Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Razones trigonométricas de ángulos complementarios
(página 85)

En el archivo de GeoGebra se pueden comprobar las relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios a partir de la semejanza entre los triángulos rectángulos que determinan.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital las relaciones entre las razones de estos ángulos o para que los alumnos puedan deducir estas relaciones por sí mismos.

Razones trigonométricas de ángulos que difieren 180° o π rad (página 86)

En el archivo de GeoGebra se pueden comprobar las relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos que difieren 180° a partir de la semejanza entre los triángulos rectángulos que determinan en la circunferencia goniométrica.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital las relaciones entre las razones de estos ángulos o para que los alumnos puedan deducir estas relaciones por sí mismos.

Ejercicio resuelto (página 88)

En el vídeo se muestra la resolución, paso a paso, de un ejercicio resuelto en el que se ha realizado una doble observación de una altura inaccesible.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para resolver un ejercicio de este tipo o para que los alumnos puedan repasarlo más tarde.

Cálculo de las razones trigonométricas (página 90)

En el vídeo se muestra paso a paso cómo resolver el ejercicio para calcular todas las razones trigonométricas de un ángulo, a partir de una que ya es conocida, sabiendo en qué cuadrante se encuentra.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital cómo debe resolverse este tipo de ejercicio o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento más tarde.

Actividades (páginas 72/88)

1 **Expresa en grados, minutos y segundos sexagesimales un ángulo de 34,2577°.**

34° 15′ 28″

2 **Expresa en grados sexagesimales un ángulo de 23° 57′ 33″.**

Aproximadamente 23,96°

3 **Calcula en grados, minutos y segundos sexagesimales el valor de un ángulo de 1 rad.**

$$1 \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 57^\circ\, 17'\, 45''$$

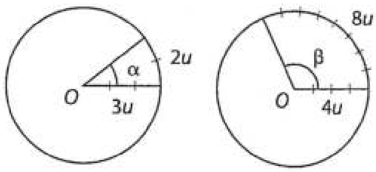
4 **Expresa $\frac{5\pi}{3}$ rad en grados, minutos y segundos sexagesimales.**

$$\frac{5\pi}{3} \text{ rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 300^\circ$$

5 **Expresa 63° 25′ 48″ en radianes.**

$$63^\circ\, 25'\, 48'' \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = 1{,}11 \text{ rad}$$

6 **Calcula la medida en radianes de los ángulos representados en la figura 3.6.**



$\alpha = \frac{2}{3}$ rad, $\beta = 2$ rad

7 **Halla los ángulos comprendidos entre 0° y 360° equivalentes a:**

a) 3 724°

b) 23,5π rad

c) $\frac{64\pi}{7}$ rad

d) 123 rad

a) 3 724° = 360° · 10 + 124°, el ángulo equivalente a 3 724° en el primer giro es 124°.

b) 23,5π rad = 2π rad · 11 + 3π/2 rad, el ángulo equivalente a 23,5π rad en el primer giro es 3π/2 rad.

c) 64π/7 rad = 2π rad · 4 + 8π/7 rad, el ángulo equivalente a 64π/7 rad en el primer giro es 8π/7 rad.

d) 123 rad = 2π rad · 19 + 3,62 rad, el ángulo equivalente a 123π rad en el primer giro es 3,62 rad.

8 **Los lados de un triángulo miden 12 cm, 9 cm y 6 cm. Calcula la longitud de los lados de un triángulo semejante a él si la razón de semejanza vale 2/3.**

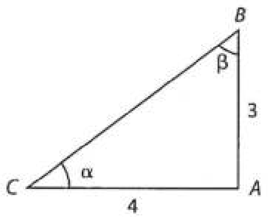
Basta con multiplicar por 2/3 las longitudes del triángulo inicial, con lo que se obtienen unas nuevas medidas de los lados: 8 cm, 6 cm y 4 cm, respectivamente.

9 **¿El triángulo cuyos lados miden 4 cm, 8 cm y 10 cm es semejante al triángulo cuyos lados miden 5 cm, 10 cm y 12,5 cm? ¿Por qué?**

Son semejantes:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{10}{12{,}5}$$

10 **Dado el triángulo *ABC* de la figura 3.10, cuyas medidas están expresadas en cm, calcula las razones trigonométricas de α.**



$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

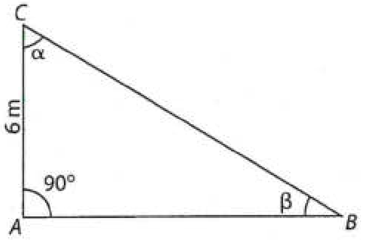
- $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$
- $\cos \alpha = \frac{4}{5}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$

11 **Deduce las razones trigonométricas del ángulo β del triángulo de la figura 3.10.**

Las razones trigonométricas de β son:

- $\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{5}$
- $\cos \beta = \frac{3}{5}$
- $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$

12 **Dado el triángulo ABC de la figura, sabemos que $AC = 6$ m y $\operatorname{tg} \beta = 0{,}6$. Calcula el otro cateto y la hipotenusa.**



$\operatorname{tg} \beta = \dfrac{6}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{6}{0{,}6} = 10$ m

$CB = \sqrt{10^2 + 6^2} \Rightarrow CB = 11{,}66$ m

13 **Con los resultados del ejercicio anterior, calcula sen α.**

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{10}{11{,}66} = 0{,}86$

14 **Calcula las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, si $\cos \alpha = 0{,}35$.**

- $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0{,}35^2} = 0{,}94$
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{0{,}94}{0{,}35} = 2{,}68$
- $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{0{,}35} = 2{,}86$
- $\operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{1}{0{,}94} = 1{,}07$
- $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{0{,}35}{0{,}94} = 0{,}37$

15 **Calcula las razones trigonométricas de un ángulo agudo α, si $\operatorname{cotg} \alpha = 3$.**

$\operatorname{cotg} \alpha = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1/3$

$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \dfrac{1}{9} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

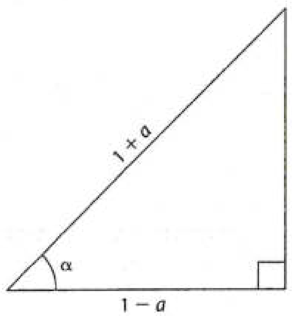
Y entonces, $\sec \alpha = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ y $\operatorname{cosec} \alpha = \sqrt{10}$

16 **Demuestra que: $1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$**

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

17 **Dado el triángulo de la figura 3.16, calcula sen α, cos α, tg α.**



$c = \sqrt{(1 + a)^2 - (1 - a)^2} = \sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$

- $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2\sqrt{a}}{1 + a}$
- $\cos \alpha = \dfrac{1 - a}{1 + a}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2\sqrt{a}}{1 - a}$

18 **Una estaca vertical de longitud l proyecta una sombra de longitud $\sqrt{3}l$. Calcula el ángulo de elevación del Sol sobre el horizonte.**

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{l}{\sqrt{3}l} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30°$

19 **Calcula la longitud de las diagonales de un rombo sabiendo que sus ángulos son 60° y 120°, y que sus lados miden 6 cm.**

La diagonal menor mide 6 cm, igual que los lados, puesto que el ángulo menor es de 60°.

La diagonal mayor se puede calcula a partir de uno de los cuatro triángulos rectángulos que determinan las dos diagonales en el rombo:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\dfrac{D}{2}}{6} \Rightarrow D = 6\sqrt{3} \text{ cm}$$

20 **Determina los valores del seno y el coseno de los siguientes ángulos: 540° y 1 350°.**

540° = 360° + 180°, por lo que sen 540° = sen 180° = 0 y cos 540° = cos 180° = −1

1 350° = 3 · 360° + 270°, por lo que sen 1 350° = sen 270° = = −1 y cos 1 350° = cos 270° = 0

21 **Calcula las razones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante si $\operatorname{sen} \alpha = 3/7$.**

El ángulo pertenece al segundo cuadrante, por lo que el seno es positivo, el coseno, negativo y la tangente, negativa.

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - (3/7)^2} = -\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{-3}{2\sqrt{10}} = -\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$

22 **Si $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ y $\operatorname{cotg} \alpha = -0{,}27$, calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α.**

El ángulo pertenece al cuarto cuadrante, por lo que el seno es negativo, el coseno, positivo y la tangente, negativa.

$\operatorname{cotg} \alpha = -0{,}27 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -3{,}7$

$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{-0{,}27}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = 0{,}26$

$\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = -0{,}97$

23 **Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha < 0$ y que $\cos \alpha = -\sqrt{3}/4$, calcula las restantes razones trigonométricas.**

El ángulo pertenece al segundo cuadrante:

$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{39}}{3}$$

24 **Calcula todos los ángulos entre 0° y 360° que cumplen $\operatorname{cotg} \alpha = -0{,}03$.**

$\operatorname{cotg} \alpha = -0{,}03 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -3{,}7 \Rightarrow \alpha = -88{,}272° = 271{,}72°$ y $\alpha = 91{,}72°$

25 **Resuelve $\sec \alpha = -3{,}78$.**

$\sec \alpha = -3{,}78 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -0{,}265$, por tanto:

$\alpha = 105{,}34°$ y $\alpha = 254{,}66°$

26 **Resuelve $\cos \alpha = 0{,}32$.**

$\cos \alpha = 0{,}32$, por tanto:

$\alpha = 71{,}34°$ y $\alpha = 288{,}66°$

27 **Resuelve $\operatorname{cosec}\alpha = -5$.**

$\operatorname{cosec}\alpha = -5 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -0{,}2 \Rightarrow \alpha = -11{,}54° = 348{,}46°$ y $\alpha = 191{,}54°$

28 **Utiliza la calculadora para resolver las actividades 22 y 23 del epígrafe anterior.**

Utilizando la calculadora, se obtienen los mismos resultados.

29 **Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.**

a) **120°** ***c)*** **210°** ***e)*** **300°**

b) **135°** ***d)*** **225°** ***f)*** **−45°**

a) $\operatorname{sen} 120° = \sqrt{3}/2$; $\cos 120° = -1/2$; $\operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$

b) $\operatorname{sen} 135° = \sqrt{2}/2$; $\cos 135° = -\sqrt{2}/2$; $\operatorname{tg} 135° = -1$

c) $\operatorname{sen} 210° = -1/2$; $\cos 210° = -\sqrt{3}/2$; $\operatorname{tg} 210° = \sqrt{3}/3$

d) $\operatorname{sen} 225° = -\sqrt{2}/2$; $\cos 225° = -\sqrt{2}/2$; $\operatorname{tg} 225° = 1$

e) $\operatorname{sen} 300° = -\sqrt{3}/2$; $\cos 300° = 1/2$; $\operatorname{tg} 300° = -\sqrt{3}$

f) $\operatorname{sen}(-45°) = -\sqrt{2}/2$; $\cos(-45°) = \sqrt{2}/2$; $\operatorname{tg}(-45°) = -1$

30 **Dado el triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es *A*, calcula los elementos desconocidos en cada uno de los siguientes casos:**

a) $b = 10$ cm, $a = 15$ cm ***c)*** $b = 7$ cm, $c = 14$ cm ***e)*** $B = 27°$, $C = 63°$

b) $C = 26°$, $c = 3$ cm ***d)*** $B = 38°$, $a = 20$ cm

a) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 11{,}18$ cm, $\operatorname{sen} B = \dfrac{10}{15} \Rightarrow B = 41{,}81°$ y $C = 48{,}19°$

b) $B = 90° - 26° = 64°$, $a = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} = 6{,}84$ cm y $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 6{,}15$ cm

c) $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 15{,}65$ cm, $\operatorname{sen} B = \dfrac{7}{a} \Rightarrow B = 26{,}57°$ y $C = 63{,}43°$

d) $C = 90° - B = 52°$, $b = a \cdot \operatorname{sen} B = 12{,}31$ cm y $c = a \cdot \operatorname{sen} C = 15{,}76$ cm

e) Existen infinitos triángulos semejantes con estos dos ángulos dados.

31 **Calcula la altura a la que llega una escalera de 4,50 m apoyada en una pared y que forma un ángulo de 67° con el suelo.**

Si llamamos *h* a la altura:

$h = 4{,}50 \cdot \operatorname{sen} 67° = 4{,}14$ m

32 **Calcula las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo en el que la longitud de la hipotenusa es el triple que la de uno de los catetos.**

En primer lugar calculamos el otro cateto:

$$c = \sqrt{(3x)^2 - x^2} = 2x\sqrt{2}$$

Las razones son las siguientes:

- $\operatorname{sen} B = \dfrac{x}{3x} = \dfrac{1}{3}$
- $\cos B = \dfrac{2x\sqrt{2}}{3x} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\operatorname{tg} B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$
- $\operatorname{sen} C = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
- $\cos C = \dfrac{1}{3}$
- $\operatorname{tg} C = 2\sqrt{2}$

Ejercicios y problemas (páginas 92/96)

Ángulos

1 **Dada una circunferencia de 3 m de radio, calcula la longitud de una cuerda correspondiente a un ángulo central de 38,5°.**

La longitud de la cuerda que nos piden es la longitud del lado desigual de un triángulo isósceles, siendo el ángulo desigual de 38,5°. Por tanto, la mitad de la cuerda medirá:

$x = 3 \cdot \operatorname{sen} 19{,}25° = 0{,}99$ m

Y la cuerda medirá el doble:

Longitud de la cuerda $= 2x = 1{,}98$ m

2 **En una trayectoria circular de 7 m de radio, un móvil se desplaza a 3 m/s. Calcula el ángulo central recorrido en 4 s y escribe el resultado en grados sexagesimales y en radianes.**

En cuatro segundos recorrerá 12 m. Si el radio mide 7 m, el ángulo recorrido en radianes será:

$$\alpha = \frac{12}{7} = 1{,}71 \text{ rad}$$

En grados sexagesimales:

$$\alpha = \frac{12}{7} \text{ rad} \cdot \left(\frac{180°}{\pi \text{ rad}}\right) = 98{,}22°$$

3 **Expresa los siguientes ángulos en radianes.**

a) **320°** ***c)*** **125°**

b) **1 273°** ***d)*** **−765°**

a) $320° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = 5{,}59$ rad

b) $1\,273° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = 22{,}22$ rad

c) $125° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = 2{,}18$ rad

d) $-765° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = -13{,}35$ rad

4 **Expresa como un ángulo entre 0° y 360°:**

a) **1 230°** ***c)*** **9,63 rad**

b) **−730°** ***d)*** $\dfrac{14\pi}{3}$ **rad**

a) 150° ***c)*** 3,35 rad

b) 350° ***d)*** $\dfrac{2\pi}{3}$ rad

5 **¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 9 y 20? ¿Y a las 9 y 15? ¿Y a las 6 y media?**

- A las 9 h 20 min, la manecilla horaria ha recorrido 10° en 20 min, por lo que el ángulo que forman las dos manecillas será de 200°.
- A las 9 h y 15 min, la manecilla horaria ha recorrido 30°/4 en 20 min, por lo que el ángulo que forman las dos manecillas será de 172,5°.
- A las 6 h, las manecillas forman un ángulo de 180° y cuando pasa media hora, la manecilla horaria ha recorrido 15°, por lo que ambas formarán 345°.

6 **En una circunferencia de radio 10 cm, un arco mide 20 cm. Averigua el valor del ángulo central correspondiente y qué longitud tiene la cuerda que determina.**

$$\alpha = \frac{20}{2\pi \cdot 10} \cdot 360° = 114°\,35'29{,}6''$$

$$c = 2 \cdot 10 \cdot \operatorname{sen}\frac{114°\,35'29{,}6''}{2} = 16{,}83 \text{ cm}$$

Razones trigonométricas

7 **Resuelve un triángulo rectángulo, sabiendo que la tangente de uno de sus ángulos agudos es 3,5 y que el cateto opuesto a este ángulo mide 2 cm.**

Dado que el triángulo es rectángulo, un ángulo, A, vale 90°.

$\text{tg } B = 3{,}5$

$B = 74{,}05°$

Entonces, $C = 15{,}95°$.

Como sabes $\text{tg } B = \frac{b}{c}$, por lo que:

$$c = \frac{b}{\text{tg } B} \Rightarrow c = \frac{2}{3{,}5} = 0{,}57 \text{ cm}$$

por el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2{,}08 \text{ cm}$$

8 **¿Es posible que exista un ángulo, α, que verifique simultáneamente $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ y $\cos \alpha = \frac{2}{5}$? ¿Por qué?**

No es posible.

Se ha de cumplir que: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ para cualquier ángulo.

Si sustituimos por los valores que nos da el enunciado obtenemos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{13}{25} \neq 1$$

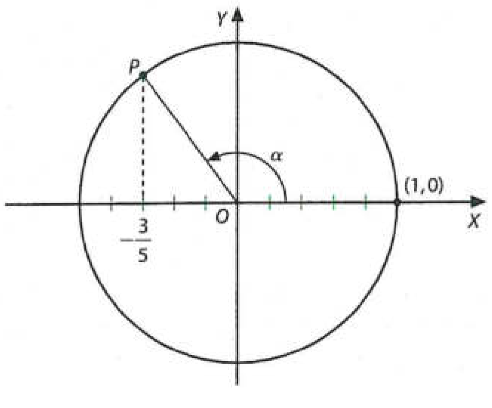
9 **Si $\text{cotg } \alpha = \text{cotg } \beta$, ¿podemos asegurar que α y β son iguales? Razona tu respuesta.**

No puede asegurarse que α y β sean iguales.

Las cotangentes de ángulos que difieren 180° también son iguales.

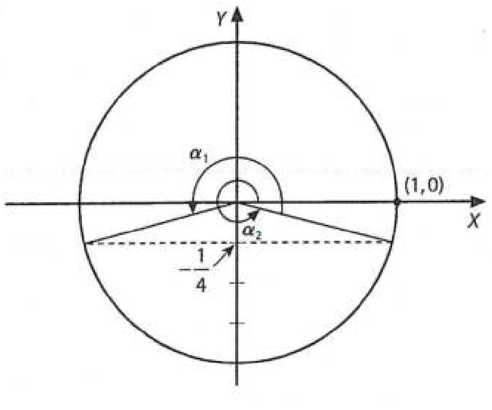
10 **Dibuja un ángulo del segundo cuadrante cuyo coseno vale −3/5, utilizando una circunferencia de radio unidad.**

La representación del ángulo α es la siguiente:

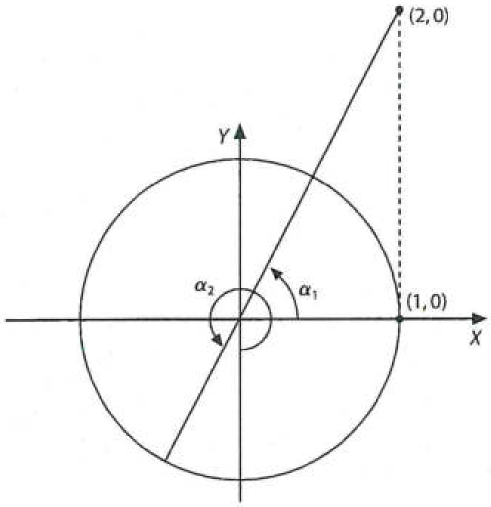


11 **Dibuja los ángulos cuyo seno vale −1/4 utilizando una circunferencia de radio unidad.**

La representación de los ángulos α_1 y α_2 es la siguiente:



12 **Utiliza una circunferencia de radio unidad para dibujar los ángulos cuya tangente es 2.**



13 **Si $\cos \alpha = -1{,}11$, indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta y razona tu respuesta.**

a) **α es un ángulo negativo.**

b) **α está en el tercer cuadrante.**

c) **α es un ángulo mayor que 2π.**

d) **Es imposible que el coseno de un ángulo sea −1,11.**

$|\cos \alpha| \leq 1$ para cualquier ángulo; por tanto, la respuesta correcta es la *d)*.

14 **Señala en qué cuadrante está el ángulo α si:**

a) **$\text{sen } \alpha > 0$ y $\cos \alpha < 0$**

b) **$\text{sen } \alpha < 0$ y $\text{tg } \alpha > 0$**

c) **$\sec \alpha < 0$ y $\text{cosec } \alpha < 0$**

d) **$\text{cotg } \alpha < 0$ y $\cos \alpha > 0$**

a) Seno positivo y coseno negativo: segundo cuadrante.

b) Seno negativo y tangente positiva: tercer cuadrante.

c) Secante y cosecante negativas: tercer cuadrante.

d) Cotangente negativa y coseno positivo: cuarto cuadrante.

15 **Sean α y β dos ángulos cualesquiera teniendo en cuenta que:**

$$\text{tg } \alpha > \text{tg } \beta;\ 270° < \alpha < 360°;\ 270° < \beta < 360°$$

indica si las siguientes afirmaciones son ciertas o no.

a) **$\alpha < \beta$**

b) **$\text{sen } \alpha < \text{sen } \beta$**

c) **$\beta < \alpha$**

d) **$\text{sen } \beta < \text{sen } \alpha$**

Los dos ángulos pertenecen al cuarto cuadrante. Sus tangentes son negativas. Es más negativa la tangente del ángulo menor, por tanto es correcta la afirmación *c)*. Además la afirmación *d)* también es correcta, porque con el seno ocurre lo mismo en el cuarto cuadrante.

16 **Si $\text{tg } \alpha = -4$ y $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcula las demás razones trigonométricas.**

α pertenece al segundo cuadrante. Con el dato del enunciado y la ecuación fundamental de la trigonometría, expresando la tangente en función del seno y coseno de un ángulo, se obtiene:

$\text{sen } \alpha = 0{,}97$ $\cos \alpha = -0{,}24$

$\text{cosec } \alpha = 1{,}03$ $\sec \alpha = -4{,}17$

$\text{cotg } \alpha = -0{,}25$

17 **Si sen $\alpha = -0{,}3$ y $180° < \alpha < 270°$, calcula las otras razones trigonométricas.**

α pertenece al tercer cuadrante.

Con el dato del enunciado y la ecuación fundamental se deduce:

$\cos \alpha = -0{,}95$ $\quad$ $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}31$

$\operatorname{cosec} \alpha = -3{,}33$ $\quad$ $\sec \alpha = -1{,}05$

$\operatorname{cotg} \alpha = 3{,}22$

18 **Si $\cos \alpha = 0{,}65$ y $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcula las restantes razones trigonométricas.**

α pertenece al cuarto cuadrante.

Con el dato del enunciado y la ecuación fundamental se deducen:

$\operatorname{sen} \alpha = -0{,}76$ $\quad$ $\operatorname{tg} \alpha = -1{,}17$

$\operatorname{cosec} \alpha = -1{,}32$ $\quad$ $\sec \alpha = 1{,}54$

$\operatorname{cotg} \alpha = -0{,}86$

19 **De un ángulo α sabemos que:**

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2};\ \operatorname{sen} \alpha < \cos \alpha$$

¿En qué cuadrante se encuentra dicho ángulo?

En el cuarto cuadrante.

20 **Señala si las siguientes igualdades son ciertas o no. En este último caso, escribe la igualdad correcta.**

a) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (180° + \alpha)$

b) $\cos \alpha = \operatorname{sen} (90° + \alpha)$

c) $\sec \alpha = \sec (2\pi - \alpha)$

d) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

e) $\operatorname{cosec} \alpha = -\operatorname{cosec} (\pi - \alpha)$

f) $\operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{cotg} (360° - \alpha)$

a) No es cierta: $\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} (180° + \alpha)$

b) Cierta.

c) Cierta.

d) Cierta.

e) No es cierta: $\operatorname{cosec} \alpha = \operatorname{cosec} (\pi - \alpha)$

f) No es cierta: $\operatorname{cotg} \alpha = -\operatorname{tg} (360° - \alpha)$

21 **A partir de las razones de 0°, 30° y 45° calcula.**

a) $\operatorname{sen} 135°$

b) $\cos 720°$

c) $\cos 210°$

d) $\operatorname{tg} 300°$

e) $\cos 450°$

f) $\operatorname{tg} 135°$

g) $\operatorname{tg} 210°$

a) $\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 720° = \cos 0° = 1$

c) $\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\operatorname{tg} 300° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$

e) $\cos 450° = \operatorname{sen} 0° = 0$

f) $\operatorname{tg} 135° = -1$

g) $\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

22 **Sin usar la calculadora, halla todos los valores de α en el primer giro que verifican las siguientes igualdades.**

a) $\operatorname{sen} \alpha = -1/2$ $\quad$ ***d)*** $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$

b) $\sec \alpha = -\sqrt{2}$ $\quad$ ***e)*** $\operatorname{cosec} \alpha = -2/\sqrt{3}$

c) $\cos \alpha = 1/\sqrt{2}$ $\quad$ ***f)*** $\operatorname{cosec} \alpha = -2$

a) Ángulos cuyo seno es $-1/2$: 210° y 330°

b) Ángulos cuya secante es $-\sqrt{2}$: 135° y 225°

c) Ángulos cuyo coseno es $\frac{1}{\sqrt{2}}$: 45° y 315°

d) Ángulos cuya tangente es $\sqrt{3}$: 60° y 240°

e) Ángulos cuya cosecante es $\frac{-2}{\sqrt{3}}$: 240° y 300°

f) Ángulos cuya cosecante es -2: 210° y 330°

23 **Averigua sin utilizar la calculadora:**

a) $\operatorname{sen} 1\,500°$ $\quad$ ***d)*** $\cos \left(\frac{37\pi}{6}\right)$

b) $\operatorname{sen} \left(\frac{61\pi}{3}\right)$ $\quad$ ***e)*** $\operatorname{tg} 2\,010°$

c) $\cos 2\,745°$ $\quad$ ***f)*** $\operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{3}\right)$

a) $\operatorname{sen} 1\,500° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\operatorname{sen} \left(\frac{61\pi}{3}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos 2\,745° = \cos 225° = -\cos 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

d) $\cos \left(\frac{37\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\operatorname{tg} 2\,010° = \operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\operatorname{tg} \left(\frac{-7\pi}{3}\right) = \operatorname{tg} \left(\frac{-\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

24 **Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{4}$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:**

a) $\operatorname{sen} (180° - \alpha)$ $\quad$ ***d)*** $\operatorname{sen} (180° + \alpha)$ $\quad$ ***g)*** $\operatorname{cosec} \alpha$

b) $\operatorname{cosec} (-\alpha)$ $\quad$ ***e)*** $\cos (360° - \alpha)$ $\quad$ ***h)*** $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$

c) $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ $\quad$ ***f)*** $\sec (180° - \alpha)$ $\quad$ ***i)*** $\operatorname{cotg} (-\alpha)$

a) $\operatorname{sen} (180° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 3/4$

b) $\operatorname{cosec} (-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha = -4/3$

c) $\operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

d) $\operatorname{sen} (180° + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = -3/4$

e) $\cos (360° - \alpha) = \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

f) $\sec (180° - \alpha) = \frac{1}{\cos (180° - \alpha)} = \frac{1}{-\cos \alpha} = -\frac{4\sqrt{7}}{7}$

g) $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{4}{3}$

h) $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{3}{4}$

i) $\operatorname{cotg} (-\alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} (-\alpha)} = \frac{-1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

25 **Halla estas razones trigonométricas sin calculadora.**

a) sen 150°	***f)*** cos 225°	***k)*** tg (−45°)
b) cosec 120°	***g)*** cotg 240°	***l)*** sec 135°
c) sen 315°	***h)*** sec (−120°)	***m)*** sen 1 395°
d) $\text{cosec}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$	***i)*** $\text{sen}\left(\frac{13\pi}{3}\right)$	***n)*** $\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
e) tg (−495°)	***j)*** $\text{cotg}\left(\frac{13\pi}{2}\right)$	***ñ)*** cosec 720°

a) $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

b) $\text{cosec } 120° = \text{cosec } 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{sen } 315° = -\text{sen } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\text{cosec}\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\text{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$

e) $\text{tg } (-495°) = \text{tg } (-135°) = \text{tg } 225° = \text{tg } 45° = 1$

f) $\cos 225° = -\cos 45° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\text{cotg } 240° = \text{cotg } 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

h) $\sec (-120°) = \sec 240° = -\sec 60° = -2$

i) $\text{sen}\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

j) $\text{cotg}\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

k) $\text{tg } (-45°) = -\text{tg } 45° = -1$

l) $\sec 135° = -\sec 45° = -\sqrt{2}$

m) $\text{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

n) $\text{sen } 1\,395° = \text{sen } 315° = -\text{sen } 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ñ) cosec 720° = cosec 0° no existe

26 **Calcula las siguientes razones trigonométricas:**

a) $\text{tg } (7\pi - \alpha)$, si $\text{tg } \alpha = 2$

b) $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$, si $\text{tg } \alpha = \frac{3}{2}$

a) $\text{tg } (7\pi - \alpha) = \text{tg } (\pi - \alpha) = -\text{tg } \alpha = -2$

b) $\text{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) = -\text{cotg } \alpha = -\frac{2}{3}$

27 **Calcula los ángulos del primer giro que cumplen:**

a) $\cos \alpha = 0{,}989$ ***b)*** $\text{tg } \alpha = 2{,}5$

Utilizando la calculadora:

a) 8° 30′ 22,13″ y 351° 29′ 37,9″ en el primer giro.

b) 68° 11′ 54,93″ y 248° 11′ 54,93″ en el primer giro.

28 **Utilizando la calculadora, averigua el valor que tiene el ángulo α.**

a) $\text{sen } \alpha = -0{,}15,\ \alpha < 3\pi/2$

b) $\cos \alpha = -0{,}92,\ \alpha > \pi$

c) $\text{tg } \alpha = 2{,}35,\ \alpha > \pi$

d) $\text{cotg } \alpha = 0{,}36,\ \alpha < \pi/2$

a) 188° 37′ 37″ ***c)*** 246° 56′ 55,3″

b) 203° 4′ 26″ ***d)*** 70° 12′ 4″

Expresiones trigonométricas

29 **Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas.**

a) $\dfrac{\cos(\pi + \alpha) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)}$

b) $\dfrac{\cos^2 \alpha}{1 + \text{sen } \alpha}$

c) $(2 - \text{cosec}^2 \alpha) : \dfrac{\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha}$

d) $\dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

e) $\text{sen}^4 \alpha + \text{sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

f) $\dfrac{\cos^3 \alpha + \cos \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \text{sen } \alpha}$

g) $\dfrac{-\text{sen } \alpha - \cos^2 \alpha + 1}{\text{sen } \alpha} \cdot (1 + \text{sen } \alpha)$

a) Sustituyendo en función del ángulo α, se obtiene:

$$\frac{-\cos \alpha - \cos \alpha}{-\cos \alpha - \cos \alpha} = 1$$

b) Expresando el coseno en función del seno:

$$\frac{1 - \text{sen}^2 \alpha}{1 + \text{sen } \alpha} = \frac{(1 + \text{sen } \alpha) \cdot (1 - \text{sen } \alpha)}{1 + \text{sen } \alpha} = 1 - \text{sen } \alpha$$

c) Recordando que la cosecante es la inversa del seno y reduciendo a común denominador el primer paréntesis, y dado que:

$$\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

tenemos:

$$\frac{2\,\text{sen}^2 \alpha - 1}{\text{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{2\,\text{sen}^2 \alpha - (\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1$$

d) Sustituimos por sus valores y operamos.

$$\frac{(1/\sqrt{2}) + (1/\sqrt{3})}{(\sqrt{3}/2) - 0} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})/\sqrt{6}}{\sqrt{3}/2} = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3\sqrt{2}}$$

e) Factorizando la expresión, se obtiene:

$$\text{sen}^2 \alpha\, (\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \text{sen}^2 \alpha$$

f) Factorizamos numerador y denominador, simplificamos y se obtiene:

$$\frac{\cos \alpha\, (\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha)}{\text{sen } \alpha\, (\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \text{cotg } \alpha$$

g) Dado que $1 - \cos^2 \alpha = \text{sen}^2 \alpha$, se sustituye, se simplifica y se obtiene:

$$\frac{-\text{sen } \alpha + \text{sen}^2 \alpha}{\text{sen } \alpha} \cdot (1 + \text{sen } \alpha) = (-1 + \text{sen } \alpha)(1 + \text{sen } \alpha) = \text{sen}^2 \alpha - 1 = -\cos^2 \alpha$$

30 **Demuestra, de forma razonada, las siguientes igualdades.**

a) $\dfrac{\sec^2\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha=\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$

b) $(1-\operatorname{sen}^2\alpha)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{sen}\alpha$

c) $\operatorname{cotg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha-\operatorname{cotg}^2\alpha=-\cos^2\alpha$

d) $\dfrac{\cos^4\alpha-\operatorname{sen}^4\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$

e) $(1+\operatorname{tg}\alpha)\cdot(1+\operatorname{cotg}\alpha)=\dfrac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$

a) $\sec^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha},\ \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha},$

$(1-\operatorname{sen}^2\alpha)=\cos^2\alpha,\ \operatorname{cosec}^2\alpha=1/\operatorname{sen}^2\alpha$

Sustituimos en el primer miembro de la igualdad:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\cos\alpha}$$

b) $1-\operatorname{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha\qquad\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{sen}\alpha/\cos\alpha$

$1+\cos^2\alpha=1+1-\operatorname{sen}^2\alpha=2-\operatorname{sen}^2\alpha$

Sustituimos en el primer miembro y simplificamos:

$$\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{2-\operatorname{sen}^2\alpha}{2-\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\cos^2\alpha\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot1\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{sen}\alpha$$

c) Factorizando y expresando $\cos^2\alpha-1=-\operatorname{sen}^2\alpha$, se obtiene:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\cdot(-\operatorname{sen}^2\alpha)=-\cos^2\alpha$$

d) Expresando la diferencia de cuadrados como suma por diferencia, la suma vale 1. Luego se separa el primer miembro en dos fracciones y se simplifica:

$$\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}=$$

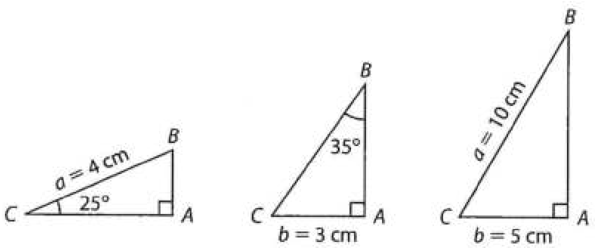
$$=\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\operatorname{tg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$$

e) Expresando la tangente y la cotangente en función del seno y del coseno, y reduciendo a común denominador cada paréntesis, cuando se multiplican estos se obtiene:

$$\frac{\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2}{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Triángulos rectángulos

31 **Resuelve cada uno de los triángulos rectángulos de la figura.**



a) $B=90°-25°=65°$

$b=4\cdot\cos 25°=3{,}63$ cm; $c=4\cdot\operatorname{sen}25°=1{,}69$ cm

b) $C=90°-35°=55°$

$c=\dfrac{3}{\operatorname{tg}35°}=4{,}28$ cm; $a=\dfrac{3}{\operatorname{sen}35°}=5{,}23$ cm

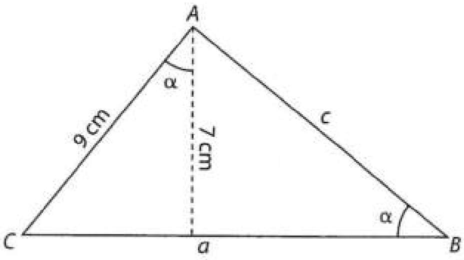
c) $\operatorname{sen}B=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

$B=30°;\ C=60°;\ c=\sqrt{a^2-b^2}=5\sqrt{3}\text{ cm}=8{,}66\text{ cm}$

32 **Calcula el ángulo de elevación del Sol sobre el horizonte, sabiendo que una estatua proyecta una sombra que mide tres veces su altura.**

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3},\ \alpha=18{,}435°=18°\,26'6''$$

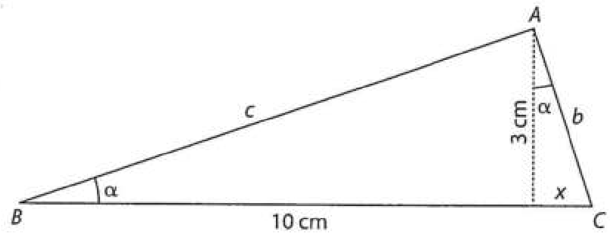
33 **En un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, conocemos la altura correspondiente al vértice *A*, que es 7 cm, y el cateto *b* que es de 9 cm. Calcula el valor de los ángulos *B* y *C*, del cateto *c*, y de la hipotenusa, *a*.**



$\cos B=\cos\alpha=\dfrac{7}{9}\Rightarrow B=38°\ 56'\ 32{,}79''$, y por tanto: $C=51°\,3'\,27{,}21''$

Por otra parte: $\operatorname{sen}B=\dfrac{9}{a}\Rightarrow a=14{,}32$ cm y $c=11{,}14$ cm

34 **En un triángulo rectángulo, conocemos la altura correspondiente relativa a la hipotenusa, que es 3 cm, y la hipotenusa, *a* = 10 cm. Calcula el valor de los ángulos agudos, y la medida de los catetos.**



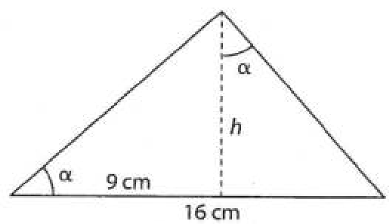
Podemos plantear: $\dfrac{3}{10-x}=\dfrac{x}{3}\Rightarrow x=1$ y $x=9$

Esto significa que la altura determina sobre la hipotenusa dos segmentos, de 9 cm y 1 cm. En la figura, con $x=1$:

$\operatorname{tg}\alpha=1/3\Rightarrow B=18°\,26'6''$, y por tanto, el otro ángulo agudo es, aproximadamente, $C=71°\,33'54''$.

$\operatorname{sen}\alpha=3/c\Rightarrow c=3\sqrt{10}$ cm $=9{,}49$ cm y $b=\sqrt{10}$ cm $=$ $=3{,}16$ cm

35 **Conociendo la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, 16 cm, y que la proyección ortogonal de uno de los catetos sobre ella es de 9 cm, calcula el área del triángulo.**

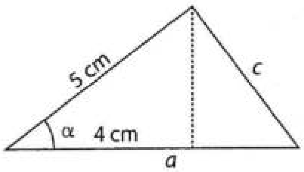


Tomando la hipotenusa como la base del triángulo, podemos calcular la altura correspondiente a la hipotenusa:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{h}{9}=\frac{16-9}{h}\Rightarrow h^2=63\Rightarrow h=\sqrt{63}\text{ cm}$$

El área será: $A=\dfrac{b\cdot h}{2}=8\sqrt{63}\text{ cm}^2=63{,}50\text{ cm}^2$

36 **En un triángulo rectángulo, un cateto, *b*, mide 5 cm y su proyección sobre la hipotenusa 4 cm. Calcula la longitud de la hipotenusa y del otro cateto.**



Sea a la longitud de la hipotenusa, y c la del otro cateto.

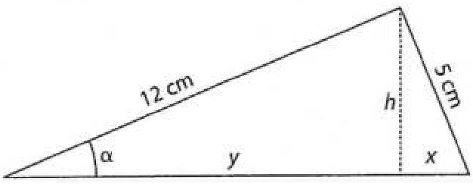
$$\cos\alpha = \frac{4}{5} = \frac{5}{a} \Rightarrow a = \frac{25}{4}\text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \text{ y } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Como también tenemos que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{5} \Rightarrow c = 5\operatorname{tg}\alpha = \frac{15}{4}$ cm

Por tanto, la hipotenusa mide 6,25 cm y el otro cateto, 3,75 cm.

37 **Construye un triángulo rectángulo cuyos catetos midan $b = 5$ cm y $c = 12$ cm. Calcula la longitud de la hipotenusa, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa, la altura correspondiente a la hipotenusa y los ángulos agudos de dicho triángulo.**



Aplicando Pitágoras, la hipotenusa mide $a = x + y = 13$ cm.

A partir de la figura, podemos deducir:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13} = \frac{h}{12} = \frac{x}{5}$$

de lo que se deduce lo siguiente:

$\alpha = B = 22° 37' 11{,}51''$, su complementario: $C = 67° 22' 48{,}49''$

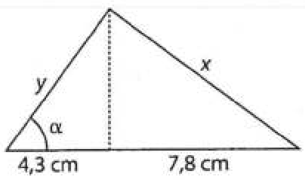
$h = \frac{60}{13} = 4{,}62$ cm; $x = \frac{25}{13} = 1{,}92$ cm

y la otra proyección, y, será: $y = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13} = 11{,}08$ cm,
$y = 12 \cdot \cos\alpha = 11{,}08$ cm

38 **En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa la divide en dos segmentos de 4,3 y 7,8 cm, respectivamente. Calcula:**

a) **Los ángulos agudos del triángulo.** ***c)*** **Su área.**

b) **La longitud de los catetos.**



A partir de la figura $\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{12{,}1} = \frac{7{,}8}{x}$

Luego podemos calcular $x = 9{,}71$ cm

a) Con x podemos calcular los ángulos del triángulo:
$\alpha = 53° 24' 24{,}18''$, su complementario: $36° 35' 35{,}82''$

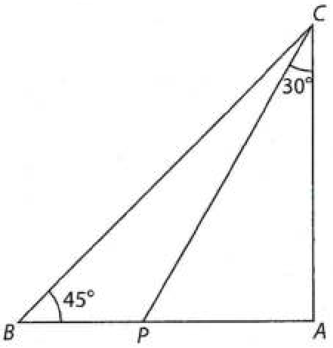
b) El otro cateto, y, se puede calcular por Pitágoras o a partir del ángulo α, y resulta ser $y = 7{,}21$ cm.

c) Con los dos catetos se puede calcular el área del triángulo, que es de 35,04 cm².

39 **Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo mide $B = 27° 45' 12''$ y su cateto opuesto, $b = 4$ cm. ¿Cuánto miden los otros lados y ángulos del triángulo?**

La hipotenusa mide $a = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = 8{,}59$ cm, el otro cateto, $c = \frac{b}{\operatorname{tg} B} = 7{,}60$ cm, y el otro ángulo agudo, $62° 14' 48''$.

40 **Calcula el perímetro del triángulo rectángulo *ABC*, sabiendo que la longitud del segmento *CP* es $2\sqrt{3}$ cm.**



$AC = CP \cdot \cos 30° = 3$ cm

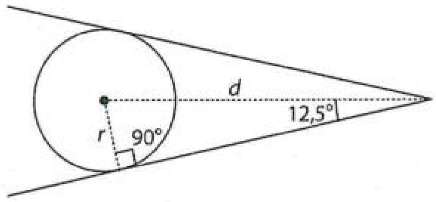
$AB = AC = 3$ cm, puesto que el ángulo $B = 45°$

Por Pitágoras, $CB = 3\sqrt{2}$ cm.

El perímetro es pues: $P = 6 + 3\sqrt{2} = 10{,}24$ cm

Problemas de aplicación

41 **Una circunferencia mide 48,56 cm y las dos tangentes trazadas desde un punto exterior forman un ángulo de 25°. Calcula la distancia del centro de la circunferencia a dicho punto.**



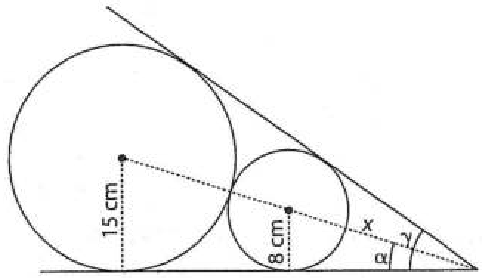
En primer lugar, calculamos el radio de la circunferencia:

$$r = \frac{48{,}56}{2\pi} = 7{,}73 \text{ cm}$$

Ahora ya se puede hallar la distancia pedida:

$$\operatorname{sen} 12{,}5° = \frac{r}{d} \Rightarrow d = \frac{r}{\operatorname{sen} 12{,}5°} \Rightarrow d = 35{,}71 \text{ cm}$$

42 **Los radios de dos circunferencias tangentes exteriormente son de 15 cm y 8 cm, respectivamente. Calcula el ángulo que forman sus tangentes comunes.**

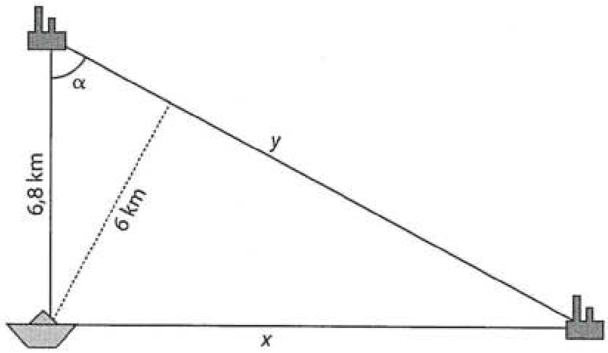


Por semejanza de triángulos: $\frac{8}{x} = \frac{15}{x + 23} \Rightarrow x = 26{,}29$ cm

Por lo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{x} \Rightarrow \alpha = 17{,}719°$

$\Rightarrow 2\alpha = 35{,}438° = 35° 26' 16{,}31''$

43 **Bajo un ángulo de 90°, un barco divisa dos plataformas petrolíferas. Se sabe que la distancia a una de las plataformas es de 6,8 km, y que la distancia a la línea imaginaria que las une es de 6 km. Calcula la distancia que hay entre las plataformas y la distancia del barco a la segunda plataforma.**



Sea x la distancia a la segunda plataforma e y la distancia entre las plataformas:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{6}{6{,}8}$$

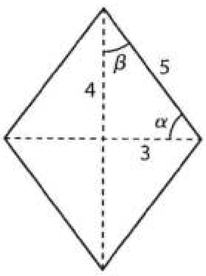
De esta igualdad se deduce el ángulo y a partir de él, tenemos que:

$x = 6{,}8 \cdot \text{tg}\ \alpha = 12{,}75$ km

$y = \dfrac{6{,}8}{\cos\alpha} = 14{,}45$ km

Las distancias son, aproximadamente, 14,45 km y 12,75 km, respectivamente.

44 **Calcula los ángulos de un rombo sabiendo que la longitud de sus lados es de 5 cm y que sus diagonales miden 6 cm y 8 cm.**



A partir de la figura, se puede deducir que:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{3}$$

Por lo que $\alpha = 53{,}13°$.

Y como β es el ángulo complementario de α, vale $\beta = 36{,}87°$.

Por lo tanto, los ángulos del rombo de la figura son 106° 15′ 37″ y 73° 44′ 23″.

45 **Desde un helicóptero que vuela a 300 m de altura se observa un pueblo, bajo un ángulo de depresión de 25°. Calcula la distancia del helicóptero al pueblo medida sobre la horizontal.**

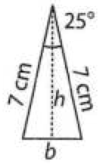
$$\text{tg}\ 25° = \frac{300}{x} \Rightarrow x = 643{,}35 \text{ m}$$

46 **El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide 32° 24′ 36″. El lado desigual mide 7 cm. Calcula el área del triángulo.**

$$h = \frac{3{,}5}{\text{tg}\ 16°\ 12'\ 18''}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{3{,}5}{\text{tg}\ 16°\ 12'\ 18''} = 42{,}15 \text{ cm}^2$$

47 **El ángulo desigual de un triángulo isósceles es de 25°. Los lados iguales miden 7 cm cada uno. Calcula el área del triángulo.**



Para calcular la altura del triángulo hacemos:

$$h = 7 \cdot \cos 12{,}5° = 6{,}834 \text{ cm}$$

Ahora calculamos la mitad de la base:

$$\frac{b}{2} = 7 \cdot \text{sen}\ 12{,}5° = 1{,}515 \text{ cm}$$

El área del triángulo es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = 10{,}35 \text{ cm}^2$$

48 **El área de un triángulo rectángulo es 30 cm², y su hipotenusa mide 13 cm. Averigua el valor de los ángulos agudos de dicho triángulo.**

$$\begin{cases} \dfrac{b \cdot c}{2} = 30 \\ 13^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow b = 12 \text{ y } c = 5$$

De $\text{sen}\ C = \dfrac{c}{13}$ se deduce que $C = 22°\ 37'\ 11{,}51''$, luego

$B = 90° - C = 67°\ 22'\ 48{,}49''$

Los ángulos agudos son, aproximadamente 67° 22′ 48,49″ y 22° 37′ 11,51″.

49 **Un grupo de bomberos intenta llegar con una escalera de 5 m de longitud a una ventana de un edificio que está situada a 4 m del suelo, de donde sale una densa nube de humo. ¿A qué distancia de la pared del edificio habrán de colocar los bomberos el pie de la escalera para poder entrar por la ventana?**

Simplemente por Pitágoras, $d = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ m

50 **Situados en un punto de un terreno horizontal, el ángulo que forma la visual dirigida al punto más alto de un árbol con la horizontal, es de 60°. ¿Cuál será el ángulo que se formará si nos alejamos a una distancia del árbol el triple de la inicial?**

Mediante un esquema y llamando x a la distancia inicial, tenemos que:

$$\begin{cases} \text{tg}\ 60° = h/x \\ \text{tg}\ \alpha = h/3x \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = \frac{\text{tg}\ 60°}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$$

51 **Desde el suelo, vemos la terraza de un rascacielos bajo un ángulo de 40°. ¿Con qué ángulo la veríamos desde una distancia que fuera la mitad de la anterior?**

Mediante un esquema y llamando x a la distancia inicial, tenemos que:

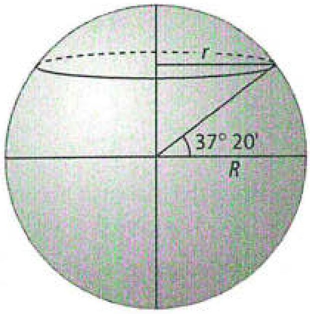
$$\begin{cases} \text{tg}\ 40° = h/x \\ \text{tg}\ \alpha = 2h/x \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 2\text{tg}\ 40° \Rightarrow \alpha = 59°\ 12'\ 36{,}96''$$

52 **La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide el triple que uno de los catetos. Averigua el valor de los ángulos de este triángulo y la relación entre la hipotenusa y el otro cateto.**

Por Pitágoras, el otro cateto mide $2\sqrt{2}$ del primero, por lo que la relación entre la hipotenusa y él es $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

Luego los ángulos agudos miden 70° 31′ 43,61″ y 19° 28′ 16,39″.

53 **El radio terrestre, R, mide alrededor de 6 370 km. ¿Cuál es la longitud aproximada del paralelo que pasa por Sevilla? (Latitud de Sevilla: 37° 20′)**



Del dibujo deducimos: $r = R \cdot \cos 37° \, 20' = 5\,064{,}92$ km.

Por tanto, la longitud del paralelo será $2\pi r = 31\,823{,}83$ km.

54 **Calcula los ángulos que determina la diagonal de una caja de zapatos de 35 × 20 × 15 cm con cada una de las caras.**

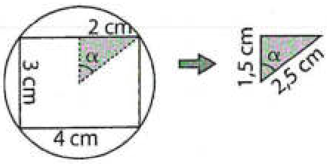
$$D = \sqrt{35^2 + 20^2 + 15^2} = \sqrt{1\,850} \text{ cm}$$

Con la cara de 35 × 20: $\text{sen}\, \alpha = \dfrac{15}{\sqrt{1\,850}} \Rightarrow \alpha = 20° \, 24' \, 37{,}6''$

Con la cara de 35 × 15: $\text{sen}\, \beta = \dfrac{20}{\sqrt{1\,850}} \Rightarrow \beta = 27° \, 42' \, 34{,}6''$

Con la cara de 15 × 20: $\text{sen}\, \gamma = \dfrac{35}{\sqrt{1\,850}} \Rightarrow \gamma = 54° \, 27' \, 44{,}36''$

55 **Un rectángulo de 3 cm × 4 cm está inscrito en una circunferencia. Calcula cuánto miden los arcos que determina en ella.**



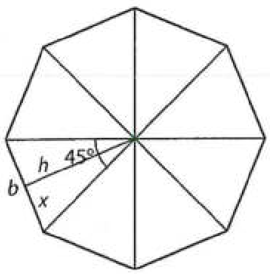
La diagonal del rectángulo mide 5 cm y el radio, 2,5 cm. Los ángulos que determinan las diagonales son:

$\text{tg}\, \alpha = \dfrac{2}{1{,}5} \Rightarrow \alpha = 53{,}13° \Rightarrow 2\alpha = 106{,}26°$ y, por tanto, el otro ángulo será 73,74°.

Los arcos medirán, dos a dos:

$$106{,}26° \cdot \frac{2\pi \cdot 2{,}5}{360°} = 4{,}64 \text{ cm}; \; 73{,}74° \cdot \frac{2\pi \cdot 2{,}5}{360°} = 3{,}22 \text{ cm}$$

56 **Halla el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 5 m de radio.**



El octógono se puede dividir en ocho triángulos isósceles cuyo ángulo desigual es de 45° y sus lados iguales miden 5 m.

A partir del dibujo se observa que:

$$h = 5 \cdot \cos 22{,}5° = 4{,}619 \text{ m}$$

$$b = 2 \cdot x = 2 \cdot 5 \text{ sen } 22{,}5° = 3{,}827 \text{ m}$$

El área del octógono es el área de ocho triángulos iguales:

$$A = 8 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 4 \cdot b \cdot h = 70{,}71 \text{ m}^2$$

57 **Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 10 cm. Calcula:**

a) **El área del pentágono.**

b) **El área de la corona circular que forman dicha circunferencia y la circunferencia inscrita en el pentágono.**

a) El ángulo central del pentágono mide 72°. Si l es el lado:

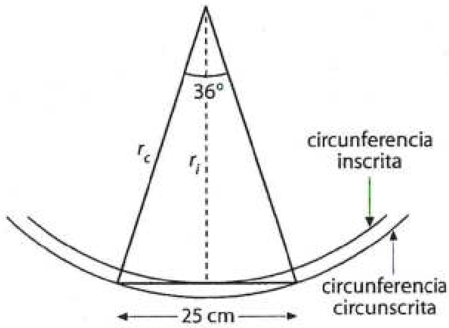
$$l/2 = 10 \text{sen } 36° = 5{,}88 \text{ cm} \Rightarrow l = 11{,}76 \text{ cm}$$

La apotema mide: $a = 10\cos 36° \cong 8{,}09$ cm

$$A = 5 \cdot \frac{2 \cdot 10\text{sen } 36° \cdot 10\cos 36°}{2} = 237{,}76 \text{ cm}^2$$

b) El radio de la circunferencia inscrita es $a = 10\cos 36° = 8{,}09 \text{ cm} \Rightarrow A = \pi(10^2 - 8{,}09^2) = 108{,}54 \text{ cm}^2$

58 **Calcula el radio de la circunferencia inscrita y circunscrita a un decágono regular de 25 cm de lado.**



Este decágono se puede descomponer en diez triángulos isósceles de ángulo desigual 36° y de lado desigual 25 cm.

El radio de la circunferencia circunscrita mide lo que uno de los lados iguales de estos triángulos, r_c.

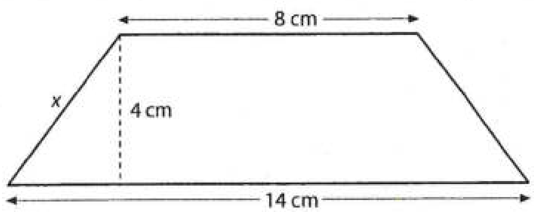
El radio de la circunferencia inscrita mide lo que la altura de uno de estos triángulos, r_i.

$$r_c = \frac{12{,}5}{\text{sen } 18°} = 40{,}45 \text{ cm} \qquad r_i = \frac{12{,}5}{\text{tg } 18°} = 38{,}47 \text{ cm}$$

59 **Un club náutico dispone de una rampa para efectuar saltos de esquí acuático. Esta rampa tiene una longitud de 8 m y su punto más elevado se encuentra a 2 m sobre el nivel del agua. Si se pretende que los esquiadores salgan desde un punto a 2,5 m de altura, ¿cuántos metros hay que alargar la rampa sin variar el ángulo de inclinación?**

Se ha de mantener $\text{sen}\, \alpha = 0{,}25$ si el ángulo de inclinación ha de ser el mismo; así, para saltar desde 2,5 m de altura se necesitarán $2{,}5/0{,}25 = 10$ m, es decir, hay que alargarla 2 m.

60 **Un trapecio regular tiene una altura de 4 cm y sus bases miden 8 cm y 14 cm, respectivamente. Calcula su perímetro, su área y el valor de sus ángulos.**



Como se observa en el dibujo, $x = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, por tanto:

$$P = 14 + 8 + 2 \cdot 5 = 32 \text{ cm}$$

$$A = \frac{8 + 14}{2} \cdot 4 = 44 \text{ cm}^2$$

Sus ángulos agudos tienen por tangente 4/3, es decir, son, aproximadamente, de 53,13°, y por lo tanto, sus ángulos obtusos valen, aproximadamente: $90° + 36{,}87° = 126{,}87°$

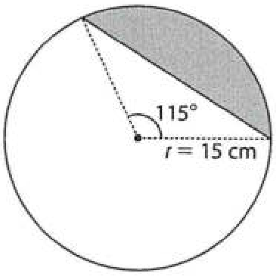
61 **En un círculo de 14 cm de radio, calcula el perímetro de un sector circular correspondiente a un ángulo central de 40°.**

40° son $40° \cdot \dfrac{\pi}{180°} = 0{,}698$ rad, por tanto, la longitud del arco de circunferencia que determina un ángulo de 40° en este círculo de radio 14 cm es, aproximadamente:

$$14 \cdot 0{,}698 = 9{,}77 \text{ cm}$$

$$P = 2 \cdot r + 9{,}772 = 37{,}77 \text{ cm}$$

62 **Calcula el área del segmento circular correspondiente a un ángulo central de 115° en una circunferencia de 15 cm de radio.**



Debemos calcular el área de la zona sombreada.

Calculamos primero el área del sector circular y, a continuación, le restamos el área del triangulo isósceles cuyo ángulo desigual mide 115° y sus lados iguales, 15 cm:

$$A_{\text{sector}} = \frac{115}{360} \pi \cdot 15^2 = 225{,}80 \text{ cm}^2$$

Ahora se calcula la altura del triángulo correspondiente a uno de los lados iguales:

$$h = 15 \cdot \text{sen } 115°$$

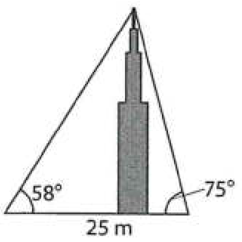
Y el área del triángulo es:

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{15 \cdot 15 \cdot \text{sen } 115°}{2} = 101{,}96 \text{ cm}^2$$

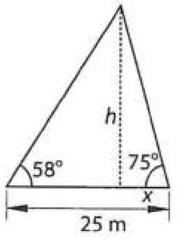
Por tanto, el área del segmento circular es de:

$$A = 225{,}80 - 101{,}96 = 123{,}84 \text{ cm}^2$$

63 **Dos observadores ven el punto más alto de una torre bajo un ángulo de 58° y 75°, respectivamente, tal como indica la figura. La distancia que los separa es de 25 metros. Calcula la altura de la torre.**



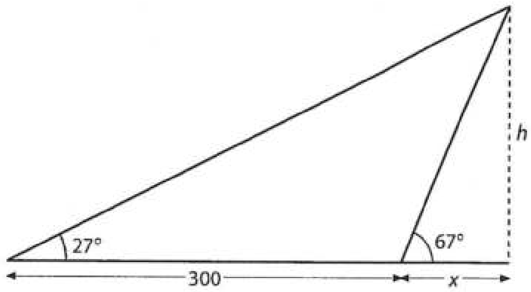
Con el siguiente dibujo, podemos plantear un sistema:



$$\begin{cases} \text{tg } 58° = \dfrac{h}{25 - x} \\[2ex] \text{tg } 75° = \dfrac{h}{x} \end{cases}$$

Se obtiene $h = 28$ m.

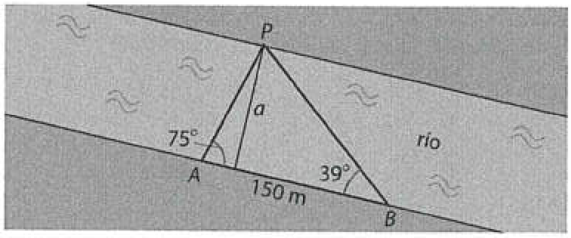
64 **Observamos la cima de una montaña bajo un ángulo de elevación de 67°. Si nos alejamos 300 m, el ángulo de elevación es de 27°. Calcula la altura de la montaña.**



$$\begin{cases} \text{tg } 67° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \text{tg } 27° = \dfrac{h}{(300 + x)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\text{tg } 67° - \text{tg } 27°) = 300 \cdot \text{tg } 67° \cdot \text{tg } 27° \Rightarrow h = 195{,}04 \text{ m}$$

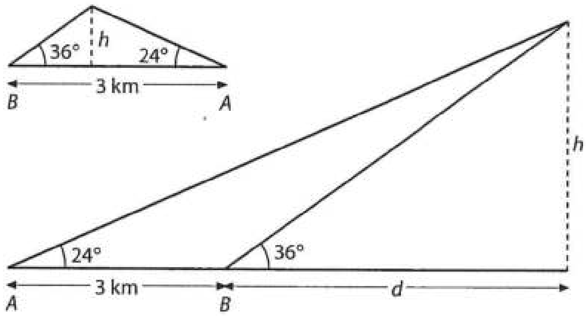
65 **Para medir la anchura de un río, dos amigos se colocan en una de las orillas separados una distancia de 150 m. Los dos miden el ángulo que forma su visual a un árbol, punto de la orilla contraria con la recta que los une, y resultan 39° y 75°, tal como indica la figura. ¿Cuál es la anchura del río?**



$$\begin{cases} \text{tg } 75° = \dfrac{a}{(150 - x)} \\[2ex] \text{tg } 39° = \dfrac{a}{x} \end{cases} \Rightarrow a = 99{,}81 \text{ m}$$

66 **Desde dos puntos distantes entre sí 3 km se observa un globo sonda. El ángulo de elevación desde uno de los puntos, *A*, es 24° y desde el otro, *B*, 36°. ¿Cuál es el punto más próximo al globo sonda? ¿Y la altura del globo?**

Del enunciado no se deduce si el globo está situado en un punto entre *A* y *B*, o si está a un mismo lado de *A* y *B*. Como se observa en los dibujos, en cualquier caso está más próximo a *B*.



Caso *a)*

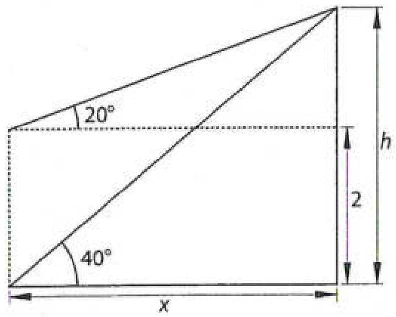
$$\begin{cases} \text{tg } 36° = h/d \\ \text{tg } 24° = h/(3 - d) \end{cases} \Rightarrow d = 1{,}86 \text{ km}; h = 0{,}83 \text{ km}$$

Caso *b)*

Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} \text{tg } 36° = h/d \\ \text{tg } 24° = h/(3 + d) \end{cases} \Rightarrow d = 4{,}75 \text{ km}; h = 3{,}45 \text{ km}$$

67 **Desde un punto observamos la copa de un árbol bajo un ángulo de 40°. Desde ese mismo punto, pero a una altura de 2 m, vemos la copa bajo un ángulo de 20°. Calcula la altura del árbol y la distancia a la que nos encontramos de él.**

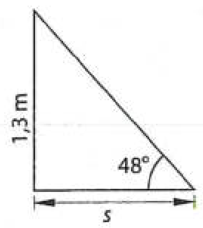


Como se observa en la figura, se puede plantear este sistema:

$$\begin{cases} \text{tg } 40° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 20° = \dfrac{h-2}{x} \end{cases}$$

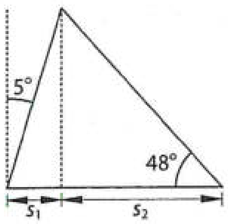
$\Rightarrow h(\text{tg } 40° - \text{tg } 20°) = 2 \cdot \text{tg } 40° \Rightarrow h = 3{,}53$ m y $x = 4{,}21$ m

68 **El ángulo de elevación del Sol sobre el horizonte es de 48°. Calcula la longitud de la sombra que proyectará una estaca clavada verticalmente en el suelo si su longitud es de 1,3 m. ¿Cuál sería la longitud de la sombra de la estaca si esta estuviera inclinada 5° respecto de la vertical?**



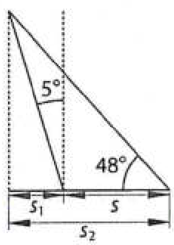
Si la estaca está clavada verticalmente, según la figura:

$$s = \frac{130}{\text{tg } 48°} = 117{,}05 \text{ cm}$$



Si la estaca está inclinada «en contra del Sol» 5° respecto de la vertical, según se observa en la figura: $s = s_1 + s_2$

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = 130 \cdot \text{sen } 5° = 11{,}33 \text{ cm} \\ s_2 = \dfrac{130 \cdot \cos 5°}{\text{tg } 48°} = 116{,}61 \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow s = 127{,}94 \text{ cm}$$

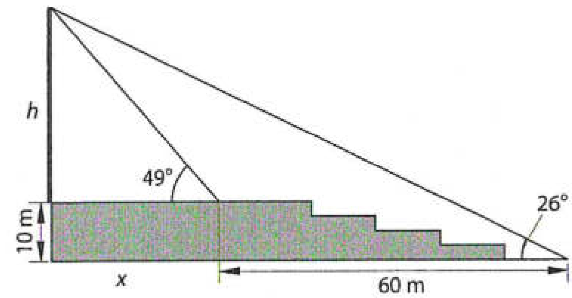


Si la estaca está inclinada «hacia el Sol» respecto de la vertical, según se observa en la figura:

$s_1 = 130 \cdot \text{sen } 5° = 11{,}33$ cm $\quad s_2 = \dfrac{130 \cdot \cos 5°}{\text{tg } 48°} = 116{,}61$ cm

Por tanto: $s = 105{,}28$ cm

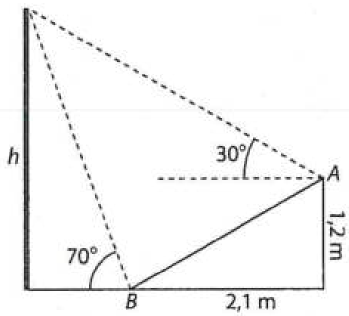
69 **Desde un punto situado a una cierta distancia de la fachada de un edificio, observamos su punto más alto bajo un ángulo de 49°, tal como se indica en la figura. Nos alejamos 60 m, bajando unas escaleras, y desde un punto 10 m por debajo del anterior, vemos el mismo punto en lo alto del edificio bajo un ángulo de 26°. Calcula la altura del edificio.**



Sea h la altura del edificio y x la distancia del edificio al primer punto de observación, se puede plantear este sistema:

$$\begin{cases} \text{tg } 49° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 26° = \dfrac{h+10}{x+60} \end{cases} \Rightarrow h = 33{,}44 \text{ m}$$

70 **Para calcular la altura de un mural, realizamos dos mediciones desde dos puntos *A* y *B*, como se indica en la siguiente figura. Calcula la distancia de ambos puntos al mural, y la altura de este.**



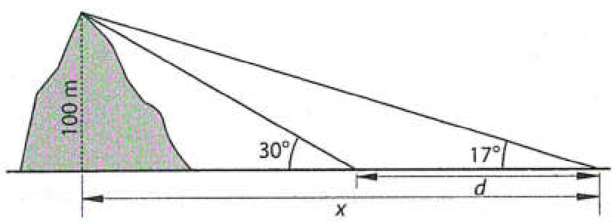
Sea x la distancia del mural al punto B. Planteamos este sistema:

$$\begin{cases} \text{tg } 70° = \dfrac{h}{x} \\ \text{tg } 30° = \dfrac{h-1{,}2}{x+2{,}1} \end{cases} \Rightarrow x = 1{,}11\text{m}, h = 3{,}05 \text{ m}$$

La distancia de A al mural es de 3,21 m y la distancia de B al mural es de 1,11 m.

La altura del mural es de $h = 3{,}05$ m.

71 **Se observa la cima de un promontorio de altura 100 m bajo un ángulo de 17°. Nos acercamos una cierta distancia y entonces el ángulo de elevación es de 30°. Calcula qué distancia nos hemos acercado.**

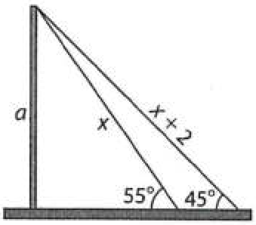


$$\text{tg } 17° = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 327{,}085 \text{ m}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{100}{x-d} \Rightarrow d = 153{,}88 \text{ m}$$

Nos hemos acercado 153,88 m.

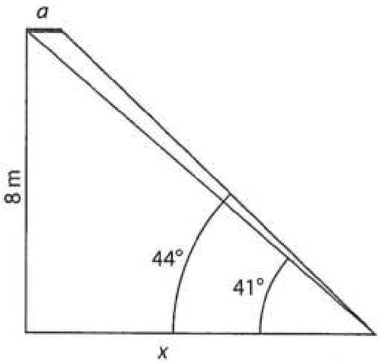
72 **El poste central de una carpa se sujeta con cables al suelo. En el punto de fijación del cable con el suelo, el ángulo que forma el cable con el terreno, supuestamente horizontal, es de 45°, y se gastan 2 m más de cable que si el cable y el terreno forman un ángulo de 55°. Si hacen falta 6 cables para realizar una sujeción segura del poste, averigua cuánto cable hace falta si gastamos la menor cantidad posible, y cuál es la altura del poste.**



$$\left\{\begin{array}{l} \text{sen } 55° = \dfrac{a}{x} \\ \text{sen } 45° = \dfrac{a}{x+2} \end{array}\right. \Rightarrow x = 12{,}622 \text{ m}, a = 10{,}339 \text{ m}$$

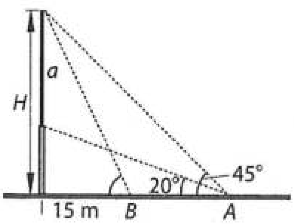
Luego hacen falta 75,73 m de cable, aproximadamente y la altura del poste es de 10,34 m, aproximadamente.

73 **Queremos averiguar la anchura de un voladizo situado a 8 m de altura. Desde un mismo punto realizamos dos mediciones y obtenemos los ángulos que se indican en la figura. Calcula la anchura del voladizo.**



$$\left\{\begin{array}{l} \text{tg } 41° = \dfrac{8}{x} \\ \text{tg } 44° = \dfrac{8}{x-a} \end{array}\right. \Rightarrow a = 0{,}92 \text{ m}$$

74 **Desde un barco *A* se divisa la luz de un faro bajo un ángulo de 45°, y su base, que está en una pequeña elevación de la costa, bajo un ángulo de 20°. Una barca, *B*, situada a 15 m del punto de la costa en que está el faro, ve su luz bajo un ángulo de 65°. Calcula cuánto mide el faro desde su base hasta su luz.**



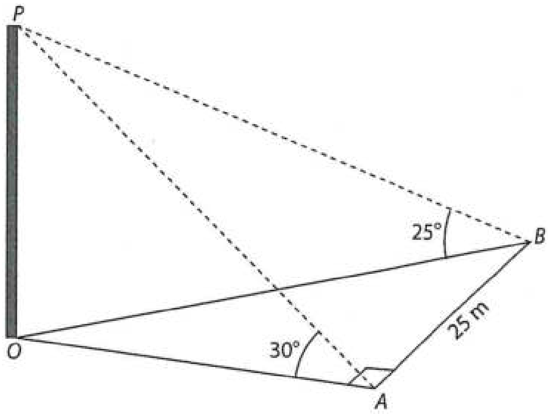
$$H = \text{tg } 65° \cdot 15$$

Esta distancia es la misma que la que hay entre *A* y la costa, ya que el ángulo bajo el que se divisa la luz desde *A* es de 45°.

Por tanto, la altura del pequeño promontorio o elevación será:

$H - a = \text{tg } 20° \cdot \text{tg } 65° \cdot 15 \Rightarrow a = H - \text{tg } 20° \cdot \text{tg } 65° \cdot 15 =$
$= \text{tg } 65° \cdot 15 - \text{tg } 20° \cdot \text{tg } 65° \cdot 15 = 20{,}46 \text{ m}$

75 **Para calcular la altura de un punto *P* inaccesible, dos amigos, *A* y *B*, han realizado las mediciones que se reflejan en la figura. Sabiendo que el ángulo *OAB* es recto, calcula la altura del punto *P*, perpendicular al plano *OAB*.**



Llamemos *x* a la distancia entre *O* y *A*. Llamemos *y* a la distancia entre *O* y *B*.

Se cumple lo siguiente: $y^2 = 25^2 + x^2$

Llamando *L* a la longitud del segmento *OP*, tenemos este sistema:

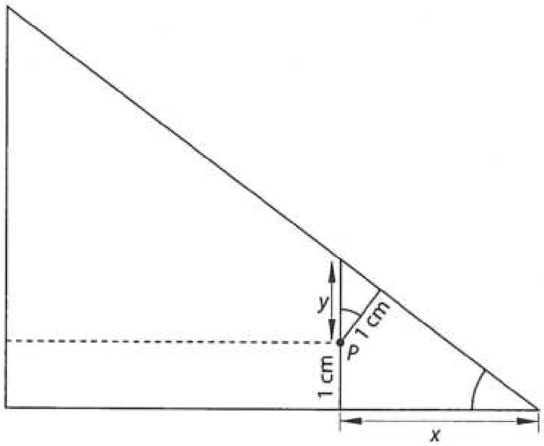
$$\left\{\begin{array}{l} \text{tg } 30° = \dfrac{L}{x} \\ \text{tg } 25° = \dfrac{L}{y} \end{array}\right. \Rightarrow x \cdot \text{tg } 30° = y \cdot \text{tg } 25°$$

Como $y = \sqrt{625 + x^2}$, tenemos que

$$x \cdot \text{tg } 30° = \sqrt{625 + x^2} \cdot \text{tg } 25°$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene: $x = 34{,}244$ m y $L = x \cdot \text{tg } 30° = 19{,}77$ m.

76 **En un triángulo rectángulo de lados 6 cm, 8 cm y 10 cm se considera un punto *P*, que dista 1 cm del cateto más largo y de la hipotenusa. Desde este punto trazamos perpendiculares a los dos catetos, de forma que queda dibujando un rectángulo. ¿Cuál es la superficie de este rectángulo?**



Observando los triángulos pequeños de los ángulos indicados, que son iguales por construcción, se observa que son semejantes y semejantes al triángulo mayor. Se puede escribir:

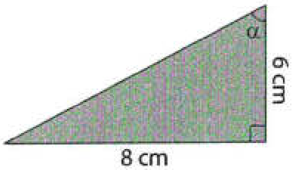
$$\frac{y}{1} = \frac{10}{8} \Rightarrow y = \frac{10}{8}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{1 + \dfrac{10}{8}}{x} \Rightarrow x = 3$$

Si $x = 3$ cm, la base del rectángulo mide 5 cm y su área, 5 cm^2.

Evaluación (página 97)

1. Calcula las razones trigonométricas del ángulo α de este triángulo rectángulo.



$a^2 = b^2 + c^2$, por tanto, $a^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \rightarrow a = 10$

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{8}{10} = 0{,}8$ $\qquad$ $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$ $\qquad$ $\sec \alpha = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

$\cos \alpha = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$ $\qquad$ $\operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{10}{8} = 1{,}25$ $\qquad$ $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

2. Si el coseno y la tangente de un ángulo son negativos, ¿entre qué valores está el ángulo?

Si el coseno y la tangente de un ángulo son negativos, entonces el seno del ángulo es positivo.

Un ángulo cuyo seno es positivo y cuyo coseno es negativo se encuentra en el segundo cuadrante de la circunferencia.

Por tanto, el ángulo se encuentra entre los valores 90° y 180°, ambos no incluidos.

3. Halla los posibles valores de las siguientes razones trigonométricas sabiendo que $\operatorname{cotg} \alpha = 1$.

a) **sen α** $\qquad$ ***b)*** **cos(180° + α)** $\qquad$ ***c)*** **tg(90° + α)**

d) **¿En qué cuadrantes puede estar α? ¿Qué valores puede tomar? Da tu respuesta en grados y en radianes.**

Como $\operatorname{cotg} \alpha = 1$, entonces $\dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 1$. Por tanto, $\operatorname{tg} \alpha = 1$ y $\operatorname{sen} \alpha = \cos \alpha$.

a) $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o bien $\operatorname{sen} \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o bien $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(180° + \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos(180° + \alpha) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o bien $\cos(180° + \alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{tg}(90° + \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = -1$

d) La cotangente es positiva en el primer y tercer cuadrante, entonces puede estar en cualquiera de los dos.

$\alpha = 45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad o bien $\alpha = 225° = \dfrac{5\pi}{4}$ rad

4. Comprueba que se cumplen las siguientes identidades.

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha) \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1$ $\qquad$ ***b)*** $\dfrac{\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) \cdot \cos\left(-\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)} = -\operatorname{sen} \alpha$

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha$, $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$, $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$ y $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$. Sustituyendo resulta: $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$, $\cos\left(-\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$. Sustituyendo resulta: $\dfrac{-\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = -\operatorname{sen} \alpha$

5. En un triángulo isósceles, el seno del ángulo desigual es $\dfrac{1}{2}$. ¿Cuáles son las posibles medidas de los ángulos?

Los ángulos cuyo seno es $\dfrac{1}{2}$ son 30° y 150°. Los dos son ángulos válidos para un triángulo.

Como el triángulo es isósceles, los otros dos lados son iguales, por lo que los posibles ángulos para los triángulos son:

$\hat{A} = 30°, \hat{B} = 75°, \hat{C} = 75°$ $\qquad$ $\hat{A} = 150°, \hat{B} = 15°, \hat{C} = 15°$

6. Calcula el área y el perímetro de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio. Utiliza GeoGebra para realizar la construcción y comprueba que se obtiene el mismo resultado para el área que el obtenido mediante trigonometría.

$\dfrac{360°}{8} = 45°$ $\qquad$ $\dfrac{45°}{2} = 22{,}5°$ $\qquad$ $\operatorname{sen} 22{,}5° = \dfrac{x}{5} \Rightarrow x = 5 \cdot \operatorname{sen} 22{,}5° = 1{,}913$ cm

$P = 1{,}913 \cdot 16 = 30{,}61$ cm

$\cos 22{,}5° = \dfrac{a_p}{5} \Rightarrow a_p = 5 \cdot \cos 22{,}5° = 4{,}62$ cm

$A = \dfrac{P \cdot a_p}{2} = \dfrac{30{,}61 \cdot 4{,}62}{2} = 70{,}71\ \text{cm}^2$

7. Marta observa el punto más alto de la torre Eiffel, de 324 m de altura, bajo un ángulo de 60°. Su amigo Cristian le recomienda que mire bajo un ángulo de 45°. ¿Qué distancia debe alejarse?

Primero se calcula la distancia a la que se encuentra: $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{324}{x} \Rightarrow x = \dfrac{324}{\operatorname{tg} 60°} = 187{,}06$ m

Después se calcula la distancia que se debe alejar: $\operatorname{tg} 45° = \dfrac{324}{d + 187{,}06°} \Rightarrow d = \dfrac{324}{\operatorname{tg} 45°} - 187{,}06° = 136{,}94$ m