Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

4 FUNCIONES I

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.8. (EA 1.8.1.) CE 1.10. (EA 1.10.1.) CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.)

Página 115

Resuelve

Familias de funciones

Ya conoces muchas familias de funciones: sus nombres, cómo son sus expresiones analíticas y qué forma tienen sus gráficas.

Asocia cada nombre de familia con su representación gráfica y con su expresión analítica general.

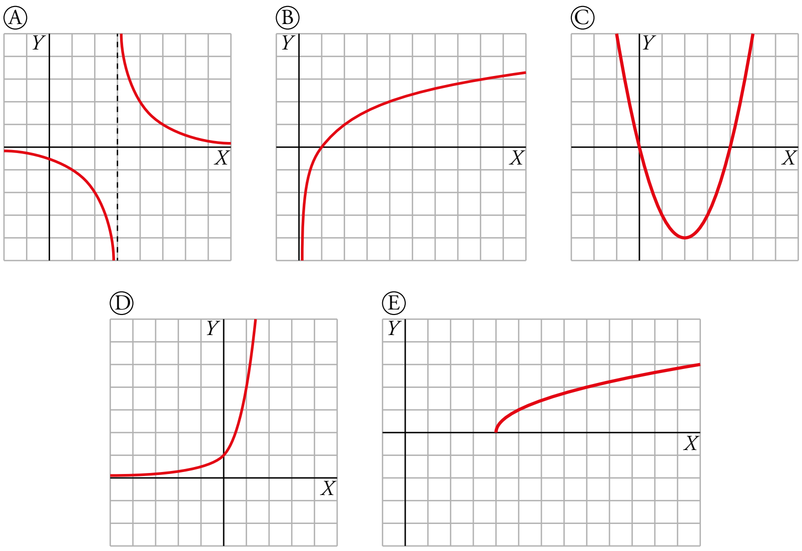
1. Cuadrática

2. Raíz

3. Proporcionalidad inversa

4. Exponencial

5. Logarítmica



I. $y = \sqrt{x-4}$ **II.** $y = 4^x$ **III.** $y = x^2 - 4x$ **IV.** $y = \log_2 x$ **V.** $y = \dfrac{2}{x-3}$

$1 \rightarrow C \rightarrow III$

$2 \rightarrow E \rightarrow I$

$3 \rightarrow A \rightarrow V$

$4 \rightarrow D \rightarrow II$

$5 \rightarrow B \rightarrow IV$

2 ▶ DOMINIO DE DEFINICIÓN

C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 119

Halla el dominio de definición de cada una de las siguientes funciones:

1 a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x - 3}$ b) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 1}$

a) Buscamos dónde se anula el denominador, ya que será donde no está definida la función:

$$x^2 - 4x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 2 \pm \sqrt{7} \;\rightarrow\; Dom = \mathbb{R} - \{x \mid x = 2 + \sqrt{7}, x = 2 - \sqrt{7}\}$$

b) El denominador no se anula nunca para valores reales $\rightarrow$ $Dom = \mathbb{R}$

2 a) $y = \sqrt{3x + 9}$ b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x - 9}}$

a) Debemos descartar los valores de x que hacen que la raíz sea negativa:

$$3x + 9 \ge 0 \;\rightarrow\; x \ge -\frac{9}{3} = -3 \;\rightarrow\; Dom = [-3, +\infty)$$

b) El denominador no puede ser cero:

$\sqrt{3x - 9} = 0 \;\rightarrow\; 3x - 9 = 0 \;\rightarrow\; x = 3$

Y la raíz existe para números mayores o iguales a cero:

$3x - 9 \ge 0 \;\rightarrow\; x \ge 3$

Por tanto: $Dom = (3, +\infty)$

3 a) $y = \sqrt{x^2 - 5x}$ b) $y = \dfrac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x}}$

a) El radicando no puede ser negativo.

$x^2 - 5x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ o $x = 5$

$x^2 - 5x$ es menor o igual que 0 si x está comprendido entre 0 y 5.

Por tanto, $Dom = (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$

b) La raíz del denominador debe ser positiva, descartamos el valor que la anula porque si no, tendríamos denominador cero:

$x^2 - 5x > 0 \;\rightarrow\; x(x-5) > 0 \;\rightarrow\; x$ y $(x-5)$ deben tener el mismo signo.

- Si $x < 0$ y $x - 5 < 0 \;\rightarrow\; x < 0$ y $x < 5 \;\rightarrow\; x < 0$
- Si $x > 0$ y $x - 5 > 0 \;\rightarrow\; x > 0$ y $x > 5 \;\rightarrow\; x > 5$

Por tanto: $Dom = (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

4 a) $y = log\ (5x - 20)$ b) $y = ln\ (x^2 - 5x)$

a) La función logaritmo existe únicamente para valores positivos:

$5x - 20 > 0 \;\rightarrow\; x > 4 \;\rightarrow\; Dom = (4, +\infty)$

b) La función logaritmo existe únicamente para valores positivos:

$x^2 - 5x > 0 \;\rightarrow\; x(x-5) > 0 \;\rightarrow\; x$ y $(x-5)$ deben tener el mismo signo.

- Si $x < 0$ y $x - 5 < 0 \;\rightarrow\; x < 0$ y $x < 5 \;\rightarrow\; x < 0$
- Si $x > 0$ y $x - 5 > 0 \;\rightarrow\; x > 0$ y $x > 5 \;\rightarrow\; x > 5$

Por tanto: $Dom = (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

5 **a)** $y = \dfrac{2x+1}{x^3-6x^2+8x}$ **b)** $y = \sqrt{x^3-6x^2}$

a) El denominador no puede ser cero:

$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x-2)(x-4)$

Por tanto: $Dom = \{x \mid x \neq 0,\ x \neq 2,\ x \neq 4\}$

b) La raíz existe si es de un número mayor o igual que cero:

$x^3 - 6x^2 = x^2(x-6) \geq 0$

- $x^2(x-6) > 0 \ \to\ x - 6 > 0 \ \to\ x > 6$
- $x^2(x-6) = 0 \ \to\ x = 0;\ x = 6$

Por tanto: $Dom = \{x \mid\ x = 0,\ x \geq 6\}$

6 **a)** $y = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{3x-1}{x-2}$ **b)** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\log x}$

a) Veamos dónde se anula uno de los dos denominadores:

$x + 1 = 0, x - 2 = 0 \ \to\ x = -1,\ x = 2 \ \to\ Dom = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

b) El logaritmo debe ser de un número mayor que cero, y eso ya nos asegura que existe la raíz del numerador $\ \to\ x > 0$

Además, el denominador no puede ser cero:

$\log x = 0 \ \to\ x = 1$

Por tanto: $Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

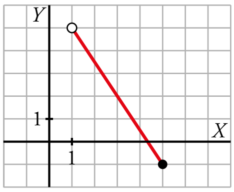
3 FUNCIONES LINEALES. INTERPOLACIÓN

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.) CE 1.8. (EA 1.8.1.) CE 3.2. (EA 3.2.1.)

Página 121

1 **Representa la siguiente función:**

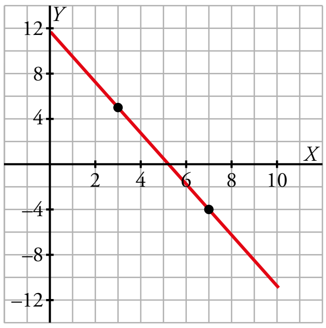
$$y = -2x + 7, \ x \in (1, 4]$$



2 **Una función lineal f cumple: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $Dom\,f = [0, 10]$. ¿Cuál es su expresión analítica? Represéntala.**

$m = \dfrac{-4-5}{7-3} = -\dfrac{9}{4}$

$y = 5 - \dfrac{9}{4}(x-3) = -\dfrac{9}{4}x + \dfrac{47}{4}, \ x \in [0, 10]$



3 **En una universidad, en el año 2014 había 15 200 alumnos matriculados, y 18 000 en el 2019. Estima cuántos había:**

a) En el año 2015.

b) En el 2017.

c) En el 2012.

d) ¿Cuántos cabe esperar que haya en el 2022?

e) ¿Y en el 2052?

$$f(x) = \frac{18\,000 - 15\,200}{2\,019 - 2\,014}(x - 2\,014) + 15\,200 = 560(x - 2\,014) + 15\,200$$

a) $f(2\,015) = 15\,760$ alumnos

b) $f(2\,017) = 16\,880$ alumnos

c) $f(2\,012) = 14\,080$ alumnos

d) $f(2\,022) = 19\,680$ alumnos

e) $f(2\,052) = 36\,480$ alumnos, aunque la extrapolación es demasiado grande.

4 **El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de su velocidad. A 60 km/h consume 5,7 L y a 90 km/h consume 7,2 L.**

a) Estima su consumo si recorre 100 km a 70 km/h.

b) ¿Cuánto consumirá a 100 km/h?

c) ¿Y a 200 km/h?

a) $f(x) = \dfrac{7,2-5,7}{90-60}(x-60) + 5,7 = \dfrac{1,5}{30}(x-60) + 5,7$

$f(70) = 0,5 + 5,7 = 6,2$ L

b) $f(100) = 2 + 5,7 = 7,7$ L

c) $f(200) = 7 + 5,7 = 12,7$ L, aunque la extrapolación es demasiado grande.

4 ▶ FUNCIONES CUADRÁTICAS. INTERPOLACIÓN

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) **CE 1.2.** (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) **CE 1.7.** (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.) **CE 1.8.** (EA 1.8.1.) **CE 3.2.** (EA 3.2.1.)

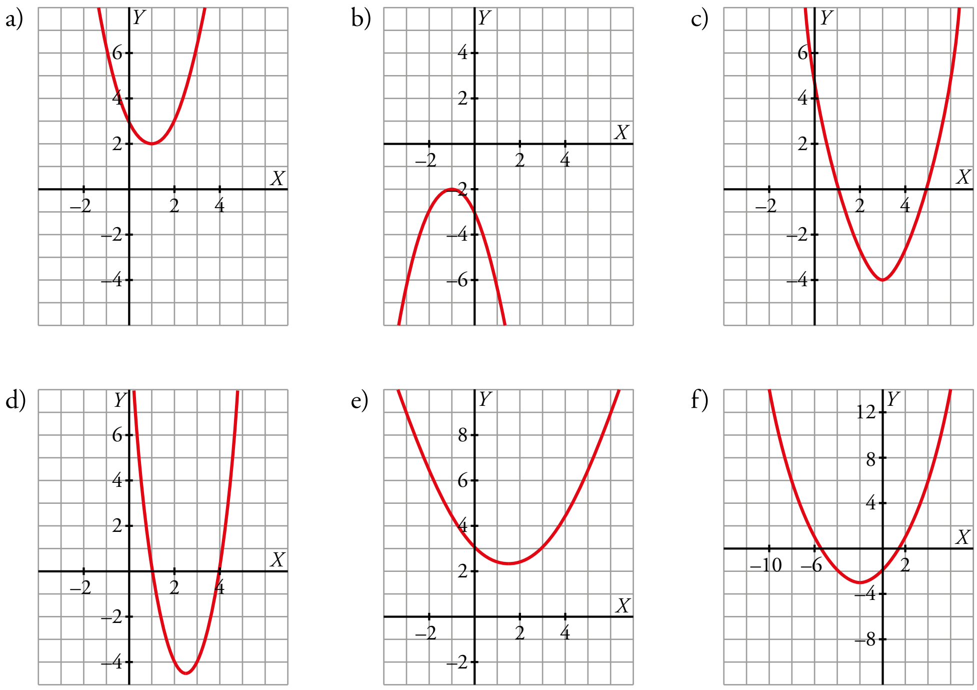
Página 122

1 **Representa estas parábolas:**

a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = -x^2 - 2x - 3$

c) $y = x^2 - 6x + 5$ **d)** $y = 2x^2 - 10x + 8$

e) $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ **f)** $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

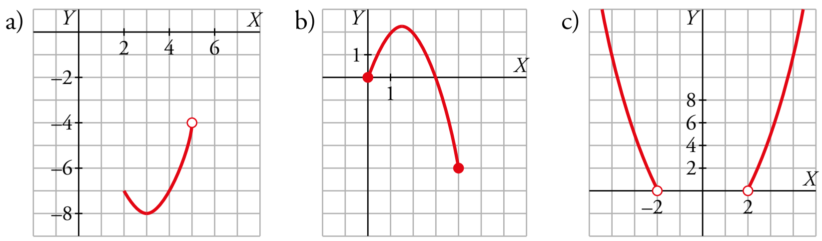


2 **Representa las funciones siguientes:**

a) $y = x^2 - 6x + 1,\ x \in [2, 5)$

b) $y = -x^2 + 3x,\ x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4,\ x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$



Página 123

Hazlo tú

1 Halla la ecuación de la parábola que pasa por (0, 3), (2, –3) y (6, 9).

$y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l}(0,3) \to 3 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \to c = 3\\ (2,-3) \to -3 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + 3 \to 4a + 2b = -6\\ (6,9) \to 9 = a\cdot 6^2 + b\cdot 6 + 3 \to 36a + 6b = 6\end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones: $a = 1,\ b = -5,\ c = 3$

La parábola buscada es $y = x^2 - 5x + 3$.

2 Halla, por el método de Newton, la ecuación de la parábola que pasa por (0, 3), (2, –3) y (6, 9). Comprueba que es la misma que se obtiene en el *Hazlo tú* anterior.

$y = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 2)$

$(0, 3) \to 3 = p + m \cdot (0 - 0) + n \cdot (0 - 0) \cdot (0 - 2) \to p = 3$

$(2, -3) \to -3 = 3 + m \cdot (2 - 0) + n \cdot (2 - 0) \cdot (2 - 2) \to 3 + 2m = -3 \to m = -3$

$(6, 9) \to 9 = 3 - 3 \cdot (6 - 0) + n \cdot (6 - 0) \cdot (6 - 2) \to 3 - 18 + 24n = 9 \to n = 1$

La parábola buscada es:

$$y = 3 - 3 \cdot (x - 0) + 1(x - 0)(x - 2) = 3 - 3x + x^2 - 2x = x^2 - 5x + 3$$

Piensa y practica

3 Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (–1, 0), (2, 12) y (8, –72).

a) Usando su ecuación en forma general.

b) Por el método de Newton.

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l}(-1,0) \to 0 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \to a - b + c = 0\\ (2,12) \to 12 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \to 4a + 2b + c = 12\\ (8,-72) \to -72 = a\cdot 8^2 + b\cdot 8 + c \to 64a + 8b + c = -72\end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema: $a = -2,\ b = 6,\ c = 8$

La parábola buscada es $y = -2x^2 + 6x + 8$.

b) $y = p + m(x + 1) + n(x + 1)(x - 2)$

$(-1, 0) \to 0 = p + m \cdot (-1 + 1) + n \cdot (-1 + 1) \cdot (-1 - 2) \to p = 0$

$(2, 12) \to 12 = m \cdot (2 + 1) + n \cdot (2 + 1) \cdot (2 - 2) \to 3m = 12 \to m = 4$

$(8, -72) \to -72 = 4 \cdot (8 + 1) + n \cdot (8 + 1) \cdot (8 - 2) \to 36 + 54n = -72 \to n = -2$

La parábola buscada es:

$y = 0 + 4(x + 1) + (-2)(x + 1)(x - 2) = 4x + 4 + (-2)(x^2 - x - 2) = 4x + 4 - 2x^2 + 2x + 4 = -2x^2 + 6x + 8$

4 **[La búsqueda de la ecuación por dos métodos y la posterior comparación de resultados requiere que el alumnado trabaje la asunción de riesgos (dimensión productiva de esta clave)].**

Halla los puntos de la parábola $y = x^2 + 6x + 5$ cuyas abscisas son 0, 3 y 5.

Obtén, por el método de Newton, la parábola que pasa por esos tres puntos y comprueba que es la misma.

Los puntos son (0, 5), (3, 32) y (5, 60).

$y = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 3)$

$(0, 5) \rightarrow 5 = p + m \cdot (0 - 0) + n \cdot (0 - 0) \cdot (0 - 3) \rightarrow p = 5$

$(3, 32) \rightarrow 32 = 5 + m \cdot (3 - 0) + n \cdot (3 - 0) \cdot (3 - 3) \rightarrow 5 + 3m = 32 \rightarrow m = 9$

$(5, 60) \rightarrow 60 = 5 + 9 \cdot (5 - 0) + n \cdot (5 - 0) \cdot (5 - 3) \rightarrow 5 + 45 + 10n = 60 \rightarrow n = 1$

La parábola buscada es:

$y = 5 + 9(x - 0) + 1(x - 0)(x - 3) = 5 + 9x + x^2 - 3x = x^2 + 6x + 5$

Página 124

Hazlo tú

1 **El porcentaje de paro en España en algunos años fue:**

AÑO	1994	1997	2000
%	24,1	20,6	13,9

Estima el porcentaje de paro en 1998, 2001 y 2003 y compáralo con los valores reales:

AÑO	1998	2001	2003
%	18,6	10,63	11,37

Tomamos como año cero el año 1994. Hemos de obtener la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (0; 24,1), (3; 20,6) y (6; 13,9).

$y = P(x) = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 3) \rightarrow y = P(x) = p + mx + nx(x - 3)$

$(0; 24{,}1) \rightarrow 24{,}1 = p + m \cdot 0 + n \cdot 0 \rightarrow p = 24{,}1$

$(3; 20{,}6) \rightarrow 20{,}6 = 24{,}1 + 3m + n \cdot 0 \rightarrow m = -\dfrac{3{,}5}{3} = -1{,}167$

$(6; 13{,}9) \rightarrow 13{,}9 = 24{,}1 - \dfrac{3{,}5}{3} \cdot 6 + n \cdot 6 \cdot 3 \rightarrow 18n = -3{,}2 \rightarrow n = -\dfrac{1{,}6}{9} = -0{,}178$

La parábola buscada es:

$P(x) = y = 24{,}1 - 1{,}167x - 0{,}178x(x - 3) \rightarrow y = -0{,}178x^2 - 0{,}633x + 24{,}1$

Obtenemos el valor de $P(x)$ en los puntos pedidos:

1998 $\rightarrow x = 4 \rightarrow P(4) = -0{,}178 \cdot 16 - 0{,}633 \cdot 4 + 24{,}1 = 18{,}72$ (está muy próximo al valor real, 18,6).

2001 $\rightarrow x = 7 \rightarrow P(7) = -0{,}178 \cdot 49 - 0{,}633 \cdot 7 + 24{,}1 = 10{,}947$ (está muy próximo al valor real, 10,63).

2003 $\rightarrow x = 9 \rightarrow P(9) = -0{,}178 \cdot 81 - 0{,}633 \cdot 9 + 24{,}1 = 3{,}985$ (muy alejado del valor real, 11,37).

Piensa y practica

5 ODS Meta 13.2. **[Tras el visionado del vídeo el docente puede proponer un debate sobre el futuro del ecologismo].**

Una asociación ecologista tenía 12 300 miembros en el año 2015, 14 100 miembros en 2017 y 15 600 en 2020. Estima cuántos tenía:

a) En el año 2016.

b) En 2018 y en 2012.

c) ¿Cuántos cabe esperar que tenga en 2022?

Interpreta cada resultado teniendo en cuenta si es interpolación o extrapolación y cómo de alejados están los datos del intervalo de datos reales.

Tomamos como año cero el año 2015. En consecuencia, hemos de obtener la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (0, 12 300), (2, 14 100), (5, 15 600). Lo haremos mediante el método de Newton:

$$P(x) = p + m(x-0) + n(x-0)(x-2)$$

Ahora, imponemos que pase por cada uno de los tres puntos dados:

Pasa por (0, 12 300) $\rightarrow$ $12\,300 = p + 0 + 0 \rightarrow p = 12\,300$

Pasa por (2, 14 100) $\rightarrow$ $14100 = p + 2m + 2\cdot 0\cdot n \rightarrow 14100 = 12\,300 + 2m \rightarrow m = 900$

Pasa por (5, 15 600) $\rightarrow$ $15600 = p + 5m + 5\cdot 3\cdot n \rightarrow 15600 = 12\,300 + 5\cdot 900 + 15n \rightarrow 2 = -80$

Por tanto: $P(x) = 12\,300 + 900x - 80x(x-2)$

a) $2016 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1) = 13\,280$ interpolación parabólica dentro del intervalo inicial, por lo que la aproximación es buena.

b) $2018 \rightarrow x = 3 \rightarrow P(3) = 14\,760$ interpolación parabólica dentro del intervalo inicial, por lo que la aproximación es buena.

$2012 \rightarrow x = -3 \rightarrow P(-3) = 8\,400$ extrapolación parabólica fuera del intervalo inicial, por lo que la aproximación no es tan buena aunque está cerca del intervalo.

c) $2022 \rightarrow x = 7 \rightarrow P(7) = 15\,800$ extrapolación parabólica fuera del intervalo inicial, por lo que la aproximación no es tan buena, porque además está alejado del intervalo por lo que será peor aproximación que para el año 2012.

6 **El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de su velocidad. A 60 km/h consume 5,7 L; a 70 km/h, 6 L y a 90 km/h consume 7,2 L. Calcula cuánto gastará por cada 100 km recorridos yendo a:**

a) 80 km/h **b) 100 km/h** **c) 200 km/h**

Este enunciado es como el del ejercicio 4 del epígrafe anterior, pero enriquecido con un nuevo dato correspondiente al consumo a 70 km/h, con lo que ahora, con tres puntos, se puede efectuar una interpolación parabólica.

Tenemos estos tres puntos: (60; 5,7), (70; 6) y (90; 7,2).

$y = c + b(x-60) + a(x-60)(x-70)$

$x = 60 \rightarrow 5{,}7 = c \rightarrow c = 5{,}7$

$x = 70 \rightarrow 6 = c + b\cdot(70-60) \rightarrow b = 0{,}03$

$x = 90 \rightarrow 7{,}2 = c + b\cdot(90-60) + a\cdot(90-60)(90-70) \rightarrow a = 0{,}001$

$y = c + 0{,}03\cdot(x-60) + 0{,}001\cdot(x-60)(x-70)$

a) $y(80) = 6{,}5$

b) $y(100) = 8{,}1$

c) $y(200) = 28{,}1$

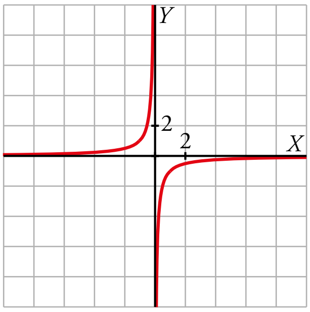
5 ▶ FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) **CE 3.1.** (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

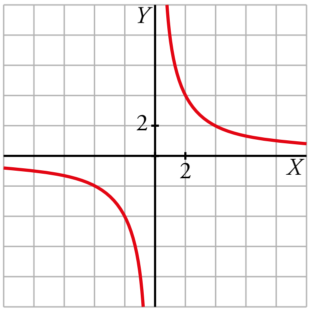
Página 125

1 **Representa:** a) $y = -\frac{1}{x}$ b) $y = \frac{8}{x}$ c) $y = -\frac{6}{x}$ d) $y = \frac{12}{x}$ e) $y = -\frac{16}{x}$

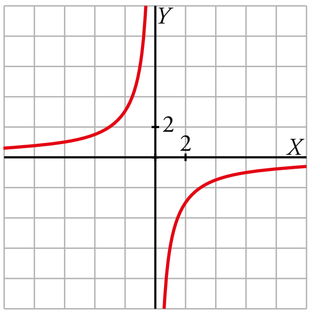
a)



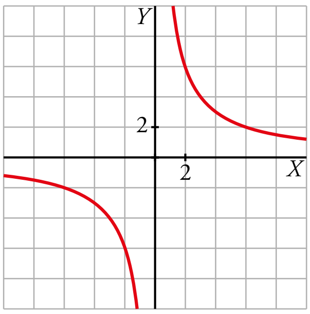
b)



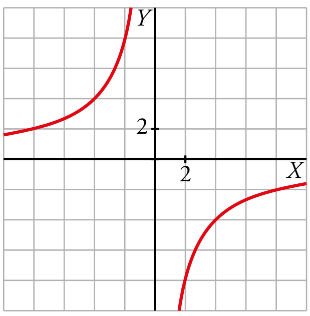
c)



d)



e)



6 ▶ FUNCIONES RAÍZ

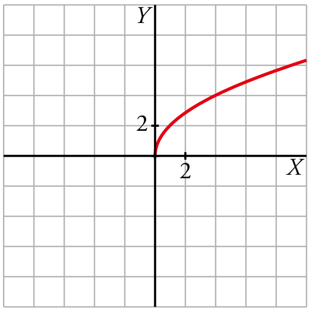
C.E.: CE 1.13. (EA 1.13.1.-EA 1.13.2.-EA 1.13.3.) CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 126

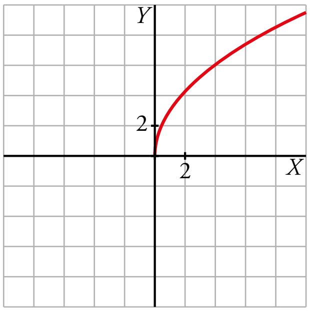
1 **Representa:**

a) $y = \sqrt{4x}$ **b)** $y = \sqrt{9x}$ **c)** $y = -\sqrt{9x}$ **d)** $y = \sqrt{-9x}$ **e)** $y = \sqrt[3]{-8x}$

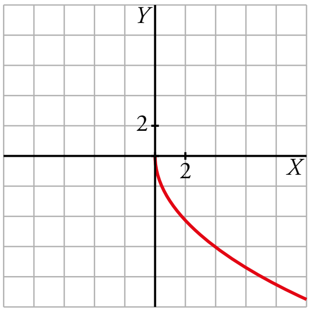
a)



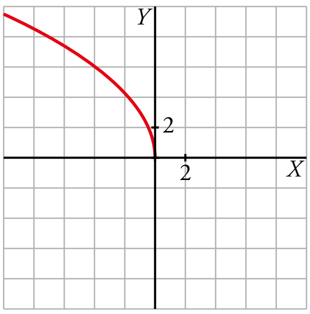
b)



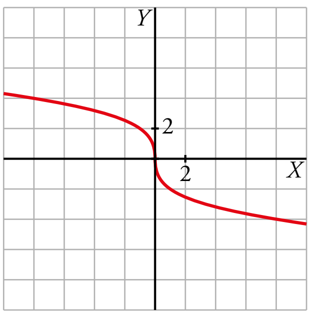
c)



d)

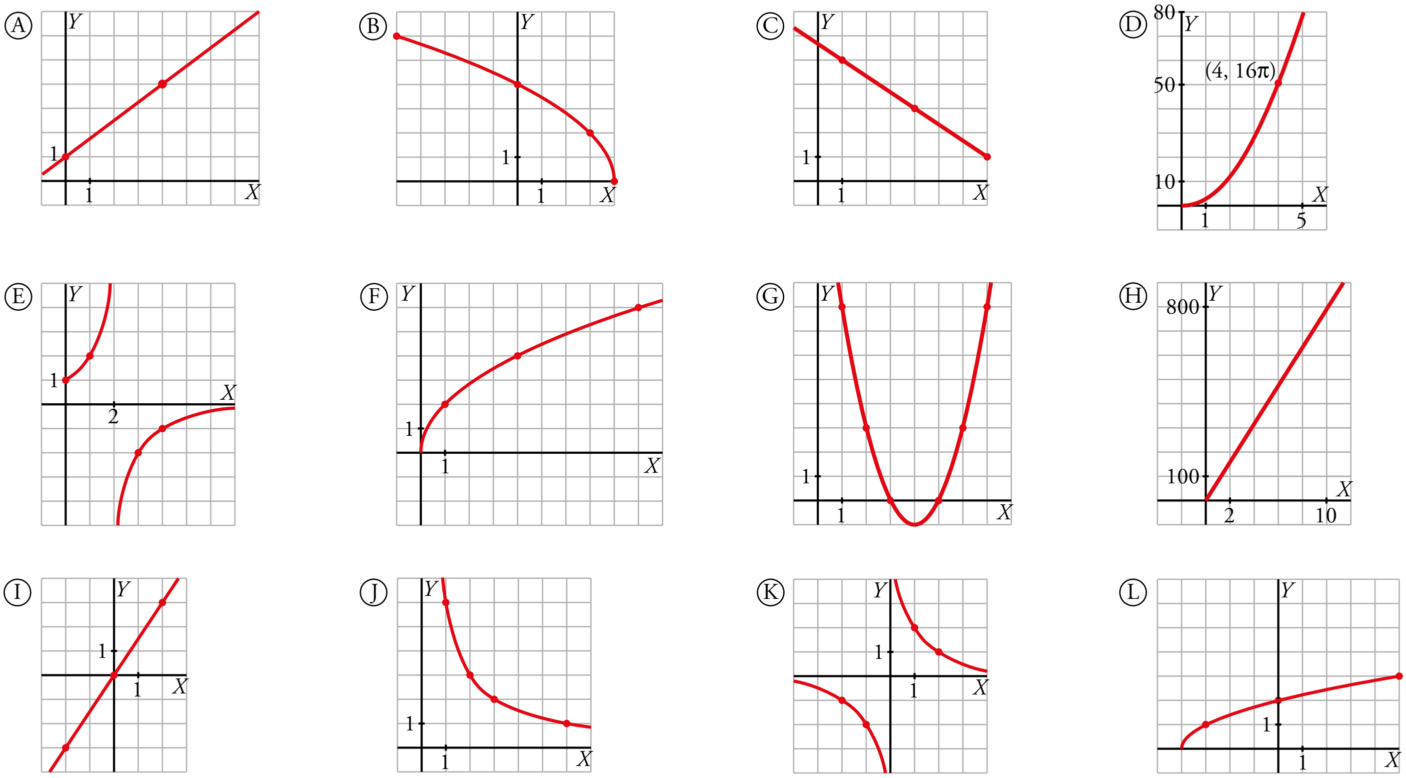


e)



Página 127

2 **Asocia a cada una de las siguientes gráficas una de las ecuaciones de abajo. Observa que hay más ecuaciones que gráficas.**



LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORCIONALIDAD INVERSA	RADICALES
L₁ $y = \frac{3}{2}x$	**C₁** $y = x^2 - 8x + 15$	**PI₁** $y = \frac{1}{x}$	**R₁** $y = \sqrt{2x+4}$
L₂ $y = -\frac{2}{3}(x-1) + 5$	**C₂** $y = (x+3)(x+5)$	**PI₂** $y = \frac{2}{2-x}, x \ge 0$	**R₂** $y = \sqrt{x+4}$
L₃ $y = 25\pi x$	**C₃** $y = x^2,\ x > 0$	**PI₃** $y = \frac{2}{x}$	**R₃** $y = 2\sqrt{4-x}$
L₄ $y = \frac{3}{4}x + 1, x \ge 0$	**C₄** $y = \pi x^2,\ x > 0$	**PI₄** $y = \frac{6}{x},\ x > 0$	**R₄** $y = \sqrt{4x},\ x > 0$

$A \to L_4$ $\quad B \to R_3$ $\quad C \to L_2$ $\quad D \to C_4$ $\quad E \to PI_2$ $\quad F \to R_4$

$G \to C_1$ $\quad H \to L_3$ $\quad I \to L_1$ $\quad J \to PI_4$ $\quad K \to PI_3$ $\quad L \to R_2$

3 **Cada uno de los siguientes enunciados se corresponde con una gráfica de entre las del ejercicio anterior.**

Identifícala.

1. **Superficie, en centímetros cuadrados, de un círculo. Radio, en centímetros.**
2. **Aumento de una lupa. Distancia al objeto, en centímetros.**
3. **Periodo de un péndulo. Longitud, en metros.**
4. **Volumen de un cilindro, en centímetros cúbicos. El radio del círculo de su base mide 5 cm. Altura, en centímetros.**
5. **Longitud de un muelle, en decímetros. Mide 1 dm y se alarga 75 mm por cada kilo que se le cuelga.**
6. **Dimensiones (largo y ancho, en centímetros) de los rectángulos que tienen una superficie de 6 cm².**

$1 \to D \quad 2 \to E \quad 3 \to F \quad 4 \to H \quad 5 \to A \quad 6 \to J$

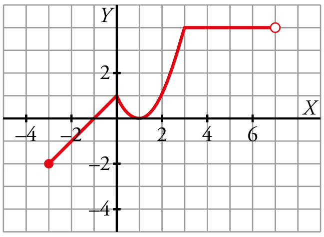
7 FUNCIONES DEFINIDAS «A TROZOS»

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.) CE 1.10. (EA 1.10.1.) CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 128

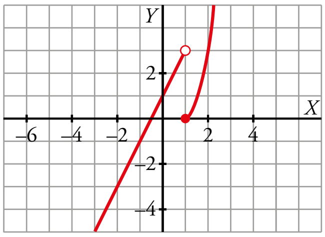
1 Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \in [0, 3] \\ 4 & \text{si } x \in (3, 7) \end{cases}$$

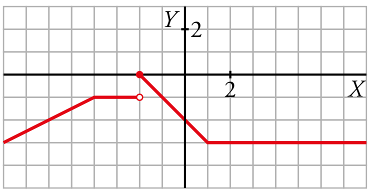


2 Haz la representación gráfica de la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$



3 Escribe la expresión analítica que corresponde a la siguiente gráfica:



Primer tramo:

- Recta que pasa por los puntos $(-6, -2)$ y $(-4, -1)$.
- La pendiente es $\dfrac{-1-(-2)}{-4-(-6)} = \dfrac{1}{2}$ y la ecuación es $y - (-1) = \dfrac{1}{2}(x - (-4))$.

Segundo tramo:

- $y = -1$

Tercer tramo:

- Pertenece a una recta que pasa por $(0, -2)$ y $(1, -3)$.
- La pendiente es $\dfrac{-3-(-2)}{1-0} = -1$ y la ecuación es $y - (-2) = -x$.

Cuarto tramo: $y = -3$

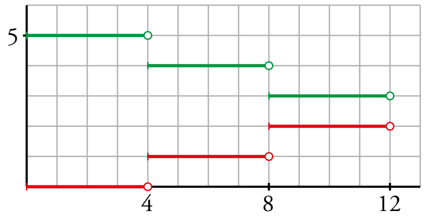
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & \text{si } x < -4 \\ -1 & \text{si } -4 \le x < -2 \\ -x - 2 & \text{si } -2 \le x < 1 \\ -3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

Página 129

4 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a la función $y = Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica verde corresponde a la función $y = 5 + Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.



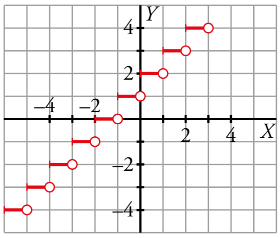
a) Verdadero.

b) Falso. La gráfica verde es $y = 5 - Ent\left(\frac{x}{4}\right)$

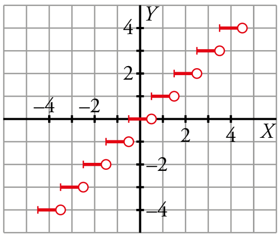
5 **Representa:**

a) $y = Ent(x) + 2$ **b) $y = Ent(x + 0{,}5)$**

a) $y = Ent\ (x) + 2$



b) $y = Ent\ (x + 0{,}5)$



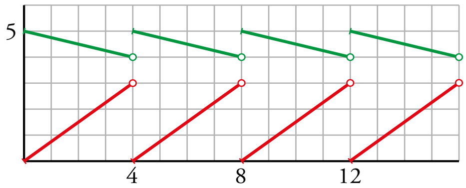
6 **[El docente puede pedir al alumnado que explique sus decisiones para que este trabaje la destreza expresión oral de esta clave].**

¿Verdadero o falso?

a) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant(4x)$.

c) La gráfica verde corresponde a $y = 5 - Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero

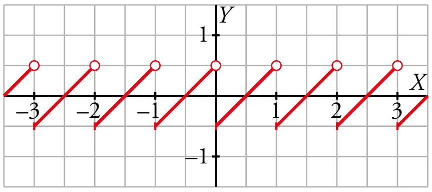
b) Falso

c) Verdadero

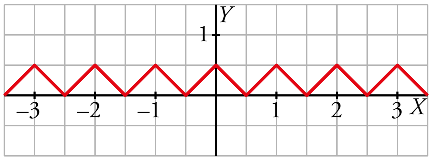
7 Representa:

a) $y = Mant(x) - 0{,}5$ **b)** $y = |Mant(x) - 0{,}5|$

a) $y = Mant\,(x) - 0{,}5$



b) $y = |Mant\,(x) - 0{,}5|$

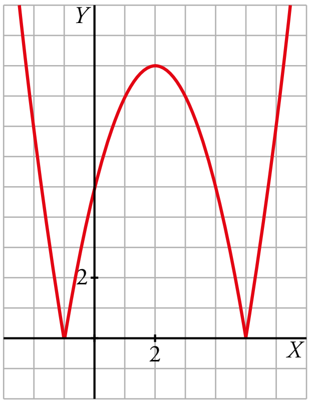


8 ▶ VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

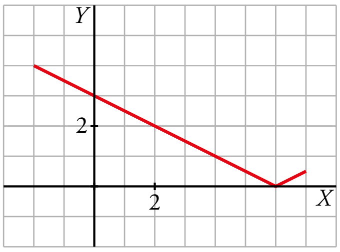
C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 130

1 **Representa:** $y = |-x^2 + 4x + 5|$



2 **Representa gráficamente:** $y = \left|\frac{x}{2} - 3\right|$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.2.-EA 1.2.3.)

Página 131

1. Dominio de definición

Hazlo tú

- **Halla el dominio de definición de la función:**

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$$

a) Buscamos los valores de x tales que $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$:

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} = \dfrac{-5 \pm 1}{-2} \to x = 2,\ x = 3$

Estos dos puntos pertenecen al dominio, veamos qué pasa en los intervalos restantes:

$-x^2 + 5x - 6 \geq 0 \to -(x-2)(x-3) \geq 0 \to (x-2)(x-3) \leq 0$

- Si $x < 2 \to x - 2 < 0;\ x - 3 < 0 \to (x-2)\ (x-3) > 0$
- Si $2 < x < 3 \to x - 2 > 0;\ x - 3 < 0 \to (x-2)\ (x-3) < 0$
- Si $x < 3 \to x - 2 > 0;\ x - 3 > 3 \to (x-2)\ (x-3) > 0$

Por tanto:

$Dom\, f = [2, 3]$

2. Interpolación lineal

- **El porcentaje de personas que tenían acceso a Internet en España, era en 2018 el 86,1 % y en 2014 el 74,4 %. Estimar el porcentaje en 2016.**

Para escribir la recta que pasa por A y B buscamos su vector director, por ejemplo puede ser:

$\overrightarrow{BA} = (4; 11,7)$

Podemos escribir esta recta:

$\dfrac{x-2018}{4} = \dfrac{y-86,1}{11,7} \to y = \dfrac{11,7x - 23\,610,6 + 344,4}{4} \to y = 2,925x - 5\,816,55$

Así:

$f(x) = 2,925x - 5\,816,55$

Por tanto: $f(2016) = 80,25$

3. Función cuadrática

- **Representa la siguiente función:**

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \; 4 \le t \le 7$$

La función $f(t)$ es una parábola con las ramas abiertas hacia abajo.

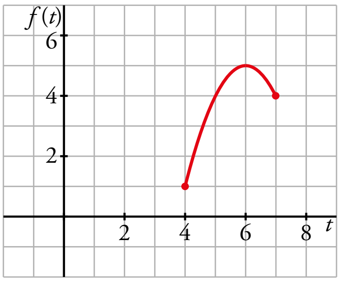
Calculamos las coordenadas del vértice:

$t = \dfrac{-12}{-2} = 6 \;\to\; f(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 31 = 5 \;\to\;$ El punto (6, 5) es el vértice de la parábola.

Hallamos los valores de la función en los extremos del intervalo dominio de definición:

$f(4) = -4^2 + 12 \cdot 4 - 31 = 1 \;\to\;$ Pasa por el punto (4, 1).

$f(7) = -7^2 + 12 \cdot 7 - 31 = 4 \;\to\;$ Pasa por el punto (7, 4).



Página 132

4. Ecuación y representación de una parábola

- **Escribe la ecuación de la parábola que tiene el vértice en (2, –4) y pasa por el punto (3, –3).**

Una parábola tiene por ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Tenemos que hallar a, b y c.

$$V(2,-4) \;\to\; 2 = -\frac{b}{2a} \;\to\; b = -4a \;\; (1)$$

$P(3,-3)$ pertenece a la parábola: $-3 = 9a + 3b + c$ (2)

$V(2,-4)$ pertenece a la parábola: $-4 = 4a + 2b + c$ (3)

Resolvemos el sistema compuesto por (1), (2), (3), sustituyendo (1) en (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{l} -3 = 9a - 12a + c \\ -4 = 4a - 8a + c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\; -3 + 3a = c \\ \to\; -4 + 4a = c \end{array}$$

Por tanto:

$$-3 + 3a = -4 + 4a \;\to\; a = 1 \;\to\; b = -4 \;\to\; c = 0$$

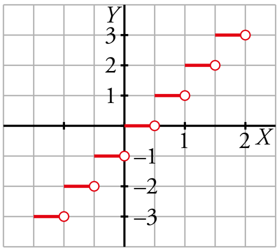
La parábola queda definida: $y = x^2 - 4x$

Página 133

6. Función «parte entera»

- **Representa $f(x) = Ent\,(2x)$.**

Esta gráfica es como la de la función parte entera, pero contraída a la mitad en el sentido del eje horizontal.



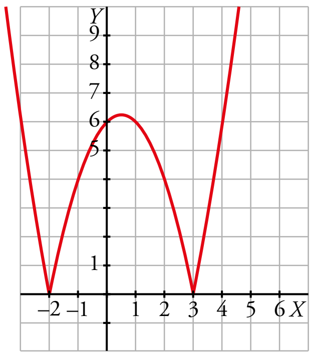
7. Valor absoluto de una función

- **Define por intervalos y representa:**

a) $f(x) = |x^2 - x - 6|$ **b)** $f(x) = x - |x|$ **c)** $f(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

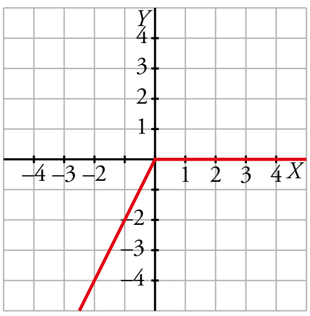
a) La parábola $y = x^2 - x - 6$ tiene su vértice en el punto (0,5; 6,25). Es negativa entre –2 y 3. Luego en ese intervalo su gráfica es $-f(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \le -2 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 < x \le 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$



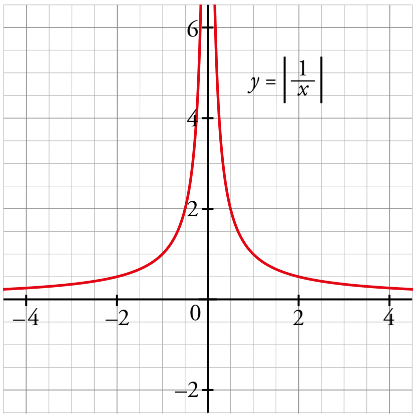
b) Por la definición de la función valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x - (-x) & \text{si } x < 0 \\ x - x & \text{si } 0 \le x \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$



c) Para que exista la función el denominador no se puede anular $\rightarrow$ $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.7. (EA 1.7.1.-EA 1.7.2.-EA 1.7.3.-EA 1.7.4.) CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 134

1. Funciones lineales

- **Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tarifas:**

A: 120 km → 80 €

350 km → 137,5 €

B: 150 km → 75 €

250 km → 125 €

Analizar cuál es más ventajosa según los kilómetros que vayamos a recorrer.

Buscamos definir una función $f(x)$ para el caso A que cumpla:

$f(120) = 80$

$f(350) = 137{,}5$

$$f(x) = \frac{137{,}5-80}{350-120}(x-120)+80 = \frac{1}{4}(x-120)+80 = \frac{1}{4}x+50$$

Buscamos definir una función $g(x)$ para el caso B que cumpla:

$g(150) = 75$

$g(250) = 125$

$$g(x) = \frac{125-75}{250-150}(x-150)+75 = \frac{1}{2}(x-150)+75 = \frac{1}{2}x$$

Buscamos su punto de corte:

$$f(x) = g(x) \to \frac{1}{4}x+50 = \frac{1}{2}x \to \frac{1}{4}x = 50 \to x = 200 \to P(200, 100)$$

La pendiente de la recta g es mayor que la de f, por tanto, para $x > 200$, la gráfica de f estará por debajo de la gráfica de g, por tanto, para más de 200 km será más barata la tarifa A.

En cambio, si $x < 200$ es la tarifa B la que nos resulta más barata.

Solamente en el caso de recorrer 200 km dará lo mismo qué tarifa elegir.

2. Una función cuadrática

- **Los costes de producción de un cierto producto (en euros) de una empresa, vienen dados por:**

$\boldsymbol{C = 40\,000 + 20q + q^2}$

siendo q el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520 euros.

a) Expresar en función de q el beneficio de la empresa y representarlo.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

a) $B(q) = 520q - (40\,000 + 20q + q^2) = -q^2 + 500q - 40\,000$

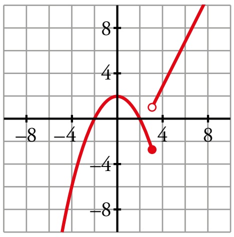
b) El beneficio es máximo en el vértice de la parábola anterior, ya que tiene las ramas hacia abajo.

La abscisa del vértice es $\dfrac{-500}{-2} = 250$ y el beneficio será:

$B(250) = -250^2 + 500 \cdot 250 - 40\,000 = 22\,500$ €

3. Expresión analítica de una función

- **Escribir la expresión analítica de esta función $f(x)$:**



Para hallar la fórmula de la parábola, la escribimos en la forma: $y = ax^2 + bx + c$

Sustituimos en ella tres de los puntos de su gráfica:

$(2, 0) \to 0 = 4a + 2b + c \ (1)$

$(-2, 0) \to 0 = 4a - 2b + c \ (2)$

$(0, 2) \to 2 = c \ (3)$

Sumamos (1) y (2) y sustituimos el valor de c encontrado en (3):

$8a + 4 = 0 \to a = -\frac{1}{2} \to b = 0 \to y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

Por otra parte, la recta es $y = 2x - 5$:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

4. Producción máxima

- **En un huerto hay 40 manzanos. Cada uno produce 600 manzanas. Por cada árbol adicional que se plante, la producción de cada árbol se reduce en 10 manzanas. ¿Cuántos árboles se deben plantar para obtener la producción más alta posible? ¿Cuál es dicha producción?**

Veamos la producción para 40 árboles.

Como cada uno produce 600 manzanas:

$40 \cdot 600 = 24000$ manzanas

Si añadimos 5 árboles, la producción de 45 árboles será:

$45\,(600 - 50) = 24750$ manzanas

Si añadimos x árboles, la producción de $40 + x$ árboles será:

$P(x) = (40 + x)\,(600 - 10x) = 24000 + 600x - 400x - 10x^2 \to P(x) = -10x^2 - 200x + 24000$

El coeficiente de x^2 es negativo, por tanto, el máximo se alcanza en el vértice de la parábola.

La coordenada de las abscisas del vértice viene dada por $-\frac{b}{2a}$ siendo la función $y = ax^2 + bx + c$.

En nuestro caso:

$$a = -10,\ b = -200 \to -\frac{b}{2a} = \frac{-200}{-20} = 10 \to P(10) = 25000 \to V(10, 25000)$$

Se deben plantar 10 árboles más para alcanzar la máxima producción y esta será de 25 000 manzanas.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 135

Para practicar

Dominio de definición

1 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{2}{(x+5)^2}$ **b)** $y = \dfrac{3x+2}{x^3+x}$

c) $y = \dfrac{x}{x^2-x+2}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

e) $y = \dfrac{1}{2}(x-2)^3 + x^2$ **f)** $y = x^2 - 4$

a) La función no está definida cuando $x = -5$. Su dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-5\}$.

b) $x^3 + x = 0$, tiene como única solución $x = 0$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) La función no está definida cuando $x^2 - x + 2 = 0$, que no tiene solución. Por tanto, el dominio es $Dom = \mathbb{R}$.

d) Las fracciones no se pueden evaluar ni en $x = 0$ ni en $x = -2$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

e) Como en todas las funciones polinómicas, su dominio es todo $\mathbb{R}$

f) Como en todas las funciones polinómicas, su dominio es todo $\mathbb{R}$

2 **Estudia el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{2x+5}$ **b)** $y = \sqrt{7-x}$

c) $y = \sqrt{x^2+3x+4}$ **d)** $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

a) Para que esté definida debe ser $2x + 5 \ge 0$, cuya solución es $\left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$. Su dominio es este intervalo, $Dom = \left[-\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) En este caso $x \le 7$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 7]$.

c) $x^2 + 3x + 4 \ge 0 \ \rightarrow \ Dom = \mathbb{R}$

d) Para que ambas raíces existan simultáneamente debe cumplirse a la vez que $x \ge 1$ y $x \ge 2$. El dominio es $Dom = [2, +\infty)$.

3 **Di cuál es el dominio de definición de:**

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9-x^2}}$ **d)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$

a) El radicando no puede ser negativo ni tampoco 0 en este caso. Por tanto,

$4 - x > 0 \ \rightarrow \ Dom = (-\infty, 4)$.

b) Análogamente, $x^2 + 1 > 0 \ \rightarrow \ Dom = \mathbb{R}$ porque en el primer miembro sumamos al número 1 (que es positivo) una potencia par (que nunca es negativa).

c) $9 - x^2 > 0$ y resolvemos construyendo la tabla de los signos:

$9 - x^2 = 0 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
SIGNO DE $9 - x^2$	–	+	–

Por tanto, $Dom = (-3, 3)$.

d) Resolvemos $x^2 - 3x > 0$ mediante la tabla de los signos del polinomio.

$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
SIGNO DE $x^2 - 3x$	+	–	+

Por tanto, $Dom = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

4 **Determina el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = ln\,(x^2 - 4x)$

b) $y = ln\left(\sqrt{x-2}\right)$

c) $y = \sqrt[3]{5 - x}$

d) $y = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{2x + 1}$

e) $y = ln\left(\dfrac{1}{x^2 + 3}\right)$

f) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-4}}$

a) La función está definida si $x^2 - 4x > 0 \rightarrow x(x-4) > 0$

- $x > 0,\ x - 4 > 0 \rightarrow x > 4$
- $x < 0,\ x - 4 < 0 \rightarrow x < 0$

Por tanto: $Dom = (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$

b) La función está definida si:

- $x - 2 \ge 0 \rightarrow x \ge 2$ (para que esté definida la raíz).
- $\sqrt{x-2} > 0 \rightarrow x \ne 2$

Por tanto: $Dom = (2, +\infty)$

c) La raíz cúbica está definida independientemente del signo del radicando. Como este es un polinomio de primer grado, también está siempre definido.

$Dom = \mathbb{R}$

d) $$\left.\begin{array}{l}\text{Para que exista la raíz: } 4 - x^2 \ge 0 \rightarrow x \in [-2, 2] \\ \text{Para que no se anule el denominador: } x \ne \dfrac{1}{2} \rightarrow Dom = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty\right)\end{array}\right\} \rightarrow Dom = \left[-2, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right]$$

e) La función está definida si:

- $x^2 + 3 \ne 0 \rightarrow x^2 \ne -3$

  Siempre cierto por lo que el denominador no se anula.

  Por tanto: $Dom = \mathbb{R}$

- $\dfrac{1}{x^2 + 3} > 0 \rightarrow x^2 + 3 > 0 \rightarrow x^2 > -3$ siempre cierto por lo que siempre existe el logaritmo.

  Por tanto: $Dom = \mathbb{R}$

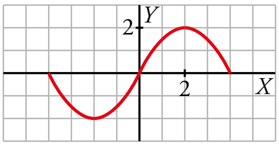
f) La raíz cúbica está definida independientemente del signo del radicando. La función está definida si no se anula el denominador del radicando:

$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

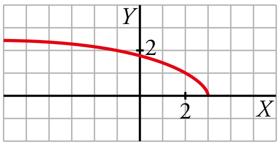
Por tanto: $Dom = \mathbb{R} - \{4\}$

5 **Observa las gráficas de estas funciones e indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:**

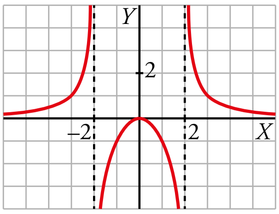
a)



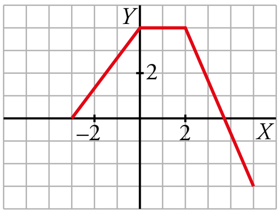
b)



c)



d)



a) Dominio: $[-4, 4]$ Recorrido: $[-2, 2]$

b) Dominio: $(-\infty, 3]$ Recorrido: $[0, +\infty)$

c) Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Recorrido: $\mathbb{R}$

d) Dominio: $[-3, 5]$ Recorrido: $[-3, 4]$

6 **La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t, hasta que vuelve al suelo. ¿Cuál es su dominio de definición?**

Necesitamos calcular el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo. Para ello es necesario resolver la ecuación:

$$80 + 64t - 16t^2 = 0, \text{ que tiene una solución posible, } t = 5.$$

Como el tiempo no puede ser negativo, el dominio es $Dom = [0, 5]$.

7 **[El análisis de este tipo de funciones es una oportunidad para trabajar la dimensión social (comunidad y bien común) de esta clave].**

La temperatura de un paciente, desde que comienza su enfermedad hasta que vuelve a tener 37 °C, ha evolucionado según la función $T = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37$, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la enfermedad. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

Calculamos los días en los que tiene 37 °C.

$$-0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37 = 37 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 12$$

Es decir, a los 12 días vuelve a tener 37 °C de temperatura. El dominio es el intervalo $[0, 12]$.

Como se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, el valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\dfrac{-1{,}2}{-0{,}2} = 6$.

La temperatura máxima es $-0{,}1 \cdot 6^2 + 1{,}2 \cdot 6 + 37 = 40{,}6$ °C.

En consecuencia, el recorrido es el intervalo $[37;\ 40{,}6]$.

Funciones lineales y cuadráticas. Interpolación

8 **Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas y represéntalas gráficamente:**

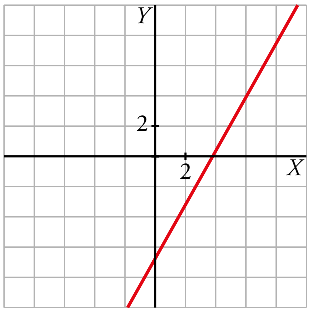
a) Pasa por $P(1, -5)$ y $Q(10, 11)$.

b) Pasa por (–7, 2) y su pendiente es –0,75.

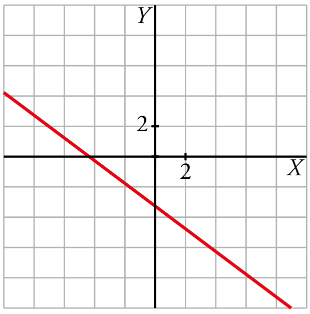
c) Corta a los ejes en (3,5; 0) y (0, –5).

d) Es paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$ y pasa por el punto (–2, –3).

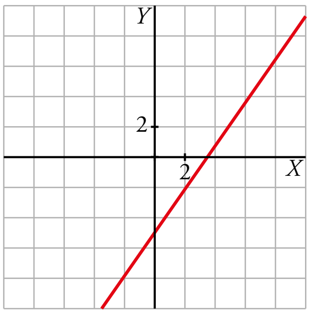
a) $m = \dfrac{11-(-5)}{10-1} = \dfrac{16}{9}$ $\quad y = -5 + \dfrac{16}{9}(x-1) \rightarrow y = \dfrac{16x-61}{9}$



b) $y = 2 - 0{,}75[x - (-7)] \rightarrow y = -0{,}75x - 3{,}25$

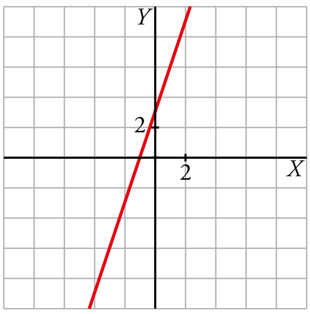


c) $m = \dfrac{-5-0}{0-3,5} = \dfrac{5}{3,5} = \dfrac{10}{7}$ $\quad y = \dfrac{10}{7}x - 5$

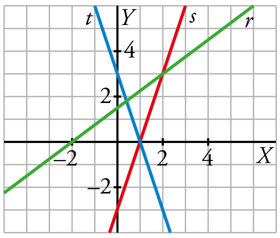


d) $3x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 3x + 1$

La pendiente de la recta buscada es 3 para que sea paralela a la recta dada. Por tanto, la ecuación es $y = -3 + 3[x - (-2)] \rightarrow y = 3x + 3$.



9 **Calcula la pendiente de las rectas r, s y t y escribe su ecuación.**



- Recta r:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{4} \\ \text{Pasa por } (-2, 0) \end{array}\right\} \to \text{La ecuación de la recta es } y = \frac{3}{4}(x+2) \to y = \frac{3x+6}{4}.$$

- Recta s:

$$\left.\begin{array}{l} m = 3 \\ \text{Pasa por } (0, -3) \end{array}\right\} \to \text{La ecuación de la recta es } y = 3x - 3.$$

- Recta t:

$$\left.\begin{array}{l} m = -3 \\ \text{Pasa por } (0, 3) \end{array}\right\} \to \text{La ecuación de la recta es } y = -3x + 3.$$

10 **Calcula, mediante interpolación o extrapolación lineal, los valores de y que faltan en cada tabla:**

a)

x	0,45	0,5	0,6
y	2	…	0,25

b)

x	47	112	120
y	18	37	…

a) $y = 2 - 11,\widehat{6}(x - 0,45) \to y_0 = 2 - 11,\widehat{6}(0,5 - 0,45) = 1,42$

b) $y = 18 + 0,292(x - 47) \to y_0 = 18 + 0,292(120 - 47) = 39,32$

11 **La siguiente tabla muestra los ingresos, en millones de euros, de una fábrica de cemento según el número de toneladas vendidas:**

x (TONELADAS)	1	3	5
y (MILLONES DE EUROS)	5,2	14,8	21,2

Estima, mediante interpolación cuadrática, los ingresos obtenidos si se venden 2 t y 4 t.

Busquemos la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ que sabemos que pasa por los puntos (1; 5,2), (3; 14,8) y (5; 21,2).

Imponemos que pase por ellos para encontrar los valores de a, b y c, resolviendo un sistema de tres ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5,2 = a + b + c \\ 14,8 = 9a + 3 + c \\ 21,2 = 25a + 5b + c \end{array}\right\}$$

A la tercera y segunda ecuación le restamos la primera:

$$9,6 = 8a + 2b \to b = \frac{9,6 - 8a}{2}$$
$$16 = 24a + 4b \to 4 = 6a + b \to b = 4 - 6a$$

Igualamos los dos valores de b:

$$\frac{9,6 - 8a}{2} = 4 - 6a \to a = -0,4 \to b = 6,4 \to c = -0,8$$

Por tanto, $f(x) = -0,4x^2 + 6,4x - 0,8$ es nuestra función de interpolación cuadrática.

Estimamos los valores pedidos, que como están dentro del intervalo (1,5), serán una buena aproximación:

$f(2) = 10,4$

$f(4) = 18,4$

Si venden 2 toneladas ingresarán 10,4 millones de euros y si venden 4 toneladas ingresarán 18,4 millones de euros.

12 **Representa las siguientes funciones:**

a) $y = x^2 + 2x + 1$

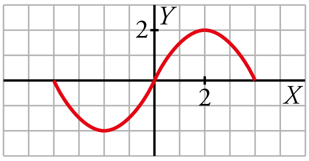
b) $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$

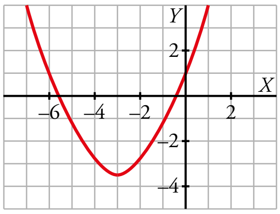
c) $y = -x^2 + 3x - 5$

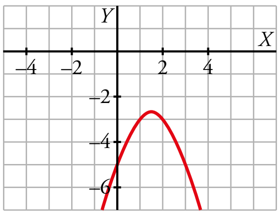
d) $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$

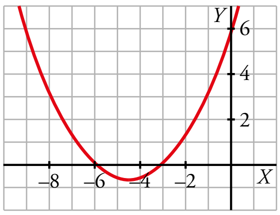
e) $y = -4x^2 + 1$

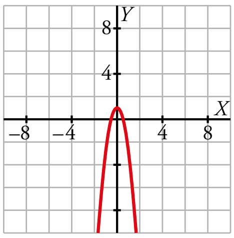
f) $y = -2x^2 - 3x + 0,5$

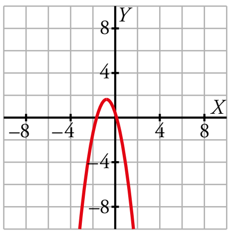
a)


b)


c)


d)


e)


f)


13 **Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (–2, –9), (2, –5) y (4, 0).**

Hazlo de dos formas distintas.

a) Utilizando la expresión $y = ax^2 + bx + c$.

b) Por el método de Newton.

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (-2,-9) \to -9 = a\cdot(-2)^2 + b\cdot(-2) + c \to 4a - 2b + c = -9 \\ (2,-5) \to -5 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \to 4a + 2b + c = -5 \\ (4,0) \to 0 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \to 16a + 4b + c = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema: $a = \frac{1}{4},\ b = 1,\ c = -8$

La parábola buscada es $y = \frac{x^2}{4} + x - 8$.

b) $y = p + m(x + 2) + n(x + 2)(x - 2)$

$(-2, -9) \to -9 = p + m \cdot (-2 + 2) + n \cdot (-2 + 2)(-2 - 2) \to p = -9$

$(2, -5) \to -5 = -9 + m \cdot (2 + 2) + n \cdot (2 + 2)(2 - 2) \to 4m = 4 \to m = 1$

$(4, 0) \to 0 = -9 + (4 + 2) + n \cdot (4 + 2)(4 - 2) \to 0 = -3 + 12n \to n = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

La parábola buscada es:

$$y = -9 + (x + 2) + \frac{1}{4}(x + 2)(x - 2) = -9 + x + 2 + \frac{1}{4}(x^2 - 4) = \frac{x^2}{4} + x - 8$$

14 **Halla, en cada caso, la ecuación de la parábola que pasa por los puntos dados.**

a) (1, –1), (3, 3), (5, –1) **b) (0, –4), (1, –6), (3, –4)**

Halla las ordenadas de los puntos de las parábolas anteriores con abscisa $x = 4$ y $x = -3$.

a) Usando la ecuación general: $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (1,-1) \to -1 = a + b + c \to a + b + c = -1 \\ (3,3) \to 3 = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c \to 9a + 3b + c = 3 \\ (5,-1) \to -1 = a\cdot 5^2 + b\cdot 5 + c \to 25a + 5b + c = -1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema: $a = -1,\ b = 6,\ c = -6$

La parábola buscada es $y = -x^2 + 6x - 6$.

Los puntos (4, 2) y (–3, –33) pertenecen a esta parábola.

b) Por el método de Newton: $y = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 1) = p + mx + nx(x - 1)$

$(0, -4) \to -4 = p + m \cdot 0 + n \cdot 0(0 - 1) \to p = -4$

$(1, -6) \to -6 = -4 + m \cdot 1 + n \cdot 1(1 - 1) \to m = -2$

$(3, -4) \to -4 = -4 - 2 \cdot 3 + n \cdot 3(3 - 1) \to 6n = 6 \to n = 1$

La parábola buscada es:

$y = -4 - 2x + x(x - 1) = -4 - 2x + x^2 - x = x^2 - 3x - 4$

Los puntos (4, 0) y (–3, 14) pertenecen a esta parábola.

Página 136

Representación de funciones elementales

15 Saco de dudas. **[La búsqueda de la relación entre gráficas y expresiones analíticas puede servir para trabajar esta técnica].**

Asocia a cada gráfica su expresión analítica.

a) $y = -0{,}5x^2 + 3$

b) $y = \sqrt{x+2}$

c) $y = \dfrac{x^2}{3} - 1$

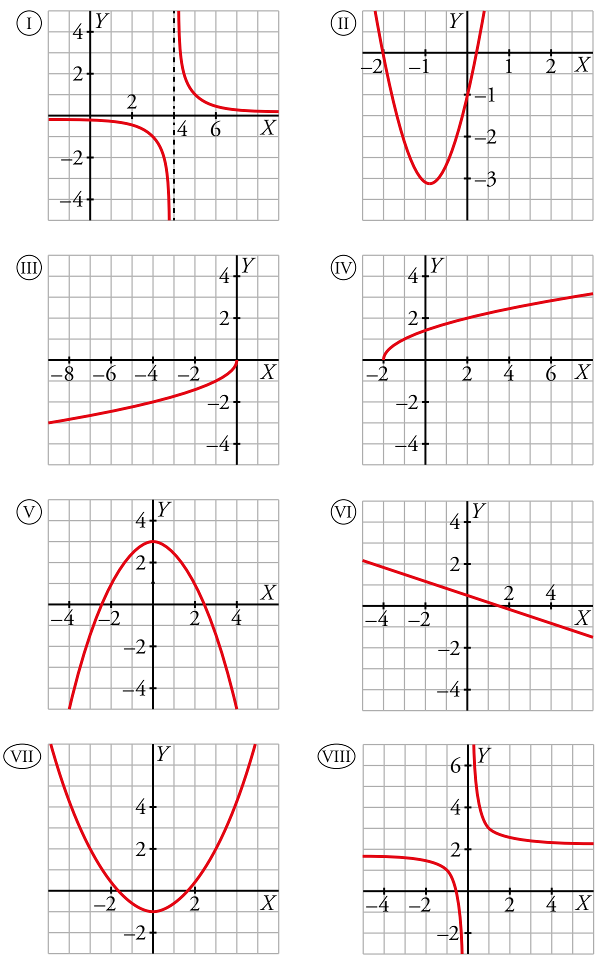
d) $y = \dfrac{1}{x-4}$

e) $y = 3x^2 + 5x - 1$

f) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

g) $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}$

h) $y = -\sqrt{-x}$



a) IV

b) VII

c) I

d) II

e) VIII

f) VI

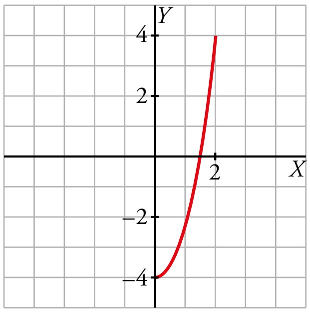
g) III

16 **Representa estas funciones en el intervalo indicado:**

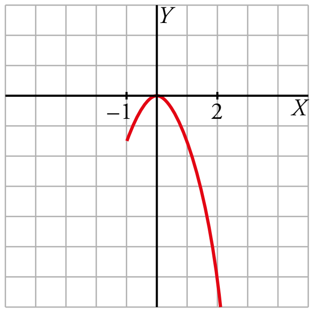
a) $y = 2x^2 - 4,\ [0, 2]$ **b)** $y = -\dfrac{3x^2}{2},\ x \ge -1$

c) $y = \dfrac{1}{x},\ x < 0$ **d)** $y = \dfrac{3x - 30}{5},\ [-5, 5]$

a) $y = 2x^2 - 4,\ [0, 2]$

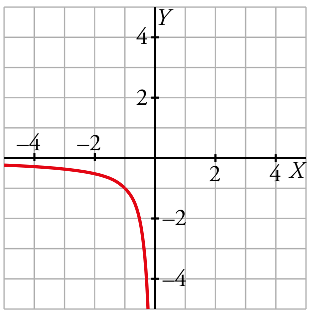


b) $y = -\dfrac{3x^2}{2},\ x \ge -1$



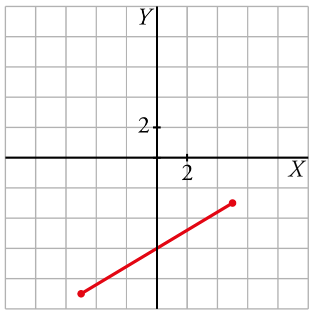
c) $y = \dfrac{1}{x},\ x < 0$

Se trata de una rama de la función de proporcionalidad inversa y su gráfica es:



d) $y = \dfrac{3x - 30}{5}$, $[-5, 5]$

Es un trozo de una función lineal.

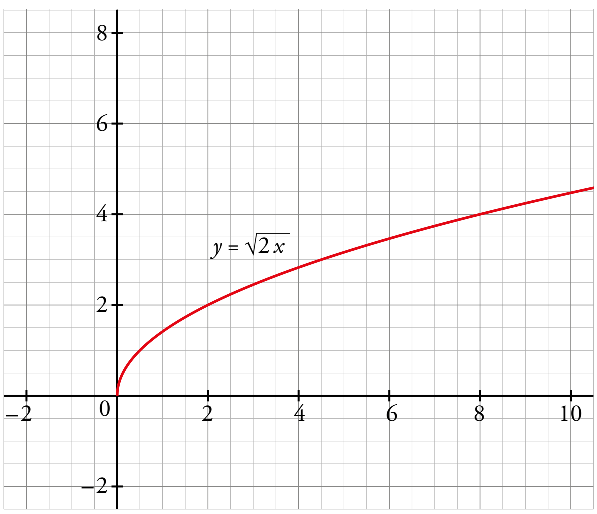


17 **Representa las siguientes funciones:**

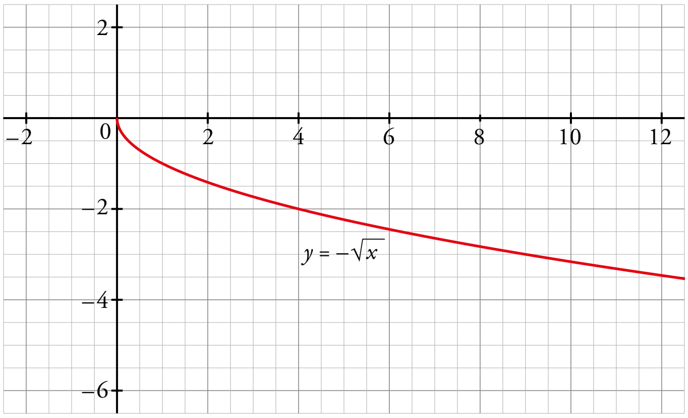
a) $y = \sqrt{2x}$ **b)** $y = -\sqrt{x}$ **c)** $y = 2\sqrt{x}$

d) $y = \sqrt{-x}$ **e)** $y = \dfrac{-1}{x}$ **f)** $y = \dfrac{2}{x}$

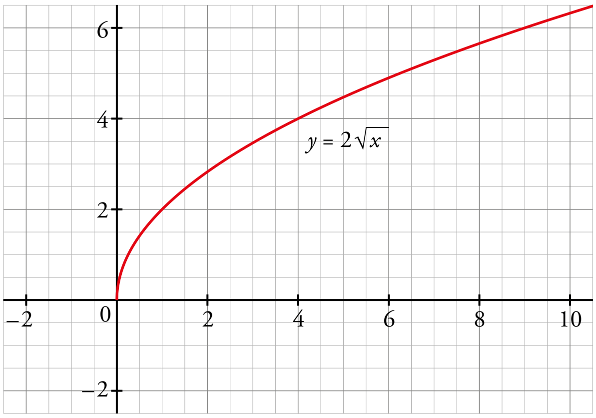
a) $y = \sqrt{2}$



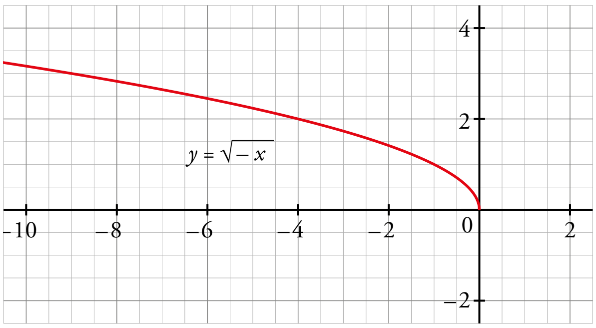
b) $y = -\sqrt{x}$



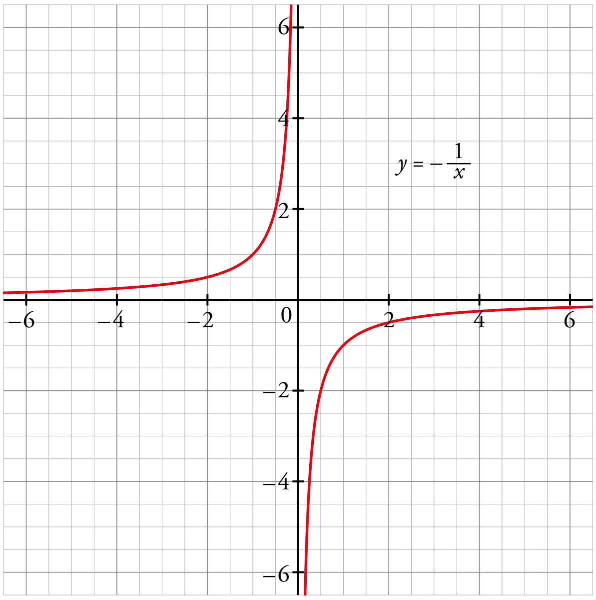
c) $y = 2\sqrt{x}$



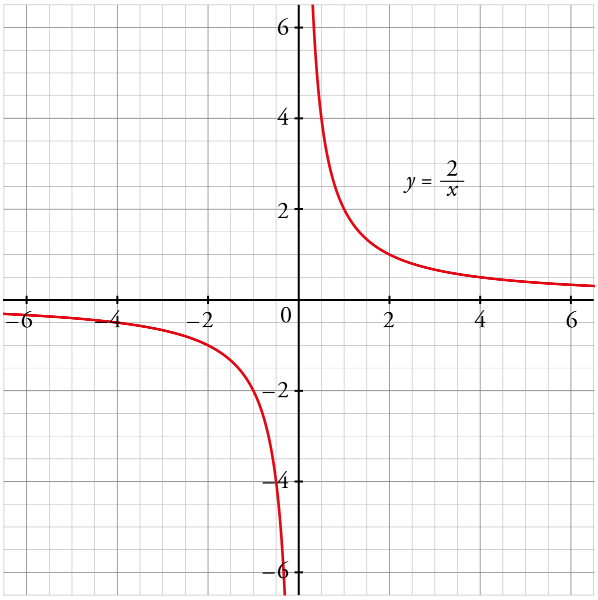
d) $y = \sqrt{-x}$



e) $y = -\dfrac{1}{x}$



f) $y = \dfrac{2}{x}$



18 **Halla el valor de k para que:**

a) La función $y = \frac{k}{x}$ pase por el punto (2, 1/4).

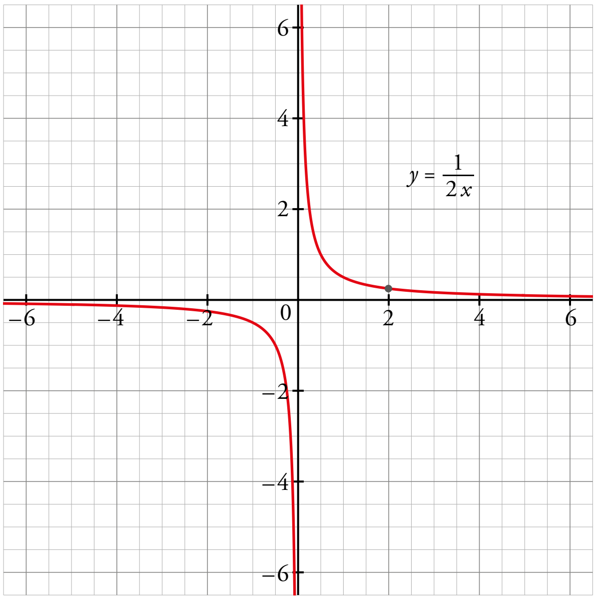
b) La función $y = \sqrt{kx}$ pase por el punto (2, 2).

c) Representa las funciones obtenidas.

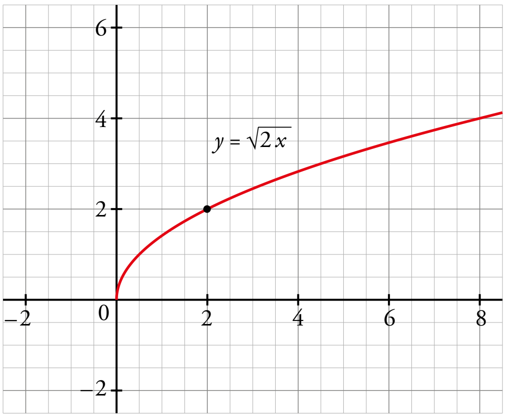
a) $\frac{1}{4} = \frac{k}{2} \rightarrow k = \frac{1}{2}$

b) $2 = \sqrt{2k} \rightarrow k = 2$

c) La función $y = \frac{1}{2x}$



La función $y = \sqrt{2x}$



Funciones definidas «a trozos»

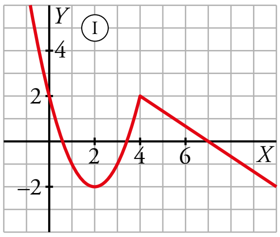
19 **Asocia a cada gráfica su expresión analítica.**

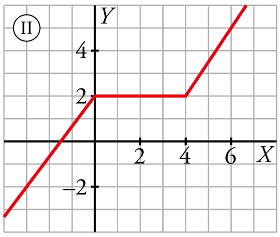
a) $y = \begin{cases} 2 - \dfrac{2x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 8 - \dfrac{3x}{2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

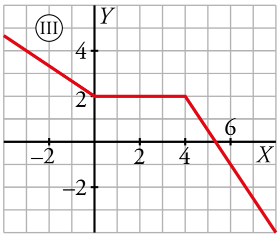
b) $y = \begin{cases} -(x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

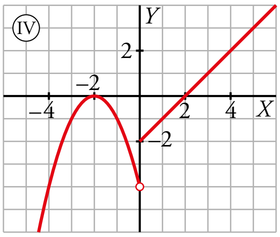
c) $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{si } x < 4 \\ \dfrac{14 - 2x}{3} & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2 + \dfrac{4x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ \dfrac{3x}{2} - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$









a) III b) IV c) I d) II

20 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

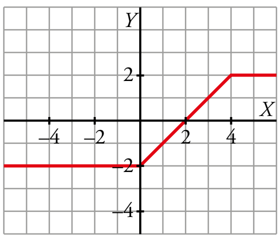
a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

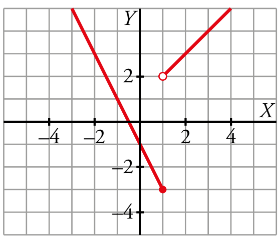
c) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2} + 2 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

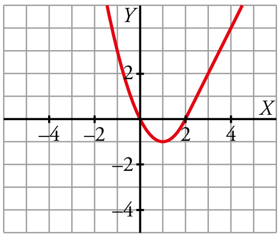
a)



b) Construimos una tabla de valores para cada recta y obtenemos la gráfica.



c) Hallamos el vértice de la parábola, $(1, -1)$, y los puntos de corte, $(0, 0)$ y $(2, 0)$ (primer trozo). Construimos una tabla de valores para el segundo trozo y obtenemos:



d) La función está formada por un trozo de parábola abierta hacia abajo y un trozo de recta.

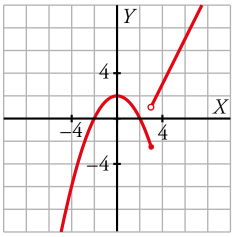
- 1.ª rama:

  Su vértice es el punto $(0, 2)$ y corta al eje horizontal en los puntos de abscisas $x = -2$, $x = 2$.

  Evaluamos en el punto de ruptura: $x = 3 \rightarrow y = \frac{-3^2}{2} + 2 = -\frac{5}{2}$

- 2.ª rama:

  Es un trozo de recta que podemos representar hallando dos puntos por los que pasa.



21 Representa.

a) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 3 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$

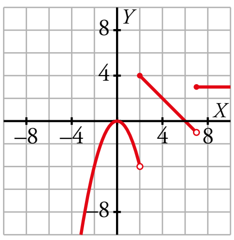
b) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

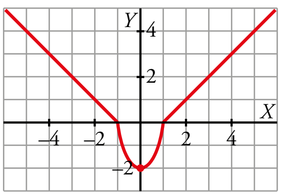
d) $y = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \le 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • 1.ª rama: parábola abierta haca abajo, cuya gráfica es la reflejada de $y = x^2$ respecto del eje *OX*.

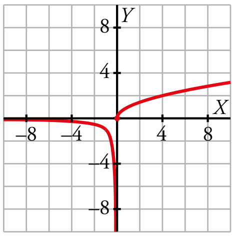
- 2.ª rama: trozo de recta que podemos representar hallando dos puntos por los que pasa.
- 3.ª rama: trozo de función constante.



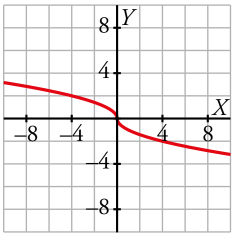
b)



c) Los dos trozos son partes de gráficas representadas en ejercicios anteriores.

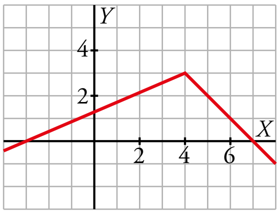


d) Son dos trozos de función raíz situados a ambos lados del origen de coordenadas.

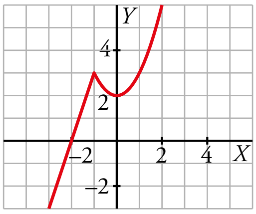


22 **Obtén la expresión analítica de estas funciones:**

a)



b)



* ***Ten en cuenta el ejercicio guiado 3.***

a) El primer trozo pertenece a una recta que pasa por los puntos (–3, 0) y (4, 3). Hallamos su ecuación:

$$m = \frac{3-0}{4-(-3)} = \frac{3}{7} \to y = \frac{3}{7}(x+3) = \frac{3x+9}{7}$$

El segundo trozo pertenece a una recta que pasa por los puntos (7, 0) y (4, 3). Hallamos su ecuación:

$$m = \frac{3-0}{4-7} = -1 \to y = -(x-7) = 7-x$$

Por tanto, la función es:

$$y = \begin{cases} \dfrac{3x+9}{7} & \text{si } x < 4 \\ 7-x & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

b) El primer trozo pertenece a una recta de pendiente 3 y que pasa por el punto (–2, 0). Su ecuación es $y = 3(x+2)$.

El segundo trozo forma parte de la parábola $y = x^2$ desplazada 2 unidades hacia arriba. Por tanto, la función es:

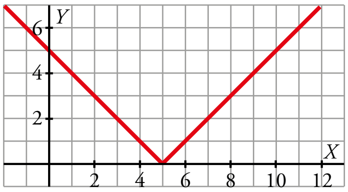
$$y = \begin{cases} 3x+6 & \text{si } x < -1 \\ x^2+2 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$$

Página 137

Valor absoluto de una función

23 **Representa la función $y = |x - 5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:**

$$y = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x < 5 \\ x - 5 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

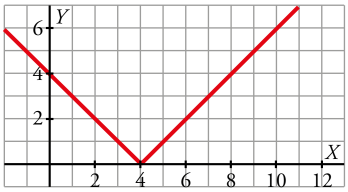


24 **Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones «a trozos»:**

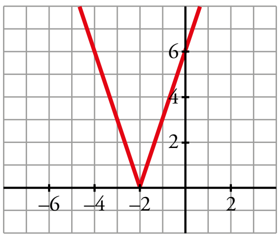
a) $y = |4 - x|$ **b)** $y = |3x + 6|$

c) $y = \left|\dfrac{x-3}{2}\right|$ **d)** $y = |-x - 1|$

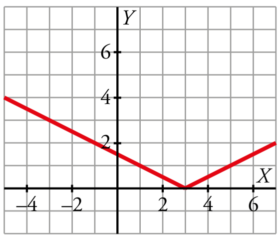
a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$



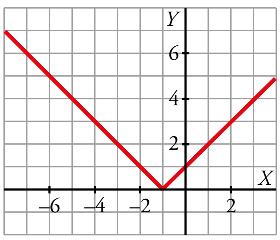
b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$



c) $y = \begin{cases} -\dfrac{x-3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{x-3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$



d) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$



25 Representa las siguientes funciones y defínelas por intervalos.

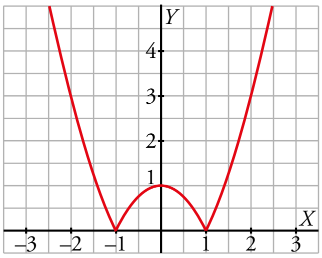
a) $y = |x^2 - 1|$

b) $y = |x^2 - 4x|$

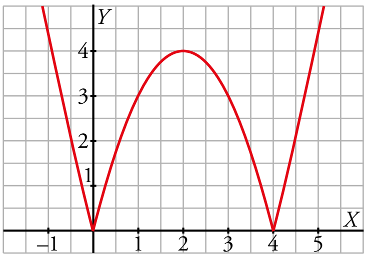
c) $y = |x^2 + 2x - 3|$

d) $y = |x^2 - 2x + 1|$

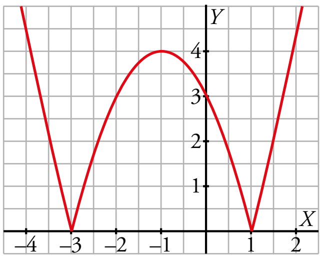
a)



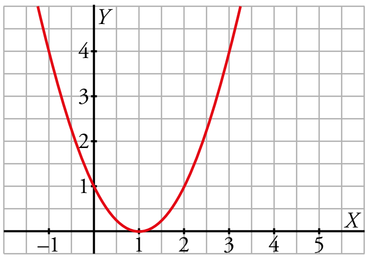
b)



c)



d)



26 Define las siguientes funciones como funciones «a trozos» y represéntalas.

a) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

b) $y = 1 + |x|$

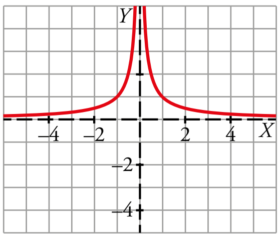
c) $y = \dfrac{|x|}{x}$

d) $y = 2|x| + x$

* ***Ten en cuenta el ejercicio resuelto 7.***

La función valor absoluto de $f(x)$ mantiene la parte positiva de la gráfica y convierte la parte negativa de $f(x)$ en $-f(x)$, es decir, en la simétrica de $f(x)$ respecto del eje horizontal.

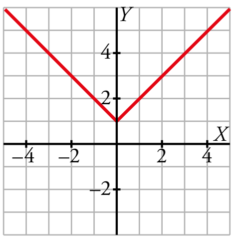
a)



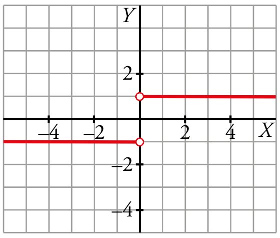
b) Escribimos la función a trozos:

$$y = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \le 0 \\ 1 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

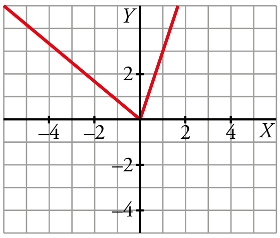
La gráfica de esta función es la de $y = |x|$ desplazada una unidad hacia arriba.



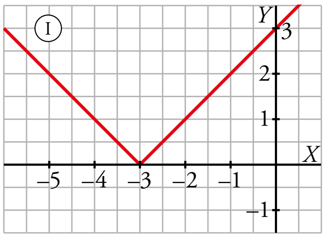
c) $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

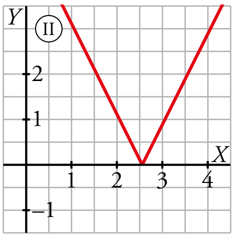


d) $y = 2|x| + x = \begin{cases} 2(-x) + x & \text{si } x < 0 \\ 2x + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$



27 **Escribe la expresión analítica de estas gráficas como funciones «a trozos» y como valor absoluto.**





a) Como función a trozos:

$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{si } x \le -3 \\ x + 3 & \text{si } x > -3 \end{cases}$

Como valor absoluto: $f(x) = |\,x + 3\,|$

b) Como función a trozos:

$f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & \text{si } x \le 2,5 \\ 2x - 5 & \text{si } x < 2,5 \end{cases}$

Como valor absoluto: $f(x) = |\,2x - 5\,|$

Para resolver

28 **El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros, y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km.**

$y = 2,85 + 0,095(x - 57)$

$y(100) = 6,94$ euros.

29 **Con unos gastos en publicidad de 3 000 €, las ventas obtenidas por una empresa han sido de 28 000 €; y con 5 000 € invertidos en publicidad, las ventas han ascendido a 39 000 €.**

a) Estima, mediante interpolación lineal, cuáles serían las ventas si se invirtieran 4 000 € en publicidad.

b) Si sabemos que con un gasto de 6 000 € se han obtenido unas ventas de 40 000 €, estima mediante interpolación parabólica las ventas que se obtendrían invirtiendo 4 000 € en publicidad. Utiliza el método de Newton.

a) Para mayor comodidad trabajaremos en miles de euros.

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 28) y (5, 39):

$$m = \frac{39-28}{5-3} = \frac{11}{2} \to y = 28 + \frac{11}{2}(x-3)$$

Evaluamos en $x = 4$ y obtenemos la estimación pedida:

$$x = 4 \to y = 28 + \frac{11}{2} = 33{,}5$$

Si se invirtieran 4 000 € en publicidad, se estimarían unas ventas de 33 500 €.

b) Buscamos una parábola que pase por los puntos (3, 28), (5, 39) y (6, 40).

Ecuación de la parábola: $y = p + m(x-3) + n(x-3)(x-5)$

Pasa por (3, 28) $\to$ $28 = p$

Pasa por (5, 39) $\to$ $39 = p + m(5-3)$ $\to$ $39 = p + 2m$

Pasa por (6, 40) $\to$ $40 = p + m(6-3) + n(6-3)(6-5)$ $\to$ $40 = p + 3m + 3n$

Obtenemos las soluciones: $p = 28,\ m = \frac{11}{2},\ n = -\frac{3}{2}$

Ecuación de la parábola: $y = 28 + \frac{11}{2}(x-3) - \frac{3}{2}(x-3)(x-5)$

$$y(4) = 28 + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}(-1) = 28 + \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 35$$

Si se invirtieran 4 000 € en publicidad, se estimarían unas ventas de 35 000 €.

30 **Midiendo la temperatura a diferentes alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 °C. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 °C, ¿cuál será la temperatura en la cima? Representa gráficamente la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.**

Llamamos x a la altura respecto de la base de la montaña. La función que describe la temperatura en función de la altura es una función lineal que pasa por los puntos (0, 10) y (180, 9). Por tanto:

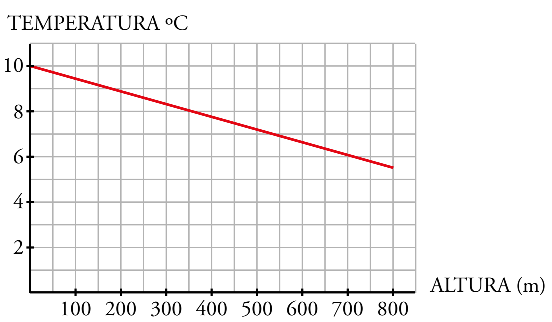
$$m = \frac{9-10}{180} = -\frac{1}{180} \to y = -\frac{1}{180}x + 10$$

Para obtener la altura en la cima evaluamos en 800.

$$x = 800 \to y = -\frac{1}{180} \cdot 800 + 10 = 5{,}56$$

La temperatura en la cima es de 5,56 ºC.

Representamos la función $y = -\frac{1}{180}x + 10$:

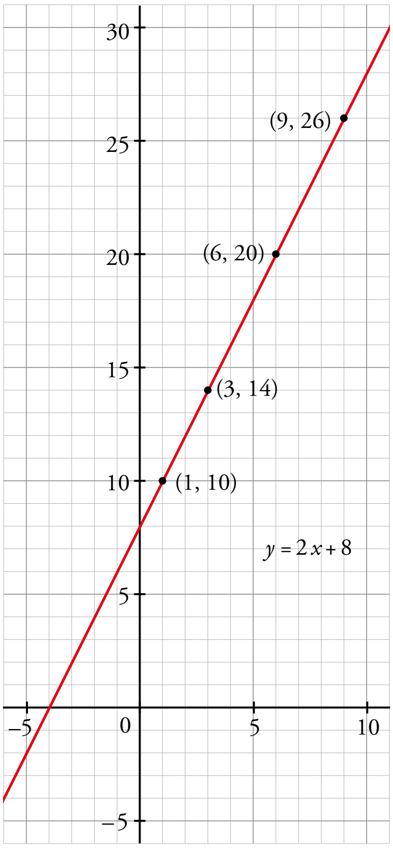


31 **Observamos en una farmacia una tabla con los pesos de los niños menores de 9 años, según su edad:**

x (AÑOS)	1	3	6	9
y (kg)	10	14	20	26

Representa estos datos y utiliza el modelo de interpolación que creas más adecuado para estimar el peso de un niño a los 5 años y a los 10 años.

Si representamos los puntos vemos que pasan por una recta:



Buscamos ahora la ecuación de la recta usando los puntos (1, 10) y (3, 14):

$$f(x) = \frac{14-10}{3-1}(x-1)+10 = 2x+8$$

Estimamos ahora los pesos para los niños de 5 y de 10 años:

$f(5) = 18$ kg

$f(10) = 28$ kg

32 **En la cocina de un restaurante, un equipo de 2 personas es capaz de preparar los pedidos para 30 comensales. Si el equipo es de 4 personas la capacidad se eleva hasta los 50 comensales. Y si el equipo llega a 8 personas, se estorbarían unos a otros y no habría fuegos para todos, por lo que la capacidad se mantendría en 50 comensales. Estima mediante interpolación parabólica cuántos comensales podría atender un equipo de 5 personas.**

Buscamos una parábola que pase por los puntos (2, 30), (4, 50) y (8, 50).

Ecuación de la parábola: $y = p + m(x-2) + n(x-2)(x-4)$

Pasa por (2, 30) $\rightarrow$ $30 = p$

Pasa por (4, 50) $\rightarrow$ $50 = p + m(4-2)$ $\rightarrow$ $50 = p + 2m$

Pasa por (8, 50) $\rightarrow$ $50 = p + m(8-2)(8-4)$ $\rightarrow$ $50 = p + 6m + 24n$

Obtenemos las soluciones: $p = 30$, $m = 10$, $n = -\frac{5}{3}$

Ecuación de la parábola: $y = 30 + 10(x-2) - \frac{5}{3}(x-2)(x-4)$

$y(5) = 30 + 30 - 5 = 55$

Cinco cocineros podrían atender a 55 comensales.

33 **Un opositor se enfrenta a un temario de 3 100 páginas. Sabe que si estudia 4 horas diarias es capaz de memorizar 4 páginas por día. Si dedica 8 horas, aprende 7 páginas; y si dedica 12 horas, consigue 9 páginas. Se plantea una jornada diaria de 10 horas y quiere saber el número de días que le va a suponer dar una primera vuelta al temario completo. Utiliza la interpolación parabólica para responderle.**

Buscamos una parábola que pase por los puntos (4, 4), (8, 7) y (12, 9).

Ecuación de la parábola: $y = p + m(x-4) + n(x-4)(x-8)$

Pasa por (4, 4) $\rightarrow$ $4 = p$

Pasa por (8, 7) $\rightarrow$ $7 = p + m(8-4)$ $\rightarrow$ $7 = p + 4m$

Pasa por (12, 9) $\rightarrow$ $9 = p + m(12-4) + n(12-4)(12-8)$ $\rightarrow$ $9 = p + 8m + 32n$

Obtenemos las soluciones: $p = 4,\ m = \frac{3}{4},\ n = -\frac{1}{32}$

Ecuación de la parábola: $y = 4 + \frac{3}{4}(x-4) - \frac{1}{32}(x-4)(x-8)$

$y(10) = 4 + \frac{3}{4} \cdot 6 - \frac{1}{32} \cdot 12 = \frac{65}{8}$

$3\,100 : \frac{65}{8} = 381{,}54$

Para dar una vuelta a las 3 100 páginas, con jornadas de 10 horas, necesita, aproximadamente, 382 días.

34 **La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Se debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.**

a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

a) En el 5.º día la dosis alcanza los 20 mg y este ya es el primero de los 15 días de tratamiento con la dosis máxima. Por tanto, el 19.º día es el último que toma 20 mg.

La expresión es $f(x) = \begin{cases} 10 + 2x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 20 & \text{si } 5 < x \le 20 \\ 100 - 4x & \text{si } 20 < x \end{cases}$

b) El dominio es el intervalo [0, 25].

El recorrido es el intervalo [0, 20].

35 El peso en miligramos de un embrión de una especie animal viene dado en la siguiente tabla:

TIEMPO (DÍAS)	3	5	8
PESO (mg)	8	22	73

Halla, mediante interpolación cuadrática, el peso de un embrión de 6 días.

Para hallar la ecuación de la parábola la escribimos en la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Sustituimos en ella los tres puntos de la tabla de valores:

$8 = 9a + 3b + c \;\rightarrow\; c = 8 - 9a - 3b \quad (1)$

$22 = 25a + 5b + c \;\rightarrow\; 22 = 25a + 5b + 8 - 9a - 3b = 16a + 2b + 8 \;\rightarrow\; 7 = 8a + b \quad (2)$

$73 = 64a + 8b + c \;\rightarrow\; 73 = 64a + 8b + 8 - 9a - 3b = 55a + 5b + 8 \;\rightarrow\; 13 = 11a + b \quad (3)$

Si restamos la ecuación (2) a la ecuación (3): $6 = 3a \;\rightarrow\; a = 2 \;\rightarrow\; b = -9$

Sustituyendo ahora los valores de a y de b en la ecuación (1):

$c = 8 - 9 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = 17$

Por tanto: $f(x) = 2x^2 - 9x + 17$

A los seis días un embrión pesa aproximadamente $f(6) = 35$ mg.

36 Las ganancias esperadas de una empresa en los próximos 10 años, en millones de euros, vienen dadas por la función $G(t) = -2t^2 + 20t + 5$; t, en años. Represente la función y determina cuándo serán máximas las ganancias.

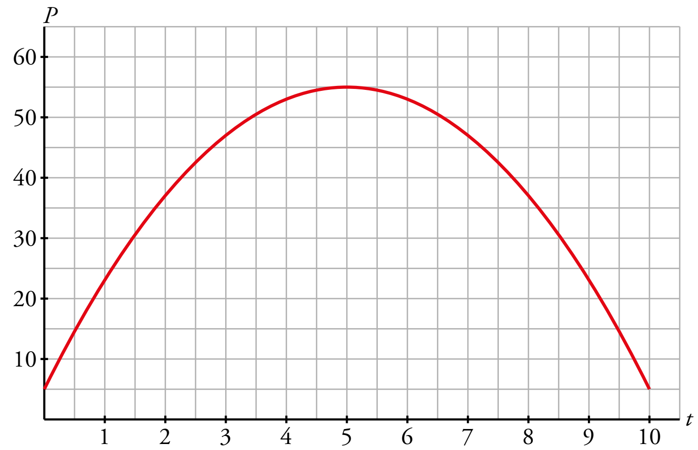
a) La función es una parábola con las ramas abiertas hacia abajo. Su vértice es:

$$t_0 = \frac{-20}{-4} = 5 \;\rightarrow\; G(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 + 5 = 55$$

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición:

$G(0) = 5$

$G(10) = -2 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 + 5 = 5$



b) Las ganancias serán máximas dentro de 5 años y tendrán un valor de 55 millones de euros.

Página 138

37 **En las funciones de oferta y demanda, se llama *cantidad de equilibrio* al número de unidades que hay que producir para que la oferta y la demanda se igualen, $o(x) = d(x)$. Se llama *precio de equilibrio* al precio con el cual se consigue esa igualdad.**

a) Halla el precio y la cantidad de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son $o(x) = 2{,}5x - 100$ y $d(x) = 300 - 1{,}5x$ (x en euros, d y o en miles de unidades del producto).

b) Si el precio del producto es de 80 €, ¿habrá escasez o exceso del mismo? ¿Y si el precio fuese de 120 €?

c) ¿Cuál sería el precio y la cantidad de equilibrio si las funciones de oferta y demanda fuesen $o(x) = 0{,}25x^2 - 100$ y $d(x) = 185 - 2x$?

a) $o(x) = d(x) \ \rightarrow\ 2{,}5x - 100 = 300 - 1{,}5x \ \rightarrow\ x = 100$ € es el precio de equilibrio.

La cantidad de equilibrio es $o(100) = d(100) = 300 - 1{,}5 \cdot 100 = 150$ miles de unidades.

b) Si $x = 80$, hay escasez, porque la demanda supera a la oferta. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 80 - 100 = 100$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 80 = 180$

Si $x = 120$, hay exceso, porque la oferta supera a la demanda. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 120 - 100 = 200$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 120 = 120$

c) $o(x) = d(x) \ \rightarrow\ 0{,}25x^2 - 100 = 185 - 2x$ da lugar a una única solución posible: $x = 30$ €.

La cantidad de equilibrio es $o(30) = d(30) = 125$ miles de unidades.

38 **El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - \frac{x}{4}$ euros.**

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas, y represéntala.

b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

a) $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $x = \dfrac{-15}{-1} = 15$.

Deben venderse 15 unidades.

39 **En una fábrica se venden mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y saben que por cada 10 euros de subida venderán 2 electrodomésticos menos.**

a) ¿Cuáles serán los ingresos si suben los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos de la fábrica sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-200}{-40} = 5 \ \rightarrow\ 5 \text{ euros}$$

40 **Los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por $f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto.**

a) Representa la función.

b) Calcula la cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.

c) ¿Cuántas toneladas se han de vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

a) La función es una parábola abierta hacia abajo.

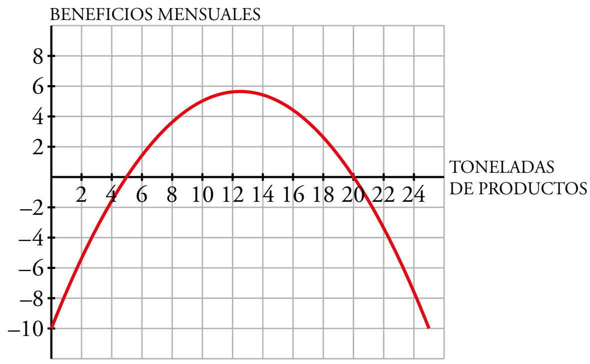
Su vértice es: $x_0 = \dfrac{-2{,}5}{-0{,}2} = 12{,}5 \rightarrow f(12{,}5) = -0{,}1 \cdot 12{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 12{,}5 - 10 = 5{,}625$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX para saber para qué valores no se obtienen beneficios.

$y = 0 \rightarrow -0{,}1 \cdot x^2 + 2{,}5x - 10 = 0 \rightarrow x = 5,\ x = 20$

Corta al eje vertical en el punto $x = 0 \rightarrow f(0) = -10$.

Su gráfica es:



b) Debe vender, como mínimo, 5 toneladas de producto para no tener pérdidas.

c) El beneficio máximo lo obtiene vendiendo 12,5 toneladas de producto y es de 5 625 €.

41 **Para enviar un paquete desde Adelaida a París, un servicio de correo cobra 50 € por paquetes que pesen hasta 2 kg y 10 € por cada kg o fracción adicional.**

a) Calcula lo que cuesta enviar un paquete de 5 kg.

b) Escribe la expresión analítica del precio de enviar un paquete de x kg para x menor o igual a 8.

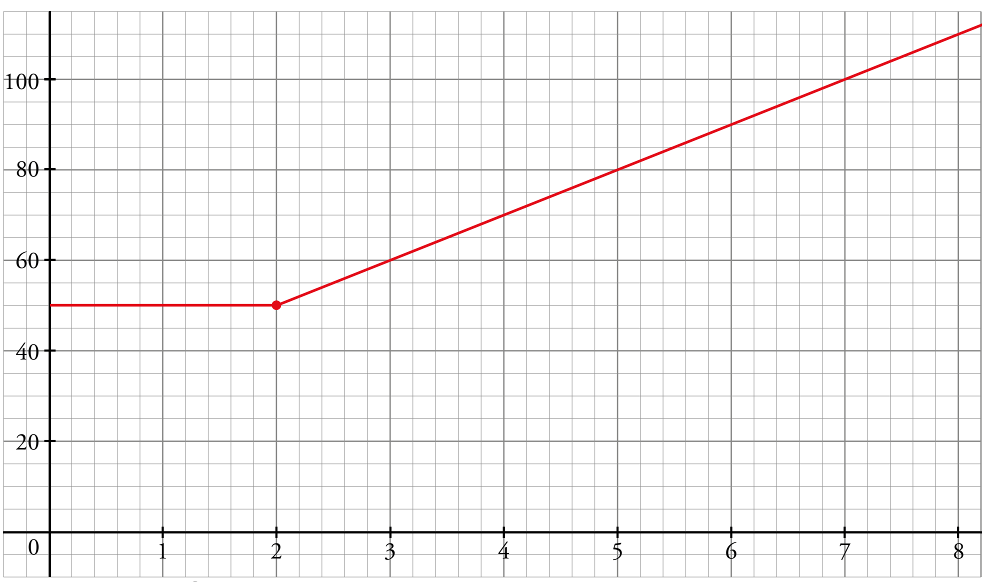
c) Represéntala gráficamente.

a) Si el paquete pesa 5 kg nos cobrarán: $50 + (5 - 2)\,10 = 80$ €

b) La definimos a trozos, usando la parte entera para incluir todos los casos:

$$E(x) = \begin{cases} 50 & \text{si } x \le 2 \\ 50 + 10\,(x - 2) & \text{si } 2 < x \le 8 \end{cases}$$

c)



42 **Tres operadores telefónicos ofrecen estas tarifas mensuales:**

	ABONO 2 h	COSTE A PARTIR DE 2 h
TARIFA A	**30 €**	**0,50 € por minuto**
TARIFA B	**20 €**	**0,75 € por minuto**
TARIFA C	**40 €**	**0,25 € por minuto**

Analiza cuál es la tarifa más ventajosa según el tiempo que se sobrepasa las 2 h del abono.

En función de los minutos, podemos definir las 3 funciones:

Tarifa A: gráfica verde

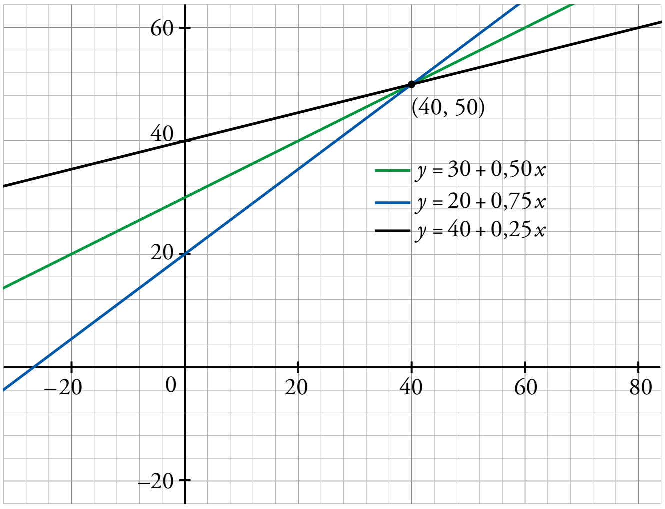
$f(x) = 30 + 0{,}50x$

Tarifa B: gráfica azul

$g(x) = 20 + 0{,}75x$

Tarifa C: gráfica negra

$h(x) = 40 + 0{,}25x$



Entre 0 y 40 minutos la mejor tarifa es la B y la peor, la tarifa C.

Cuando hablamos 40 minutos aparte de las dos primeras horas, pagamos 50 € con las 3 tarifas.

A partir de los 40 minutos la mejor tarifa pasa a ser la tarifa C, y la peor la tarifa B.

43 **Una discoteca abre a las 10 de la noche y cierra cuando se va toda la clientela. Representa la función que nos da el número de clientes, N, según el número de horas que lleva abierta, t, es $N(t) = 80t - 10t^2$.**

a) ¿A qué hora el número de clientes es máximo?

b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

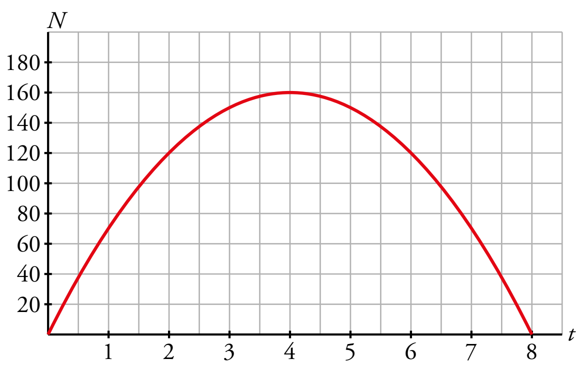
La función es una parábola abierta hacia abajo.

Su vértice es: $t_0 = \dfrac{-80}{-20} = 4 \rightarrow N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX para saber cuándo no hay clientes.

$N(t) = 0 \rightarrow 80t - 10t^2 = 0 \rightarrow t = 0,\ t = 8$

Su gráfica es:



a) El número de clientes es máximo, 160, cuando lleva 4 horas abierta, a las 2 de la mañana.

b) La discoteca cerrará 8 horas después de abrir, es decir, a las 6 de la mañana.

44 El porcentaje de estudiantes que asisten a un curso de inglés de 10 meses de duración viene dado por la función:

$$\boldsymbol{P(t)} = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 28 & \text{si } 3 < t \le 10 \end{cases} \quad \boldsymbol{t}, \textbf{ en meses}$$

Sabemos que, inicialmente, el 100 % de los estudiantes asiste al curso; que transcurrido un mes, asiste el 60 % y que al cumplirse el tercer mes, la asistencia se reduce al 28 %. Calcula *a*, *b*, *c* y representa la función.

Los datos del problema reflejan que $P(0) = 100$, $P(1) = 60$ y $P(3) = 28$. Por tanto,

$$\left.\begin{array}{r} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 100 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 60 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 28 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} c = 100 \\ a + b + c = 60 \\ 9a + 3b + c = 28 \end{array}\right\} \to a = 8,\ b = -48,\ c = 100$$

La función es:

$$P(t) = \begin{cases} 8t^2 - 48t + 100 & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 28 & \text{si } 3 < t \le 10 \end{cases}$$

El primer trozo es parte de una parábola cuyo vértice es:

$$t_0 = \frac{48}{16} = 3 \to P(3) = 28; \text{ es decir, el punto } (3, 28).$$

El segundo trozo es una función constante.

La gráfica es:

45 Las funciones $I(t) = -0{,}5t^2 + 17t$ y $C(t) = 0{,}5t^2 - t + 32$, $0 \le t \le 18$, representan, respectivamente, los ingresos y los costes de una empresa, en miles de euros, en función de los años transcurridos desde su comienzo y en los últimos 18 años.

a) ¿Para qué valor de *t*, se da la igualdad $C(t) = I(t)$?

b) Halla la función que expresa los beneficios (ingresos menos costes) en función de *t* y represéntala gráficamente.

c) ¿Cuántos años después del comienzo de su actividad la empresa alcanzó el beneficio máximo? Calcula su valor.

a) $I(t) = C(t)$

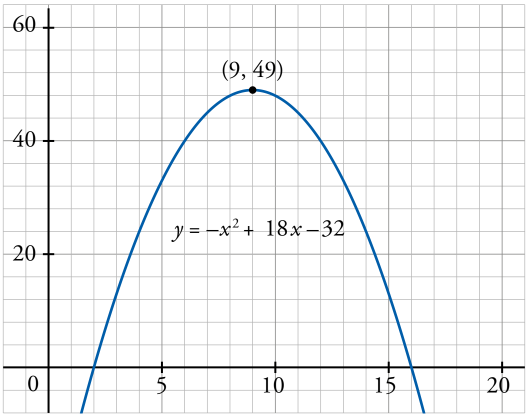
$$-0{,}5t^2 + 17t = 0{,}5t^2 - t + 32 \to t^2 - 18t - 32 = 0 \to t = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 128}}{2} = \frac{18 \pm 14}{2} \to t = 2,\ t = 16$$

b) $B(t) = I(t) - C(t) = -t^2 + 18t - 32$

Es una parábola, buscamos su vértice:

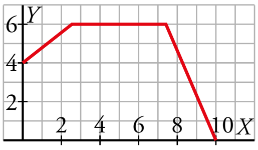
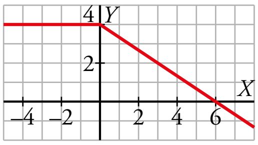
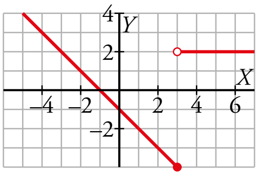
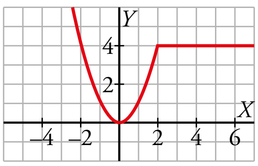
$$b = 18,\ a = -1 \to -\frac{b}{2a} = 9 \quad \text{es la abscisa de ese vértice.}$$

Sustituimos en la ecuación para obtener su ordenada: $B(9) = 49 \to V(9, 49)$



c) El máximo lo alcanza en su vértice al cabo de 9 años, consiguiendo 49 miles de €.

46 Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones:

a) 
b) 
c) 
d) 

a) Primer trozo: $m = 0{,}8 \to y = 0{,}8x + 4$

Segundo trozo: $y = 6$

Tercer trozo: $m = -2{,}4 \to y = 0 - 0{,}24(x - 10) \to y = -2{,}4x + 24$

La función es: $f(x) = \begin{cases} 0{,}8x + 4 & \text{si } 0 \le x < 2{,}5 \\ 6 & \text{si } 2{,}5 \le x < 7{,}5 \\ -2{,}4x + 24 & \text{si } 7{,}5 \le x \le 10 \end{cases}$

b) Primer trozo: $y = 4$

Segundo trozo: $m = -\frac{2}{3} \to y = -\frac{2}{3}x + 4$

La función es: $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 0 \\ -\frac{2x}{3} + 4 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

c) Primer trozo: $m = -1 \to y = -x - 1$

Segundo trozo: $y = 2$

La función es: $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) Primer trozo: $y = x^2$

Segundo trozo: $y = 4$

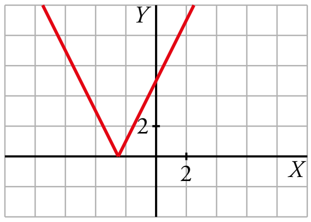
La función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

47 **Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones «a trozos»:**

a) $y = |2x + 5|$ **b)** $y = |4 - x^2|$ **c)** $y = \left|\dfrac{3x}{2} - 3\right|$ **d)** $y = |-x^2 + 2x + 3|$

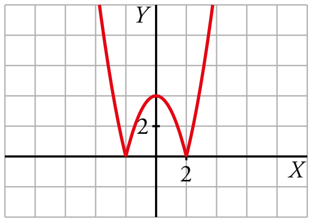
a) $2x + 5 = 0 \;\to\; x = -\dfrac{5}{2}$

$$y = |2x + 5| = \begin{cases} -(2x+5) & \text{si } x < -\dfrac{5}{2} \\ 2x+5 & \text{si } x \ge -\dfrac{5}{2} \end{cases} = \begin{cases} -2x-5 & \text{si } x < -\dfrac{5}{2} \\ 2x+5 & \text{si } x \ge -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$



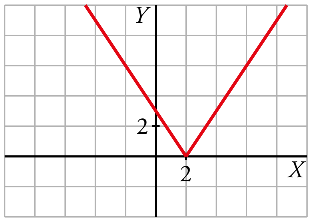
b) $4 - x^2 = 0 \;\to\; x = -2,\; x = 2$

$$y = |4 - x^2| = \begin{cases} -(4-x^2) & \text{si } x < -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -(4-x^2) & \text{si } 2 \le x \end{cases} = \begin{cases} -4+x^2 & \text{si } x < -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -4+x^2 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



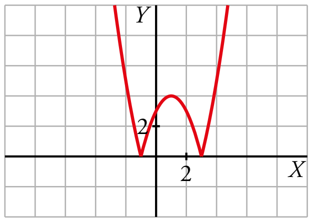
c) $\dfrac{3}{2}x - 3 = 0 \;\to\; x = 2$

$$y = \left|\frac{3}{2}x - 3\right| = \begin{cases} -\left(\dfrac{3}{2}x-3\right) & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{3}{2}x-3 & \text{si } 2 \le x \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x+3 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{3}{2}x-3 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



d) $-x^2 + 2x + 3 = 0 \;\to\; x = -1,\; x = 3$

$$y = |-x^2 + 2x + 3| = \begin{cases} -(-x^2+2x+3) & \text{si } x < -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ -(-x^2+2x+3) & \text{si } 3 \le x \end{cases} = \begin{cases} x^2-2x-3 & \text{si } x < -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ x^2-2x-3 & \text{si } 3 \le x \end{cases}$$



Página 139

Cuestiones teóricas

48 **¿Verdadero o falso?**

a) **La función** $y = \sqrt{a - x}$ **no existe si** $a < 0$.

b) **Una función no puede cortar al eje** Y **en dos puntos.**

c) **La gráfica de** $y = mx^2 + n$ **es una recta.**

d) **La parábola** $y = 3x^2$ **es más estrecha que** $y = x^2$.

e) **El dominio de definición de la función** $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ **es** $(-\infty, +\infty)$.

a) Falso. Para que esta función exista, su radicando debe ser mayor o igual que 0. Por tanto:

$a - x \ge 0 \;\to\; x \le a \;\to\; Dom = (-\infty, a]$

La función tiene este dominio de definición al margen del signo de a.

b) Verdadero. Una función toma un único valor de y para cada valor de x. Tomará un único valor cuando $x = 0$ y, por tanto, solo puede cortar en un punto al eje Y.

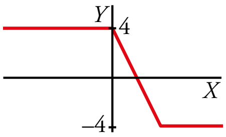
c) Falso. Si $m = 0$, la gráfica sí es una recta paralela al eje X; pero si es $m \ne 0$, su gráfica es una parábola por ser una función cuadrática.

d) Verdadero.

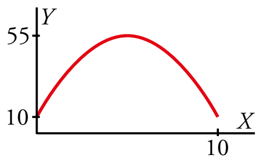
e) Verdadero ya que la raíz cúbica existe siempre, también para valores negativos.

49 **¿Cuál es el dominio de definición y el recorrido de las siguientes funciones?**

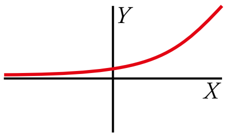
a)



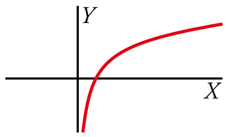
b)



c)



d)



a) *Dom* = $\mathbb{R}$

Rec = [–4, 4]

b) *Dom* = [0, 10]

Rec = [10, 55]

c) *Dom* = $\mathbb{R}$

Rec = (0, +∞)

d) *Dom* = (0, +∞)

Rec = $\mathbb{R}$

50 **¿Cuántas soluciones puede tener cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones? Justifícalo con ejemplos gráficos.**

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = ax + b \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ y = ax + b \end{cases}$

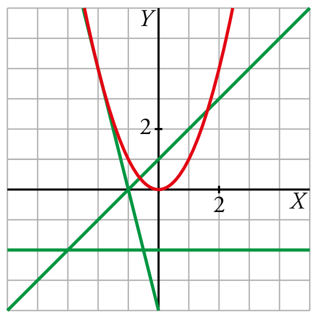
a) Puede tener como máximo dos soluciones, dependiendo de la posición relativa de la parábola y la recta. Es decir, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

Desde otro punto de vista, la ecuación $x^2 = ax + b$ puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -4x - 4 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (–2, 4).

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.



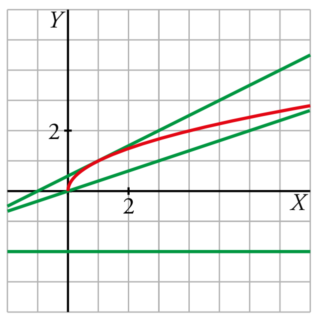
b) Este caso es análogo al anterior. En función de la posición relativa de la semiparábola y la recta, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

La ecuación $\sqrt{x} = ax + b$ puede tener, como máximo, dos soluciones.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{2}(x + 1) \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \dfrac{1}{3}x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (0, 0) y (9, 3).



c) El sistema da lugar a una ecuación de segundo grado como podemos ver.

$\dfrac{1}{x} = ax + b \rightarrow x(ax + b) = 1 \rightarrow ax^2 + bx - 1 = 0$

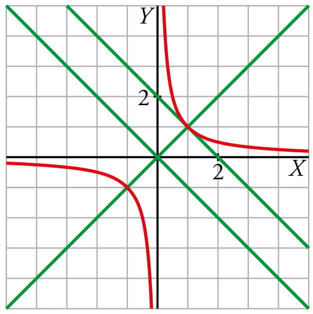
Por tanto, al igual que en los casos anteriores, puede tener, como máximo, dos soluciones.

También puede interpretarse desde el punto de vista de la posición relativa de una hipérbola y una recta.

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -x \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -x + 2 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (1, 1) y (–1, –1).



Para profundizar

51 **Define por intervalos y representa.**

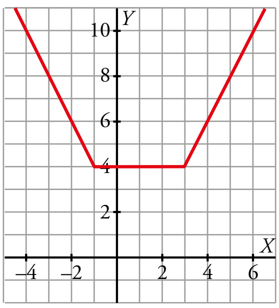
a) $y = |x + 1| + |x - 3|$ **b)** $y = |2x - 4| - |x - 1|$

a) Estudiamos la función en los intervalos cuyos extremos son los puntos donde se anula cada uno de los valores absolutos que se operan.

	$x \le -1$	$-1 \le x \le 3$	$3 \le x$
$\|x + 1\|$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$\|x - 3\|$	$-x + 3$	$-x + 3$	$x - 3$
$\|x + 1\| + \|x - 3\|$	$-2x + 2$	4	$2x - 2$

Por tanto:

$$y = |x + 1| + |x - 3| = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si } \ x \le -1 \\ 4 & \text{si } \ -1 \le x \le 3 \\ 2x - 2 & \text{si } \ 3 \le x \end{cases}$$

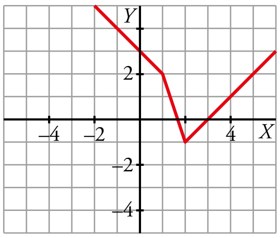


b) Estudiamos la función en los intervalos cuyos extremos son los puntos donde se anula cada uno de los valores absolutos que se operan.

	$x \le 1$	$1 \le x \le 2$	$2 \le x$
$\|2x - 4\|$	$-2x + 4$	$-2x + 4$	$2x - 4$
$\|x - 1\|$	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$
$\|2x - 4\| - \|x - 1\|$	$-x + 3$	$-3x + 5$	$x - 3$

Por tanto:

$$y = |2x - 4| - |x - 1| = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \le 1 \\ -3x + 5 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ x - 3 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$$



52 **Halla el dominio de definición de estas funciones:**

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

a) Tenemos que resolver la inecuación $\dfrac{x+3}{x-2} \ge 0$ teniendo en cuenta, además, que $x \ne 2$ para que no se produzca una división entre 0 al evaluar la función:

	$(-\infty, -3]$	$[-3, 2)$	$(2, +\infty)$
$x + 3$	–	+	+
$x - 2$	–	–	+
$\dfrac{x+3}{x-2}$	+	–	+

$\dfrac{x+3}{x-2} \ge 0 \;\to\; Dom = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

b) Análogamente, tenemos que resolver la inecuación $\dfrac{x-9}{x} \ge 0$ tieniendo en cuenta, además, que $x \ne 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 9]$	$[9, +\infty)$
$x - 9$	–	–	+
x	–	+	+
$\dfrac{x-9}{x}$	+	–	+

$\dfrac{x-9}{x} \ge 0 \;\to\; Dom = (-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

53 **La evolución mensual del número de personas asociadas de un club, durante un año, viene dada por la función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + a & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 50 & \text{si } 6 < x \le 8 \\ x^2 - 20x + 146 & \text{si } 8 < x \le 12 \end{cases} \quad x, \text{ en meses}$$

a) Halla a sabiendo que se fundó con 50 personas asociadas.

b) Represental la función y di en qué mes el número de personas asociadas fue máximo y en qué mes fue mínimo.

c) Si para cubrir gastos el club necesita tener más de 47 personas asociadas, ¿en qué mes tuvo pérdidas?

a) Como el club se fundó con 50 socios, se tiene que $f(0) = 50$. Por tanto, $f(0) = a = 50$.

b) • El primer trozo es una parábola abierta hacia abajo cuyo vértice es:

$$x_0 = \frac{-6}{-2} = 3 \ \to \ f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 50 = 59 \ \to \ (3, 59)$$

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición: $f(0) = 50$, $f(6) = 50$

• El segundo trozo es constante, $y = 50$.

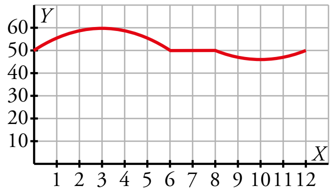
• El tercer trozo es una parábola abierta hacia arriba cuyo vértice es:

$$x_0 = \frac{20}{2} = 10 \ \to \ f(10) = 10^2 - 20 \cdot 10 + 146 = 46 \ \to \ (10, 46)$$

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición:

$$f(8) = 8^2 - 20 \cdot 8 + 146 = 50, \ f(12) = 50$$

La gráfica es:



El número de socios fue máximo en el mes número 3, con 59 socios, y mínimo en el mes número 10, con 46 socios.

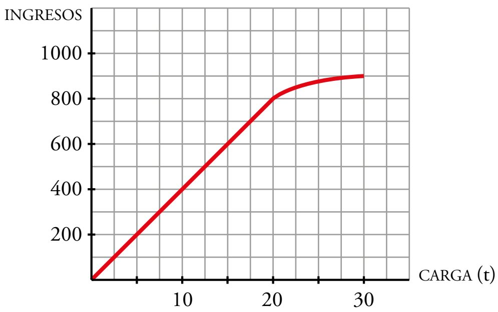
c) Obtuvo pérdidas en el mes número 10.

54 Las tarifas de una empresa de transportes son:

- **40 € por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 t.**
- **Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 €, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.**

Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 t) y obtén la expresión analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } \ 0 \le x \le 20 \\ [40 - (x - 20)] & \text{si } \ 20 < x \le 30 \end{cases}$

Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } \ 0 \le x \le 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } \ 20 < x \le 30 \end{cases}$$

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 3.1. (EA 3.1.1.-EA 3.1.2.-EA 3.1.3.)

Página 139

1 **Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - x^2$ **b)** $y = \dfrac{3x}{(2x-6)^2}$

c) $y = \sqrt{4-2x}$ **d)** $y = \sqrt{5x - x^2}$

a) Al ser una función polinómica, su dominio es todo $\mathbb{R}$.

b) Su dominio es todo $\mathbb{R}$, salvo los puntos que anulan el denominador.

$(2x-6)^2 = 0 \;\rightarrow\; 2x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 3$

Por tanto: $Dom\ y = \mathbb{R} - \{3\}$

c) Su dominio son los puntos que hacen que el radicando no sea negativo.

$4 - 2x \geq 0 \;\rightarrow\; 2x \leq 4 \;\rightarrow\; x \leq \dfrac{4}{2} = 2$

Por tanto: $Dom\ y = (-\infty, 2]$

d) Al igual que en el apartado anterior:

$5x - x^2 \geq 0 \;\rightarrow\; x(5-x) \geq 0$

Esto ocurre si:

- $x \geq 0$ y $5 - x \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 0$ y $x \leq 5 \;\rightarrow\; x \in [0, 5]$
- $x \geq 0$ y $5 - x \leq 0 \;\rightarrow\; x \leq 0$ y $x \geq 5 \;\rightarrow$ Esto no es posible.

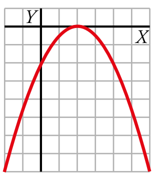
Por tanto: $Dom\ y = [0, 5]$

2 **Representa las siguientes funciones:**

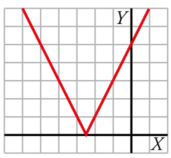
a) $f(x) = -0{,}5x^2 + 2x - 2$ **b)** $f(x) = |5 + 2x|$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **d)** $f(x) = -\sqrt{-x}$

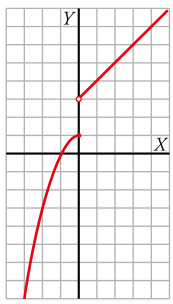
a)



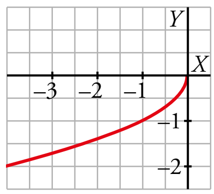
b)



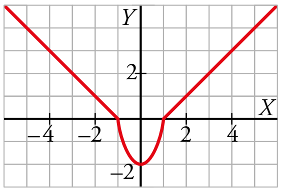
c)



d)



3 **Determina la expresión analítica de esta función definida en el intervalo [–6, 6]. ¿Cuál es su recorrido?**



Definimos la función a trozos:

- $x \in [-6, -1]$: debemos encontrar la recta que pasa por $P(-1,\ 0)$ y $Q(-2,\ 1)$, con vector $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1) \to y = -x - 1$.
- $x \in (-1, 1)$: partimos de la parábola $y - b = k(x - a)^2$ donde $(a,\ b) = (0,\ -2)$ es el vértice $\to$ $\to y + 2 = kx^2$

  Además, sabemos que pasa por el punto $P(1, 0)$: $2 = k \to y + 2 = 2x^2$
- $x \in [1, 6]$: debemos encontrar la recta que pasa por $P(1,\ 0)$ y $Q(2,\ 1)$, con vector $\overrightarrow{PQ} = (1, 1) \to y = x - 1$.

  Su recorrido son los valores que toma la ordenada:

  $Rec = [-2,\ 5]$

4 **Asistir a un gimnasio durante 6 meses nos cuesta 246 €. Si asistimos 15 meses, el precio es 570 €. ¿Cuánto tendremos que pagar si queremos ir durante un año?**

Vamos a hacer una interpolación lineal. Hallamos la recta que pasa por los puntos (6, 246) y (15, 570).

Su pendiente es $m = \dfrac{570 - 246}{15 - 6} = \dfrac{324}{9} = 36$

Por tanto, la ecuación de la recta es:

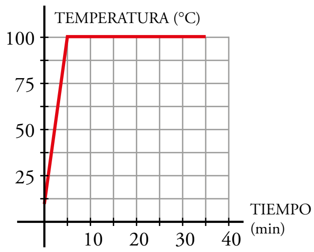
$$y = 36(x - 6) + 246 \to y = 36x + 30$$

De este modo, si queremos saber cuánto se debe pagar si vamos al gimnasio durante un año (12 meses), hacemos:

$$y(12) = 36 \cdot 12 + 30 = 462$$

Habrá que pagar 462 €.

5 **Ponemos al fuego un cazo con agua a 10 °C. En 5 minutos alcanza 100 °C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente. Representa la función que describe este fenómeno y halla su expresión analítica.**



- La gráfica pasa por los puntos (0, 10) y (5, 100).
- Hallamos la ecuación de esta recta:

  Pendiente: $\dfrac{100 - 10}{5 - 0} = 18 \to y = 18(x - 0) + 10$
- Para valores de x mayores que 5, la temperatura se mantiene constante $\to y = 100$

  Expresión analítica: $f(x) = \begin{cases} 18x + 10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 100 & \text{si } 5 \le x \le 35 \end{cases}$

6 El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).

a) Si se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos?

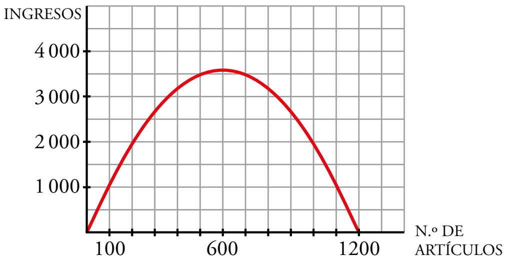
b) Representa la función *número de artículos-ingresos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7$ cientos de euros $\to$ Ingresos $= 500 \cdot 700 = 350\,000$ €

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Hallamos el vértice de la parábola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ artículos} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

Deben fabricar 600 artículos para obtener unos ingresos máximos (360 000 euros).