n}{3n^2+3n}; \lim \frac{4n^2+2n}{3n^2+3n} = \frac{4}{3}$$

d) Observamos que:

$$2^2 = 2^2 \cdot 1^2$$

$$2^2 + 4^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2)$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2)$$

Este resultado es el cuádruple de la sucesión del numerador del apartado b), por tanto, el término general de este numerador es  $n \cdot 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

El denominador es igual al denominador de la sucesión del apartado b).

$$d_n = \frac{n \cdot 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} = \frac{16n^2(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{16n+8}{3n+3}; \lim \frac{16n+8}{3n+3} = \frac{16}{3}$$

**48 Al sumar los números naturales desde el 1 hasta  $n$  ha habido un error y se ha sumado dos veces uno de ellos. Si se ha obtenido 857, determina  $n$  y el número repetido.**

Buscamos un número natural,  $k$ , tal que  $S_n + k = \frac{n(n+1)}{2} + k = 857$  que tiene que cumplir  $k \leq n$ .

Damos valores a  $n$ :

$n = 10 \rightarrow S_{10} = 55$  y, por tanto, como  $857 - 55 = 802$ , no hay ningún número  $k \leq 10$  tal que  $55 + k = 857$ .

Procedemos del mismo modo hasta que  $857 - S_n$  sea menor o igual que  $n$ :

$n = 20 \rightarrow S_{20} = 210$ , como  $857 - 210 = 647 > 20$ , seguimos.

$n = 30 \rightarrow S_{30} = 465$ , como  $857 - 465 = 392 > 30$ , seguimos.

$n = 40 \rightarrow S_{40} = 820$ , como  $857 - 820 = 37 < 40$ , hemos llegado a una solución:  $n = 40$  y el número repetido es 37.

Veamos que no hay más soluciones. Para ello estudiaremos qué ocurre cuando  $n = 39$  y cuando  $n = 41$ .

$n = 39 \rightarrow S_{39} = 780$ , como  $857 - 780 = 77 > 39$ , este valor de  $n$  no es solución.

$n = 41 \rightarrow S_{41} = 861$ , en este caso ya hemos superado el valor 857 y, por tanto, este valor de  $n$  tampoco es solución.

**49 En la sucesión 4, 7, 1, 8, ... para  $n > 2$ , el término  $a_n$  es el dígito de las unidades de la suma de los dos anteriores. ¿Cuál es el menor  $n$  para el que  $S_n > 10\,000$ ?**

Tenemos la sucesión 4, 7, 1, 8, 9, ... de la que, a simple vista, no podemos deducir un término general pero si escribimos más términos, observamos que empiezan a repetirse secuencialmente:

4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 4, 7, 1, ...

Los términos se repiten a partir del duodécimo.

Observamos que  $S_{12} = 60$ , por lo que cada 12 términos de la sucesión sumaremos 60.<sup>(\*)</sup>

Veamos cuántas veces podemos hacer esta suma sin pasar de 10 000. Tenemos:

$$\frac{10\,000}{60} = 166,6\widehat{6}; \quad 60 \cdot 166 = 9\,960; \quad 166 \cdot 12 = 1\,992$$

Por la igualdad (\*),  $S_{1992} = 9960 < 10000$ . Sumamos de 1 en 1 los términos que faltan para acercarnos a 10000:

$$S_{1993} = 9960 + 4 = 9964$$

$$S_{1994} = 9964 + 7 = 9971$$

$$S_{1995} = 9971 + 1 = 9972$$

$$S_{1996} = 9972 + 8 = 9980$$

$$S_{1997} = 9980 + 9 = 9989$$

$$S_{1998} = 9989 + 7 = 9996$$

$$S_{1999} = 9996 + 6 = 10002$$

Por lo tanto el término 1999 es el primero que cumple la condición dada.

**50** ¿Qué número ocupa el lugar 2007 en la sucesión 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, ...?

$$a_n = 1, \text{ si } n \leq 1$$

$$a_n = 2, \text{ si } n \leq 3. \text{ Sabemos que } 3 = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}.$$

$$a_n = 3, \text{ si } n \leq 6. \text{ Sabemos que } 6 = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2}.$$

$$a_n = 4, \text{ si } n \leq 10. \text{ Sabemos que } 10 = 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}.$$

...

$$\text{En general: } a_n = k, \text{ si } k \text{ es el menor número natural que cumple } n \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

$$\text{Buscamos, por tanto, el menor natural, } k', \text{ que cumpla: } 2007 \leq \frac{k'(k'+1)}{2}. \text{ De esta forma, } a_{2007} = k'.$$

Solucionamos la siguiente ecuación:

$$\frac{k(k+1)}{2} = 2007 \rightarrow k^2 + k = 4014 \rightarrow k_1 = 62,8; k_2 = -63,8 \text{ (descartamos la solución negativa)}.$$

Por tanto,  $\frac{62(62+1)}{2} < 2007$ , y el primer natural que cumple la condición deseada será:

$$k' = 62 + 1 = 63 \text{ y } a_{2007} = 63.$$

## AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 2.5. (EA 2.5.1.)

Página 77

- 1 Determina los términos  $a_1$ ,  $a_{97}$  y  $a_{500}$  de la sucesión cuyo término general es:  $a_n = \frac{n^2 - 709}{n + 3}$

¿Cuál es su límite?

$$a_1 = \frac{1^2 - 709}{1 + 3} = -177; \quad a_{97} = \frac{97^2 - 709}{97 + 3} = 87; \quad a_{500} = \frac{500^2 - 709}{500 + 3} = \frac{249291}{503} = 495,61$$

Observamos que los términos independientes se hacen insignificantes comparados con los otros términos, luego:

$$\lim a_n = \lim \frac{n^2}{n} = \lim n = +\infty$$

- 2 Escribe los diez primeros términos de la sucesión definida así:  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 7$ ,  $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$

$$a_1 = 4; \quad a_2 = 7; \quad a_3 = 2 \cdot 4 - 7 = 1; \quad a_4 = 2 \cdot 7 - 1 = 13; \quad a_5 = 2 \cdot 1 - 13 = -11;$$

$$a_6 = 2 \cdot 13 - (-11) = 37; \quad a_7 = 2 \cdot (-11) - 37 = -59; \quad a_8 = 2 \cdot 37 - (-59) = 133;$$

$$a_9 = 2 \cdot (-59) - 133 = -251; \quad a_{10} = 2 \cdot 133 - (-251) = 517$$

- 3  **Cabezas pensantes.** [Una vez que el alumnado haya leído el enunciado, compartirá las propuestas que tiene para encontrar los términos generales tal y como se explica en esta técnica].

Halla el término general de las siguientes sucesiones. Indica cuáles de ellas son progresiones aritméticas y cuáles progresiones geométricas:

a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, ...

b) 1, 2, 5, 10, 17, 26, ...

c) 1 024, 512, 256, 128, ...

d) 3, -9, 27, -81, 243, ...

e)  $\frac{8}{13}$ ,  $\frac{19}{52}$ ,  $\frac{3}{26}$ ,  $-\frac{7}{52}$ , ...

f) 4, 3, 5, 2, 6, 1, 7, 0, ...

g) 24, 18,  $\frac{27}{2}$ ,  $\frac{81}{8}$ ,  $\frac{243}{32}$ , ...

h) 0, 2, 6, 12, 20, 30, ...

a) Es una progresión aritmética de diferencia  $d = 4$ .

$$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$$

b) No es una progresión. Los términos son una unidad mayor que los cuadrados perfectos, empezando por el cuadrado de 0.

$$b_n = (n - 1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$$

c) Es una progresión geométrica de razón  $r = \frac{1}{2}$ .

$$c_n = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{10} \cdot 2^{1-n} = 2^{11-n}$$

d) Es una progresión geométrica de razón  $r = -3$ .

$$d_n = 3 \cdot (-3)^{n-1}$$

e)  $\frac{8}{13} = \frac{32}{52}$ ,  $\frac{19}{52}$ ,  $\frac{3}{26} = \frac{6}{52}$ ,  $-\frac{7}{52}$ , ...

Así vemos que es una progresión aritmética de diferencia  $d = -\frac{13}{52}$ .

$$e_n = \frac{8}{13} + (n - 1) \cdot \left(-\frac{13}{52}\right) = \frac{(45 - 13n)}{52}$$

f) No es una progresión. Los términos impares forman una progresión aritmética de diferencia  $d = 1$ . Los términos pares forman una progresión aritmética de diferencia  $d = -1$ .

$$f_n = \begin{cases} 3 + \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 4 - \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

g) Es una progresión geométrica de razón  $r = \frac{3}{4}$ .

$$g_n = 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

h) No es una progresión. Observamos la siguiente relación:

$$0 = 1 \cdot 0$$

$$2 = 2 \cdot 1$$

$$6 = 3 \cdot 2$$

$$12 = 4 \cdot 3$$

$$20 = 5 \cdot 4$$

...

$$\text{Luego } h_n = n(n-1) = n^2 - n$$

#### 4 Halla la ley de recurrencia por la que se forman las siguientes sucesiones:

a) 7, 8, 15, 23, 38, 61, ...

b) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, ...

c) 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, ...

d) 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, ...

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$$a_1 = 7 \quad a_2 = 8 \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 1 \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = 2 \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

d)  $a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$

#### 5 Halla las siguientes sumas:

a)  $3 + 7 + 11 + \dots + 43$

b)  $1\,000 + 1\,000 \cdot 1,1 + 1\,000 \cdot 1,1^2 + \dots + 1\,000 \cdot 1,1^{15}$

c)  $80 + 40 + 20 + 10 + 5 + \dots$

d)  $101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2$

e)  $3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3$

a) Es la suma de los once primeros términos de una progresión aritmética de primer término  $a_1 = 3$  y diferencia  $d = 4$ .

$$a_n = 4n - 1 \quad a_1 = 3 \quad a_{11} = 43$$

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 43}{2} \cdot 11 = 253$$

b) Es la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica de primer término  $a_1 = 1\,000$  y razón  $r = 1,1$ .

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \rightarrow S_{15} = \frac{1000 \cdot 1,1^{15} - 1000}{1,1 - 1} = 31\,772,48$$

c) Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término  $a_1 = 80$  y razón  $r = 1/2$ .

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{80}{1 - 1/2} = 160$$

$$d) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 140^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2) =$$

$$= \frac{140 \cdot 141 \cdot 281}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = \frac{5546960 - 2030100}{6} = 586140$$

$$e) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 15^3) - (1^3 + 2^3) = \frac{15^2 \cdot 16^2}{4} - 9 = 14391$$

**6 En una progresión aritmética,  $a_{15} = 43$  y  $a_{86} = 85,6$ .**

a) Calcula  $S_{100}$ .

b) Obtén el valor de  $a_{220}$ .

$$\left. \begin{aligned} a_{15} &= a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} &= a_1 + 85d = 85,6 \end{aligned} \right\} \rightarrow 85d - 14d = 42,6 \rightarrow d = 0,6$$

$$a_1 = 43 - 14 \cdot 0,6 = 34,6$$

$$a) a_{100} = 34,6 + 99 \cdot 0,6 = 94$$

$$S_{100} = \frac{(34,6 + 94) \cdot 100}{2} = 6430$$

$$b) a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34,6 + 219 \cdot 0,6 = 166$$

**7 Dados estos dos términos de una sucesión,  $a_1 = 2$  y  $a_3 = 7$ , halla cuatro términos más y el término general suponiendo que se trata de una progresión:**

a) aritmética

b) geométrica

a) Si es una progresión aritmética, entonces:

$$a_3 = a_1 + 2d \rightarrow 7 = 2 + 2d \rightarrow d = 2,5$$

$$\text{Término general: } a_n = 2 + 2,5(n-1)$$

$$\text{Términos de esta progresión son: } a_1 = 2; a_2 = 4,5; a_3 = 7; a_4 = 9,5; a_5 = 12; a_6 = 14,5; \dots$$

b) Si es una progresión geométrica, entonces:

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 7 \rightarrow 7 = 2 \cdot r^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$\text{Término general: } a_n = 2 \left( \sqrt{\frac{7}{2}} \right)^{n-1}$$

$$\text{Términos de esta progresión son: } a_1 = 2; a_2 = 2\sqrt{\frac{7}{2}}; a_3 = 7; a_4 = 7\sqrt{\frac{7}{2}}; a_5 = \frac{49}{2}; a_6 = \frac{49\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

**8 Halla los límites de las siguientes sucesiones:**

a)  $a_n = \frac{5}{n}$

b)  $b_n = \frac{5+3n}{n+1}$

c)  $c_n = \frac{n^2+1}{5n}$

d)  $d_n = (-5)^n + n^2$

e)  $e_n = \frac{5n-2}{3-2n}$

f)  $f_n = (-3)^n$

g)  $g_n = \frac{3}{n} + \frac{n}{3}$

h)  $h_n = \frac{4000n^2}{-n^3}$

i)  $i_n = \frac{(-1)^n+1}{2n}$

a)  $a_{10} = 0,5$                        $a_{100} = 0,05$                        $a_{1000} = 0,005 \rightarrow \lim \frac{5}{n} = 0$

b)  $b_{10} = 3,18$                        $b_{100} = 3,02$                        $b_{1000} = 3,002 \rightarrow \lim \frac{5+3n}{n+1} = 3$

c)  $c_{10} = 2,02$                        $c_{100} = 20,002$                        $c_{1000} = 200,0002 \rightarrow \lim \frac{n^2+1}{5n} = +\infty$

d)  $d_{100} = (-5)^{100} + 100^2 = 7,8886 \cdot 10^{69}$   
 $d_{101} = (-5)^{101} + 101^2 = -3,9443 \cdot 10^{70}$

En esta sucesión la potencia de  $n$  apenas influye en el valor de los términos. Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a  $+\infty$  y los impares tienden a  $-\infty$ . Por tanto, no tiene límite.

e)  $e_{100} = \frac{5 \cdot 100 - 2}{3 - 2 \cdot 100} = -\frac{498}{197} = -2,5279$   
 $e_{1000} = \frac{5 \cdot 1000 - 2}{3 - 2 \cdot 1000} = -\frac{4998}{1997} = -2,5028$

En esta sucesión los términos independientes tienen una influencia insignificante.

$$\lim \frac{5n-2}{3-2n} = \lim \frac{5n}{-2n} = -\frac{5}{2}$$

f)  $f_{50} = (-3)^{50} = 7,1790 \cdot 10^{23}$   
 $f_{51} = (-3)^{51} = -2,1537 \cdot 10^{24}$

Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a  $+\infty$  y los impares, a  $-\infty$ . Por tanto, no tiene límite.

g)  $g_{100} = \frac{3}{100} + \frac{100}{3} = 33,363$   
 $g_{1000} = \frac{3}{1000} + \frac{1000}{3} = 333,34$

En esta sucesión la primera fracción se hace cada vez más próxima a cero, ejerciendo una influencia insignificante en el resultado.

La segunda fracción se hace muy grande cuando  $n$  crece indefinidamente.

Por tanto,  $\lim g_n = \lim \frac{n}{3} = +\infty$ .

h)  $\lim \frac{4000n^2}{-n^3} = \lim \frac{4000}{-n} = 0$  porque el numerador es constante y el denominador, en valor absoluto, se hace muy grande.

i)  $i_{1000} = \frac{(-1)^{1000} + 1}{2 \cdot 1000} = \frac{1}{1000} = 0,001$   
 $i_{1001} = \frac{(-1)^{1001} + 1}{2 \cdot 1001} = 0$

Los términos impares siempre valen 0 y los pares tienden a 0 porque el numerador es constantemente 2 y el denominador se hace muy grande.

Por tanto,  $\lim i_n = 0$ .