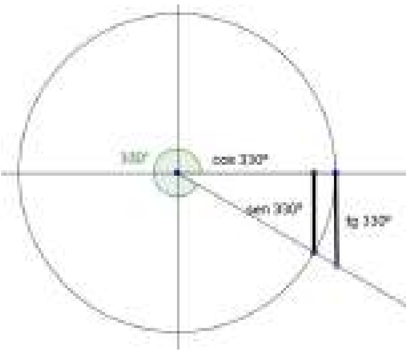
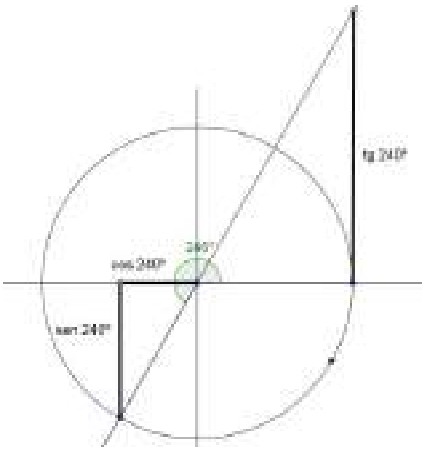
## UNIDAD 4: Trigonometría I

### ACTIVIDADES-PÁG. 88

**1.** El ángulo de 330º está situado en el 4º cuadrante y como observamos en el dibujo los signos de las razones trigonométricas son:

sen 330º < 0 cos 330º > 0 tg 330º < 0




Como 960º es mayor que 360º, comenzamos por determinar a qué ángulo equivale en la circunferencia goniométrica. Dividimos 960º entre 360º y obtenemos:

$$960º = 2 \cdot 360º + 240º$$

es decir, dos vueltas de circunferencia, más 240º.
Las razones trigonométricas de 960º tendrán los signos:

sen 960º = sen 240º < 0

cos 960º = cos 240º < 0

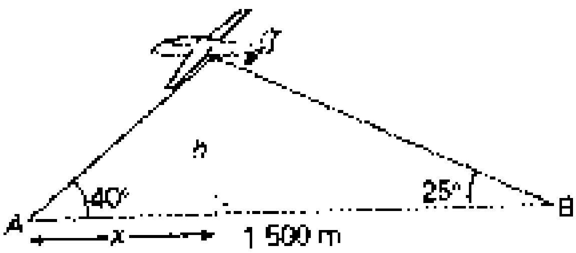
tg 960º = tg 240º > 0

**2.** a) Basta dividir la relación fundamental por $\cos^2 \alpha$.

b) Basta dividir la relación fundamental por $\text{sen}^2 \alpha$.

Nota: Es conocido que la división no siempre puede realizarse. Siempre deberán tenerse en cuenta los casos en los que el divisor sea distinto de cero.

**3.** Según el esquema:

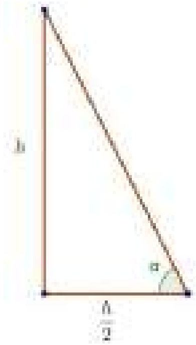



De los dos triángulos rectángulos de la figura, obtenemos:

$$\begin{cases} tg\ 40^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 25^{\circ}\ \dfrac{h}{1500 - x} \end{cases} \Rightarrow \quad h = \frac{1500 \cdot tg\ 40^{\circ} \cdot tg\ 25^{\circ}}{tg\ 40^{\circ} + tg\ 25^{\circ}} \quad \Rightarrow \quad h = 449{,}61\ m$$

**4.** Llamando α al ángulo que forman los rayos solares con el suelo y teniendo en cuenta el triángulo rectángulo del dibujo:

$$tg\ \alpha = \frac{h}{h/2} \quad \Rightarrow \quad tg\ \alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63^{\circ}\ 26'\ 6''$$



## ACTIVIDADES-PÁG. 105

**1.** Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15, 21,…, $\frac{n^2 + n}{2}$

Los números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25,…, $x^2$.

Deba cumplirse la igualdad $\frac{n^2 + n}{2} = x^2$.

El valor de n más pequeño que cumple la igualdad es n = 8, ya que $\frac{8^2 + 8}{2} = x^2 \quad \Rightarrow 36 = x^2$.

El enunciado dice que hay más de 36 cajas, por tanto hay que buscar otra solución, y ésta es:

n = 49, pues $\frac{49^2 + 49}{2} = 1225 = 35^2$.

Tiene 1225 cajas.

**2.** Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{con n} \geq 2$$

Dando valores, obtenemos:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\ldots=\ldots$$

$$\frac{1}{998\cdot 999}=\frac{1}{998}-\frac{1}{999}$$

$$\frac{1}{999\cdot 100}=\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}$$

Sumando y simplificando:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1000}=1-0{,}001=0{,}999$$

**3.** Sean A, B y C las tres rebanadas. Con $A_1$ indicamos que se tuesta la cara 1 y con $A_2$ indicamos que se tuesta la cara 2.

1º $A_1B_1$ tarda: 30 s en tostar cara $A_1$ y $B_1$
5 s en colocar $A_1$
5 s en colocar $B_1$
5 s en sacar $B_1$

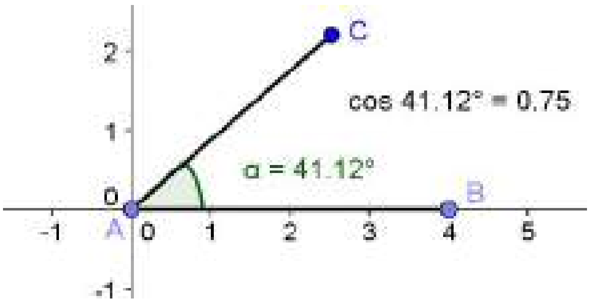
2º $A_2C_1$ tarda: 3 s en dar vuelta $A_1$
5 s en meter $C_1$
30 s en tostar cara $A_2$ y $C_1$
3 s en dar la vuelta $C_2$

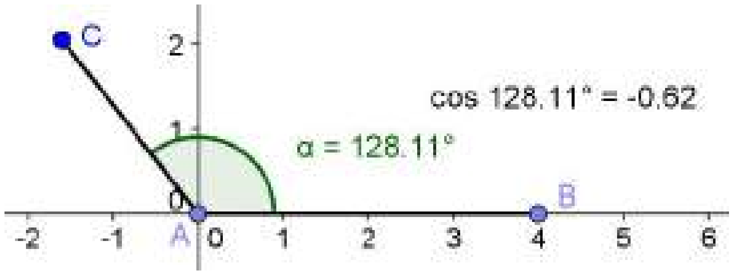
3º $B_2C_2$ tarda: 5 s en sacar $A_2$
30 s en tostar cara $B_2$ y $C_2$
5 s en sacar $B_2$
5 s en sacar $C_2$

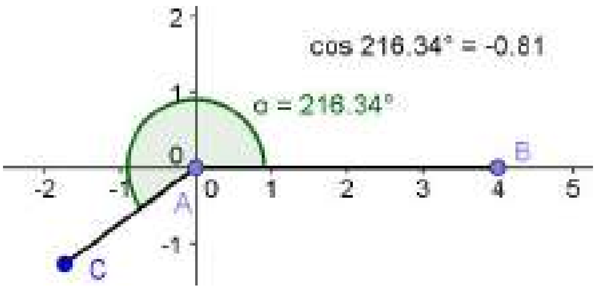
En total se necesitan 136 s en tostar 3 rebanadas.

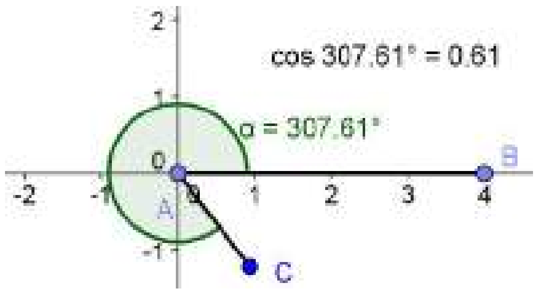
## ACTIVIDADES-PÁG. 107

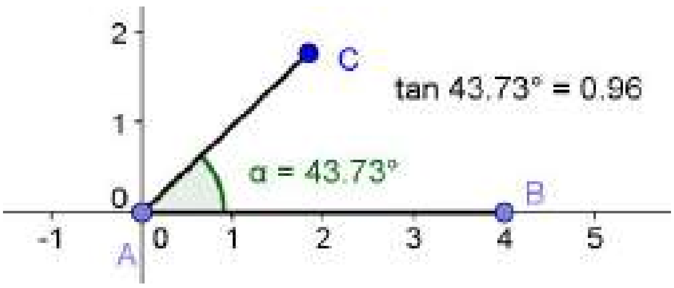
**1.** Procedemos como en el caso del seno y obtenemos para el coseno y la tangente los resultados que aparecen en los dibujos.

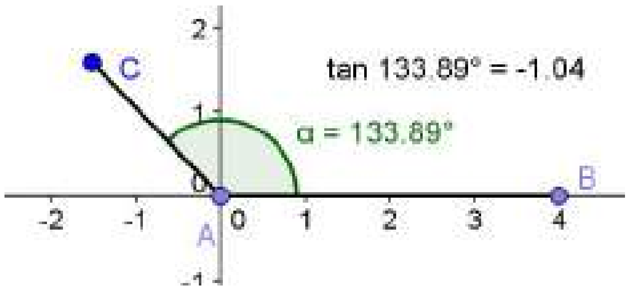


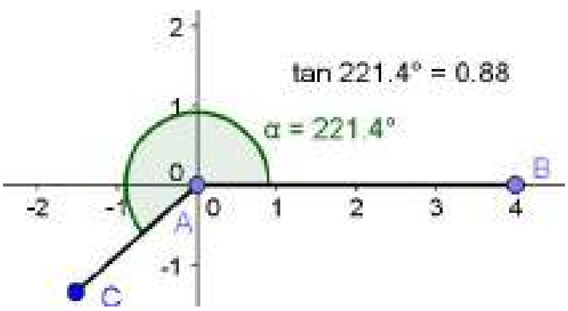



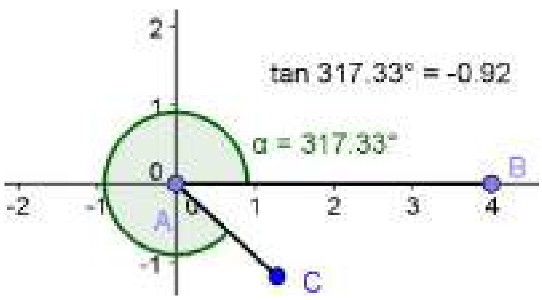



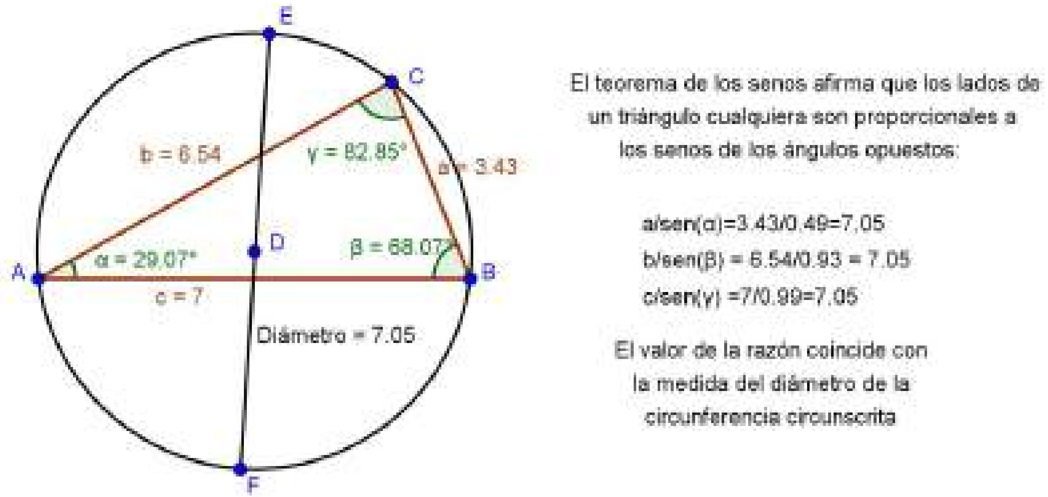
**2.** Dibujamos un triángulo cualquiera y mostramos la medida de sus lados y sus ángulos, como hemos hecho en el apartado **Teorema de los senos** de las páginas de **Nuevas tecnologías**.

Posteriormente dibujamos un diámetro de la circunferencia circunscrita, siguiendo los pasos:

a) Elige **Mediatriz** y traza las mediatrices de los tres lados y marca el circuncentro. Dibuja la circunferencia circunscrita.

b) Dibuja un diámetro y muestra su valor. Oculta las mediatrices.

c) *Arrastra* cualquiera de los vértices del triángulo y observa como cambia este: la medida de sus lados, la amplitud de sus ángulo pero se mantienen constantes la razones entre sus lados y el seno de los ángulos opuesto, además de coincidir el valor de estas razones con la medida del diámetro trazado.




3. **Seguimos los pasos que se describen a continuación:**

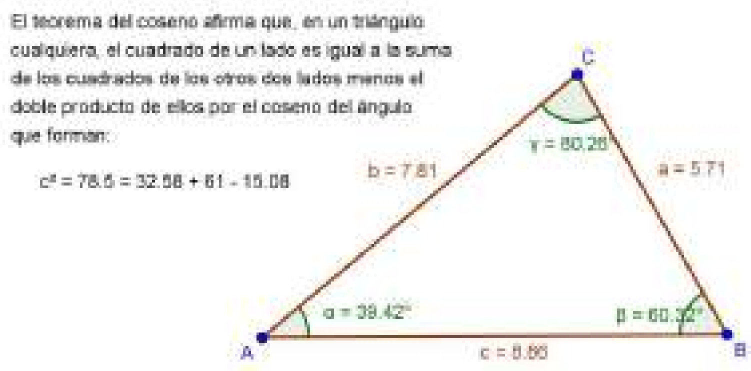
a) Mediante la herramienta Polígono dibuja un triángulo cualquiera y en el menú contextual de los lados y ángulos elige **Propiedades** y en la ficha **Básico** escoge **Muestra rótulo**: **Nombre & valor**.

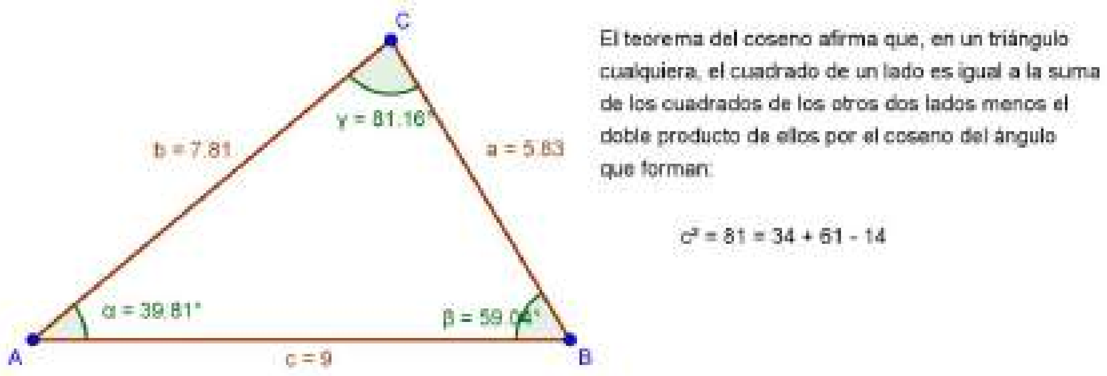
b) Con **Inserta texto** introduce el texto estático del enunciado del teorema.

c) Con **Inserta texto** y para cada uno de los tres lados introduce el texto:

**"$c^2$ = " + $c^2$ + " = " + $a^2$ + $b^2$ – 2 * a * b * cos(γ)**.

d) *Arrastra* cualquiera de los vértices del triángulo y observa como cambia este: la medida de sus lados, la amplitud de sus ángulo pero se sigue cumpliendo la relación del enunciado.




**4.** a) Construimos y resolvemos el triángulo a = 3 cm, b = 8 cm y α = 25º.

Los pasos a seguir son:

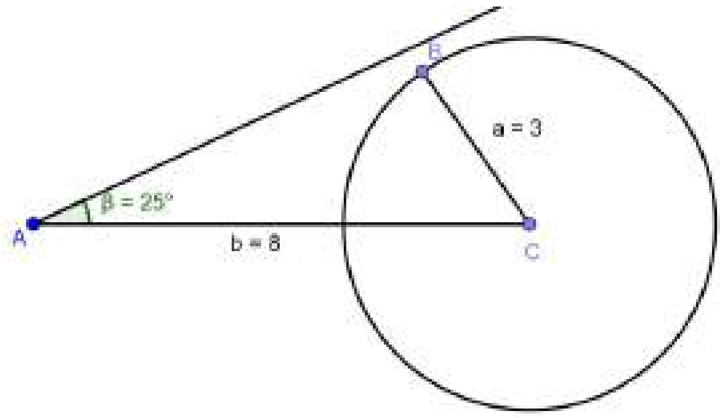
a) En el **Campo de Entrada** introduce los valores **a = 3**, **b = 8** y **α = 25º**.

b) Dibuja un segmento de longitud **b = 8**. Renombra el vértice B por C.

c) Dibuja un ángulo con un lado el segmento anterior y de amplitud **α = 25º**. Traza la semirrecta de origen A.

d) Dibuja una circunferencia de centro el punto C y radio **a = 3 cm**.

e) Con Intersección de dos objetos halla la intersección de la semirrecta y de la circunferencia. (Observa que no hay puntos de intersección)




Concluimos que no existe un triángulo con los datos del enunciado.

b) Construimos y resolvemos el triángulo a = 3,7 cm, b = 4,2 cm y c = 6,8 cm.

Los pasos a seguir son:

a) En el **Campo de Entrada** introduce los valores **a = 3.7, b = 4.2** y **c = 6.8**.

b) Dibuja un segmento AB de longitud **a**.

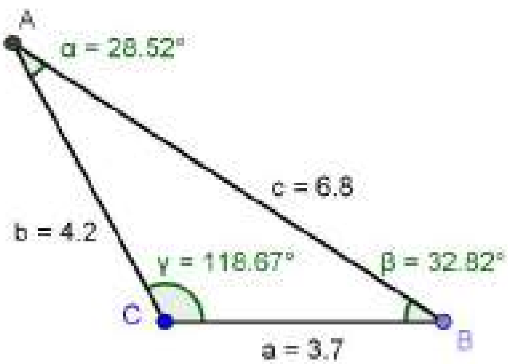
c) En el *Menú Contextual* de la letra A, elige **Renombra** y cambia la letra A por C.

d) Elige **Circunferencia dados su centro y su radio**, dibuja una circunferencia de centro C y radio **b**. Dibuja otra circunferencia de centro B y radio **c.**

e) Elige **Intersección entre dos objetos** y halla la intersección de las dos circunferencias.

f) Oculta las dos circunferencias, el segmento BC y el punto D.

g) Dibuja el triángulo ABC. Mide sus lados y determina la amplitud de sus ángulos.




h) Edita la medida de los lados (para ello, en la *Campo de entradas* introduce las nuevas medidas de los lados, es decir **a = 12.5** y de igual forma para los lados b y c; y conseguirás el triángulo que quieras:

**a = 12.5 cm**, **b = 10.5 cm**, y **c = 8.2 cm**.

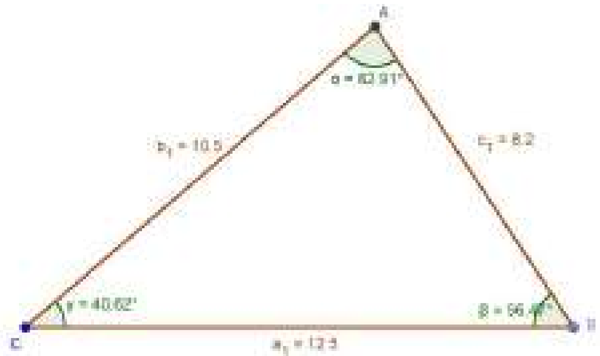
Observa lo que sucede en la *Ventana Gráfica*.

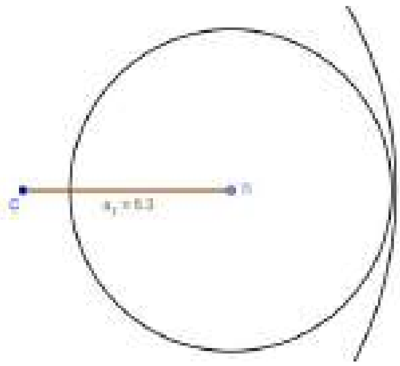
i) Edita los valores de los lados siguientes:

**a = 5.3 cm**, **b = 9.5 cm**, y **c = 4.1 cm.**

Muestra, con la **Ventana Algebraica**, las dos circunferencias para comprobar lo que sucede.

Nota: Conocidos los tres lados puede existir una o ninguna solución, ya que la medida de cada lado debe ser menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia





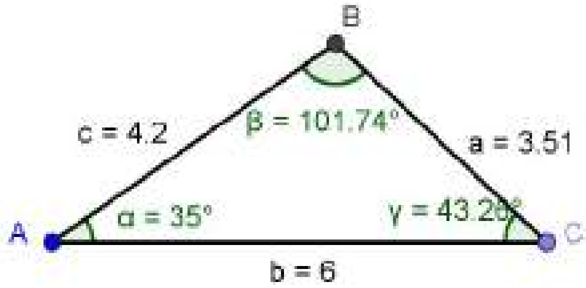
c) Construimos y resolvemos el triángulo b = 6 cm, c = 4.2 cm y α = 3º.

Los pasos a seguir son:

a) En el **Campo de Entrada** introduce los valores **b = 6**, **c = 4.2** y **α = 35º**.

b) Dibuja un ángulo α de amplitud 35º.

c) Dibuja un segmento de longitud **b = 6.**




d) Elige **Circunferencia dados su centro y su radio**, dibuja una circunferencia de centro A y radio **c = 4.2**.

e) Elige **Intersección entre dos objetos** y halla la intersección de la semirrecta con la circunferencia.

f) Oculta los elementos sobrantes, dibuja el triángulo con todos sus elementos y renombra los elementos necesarios, de forma que queda el resultado como aparece en el dibujo.

d) Construimos y resolvemos el triángulo a = 7,5 cm, α = 55º y β = 68º.

Los pasos a seguir son:

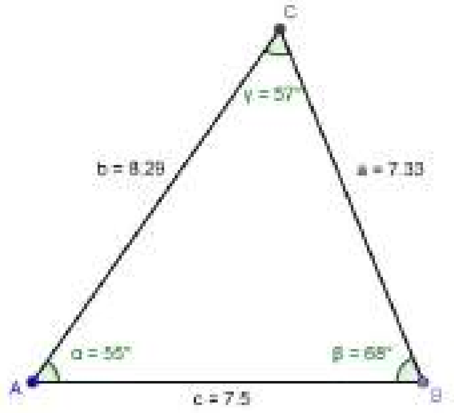
**a)** En el **Campo de Entrada** introduce los valores **a = 7.5**, **α = 55º** y **β = 68º.**

b) Dibuja un segmento AB de longitud **a = 7.5**.

c) Dibuja en el vértice A el ángulo **α = 55º**. Dibuja el lado del ángulo.

d) Dibuja en el vértice B el ángulo **β = 68º**. Dibuja el lado del ángulo.

e) Elige **Intersección entre dos objetos** y halla la intersección de las semirrectas.




## ACTIVIDADES-PÁG. 108

**1.** Las respuestas son:

a) Las medidas en radianes de los ángulos dados son:

i) $\alpha = 120^\circ \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ rad$ ii) $\beta = 210^\circ \equiv \dfrac{7\pi}{6}\ rad$ iii) $\gamma = 405^\circ \equiv \dfrac{9\pi}{4}\ rad$

b) Las medidas en grados sexagesimales de los ángulos dados son:

i) $\alpha = \dfrac{5\pi}{3}\ rad \equiv 300^\circ$ ii) $\beta = \dfrac{9\pi}{4}\ rad \equiv 405^\circ$ iii) $\gamma = \dfrac{11\pi}{5}\ rad = 396^\circ$

c) Los ángulos que resultan de las operaciones son.

i) α + β = 268º 26´ ii) 2α + 3β = 761º 52´ iii) 6α – β = 35º 36´

**2.** La resolución de los triángulos queda:

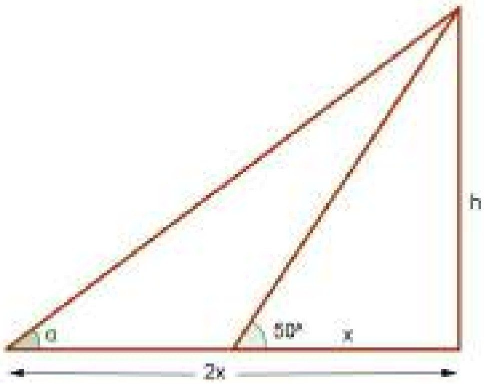
a) C = 28º a = 11,33m c = 5,32 m

b) C = 40º b = 11,49 m c = 9,64 m

c) B = 41º 45´ 37´´ C = 48º 14´ 23´´ a = 18,77 m

**3.** Los ángulos agudos miden 26º 33´ 54´´ y 63º 26´ 6´´. Los catetos miden 1,34 y 2,68 m.

**4.** Teniendo en cuenta el dibujo obtenemos:



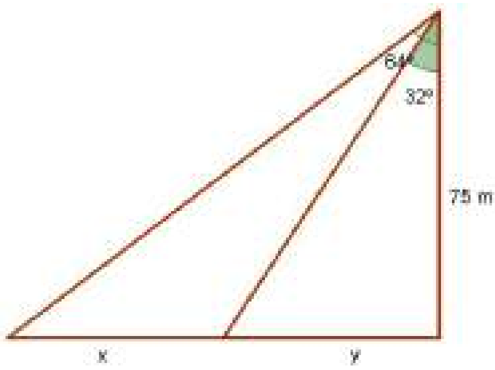

Si nos colocamos a distancia doble, el ángulo de visión será:

$$\begin{cases} tg\ 50^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ tg\ \alpha = \dfrac{h}{2x} \end{cases} \Rightarrow\ tg\ \alpha = \frac{1}{2}\ tg\ 50^{\circ} = 0{,}5959 \ \Rightarrow\ \alpha = 30^{\circ}\ 47'\ 23''$$

Si nos colocamos a distancia triple, el ángulo de visión será:

$$\begin{cases} tg\ 50^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ tg\ \alpha = \dfrac{h}{3x} \end{cases} \Rightarrow\ tg\ \alpha = \frac{1}{3}\ tg\ 50^{\circ} = 0{,}3973 \ \Rightarrow\ \alpha = 21^{\circ}\ 39'\ 56''$$

**5.** Teniendo en cuenta el dibujo, el caminante recorre entre las dos observaciones x metros. Calculamos el valor de x resolviendo el sistema:




$$\begin{cases} tg\ 64^{\circ} = \dfrac{x+y}{75} \\ tg\ 32 = \dfrac{y}{75} \end{cases} \Rightarrow\ x = 106{,}91\ m$$

La velocidad del caminante es:

$$\frac{101{,}91\ m}{1\ \text{min}} = 1{,}78\ m/s = 6{,}41\ km/h.$$

**6.** La distancia del centro a la cuerda es 0,57 metros.

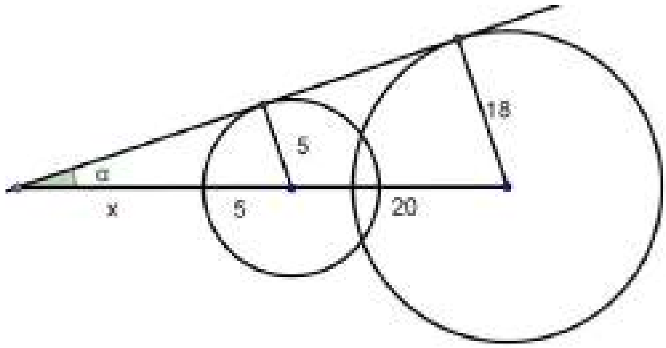
**7.** Los lados del rectángulo miden 5,26 y 10,79 m, respectivamente. La superficie del rectángulo es:

5,26 x 10,79 = 56,76 $m^2$.

**8.** El lado del pentágono mide 5,88 cm y su apotema 4,05 cm. El área será 59,54 cm$^2$.

**9.** Teniendo en cuenta los triángulos rectángulos del dibujo podemos formular el sistema que sigue.

$$\begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{5}{x+5} \\ sen\ \alpha = \dfrac{18}{x+25} \end{cases}$$




Resolviendo el sistema obtenemos el ángulo α = 40º 32´ 30´´.

**10.** Las razones son: $\cos\ \alpha = -\dfrac{\sqrt{95}}{12} = -\ 0{,}8122$ y $tg\ \alpha = \dfrac{7\sqrt{95}}{95} = 0{,}7182$

**11.** Las razones valen: $\cos\ \beta = -\dfrac{3}{5} = -\ 0{,}6$ y $sen\ \beta = -\dfrac{4}{5} = -\ 0{,}8$

**12.** Si tg γ > 0, el ángulo γ está en el primer o tercer cuadrante. Al ser el valor del coseno negativo, el ángulo pertenece al tercer cuadrante.

Las razones son: $sen\ \gamma = -\dfrac{3}{5} = -\ 0{,}6$ y $tg\ \gamma = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

## ACTIVIDADES-PÁG. 109

**13.** Las simplificaciones quedan:

a) $\dfrac{tg\ \alpha \cdot \cos\ \alpha + tg^3\ \alpha \cdot \cos\ \alpha}{\sec^2\ \alpha} = sen\ \alpha$

b) $\dfrac{1 + \cot g^2\ \alpha}{1 + tg^2\ \alpha} = ctg^2\ \alpha$

c) $\dfrac{\cos^2 \alpha \cdot (1 + tg^2\ \alpha)}{\cot g\ \alpha} = tg\ \alpha$

d) cotg$^2$ α + sec$^2$ α – cosec$^2$ α = tg$^2$ α

e) $\dfrac{sen^2\ \alpha}{tg^2\ \alpha - tg^2 \alpha \cdot sen^2\ \alpha} = 1$

f) $\dfrac{1+\cos\alpha}{sen^2\ \alpha} = \dfrac{1}{1-\cos\alpha}$

g) $\dfrac{1+tg^2\ \alpha}{\sec\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$

h) $\cos^3\alpha + \cos\alpha \cdot sen^2\alpha = \cos\alpha$

**14.** Los valores de las razones son:

$sen\ 330^\circ = -sen\ 30^\circ = -\dfrac{1}{2}$

$\cos\ 330^\circ = \cos\ 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\ 330^\circ = -tg\ 30^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$sen\ 1320^\circ = sen\ 240^\circ = -sen\ 60^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\ 1320^\circ = \cos\ 240^\circ = -\cos\ 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$

$tg\ 1320^\circ = tg\ 240^\circ = tg\ 60^\circ = \sqrt{3}$

$sen\ \dfrac{3\pi}{4} = sen\ \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\ \dfrac{3\pi}{4} = -\cos\ \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\ \dfrac{3\pi}{4} = -tg\ \dfrac{\pi}{4} = -1$

$sen\ -\dfrac{\pi}{3} = -sen\ \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\ -\dfrac{\pi}{3} = \cos\ \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

$tg\ -\dfrac{\pi}{3} = -tg\ \dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

**15.** Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguientes razones trigonométricas:

a) sen 210º = - sen 30º = $-\dfrac{1}{2}$

b) cos 120º = - cos 60º = $-\dfrac{1}{2}$

c) tg 330º = - tg 30º = $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d) cotg (- 60º) = - cotg (60º) = $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

**16.** Los valores de las razones son:

a) sen (180º - α) = sen α = 0,6

b) cos (180º + α) = - cos α = - 0,8

c) tg (90º - α) = $\dfrac{sen\ (90^\circ-\alpha)}{\cos\ (90^\circ-\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{sen\ \alpha} = 1{,}33$

d) cotg (360º - α) = $\dfrac{\cos\ (360^\circ-\alpha)}{sen\ (360^\circ-\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-sen\ \alpha} = -1{,}33$

**17.** Se comprueba del siguiente modo:

a) $$\left(\sec\alpha - tg\ \alpha\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{(1-sen\ \alpha)^2}{\cos^2\alpha} = \frac{\left(1-sen\ \alpha\right)^2}{(1-sen\ \alpha)\ (1+sen\ \alpha)} = \frac{1-sen\ \alpha}{1+sen\ \alpha}$$

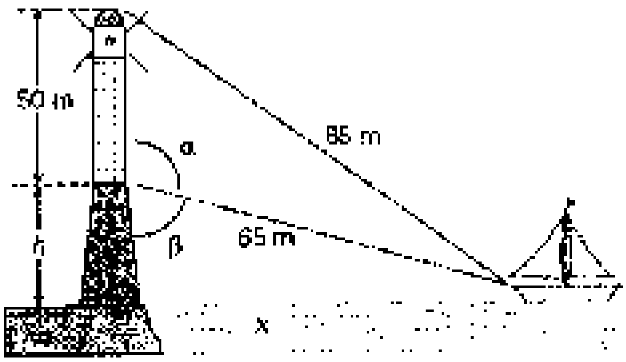
b) $$\frac{tg\ \alpha + \cos\alpha}{sen\ \alpha} = \frac{\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha}{sen\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha + \cos^2\alpha}{sen\ \alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha} = \sec\alpha + ctg\ \alpha$$

c) $$\frac{sen\ \alpha}{\cos ec\ \alpha - \cot g\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{\frac{1}{sen\ \alpha} - \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}} = \frac{sen^2\ \alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha} = 1+\cos\alpha$$

d) $$\frac{(sen\ \alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{2} = \frac{sen^2\ \alpha + \cos^2\alpha + 2\ sen\ \alpha \cdot \cos\alpha - 1}{2} =$$

$$= \frac{2\ sen\ \alpha \cdot \cos\beta}{2} = sen\ \alpha \cdot \cos\alpha$$

**18.** Sea la representación del problema:




Por el teorema de Pitágoras obtenemos:

$$\begin{cases} 85^2 = x^2 + (50+h)^2 \\ 65^2 = h^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad h = 5\ m$$

También podemos calcular el ángulo α por el teorema del coseno:

$$85^2 = 50^2 + 65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 50 \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 94^{\circ}\ 24'\ 42''$$

Por tanto,

$$\beta = 180^{\circ} - \alpha = 85^{\circ}\ 35'\ 18'' \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{h}{65} \quad \Rightarrow \quad h = 65 \cdot \cos\beta = 5\ \text{m}$$

**19.** Teniendo en cuenta el teorema del coseno, obtenemos que la anchura, a, de la portería es:

$$a^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos 65^\circ = 220{,}7622, \text{ es decir, } a = 14{,}86 \text{ metros.}$$

**20.** Los elementos que faltan en cada uno de los triángulos son:

| | | |
|---|---|---|
| a) A = 40º | a = 7,42 m | c = 3,95 m |
| b) A = 42º 33´ 20´´ | B = 59º 47´ 16´´ | C = 77º 39´ 24´´ |
| c) B = 27º 21´ 47´´ | C = 102º 38´ 13´´ ´ | c = 63,69 m |
| d) A = 86º 42´ 20´´ | B = 45º 17´ 40´´ | c = 23,82 m |

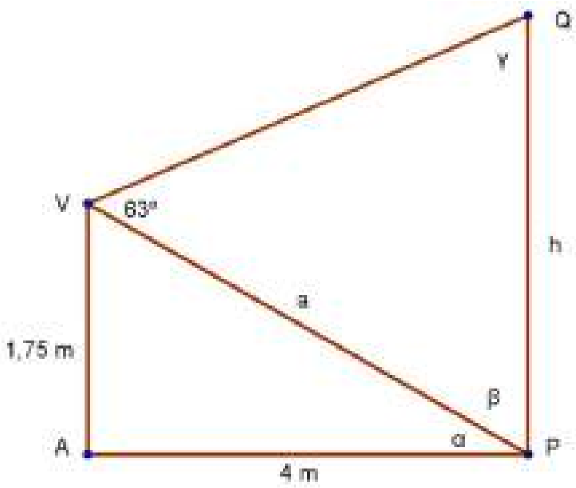
e) No existe ningún triángulo con los datos del enunciado.

f) Existen dos soluciones:

Si A = 69º 26´ 7´´, entonces C = 60º 33´ 53´´ y c = 20,46 m

Si A = 110º 33´ 53´´, entonces C = 19º 26´ 7´´ y c = 7,82 m

**21.** Teniendo en cuenta el dibujo obtenemos:




La hipotenusa del triángulo rectángulo PAV mide:

$$a = \sqrt{1{,}75^2 + 4^2} = 4{,}37\ m$$

La amplitud del ángulo α es:

$$tg\ \alpha = \frac{1{,}75}{4} = 0{,}4375 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 23^\circ\ 27'\ 46''$$

El ángulo β mide: β = 90º - α = 50º 22´ 14´´.

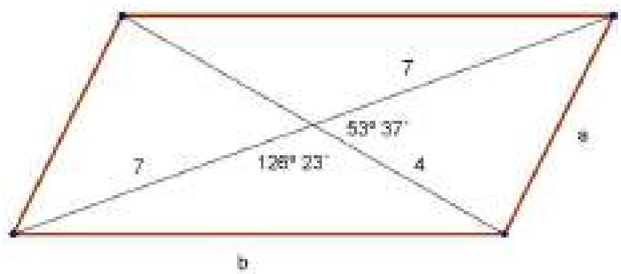
El ángulo γ mide: γ = 180º - α – β = 50º 37´ 46´´.

Utilizando el teorema de los senos en el triángulo PQV se obtiene h = 5,04 m.

**22.** Teniendo en cuenta el dibujo, la medida de los lados a y b es:

$a^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 53^\circ\ 37' \Rightarrow a = 5{,}64$ cm.

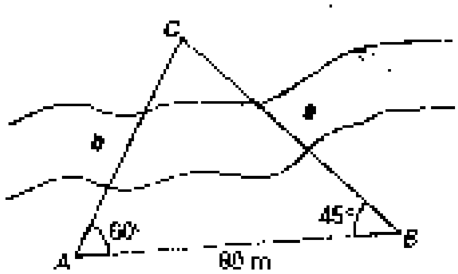
$b^2 = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 126^\circ\ 23' \Rightarrow b = 9{,}91$ cm.



**23.** Su contorno mide 141,54 metros y su superficie 175 metros cuadrados.

## ACTIVIDADES-PÁG. 110

**24.** Un esquema del problema sería:



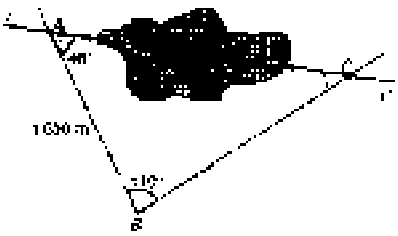

El ángulo C = 75º. Utilizando el teorema de los senos obtenemos:

$$\frac{a}{sen\ 60^{o}} = \frac{80}{sen\ 75^{o}} \quad \Rightarrow \quad a = 71{,}73\ m$$

$$\frac{b}{sen\ 45^{o}} = \frac{80}{sen\ 75^{o}} \quad \Rightarrow \quad b = 58{,}56\ m$$

Las distancias pedidas son 71,73 m y 58,56 m.

**25.** Un esquema del problema es el siguiente:

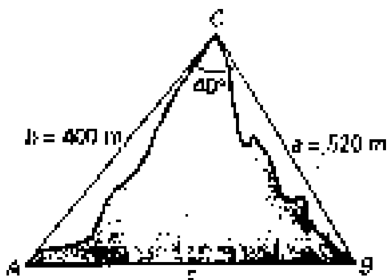



El ángulo C = 24º.

Determinamos la distancia BC (lado a) mediante el teorema de lo senos:

$$\frac{1500}{sen\ 24^{o}} = \frac{BC}{sen\ 46^{o}} \quad \Rightarrow \quad BC = 2652{,}85\ m$$

**26.** La figura queda:

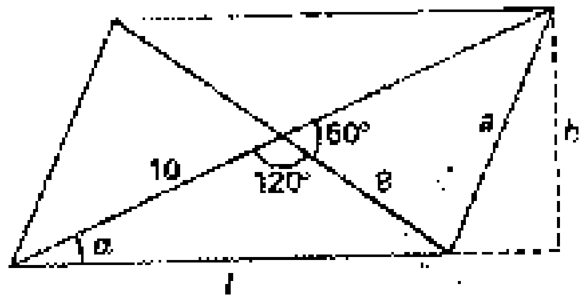



Mediante el teorema del coseno:

$$c^2 = 400^2 + 520^2 - 2 \cdot 400 \cdot 520 \cdot \cos 40^{o} \quad \Rightarrow$$

$$c = AB = 334{,}25\ m.$$

**27.** La figura queda:




Los cálculos son:

$l^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad l = 15{,}62$ cm.

$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60° \quad \Rightarrow \quad a = 9{,}17$ cm.

El perímetro mide $2 \cdot 15{,}62 + 2 \cdot 9{,}17 = 49{,}58$ cm.

$a^2 = 20^2 + l^2 - 2 \cdot 20 \cdot l \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow$

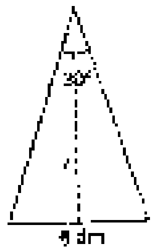
$\Rightarrow 9{,}17^2 = 20^2 + 15{,}62^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15{,}62 \cdot \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 26°\ 20'\ 50''.$

$$sen\ \alpha = \frac{h}{20} \quad \Rightarrow \quad sen\ 26°\ 20'\ 50'' = \frac{h}{20} \quad \Rightarrow \quad h = 8{,}88\ cm.$$

El área mide:

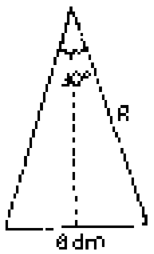
Área = base · altura = $l \cdot h = 15{,}62 \cdot 8{,}88 \quad \Rightarrow \quad$ Área = $138{,}71$ cm$^2$.

**28.** Las soluciones de cada uno de los casos:




El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del dodecágono, por tanto:

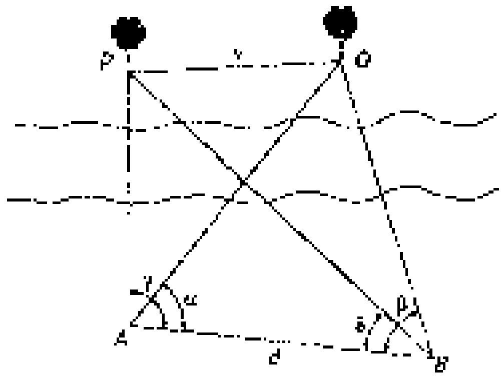
$$tg\ 15° = \frac{3}{r} \quad \Rightarrow \quad r = 11{,}20\ dm.$$




El radio de la circunferencia circunscrita lo calculamos en el triángulo:

$$sen\ 15° = \frac{3}{R} \quad \Rightarrow \quad R = 11{,}59\ dm.$$

**29.** Según la figura:



Los cálculos quedan:

Sean P y Q los árboles. En el triángulo ABP hallamos PB:

$$\frac{PB}{sen\ 110^{o}} = \frac{120}{sen\ 130^{o}} \Rightarrow PB = 25{,}53\ m.$$

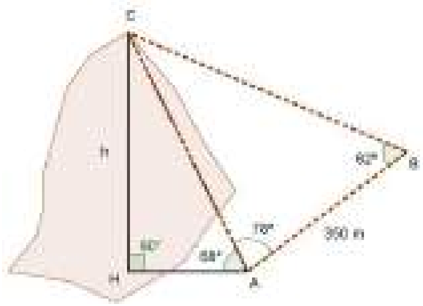
En el triángulo ABQ hallamos BQ:

$$\frac{BQ}{sen\ 50^{o}} = \frac{120}{sen\ 55^{o}} \Rightarrow BQ = 112{,}22\ m.$$

En el triángulo PBQ hallamos x:

$$x^2 = PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos 35^{o} \quad \Rightarrow \quad x = 148{,}30\ m.$$

**30.** Tenemos en cuenta el dibujo adjunto.




En el triángulo ABC hallamos el ángulo en la cima C: C = 180º - (78º + 62) $\Rightarrow$ C = 40º.

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo ABC:

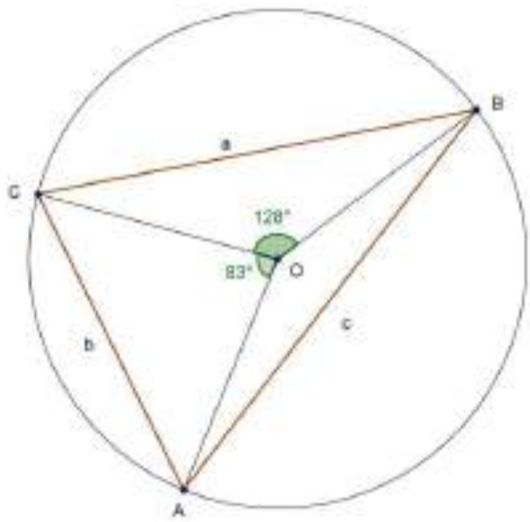
$$\frac{AC}{sen\ 62^{o}} = \frac{350}{sen\ 40^{o}} \Rightarrow AC = 350 \cdot \frac{sen\ 62^{o}}{sen\ 40^{o}} \Rightarrow AC = 480{,}77\ m.$$

Para calcular la altura h, en el triángulo AHC aplicamos la definición de seno:

$$sen\ 68º = \frac{h}{480{,}77} \quad \Rightarrow \quad h = 480{,}77 \cdot sen\ 68º \quad \Rightarrow \quad h = 445{,}76\ m.$$

La altura de la colina es 445,76 metros.

**31.** a) Dibujamos una circunferencia de radio 4 cm. En ella elegimos uno de sus puntos y con el como referencia dibujamos un ángulo central de 128º. Dibujamos otro ángulo central de 83º adyacente al anterior. Los ángulos anteriores proporcionan tres puntos sobre la circunferencia que permiten dibujar el triángulo ABC.




Como los tres arcos deben medir 360º, el otro arco medirá:

360º - (128º + 83º) = 149º

b) Para calcular la medida de los ángulos del triángulo tenemos en cuenta que los triángulos OBC, OCA y OAB son isósceles.

Los ángulos en el vértice A miden 48,5º y 15,5º; es decir, el ángulo A tiene una amplitud de 64º.

Los ángulos en el vértice B miden 26º y 15,5º; es decir, el ángulo B tiene una amplitud de 41,5º.

Los ángulos en el vértice C miden 48,5º y 26º; es decir, el ángulo C tiene una amplitud de 74,5º.

Para determinar la medida de los lados del triángulo utilizamos el teorema del coseno:

$a^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 128º \quad \Rightarrow \quad a^2 = 51{,}70 \quad \Rightarrow \quad a = 7{,}19$ cm.

$b^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 83º \quad \Rightarrow \quad b^2 = 28{,}10 \quad \Rightarrow \quad b = 5{,}30$ cm.

$c^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 149º \quad \Rightarrow \quad c^2 = 59{,}43 \quad \Rightarrow \quad c = 7{,}71$ cm.

c) Para hallar el área del triángulo utilizamos la fórmula de Herón, siendo el semiperímetro:

$$p = \frac{7{,}19 + 5{,}30 + 7{,}71}{2} = 10{,}1$$

El área vale:

$$Área = \sqrt{10{,}1 \cdot (10{,}1 - 7{,}19) \cdot (10{,}1 - 5{,}30) \cdot (10{,}1 - 7{,}71)} \quad \Rightarrow \quad Área = 18{,}36\ cm^2.$$

Obtenemos el mismo resultado con la expresión:

$$Área = \frac{1}{2} \cdot 5{,}30 \cdot 7{,}71 \cdot sen\ 64º \quad \Rightarrow \quad Área = 18{,}36\ cm^2.$$

## ACTIVIDADES-PÁG. 111

En esta actividad no damos la solución al uso ya que sobre el número π existe muchísima información tanto bibliográfica como en Internet. Existen monografías dedicadas a este número como las que aparecen en la bibliografía que sigue.

ESTEBAN, M.; IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1998) *Trigonometría.* Editorial Síntesis. Madrid.

NAVARRO, Joaquín. (2010) *Los secretos del número π.* RBA. Barcelona

POSAMENTIER, Alfred. (2006) *La proporción trascendental*. *La historia de π, el número más misterioso del mundo.* Ariel. Barcelona.

TORIJA, R. (1999). Arquímedes. Alrededor del círculo. Nivela. Madrid.

La página web dedicada a π es http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm

La página web realizada por los amigos de π puedes encontrarla en http://webs.adam.es/rllorens/pifriend.htm