Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Razones trigonométricas del ángulo doble (página 102)

En el vídeo se muestran las demostraciones de las fórmulas que permiten calcular el coseno y la tangente del ángulo doble.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital estas demostraciones paso a paso o para que los alumnos puedan repasarlas más tarde.

Teorema del seno (página 107)

En el archivo de GeoGebra se puede comprobar que las longitudes de los lados y los senos de los ángulos opuestos son proporcionales y que la razón de proporcionalidad coincide con la longitud del diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital las relaciones entre los lados y las razones o para que los alumnos puedan deducir estas relaciones por sí mismos.

Teorema del coseno (página 108)

En el archivo de GeoGebra se puede comprobar que la relación entre los lados y el coseno de uno de los ángulos de un triángulo cualquiera.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital estas relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo o para que los alumnos puedan deducir estas relaciones por sí mismos.

Sistema de ecuaciones trigonométricas (página 115)

En el vídeo se muestra paso a paso cómo resolver el sistema de ecuaciones trigonométricas propuesto en el ejercicio resuelto.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital cómo debe resolverse este tipo de ejercicio o para que los alumnos puedan repasar el procedimiento más tarde.

Actividades (páginas 101/112)

1 **Calcula las razones trigonométricas de un ángulo de 15°, conociendo las de uno de 45° y las de otro de 30°.**

$$\text{sen } 15° = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4},\quad \cos 15° = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4},$$

$$\text{tg } 15° = 2-\sqrt{3}$$

2 **Sabiendo que $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; que el ángulo α pertenece al 3.^{er} cuadrante, que $\text{sen } \beta = \frac{3}{5}$ y que β pertenece al 2.° cuadrante, calcula $\text{sen } (\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha-\beta)$.**

$$\text{sen } (\alpha+\beta) = \frac{33}{65},\quad \cos(\alpha-\beta) = -\frac{16}{65}$$

3 **Calcula el coseno y la tangente del ángulo de 75° utilizando las razones trigonométricas de 30° y 45°. Comprueba después el resultado utilizando una calculadora científica.**

$$\cos 75° = \cos(30°+45°) = \cos 45°\cdot\cos 30° - \text{sen } 45°\cdot\text{sen } 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{tg } 75° = \text{tg }(30°+45°) = \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } 30°}{1-\text{tg } 45°\cdot\text{tg } 30°} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= 2+\sqrt{3}$$

4 **Procediendo de forma análoga a como se halló $\text{tg }(\alpha+\beta)$, demuestra que: $\text{tg }(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg }\alpha - \text{tg }\beta}{1+\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta}$**

$$\text{tg }(\alpha-\beta) = \frac{\text{sen }(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{(\text{sen }\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\text{sen }\beta)}{(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\beta)}$$

Dividiendo todos los términos por $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, queda:

$$\text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{(\text{tg }\alpha - \text{tg }\beta)}{(1+\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta)}$$

5 **Conociendo las razones trigonométricas de $\pi/6$, calcula las de $\pi/12$.**

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},\quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

6 **Si $\text{sen }\alpha = -\frac{12}{13}$ y $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, calcula las razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad de α.**

$$\text{sen } 2\alpha = \frac{120}{169},\quad \cos 2\alpha = -\frac{119}{169},\quad \text{tg } 2\alpha = -\frac{120}{119},$$

$$\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3\sqrt{13}}{13},\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{2\sqrt{13}}{13},\ \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

7 **Demuestra.**

a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$ ***b)*** $\text{tg } 2\alpha = \frac{2\,\text{tg }\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

a) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\alpha =$
$= \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

b) $\text{tg } 2\alpha = \frac{\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\,\text{sen }\alpha\cdot\cos\alpha}{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)}$

Dividiendo el denominador y numerador de la fracción entre $\cos^2\alpha$: $\text{tg } 2\alpha = \frac{2\,\text{tg }\alpha}{(1-\text{tg}^2\alpha)}$

8 **Demuestra la igualdad: $\frac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\text{sen } 3x - \text{sen } x} = \frac{2}{1-\text{tg}^2 x}$**

$$\frac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\text{sen } 3x - \text{sen } x} = \frac{2\text{sen }[(3x+x)/2]\cdot\cos[(3x-x)/2]}{2\cos[(3x+x)/2]\cdot\text{sen }[(3x-x)/2]} =$$

$$= \frac{2\text{sen } 2x\cdot\cos x}{2\cos 2x\cdot\text{sen } x} = \frac{\text{tg } 2x}{\text{tg } x} = \frac{2\,\text{tg } x}{1-\text{tg}^2 x}\cdot\frac{1}{\text{tg } x} = \frac{2}{1-\text{tg}^2 x}$$

9 **Calcula.**

a) $\frac{\cos 105° - \cos 15°}{\cos 105° + \cos 15°}$ ***c)*** $\frac{\text{sen } 100° + \text{sen } 40°}{\cos 100° - \cos 40°}$

b) $\frac{\text{sen } 70° + \text{sen } 50°}{\cos 70° + \cos 50°}$ ***d)*** $\cos 52{,}5°\cdot\cos 7{,}5°$

a) $\frac{\cos 105° - \cos 15°}{\cos 105° + \cos 15°} =$

$$= \frac{-2\text{sen }[(105°+15°)/2]\cdot\text{sen }[(105°-15°)/2]}{2\cos[(105°+15°)/2]\cdot\cos[(105°-15°)/2]}$$

$$= \frac{-2\text{sen } 60°\cdot\text{sen } 45°}{2\cos 60°\cdot\cos 45°} = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$$

b) $\frac{\text{sen } 70° + \text{sen } 40°}{\cos 100° - \cos 40°} =$

$$= \frac{2\text{sen }[(70°+50°)/2]\cdot\cos[(70°-50°)/2]}{2\cos[(70°+50°)/2]\cdot\cos[(70°-50°)/2]} =$$

$$= \frac{2\text{sen } 60°\cdot\cos 10°}{2\cos 60°\cdot\cos 10°} = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$$

c) $\dfrac{\text{sen } 100° + \text{sen } 50°}{\cos 70° + \cos 15°} =$

$= \dfrac{2\text{sen } [(100° + 40°)/2] \cdot \cos [(100° - 40°)/2]}{(-2\text{sen } [(100° + 40°)/2] \cdot \text{sen } [(100° - 40°)/2])} =$

$= \dfrac{2\text{sen } 70° \cdot \cos 30°}{-2\text{sen } 70° \cdot \text{sen } 30°} = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$

d) $\cos 52{,}5° \cdot \cos 7{,}5° = \cos \dfrac{105°}{2} \cdot \cos \dfrac{15°}{2} =$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 60° + \cos 45°) = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{4}$

10 Demuestra.

a) **La fórmula de la conversión de la diferencia de senos en productos.**

b) **La fórmula de la conversión de la diferencia de cosenos en productos.**

a) Partiendo de las ecuaciones del seno de la suma y de la diferencia:

$$\text{sen } (\alpha + \beta) - \text{sen } (\alpha - \beta) = 2 \text{ sen } \beta \cdot \cos \alpha$$

Llamando $\alpha + \beta = A$ y $\alpha - \beta = B$, tenemos que $\alpha = \dfrac{A + B}{2}$ y $\beta = \dfrac{A - B}{2}$, con lo que:

$$\text{sen } A - \text{sen } B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cdot \text{sen } \frac{A - B}{2}$$

b) Partiendo de las ecuaciones del coseno de la suma y de la diferencia:

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) = -2 \text{ sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta$$

Llamando $\alpha + \beta = A$ y $\alpha - \beta = B$, tenemos que $\alpha = \dfrac{A + B}{2}$ y $\beta = \dfrac{A - B}{2}$, con lo que:

$$\cos A - \cos B = -2 \text{ sen } \frac{A + B}{2} \cdot \text{sen } \frac{A - B}{2}$$

11 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) **$\text{sen } 3x = 1$** ***b)*** **$\text{sen } x = \cos x$** ***c)*** **$\text{cosec } x = -2$**

a) $\text{sen } 3x = 1 \Rightarrow 3x = 90° + k \cdot 360° \Rightarrow x = 30° + k \cdot 120°$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $\text{sen } x = \cos x \Rightarrow \text{tg } x = 1 \Rightarrow x = 45° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$

c) $\dfrac{1}{\text{sen } x} = -2 \Rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 210° + k \cdot 360° \\ x = 330° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

12 Resuelve $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$

$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$

$\cos x = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ No puede ser} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = k \cdot 360°, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

13 Resuelve $\text{sen } x + \cos x = 1$

$\text{sen } x + \cos x = 1$

$\text{sen } x + \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1 \Rightarrow \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = 1 - \text{sen } x$

$\Rightarrow 1 - \text{sen}^2 x = 1 - 2 \text{ sen } x + \text{sen}^2 x \Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x - 2 \text{ sen } x = 0$

$\Rightarrow \text{sen } x (\text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0 \text{ o sen } x = 1$

$\Rightarrow x = k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}, x = 180° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z},$

$x = 90° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

De estas soluciones solo son válidas para que se cumpla la ecuación inicial:

$$x = k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}, x = 90° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$$

14 Resuelve $\text{tg } x \cdot \sec x = \sqrt{2}$

$\text{tg } x \cdot \sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \text{sen } x = \sqrt{2} \cos^2 x$

$\text{sen } x - \sqrt{2}(1 - \text{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow \sqrt{2}\text{sen}^2 x + \text{sen } x - \sqrt{2} = 0$

$\Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{sen } x = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} \text{ No es posible.} \end{cases}$

Por tanto:

$$\begin{cases} x = 45° + k \cdot 360° \\ x = 135° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

15 Los lados de un triángulo son $a = 2$ cm, $b = 7$ cm y $c = 8$ cm. Calcula sus ángulos.

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{49 + 64 - 4}{2 \cdot 7 \cdot 8} = \dfrac{109}{112}$
  $\Rightarrow A = 13° \ 17' 28{,}24'' = 13{,}3°$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \dfrac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} = \dfrac{19}{32}$
  $\Rightarrow B = 53° \ 34' 35{,}13'' = 53{,}6°$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \dfrac{4 + 49 - 64}{2 \cdot 2 \cdot 7} = -\dfrac{11}{28}$
  $\Rightarrow C = 113° \ 7' 56{,}63'' = 113{,}1°$

16 Los lados *a* y *b* de un triángulo miden, respectivamente, 7 cm y 5 cm, y el ángulo comprendido entre ambos, *C*, es de 45°. Calcula el valor del lado *c*.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow c^2 = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 45°$
$\Rightarrow c = 4{,}95$ cm

17 Dos lados de un paralelogramo miden 6 cm y 8 cm, y forman un ángulo de 100°. Calcula la longitud de sus diagonales.

- $d_1 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 100° \Rightarrow d_1 = 10{,}8$ cm
- $d_2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos 80° \Rightarrow d_2 = 9{,}1$ cm

18 Desde un punto, *A*, se divisan otros dos puntos, *B* y *C*, las visuales forman un ángulo de 52° 29'. Se sabe que *B* y *C* distan entre sí 450 m, y que *A* y *B* están separados por 500 m. Averigua la distancia que hay entre *A* y *C*.

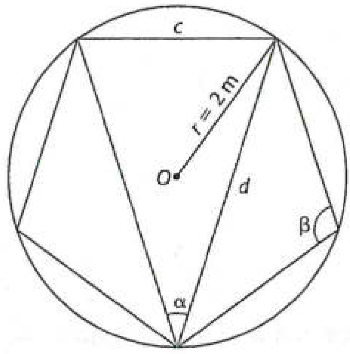
Aplicando el teorema del coseno se obtiene:

$$450^2 = 500^2 + x^2 - 1\,000x \cos 52° \ 29'$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos:

$$\begin{cases} x = 517{,}14 \text{ m} \\ x = 91{,}85 \text{ m} \end{cases}$$

19 Dado el pentágono regular de la siguiente figura, averigua: *c*, β, *d* y α.



- El ángulo central que abarca un lado mide 72°, por lo que:
  $c^2 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 72° \Rightarrow c = 2{,}35$ cm
- $\beta = 180° - 72° = 108°$
- $d^2 = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 144° \Rightarrow d = 3{,}80$ m
- El ángulo inscrito que abarca un lado mide la mitad del central, es decir, $\alpha = 36°$.

Ejercicios y problemas (páginas 116/120)

Identidades trigonométricas

1 **Si sen 40° = 0,6428 y sen 15° = 0,2588, ¿se puede deducir que sen 55° = 0,9008?**

No, porque sen 55° ≠ sen 40° + sen 15°

2 **Razona qué es mayor, sen 2α o 2sen α.**

Dado que sen 2α = 2 sen α · cos α, podemos observar las siguientes situaciones:

Si α ∈ 1.^er^ cuadrante, sen 2α < 2 sen α, ya que cos α es positivo y menor que 1.

Si α ∈ 2.° cuadrante, sen 2α < 2 sen α, ya que cos α < 0.

Si α ∈ 3.^er^ cuadrante, sen 2α > 2 sen α, ya que sen α < 0 y cos α < 0, luego el producto sen α · cos α > 0.

Si α ∈ 4.° cuadrante, sen 2α > 2 sen α, ya que 1 > cos α > 0 al multiplicar por sen α < 0 da un resultado menor en valor absoluto y, como es negativo, sen 2α es mayor que 2 sen α.

También puede utilizarse la representación geométrica.

3 **Conociendo las razones trigonométricas de $\frac{\pi}{4}$, calcula las de $\frac{\pi}{8}$.**

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

4 **El seno de un ángulo del segundo cuadrante vale 3/5. Calcula las razones trigonométricas de su ángulo doble.**

$$\text{Si sen }\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{4}{5}\text{ y tg }\alpha=-\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}2\alpha=-\frac{24}{25},\ \cos 2\alpha=\frac{7}{25},\ \operatorname{tg}2\alpha=-\frac{24}{7}$$

5 **Sin utilizar la calculadora, halla el valor de:**

a) **sen 105°** ***b)*** **cos 165°** ***c)*** **tg 285°**

a) $\operatorname{sen}105°=\operatorname{sen}(45°+60°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$

$=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}=\operatorname{sen}75°$

b) $\cos 165°=-\operatorname{sen}105°=\frac{-\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

c) $\operatorname{tg}285°=-\operatorname{tg}75°=\operatorname{tg}105°=\operatorname{tg}(45+60)=-2-\sqrt{3}$

6 **Calcula tg α si tg 2α = $\frac{2}{3}$ y α pertenece al tercer cuadrante.**

Aplicaremos: $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

Será necesario, en primer lugar, calcular cos 2α, dado que $1+\operatorname{tg}^2 2\alpha=1/\cos^2 2\alpha$, se obtiene:

$$\cos 2\alpha=-3/\sqrt{13}$$

y sustituyendo:

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{1+(3/\sqrt{13})}{1-(3/\sqrt{13})}}=0{,}3028$$

7 **Si α es un ángulo del que se conoce que π/2 < α < π, y tg α = −10, calcula sen (π + α), cos (π + α) y tg (π + α).**

sen (π + α) = −0,995, cos (π + α) = 0,0995,
tg (π + α) = −10

8 **Sabiendo que sen α = 3/4 , π/2 < α < π, y cos β = −1/3, π/2 < β < π, averigua:**

a) **sen 2α, cos 2α y tg 2α**

b) **sen (α + β), cos (α + β) y tg (α + β)**

c) **sen (α /2) y cos 2 β**

a) sen 2α = −0,992, cos 2α = −1/8, tg 2α = 7,937

b) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{-3-2\sqrt{14}}{12}$, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{7}-6\sqrt{2}}{12}$,
tg (α + β) = 1,8

c) sen (α/2) = 0,91, cos 2β = −7/9

9 **Sabiendo que dos ángulos son agudos y que sus tangentes son 3 y 0,75, respectivamente, calcula el seno de su suma, el coseno de su diferencia y la tangente de su semisuma.**

sen (α + β) = 0,95
cos (α − β) = 0,82
tg ((α + β)/2) = 1,39

10 **Sabemos que tg α = 14/5, α < π, y que sen β = −2/7, π < β < 3π/2. Averigua:**

a) **sen 2α, cos 2α y tg 2α**

b) **sen (β/2), cos (β/2) y tg (β/2)**

c) **sen (α + β), cos (α − β) y tg (2α + β/2)**

a) sen 2α = 0,63, cos 2α = −0,77, tg 2α = −0,82

b) sen (β/2) = 0,99, cos (β/2) = −0,14,
tg (β/2) = −6,85

c) sen (α + β) = − 0,99, cos (α − β) = −0,59,
tg (2α + β/2) = 1,66

11 **Si cos *a* = 3/5 y *a* es un ángulo del cuarto cuadrante y sen *b* = 4/5 y *b* es un ángulo del segundo cuadrante, calcula:**

a) $\cos\left(\frac{a}{2}+90°\right)$ ***d)*** $\operatorname{sen}(a-b)$ ***f)*** $\cos\left(\frac{a}{2}\right)$

b) $\operatorname{sen}(2a+2b)$ ***e)*** $\operatorname{tg}2a$ ***h)*** $\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)$

c) $\operatorname{tg}(180°-b)$ ***f)*** $\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}-2b\right)$ ***i)*** $\operatorname{tg}3a$

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}=\sqrt{\frac{1-3/5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\cos\left(\frac{a}{2}+90°\right)=\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\cos 90°-\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}90°=$$

$$=-\operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\cdot 1=\frac{-1}{\sqrt{5}}$$

b) cos *a* = 3/5 ⇒ sen *a* = − 4/5

sen 2*a* = −24/25 y cos 2*a* = −7/25

sen *b* = 4/5 ⇒ cos *b* = −3/5

sen 2*b* = −24/25 y cos 2*b* = −7/25

sen (2*a* + 2*b*) = sen 2*a* · cos 2*b* + sen 2*b* · cos 2*a* =

$$=\frac{-24}{25}\cdot\frac{-7}{25}+\frac{-24}{25}\cdot\frac{-7}{25}=0{,}54$$

c) $\operatorname{tg}b=\frac{\operatorname{sen}b}{\cos b}=\frac{-4}{3}$

$$\operatorname{tg}(180°-b)=\frac{\operatorname{tg}180°-\operatorname{tg}b}{1+\operatorname{tg}180°\cdot\operatorname{tg}b}=\frac{0+\frac{4}{3}}{1+0\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)}=\frac{4}{3}$$

d) $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a\cdot\cos b-\operatorname{sen} b\cdot\cos a=$

$$=\frac{-4}{5}\cdot\frac{-3}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=0$$

e) $\operatorname{tg} 2a=\dfrac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}=\dfrac{24}{7}$

f) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{b}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\cos b}{1+\cos b}}=\sqrt{4}=2$

$$\operatorname{tg} 2b=\frac{24}{7}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}-2b\right)=\frac{2-24/7}{1+2\cdot 24/7}=\frac{-10}{55}$$

g) $\cos\left(\dfrac{a}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}=\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}$

h) Véase el apartado *f)*.

i) $\operatorname{tg} 3a=\operatorname{tg}(2a+a)=\dfrac{\operatorname{tg} 2a+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} 2a\cdot\operatorname{tg} a}=$

$$=\frac{\frac{24}{7}+\left(\frac{-4}{3}\right)}{1+\frac{27}{7}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{44}{117}$$

12 Comprueba que es rectángulo todo triángulo *ABC* que verifique lo siguiente:

$$\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} C=\cos B+\cos C$$

Es evidente, dado que si el triángulo es rectángulo en *A*, $\operatorname{sen} B=\cos C$ y $\operatorname{sen} C=\cos B$.

13 Demuestra que si $A+B=\dfrac{\pi}{2}$, se cumple que:

$$(\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B)\cdot(\cos A+\cos B)=1+\operatorname{sen} 2A$$

Si $A+B=\dfrac{\pi}{2}$, se cumple que $\operatorname{sen} B=\cos A$ y $\cos B=\operatorname{sen} A$.

Entonces:

$(\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B)\cdot(\cos A+\cos B)=$
$=\operatorname{sen} A\cos A+\operatorname{sen} B\cos A+\operatorname{sen} A\cos B+\operatorname{sen} B\cos B=$
$=\operatorname{sen} A\cos A+\cos A\cos A+\operatorname{sen} A\operatorname{sen} A+\cos A\operatorname{sen} A=$
$=2\operatorname{sen} A\cos A+\cos^2 A+\operatorname{sen}^2 A=\operatorname{sen} 2A+1$

Queda, entonces, demostrado.

14 Demuestra las siguientes igualdades.

a) $\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1-\cos^2 x}{4\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

b) $\dfrac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}=-\operatorname{tg} b$

c) $\dfrac{\cos a+(\cos 3a)/3}{\operatorname{sen} a-(\operatorname{sen} 3a)/3}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^3 a}$

a) $\dfrac{1-\cos^2 x}{4\cos^2\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{4\cdot\dfrac{1+\cos x}{2}}=\dfrac{\left[2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right]^2}{2(1+\cos x)}=$

$$=\frac{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}=$$

$$=\frac{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

b) $\dfrac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)}=$

$$=\frac{-2\operatorname{sen}\frac{a+b+a-b}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{a+b-a+b}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{a+b+a-b}{2}\cdot\cos\frac{a+b-a+b}{2}}=$$

$$=\frac{-\operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a\cdot\cos b}=-\operatorname{tg} b$$

c) $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

$\operatorname{sen} 3a=3\operatorname{sen} a-4\operatorname{sen}^3 a$

Sustituyendo:

$$\frac{\cos a+\frac{\cos 3a}{3}}{\operatorname{sen} a-\frac{\operatorname{sen} 3a}{3}}=\frac{\cos a+\frac{1}{3}(4\cos^3 a-3\cos a)}{\operatorname{sen} a-\frac{1}{3}(3\operatorname{sen} a-4\operatorname{sen}^3 a)}=$$

$$=\frac{\cos a+\frac{4}{3}\cos^3 a-\cos a}{\operatorname{sen} a-\operatorname{sen} a+\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3 a}=\frac{\frac{4}{3}\cos^3 a}{\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3 a}=\operatorname{cotg}^3 a=\frac{1}{\operatorname{tg}^3 a}$$

15 Simplifica $\dfrac{\operatorname{tg} 2a}{(1+\sec 2a)}-\dfrac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}-(\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b)$

Simplificamos la primera fracción:

$$\frac{\operatorname{tg} 2a}{1+\sec 2a}=\frac{\frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos 2a}}{1+\frac{1}{\cos 2a}}=\frac{\frac{\operatorname{sen} 2a}{\cos 2a}}{\frac{\cos 2a+1}{\cos 2a}}=$$

$$=\frac{2\operatorname{sen} a\cos a}{\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 a+\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a}=\frac{2\operatorname{sen} a\cos a}{2\cos^2 a}=\operatorname{tg} a$$

Simplificamos la segunda fracción:

$$\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}=\frac{\operatorname{sen} a\cos b-\operatorname{sen} b\cos a}{\cos a\cos b}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen} a\cos b}{\cos a\cos b}-\frac{\operatorname{sen} b\cos a}{\cos a\cos b}=\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b$$

Sustituimos estas expresiones en la expresión global:

$$\frac{\operatorname{tg} 2a}{1+\sec 2a}-\frac{\operatorname{sen}(a-b)}{\cos a\cdot\cos b}-(\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b)=$$

$=\operatorname{tg} a-(\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b)-(\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b)=$
$=\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b-\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b=-\operatorname{tg} a$

16 Comprueba que se verifican estas igualdades.

a) **$\operatorname{sen} 44°-\operatorname{sen} 22°=-2\cos 147°\cdot\operatorname{sen} 11°$**

b) **$\cos 70°-\cos 50°=2\operatorname{sen} 300°\cdot\operatorname{sen} 10°$**

c) **$\operatorname{sen} 75°-\cos 75°=2\cos 45°\cdot\operatorname{sen} 30°$**

a) $\operatorname{sen} 44°-\operatorname{sen} 22°=2\cos 33°\cdot\operatorname{sen} 11°=$
$=2(-\cos 147°)\cdot\operatorname{sen} 11°=-2\cos 147°\cdot\operatorname{sen} 11°$

b) $\cos 70°-\cos 50°=-2\operatorname{sen} 60°\cdot\operatorname{sen} 10°=$
$=-2(-\operatorname{sen} 300°)\cdot\operatorname{sen} 10°=2\operatorname{sen} 300°\cdot\operatorname{sen} 10°$

c) $\operatorname{sen} 75°-\cos 75°=\operatorname{sen} 75°-\operatorname{sen} 15°=$
$=2\cos 45°\operatorname{sen} 30°$

17 Transforma en productos las siguientes sumas.

a) **$\operatorname{sen} 100°+\operatorname{sen} 20°$**

b) **$\cos 100°-\cos 20°$**

c) **$\cos 70°+\cos 50°$**

a) $2\operatorname{sen} 60°\cdot\cos 40°$

b) $-2\operatorname{sen} 60°\cdot\operatorname{sen} 40°$

c) $2\cos 60°\cdot\cos 10°$

18 **Sin utilizar la calculadora, halla:**

a) $\dfrac{\text{sen } 40° + \text{sen } 20°}{\cos 40° + \cos 20°}$ ***c)*** $\cos 75° \cdot \cos 15°$

b) $\dfrac{\text{sen } 110° + \text{sen } 50°}{\cos 110° - \cos 50°}$ ***d)*** $\text{sen } 75° \cdot \cos 15°$

a) $\dfrac{\text{sen } 40° + \text{sen } 20°}{\cos 40° + \cos 20°} = \dfrac{2 \text{ sen } 30° \cdot \cos 10°}{2 \text{ sen } 30° \cdot \cos 10°} = \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{\text{sen } 110° + \text{sen } 50°}{\cos 110° - \cos 50°} = \dfrac{2 \text{ sen } 80° \cdot \cos 30°}{-2 \text{ sen } 80° \cdot \text{sen } 30°} =$

$= -\text{cotg } 30° = -\sqrt{3}$

c) $\cos 75° \cdot \cos 15° = \dfrac{\cos 90° + \cos 60°}{2} = \dfrac{1}{4}$

d) $\text{sen } 75° \cdot \cos 15° = \dfrac{\text{sen } 90° + \text{sen } 60°}{2} =$

$= \dfrac{1 + \sqrt{3}/2}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$

19 **Sin utilizar la calculadora, averigua el valor de las siguientes expresiones.**

a) $\dfrac{\text{sen } 105° + \text{sen } 15°}{\cos 105° - \cos 15°} \cdot \text{tg } 15°$

b) $(\text{sen } 75° \cdot \text{sen } 45°) \cdot (\cos 75° \cdot \cos 45°) \cdot (1 - \cos 15°)$

a) $\dfrac{\text{sen } 105° + \text{sen } 15°}{\cos 105° - \cos 15°} \cdot \text{tg } 15° =$

$= \dfrac{2 \text{ sen } 60° \cdot \cos 45°}{-2 \text{ sen } 60° \cdot \text{sen } 45°} \cdot \text{tg } (45° - 30°) =$

$= -\text{cotg } 45° \cdot \dfrac{\text{tg } 45° - \text{tg } 30°}{1 + \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°} =$

$= -1 \cdot \dfrac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} - 2$

b) $(\text{sen } 75° \cdot \text{sen } 45°) \cdot (\cos 75° \cdot \cos 45°) \cdot (1 - \cos 15°) =$

$= \dfrac{1}{2}(\text{sen } 120° + \text{sen } 30°) \cdot \dfrac{1}{2}(\cos 120° + \cos 30°) \cdot$

$\cdot (1 - \cos (45° - 30°)) =$

$= \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot$

$\cdot (1 - (\cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30°)) =$

$= \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(\dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\right) = \dfrac{1}{8} - \left(\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{32}\right)$

20 **Calcula la expresión de tg 3*a* en función de tg *a*. Aplícala para $a = 45°$.**

$$\text{tg } 3a = \text{tg } (2a + a) = \dfrac{\text{tg } 2a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } 2a \cdot \text{tg } a} = \dfrac{\dfrac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} + \text{tg } a}{1 - \dfrac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} \cdot \text{tg } a} =$$

$$= \dfrac{2 \text{ tg } a + \text{tg } a - \text{tg}^3 a}{1 - \text{tg}^2 a - 2 \text{ tg}^2 a} = \dfrac{3 \text{ tg } a - \text{tg}^3 a}{1 - 3 \text{ tg}^2 a}$$

$$\text{tg } 135° = \text{tg } (3 \cdot 45°) = \dfrac{3 \text{ tg } 45° - \text{tg}^3 45}{1 - 3 \text{ tg}^2 45} = \dfrac{3 - 1}{1 - 3} = -1$$

21 **Halla sen 2*x* si $\text{sen } x - \cos x = 1/3$**

Basta con elevar al cuadrado los dos miembros de la igualdad.

$(\text{sen } x - \cos x)^2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \text{sen}^2 x - 2 \text{ sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = \dfrac{1}{9}$

$(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) - \text{sen } 2x = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \text{sen } 2x = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$

Ecuaciones trigonométricas

22 **Resuelve.**

a) $\text{tg } x = \sqrt{3}$ ***d)*** $\text{sen } (x/2) = \sqrt{2}/2$

b) $\sec x = 2$ ***e)*** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

c) $\text{cotg } x = -1$ ***f)*** $\text{cosec } (x + \pi) = -\sqrt{2}$

a) $x = 60° + k \cdot 180°$ ***d)*** $\begin{cases} x = 90° + k \cdot 720° \\ x = 270° + k \cdot 720° \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 60° + k \cdot 360° \\ x = 300° + k \cdot 360° \end{cases}$ ***e)*** $x = 3\pi/2 + k \cdot 2\pi$

c) $x = 135° + k \cdot 180°$ ***f)*** $\begin{cases} x = \pi/4 + k \cdot 2\pi \\ x = 3\pi/4 + k \cdot 2\pi \end{cases}$

23 **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.**

a) $\cos 3x = \text{sen } 30°$ ***h)*** $\text{sen } x - \dfrac{1}{\text{sen } x} = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

b) $\cos (4x - \pi) = -1/2$ ***i)*** $\text{sen } x + 2 = 3 \cos 2x$

c) $\text{sen } 2x = \cos x$ ***j)*** $1 = \dfrac{\text{sen } 2x}{2} + \cos^2 x$

d) $2\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 1/2$ ***k)*** $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$

e) $\text{sen } x + \cos x = \sqrt{2}$ ***l)*** $\dfrac{\text{sen}^2 2x}{2} + \cos^2 x = 1$

f) $\cos x - \cos 3x = 0$ ***m)*** $6 \cos^2 x + \cos 2x = 5$

g) $\text{sen } x - \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ***n)*** $\cos x - \dfrac{2 \text{ tg } x}{1 + \text{tg}^2 x} = 0$

a) $\cos 3x = \text{sen } 30° \Rightarrow \cos 3x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 3x = 60° + k \cdot 360°$

$\Rightarrow 3x = 300° + k \cdot 360°$, es decir:

$$\begin{cases} x = 20° + k \cdot 120° \\ x = 100° + k \cdot 120° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos (4x - \pi) = -\dfrac{1}{2}$

El coseno de esta diferencia se puede escribir como:

$\cos 4x \cos \pi + \text{sen } 4x \text{ sen } \pi = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow -\cos 4x = -\dfrac{1}{2}$

Es decir:

$$\cos 4x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} 4x = 60° + k \cdot 360° \\ 4x = 300° + k \cdot 360° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por lo que las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{cases} x = 15° + k \cdot 90° \\ x = 75° + k \cdot 90° \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

c) Se sustituye sen 2*x* y se obtiene:

$$2 \text{ sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \text{ sen } x - 1) = 0$$

De lo que se deduce:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 90° + k \cdot 180°$$

$$2 \text{ sen } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 360° \\ x = 150° + k \cdot 360° \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

d) Reduciendo a común denominador se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$4 \text{ sen}^2 x + 2 \text{ sen } x - 1 = 0$$

Se resuelve y se obtiene:

$$\text{sen } x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 38{,}17° + k \cdot 360° \\ x = 141{,}83° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$\text{sen } x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1$, no hay solución.

e) Se eleva al cuadrado la ecuación y se obtiene:

$$1 + \text{sen } 2x = 2 \Rightarrow \text{sen } 2x = 1 \Rightarrow x = 45° + k \cdot 180°$$

Hay que verificar la solución, porque al elevar al cuadrado se obtiene una ecuación cuyas soluciones son válidas para $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, y se observa que es cierta si k es un número par, por lo tanto:

$$x = 45° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$$

f) Transformamos la suma de cosenos en producto:

$$-2 \text{ sen } 2x \cdot \text{sen } (-x) = 0 \Rightarrow 2 \text{ sen } 2x \cdot \text{sen } x = 0$$

De lo que se deduce:

$$\begin{cases} \text{sen } 2x = 0 \Rightarrow x = k \cdot 90° \\ \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Estos dos conjuntos de soluciones se pueden englobar como $x = k \cdot 90°, k \in \mathbb{Z}$

g) $\text{sen } x - \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Para resolver esta ecuación se puede elevar al cuadrado y solucionarla, teniendo en cuenta que aparece la expresión del seno del ángulo doble. Hay que remarcar la necesidad de comprobar las soluciones.

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \text{ sen } x \cos x = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \text{sen } 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{sen } 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 210° + k \cdot 360° \Rightarrow x = 105° + k \cdot 180° \\ 2x = 330° + k \cdot 360° \Rightarrow x = 165° + k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Debemos comprobar las soluciones:

$\text{sen } 105° - \cos 105° = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 105°$ es solución.

$\text{sen } 285° - \cos 285° = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = 105° + 180°$ no es solución.

$105° + 360°$, $\text{sen } 465° - \cos 465° = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

En general:

$x = 105 + k \cdot 360° \quad k \in \mathbb{Z}$ es solución.

Lo mismo ocurre con $165° + k \cdot 180°$: solo son soluciones aquellas que resultan de sumar a 165° giros completos, por lo que las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{cases} x = 105° + k \cdot 360° \\ x = 165° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

h) $\text{sen } x - \frac{1}{\text{sen } x} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$

Reduciendo a común denominador, resulta:

$$2\sqrt{3} \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 2\sqrt{3} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene:

$$\text{sen } x = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

- Si $\text{sen } x = -\frac{2}{\sqrt{3}} < -1$, x no tiene solución.
- Si $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tenemos las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} x = 60° + k \cdot 360° \\ x = 120° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

i) $\text{sen } x + 2 = 3 \cos 2x$

Se sustituye $\cos 2x$ y se expresa la ecuación en función de $\text{sen } x$ para conseguir una ecuación de segundo grado.

$\text{sen } x + 2 = 3 (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$

$\Rightarrow \text{sen } x + 2 = 3(1 - 2 \text{ sen}^2 x)$

$\Rightarrow 6 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

Las soluciones son:

- $\text{sen } x = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 19{,}47° + k \cdot 360° \\ x = 160{,}53° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$
- $\text{sen } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 210° + k \cdot 360° \\ x = 330° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

j) $1 = \frac{\text{sen } 2x}{2} + \cos^2 x$

Se sustituye $\text{sen } 2x$ y se obtiene:

$1 = \text{sen } x \cos x + \cos^2 x$

$\Rightarrow 1 - \cos^2 x - \text{sen } x \cdot \cos x = 0$

$\Rightarrow \text{sen}^2 x - \text{sen } x \cdot \cos x = 0$

$\Rightarrow \text{sen } x \, (\text{sen } x - \cos x) = 0$

De lo que se deduce:

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \text{sen } x = \cos x \end{cases}$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} x = k \cdot 180° \\ x = 45° + k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

k) $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$

Se sustituye $\cos 2x$, y se expresa la ecuación en función de $\cos x$:

$\cos^2 x - \text{sen}^2 x + 5 \cos x + 3 = 0$

$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 5 \cos x + 2 = 0$

Se resuelve la ecuación y se obtiene:

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 120° + k \cdot 360° \\ x = 240° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

La otra solución de la ecuación, $\cos x = -2$, es imposible.

l) $\frac{\text{sen}^2 2x}{2} + \cos^2 x = 1$

$4 \text{ sen}^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x = 2$

$\Rightarrow 4 \text{ sen}^2 x \cos^2 x + 2(1 - \text{sen}^2 x) = 2$

$\Rightarrow 4 \text{ sen}^2 x \cos^2 x - 2 \text{ sen}^2 x = 0$

$\Rightarrow 2 \text{ sen}^2 x \, (2 \cos^2 x - 1) = 0$

De esta igualdad se deduce:

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} x = k \cdot 180° \\ x = 45° + k \cdot 90° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

m) $6 \cos^2 x + \cos 2x = 5$

$\Rightarrow 6 \cos^2 x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 5$

$\Rightarrow 6 \cos^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - 1 = 5$

$\Rightarrow 8 \cos^2 x = 6 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 180° \\ x = 150° + k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

n) Si se expresa la tg x como $\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$, se obtiene:

$$\cos x - \frac{\dfrac{2 \text{ sen } x}{\cos x}}{1 + \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = 0 \Rightarrow \cos x - \frac{\dfrac{2 \text{ sen } x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 0$$

$$\Rightarrow \cos x - \frac{2 \text{ sen } x \cos^2 x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \cos x - 2 \text{ sen } x \cos x = 0$$

Sacando factor común:

$$\cos x (1 - 2 \text{ sen } x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 1 - 2 \text{ sen } x = 0 \end{cases}$$

La solución $\cos x = 0$ no es válida, pues entonces no existe tg x:

$$1 - 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 360° \\ x = 150° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

24 **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.**

a) $\begin{cases} \mathbf{5 \text{ sen } x + 15 \cos y = -1} \\ \mathbf{10 \text{ sen } x - 20 \cos y = 13} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{\text{sen}^2 \dfrac{x}{2} - \text{sen } y = \dfrac{1}{4}} \\ \mathbf{\cos x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{2 \cos 2x = \text{tg } y} \\ \mathbf{4 \text{ sen}^2 2x - 2 \text{ tg } y = 1} \end{cases}$

a) Al reducir el sistema se obtiene sen $x = 0{,}7$ y $\cos y = -0{,}3$, por lo tanto:

$$\begin{cases} x = 44{,}427° + k \cdot 360° \\ x = 135{,}573° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z} \text{ y}$$

$$\begin{cases} y = 107{,}458° + k \cdot 360° \\ y = 252{,}542° + k \cdot 360° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

b) Sustituyendo el seno del ángulo mitad en función del coseno y operando, se obtiene:

$$\begin{cases} 2 \cos x + 4 \cos y = 1 \\ -4 \cos x + 4 \text{ sen}^2 y = 3 \end{cases}$$

Dividiendo la segunda ecuación por 2 y sumando las dos, se obtiene:

$$2 \text{ sen}^2 y + 4 \text{ sen } y = \frac{5}{2} \Rightarrow 4 \text{ sen}^2 y + 8 \text{ sen } y - 5 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, se obtienen dos soluciones para el seno de y, 1/2 y $-5/2$, que por ser menor que -1, no puede ser solución. Por tanto:

$$\text{sen } y = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1 - 4 \text{ sen } y}{2} = -\frac{1}{2}$$

Las soluciones son:

$$\begin{cases} x = 120° + k \cdot 360° \\ x = 240° + k \cdot 360° \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ y } \begin{cases} y = 30° + k \cdot 360° \\ y = 150° + k \cdot 360° \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

c) Se sustituye tg y en la segunda ecuación:

$4 \text{ sen}^2 2x - 4 \cos 2x = 1 \Rightarrow 4(1 - \cos^2 2x) - 4 \cos 2x = 1$

Se ordena y se obtiene una ecuación de segundo grado: $4 \cos^2 2x + 4 \cos 2x - 3 = 0$.

Sus soluciones son $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$ y $\cos 2x = -\dfrac{3}{2}$ (solución no válida).

$$\text{Si } \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 30° + k \cdot 180° \\ x = 150° + k \cdot 180° \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Como $2 \cos 2x = \text{tg } y$, tenemos que: tg $y = 1$

$\Rightarrow y = 45° + k \cdot 180°$

Resolución de triángulos. Teoremas del seno y del coseno

25 **¿Es posible resolver un triángulo sabiendo que $a = 30$ cm, $A = 110°$ y $B = 80°$? ¿Por qué?**

No, porque $A + B > 180°$.

26 **Demuestra que el teorema del coseno equivale al teorema de Pitágoras cuando el triángulo es rectángulo.**

Suponemos el triángulo rectángulo en A, el teorema del coseno para el lado a:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90° = b^2 + c^2 \text{ (teorema de Pitágoras)}$$

27 **Resuelve los triángulos de los siguientes casos, ayudándote de su construcción gráfica:**

a) $a = 5$	$b = 4$	$c = 7$
b) $A = 45°$	$a = 8$	$b = 10$
c) $A = 35°$	$B = 48°$	$a = 11$
d) $A = 30°$	$B = 100°$	$C = 50°$
e) $A = 35°$	$B = 48°$	$c = 11$

a) Es un triángulo posible dado que la suma de dos cualesquiera de los lados es mayor que el otro lado.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow A = 44{,}42°$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow B = 34{,}05°$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C \Rightarrow C = 101{,}53°$$

b) $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow B = 62{,}11°$

$A + B + C = 180° \Rightarrow C = 72{,}89°$

$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 10{,}81$ cm

c) $A + B + C = 180° \Rightarrow C = 97°$

$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = 11{,}56$ cm

$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 15{,}44$ cm

d) Existen infinitos triángulos.

e) $A + B + C = 180° \Rightarrow C = 97°$

$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow a = 6{,}36$ cm

$\dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow b = 8{,}24$ cm

28 **Resuelve los siguientes triángulos.**

a) $a = 10$ cm	$b = 7$ cm	$c = 13$ cm
b) $a = 10$ cm	$b = 7$ cm	$B = 30°$
c) $a = 10$ cm	$b = 7$ cm	$C = 80°$
d) $a = 10$ cm	$B = 30°$	$C = 80°$

a) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow A = 49{,}58°$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow B = 32{,}20°$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C \Rightarrow C = 98{,}21°$

b) Primer triángulo: $\begin{cases} \dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow A = 45{,}58° \\ A + B + C = 180° \Rightarrow C = 104{,}42° \\ \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 13{,}56 \text{ cm} \end{cases}$

Segundo triángulo: $\begin{cases} \dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow A = 134{,}42° \\ A + B + C = 180° \Rightarrow C = 15{,}58° \\ \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 3{,}76 \text{ cm} \end{cases}$

c) $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C \Rightarrow c = 11{,}17$ cm

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow A = 61{,}84°$$

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow B = 38{,}16°$$

d) $A + B + C = 180° \Rightarrow A = 70°$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = 5{,}32 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \Rightarrow c = 10{,}48 \text{ cm}$$

29 **Calcula una cualquiera de las alturas de los triángulos resueltos en el ejercicio anterior y utilízala después para calcular su área.**

Para resolver este ejercicio hemos calculado la altura correspondiente al vértice A en todos los casos.

a) $\text{sen } B = \frac{h}{c} \Rightarrow h = 6{,}93 \Rightarrow$ Área $= 34{,}65$ cm^2

b) Primer triángulo: $h = 6{,}78$ cm $\Rightarrow$ Área $= 33{,}9$ cm^2

Segundo triángulo: $h = 1{,}88$ cm $\Rightarrow$ Área $= 9{,}4$ cm^2

c) $h = 6{,}89$ cm $\Rightarrow$ Área $= 34{,}45$ cm^2

d) $h = 5{,}24$ cm $\Rightarrow$ Área $= 26{,}2$ cm^2

30 **Calcula el área de cada uno de los triángulos siguientes, sabiendo:**

a) **$b = 30$ cm, $A = 50°$ y $B = 74°$**

b) **$a = 41$ cm, $C = 45°$, y $B = 75°$**

c) **$a = 18$ cm, $b = 15$ cm, $C = 19°\,42'$**

d) **$a = 6$ cm, $b = 12$ cm, $A = 17°\,30'$**

e) **$a = 33$ cm, $b = 24$ cm, $c = 20$ cm**

a) $c = \dfrac{30 \cdot \text{sen } 56°}{\text{sen } 74°}$

Área $= \dfrac{b}{2} \cdot c \cdot \text{sen } A = 15 \cdot \dfrac{30 \cdot \text{sen } 56°}{\text{sen } 74°} \cdot \text{sen } 50° =$
$= 297{,}30$ cm^2

b) $c = \dfrac{41 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 60°}$

Área $= \dfrac{a}{2} \cdot c \cdot \text{sen } B = \dfrac{41}{2} \cdot \dfrac{41 \cdot \text{sen } 45°}{\text{sen } 60°} \cdot \text{sen } 75° =$
$= 662{,}88$ cm^2

c) Área $= \dfrac{a}{2} \cdot b \cdot \text{sen } C = \dfrac{18}{2} \cdot 15 \cdot \text{sen } 19°\,42' = 45{,}71$ cm^2

d) Hay dos posibles triángulos:

- $B = 36°\,58'\,15{,}83''$, $C = 125°\,31'\,44{,}17''$, $c = 16{,}238$ cm

  Área $= \dfrac{b \cdot a \cdot \text{sen } C}{2} = 29{,}30$ cm^2

- $B = 143°\,1'\,44{,}17''$, $C = 19°\,28'\,15{,}83''$, $c = 6{,}651$ cm

  Área $= \dfrac{b \cdot a \cdot \text{sen } C}{2} = 12$ cm^2

e) Área $= \dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen } C}{2}$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$\text{sen } C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$, por tanto:

$\cos C = 0{,}79861$ y $\text{sen } C = 0{,}60185 \Rightarrow$ Área $= 283{,}33$ cm^2

31 **Uno de los ángulos de un rombo mide 75°, y su diagonal mayor, 10 cm. Calcula su perímetro.**

$10^2 = l^2 + l^2 - 2\,l^2 \cos 105° \Rightarrow l = 6{,}3$ cm

perímetro $= 25{,}2$ cm

32 **El ángulo entre los dos lados iguales de un triángulo isósceles es de 40° y el lado desigual tiene una longitud de 40 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los lados iguales del triángulo?**

Los ángulos iguales del triángulo miden 70° cada uno. Aplicando el teorema del seno, se obtiene lo siguiente:

$$l = \frac{40 \cdot \text{sen } 70°}{\text{sen } 40°} = 58{,}48 \text{ cm}$$

33 **El ángulo agudo de un rombo mide 25°. El lado mide 13 cm. Calcula el área del rombo.**

Aplicando el teorema del coseno, $D = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos 155°$ y $d^2 = 2 \cdot 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos 25°$ siendo D y d las dos diagonales del rombo.

Sacando factor común, se obtiene $D = \sqrt{2} \cdot 13\sqrt{1 - \cos 155°}$ y $d = \sqrt{2} \cdot 13\sqrt{1 - \cos 25°}$.

Podemos calcular el área: $A = \dfrac{d \cdot D}{2} = 71{,}42$ cm^2

34 **Los lados de un triángulo miden 8 cm, 11 cm y 13 cm, respectivamente. Calcula el valor del seno del ángulo más pequeño.**

El ángulo más pequeño es el opuesto al lado de longitud 8 cm. Aplicando el teorema del coseno, se obtiene lo siguiente:

$$8^2 = 11^2 + 13^2 - 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{11^2 + 13^2 - 8^2}{2 \cdot 11 \cdot 13}$$

Teniendo en cuenta que $\text{sen }\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, o utilizando la calculadora:

$$\text{sen }\alpha = 0{,}61$$

35 **Los tres lados de un triángulo miden 6 cm, 8 cm y 9 cm. Calcula sus ángulos y su área.**

Aplicando el teorema del coseno se pueden obtener los ángulos:

$$\alpha = 40{,}80°;\ \beta = 60{,}61°;\ \gamma = 78{,}59°$$

$$A = \frac{9 \cdot 8 \cdot \text{sen } 40{,}80°}{2} = 23{,}52 \text{ cm}^2$$

36 **Una araña ha tejido una tela octogonal de 7 cm de radio. Calcula el área que abarca la tela de araña.**

Lado tela de araña $= 5{,}36$ cm

Perímetro tela de araña $= 42{,}88$ cm

Apotema tela de araña $= 6{,}47$ cm

Área tela de araña $= 138{,}72$ cm^2

37 **Calcula el radio de las circunferencias inscrita y circunscrita de un pentágono regular de 5 dm de lado.**

$$\frac{R_c}{\text{sen } 54°} = \frac{5}{\text{sen } 72°} \Rightarrow R_c = 4{,}25 \text{ dm}$$

$$\text{tg } 36° = \frac{2{,}5}{R_i} \Rightarrow R_i = 3{,}44 \text{ dm}$$

38 **En un triángulo ABC, conocemos los ángulos, $A = 34{,}5°$, $B = 78°$ y la suma de los lados, $a + b = 43$ cm. Calcula cuánto miden los lados a y b.**

$$\frac{43 - b}{\text{sen } 34{,}5°} = \frac{b}{\text{sen } 78°} \Rightarrow b = 27{,}24 \text{ cm},\ a = 15{,}76 \text{ cm}$$

39 **En un triángulo ABC, conocemos los lados $a = 15$ cm, $b = 11$ cm y la suma de dos de sus ángulos $A + B = 104°$. Calcula cuánto miden los ángulos A y B.**

El ángulo C mide 76°. Aplicando el teorema del coseno podemos hallar $c = 16{,}315$. Luego se calcula A y B:

$$\text{sen } A = \frac{15 \cdot \text{sen } 76°}{c} \Rightarrow A = 63°\,8'\,23{,}36'' \text{ y } B = 40°\,51'\,36{,}64''$$

40 **En un triángulo ABC dados $A - B = 16°$, $a = 23$ cm y $b = 19$ cm. Calcula los ángulos del triángulo.**

Sabemos que $A = 16° + B$. Por el teorema del seno:

$$\frac{23}{\text{sen}\,(16° + B)} = \frac{19}{\text{sen}\,B}$$

$\Rightarrow 23 \cdot \text{sen}\,B = 19\,(\text{sen}\,16° \cdot \cos B + \text{sen}\,B \cdot \cos 16°)$

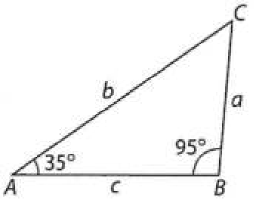
$\Rightarrow \text{sen}\,B\,(23 - 19 \cdot \cos 16°) = 19\,\text{sen}\,16° \cdot \cos B$

$$\Rightarrow \text{tg}\,B = \frac{19 \cdot \text{sen}\,16°}{23 - 19 \cdot \cos 16°} \Rightarrow B = 47°\,52'34{,}69''$$

Por tanto: $A = 16° + B = 63°\,52'34{,}69''$ y

$C = 180° - A - B = 68°\,14'50{,}62''$

41 **Los ángulos de la base de un triángulo valen 35° y 95°, y la suma de los otros dos lados es 38 cm. Calcula el perímetro y el área del triángulo.**



$$\frac{a}{\text{sen}\,35°} = \frac{b}{\text{sen}\,95°} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,35°} = \frac{38 - a}{\text{sen}\,95°}$$

$\Rightarrow a = 13{,}88$ cm $\Rightarrow b = 24{,}12$ cm

$C = 50°$

$$\frac{a}{\text{sen}\,35°} = \frac{c}{\text{sen}\,50°} \Rightarrow c = 18{,}54 \text{ cm}$$

Perímetro $= 56{,}54$ cm

$\text{sen}\,35° = h/c \Rightarrow h = 10{,}63$ cm $\Rightarrow$ Área $= 128{,}25$ cm^2

42 **Demuestra que en todo triángulo ABC, se cumple el teorema de la tangente, también conocido como teorema de Nepper:**

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{A-B}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{A+B}{2}}$$

(Indicación: debes usar el teorema del seno para escribir la relación entre a y b)

Por el teorema del seno: $a = \dfrac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B} \cdot b$. Sustituimos:

$$\frac{\dfrac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B} \cdot b - b}{\dfrac{\text{sen}\,A}{\text{sen}\,B} \cdot b + b} = \frac{\text{sen}\,A - \text{sen}\,B}{\text{sen}\,A + \text{sen}\,B} =$$

$$= \frac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\,\text{sen}\,\dfrac{A-B}{2}}{2\,\text{sen}\,\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{A-B}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{A+B}{2}}$$

Queda entonces demostrado.

43 **En los lados de un triángulo ABC se cumple que $b - a = 1$ y $c - b = 1$, y se tiene que $\cos A = 0{,}6$. Calcula a, $\text{tg}\left(\dfrac{B}{2}\right)$ y $\text{sen}\,2C$.**

Los lados son a, $b = a + 1$ y $c = a + 2$.

Planteamos el teorema del coseno y obtenemos esta ecuación una vez simplificada: $a^2 - 12a - 13 = 0 \Rightarrow a = 13$.

Para calcular B con el teorema del coseno obtenemos:

$$\cos B = 0{,}51 \Rightarrow \text{tg}\left(\frac{B}{2}\right) = 0{,}57$$

Para calcular C aplicamos el teorema del coseno y se obtiene:

$$\cos C = 0{,}38 \Rightarrow C = 67{,}38° \text{ y sen } 2C = 0{,}71$$

44 **De un triángulo se conocen los lados $b = 2{,}5$ cm y $c = 3{,}5$ cm y se sabe que el ángulo B es la mitad del ángulo C. Calcula a y los ángulos A, B y C.**

Si $C = 2B$, a partir del teorema del seno se obtiene que $\cos B = 0{,}7$. Luego:

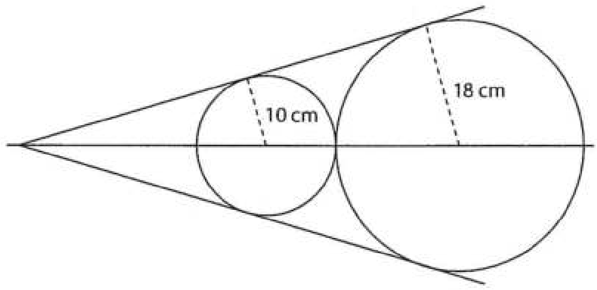
$$B = 45°\,34'22{,}79'',\ C = 91°\,8'45{,}57'' \text{ y } A = 43°\,16'51{,}64''$$

Aplicando el teorema del seno se obtiene: $a = 2{,}49$ cm

45 **En un círculo de 10 cm de radio, dibujamos una cuerda que une los extremos de un arco que abarca un ángulo de 80°. Averigua la longitud de la cuerda que se estudia.**

$$\frac{10}{\text{sen}\,50°} = \frac{x}{\text{sen}\,80°} \Rightarrow x = 12{,}86 \text{ m}$$

46 **Halla el ángulo que forman las dos tangentes comunes a dos circunferencias exteriores cuyos radios miden, respectivamente, 10 cm y 18 cm.**



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{18}{x + 38}$$

Por otra parte: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{10}{x + 10}$

Resolviendo el sistema obtenemos: $\begin{cases} x = 25 \text{ cm} \\ \alpha = 16{,}6° \end{cases}$

Por tanto, el ángulo que forman las dos tangentes es: $2\alpha = 33{,}2°$.

47 **Un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 6 cm, está inscrito en una circunferencia.**

a) **Calcula su perímetro.**

b) **Averigua su área.**

En primer lugar, calculamos uno de sus ángulos. Sea $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 6$ cm

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16 + 36 - 9}{48} \Rightarrow A = 26°\,23'3{,}59''$$

Por el teorema del seno, si r es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = 2r \Rightarrow r = 3{,}375 \text{ cm}$$

Por lo que el perímetro y el área de la circunferencia son, respectivamente: $P = 21{,}21$ cm y $A = 35{,}79$ cm^2.

48 **En una circunferencia de radio 10 cm, hay inscrito un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 10 cm también. Calcula el área de dicho triángulo.**

Sea $a = 10$ cm. Por el teorema del seno, si r es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, $\dfrac{a}{\text{sen}\,A} = 2r \Rightarrow A = 30°$

Los ángulos iguales medirán 75° cada uno. Uno de los lados iguales, b, medirá:

$$b = 20 \cdot \text{sen}\,75°$$

El área del triángulo es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,75°}{2} = \frac{10 \cdot 20 \cdot \text{sen}\,75° \cdot \text{sen}\,75°}{2}$$

$\Rightarrow A = 93{,}3$ cm^2

49 **Determina el área de un triángulo que está inscrito en una circunferencia de radio 3 cm, sabiendo que dos de los lados del triángulo miden 2 cm y 4 cm, respectivamente.**

Supongamos $a = 2$ cm y $b = 4$ cm. Como: $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = 2r$, siendo r el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, tenemos lo siguiente: sen $A = 1/3$ y sen $B = 2/3$

$A = 19°\ 28'\ 16{,}39''$ o $A = 160°\ 31'\ 43{,}6''$ y $B = 41°\ 48'\ 37{,}13''$ o $B = 138°\ 11'\ 22{,}8''$.

Hay pues, dos triángulos posibles:

Triángulo 1:

$A = 19°\ 28'\ 16{,}39''$, $B = 41°\ 48'\ 37{,}13''$ y $C = 118°\ 43'\ 6{,}48''$

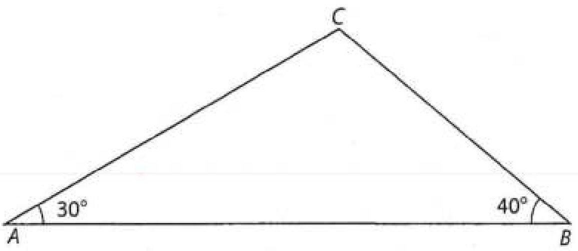
Triángulo 2:

$A = 19°\ 28'\ 16{,}39''$, $B = 138°\ 11'\ 22{,}8''$ y $C = 22°\ 20'\ 20{,}84''$

Como es área de un triángulo es $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{(a \cdot b \cdot \text{sen } C)}{2}$, sustituyendo se tiene:

- Triángulo 1: $A = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \text{sen } C}{2} = 3{,}51 \text{ cm}^2$
- Triángulo 2: $A = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot \text{sen } C}{2} = 1{,}52 \text{ cm}^2$

50 **Calcula el área del triángulo *ABC* representado en la siguiente figura si sabes que $AB = 25$ cm:**



Por el teorema del seno: $CB = \dfrac{25 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 110°}$

$A = \dfrac{25 \cdot CB \text{ sen } 40°}{2} = \dfrac{25 \cdot (25 \cdot \text{sen } 30°/\text{sen } 110) \cdot \text{sen } 40°}{2} =$

$= 106{,}88 \text{ cm}^2$

51 **Sabiendo que la longitud de las manecillas de un reloj de pared miden 10 y 12 centímetros, respectivamente.**

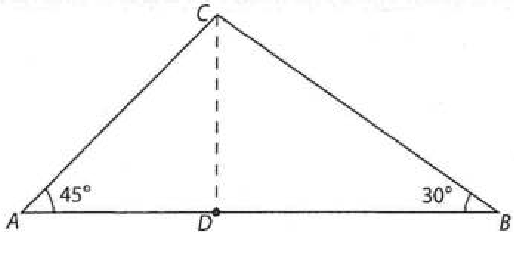
a) **¿Cuál es la distancia entre sus extremos cuando son las 16:00?**

b) **¿Qué área tiene el triángulo que determinan las manecillas a esta hora?**

a) Por el teorema del coseno, la distancia entre sus extremos es 19,08 cm aproximadamente. El ángulo que forman las manecillas es de 120°.

b) $A = \dfrac{12 \cdot 10 \cdot \text{sen } 120°}{2} = 51{,}96 \text{ cm}^2$

52 **El área de un triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, tiene una superficie de 50 m². El ángulo *A* de este triángulo es de 45° y el ángulo *B* es de 30°. Sea *D* el pie de la altura desde el vértice *C*, es decir, el punto del segmento *AB* en que se cumple que *CD* es perpendicular a *AB*. Calcula la longitud de los segmentos *CD*, *AD*, *BD*, *AB*, *BC* y *AC*.**



A partir de este sistema se pueden calcular las longitudes solicitadas:

$$\begin{cases} \dfrac{AB \cdot CD}{2} = 50 \\ \dfrac{AB}{\text{sen } 105°} = \dfrac{CB}{\text{sen } 45°} = \dfrac{AC}{\text{sen } 30°} \end{cases}$$

$\Rightarrow CD = AD = 6{,}05$ m; $BD = 10{,}48$ m; $AB = 16{,}53$ m; $BC = 12{,}10$ m; $AC = 8{,}56$ m.

53 **De un triángulo conocemos que $a + b = 11$ m; el ángulo $C = 30°$; y el área es 7 m². Calcula:**

a) **La longitud de cada uno de los lados del triángulo.**

b) **Los ángulos del triángulo.**

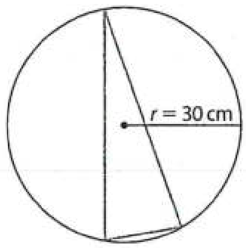
a) Planteamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} a + b = 11 \\ 7 = \dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen } 30°}{2} \end{cases} \Rightarrow b = 7, b = 4 \Rightarrow a = 4, a = 7$$

Es decir, los lados miden 4 m y 7 m, respectivamente.

b) Por el teorema del seno, los ángulos miden 29,49° y 120,51°, respectivamente.

54 **Calcula el área de un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia de 30 cm de radio, y cuyo lado desigual mide 20 cm.**



Para resolver este problema conviene consultar el apartado **Aplicación de los teoremas del seno y del coseno** de la sección **Ejercicios resueltos.**

Para calcular el ángulo desigual del triángulo isósceles, se calcula el ángulo que abarca un arco igual y uno de cuyos lados es un diámetro.

sen $\alpha = \dfrac{20}{60} \Rightarrow \alpha_1 = 19{,}47°\quad \alpha_2 = 160{,}53°$

Hay dos triángulos isósceles inscritos.

Los elementos de uno son:

- El ángulo que forman los lados iguales es, aproximadamente, 19,47°.
- La longitud de los lados iguales:

$$\text{sen } 9{,}735° = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 59{,}14 \text{ cm}$$

- La altura:

$\cos 9{,}735° = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = 58{,}29$ cm, y por tanto, el área es 582,9 cm², aproximadamente.

Los elementos del otro triángulo son:

- El ángulo que forman los ángulos iguales es, aproximadamente, 160,53°.
- La longitud de los lados iguales:

$$\text{sen } 80{,}265° = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 10{,}15 \text{ cm}$$

- La altura:

$\cos 80{,}265° = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = 1{,}72$ cm, y por tanto, el área es 17,2 cm².

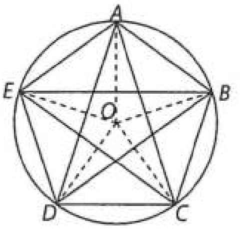
55 **Sobre una circunferencia de radio 1 m y centro en el punto *O*, consideramos los cinco vértices *A, B, C, D* y *E* de un pentágono regular. Calcula:**

a) **El ángulo que forma el radio que acaba en el vértice *A* con el lado *AB* y el ángulo que forman en el vértice *A* los dos lados que lo tienen como extremo.**

b) **La longitud de cada uno de los lados del pentágono.**

c) **La longitud de cualquiera de las diagonales.**

d) **El área del triángulo *EAB*.**



a) Como es un pentágono, el ángulo interno del arco *AB* es $360°/5 = 72°$. Por tanto, como el triángulo *ABO* es isósceles, el ángulo que forman el radio y el lado *AB* es:

$$\frac{180° - 72°}{2} = 54°$$

Y el ángulo que forman *AE* y *AB* es el doble, es decir, 108°.

b) Por el teorema del coseno: $l = \sqrt{2 - 2\cos 72°} = 1{,}176$ m

c) El ángulo central que abarca un lado mide 72°, por tanto el que abarca dos lados del pentágono 144°. Por el teorema del coseno: $d = \sqrt{2 - 2\cos 144°} = 1{,}902$ m

d) $A = \dfrac{EB \cdot AB \cdot \text{sen } 36°}{2} = 0{,}657 \text{ m}^2$

56 **El lado más largo de un paralelogramo mide 20 cm, su área es de 120 cm^2 y su ángulo menor, 30°. Determina:**

a) **El ángulo mayor del paralelogramo.**

b) **La longitud del lado menor.**

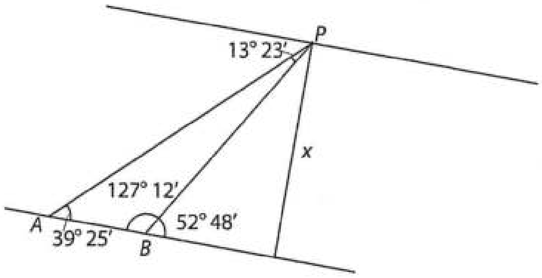
a) Los cuatro ángulos de un cuadrilátero suman 360°. Por tanto, el ángulo mayor es 150°.

b) El área es $A = b \cdot h$. Tomando como base el lado conocido: $120 = 20 \cdot c \cdot \text{sen } 30° \Rightarrow c = 12$ cm.

Aplicaciones de la trigonometría

57 **En un cierto lugar de su recorrido un río tiene sus orillas paralelas. En ese punto se desea medir su anchura. Para ello desde dos puntos *A* y *B* de una de sus orillas, que están separados 25 m, se observa un punto *P* de la otra orilla, situado río abajo. Si las visuales desde *A* y *B* a *P* forman con la orilla unos ángulos de 39° 25′ y 52° 48′ respectivamente, averigua la anchura del río en ese punto.**

Realizamos un dibujo para entender mejor el problema:



Como $AB = 25$ m, al aplicar el teorema del seno:

$$\frac{25}{\text{sen } 13° 23'} = \frac{AP}{\text{sen } 127° 12'}$$

Luego obtenemos *AP* y como $x = AP \cdot \text{sen } 39° 25' \Rightarrow x = 54{,}63$ m

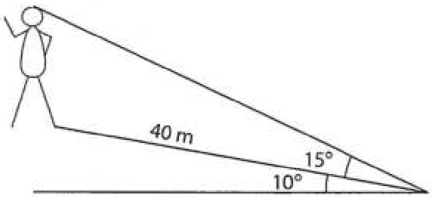
58 **Si el extremo superior de una estatua es observado desde un punto situado a ras del suelo y a cierta distancia, con un ángulo de elevación de 35°, ¿cuál será el ángulo de elevación desde el triple de distancia?**

$$\text{tg } 35° = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \text{ tg } 35°$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{h}{3x} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\text{tg } 35°}{3} \Rightarrow \alpha = 13{,}14°$$

El ángulo de elevación es de 13,14°.

59 **Una rampa de 40 m de longitud y 10° de inclinación conduce al pie de una estatua. Calcula su altura sabiendo que, en el inicio de la rampa, el ángulo de elevación del punto más alto de la estatua es de 15°.**



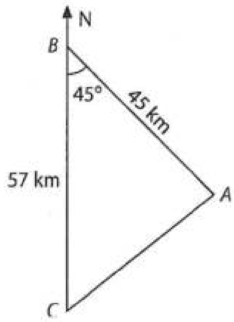
$$\frac{40 \text{ m}}{\text{sen } 65°} = \frac{h}{\text{sen } 15°} \Rightarrow h = 11{,}42 \text{ m}$$

La altura de la estatua es de 11,42 m.

60 **Una embarcación, *A*, se encuentra a 45 km al sureste de otro barco *B*, y una tercera embarcación, *C*, se halla a 57 km al sur de *B*.**

a) **¿Qué distancia separa a los barcos *A* y *C*?**

b) **¿Qué rumbo debería tomar el barco *C* para arribar al punto donde está situado *A*?**



a) $AC^2 = 57^2 + 45^2 - 2 \cdot 57 \cdot 45 \cdot \cos 45°$

$\Rightarrow AC = 40{,}58$ km

b) $\dfrac{AC}{\text{sen } 45°} = \dfrac{45}{\text{sen } C} \Rightarrow C = 51{,}64°$

El barco *C* debería tomar un rumbo 51,64° Noreste.

61 **Un golfista golpea la pelota de modo que su lanzamiento alcanza una longitud de 129 m. Si la distancia del golfista al hoyo es de 150 m y la pelota queda a una distancia de 40 m del hoyo, calcula el ángulo que forma la línea de unión del golfista con el hoyo y la dirección del lanzamiento.**

Aplicando el teorema del coseno:

$$40^2 = 129^2 + 150^2 - 2 \cdot 129 \cdot 150 \cdot \cos \alpha$$

El ángulo que forma la dirección del tiro y la visual entre el golfista y el hoyo es $\alpha = 14{,}06°$.

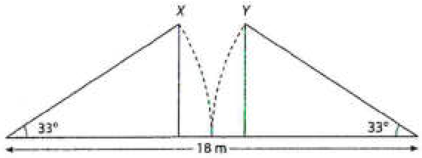
62 **Dos observadores que se hallan en la costa a 1 000 m de distancia el uno del otro contemplan una plataforma petrolífera situada mar adentro. Ambos dirigen sus respectivas visuales a la plataforma y miden el ángulo que forman estas con la línea imaginaria que los une. Si estos ángulos valen 63° y 83°, ¿cuál es la distancia que separa la plataforma de la costa?**

$$\frac{x}{\text{sen } 83°} = \frac{1\,000}{\text{sen } 34°} \Rightarrow x = 1\,774{,}96 \text{ m}$$

$$\text{sen } 63° = \frac{h}{1\,774{,}96} \Rightarrow h = 1\,581{,}5 \text{ m}$$

La distancia de la plataforma a tierra es de 1 581,5 m, aproximadamente.

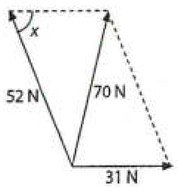
63 **Los puentes levadizos de la figura tienen la misma longitud. Cuando están elevados 33°, ¿qué distancia separa los puntos *X* e *Y*?**



$\cos 33° = X/9 \Rightarrow X = 7{,}55$ m $\qquad 18 - 15{,}10 = 2{,}90$ m

La distancia entre *X* e *Y* es 2,90 m.

64 **Averigua el ángulo que forman dos fuerzas de 52 N y 31 N, cuya resultante es de 70 N.**



Aplicando el teorema del coseno:

$70^2 = 31^2 + 52^2 - 2 \cdot 31 \cdot 52 \cos \alpha$

$\Rightarrow \alpha = 112° \, 31' 25''$

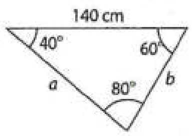
A partir de la figura y teniendo en cuenta este resultado, se obtiene que el ángulo que forman las dos fuerzas es su suplementario, 67° 28′ 35″.

65 **Alejandro quiere colgar una lámpara a una determinada distancia del techo de su habitación. Para ello, coge un cable, fija la lámpara y lo clava por sus extremos en dos puntos del techo que están separados 140 cm. Alejandro escoge estos puntos de modo que los ángulos entre el cable y el techo son de 40° y 60° en cada uno de los puntos de fijación.**

a) **¿Cuál es la longitud del cable?**

b) **¿A qué distancia del techo quedará la lámpara?**

a)



Aplicando el teorema del seno:

$$a + b = \frac{140}{\text{sen } 80°} (\text{sen } 60° + \text{sen } 40°) = 214{,}49$$

La longitud del cable será, por tanto, 214,49 cm

b) La lámpara estará a $d = \dfrac{140}{\text{sen } 80°} \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 40° =$

$= 79{,}14$ cm del techo.

66 **Hay que realizar un mapa de una cierta zona montañosa y *A*, *B* y *C* son las cimas de tres montañas de la misma altura. Las cimas *A* y *B* están bien determinadas y representadas en el mapa, mientras que la situación de *C* está por determinar.**

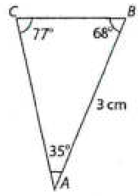
Subimos a lo alto de la cima *A* y medimos el ángulo entre la línea *AB* y la línea *AC*, que resulta de 68°. Subimos a *B* y el ángulo entre las líneas *BC* y *BA* es de 35°. En el mapa la distancia entre *A* y *B* es de 3 cm.

a) **Haz un diagrama de la situación, anotando el ángulo que forman en *C* las líneas *CA* y *CB*.**

b) **Halla, sobre el mapa, la distancia entre *A* y *C* y la distancia entre *B* y *C*.**

c) **Si la escala del mapa es 1: 50 000, calcula la distancia entre las cimas de las tres montañas.**

a)



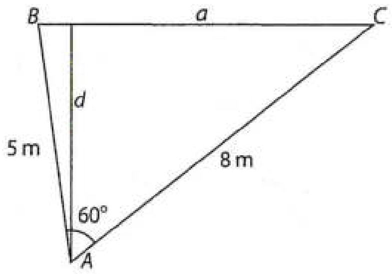
b) Aplicando el teorema del seno, se obtiene:

$$\frac{CB}{\text{sen } 35°} = \frac{3}{\text{sen } 77°} = \frac{CA}{\text{sen } 68°}$$

$\Rightarrow AC = 1{,}77$cm y $BC = 2{,}85$ cm

c) Puesto que 1 cm del mapa son 500 m en la realidad, $AC = 883$ m y $BC = 1427{,}36$ m.

67 **En el momento de marcar el último gol de Alemania en la final de la Eurocopa de Inglaterra, Bierhoff estaba situado a 5 metros de uno de los palos y a 8 metros del otro, y veía la portería bajo un ángulo de 60°. Calcula la distancia del jugador a la línea de gol.**



$c = 5$ m y $b = 8$ m en el dibujo

Aplicando el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos A$

$\Rightarrow a^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 49 \Rightarrow a = 7$

La anchura de la portería es, por tanto, 7 m.

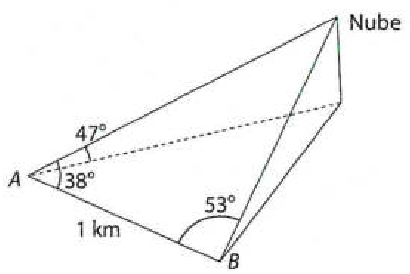
Entonces: $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow \dfrac{7}{\text{sen } 60°} = \dfrac{8}{\text{sen } B}$

$\Rightarrow \text{sen } B = \dfrac{8 \cdot \text{sen } 60°}{7}$

$\text{sen } B = \dfrac{d}{5} \Rightarrow d = 5 \cdot \text{sen } B = 5 \cdot \dfrac{8 \cdot \text{sen } 60°}{7} = 4{,}95$

La distancia del jugador a la portería es de 4,95 m.

68 **Para medir la altura de una nube se han hecho dos observaciones simultáneas desde los puntos *A* y *B*, ambos situados al nivel del mar y que distan entre sí 1 km. La inclinación de la visual desde *A* a la nube, respecto de la horizontal, es de 47°. Los ángulos que forman las visuales desde *A* y desde *B* con la recta *AB* son, respectivamente, 38° y 53°, tal como se indica en la figura. Averigua la altura a la que se encuentra situada dicha nube con respecto del nivel del mar.**



Sea *C* el ángulo el ángulo que forma la nube con *A* y *B*.

$$C = 180° - (38° + 53°) = 89°$$

Con este dato podemos calcular el lado *b:*

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{b}{\text{sen } B} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \text{sen } B}{\text{sen } C} = \frac{1\,000 \cdot \text{sen } 53°}{\text{sen } 89°}$$

Con este valor podemos calcular la altura de la nube, *h:*

$\text{sen } 47° = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen } 47° = \dfrac{1\,000 \cdot \text{sen } 53°}{\text{sen } 89°} \cdot \text{sen } 47° =$

$= 584{,}17$ m

69 **Dos amigos están cada uno de ellos en la terraza de su casa y observan un barco. Quieren determinar a qué distancia se encuentra, y para ello disponen cada uno de un teodolito. Llamemos *A* y *B* a los puntos en que se encuentran sus respectivos teodolitos.**

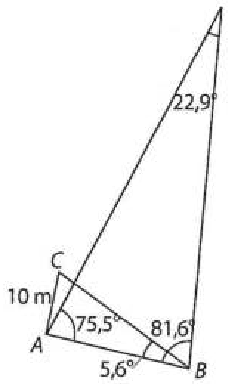
Desde el punto *A* miden una distancia de 10 m a un punto *C*, *AC* = 10 m, de manera que el triángulo *ACB* es rectángulo en *A*.

Desde el punto *B* resulta que el ángulo *B* de este triángulo es de 5,6°.

***a)* ¿Qué distancia hay entre los dos amigos?**

***b)* Calcula a qué distancia está el barco de cada uno de ellos si la recta que une *A* con el barco forma con la recta *AB* un ángulo de 75,5°. Y si la recta que une *B* con el barco forma con la recta *AB* un ángulo de 81,6°.**

***c)* ¿Podemos saber, sin hacer cálculos, quién está más cerca del barco? ¿Por qué?**



a) La distancia entre *A* y *B* es:

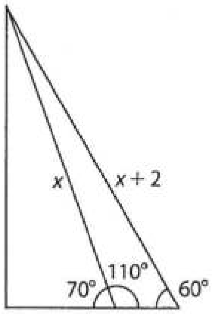
$$AB = \frac{10}{\text{tg } 5{,}6°} = 101{,}99 \text{ m}$$

b) A partir de la figura y, simplemente aplicando el teorema del seno, se obtiene:

259,28 m y 253,75 m, distancia del barco a *A* y a *B*, respectivamente.

c) Está más cerca de *B* porque el ángulo *A* es más pequeño.

70 **El circo ha llegado a una ciudad y hay que instalarlo. El especialista que lo monta no ha llegado y los operarios no saben cuánto cable necesitan. Hay uno que recuerda que, una vez tensado el cable desde el extremo del palo principal hasta un punto determinado del suelo, con el cual forma un ángulo de 60°, hacen falta 2 m más de cable que si forma con el suelo un ángulo de 70°. En total han de colocar 6 cables tensados formando con el suelo un ángulo de 60° cada uno de ellos. ¿Cuántos metros de cable necesitan?**



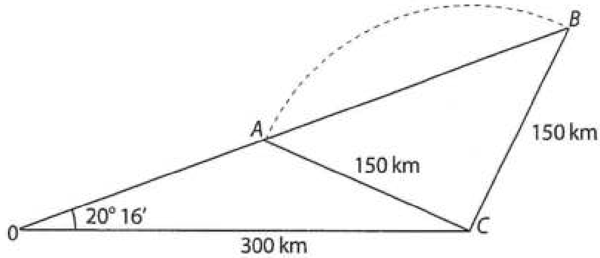
Por el teorema del seno:

$$\frac{x}{\text{sen } 60°} = \frac{x+2}{\text{sen } 110°} \Rightarrow x = 23{,}512 \text{ m}$$

En total, necesitan:

$6 \cdot (23{,}512 + 2) = 153{,}07$ m de cable

71 **Dos vías de ferrocarril se cortan formando un ángulo cuyo valor es de 20° 16′. Del cruce salen al mismo tiempo dos locomotoras, una por cada vía. Una de las locomotoras va a una velocidad de 100 km/h. ¿A qué velocidad debe circular la otra para que a las 3 horas estén separadas una distancia de 150 km?**



Planteamos el teorema del seno:

$$\frac{150}{\text{sen } 20° \, 16'} = \frac{300}{\text{sen } x} \Rightarrow \begin{cases} x = A = 43{,}851° \\ x = B = 136{,}149° \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C = 115{,}883° \\ C = 23{,}584° \end{cases}$$

Hay dos soluciones a la situación:

$$d = \frac{150 \cdot \text{sen } 115{,}883°}{\text{sen } 20° \, 16'} = 389{,}599 \text{ km}$$

$\Rightarrow$ 129,87 km/h aproximadamente

$$d = \frac{150 \cdot \text{sen } 23{,}584°}{\text{sen } 20° \, 16'} = 173{,}255 \text{ km}$$

$\Rightarrow$ 57,75 km/h aproximadamente

Evaluación (página 121)

1. Demuestra la identidad: tg (45° + α) − tg (45° − α) = 2tg2α

$$\text{tg}(45° + \alpha) - \text{tg}(45° - \alpha) = \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } \alpha} - \frac{\text{tg } 45° - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } 45° \cdot \text{tg } \alpha} = \frac{1 + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } \alpha} - \frac{1 - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \alpha} =$$

$$= \frac{1 + \text{tg}^2 \alpha + 2\text{tg } \alpha - 1 - \text{tg}^2 \alpha + 2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = 2 \cdot \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = 2 \cdot \text{tg } 2\alpha$$

2. Si $\text{cotg } \alpha = \frac{8}{15}$ determina el valor de las siguientes expresiones: *a)* $\dfrac{\frac{1}{3}\text{sen } \alpha - \frac{1}{2}\cos \alpha}{\frac{1}{17}(\sec \alpha + \text{tg } \alpha)}$ *b)* $\sec 2\alpha + \text{tg } 2\alpha$

a) $$\frac{\frac{1}{3}\text{sen } \alpha - \frac{1}{2}\cos \alpha}{\frac{1}{17}(\sec \alpha + \text{tg } \alpha)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{17} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{17}}{\frac{1}{17} \cdot \left(\frac{17}{8} + \frac{15}{8}\right)} = \frac{\frac{1}{17}}{\frac{4}{17}} = \frac{1}{4}$$

b) $$\sec 2\alpha + \text{tg } 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha} + \text{sen } 2\alpha \cdot \sec 2\alpha = \frac{1 + 2\text{sen } \alpha \cos \alpha}{\left(\frac{64}{289}\right) - \left(\frac{225}{289}\right)} = \frac{-23}{7}$$

3. **Demuestra que cuando $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ se verifica que: $\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\gamma = \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\gamma$**

$$\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \text{tg}\,\gamma = \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \text{tg}[180° - (\alpha+\beta)] = \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta + \frac{\text{tg}\,180° - \text{tg}(\alpha+\beta)}{1 + \text{tg}\,180 \cdot \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} =$$

$$= \text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta - \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta - \text{tg}^2\alpha \cdot \text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}^2\beta - \text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} =$$

$$= -\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = -\text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}(180° - \gamma) = \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\gamma$$

4. **Si en un triángulo rectángulo la hipotenusa vale $\frac{1}{\text{cosec}\,\alpha - \text{cotg}\,\alpha} + \frac{1}{\text{cosec}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha}$ y uno de los catetos vale $\frac{2 \cdot (1 + \cos 2\alpha)}{\text{sen}\,2\alpha}$, calcula el valor del otro cateto.**

$$\frac{1}{\text{cosec}\,\alpha - \text{cotg}\,\alpha} + \frac{1}{\text{cosec}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha} = \frac{\text{cosec}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha}{\text{cosec}^2\alpha - \text{cotg}^2\alpha} + \frac{\text{cosec}\,\alpha - \text{cotg}\,\alpha}{\text{cosec}^2\alpha - \text{cotg}^2\alpha} = 2\text{cosec}\,\alpha$$

$$\frac{2 \cdot (1 + \cos 2\alpha)}{\text{sen}\,2\alpha} = \frac{4\cos^2 2\alpha}{2\text{sen}\,\alpha \cos\alpha} = \frac{2\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$$

Por el teorema de Pitágoras se tiene que: $4\text{cosec}^2\alpha = x^2 + \frac{4\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4 - 4\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}} = \sqrt{4} = 2$

5. **Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas. *a)* $\cos\alpha = \text{sen}\,2\alpha$ *b)* $\cos 2\alpha + 3\text{sen}\,\alpha = 2$**

a) $\cos\alpha = \text{sen}\,2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha \Rightarrow 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha - \cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha(2\text{sen}\,\alpha - 1) = 0$

$\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos 2\alpha + 3\text{sen}\,\alpha = 2 \Rightarrow \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha + 3\text{sen}\,\alpha - 2 = 0 \Rightarrow -2\text{sen}^2\alpha + 3\text{sen}\,\alpha - 1 = 0$

$\text{sen}\,\alpha = +1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

6. **Resuelve el siguiente sistema: $\begin{cases} \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = \frac{3}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$**

$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = \frac{3}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{3}{2} \\ 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Dividiendo la primera ecuación entre la segunda, resulta: $\text{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sqrt{3}$

Como $1 + \text{tg}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sec^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow \sec\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = \pm 2 \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

En consecuencia: $\frac{\alpha+\beta}{2} = \arccos\left(\pm\frac{1}{2}\right)$ y $\frac{\alpha-\beta}{2} = \arccos\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

De donde: $\frac{\alpha+\beta}{2} = \pm 60° + 180°\,k$ y $\frac{\alpha-\beta}{2} = \pm 30° + 180°\,k \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = \pm 120° + 360°\,k \\ \alpha-\beta = \pm 60° + 360°\,k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 90° + 360°\,k; \pm 30° + 360°\,k \\ \beta = \pm 30° + 360°\,k; \pm 90° + 360°\,k \end{cases}$

7. **Resuelve el triángulo cuyos lados *b* y *c* miden 10 cm y 7 cm respectivamente, y cuyo ángulo A mide 60°.**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos 60° \Rightarrow a^2 = 100 + 49 - 70 \Rightarrow a = 8{,}89$ cm

$\text{sen}\,B = \frac{10 \cdot \text{sen}\,60°}{\sqrt{79}} \Rightarrow B = 76°\,59'\,45{,}92''$ $\quad$ $\text{sen}\,C = \frac{7 \cdot \text{sen}\,60°}{\sqrt{79}} \Rightarrow C = 43°\,0'\,14{,}08''$

8. **Desde la torre de un pueblo *A*, y bajo un ángulo de 60°, se ven las torres de dos pueblos *B* y *C*, distantes de *A* 20 km y 12 km respectivamente. Calcula la distancia que hay entre las torres de los pueblos *B* y *C*.**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cos\hat{A} = 20^2 + 12^2 - 2 \cdot 20 \cdot 12 \cdot \cos 60° = 304 \Rightarrow a = \sqrt{304} = 17{,}44$

La distancia entre las dos torres es 17,44 m