4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.4. (EA 1.4.1.-EA 1.4.2.-EA 1.4.3.)

Página 111

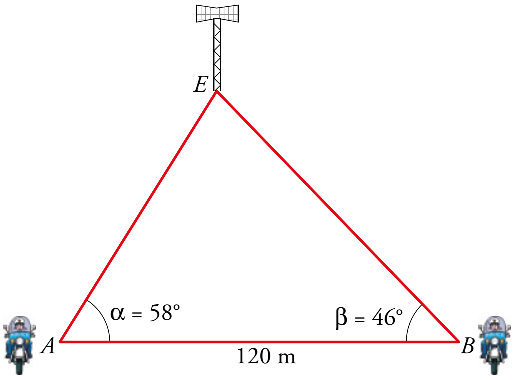
Resuelve

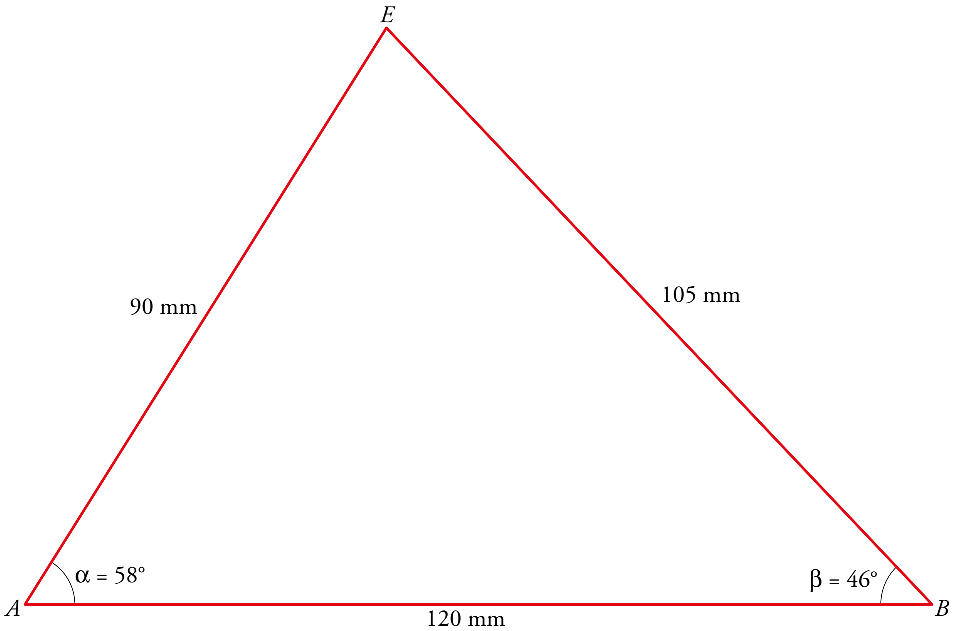
Localización de una emisora clandestina

Vamos a aplicar la técnica de la triangulación para resolver el siguiente problema:

Una emisora de radio clandestina E se sintoniza desde dos controles policiales, A y B. En cada uno de ellos se detecta la dirección en la que se encuentra, no la distancia. Por tanto, se conocen los ángulos $\alpha = 58°$ y $\beta = 46°$, así como la distancia $AB = 120$ m. Para localizar sobre el terreno la emisora E hay que calcular la distancia $\overline{AE}$ o la distancia $\overline{BE}$.

Resuelve el problema planteado realizando un dibujo en tu cuaderno a escala 1:1 000 (1 mm → 1 m). Sobre el papel, mide los lados AE y BE e interpreta el resultado en la realidad.





La emisora se encuentra a 90 m del control A y a 105 m del control B.

1 ▸ RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO (0° A 90°)

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 4.1.** (EA 4.1.1.)

Página 112

Hazlo tú

1 **Sabiendo que *sen* β = 0,39 y que β es agudo. Calcula *cos* β y *tg* β.**

$$cos\ \beta = \sqrt{1 - sen^2\ \beta} = \sqrt{1-(0,39)^2} = 0,92$$

$$tg\ \beta = \frac{sen\ \beta}{cos\ \beta} = \frac{0,39}{0,92} = 0,42$$

2 **Conociendo *tg* β = 1,28 y que β es agudo. Calcula *sen* β y *cos* β.**

$s = sen\ \beta;\ \ c = cos\ \beta$

$$\begin{cases} s^2 + c^2 = 1 \ \rightarrow\ (1,28c)^2 + c^2 = 1 \ \rightarrow\ 2,6384c^2 = 1 \ \rightarrow\ c = 0,62 \\ \dfrac{s}{c} = 1,28 \ \rightarrow\ s = 1,28c \end{cases}$$

$cos\ \beta = 0,62$

$sen\ \beta = 1,28 \cdot 0,62 = 0,79$

2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUALESQUIERA (0° A 360°)

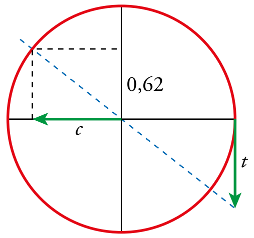
C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 4.1.** (EA 4.1.1.)

Página 113

1 **Sabiendo que el ángulo α está en el segundo cuadrante $(90° < \alpha < 180°)$ y *sen* $\alpha = 0{,}62$, calcula *cos* α y *tg* α.**

$$cos\ \alpha = -\sqrt{1 - 0{,}62^2} = -0{,}78$$

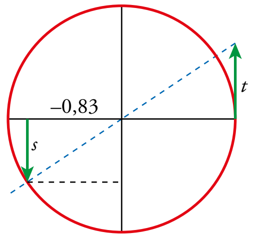
$$tg\ \alpha = \frac{0{,}62}{-0{,}78} = -0{,}79$$



2 **Sabiendo que el ángulo α está en el tercer cuadrante $(180° < \alpha < 270°)$ y *cos* $\alpha = -0{,}83$, calcula *sen* α y *tg* α.**

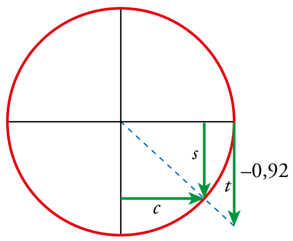
$$sen\ \alpha = -\sqrt{1 - (0{,}83)^2} = -0{,}56$$

$$tg\ \alpha = \frac{-0{,}56}{-0{,}83} = 0{,}67$$



3 **Sabiendo que el ángulo α está en el cuarto cuadrante $(270° < \alpha < 360°)$ y *tg* $\alpha = -0{,}92$, calcula *sen* α y *cos* α.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{s}{c} = -0{,}92 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ El sistema tiene dos soluciones: } \begin{cases} sen\ \alpha = -0{,}68;\ cos\ \alpha = 0{,}74 \\ s = 0{,}68;\ c = -0{,}74 \end{cases}$$



4 **Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y amplíala para los ángulos 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360°:**

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0				
tg	0	$\sqrt{3}/3$			–				

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
cos	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

3 ▶ ÁNGULOS FUERA DEL INTERVALO 0° A 360°

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 4.1. (EA 4.1.1.)

Página 1140

1 **Pasa cada uno de los siguientes ángulos al intervalo [0°, 360°) y al intervalo (–180°, 180°]:**

a) **396°** **b)** **492°** **c)** **645°**

d) **3 895°** **e)** **7 612°** **f)** **1 980°**

Se trata de expresar el ángulo de la siguiente forma:

$$k \text{ o } -k, \text{ donde } k \le 180°$$

a) $396° = 396° - 360° = 36°$

b) $492° = 492° - 360° = 132°$

c) $645° = 645° - 360° = 285° = 285° - 360° = -75°$

d) $3\,895° = 3\,895° - 10 \cdot 360° = 295° = 295° - 360° = -65°$

e) $7\,612° = 7\,612° - 21 \cdot 360° = 52°$

f) $1\,980° = 1\,980° - 5 \cdot 360° = 180°$

Cuando hacemos, por ejemplo, $7\,612° = 7\,612° - 21 \cdot 360°$, ¿por qué tomamos 21? Porque, previamente, hemos realizado la división 7 612 ÷ 360 = 21.44… . Es el cociente entero.

2 **Determina el valor de estas razones trigonométricas:**

a) ***sen*** **13 290°** **b)** ***cos*** **(–1 680°)**

c) ***tg*** **3 825°** **d)** ***cos*** **4 995°**

e) ***sen*** **(–1 710°)** **f)** ***tg*** **3 630°**

g) ***cos*** **(–36 000°)** **h)** ***sen*** **(–330°)**

a) $13\,290° = 360° \cdot 36 + 330°$

$sen\ 13\,290° = sen\ 330° = -sen\ 30° = -\dfrac{1}{2}$

b) $-1\,680° = -360° \cdot 4 - 240°$

$cos\ (-1\,680°) = cos\ (-240°) = cos\ 120° = -cos\ 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) $3\,825° = 360° \cdot 10 + 225°$

$tg\ 3\,825° = tg\ 225° = tg\ 45° = 1$

d) $4\,995° = 360° \cdot 13 + 315°$

$cos\ 4\,995° = cos\ 315° = cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $-1\,710° = -360° \cdot 4 - 270°$

$sen\ (-1\,710°) = sen\ (-270°) = sen\ (90°) = 1$

f) $3\,630° = 360° \cdot 10 + 30°$

$tg\ 3\,630° = tg\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

g) $-36\,000° = -360° \cdot 100$

$cos\ (-36\,000°) = cos\ 0° = 1$

h) $sen\ (-330°) = sen\ 30° = \dfrac{1}{2}$

4 ▶ TRIGONOMETRÍA CON CALCULADORA

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 4.1. (EA 4.1.1.)

Página 115

Hazlo tú

1 Sabiendo que $sen\, \beta = 0{,}87$ y que $90° < \beta < 180°$, calcula $cos\, \beta$ y $tg\, \beta$.

$cos\, \beta = -0{,}493$

$tg\, \beta = -1{,}765$

Piensa y practica

1 A partir de los datos que se ofrecen en cada apartado relativos al ángulo α, halla, con ayuda de la calculadora, las razones trigonométricas de α.

a) $sen\, \alpha = 0{,}573$; $\alpha > 90°$

b $cos\, \alpha = 0{,}309$; $sen\, \alpha < 0$

c) $tg\, \alpha = 1{,}327$; $180° < \alpha < 270°$

d) $cos\, \alpha = -0{,}819$; $tg\, \alpha < 0$

a) $cos\, \alpha = -0{,}82$

$tg\, \alpha = -0{,}699$

b) $sen\, \alpha = -0{,}951$

$tg\, \alpha = -3{,}078$

c) $sen\, \alpha = -0{,}799$

$cos\, \alpha = -0{,}602$

d) $sen\, \alpha = 0{,}574$

$tg\, \alpha = -0{,}7$

5 ▶ RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) **CE 4.1.** (EA 4.1.1.)

Página 117

1 **Calcula las razones trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35°:**

$$\textbf{\textit{sen}}\ \mathbf{35° = 0{,}57;}\quad \textbf{\textit{cos}}\ \mathbf{35° = 0{,}82;}\quad \textbf{\textit{tg}}\ \mathbf{35° = 0{,}70}$$

- $55° = 90° - 35° \rightarrow$ 55° y 35° son complementarios.

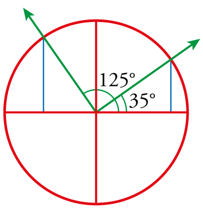
  $\left.\begin{array}{l} sen\ 55° = cos\ 35° = 0{,}82 \\ cos\ 55° = sen\ 35° = 0{,}57 \end{array}\right\}\ tg\ 55° = \dfrac{sen\ 55°}{cos\ 55°} = \dfrac{0{,}82}{0{,}57} = 1{,}43 \quad \left(\text{También } tg\ 55° = \dfrac{1}{tg\ 35°} = \dfrac{1}{0{,}70} \approx 1{,}43\right)$

- $125° = 90° + 35°$

  $sen\ 125° = cos\ 35° = 0{,}82$

  $cos\ 125° = -sen\ 35° = -0{,}57$

  $tg\ 125° = \dfrac{-1}{tg\ 35°} = \dfrac{-1}{0{,}70} = -1{,}43$

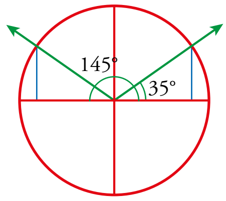


- $145° = 180° - 35° \rightarrow$ 145° y 35° son suplementarios.

  $sen\ 145° = sen\ 35° = 0{,}57$

  $cos\ 145° = -cos\ 35° = -0{,}82$

  $tg\ 145° = -tg\ 35° = -0{,}70$

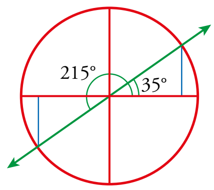


- $215° = 180° + 35°$

  $sen\ 215° = -sen\ 35° = -0{,}57$

  $cos\ 215° = -cos\ 35° = -0{,}82$

  $tg\ 215° = tg\ 35° = 0{,}70$

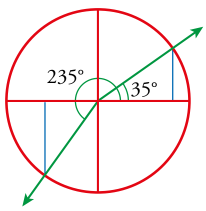


- $235° = 270° - 35°$

  $sen\ 235° = -cos\ 35° = -0{,}82$

  $cos\ 235° = -sen\ 35° = -0{,}57$

  $tg\ 235° = \dfrac{sen\ 235°}{cos\ 235°} = \dfrac{-cos\ 35°}{-sen\ 35°} = \dfrac{1}{tg\ 35°} = \dfrac{1}{0{,}70} = 1{,}43$

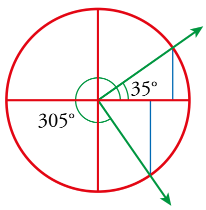


- $305° = 270° + 35°$

  $sen\ 305° = -cos\ 35° = -0{,}82$

  $cos\ 305° = sen\ 35° = 0{,}57$

  $tg\ 305° = \dfrac{sen\ 305°}{cos\ 305°} = \dfrac{-cos\ 35°}{sen\ 35°} = -\dfrac{1}{tg\ 35°} = -1{,}43$

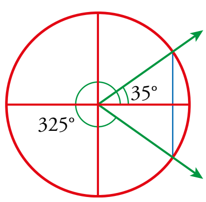


- $325° = 360° - 35°\ \ (= -35°)$

  $sen\ 325° = -sen\ 35° = -0{,}57$

  $cos\ 325° = cos\ 35° = 0{,}82$

  $tg\ 325° = \dfrac{sen\ 325°}{cos\ 325°} = \dfrac{-sen\ 35°}{cos\ 35°} = -tg\ 35° = -0{,}70$



2 **Averigua las razones trigonométricas de 358°, 156° y 342°, utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90°.**

- $358° = 360° - 2°$

  $sen\ 358° = -sen\ 2° = -0{,}0349$

  $cos\ 358° = cos\ 2° = 0{,}9994$

  $tg\ 358° \overset{(*)}{=} -tg\ 2° = -0{,}03492$

  $(*)\ tg\ 358° = \dfrac{sen\ 358°}{cos\ 358°} = \dfrac{-sen\ 2°}{cos\ 2°} = -tg\ 2°$

- $156° = 180° - 24°$

  $sen\ 156° = sen\ 24° = 0{,}4067$

  $cos\ 156° = -cos\ 24° = -0{,}9135$

  $tg\ 156° = -tg\ 24° = -0{,}4452$

  OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

  $156° = 90° + 66°$

  $sen\ 156° = cos\ 66° = 0{,}4067$

  $cos\ 156° = -sen\ 66° = -0{,}9135$

  $tg\ 156° = \dfrac{-1}{tg\ 66°} = \dfrac{-1}{2{,}2460} = -0{,}4452$

- $342° = 360° - 18°$

  $sen\ 342° = -sen\ 18° = -0{,}3090$

  $cos\ 342° = cos\ 18° = 0{,}9511$

  $tg\ 342° = -tg\ 18° = -0{,}3249$

3 **Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:**

a) $sen\ \alpha = -\dfrac{1}{2},\ tg\ \alpha > 0$

b) $cos\ \alpha = \dfrac{3}{4},\ \alpha > 90°$

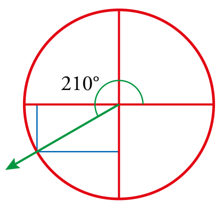
c) $tg\ \alpha = -1,\ cos\ \alpha < 0$

d) $tg\ \alpha = 2,\ cos\ \alpha < 0$

e) $sen\ \alpha = -1$

f) $cos\ \alpha = 0,\ sen\ \alpha > 0$

a)

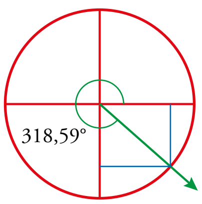


$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 < 0 \\ tg\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \to cos\ \alpha < 0 \to \alpha \in$ 3.^{er} cuadrante

$cos\ 210° \approx -0{,}86$

$tg\ 210° \approx 0{,}58$

b)

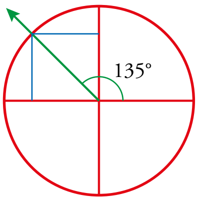


$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 3/4 \\ \alpha > 90° \end{array}\right\} \to \alpha \in$ 4.° cuadrante

$sen\ 318{,}59° \approx -0{,}66$

$tg\ 318{,}59° \approx -0{,}88$

c)

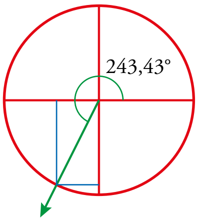


$$\left.\begin{array}{l} tg\ \beta = -1 < 0 \\ cos\ \beta < 0 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \beta > 0 \rightarrow \beta \in \text{ 2.° cuadrante}$$

$sen\ 135° \approx 0,7$

$cos\ 135° \approx -0,7$

d)

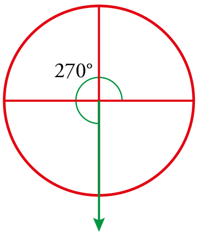


$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 2 > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow sen\ \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{er} \text{ cuadrante}$$

$sen\ 243,43° \approx -0,9$

$cos\ 243,43° \approx -0,45$

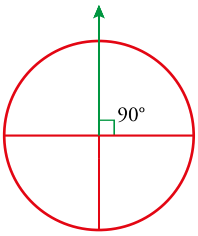
e)



$cos\ 270° = cos\ 90° = 0$

$tg\ 270°$ no existe

f)



$sen\ 90° = 1$

$tg\ 90°$ no existe

6 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 4.2. (EA 4.2.1.)

Página 118

Hazlo tú

1 **Los catetos de un triángulo rectángulo son $a = 47$ cm y $b = 62$ cm. Halla la hipotenusa y los ángulos.**

Por el teorema de Pitágoras, $c = \sqrt{47^2 + 62^2} = 77,8$ cm

$tg\,\hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{47}{62} \rightarrow \hat{A} = 37°\ 9'\ 52''$

$\hat{B} = 90° - \hat{A} = 90° - 37°\ 9'\ 52'' = 52°\ 50'\ 8''$

2 **En un triángulo rectángulo conocemos $\hat{B} = 62°$ y $b = 152$ m. Halla los demás elementos.**

$sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{152}{sen\,62°} = 172,15\text{ cm}$

$tg\,\hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{tg\,\hat{B}} = \frac{152}{tg\,62°} = 80,82\text{ cm}$

$\hat{A} = 90° - 62° = 28°$

3 **Conocemos la hipotenusa, $c = 72$ m, y el ángulo $\hat{A} = 23°$ de un triángulo rectángulo. Calcula b.**

$cos\,\hat{A} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot cos\,\hat{A} = 72 \cdot cos\,23° = 66,28$ cm

Página 119

1 **Las siguientes propuestas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos los casos, se designan por ABC, siendo C el ángulo recto.**

a) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula a.

b) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57°$. Calcula b.

c) Datos: $a = 250$ m, $b = 308$ m. Calcula c y $\hat{A}$.

d) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula b.

e) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32°$. Calcula c.

a) $cos\,\hat{B} = \frac{a}{c} \rightarrow a = c\,cos\,\hat{B} = 17,43$ cm

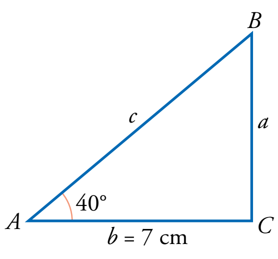
b) $sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c\,sen\,\hat{B} = 26,84$ cm

c) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 396,69$ m; $tg\,\hat{A} = \frac{a}{b} = 0,81 \rightarrow \hat{A} = 39°\ 3'\ 57''$

d) $tg\,\hat{A} = \frac{a}{b} \rightarrow b = \frac{a}{tg\,\hat{A}} = 56,01$ cm

e) $sen\,\hat{A} = \frac{a}{c} \rightarrow c = \frac{a}{sen\,\hat{A}} = 66,05$ cm

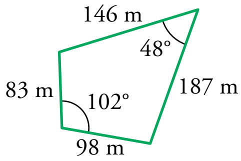
2 **Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40°. ¿Cuánto mide el poste?**

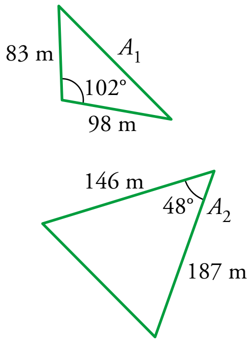


$tg\,40° = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7\ tg\,40° = 5,87$ m

3 **[La búsqueda de un método efectivo para calcular el área con las herramientas disponibles permite trabajar el autoconocimiento (dimensión personal)].**

Halla el área del siguiente cuadrilátero. Sugerencia: pártelo en dos triángulos.





$A_1 = \frac{1}{2} 98 \cdot 83\ sen\ 102° = 3\,978{,}13\ m^2$

$A_2 = \frac{1}{2} 187 \cdot 146\ sen\ 48° = 10\,144{,}67\ m^2$

El área es la suma de A_1 y A_2: $14\,122{,}80\ m^2$

7 ▶ RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS. ESTRATEGIA DE LA ALTURA

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) **CE 4.2.** (EA 4.2.1.)

Página 121

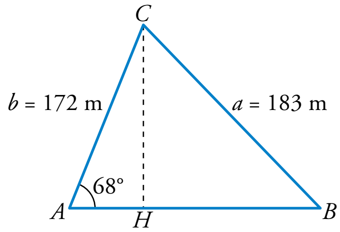
1 **En un triángulo *ABC* conocemos $\hat{A} = 68°$, $b = 172$ m y $a = 183$ m. Calcula la longitud del lado *c*.**

$\overline{AH} = 172 \; cos \; 68° = 64,43$ m

$\overline{CH} = 172 \; sen \; 68° = 159,48$ m

$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89,75$ m

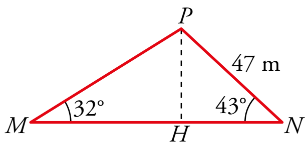
$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64,43 \text{ m} + 89,75 \text{ m} = 154,18$ m



2 **En un triángulo *MNP* conocemos $\hat{M} = 32°$, $\hat{N} = 43°$ y $\overline{NP} = 47$ m. Calcula $\overline{MP}$.**

$sen \; 43° = \dfrac{\overline{PH}}{47} \rightarrow \overline{PH} = 47 \; sen \; 43° = 32,05$ m

$sen \; 32° = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{MP}} \rightarrow \overline{MP} = \dfrac{\overline{PH}}{sen \; 32°} = \dfrac{32,05}{sen \; 32°} = 60,49$ m



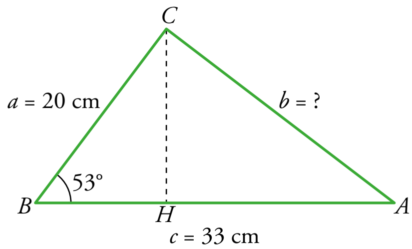
3 **En un triángulo *ABC* conocemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm y $\hat{B} = 53°$. Calcula la longitud del lado *b*.**

$\overline{BH} = a \; cos \; 53° = 12,04$ cm

$\overline{CH} = a \; sen \; 53° = 15,97$ cm

$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20,96$ cm

$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26,35$ cm



4 **[El alumnado deberá trabajar la asunción de riesgos (dimensión productiva) para buscar el método para calcular la altura del edificio].**

Observa el gráfico de la derecha. Estamos en *A*, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?

$$\left.\begin{array}{l} tg \; 42° = \dfrac{h}{d} \rightarrow h = d \; tg \; 42° \\ tg \; 35° = \dfrac{h}{d+40} \rightarrow h = (d+40) \; tg \; 35° \end{array}\right\} \rightarrow$$

$\rightarrow d \; tg \; 42° = (d + 40) tg \; 35° \rightarrow d = \dfrac{40 \; tg \; 35°}{tg \; 42° - tg \; 35°} = 139,90$ m

$h = d \; tg \; 42° = 125,97$ m

La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

8 ▶ DOS IMPORTANTES TEOREMAS PARA RESOLVER TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

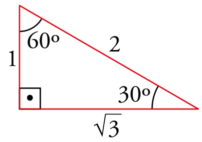
C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 1.3. (EA 1.3.1.-EA 1.3.2.) CE (4.2.1.)

Página 122

1 **¿Verdadero o falso?**

a) El teorema de los senos confirma que en un triángulo, «a mayor lado se opone mayor ángulo».

b) Este triángulo rectángulo es la mitad de un triángulo equilátero.



Dividimos el seno de cada ángulo entre el lado opuesto:

- $\dfrac{\textit{sen}\ 60°}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{\textit{sen}\ 90°}{2} = \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{\textit{sen}\ 30°}{1} = \dfrac{1/2}{1} = \dfrac{1}{2}$

Con estas igualdades se comprueba que se cumple el teorema de los senos.

a) Verdadero. Como la razón entre el lado y el seno del ángulo opuesto es constante, cuanto mayor es el lado, mayor es el seno del ángulo opuesto y, por tanto, mayor es el ángulo opuesto (al tratarse de ángulos de un triángulo).

b) Verdadero. Con estas igualdades se comprueba el teorema de los senos en el caso particular de un triángulo equilátero. Sin embargo, el teorema es mucho más general porque se pueda aplicar a triángulos cualesquiera.

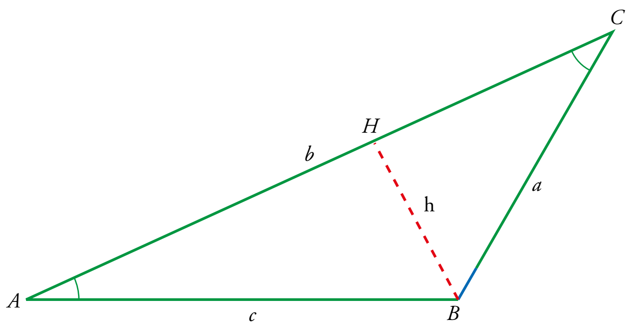
2 ¿Qué te hace decir eso? **[La justificación de la igualdad que propone el enunciado permite trabajar esta estrategia].**

Demuestra detalladamente, basándote en la demostración del teorema de los senos, la siguiente relación:

$$\frac{a}{\textit{sen}\ \hat{A}} = \frac{c}{\textit{sen}\ \hat{C}}$$

Lo demostramos para $\hat{C}$ ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice B. Así, los triángulos obtenidos AHB y CHB son rectángulos.



Por tanto, tenemos

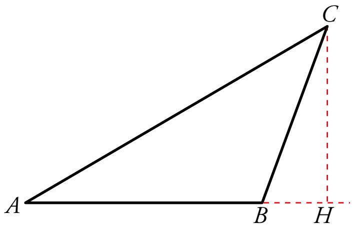
$$\textit{sen}\ \hat{A} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c\ \textit{sen}\ \hat{A}$$

$$\textit{sen}\ \hat{C} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\ \textit{sen}\ \hat{C}$$

$$c\ \textit{sen}\ \hat{A} = a\ \textit{sen}\ \hat{C}$$

$$\frac{a}{\textit{sen}\ \hat{A}} = \frac{c}{\textit{sen}\ \hat{C}}$$

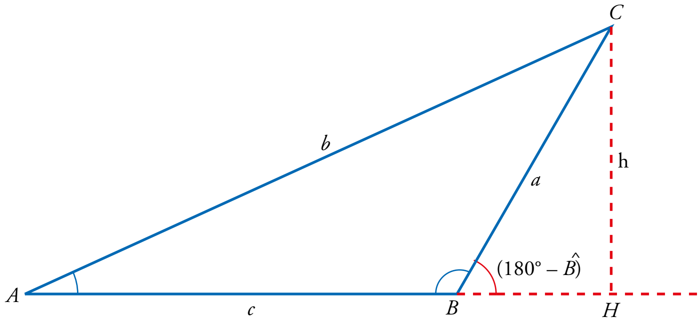
3 **Repite la demostración anterior en el caso de que $\hat{B}$ sea obtuso.**
Ten en cuenta que $sen\ (180° - \hat{B}) = sen\ \hat{B}$.



$sen\ \hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b\ sen\ \hat{A}$

$sen\ \hat{B} = sen\ (180° - \hat{B}) = \frac{h}{a} \rightarrow h = a\ sen\ \hat{B}$

$b\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{B} \rightarrow \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}$



Página 123

Hazlo tú

1 **Halla b y c conociendo $a = 56$ m, $\hat{B} = 52°$ y $\hat{C} = 112°$.**

$\hat{A} = 180° - 52° - 112° = 16°$

Ahora usamos el teorema de los senos.

$$\frac{56}{sen\,16°} = \frac{b}{sen\,52°} \rightarrow b = \frac{56 \cdot sen\,52°}{sen\,16°} = 160,1 \text{ m}$$

$$\frac{56}{sen\,16°} = \frac{c}{sen\,112°} \rightarrow c = \frac{56 \cdot sen\,112°}{sen\,16°} = 188,37 \text{ m}$$

2 **Calcula $\hat{A}$ conociendo $a = 6$ cm, $b = 4$ cm y $\hat{B} = 30°$.**

Por el teorema de los senos:

$$\frac{6}{sen\ \hat{A}} = \frac{4}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{6 \cdot sen\ 30°}{4} = 0,75 \rightarrow \hat{A}_1 = 48°\ 35'\ 25'' \quad \hat{A}_2 = 131°\ 24'\ 35''$$

En este caso ambas soluciones son posibles porque $\hat{A} + \hat{B} < 180°$.

Por tanto, tenemos dos posibles triángulos, uno acutángulo y otro obtusángulo.

Piensa y practica

4 **[La justificación de si las afirmaciones son verdaderas o falsas permite trabajar la destreza expresión oral de esta clave].**

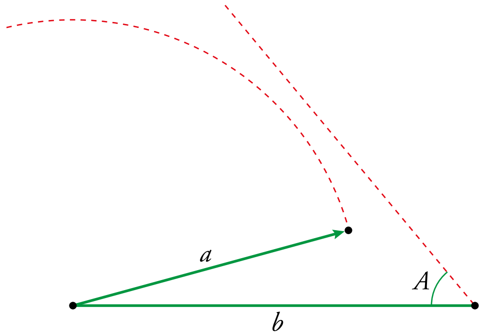
¿Verdadero o falso?

a) Si nos dan dos lados de un triángulo, a y b, y el ángulo opuesto a uno de ellos, $\hat{A}$, y deseamos hallar el ángulo $\hat{B}$, con el teorema de los senos seguro que llegaremos a una solución.

b) Si nos dan dos lados y un ángulo de un triángulo y deseamos hallar otro lado, el teorema de los senos seguro que nos permite llegar a una solución.

a) Falso.

Si el lado a no es suficientemente grande, el problema no tendrá solución como muestra el siguiente dibujo:



b) Falso.

Si nos dan el ángulo comprendido entre los dos lados, no podemos plantear el problema usando el teorema de los senos.

5 **En un triángulo ABC, conocemos $a = 4$ cm y $\hat{B} = 30°$. Halla $\hat{A}$ en los siguientes casos:**

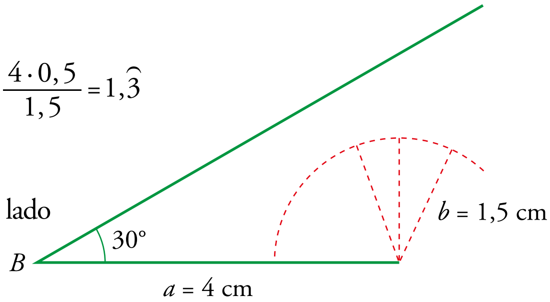
a) $b = 1{,}5$ cm **b) $b = 2$ cm** **c) $b = 3$ cm** **d) $b = 4$ cm**

a) $b = 1{,}5$ cm

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\,\widehat{A}} = \frac{1{,}5}{sen\,30°} \rightarrow sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{1{,}5} = 1{,}\widehat{3}$$

¡Imposible, pues $sen\,\hat{A} \in [-1, 1]$ siempre!

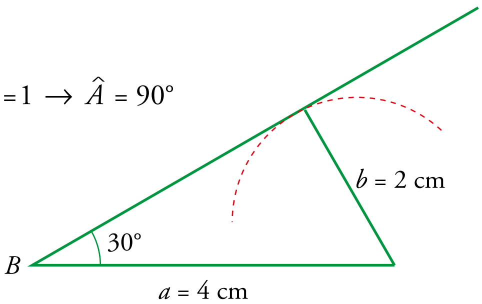
No tiene solución. Con esta medida, $b = 1{,}5$ cm, el lado b nunca podría tocar al lado c.



b) $b = 2$ cm

$$\frac{a}{sen\,\widehat{A}} = \frac{b}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\,\widehat{A}} = \frac{2}{sen\,30°} \rightarrow sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{2} = 1 \rightarrow \hat{A} = 90°$$

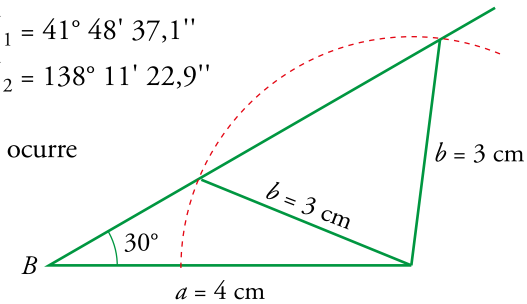
Se obtiene una única solución.



c) $b = 3$ cm

$$\frac{4}{sen\,\widehat{A}} = \frac{3}{sen\,30°} \rightarrow sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{3} = 0{,}\widehat{6} \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 41°\ 48'\ 37{,}1'' \\ \hat{A}_2 = 138°\ 11'\ 22{,}9'' \end{cases}$$

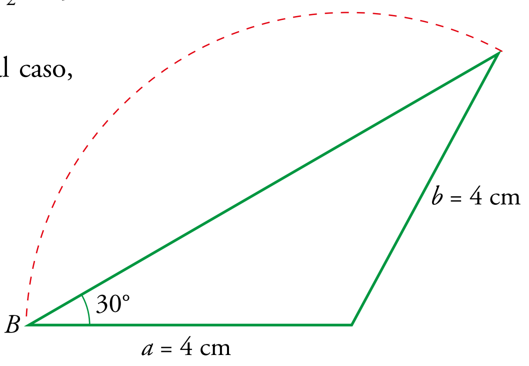
Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\hat{A} + \hat{B} > 180°$.



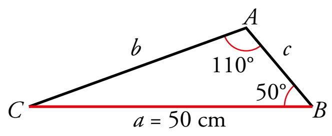
d) $b = 4$ cm

$$\frac{4}{sen\,\widehat{A}} = \frac{4}{sen\,30°} \to sen\,\hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{4} = 0,5 \to \begin{cases} \hat{A}_1 = 30° \to \text{Una solución válida.} \\ \hat{A}_2 = 150° \end{cases}$$

La solución $\hat{A}_2 = 150°$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\hat{A} + \hat{B} = 180°$. ¡Imposible!



6 **Calcula los lados b y c del triángulo de la derecha.**



Hallamos el ángulo $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 180° - 160° = 20°$

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{50}{sen\,110°} = \frac{b}{sen\,50°} \to b = \frac{50 \cdot sen\,50°}{sen\,110°} = 40,76 \text{ cm}$$

$$\frac{50}{sen\,110°} = \frac{c}{sen\,20°} \to c = \frac{50 \cdot sen\,20°}{sen\,110°} = 18,2 \text{ cm}$$

Página 124

7 **¿Verdadero o falso?**

a) Si de un triángulo conocemos dos lados y el ángulo que forman, el teorema del coseno nos permite obtener el otro lado.

b) Si aplicamos el teorema del coseno a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces obtenemos el teorema de Pitágoras.

a) Verdadero. Esta es la situación en la que se usa el teroema del coseno para calcular el tercer lado de un triángulo.

b) Verdadero. El ángulo opuesto a la hipotenusa es el ángulo recto y, por tanto, su coseno vale cero.

Si a es la hipotenusa, el ángulo opuesto es $\hat{A} = 90°$ y se obtiene el teorema de Pitágoras a partir del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,90° \to a^2 = b^2 + c^2$$

Página 125

Hazlo tú

1 **Calcula c conociendo $a = 7$ m, $b = 22$ m y $\hat{C} = 40°$.**

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos\,\hat{C} \to c = \sqrt{7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cdot cos\,40°} = 17,24 \text{ m}$$

Piensa y practica

8 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $a = 12$ **cm;** $b = 16$ **cm;** $c = 10$ **cm**

b) $a = 7$ **cm;** $b = 22$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

c) $b = 4$ **cm;** $c = 3$ **cm;** $\hat{A} = 105°$

d) $a = 4$ **m;** $\hat{B} = 45°$; $\hat{C} = 60°$

e) $b = 5$ **m;** $\hat{A} = \hat{C} = 35°$

f) $a = b = 10$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

g) $a = 5$ **cm;** $\hat{A} = 75°$; $\hat{B} = 45°$

h) $a = 16$ **cm;** $\hat{A} = 90°$; $\hat{C} = 30°$

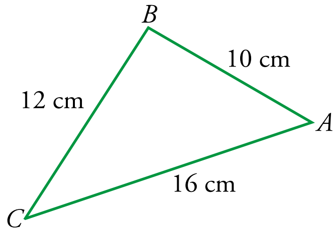
a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320 \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{256+100-144}{320} = 0,6625$

$\hat{A} = 48°\ 30'\ 33''$



• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B}$

$\cos \hat{B} = \dfrac{144+100-256}{240} = -0,05$

$\hat{B} = 92°\ 51'\ 57,5''$

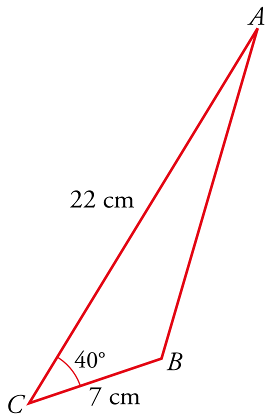
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \rightarrow \hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$

$\hat{C} = 38°\ 37'\ 29,5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40° = 49 + 484 - 235,94 = 297,06$

$c = 17,24$ cm



• $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \dfrac{7}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{17,24}{\operatorname{sen} 40°}$

$\operatorname{sen} \hat{A} = \dfrac{7 \operatorname{sen} 40°}{17,24} = 0,26$

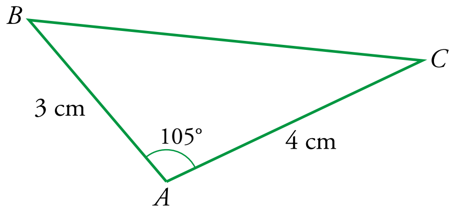
$\hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15°\ 7'\ 44,3'' \\ \hat{A}_2 = 164°\ 52'\ 15,7'' \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución $\hat{A}_2$ no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180°$).

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 124°\ 52'\ 15,7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105° = 31,21$

$a = 5,59$ m



• $\dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \dfrac{5,59}{\operatorname{sen} 105°} = \dfrac{4}{\operatorname{sen} \hat{B}}$

$\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{4 \cdot \operatorname{sen} 105°}{5,59} = 0,6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43°\ 43'\ 25,3'' \\ \hat{B}_2 = 136°\ 16'\ 34,7'' \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31°\ 16'\ 34,7''$

d) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} \to \dfrac{4}{sen\,75°} = \dfrac{b}{sen\,45°}$

$b = \dfrac{4 \cdot sen\,45°}{sen\,75°} = 2,93$ m

• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{c}{sen\ \widehat{C}} \to \dfrac{4}{sen\,75°} = \dfrac{c}{sen\,60°}$

$c = \dfrac{4 \cdot sen\,60°}{sen\,75°} = 3,59$ m

e) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} = \dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} \to \dfrac{5}{sen\,110°} = \dfrac{a}{sen\,35°}$

$a = \dfrac{5 \cdot sen\,35°}{sen\,110°} = 3,05$ m

• Como $\hat{A} = \hat{C} \to a = c \to c = 3,05$ m

f) • Como los lados a y b son iguales, el triángulo es isósceles:

$\hat{A} + \hat{B} = 180° - 40° \to 2\hat{A} = 140° \to \hat{A} = \hat{B} = 70°$

• $\dfrac{10}{sen\,70°} = \dfrac{c}{sen\,40°} \to c = \dfrac{10 \cdot sen\,40°}{sen\,70°} = 6,84$ cm

g) • $\hat{C} = 180° - 75° - 45° = 60°$

• $\dfrac{5}{sen\,75°} = \dfrac{b}{sen\,45°} \to b = \dfrac{5 \cdot sen\,45°}{sen\,75°} = 3,66$ cm

• $\dfrac{5}{sen\,75°} = \dfrac{c}{sen\,60°} \to c = \dfrac{5 \cdot sen\,60°}{sen\,75°} = 4,48$ cm

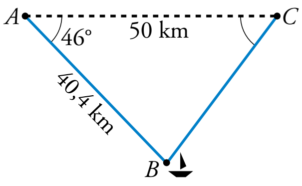
h) • $\hat{B} = 180° - 90° - 30° = 60°$

• $sen\ 30° = \dfrac{c}{16} \to c = 16 \cdot sen\ 30° = 8$ cm

• $cos\ 30° = \dfrac{b}{16} \to b = 16 \cdot cos\ 30° = 13,86$ cm

9 **[Para decidir cuál de las dos estaciones de radio se encuentra más cerca de *B* el alumnado deberá trabajar la iniciativa (dimensión productiva)].**

Un barco, *B*, salió de *A* y ha recorrido 40,4 km formando un ángulo de 46° con la línea de la costa hasta que se ha quedado sin combustible. Pide socorro y reciben sus señales en dos estaciones de radio, *A* y *C*, que distan entre sí 50 km. ¿Qué estación se encuentra más cerca de *B*?



$\overline{BC}^2 = 40,4^2 + 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 40,4 \cdot cos\ 46° = 1\,325,74 \to \overline{BC} = 36,4$ km

Por tanto, la más cercana es *C*.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 4.1.** (EA 4.1.1.) **CE 4.2.** (EA 4.2.1.)

Página 126

1. Relaciones entre las razones trigonométricas

Hazlo tú

a) Si $cos\ \alpha = -3/4$ y $180° < \alpha < 270°$, calcula sin hallar el ángulo α:

$sen\ \alpha$ $\quad tg\ \alpha$

$sen\ (180° + \alpha)$ $\quad cos\ (90° - \alpha)$

$sen\ (360° - \alpha)$ $\quad tg\ (180° - \alpha)$

b) Obtén con la calculadora el valor del ángulo α.

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \rightarrow sen\ \alpha = \pm\sqrt{1-\frac{9}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$

Como α pertenece al tercer cuadrante, su seno es negativo $\rightarrow sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ $\qquad cos\ (90° - \alpha) = sen\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

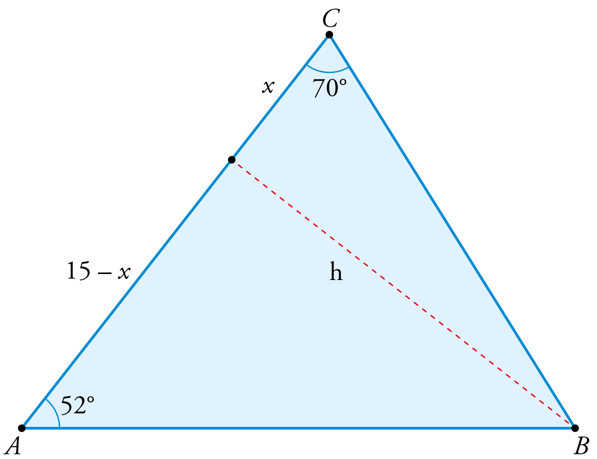
$sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ $\quad tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$ $\qquad sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

b) 221° 24'

2. Cálculo de una distancia mediante la estrategia de la altura

Hazlo tú

- **De un triángulo ABC conocemos $\overline{AC} = 15$ m, $\hat{A} = 52°$ y $\hat{C} = 70°$. Calcula la altura sobre AC.**



Llamamos h a la altura trazada sobre el lado $\overline{AC}$. Dividimos este lado en dos partes, que medirán x y $15 - x$.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 52° = \frac{h}{15-x} \rightarrow h = (15-x)\cdot tg\ 52° \\ tg\ 70° = \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot tg\ 70° \end{array}\right\} \rightarrow (15-x)\cdot tg\ 52° = x \cdot tg\ 70° \rightarrow x = 4{,}77 \text{ m}$$

Finalmente, $h = x \cdot tg\ 70° = 4{,}77 \cdot tg\ 70° = 13{,}11$ m.

Página 127

3. Resolución de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Hazlo tú

- **Resuelve el triángulo ABC en el que conocemos a = 12 cm, b = 8,3 cm y $\hat{A}$ = 110°.**

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{12}{sen\,110°} = \frac{8,3}{sen\,\hat{B}} \to sen\,\hat{B} = \frac{8,3 \cdot sen\,110°}{12} = 0,65 \to \hat{B} \text{ puede ser } 40°\ 32'\ 30'' \text{ o bien } 139°\ 27'\ 30''$$

Este segundo valor no es posible porque la suma de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ sería superior a 180°.

Por tanto, $\hat{B} = 40°\ 32'\ 30''$.

$\hat{C} = 180° - (110° + 40°\ 32'\ 30'') = 29°\ 27'\ 30''$

Hallamos el lado c usando, de nuevo, el teorema de los senos:

$$\frac{12}{sen\,110°} = \frac{c}{sen\,(29°\ 27'\ 30'')} \to c = \frac{12 \cdot sen\,(29°\ 27'\ 30'')}{sen\,110°} = 6,28 \text{ cm}$$

4. Cálculo del área de una parcela descomponiéndola en triángulos

Hazlo tú

- **Halla el área del cuadrilátero irregular $ABCD$ sabiendo:**
  $\overline{AB}$ = 62 m; $\overline{BC}$ = 19 m; $\overline{CD}$ = 21 m; $\overline{AD}$ = 45 m; $\hat{B}$ = 60°.

Trazando la diagonal $\overline{AC}$ descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo ABC:

  $sen\ 60° = \frac{h}{19} \to h = 19 \cdot sen\ 60° = 16,45$ m

  $$S_{ABC} = \frac{62 \cdot 16,45}{2} = 509,95 \text{ m}^2$$

- Área del triángulo ACD:

  Para poder usar la fórmula de Herón necesitamos el lado $\overline{AC}$. Por el teorema del coseno:

  $\overline{AC}^2 = 19^2 + 62^2 - 2 \cdot 19 \cdot 62\ cos\ 60° = 3\,027 \to \overline{AC} = \sqrt{3\,027} = 55,02$ m

  Ahora, aplicamos la fórmula de Herón:

  $$p = \frac{21 + 45 + 55,02}{2} = 60,51$$

  $$S_{ACD} = \sqrt{60,51(60,51-21)(60,51-45)(60,51-55,02)} = 451,19 \text{ m}^2$$

- El área del cuadrilátero es:

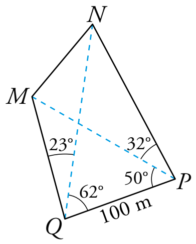
  $S_{ABCD} = 509,95 + 451,19 = 961,14 \text{ m}^2$

Página 128

5. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

Hazlo tú

- **Calcula la distancia $\overline{MN}$.**



- Usando el triángulo PQM podemos calcular el lado $\overline{QM}$:

  El ángulo $\widehat{QMP} = 180° - 50° - 85° = 45°$

  $$\frac{\overline{QM}}{sen\,50°} = \frac{100}{sen\,45°} \to \overline{QM} = \frac{100 \cdot sen\,50°}{sen\,45°} = 108,34 \text{ m}$$

- Usando el triángulo PQN podemos calcular la diagonal $\overline{QN}$:

  El ángulo $\widehat{QNP} = 180° - 62° - 82° = 36°$

  $$\frac{\overline{QN}}{sen\,82°} = \frac{100}{sen\,36°} \to \overline{QN} = \frac{100 \cdot sen\,82°}{sen\,36°} = 168,47 \text{ m}$$

- Ahora usamos el teorema del coseno para hallar $\overline{MN}$:

  $$\overline{MN}^2 = 108,34^2 + 168,47^2 - 2 \cdot 108,34 \cdot 168,47\, cos\,23° = 6\,517,5$$

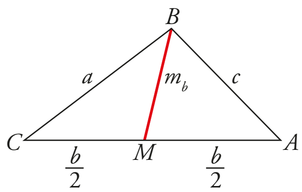
  $$\overline{MN} = \sqrt{6\,517,5} = 80,73 \text{ m}$$

6. Longitud de la mediana de un triángulo

Hazlo tú

- **Demuestra que en el triángulo de lados a, b, c, la longitud de la mediana sobre el lado b es:**

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$



Usaremos el teorema del coseno en los triángulos ABC y AMB para demostrarlo.

Aplicado en el triángulo ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,cos\,A \to -bc\,cos\,A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} \qquad (*)$$

Aplicado en el triángulo AMB:

$$\overline{BM}^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2 - 2\frac{b}{2}c\,cos\,A \to -bc\,cos\,A = \overline{BM}^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2 \qquad (**)$$

De (*) y (**) se sigue:

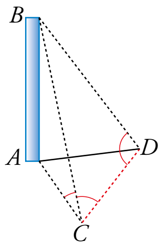
$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} = \overline{BM}^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2 \to \overline{BM}^2 = \frac{2a^2 - b^2 + 2c^2}{4} \to \overline{BM} = \frac{\sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2}}{2}$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 1.2. (EA 1.2.1.-EA 1.2.3.-EA 1.2.4.-EA 1.2.5.) CE 4.2. (EA 4.2.1.)

Página 129

1. Altura de una torre



- **Para medir la altura de la torre *AB*, nos situamos en los puntos *C* y *D* y tomamos estas medidas:**

$\overline{CD} = 15$ m; $\widehat{ACB} = 40°$

$\widehat{BCD} = 58°$; $\widehat{BDC} = 70°$

¿Qué altura tiene la torre?

$\hat{B} = 180° - 58° - 70° = 52°$

$$\frac{\overline{BC}}{sen\, 70°} = \frac{15}{sen\, 52°} \rightarrow \overline{BC} = \frac{15 \cdot sen\, 70°}{sen\, 52°} = 17,89 \text{ m}$$

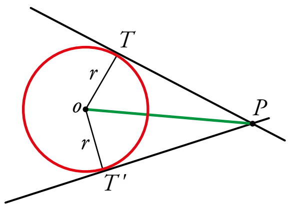
$$sen\, 40° = \frac{\overline{AB}}{17,89} \rightarrow \overline{AB} = 17,89 \cdot sen\, 40° = 11,5 \text{ m}$$

2. Distancia entre puntos de tangencia

- **Las tangentes trazadas desde el punto *P* a una circunferencia de centro *O* y de 14 cm de radio forman un ángulo de 32°. Calcular:**

a) La distancia de P al centro de la circunferencia.

b) La longitud de la cuerda que une los puntos de tangencia.



Sabemos que el ángulo $\widehat{OPT}$ es la mitad del ángulo $\widehat{TPT'} \rightarrow \widehat{OPT} = 32° : 2 = 16°$

También sabemos que $r = 14$ cm.

a) Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo *OPT*:

$$sen\left(\widehat{OPT}\right) = \frac{14}{OP} \rightarrow \overline{OP} = \frac{14}{sen\, 16°} = 51°12'$$

b) Queremos saber el ángulo $\widehat{TOT'}$, y para ello tenemos en cuenta que del cuadrilátero *TOT'P* conocemos tres ángulos. Como sus ángulos suman 360° y que los ángulos $\widehat{OTP}$ y $\widehat{OT'P}$ son rectos, despejamos y tenemos que el ángulo $\widehat{TOT'} = 360° - 90° - 90° - 32° = 148°$.

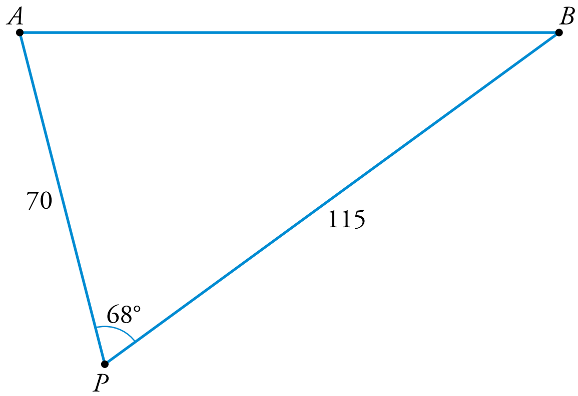
Consideramos el triángulo *TOT'*, del que conocemos un ángulo y dos lados, por lo que aplicando el teorema del coseno:

$$\overline{TT'}^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \widehat{T'OT} \rightarrow \overline{TT'} = 26,9 \text{ cm}$$

3. Cálculo de algunos lados y ángulos de un triángulo

- **Desde un punto P observamos los puntos A y B, situados en las orillas opuestas de una laguna, bajo un ángulo de 68°. Sabemos que $\overline{PA}$ = 70 m y $\overline{PB}$ = 115 m.**

  Calcular la distancia AB y los ángulos $\widehat{PAB}$ y $\widehat{PBA}$.



$\overline{AB}^2 = 70^2 + 115^2 - 2 \cdot 70 \cdot 115 \cos 68° = 12\,093,8$

$\overline{AB} = \sqrt{12\,093,8} = 110$ m

$\dfrac{115}{sen\,\widehat{PAB}} = \dfrac{110}{sen\,68°} \to sen\,\widehat{PAB} = \dfrac{115 \cdot sen\,68°}{110} = 0,9693 \to \widehat{PAB} = 75°\,46'\,22''$

$\widehat{PBA} = 180° - 68° - 75°\,46'\,22'' = \ 36°\,13'\,38''$

4. Cálculo de los ángulos de un triángulo cuando se conocen los tres lados

- **La resultante de dos fuerzas F_1 = 16 N y F_2 = 12 N, aplicadas en un mismo punto, es de R = 25 N. ¿Qué ángulo forman entre sí? ¿Y cada una de ellas con la resultante?**

$\overline{BC} = F_1 = 16$

Del triángulo ABC conocemos los 3 lados, por lo que podemos aplicar el teorema del coseno:

$R^2 = 16^2 + 12^2 - 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \cos \widehat{B} \to \cos \widehat{B} = 0,586 \to B = 125°\,52'$

Teniendo en cuenta el paralelogramo $ABCD$ sabemos que el ángulo $\widehat{A}$ y el $\widehat{B}$ se complementan:

$$180° = \widehat{A} + \widehat{B} \to A = 54°\,8'$$

$16^2 = 12^2 + 25^2 - 2 \cdot 12 \cdot 25 \cdot \cos \widehat{CAB} = 0,855 \to \widehat{CAB} = 31°\,14'$ es el ángulo que forman R y F_2.

Nos falta encontrar el ángulo formado $\widehat{CAD}$, y sabemos que es la diferencia entre $\widehat{A}$ y $\widehat{CAB}$, por lo que su valor es $\widehat{A} - \widehat{CAD} = 22°\,52'$.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

Página 130

Para practicar

Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas

1 **Utiliza las relaciones fundamentales para hallar las demás razones trigonométricas de los ángulos agudos α, β y γ.**

a) $\boldsymbol{cos\ \alpha = \sqrt{5}/3}$ **b)** $\boldsymbol{sen\ \beta = 3/5}$ **c)** $\boldsymbol{tg\ \gamma = 3}$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha + \dfrac{5}{9} = 1 \to sen^2\ \alpha = \dfrac{4}{9} \to sen\ \alpha = \pm\dfrac{2}{3}$

- Si $sen\ \alpha = \dfrac{2}{3} \to tg\ \alpha = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
- Si $sen\ \alpha = -\dfrac{2}{3} \to tg\ \alpha = \dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{-2}{\sqrt{5}} = \dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$

b) $sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \to \dfrac{9}{25} + cos^2\ \beta = 1 \to cos^2\ \beta = \dfrac{16}{25} \to cos\ \beta = \pm\dfrac{4}{5}$

- Si $cos\ \beta = \dfrac{4}{5} \to tg\ \beta = \dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$
- Si $cos\ \beta = -\dfrac{4}{5} \to tg\ \beta = \dfrac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{sen\ \gamma}{cos\ \gamma} = 3 \to sen\ \gamma = 3\ cos\ \gamma$

$sen^2\ \gamma + cos^2\ \gamma = 1 \to (3cos\ \gamma)^2 + cos^2\ \gamma = 1 \to 10cos^2\ \gamma = 1 \to cos\ \gamma = \pm\sqrt{\dfrac{1}{10}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}} = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

- Si $cos\ \gamma = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \to sen\ \gamma = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
- Si $cos\ \gamma = -\dfrac{\sqrt{10}}{10} \to sen\ \gamma = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

2 **Halla las razones trigonométricas de α, sin hallar α.**

a) $\boldsymbol{sen\ \alpha = -2/3;\ cos\ \alpha < 0}$ **b)** $\boldsymbol{cos\ \alpha = 5/6;\ tg\ \alpha < 0}$

c) $\boldsymbol{tg\ \alpha = 2{,}25;\ sen\ \alpha < 0}$ **d)** $\boldsymbol{cos\ \alpha = -\sqrt{5}/4;\ sen\ \alpha < 0}$

a) Como $cos\ \alpha < 0$, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to \dfrac{4}{9} + cos^2\ \alpha = 1 \to cos^2\ \alpha = \dfrac{5}{9} \to cos\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$tg\ \alpha = \dfrac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

b) Como $tg\ \alpha < 0$, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha + \dfrac{25}{36} = 1 \to sen^2\ \alpha = \dfrac{11}{36} \to sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

$tg\ \alpha = \dfrac{-\frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{5}{6}} = -\dfrac{\sqrt{11}}{5}$

c) $\dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 2{,}25 \to sen\ \alpha = 2{,}25\ cos\ \alpha$

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to (2{,}25cos\ \alpha)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \to 6{,}0625cos^2\ \alpha = 1 \to$

$\to cos\ \alpha = -\sqrt{\dfrac{1}{6{,}0625}} = -0{,}4061$ (tiene el mismo signo que $sen\ \alpha$ por ser $tg\ \alpha > 0$)

$sen\ \alpha = 2{,}25cos\ \alpha = 2{,}25 \cdot (-0{,}4061) = -0{,}9137$

d) Como $sen\ \alpha < 0$, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \to sen^2\ \alpha + \dfrac{5}{16} = 1 \to sen^2\ \alpha = \dfrac{11}{6} \to sen\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}$

$tg\ \alpha = \dfrac{-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{6}}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}} = 2\sqrt{\dfrac{22}{15}}$

3 **Sabiendo que** $cos\ \alpha = 0{,}8$ **y** $sen\ \alpha = 0{,}6$; **calcula:**

a) $cos\ (180° + \alpha)$
b) $sen\ (180° - \alpha)$
c) $tg\ (-\alpha)$
d) $sen\ (90° - \alpha)$
e) $cos\ (90° + \alpha)$
f) $tg\ (90° - \alpha)$

a) $cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha = -0{,}8$

b) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = 0{,}6$

c) $tg\ (-\alpha) = -tg\ \alpha = -\dfrac{0{,}6}{0{,}8} = -\dfrac{3}{4}$

d) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = 0{,}8$

e) $cos\ (90° + \alpha) = -sen\ \alpha = -0{,}6$

f) $tg\ (90° - \alpha) = \dfrac{1}{tg\ \alpha} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = \dfrac{4}{3}$

4 **Si** $sen\ 42° = 0{,}67$; $cos\ 42° = 0{,}74$ **y** $tg\ 42° = 0{,}9$; **halla las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:**

a) $cos\ 48°$
b) $sen\ (-48°)$
c) $sen\ 138°$
d) $tg\ 318°$
e) $cos\ 222°$
f) $tg\ 858°$

a) $cos\ 48° = cos\ (90° - 42°) = sen\ 42° = 0{,}67$

b) $sen\ (-48°) = -sen\ 48° = -sen\ (90° - 42°) = -cos\ 42° = -0{,}74$

c) $sen\ 138° = sen\ (180° - 42°) = sen\ 42° = 0{,}67$

d) $tg\ 318° = tg\ (360° - 42°) = tg\ (-42°) = -tg\ 42° = -0{,}9$

e) $cos\ 222° = cos\ (180° + 42°) = -cos\ 42° = -0{,}74$

f) $tg\ 858° = tg\ (360° \cdot 2 + 138°) = tg\ 138° = tg\ (180° - 42°) = -tg\ 42° = -0{,}9$

5 **Expresa con un ángulo del primer cuadrante estas razones trigonométricas y di su valor exacto sin usar la calculadora:**

a) $sen\ 135°$
b) $cos\ 240°$
c) $tg\ 120°$
d) $cos\ 1\,845°$
e) $tg\ 1\,125°$
f) $sen\ (-120°)$

a) $sen\ 135° = sen\ (90° + 45°) = cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $cos\ 240° = cos\ (180° + 60°) = -cos\ 60° = -\dfrac{1}{2}$

c) $tg\ 120° = tg\ (180° - 60°) = -tg\ 60° = -\sqrt{3}$

d) $cos\ 1\,845° = cos\ (360° \cdot 5 + 45°) = cos\ 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) $tg\ 1\,125° = tg\ (360° \cdot 3 + 45°) = tg\ 45° = 1$

f) $sen\ (-120°) = -sen\ 120° = -sen\ (180° - 60°) = -sen\ 60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

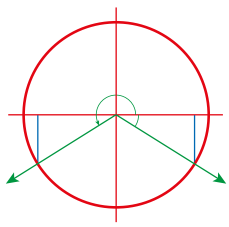
6 **Halla con la calculadora el valor del ángulo** α**:**

a) $sen\ \alpha = -0{,}75$; $\alpha < 270°$
b) $cos\ \alpha = -0{,}37$; $\alpha > 180°$
c) $tg\ \alpha = 1{,}38$; $sen\ \alpha < 0$
d) $cos\ \alpha = 0{,}23$; $sen\ \alpha < 0$

a) Con la calculadora $\rightarrow$ $\alpha = -48°\ 35'\ 25'' \in$ 4.° cuadrante

Como debe ser $\left\{\begin{matrix} sen\ \alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{matrix}\right\}$ $\rightarrow$ $\alpha \in$ 3.er cuadrante

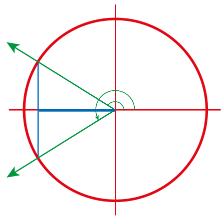
Luego $\alpha = 180° + 48°\ 35'\ 25'' = 228°\ 35'\ 25''$



b) Con la calculadora: 111° 42' 56,3''

$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha < 0 \\ \alpha > 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

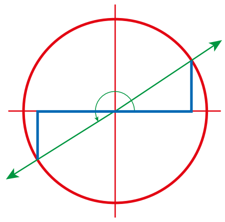
Luego α = 360° – 111° 42' 56,3' = 248° 17' 3,7''



c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 1,38 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\}$ $cos < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

Con la calculadora: tg^{-1} 1,38 = 54° 4' 17,39''

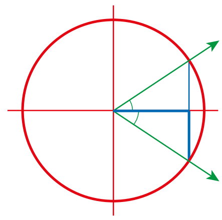
α = 180° + 54° 4' 17,39'' = 234° 4' 17,4''



d) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 0,23 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 4.°$ cuadrante

Con la calculadora: cos^{-1} 0,23 = 76° 42' 10,5''

α = –76° 42' 10,5'' = 283° 17' 49,6''



7 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.

a) $sen\ \alpha = cos\ (90° + \alpha)$ **b)** $sen\ (180° + \alpha) = sen\ (360° - \alpha)$

c) $cos\ \alpha = sen\ (90° + \alpha)$ **d)** $cos\ (180° + \alpha) = cos\ (180° - \alpha)$

e) $-tg\ \alpha = tg\ (360 - \alpha)$ **f)** $tg\ (180 + \alpha) = tg\ (-\alpha)$

a) Verdadero si $\alpha = 0°$ o $\alpha = 90°$ ya que:

$cos\ (90° + \alpha) - sen\ \alpha = sen\ \alpha \rightarrow \alpha = 0°$ o $\alpha = 90°$.

b) Verdadero ya que $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = sen\ (360° - \alpha)$.

c) Verdadero ya que $cos\ \alpha = sen\ (90° + \alpha) = cos\ \alpha$.

d) Verdadero ya que $cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha$ y $cos\ (180° - \alpha) = -cos\ \alpha$.

e) Verdadero ya que $tg\ (360° - \alpha) = tg\ (-\alpha)$.

f) $tg\ (180° + \alpha) = tg\ \alpha$ y $tg\ (-\alpha) = -tg\ (\alpha)$, por tanto, es cierto si $tg\ \alpha = -tg\ \alpha \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}$, que es cierto si es cero, es decir cuando $sen\ \alpha = 0° \rightarrow \alpha = 0°$ o bien $\alpha = 90°$.

8 Se llama *cosecante* de α, a la razón trigonométrica inversa del seno; *secante* de α a la inversa del coseno y *cotangente* de α a la inversa de la tangente. Se escriben así:

$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$ $sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$ $cotg\ \alpha = \frac{1}{tag\ \alpha}$

a) Calcula $cosec\ \alpha$, $sec\ \alpha$ y $cotg\ \alpha$ en cada uno de los apartados del ejercicio 2.

b) Si α es el ángulo del ejercicio 3, halla:

$cotg\ (90° - \alpha)$ $cosec\ (180° - \alpha)$ $sec(180° + \alpha)$ $cotg\ (-\alpha)$

a) Con 2a):

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = \frac{1}{-\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{1}{2/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Con 2b):

$cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha} = \dfrac{6}{-\sqrt{11}}$

$sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = \dfrac{6}{5}$

$cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{-5}{\sqrt{11}}$

Con 2c):

$cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha} = \dfrac{1}{-0,9137} = -1,094$

$sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = \dfrac{1}{0,4061} = -2,462$

$cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{1}{2,25} = 0,\widehat{4}$

Con 2d):

$cosec\ \alpha = \dfrac{1}{sen\ \alpha} = \dfrac{-4}{\sqrt{11}}$

$sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha} = \dfrac{-4}{\sqrt{5}}$

$cotg\,\alpha = \dfrac{1}{tg\,\alpha} = \dfrac{5}{\sqrt{55}}$

b) $cos\,\alpha = 0,8;\ \ sen\ \alpha = 0,6$

$cotg\,(90° - \alpha) = \dfrac{1}{tg\,(90° - \alpha)} = \dfrac{1}{\frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha}} = \dfrac{0,6}{0,8} = 0,75$

$sec(180° + \alpha) = \dfrac{1}{cos(180° + \alpha)} = \dfrac{1}{-cos\,\alpha} = \dfrac{1}{-0,8} = -1,25$

$cosec\,(180° - \alpha) = \dfrac{1}{sen(180° - \alpha)} = \dfrac{1}{sen\,\alpha} = \dfrac{1}{0,6} = 1,\widehat{6}$

$cotg\,(-\alpha) = \dfrac{1}{tg(-\alpha)} = \dfrac{1}{\frac{-sen\,\alpha}{cos\,\alpha}} = -\dfrac{0,8}{0,6} = -1,\widehat{3}$

9 **Halla las razones trigonométricas de los ángulos del intervalo [0°, 360°) que cumplen *cos* α = 3 *sen* α.**

Para que se cumpla que *cos* α = 3 *sen* α es imprescindible que seno y coseno tengan el mismo signo, por lo que α puede pertenecer al primer o tercer cuadrante solamente. O lo que es lo mismo, que su tangente sea positiva e igual a 1/3 porque *tg* α = *sen* α/*cos* α = *sen* α/3 *sen* α = 1/3.

Como sabemos que $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, sustituimos la igualdad dada:

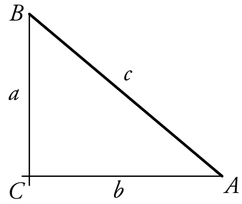
$sen^2\ \alpha + (3\ sen\ \alpha)^2 = 1 \ \rightarrow\ 10\ sen^2\ \alpha = 1 \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{10}} \ \rightarrow\ cos\ \alpha = \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

- Si $\alpha = 18°\ 26' \ \rightarrow\ sen\ \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}},\ cos\ \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}},\ tg\ \alpha = \dfrac{1}{3}$
- Si $\alpha = 180° + 18°\ 26' = 198°\ 26' \ \rightarrow\ sen\,\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ cos\,\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}},\ tg\,\alpha = \dfrac{1}{3}$
- Si $\alpha = -18°\ 25'\ 5'' = 341°\ 34'\ 55''$ (cuarto cuadrante) $\rightarrow\ sen\ \alpha = -0,316$ y $cos\,\alpha = -0,949$ por lo que no se cumple la igualdad. Además $tg\ \alpha\ = -\dfrac{1}{3}$.
- Si $\alpha = 180° - 18°\ 25'\ 5''$ (segundo cuadrante) $\rightarrow\ sen\,\alpha = 0,316$ y $cos\,\alpha = -0,949$ por lo que no se cumple la igualdad. Además $tg\ \alpha\ = -\dfrac{1}{3}$.

Por lo tanto las soluciones buscadas son $\alpha = 18°\ 25'\ 5''$ y $\alpha = 198°\ 25'\ 5''$.

Resolución de triángulos rectángulos

10 En una película de acción, la protagonista se desliza, desde el punto más alto de un edificio de 60 m de alto, por un cable de acero sujeto al suelo formando un ángulo de 40°. Calcula la longitud del cable.



Nos piden encontrar c sabiendo que el ángulo $\hat{A}$ = 40° y a = 60 m.

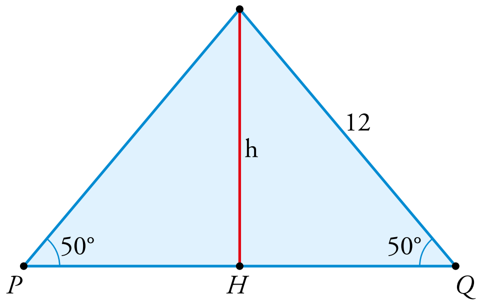
$$sen\, 40 = \frac{60}{c} \rightarrow c = \frac{60}{sen\, 40} = 93{,}3 \text{ m}$$

11 Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.

Altura del poste = h = 12 · *sen* 50° = 9,19 m

La distancia de la base al punto de sujeción es:

$\overline{HQ}$ = 12 · *cos* 50° = 7,71 m



12 En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 m y el ángulo opuesto es de 40°. Halla su perímetro y su área.

La medida de los ángulos iguales es $\frac{180° - 40°}{2} = 70°$.

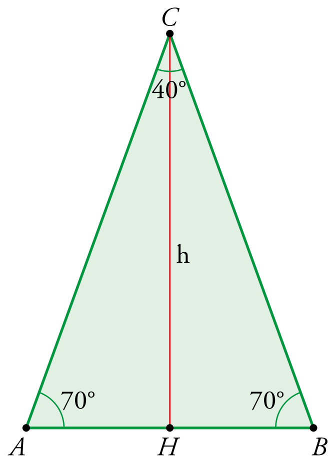
$$tg\, 70° = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot tg\, 70° = 13{,}74 \text{ m}$$

$$S_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{10 \cdot 13{,}74}{2} = 68{,}7 \text{ m}^2$$

$$cos\, 70° = \frac{5}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{5}{cos\, 70°} = 14{,}62 \text{ m}$$

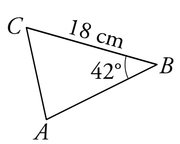
El perímetro del triángulo ABC es:

P = 2 · 14,62 + 10 = 39,24 m

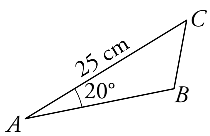


13 Calcula la longitud de la altura trazada desde C en cada uno de los triángulos siguientes:

a)



b)

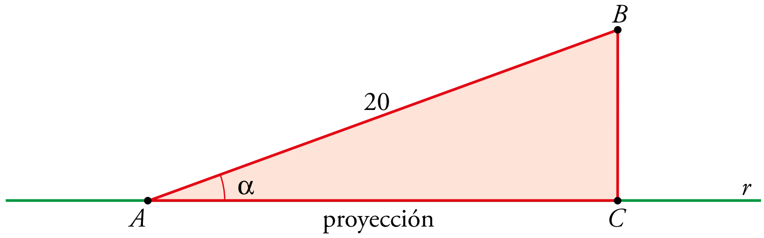


a) h = 18 · *sen* 42° = 12,04 cm

b) h = 25 · *sen* 20° = 8,55 cm

14 **Halla, en cada caso, la proyección de un segmento de 20 cm de longitud sobre una recta *r* con la que forma un ángulo α:**

a) $\alpha = 20°$ **b)** $\alpha = 45°$ **c)** $\alpha = 80°$



Podemos obtener la proyección usando el coseno del ángulo α.

a) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 20° = 18,79$ cm

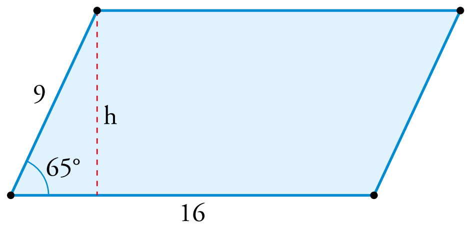
b) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 45° = 14,14$ cm

c) $\overline{AC} = 20 \cdot cos\ 80° = 3,47$ cm

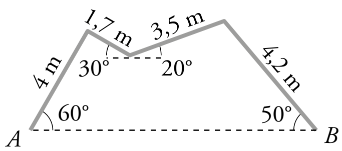
15 **Calcula el área de un paralelogramo cuyos lados, de 9 cm y 16 cm, forman un ángulo de 65°.**

h = 9 · *sen* 65° = 8,16 cm

La superficie es S = 16 · 8,16 = 130,56 cm^2



16 **El tejado de una casa tiene la forma y las medidas que se indican en la figura. Calcula la distancia $\overline{AB}$.**



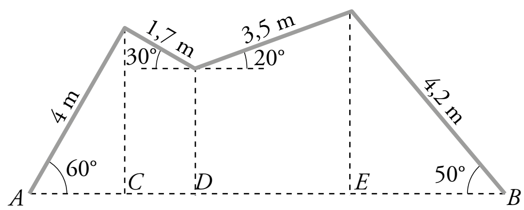
Trazamos perpendiculares del segmento $\overline{AB}$ que pasen por los tres vértices superiores. Esas rectas dividen al segmento $\overline{AB}$ en 4 partes. Las longitudes de estos segmentos, de izquierda a derecha son:

$\overline{AC} = 4 \cdot cos\ 60° = 2$ m

$\overline{CD} = 1,7 \cdot cos\ 30° = 1,47$ m

$\overline{DE} = 3,5 \cdot cos\ 20° = 3,29$ m

$\overline{EB} = 4,2 \cdot cos\ 50° = 2,7$ m



La longitud total es: $\overline{AB}$ = 2 + 1,47 + 3,29 + 2,7 = 9,46 m

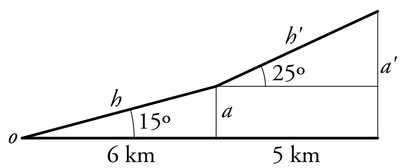
17 **Un avión despega formando un ángulo de 15° con el suelo. A 6 km del punto de salida en horizontal, aumenta 10° su inclinación para subir en un ángulo de 25° con el suelo. Una montaña de 2 500 m se encuentra a 11 km del punto de partida. ¿Volará el avión sobre la montaña o tendrá que cambiar su dirección?**

$cos\ 15° = \frac{6}{h} \rightarrow h = \frac{6}{cos\ 15°} = 6,2$ km

$sen\ 15° = \frac{a}{h} \rightarrow a = sen\ 15° \cdot 6,2 = 1,6$ km

$cos\ 25° = \frac{5}{h'} \rightarrow h' = \frac{5}{cos\ 25°} = 5,52$ km

$sen\ 25° = \frac{a'}{h'} \rightarrow a' = sen\ 25 \cdot 5,52 = 2,33$ km $\rightarrow a + a' > 2,5$ km

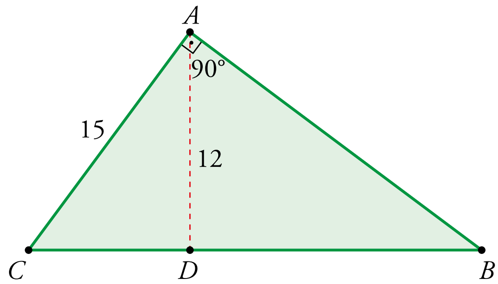


Deberá cambiar de ruta.

18 **En un triángulo ABC, rectángulo en A, se conocen un cateto y la altura sobre la hipotenusa:**

$$\overline{AC} = 15 \text{ m} \qquad \overline{AD} = 12 \text{ m}$$

Halla los lados y los ángulos del triángulo.



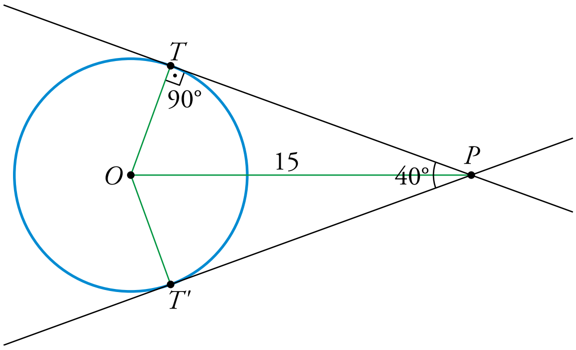
$sen\ \hat{C} = \dfrac{12}{15} = 0{,}8 \ \to\ \hat{C} = 53°\ 7'\ 48''$

$\hat{B} = 90° - 53°\ 7'\ 48'' = 36°\ 52'\ 12''$

$sen\ \hat{B} = \dfrac{12}{\overline{AB}} \ \to\ \overline{AB} = \dfrac{12}{sen\ \hat{B}} = 20 \text{ m}$

Por el teorema de Pitágoras, $\overline{BC} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ m}$.

19 **Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes que forman entre sí un ángulo de 40°. Si la distancia de P al centro de la circunferencia es de 15 cm, ¿cuál es su radio?**



El radio $\overline{OT}$ es el cateto opuesto al ángulo de $20° = \dfrac{40°}{2}$, luego $\overline{OT} = 15 \cdot sen\ 20° = 5{,}13$ cm.

Resolución de triángulos cualesquiera

20 **Aplica el teorema de los senos para resolver el triángulo ABC en los siguientes casos:**

a) $\hat{A} = 55°$, $\hat{B} = 40°$, $c = 15$ m

b) $\hat{A} = 50°$, $a = 23$ m, $c = 18$ m

a) $\hat{C} = 180° - 55° - 40° = 85°$; $\dfrac{a}{sen\ 55°} = \dfrac{b}{sen\ 40°} = \dfrac{15}{sen\ 85°}$

$a = \dfrac{15 \cdot sen\ 55°}{sen\ 85°} = 12{,}33 \text{ cm}$; $\qquad b = \dfrac{15 \cdot sen\ 40°}{sen\ 85°} = 9{,}68 \text{ cm}$

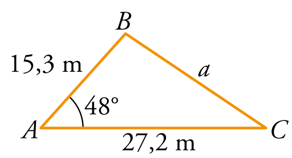
b) $\dfrac{23}{sen\ 50°} = \dfrac{18}{sen\ \widehat{C}} \ \to\ sen\ \hat{C} = \dfrac{18 \cdot sen\ 50°}{23} = 0{,}6 \ \to\ \hat{C} = 36°\ 52'\ 12''$

$\hat{B} = 180° - 50° - 36°\ 52'\ 12'' = 93°\ 7'\ 48''$

$\dfrac{23}{sen\ 50°} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} \ \to\ b = \dfrac{23 \cdot sen\ \widehat{B}}{sen\ 50°} = 30 \text{ cm}$

Página 131

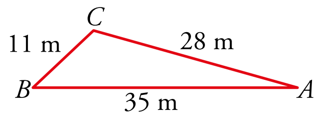
21 **Aplica el teorema del coseno para hallar el lado a del triángulo ABC, en el que $\hat{A} = 48°$, $b = 27{,}2$ m y $c = 15{,}3$ m.**



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A}$

$a^2 = 27{,}2^2 + 15{,}3^2 - 2 \cdot 27{,}2 \cdot 15{,}3\ cos\ 48° \ \to\ a = 20{,}42$ m

22 **Halla los ángulos del triángulo *ABC* en el que *a* = 11 m, *b* = 28 m y *c* = 35 m.**



$11^2 = 28^2 + 35^2 - 2 \cdot 28 \cdot 35 \cos \hat{A} \to$

$\to \cos \hat{A} = \dfrac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} \to \hat{A} = 15°\ 34'\ 41''$

$28^2 = 11^2 + 35^2 - 2 \cdot 11 \cdot 35 \cos \hat{B} \to \cos \hat{B} = \dfrac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} \to \hat{B} = 43°\ 7'\ 28''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \to \hat{C} = 121°\ 17'\ 51''$

23 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) ***b* = 32 cm, *a* = 17 cm, $\hat{C}$ = 40°**

b) ***a* = 85 cm, *c* = 57 cm, $\hat{B}$ = 65°**

c) ***a* = 23 cm, *b* = 14 cm, *c* = 34 cm**

a) $c^2 = 32^2 + 17^2 - 2 \cdot 32 \cdot 17 \cos 40° \to c = 21{,}9$ cm

$17^2 = 32^2 + 21{,}9^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21{,}9 \cos \hat{A} \to \hat{A} = 29°\ 56'\ 8''$

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \to \hat{B} = 110°\ 3'\ 52''$

b) $b^2 = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57 \cos 65° \to b = 79{,}87$ cm

$57^2 = 85^2 + 79{,}87^2 - 2 \cdot 85 \cdot 79{,}87 \cos \hat{C} \to \hat{C} = 40°\ 18'\ 5''$

$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) \to \hat{A} = 74°\ 41'\ 55''$

c) $23^2 = 14^2 + 34^2 - 2 \cdot 14 \cdot 34 \cos \hat{A} \to \hat{A} = 30°\ 10'\ 29''$

$14^2 = 23^2 + 34^2 - 2 \cdot 23 \cdot 34 \cos \hat{B} \to \hat{B} = 17°\ 48'\ 56''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \to \hat{C} = 133°\ 0'\ 35''$

24 **Resuelve los siguientes triángulos:**

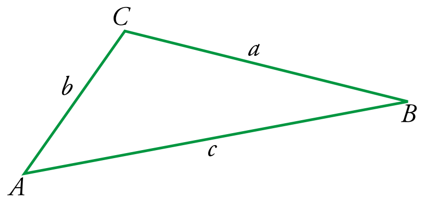
a) ***a* = 100 m, $\hat{B}$ = 47°, $\hat{C}$ = 63°**

b) ***a* = 70 m, *b* = 55 m, $\hat{C}$ = 73°**

c) ***a* = 25 m, *b* = 30 m, *c* = 40 m**

d) ***a* = 15 m, *b* = 9 m, $\hat{A}$ = 130°**

a) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 70°$



• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} \to \dfrac{100}{\text{sen } 70°} = \dfrac{b}{\text{sen } 47°} \to$

$\to b = \dfrac{100 \cdot \text{sen } 47°}{\text{sen } 70°} = 77{,}83$ m

• $\dfrac{100}{\text{sen } 70°} = \dfrac{c}{\text{sen } 63°} \to c = \dfrac{100 \cdot \text{sen } 63°}{\text{sen } 70°} = 94{,}82$ m

b) • $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot \cos 73° = 5\,673{,}74 \to c = 75{,}3$ m

• $70^2 = 55^2 + 75{,}3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75{,}3 \cdot \cos \hat{A} \to$

$\to \cos \hat{A} = \dfrac{55^2 + 75{,}3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75{,}3} = 0{,}4582 \to \hat{A} = 62°\ 43'\ 49{,}4''$

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 44°\ 16'\ 10{,}6''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \to \cos \hat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0{,}7812 \to \hat{A} = 38°\ 37'\ 29{,}4''$

• $\cos \hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0{,}6625 \to \hat{B} = 48°\ 30'\ 33''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 92°\ 51'\ 57{,}6''$

d) • $\dfrac{15}{sen\,130°} = \dfrac{9}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{9 \cdot sen\,130°}{15} = 0,4596 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 27°\ 21'\ 46,8'' \\ \hat{B}_2 = 152°\ 38'\ 13,2'' \rightarrow \text{No válida} \end{cases}$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 22°\ 38'\ 13,2''$

• $\dfrac{15}{sen\,130°} = \dfrac{c}{sen\,\widehat{C}} \rightarrow c = \dfrac{15 \cdot sen\,\widehat{C}}{sen\,130°} = 7,54$ m

25 Resuelve estos triángulos, teniendo en cuenta que puede que no exista solución, que la solución sea única o que existan dos soluciones:

a) $a = 3$ m; $b = 8$ m; $\hat{A} = 25°$

b) $a = 12,6$ m; $b = 26,4$ m; $\hat{B} = 124°\ 34'$

c) $a = 82,6$ m; $b = 115$ m; $\hat{A} = 28°\ 4'$

a) $\dfrac{3}{sen\,25°} = \dfrac{8}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{8 \cdot sen\,25°}{3} = 1,127 \rightarrow$ No tiene solución porque el seno de un ángulo siempre está comprendido entre –1 y 1.

b) $\dfrac{12,6}{sen\,\widehat{A}} = \dfrac{26,4}{sen\,(124°\,34')} \rightarrow sen\ \hat{A} = \dfrac{12,6 \cdot sen\,(124°\,34')}{26,4} = 0,393 \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 23°\ 8'\ 29'' \\ \hat{A} = 156°\ 51'\ 31'' \end{cases}$

El segundo resultado no es válido porque $\hat{A} + \hat{B}$ sería mayor que 180° y esto es imposible. En este caso, la solución es única.

$\hat{C} = 180° - (23°\ 8'\ 29'' + 124°\ 34') = 32°\ 17'\ 31''$

Ahora, con el teorema del coseno:

$c^2 = 12,6^2 + 26,4^2 - 2 \cdot 12,6 \cdot 26,4 cos\,(32°\ 17'\ 31'') = 293,33 \rightarrow c = 17,13$ m

c) $\dfrac{82,6}{sen\,(28°\,4')} = \dfrac{115}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{115 \cdot sen\,(28°\,4')}{82,6} = 0,655 \rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 40°\ 55'\ 11'' \\ \hat{B} = 139°\ 4'\ 49'' \end{cases}$

En este caso, tenemos dos soluciones posibles:

• Si $\hat{B} = 40°\ 55'\ 11''$:

$\hat{C} = 180° - (28°\ 4' + 40°\ 55'\ 11'') = 111°\ 0'\ 49''$

$c^2 = 82,6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82,6 \cdot 115 cos\,(111°\ 0'\ 49'') = 26\,860 \rightarrow c = 163,89$ m

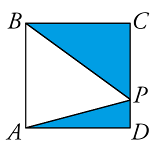
• Si $\hat{B} = 139°\ 4'\ 49''$:

$\hat{C} = 180° - (28°\ 4' + 139°\ 4'\ 49'') = 12°\ 51'\ 11''$

$c^2 = 82,6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82,6 \cdot 115 cos\,(12°\ 51'\ 11'') = 1\,525,8 \rightarrow c = 39,06$ m

Para resolver

26 Si el lado del cuadrado mide $\sqrt{5}$ cm y el ángulo $CBP = 36°$, ¿cuál es la medida del ángulo $\widehat{BPD}$?



Calculemos $\overline{BP}$, considerando el triángulo BCP:

$cos\,36° = \dfrac{\sqrt{5}}{\overline{BP}} \rightarrow \overline{BP} = 2,76$ cm

$sen\,36° = \dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}} \rightarrow \overline{CP} = 1,62$ cm

Entonces: $\overline{PD} = \overline{CD} - \overline{CP} = \sqrt{5} - 1,62 = 0,62$ cm

Consideramos ahora el triángulo *ADP*:

$$sen\ \widehat{PAD} = \frac{0,62}{\overline{AP}}$$

$$cos\ \widehat{PAD} = \frac{\sqrt{5}}{\overline{AP}}$$

Sustituimos estos valores en la igualdad conocida: $sen^2\ \widehat{PAD} + cos^2\ \widehat{PAD} = 1$

$$\left(\frac{0,62}{\overline{AP}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{\overline{AP}}\right)^2 = 1 \ \rightarrow\ \overline{AP}^2 = 5,384 \ \rightarrow\ \overline{AP} = 2,32 \text{ cm}$$

En el triángulo *PAD*:

$$sen\ \widehat{APD} = \frac{\sqrt{5}}{2,32} = 0,964 \ \rightarrow\ \widehat{APD} = 74°35'$$

Sumando sus tres ángulos nos tiene que dar 180°, por lo tanto:

$$\widehat{PAD} = 180° - 74°35' - 90° = 15°25' \ \rightarrow\ \widehat{BAP} = 90° - 15°25' = 74°35'$$

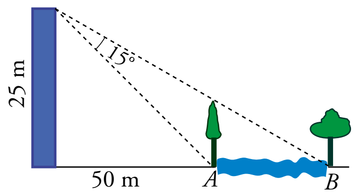
Ahora vamos con el triángulo *ABP* y aplicamos que la suma de sus ángulos es 180°:

$$\widehat{ABP} + \widehat{BPA} + \widehat{PAB} = 180° \ \rightarrow\ (90° - 36°) + \widehat{BPA} + 74°35' = 180° \ \rightarrow\ \widehat{BPA} = 51°25'$$

Buscamos el ángulo:

$$\widehat{BPD} = \widehat{BPA} + \widehat{APD} = 51°25' + 74°35' = 126°$$

27 Desde una torre de vigilancia de 25 m, observamos dos árboles situados en orillas opuestas de un río bajo un ángulo de 15°. Los dos árboles están alineados con el pie de la torre y la distancia de esta al río es de 50 m. Calcula la anchura del río.



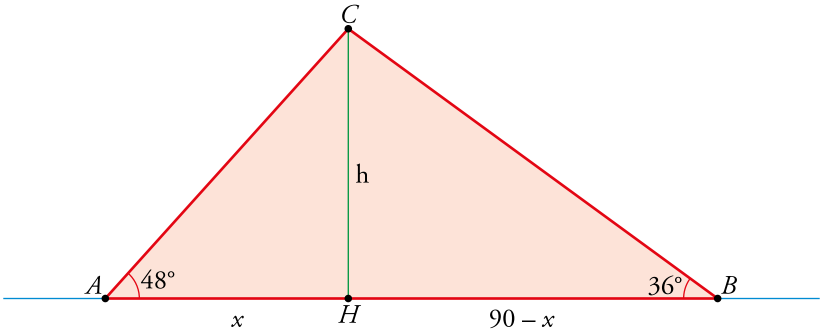
Llamamos $\hat{C}$ al ángulo complementario de $\hat{A}$.

$tg\ \hat{C} = \frac{50}{25} = 2 \ \rightarrow\ \hat{C} = 63°\ 26'\ 6''$

Por tanto, respecto de la torre de vigilancia, se ve el árbol cuya base están en B con un ángulo de $15° + 63°\ 26'\ 6'' = 78°\ 26'\ 6''$.

$tg\ (78°\ 26'\ 6'') = \frac{50 + \overline{AB}}{25} \ \rightarrow\ \overline{AB} = 72,17$ m

28 **Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con el suelo ángulos de 36° y 48°. Los puntos de sujección de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 90 m. Calcula la altura de la antena.**



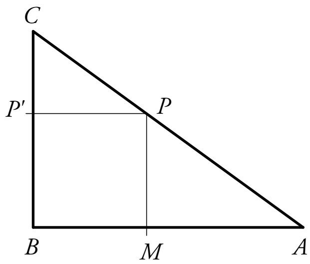
Llamemos x al segmento $\overline{AH}$. Entonces, el segmento $\overline{HB}$ será $90 - x$.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 48° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 36° = \dfrac{h}{90-x} \end{array}\right\} \to x \cdot tg\ 48° = (90-x)\cdot tg\ 36° \to 1{,}11x = 0{,}73(90-x) \to$$

$$\to 1{,}84x = 65{,}7 \to x = \frac{65{,}7}{1{,}84} = 35{,}71$$

$h = 35{,}71 \cdot tg\ 48° = 35{,}71 \cdot 1{,}11 = 39{,}64$ m

29 **En un triángulo ABC, rectángulo en $\hat{B}$, conocemos el cateto $\overline{BC}$ = 8 cm y el ángulo $\hat{A}$ = 38°. En el punto medio M del cateto AB trazamos una paralela a BC que corta a AC en el punto P. Calcula el perímetro del trapecio $PCBM$.**



$Perímetro_{PCBM} = \overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BM} + \overline{MP} = \overline{PC} + 8 + \overline{AB}/2 + \overline{MP}$

Buscamos el lado $\overline{AB}$ sabiendo que $\widehat{BAC} = 38°$:

$$sen\ 38° = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{8}{\overline{CA}} \to \overline{CA} = \frac{8}{sen\ 38°} = 13 \text{ cm}$$

$$cos\ 38° = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BA}}{13} \to \overline{BA} = cos\ 38° \cdot 13 = 10{,}2 \text{ cm}$$

Teniendo en cuenta ahora el triángulo CPP', sabemos que el ángulo $\hat{P}$ es 38°, y que $\overline{PP'}$ es igual a $\overline{BM}$, por lo que $\overline{PP'}$ = 5,1 cm:

$$cos\ 38° = \frac{5{,}1}{\overline{CP}} \to \overline{CP} = \frac{5{,}1}{cos\ 38°} = 6{,}5 \text{ cm}$$

$$sen\ 38° = \frac{\overline{CP'}}{6{,}5} \to \overline{CP'} = 6{,}5 \cdot sen\ 38° = 4 \text{ cm}$$

Nos falta encontrar $\overline{MP}$, o lo que es lo mismo, $\overline{BP'}$. Como $\overline{CP'}$ = 4 cm y $\overline{CB}$ = 8 cm $\to$ $\to$ $\overline{BP'}$ = 4 cm = $\overline{MP}$

Volviendo al inicio y sustituyendo los valores hallados:

$$Perímetro_{PCBM} = 6{,}5 + 8 + \frac{\overline{BA}}{2} + \overline{MP} = 6{,}5 + 8 + 5{,}1 + 4 = 23{,}6 \text{ cm}$$

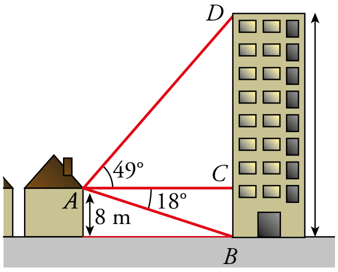
30 **En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?**

Si llamamos α al ángulo pedido, por el teorema de coseno tenemos que:

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos \alpha \rightarrow 49 = 25 + 64 - 80 \cos \alpha \rightarrow$

$$\rightarrow 80 \cos \alpha = 40 \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60°$$

31 **Una arquitecta quiere saber la altura del edificio que hay frente a su casa. Para ello ha tomado las medidas que aparecen en la figura desde el punto *A*. Calcula la altura del edificio *BD*.**



Queremos hallar $\overline{BD}$, y por el dibujo podemos decir:

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 8 + \overline{CD}$$

Por lo tanto solamente necesitamos hallar $\overline{CD}$.

En el triángulo *CAB* el ángulo $\hat{A}$ es 18°, y su lado $\overline{CB}$ = 8 m, hallemos $\overline{AC}$:

$$sen\, 18° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{8}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = 25,9 \text{ m}$$

$$\cos 18° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AC} = \cos 18° \cdot 25,9 = 24,6 \text{ m}$$

Ahora podemos usar el triángulo *ACD*:

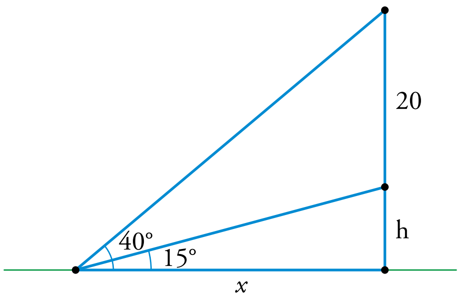
$$\cos 49° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \rightarrow \overline{AD} = 37,5 \text{ m}$$

$$sen\, 49° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \rightarrow \overline{CD} = 28,3 \text{ m}$$

Y volviendo al inicio:

$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 8 + \overline{CD} = 8 + 28,3 = 36,3$ m

32 **Un faro de 20 m de altura está colocado sobre un promontorio. Un barco ve el promontorio bajo un ángulo de 30° y el faro, bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura del promontorio.**



Llamamos h a la altura del promontorio y x a la distancia del barco a la base del pedestal.

$$\left.\begin{array}{l} tg\, 15° = \dfrac{h}{x} \\ tg\, 40° = \dfrac{20+h}{x} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{h}{tg\, 15°} = \frac{20+h}{tg\, 40°} \rightarrow h \cdot tg\, 40° = (20+h) \cdot tg\, 15° \rightarrow h = \frac{20 tg\, 15°}{tg\, 40° - tg\, 15°} = 7,32 \text{ m}$$

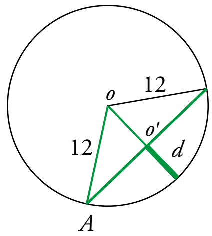
33 **En una circunferencia de 12 cm de radio trazamos una cuerda de 20 cm de longitud. Halla el ángulo correspondiente a esa cuerda y la distancia entre la cuerda y el arco.**

Los radios trazados desde los extremos de la cuerda y esta, forman un triángulo isósceles. El ángulo pedido es el opuesto a la cuerda (lado desigual) y podemos hallarlo usando el teorema del coseno.

$20^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos\alpha \rightarrow 400 = 144 + 144 - 288 \cos\alpha \rightarrow$

$\rightarrow 112 = -288 \cdot \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{112}{288} = -0{,}3889 \rightarrow$

$\rightarrow \alpha = 112°\ 53'\ 10''$

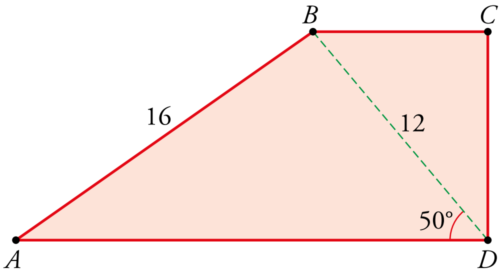


En el triángulo $OO'A$ tenemos: $sen\ \widehat{O'OA} = \dfrac{\overline{O'A}}{12} \rightarrow \overline{O'A} = 10$ cm

$\cos \widehat{O'OA} = \dfrac{\overline{OO'}}{12} \rightarrow \overline{OO'} = 6{,}62$ cm

Nosotros estamos buscando d y sabiendo que el radio de la circunferencia es 12: $d + \overline{O'O} = 12 \rightarrow d = 12 - 6{,}62 = 5{,}38$ cm

34 **De un trapecio rectángulo conocemos el lado oblicuo, que mide 16 cm, la diagonal menor, 12 cm, y el ángulo que esta forma con la base mayor, 50°. Calcula el área y el perímetro del trapecio.**



Utilizando el ángulo complementario de 50° tenemos:

$sen\ 40° = \dfrac{\overline{BC}}{12} \rightarrow \overline{BC} = 12 \cdot sen\ 40° = 7{,}71$ cm

$\cos 40° = \dfrac{\overline{CD}}{12} \rightarrow \overline{CD} = 12 \cdot \cos 40° = 9{,}19$ cm

Por otro lado, por el teorema de los senos:

$\dfrac{12}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{16}{sen\ 50°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \dfrac{12 \cdot sen\ 50°}{16} = 0{,}5745 \rightarrow \hat{A} = 35°\ 3'\ 53''$

$\widehat{ABD} = 180° - (50° + 35°\ 3'\ 53'') = 94°\ 56'\ 7''$

$\dfrac{\overline{AD}}{sen\ \widehat{ABD}} = \dfrac{16}{sen\ 50°} \rightarrow \overline{AD} = \dfrac{16 \cdot sen\ \widehat{ABD}}{sen\ 50°} = 20{,}81$ cm

Para terminar:

$S_{ABCD} = \dfrac{20{,}81 + 7{,}71}{2} \cdot 9{,}19 = 131{,}05\ \text{cm}^2$

Perímetro = 20,81 + 9,19 + 7,71 + 16 = 53,71 cm

35 **En un rectángulo *ABCD* de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde *B* una perpendicular a la diagonal *AC*, y desde *D*, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean *M* y *N* los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento *MN*.**

Los triángulos AND y BMC son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$.

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$.

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo ABC y $\overline{MC}$ en el triángulo BMC.

- En ABC:

  $\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208$ (por el teorema de Pitágoras) $\rightarrow \overline{AC} = 14{,}4$ cm

  Calculamos $\hat{C}$ (en ABC):

  $tg\ \hat{C} = \dfrac{12}{8} = 1{,}5 \rightarrow \hat{C} = 56°\ 18'\ 35{,}8''$

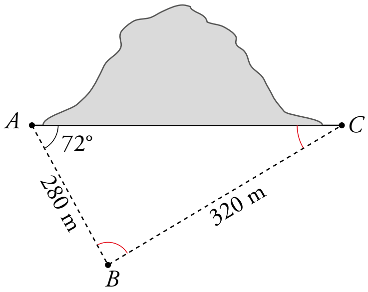
- En BMC:

  $\cos \hat{C} = \dfrac{\overline{MC}}{8} \rightarrow \overline{MC} = 8 \cdot \cos (56°\ 18'\ 35{,}8'') = 4{,}4$ cm

  Por último: $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14{,}4 - 2 \cdot 4{,}4 = 5{,}6$ cm

36 ODS **Meta 9.a. [El planteamiento del problema permite plantear un debate sobre la importancia del desarrollo de las infraestructuras en los países que las necesiten y que estas sean sostenibles].**

Para construir un túnel entre A y C necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto B y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{AC}$ y los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$.



Usamos el teorema de los senos:

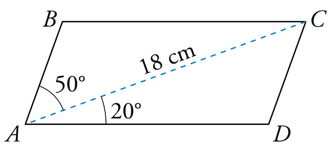
$$\frac{320}{sen\,72°}=\frac{280}{sen\,\hat{C}} \rightarrow sen\,\hat{C}=\frac{280\cdot sen\,72°}{320}=0{,}8322 \rightarrow \hat{C}=56°\ 19'\ 31''$$

$\hat{B}=180°-(72°+56°\ 19'\ 31'')=51°\ 40'\ 29''$

Aplicando de nuevo el teorema de los senos:

$$\frac{320}{sen\,72°}=\frac{AC}{sen\,\hat{B}} \rightarrow \overline{AC}=\frac{320\cdot sen\,\hat{B}}{sen\,72°}=263{,}96\text{ m}$$

37 **En un paralelogramo $ABCD$ conocemos la diagonal mayor $\overline{AC}$ = 18 cm y los ángulos que esta forma con los lados, 20° y 50°. Calcula el área, la longitud de los lados y la otra diagonal.**



$\hat{D}=180°-70°=110°$

$$\frac{18}{sen\,\hat{D}}=\frac{\overline{AD}}{sen\,50°} \rightarrow \overline{AD}=\frac{18\cdot sen\,50°}{sen\,110°}=14{,}67\text{ cm}$$

La altura, h, del paralelogramo es:

$h=18\cdot sen\,20°=6{,}16$ cm

$S_{ABCD}=14{,}67\cdot 6{,}16=90{,}37\text{ cm}^2$

Para hallar la longitud de la otra diagonal calculamos primero $\overline{AB}=\overline{CD}$:

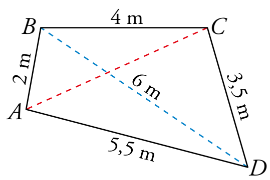
$$\frac{\overline{CD}}{sen\,20°}=\frac{18}{sen\,110°} \rightarrow \overline{CD}=\frac{18\cdot sen\,20°}{sen\,110°}=6{,}55\text{ cm}$$

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo BAD:

$\overline{BD}^2=6{,}55^2+14{,}67^2-2\cdot 6{,}55\cdot 14{,}67\,cos\,70°=192{,}38 \rightarrow \overline{BD}=13{,}87$ cm

Página 132

38 **En un cuadrilátero $ABCD$ conocemos las medidas de los lados y de la diagonal BD. Calcula las medidas del ángulo $\hat{B}$ y de la diagonal AC.**



Aplicamos el teorema del coseno a los triángulos ABD y CBD.

$5{,}5^2=2^2+6^2-2\cdot 2\cdot 6\,cos\,\widehat{ABD} \rightarrow 24\,cos\,\widehat{ABD}=9{,}75 \rightarrow \widehat{ABD}=66°\ 1'\ 50''$

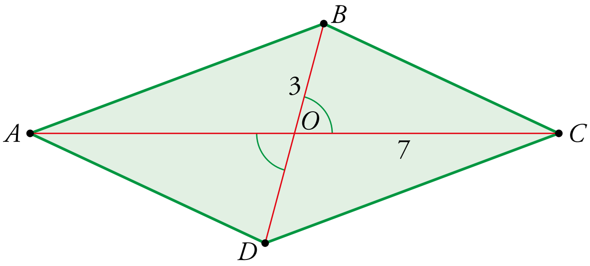
$3{,}5^2=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\,cos\,\widehat{CBD} \rightarrow 48\,cos\,\widehat{CBD}=39{,}75 \rightarrow \widehat{CBD}=34°\ 5'\ 36''$

$\hat{B}=66°\ 1'\ 50''+34°\ 5'\ 36''=100°\ 7'\ 26''$

Ahora aplicamos de nuevo el teorema del coseno al triángulo ABC:

$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\,cos\,(100°\ 7'\ 26'')=22{,}81 \rightarrow \overline{AC}=4{,}78$ cm

39 **Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75°. Halla los lados y los ángulos del paralelogramo.**



Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio, los segmentos $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden, respectivamente, la mitad de la medida de las correspondientes diagonales.

Aplicamos el teorema del coseno:

$\overline{BC}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 75° = 47{,}13 \to \overline{BC} = \overline{AD} = 6{,}87$ cm

$\widehat{AOB} = 180° - 75° = 105°$

$\overline{AB}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 105° = 68{,}87 \to \overline{AB} = \overline{DC} = 8{,}3$ cm

Para calcular un ángulo, por ejemplo el ángulo $\hat{B}$, aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{7}{sen\ \widehat{OBC}} = \frac{6{,}87}{sen\ 75°} \to sen\ \widehat{OBC} = \frac{7 \cdot sen\ 75°}{6{,}87} = 0{,}9842 \to \widehat{OBC} = 79°\ 48'\ 5''$$

$$\frac{7}{sen\ \widehat{ABO}} = \frac{8{,}3}{sen\ 105°} \to sen\ \widehat{ABO} = \frac{7 \cdot sen\ 105°}{8{,}3} = 0{,}8146 \to \widehat{ABO} = 54°\ 33'\ 5''$$

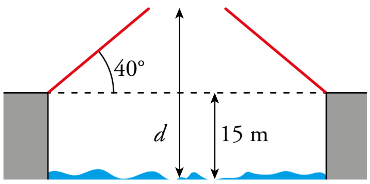
$\hat{B} = \hat{D} = 79°\ 48'\ 5'' + 54°\ 33'\ 5'' = 134°\ 21'\ 10''$

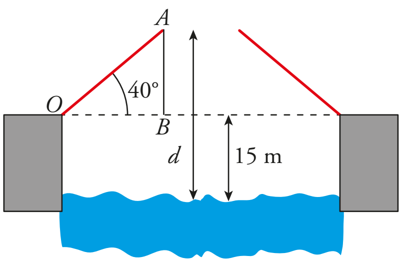
$\hat{A} = \hat{C} = 180° - 134°\ 21'\ 10'' = 45°\ 38'\ 50''$

40 **Un puente levadizo mide 140 m cerrado sobre un río. Las aberturas del puente pueden elevarse hasta 40°.**

a) Si el nivel del agua está 15 m más abajo del puente cerrado, calcula la distancia *d* entre el nivel del agua y la altura del puente cuando está abierto al máximo.

b) Calcula la separación ente las aberturas cuando el puente está totalmente abierto.





a) $d = 15 + \overline{AB}$

$$sen\ 40° = \frac{\overline{AB}}{70} \to \overline{AB} = 45 \to d = 15 + 45 = 60\ \text{m}$$

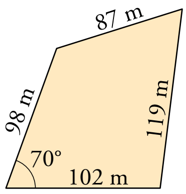
b) $140 = 2\overline{OB} + r$

El enunciado pide hallar r, por lo que debemos encontrar $\overline{OB}$:

$$cos\ 40° = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{70} \to \overline{OB} = 70 \cdot cos\ 40° = 53{,}62\ \text{m}$$

Por lo tanto, $r = 140 - 2 \cdot 53{,}62 = 32{,}75$ m.

41 **Para hallar el área de una parcela irregular, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. ¿Cuál es su área?**



La diagonal opuesta al ángulo de 70° divide al cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo izquierdo:

  Su altura es $h = 98 \cdot sen\ 70° = 92{,}09$ m $\rightarrow$ $\text{Área}_I = \dfrac{102 \cdot 92{,}09}{2} = 4\,696{,}6 \text{ m}^2$

- Área del triángulo derecho:

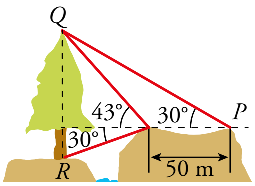
  La calcularemos usando la fórmula de Herón y, para ello, necesitamos la longitud, l, del tercer lado.

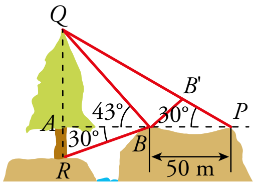
  $l^2 = 98^2 + 102^2 - 2 \cdot 98 \cdot 102 cos\ 70° = 13\,170 \rightarrow l = \sqrt{13\,170} = 114{,}76$ m

  $s = \dfrac{87 + 119 + 114{,}76}{2} = 160{,}3$

  $\text{Área}_D = \sqrt{160{,}3 \cdot (160{,}3 - 87) \cdot (160{,}3 - 119) \cdot (160{,}3 - 114{,}76)} = 4\,701 \text{ m}^2$

42 **Halla la altura del árbol QR de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.**





Debemos hallar $\overline{QR}$ y para ello calcularemos $\overline{QA}$ y $\overline{AR}$.

Empezamos considerando el triángulo QBP, en el que $\widehat{Q} = 90° - (180° - 60° - 43°) = 13°$:

$sen\ 30° = \dfrac{\overline{BB'}}{50} \rightarrow \overline{BB'} = 25$ m

$sen\ 13° = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{QB}} \rightarrow \overline{QB} = 111{,}1$ m

Si consideramos ahora el triángulo QAB:

$sen\ 43° = \dfrac{\overline{QA}}{\overline{QB}} \rightarrow \overline{QA} = 75{,}8$ m

$cos\ 43° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{QB}} \rightarrow \overline{AB} = 81{,}3$ m

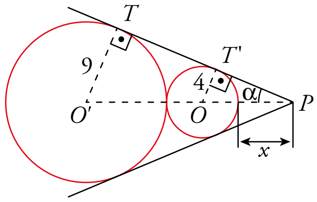
Nos falta hallar $\overline{AR}$, así que consideramos el triángulo RAB:

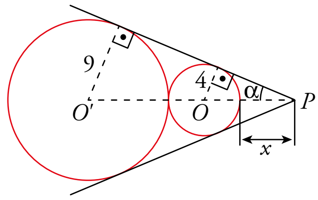
$cos\ 30° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{RB}} \rightarrow \overline{RB} = 94$ m

$sen\ 30° = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \rightarrow \overline{AR} = 47$ m

Por tanto: $\overline{QR} = \overline{QA} + \overline{AR} = 78{,}5 + 47 = 122{,}8$ m

43 **Dos circunferencias son tangentes exteriormente y sus radios miden 9 m y 4 m. Halla el ángulo, 2α, que forman sus tangentes comunes.**





$\overline{O'P} = 9 + 8 + x = 17 + x$

$\overline{OP} = 4 + x$

$sen\ \alpha = \dfrac{\overline{T'O}}{\overline{O'P}} = \dfrac{\overline{TO}}{\overline{OP}}$

Sustituyendo:

$\dfrac{9}{\overline{O'P}} = \dfrac{4}{\overline{OP}} \to \dfrac{9}{17 + x} = \dfrac{4}{4 + x} \to 5x = 32 \to x = \dfrac{32}{5}$ m

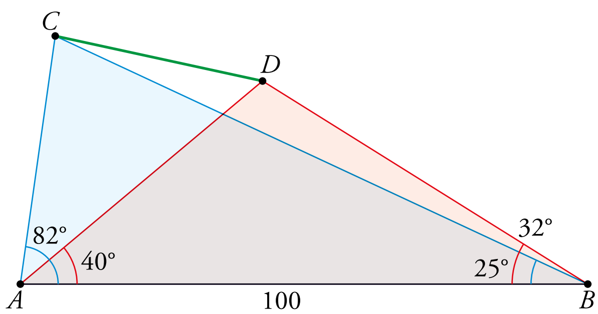
$\overline{OP} = 4 + x = \dfrac{20 + 32}{5} = \dfrac{52}{5}$ m

$sen\ \alpha = \dfrac{\overline{TO}}{\overline{OP}} = \dfrac{20}{52} \to \alpha = 22°37' \to 2\alpha = 45°14'$

44 **Dos árboles *C* y *D* se encuentran en la orilla opuesta de un río. Desde dos puntos *A* y *B*, situados en la orilla donde nos encontramos, tomamos las siguientes medidas:**

$\overline{AB}$ **= 100 m**	$\widehat{CAB}$ **= 82°**	$\widehat{DAB}$ **= 40°**
$\widehat{DBA}$ **= 32°**	$\widehat{CBA}$ **= 25°**	

Calcula la distancia que separa a los dos árboles.



Para calcular la distancia $\overline{CD}$ hallaremos primero $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$. De esta manera obtendremos el resultado aplicándole el teorema del coseno al triángulo *CAD*.

$\widehat{ACB} = 180° - (82° + 25°) = 73°$

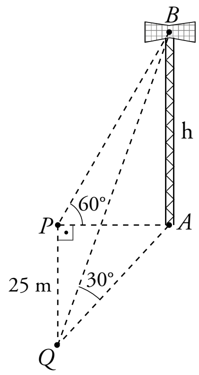
$\dfrac{100}{sen\ 73°} = \dfrac{\overline{AC}}{sen\ 25°} \to \overline{AC} = \dfrac{100 \cdot sen\ 25°}{sen\ 73°} = 44{,}19$ m

$\widehat{ADB} = 180° - (40° + 32°) = 108°$

$\dfrac{100}{sen\ 108°} = \dfrac{\overline{AD}}{sen\ 32°} \to \overline{AD} = \dfrac{100 \cdot sen\ 32°}{sen\ 108°} = 55{,}72$ m

$\overline{CD}^2 = 44{,}19^2 + 55{,}72^2 - 2 \cdot 44{,}19 \cdot 55{,}72 cos\ 42° = 1\,397{,}7 \to \overline{CD} = 37{,}39$ m

45 **Para medir la altura de una antena, cuyo pie es inaccesible, nos situamos en un punto P al oeste de la antena y la observamos bajo un ángulo de 60°. Caminamos unos 25 metros hacia el sur y desde Q el ángulo de observación es de 30°. Halla la altura de la antena.**



∗ ***Expresa*** $\overline{PA}$ ***y*** $\overline{QA}$ ***en función de h.***

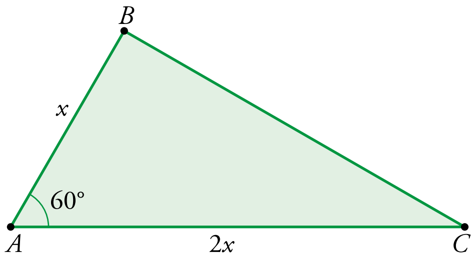
$$tg\ 30° = \frac{h}{\overline{QA}} \to \overline{QA} = \frac{h}{tg\ 30°} = h\sqrt{3}$$

$$tg\ 60° = \frac{h}{\overline{PA}} \to \overline{PA} = \frac{h}{tg\ 60°} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras al triángulo APQ:

$$\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + 25^2 = (h\sqrt{3})^2 \to \frac{h^2}{3} + 625 = 3h^2 \to \frac{8}{3}h^2 = 625 \to h = \frac{25}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 15{,}31 \text{ m}$$

46 **Uno de los lados de un triángulo mide el doble que otro, y el ángulo comprendido entre ellos mide 60°. Halla los otros ángulos.**



$$\overline{BC}^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x\, cos\ 60° = x^2 + 4x^2 - 4x^2 \cdot \frac{1}{2} = 3x^2$$

$$\overline{BC} = x\sqrt{3}$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{sen\ 60°} = \frac{x}{sen\ \hat{C}} \to sen\ \hat{C} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \to \hat{C} = 30°$$

$$\hat{B} = 180° - (60° + 30°) = 90°$$

Cuestiones teóricas

47 **¿Verdadero o falso?**

a) Si conocemos dos ángulos de un triángulo y un lado cualquiera, al tratar de solucionarlo, existe siempre solución única.

b) Si conocemos dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto a uno de ellos no siempre existe solución.

c) Si conocemos los tres ángulos de un triángulo la solución es única.

d) Si conocemos dos lados de un triángulo y el ángulo que forman, puede haber dos soluciones.

a) Verdadero.

b) Falso.

c) Falso.

d) Falso.

48 **¿Existe algún valor de $\alpha \neq 0$ que verifique $2\ sen\ \alpha = tg\ \alpha$? Justifícalo.**

Si $\alpha = 180°$ se cumple la igualdad, ya que el seno y la tangente de 180° valen 0.

Si $\alpha \neq 0$ y también $\alpha \neq 180°$, entonces:

$$sen\ \alpha \neq 0 \text{ y } 2sen\ \alpha = tg\ \alpha \to 2sen\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \to$$

$$\to 2 = \frac{1}{cos\ \alpha} \to cos\ \alpha = \frac{1}{2} \to \alpha = \begin{cases} 60° \\ 300° \end{cases}$$

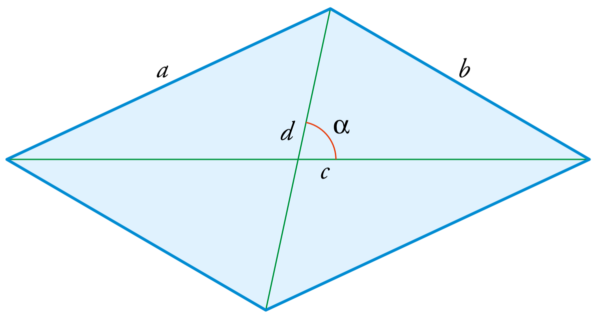
49 **Prueba que en cualquier paralelogramo de lados *a* y *b* y diagonales *c* y *d*, se verifica:**

$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$

* ***Aplica el teorema del coseno en dos triángulos que tengan un vértice en el centro del paralelogramo.***

Utilizamos el hecho de que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio y el teorema del coseno.

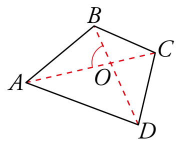
$$\left.\begin{array}{l} b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \cos \alpha \\ a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \cos (180° - \alpha) \end{array}\right\} \to$$



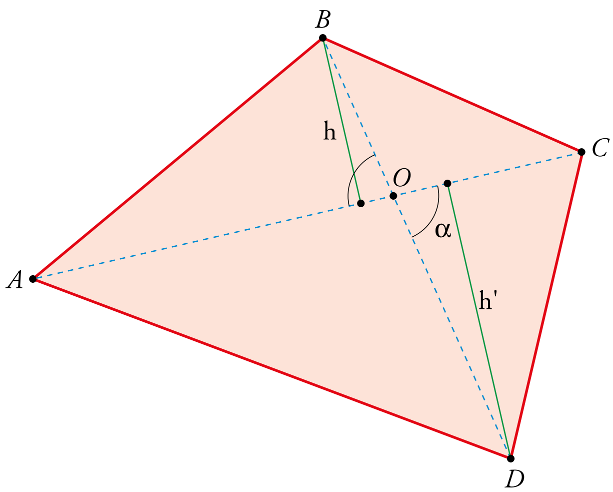
$$\to \begin{cases} b^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - \frac{cd}{2} \cos \alpha \\ a^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - \frac{cd}{2} (-\cos \alpha) \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos que $b^2 + a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}$, de donde se obtiene la relación $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

50 **Demuestra que el área de cualquier cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.**



* ***Ten en cuenta que:*** $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$



Descomponemos el área del cuadrilátero como la suma de las áreas de los triángulos *ABC* y *CDA*. Ambos tienen en común la base *AC*.

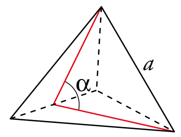
$h = \overline{OB} \cdot sen\ \alpha$

$h' = \overline{OD} \cdot sen\ \alpha$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot h'}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OB} \cdot sen\ \alpha}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OD} \cdot sen\ \alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{AC}\,(\overline{OB} + \overline{OD}) \cdot sen\ \alpha$$

51 **Comprueba que el ángulo α que forman las dos caras contiguas de un tetraedro regular de arista a, verifica que $cos\ \alpha$ = 1/3.**



* ***Ten en cuenta que los lados del ángulo α son alturas de triángulos equiláteros.***

Como cada cara es un triángulo equilátero de lado a, la longitud de los segmentos dibujados es $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (altura del triángulo equilátero de lado a).

Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2a\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \;\to\; a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2\cos\alpha \;\to$$

$$\to \frac{3}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2} \;\to\; \cos\alpha = \frac{1}{3} \;\to\; \alpha = 70°\,31'\,44''$$

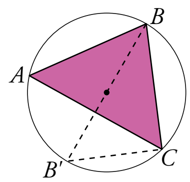
Página 133

Para profundizar

52 **Demuestra que en un triángulo cualquiera ABC se verifica la siguiente igualdad:**

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} = 2R$$

Donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.



* ***Traza el diámetro de la circunferencia desde uno de los vértices. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y BB'C.***

Las dos primeras igualdades forman el enunciado del teorema de los senos.

Por otra parte, los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}'$ son iguales porque abarcan el mismo arco BC. Por tanto, aplicando el teorema de los senos al triángulo $BB'C$ (ya que $\hat{C}$ = 90° porque abarca un arco de 180°):

$$\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{a}{sen\ \widehat{B}'} = \frac{\overline{BB'}}{sen\ \widehat{C}} = \frac{2R}{1} = 2R$$

53 **Elige la respuesta correcta:**

«El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo de lados 8 m, 10 m, y 12 m es»

a) 7,2 m **b) 6,05 m** **c) 10 m**

* ***Ten en cuenta el resultado del ejercicio anterior***

Por el ejercicio 52 sabemos que se cumple $\frac{a}{sen\ \widehat{A}} = \frac{b}{sen\ \widehat{B}'} = \frac{c}{sen\ \widehat{C}} = \frac{2R}{1} = 2R$.

Por el teorema del coseno, como c = 12 es uno de los lados del triángulo:

$$12^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 80 \cdot \cos\widehat{C} \;\to\; \cos\widehat{C} = 0,125 \;\to\; \widehat{C} = 83°49'$$

Por tanto:

$$\frac{c}{sen\,\widehat{C}} = 2R \;\to\; R = \frac{1}{2}\cdot 12,09 \;\to\; R = 6,05 \text{ m}$$

54 **De un triángulo *ABC* conocemos los tres lados, *a* = 14 cm, *b* = 16 cm y *c* = 9 cm. Halla la longitud de la bisectriz del ángulo $\hat{A}$.**

Calculamos primero el ángulo α:

$14^2 = 16^2 + 9^2 - 2 \cdot 16 \cdot 9 \cos \hat{A} \;\rightarrow\; 288 \cos \hat{A} = 141 \;\rightarrow\; \hat{A} = 60°\,41'\,12''$

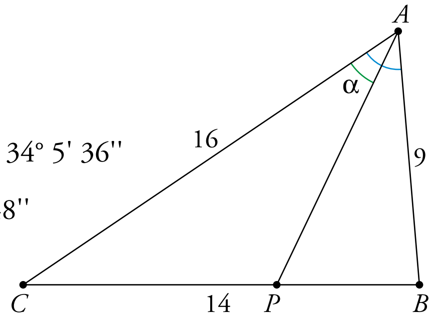
$\alpha = \dfrac{\widehat{A}}{2} = 30°\,20'\,36''$

Calculamos el ángulo $\hat{C}$:

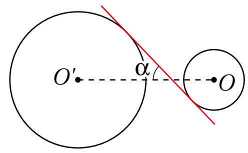
$9^2 = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cos \hat{C} \;\rightarrow\; 448 \cos \hat{C} = 371 \;\rightarrow\; \hat{C} = 34°\,5'\,36''$

Ahora, $\widehat{APC} = 180° - (30°\,20'\,36'' + 34°\,5'\,36'') = 115°\,33'\,48''$

$\dfrac{16}{sen\,\widehat{APC}} = \dfrac{\overline{AP}}{sen\,\widehat{C}} \;\rightarrow\; \overline{AP} = \dfrac{16 \cdot sen\,\widehat{C}}{sen\,\widehat{APC}} = 9{,}94 \text{ cm}$



55 **Halla el ángulo que forma la tangente a estas circunferencias con la recta que une sus centros. Los radios miden 4 cm y 9 cm, y la distancia entre sus centros es de 16 cm.**



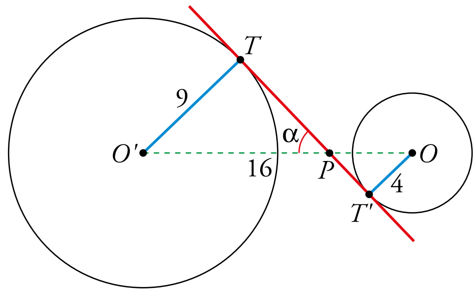
Los triángulos *OT'P* y *O'TP* son triángulos rectángulos.

$sen\,\alpha = \dfrac{9}{\overline{O'P}} \;\rightarrow\; \overline{O'P} = \dfrac{9}{sen\,\alpha}$

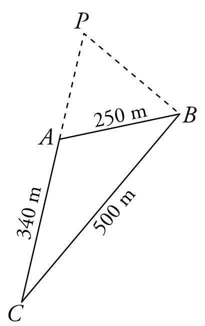
$sen\,\alpha = \dfrac{4}{\overline{OP}} \;\rightarrow\; \overline{OP} = \dfrac{4}{sen\,\alpha}$

$16 = \overline{O'O} = \overline{O'P} + \overline{PO} = \dfrac{9}{sen\,\alpha} + \dfrac{4}{sen\,\alpha} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 16 sen\,\alpha = 13 \;\rightarrow\; sen\,\alpha = \dfrac{13}{16} \;\rightarrow\; \alpha = 54°\,20'\,27''$



56 **Queremos calcular la distancia desde *A* y *B* a un punto inaccesible *P*. Para ello, fijamos un punto *C* de modo que $\widehat{PBC}$ = 90° y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$.**



Calculamos los ángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{CAB}$.

$340^2 = 250^2 + 500^2 - 2 \cdot 250 \cdot 500 \cos \widehat{ABC} \;\rightarrow\; 250\,000 \cos \widehat{ABC} = 196\,900 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \widehat{ABC} = 38°\,2'\,18''$

$500^2 = 250^2 + 340^2 - 2 \cdot 250 \cdot 340 \cos \widehat{CAB} \;\rightarrow\; 170\,000 \cos \widehat{CAB} = -71\,900 \;\rightarrow\; \widehat{CAB} = 115°\,1'\,14''$

$\widehat{PAB} = 180° - 115°\,1'\,14'' = 64°\,58'\,46''$

$\widehat{PBA} = 90° - 38°\,2'\,18'' = 51°\,57'\,42''$

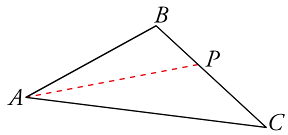
$\hat{P} = 180° - (64°\,58'\,46'' + 51°\,57'\,42'') = 63°\,3'\,32''$

Ahora aplicamos el teorema de los senos para calcular las distancias:

$\dfrac{\overline{PA}}{sen\,\widehat{PBA}} = \dfrac{250}{sen\,\widehat{P}} \;\rightarrow\; \overline{PA} = 220{,}87 \text{ m}$

$\dfrac{\overline{PB}}{sen\,\widehat{PAB}} = \dfrac{250}{sen\,\widehat{P}} \;\rightarrow\; \overline{PB} = 254{,}12 \text{ m}$

57 Demuestra que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto al ángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.



∗ ***Debes probar que*** $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$***. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABP y ACP.***

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{AP}}{sen\,\widehat{B}} = \dfrac{\overline{BP}}{sen\,\dfrac{\widehat{A}}{2}} \rightarrow \overline{AP}\cdot sen\,\dfrac{\widehat{A}}{2} = \overline{BP}\cdot sen\,\widehat{B} \\ \dfrac{\overline{AP}}{sen\,\widehat{C}} = \dfrac{\overline{PC}}{sen\,\dfrac{\widehat{A}}{2}} \rightarrow \overline{AP}\cdot sen\,\dfrac{\widehat{A}}{2} = \overline{PC}\cdot sen\,\widehat{C} \end{array}\right\} \rightarrow \overline{BP}\cdot sen\,\hat{B} = \overline{PC}\cdot sen\,\hat{C}$$

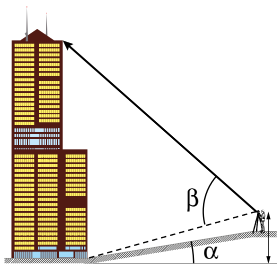
Por otro lado:

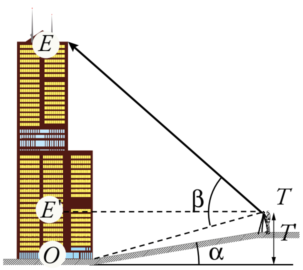
$$\dfrac{\overline{AB}}{sen\,\widehat{C}} = \dfrac{\overline{AC}}{sen\,\widehat{B}} \rightarrow sen\,\hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\cdot sen\,\hat{C}$$

Sustituyendo $sen\,\hat{B}$ en la primera relación, se obtiene:

$$\overline{BP}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\cdot sen\,\hat{C} = \overline{PC}\cdot sen\,\hat{C} \rightarrow \overline{BP}\cdot\overline{AC} = \overline{PC}\cdot\overline{AB} \rightarrow \dfrac{\overline{AC}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$$

58 Para medir la altura de un edificio se utiliza un teodolito cuya mira está a una altura de 1,5 m sobre el suelo que está 3 m más alto que la base del edificio. Los datos conocidos son $\alpha = 10°$, $\beta = 80°$. Halla la altura del edificio.





Conocemos los ángulos $\alpha = \widehat{TOO'} = 10°$ y $\beta = \widehat{OT'E} = 80°$.

Considerando el triángulo OTO': $sen\,10° = \dfrac{3}{\overline{OT}} \rightarrow \overline{OT} = 17,3$ m

También sabemos: $sen\,\widehat{O'OT'} = \dfrac{4,5}{\overline{OT'}}$ (*)

Además, como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°:

$180° = 10° + 90° + \widehat{OTO'} \rightarrow \widehat{OTO'} = 80°$

Entonces: $\widehat{OTT'} = 180° - \widehat{OTO'} = 100°$

Y aplicando el teorema del coseno:

$\overline{OO'}^2 = \overline{TO}^2 + \overline{O'T}^2 - 2\cdot\overline{TO}\cdot\overline{O'T}\cos\widehat{OTO'} \rightarrow \overline{OO'}^2 = 17,3^2 + 3^2 - 2\cdot 17,3\cdot 3\cos 80° \rightarrow \overline{OO'} = 17$ m

Aplicamos el teorema del coseno en el triángulo OTT':

$\overline{OT'}^2 = \overline{TT'}^2 + \overline{OT}^2 - 2\cdot\overline{TT'}\,\overline{OT}\cos\widehat{OTT'} \rightarrow \overline{OT'}^2 = 1,5^2 + 17,3^2 - 21,5\cdot 17,3\cos 100° \rightarrow \overline{OT'} = 17,6$ m

Y volviendo a (*): $sen\,\widehat{O'OT'} = \dfrac{4,5}{\overline{OT'}} = \dfrac{4,5}{17,6} \rightarrow \widehat{O'OT'} = 14°\,48'$

Vayamos ahora a centrarnos en el triángulo OET'.

$\widehat{OT'E} = 80° = \widehat{E'T'E} + \widehat{E'T'O'}$ (**)

Como las rectas $E'T'$ y OO' son paralelas, y la recta que forma los ángulos $\widehat{E'T'O}$ y $\widehat{T'OO'}$ es la misma, podemos afirmar que $\widehat{E'T'O} = \widehat{T'OO'} = 14°\,48'$.

Por lo tanto y volviendo a (**): $\widehat{E'T'E} = 80° - 14°\,48' = 65°\,12'$

La medida que nos pide el enunciado es: $\overline{OE} = \overline{OE'} + \overline{EE'} = 4,5 + \overline{EE'}$ por lo que hallando el valor de $\overline{EE'}$ habremos terminado:

$$cos\ \widehat{E'T'E} = \frac{\overline{E'T'}}{\overline{ET'}} \rightarrow cos\left(65°\,12'\right) = \frac{\overline{OO'}}{\overline{ET'}} = \frac{17}{\overline{ET'}} \rightarrow \overline{ET'} = 40,5\ \text{m}$$

$$sen\ \widehat{E'T'E} = \frac{\overline{EE'}}{\overline{ET'}} \rightarrow sen\left(65°\,12'\right) = \frac{\overline{EE'}}{\overline{ET'}} = \frac{EE'}{40,5} \rightarrow \overline{EE'} = 36,8\ \text{m}$$

Y, finalmente:

$\overline{OE} = \overline{OE'} + \overline{E'E} = 4,5 + 36,8 = 41,3\ \text{m}$

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 4.1. (EA 4.1.1.) CE 4.2. (EA 4.2.1.)

1 **Expresa a través de las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 154°, 207°, 318°, 2 456°.**

$sen\ 154° = sen\ (180° - 154°) = sen\ 26°$

$cos\ 154° = -cos\ 26°$

$tg\ 154° = -tg\ 26°$

$sen\ 207° = sen\ (180° + 27°) = -sen\ 27°$

$cos\ 207° = -cos\ 27°$

$tg\ 207° = tg\ 27°$

$sen\ 318° = sen\ (360° - 42°) = -sen\ 42°$

$cos\ 318° = cos\ 42°$

$tg\ 318° = -tg\ 42°$

$sen\ 2\,456° = sen\ (360° \cdot 6 + 296°) = sen\ 296° = sen\ (360° - 64°) = -sen\ 64°$

$cos\ 2\,456° = cos\ 64°$

$tg\ 2\,456° = -tg\ 64°$

2 **Si $sen\ \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha > 90°$, calcula sin hallar el ángulo α:**

a) $cos\ \alpha$ **b)** $tg\ \alpha$

c) $sen\ (180° + \alpha)$ **d)** $cos\ (90° + \alpha)$

e) $tg\ (180° - \alpha)$ **f)** $sen\ (90° - \alpha)$

a) $cos^2\ \alpha = 1 - sen^2\ \alpha \rightarrow cos^2\ \alpha = 1 - \frac{16}{25} \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow cos\ \alpha = \pm\frac{3}{5} \rightarrow cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

b) $tg\ \alpha = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$

c) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

d) $cos\ (90° + \alpha) = -sen\ \alpha = -\frac{4}{5}$

e) $tg\ (180° - \alpha) = -tg\ \alpha = \frac{4}{3}$

f) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = -\frac{3}{5}$

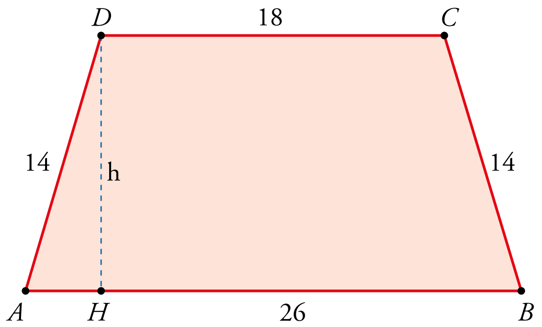
3 **Si $tg\ \alpha = -3{,}5$, halla α con ayuda de la calculadora, exprésalo como un ángulo del intervalo [0, 180°) y obtén su seno y su coseno.**

$a\alpha = 105°\ 56'\ 43''$

$sen\ \alpha = 0{,}9615$

$cos\ \alpha = -0{,}2747$

4 **Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 26 cm, y los lados iguales, 14 cm. Calcula sus ángulos y su área.**



$\overline{AH} = \dfrac{26-18}{2} = 4$ cm por ser isósceles.

$cos\, \hat{A} = \dfrac{4}{14} = 0{,}2857 \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 73°\ 23'\ 54''$

Como los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°:

$\hat{C} = \hat{D} = \dfrac{360° - 2 \cdot (73°\ 23'\ 54'')}{2} = 180° - 73°\ 23'\ 54'' = 106°\ 36'\ 6''$

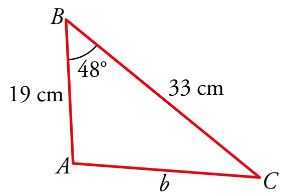
Para calcular la superficie necesitamos la altura: $h = 14 \cdot sen\, \hat{A} = 13{,}42$ cm

$S_{ABCD} = \dfrac{26+18}{2} \cdot 13{,}42 = 295{,}24\ \text{cm}^2$

5 **Resuelve el triángulo *ABC* y halla su área en estos casos:**

a) $\boldsymbol{c = 19}$ **cm,** $\boldsymbol{a = 33}$ **cm,** $\boldsymbol{\hat{B} = 48°}$

b) $\boldsymbol{a = 15}$ **cm,** $\boldsymbol{b = 11}$ **cm,** $\boldsymbol{\hat{B} = 30°}$



a) • Con el teorema del coseno, hallamos b:

$b^2 = 19^2 + 33^2 - 2 \cdot 19 \cdot 33\ cos\ 48° = 610{,}9 \rightarrow$

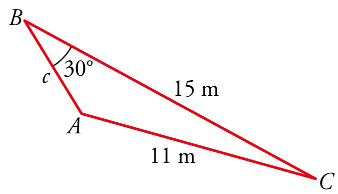
$\rightarrow b = 24{,}72$ cm

• Del mismo modo, hallamos $\hat{A}$:

$33^2 = 19^2 + 24{,}72^2 - 2 \cdot 19 \cdot 24{,}72\ cos\, \hat{A} \rightarrow cos\, \hat{A} = -0{,}1245 \rightarrow \hat{A} = 97°\ 9'$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 34°\ 51'$

• Área $= \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\, \hat{B} = 232{,}98\ \text{cm}^2$



b) • Hallamos $\hat{A}$ con el teorema de los senos:

$\dfrac{a}{sen\, \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\, \hat{B}} \rightarrow \dfrac{15}{sen\, \hat{A}} = \dfrac{11}{sen\, 30°} \rightarrow sen\, \hat{A} = 0{,}6818$

• Hay dos soluciones:

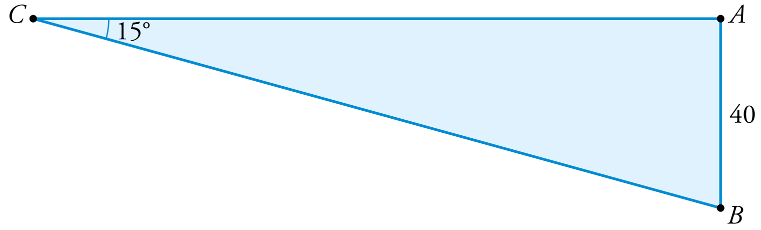
$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = 42°\ 59'\ 9'' \\ \hat{C}_1 = 107°\ 0'\ 51'' \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{11}{sen\, 30°} = \dfrac{c_1}{sen\, 107°\ 0'\ 51''} \rightarrow c_1 = 21{,}04$ cm;

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\, \hat{B} = 78{,}9\ \text{cm}^2$

$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_2 = 137°\ 0'\ 51'' \\ \hat{C}_2 = 12°\ 59'\ 9'' \end{array}\right\} \rightarrow \dfrac{11}{sen\, 30°} = \dfrac{c_2}{sen\, 12°\ 59'\ 9''} \rightarrow c_2 = 4{,}94$ cm;

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot sen\, \hat{B} = 18{,}53\ \text{cm}^2$

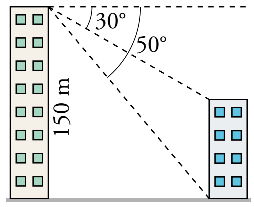
6 **El radar de un barco detecta un objeto no identificado a 40 m de profundidad y en una dirección que forma 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo para llegar desde el barco hasta el objeto?**



El buzo tiene que recorrer la distancia $\overline{BC}$.

$$sen\ 15° = \frac{40}{\overline{BC}} \to \overline{BC} = \frac{40}{sen\ 15°} = 154{,}55 \text{ m}$$

7 **Desde la terraza de un edificio de 150 m de altura medimos los ángulos que se indican en la figura. Calcula la altura del edificio más bajo y la anchura de la calle.**



Representamos la anchura de la calle con la letra a. Usando el ángulo complementario de 50° tenemos que:

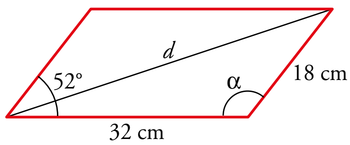
$$tg\ 40° = \frac{a}{150} \to a = 150 \cdot tg\ 40° = 125{,}86 \text{ m}$$

La diferencia, d, entre las alturas de las torres podemos obtenerla mediante el ángulo de 30°:

$$tg\ 30° = \frac{d}{125{,}86} \to d = 125{,}86 \cdot tg\ 30° = 72{,}67 \text{ m}$$

La altura del edificio más bajo es 150 – 72,67 = 77,33 m.

8 **Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52°. Halla la longitud de la diagonal mayor.**



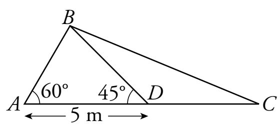
$\alpha = 180° - 52° = 128°$

Calculamos d aplicando el teorema del coseno:

$d^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32\ cos\ 128° = 2\,057{,}24$

$d = 45{,}36$ cm es la medida de la diagonal.

9 **De esta figura, sabemos que $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\hat{A} = 60°$, $\widehat{ADB} = 45°$ y $\overline{AD} = 5$ m. Calcula $\overline{BC}$.**



$\widehat{ABD} = 180° - (60° + 45°) = 75°$

$$\frac{5}{sen\ 75°} = \frac{\overline{BD}}{sen\ 60°} \to \overline{BD} = \frac{5 \cdot sen\ 60°}{sen\ 75°} = 4{,}48 \text{ m}$$

$\widehat{BDC} = 180° - 45° = 135°$

$\overline{BC}^2 = 4{,}48^2 + 4{,}48^2 - 2 \cdot 4{,}48 \cdot 4{,}48 cos\ 135° = 68{,}525 \to \overline{BC} = 8{,}28$ m