UNIDAD 5: Trigonometría II

ACTIVIDADES-PÁG. 112

1. La primera igualdad es verdadera y las otras dos son falsas. Para probarlo basta con utilizar la calculadora.

2. El área del círculo es $\pi \cdot 20^2 = 1256{,}64$ cm^2.

El lado y la apotema del heptágono regular de radio 20 cm miden 17,36 y 18,02 cm, respectivamente. Su área mide $\frac{7 \cdot 17{,}36 \cdot 18{,}02}{2} = 1094{,}90\ cm^2$.

El área entre el círculo y el hexágono será 1256,64 – 1094,90 = 161,74 cm^2.

3. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $tg\ 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k_1; \quad k_1 \in Z \\ 2x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k_2; \quad k_2 \in Z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 22{,}5^\circ + 180^\circ \cdot k_1;\ k_1 \in Z \\ x = 112{,}5^\circ + 180^\circ \cdot k_2;\ k_2 \in Z \end{cases}$

b) $\cos(x + \pi) = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2k_1\pi; \quad k_1 \in Z \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k_2\pi; \quad k_2 \in Z \end{cases}$

c) $2\ sen\ x = -1 \quad \Rightarrow \quad sen\ x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k_1; \quad k_1 \in Z \\ x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k_2; \quad k_2 \in Z \end{cases}$

4. El valor de la expresión es:

$$\frac{sen\ 210^\circ - sen\ 150^\circ}{\cos 210^\circ + \cos 150^\circ} = \frac{2 \cos 180^\circ \cdot sen\ 30^\circ}{2 \cos 180^\circ \cdot \cos 30^\circ} = tg\ 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ACTIVIDADES-PÁG. 125

1. Llamamos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

5 · (4B + 3N) = 4 · (3B + 5N) $\Rightarrow$ 20B + 15N = 12B + 20N $\Rightarrow$ 8B = 5N

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas de la pirámide es:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 14^2 + 15^2 = 1240$ naranjas.

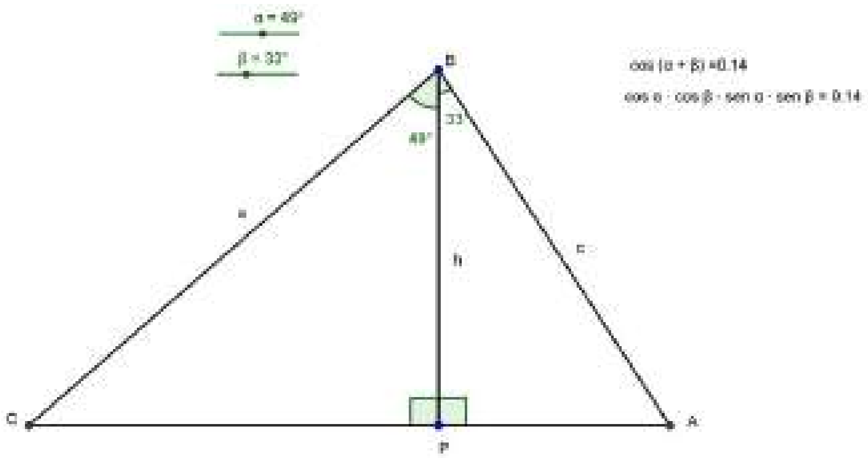
ACTIVIDADES-PÁG. 127

1. a) Procedemos como se explica en el texto y tecleamos los siguientes textos:

“cos (α + β) = “+cos(α + β)

“cos α · cos β – sen α · sen β = “+(cos(α)*cos(β)- sin(α)*sin(β))

y obtenemos un dibujo como el siguiente:

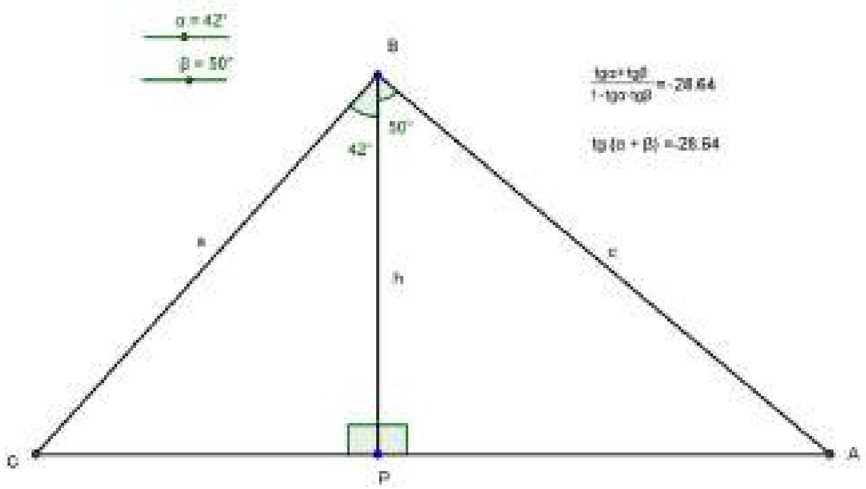


b) Procedemos como se explica en el texto y tecleamos los siguientes textos:

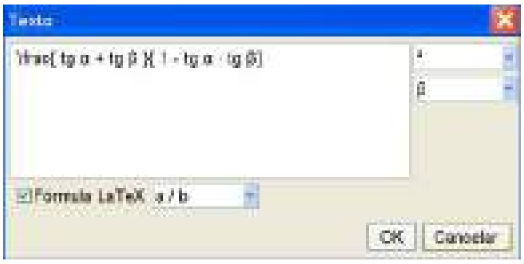
“tg (α + β) = “+tan(α + β)

“$\dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$ = “+((tan(α)+tan(β))/(1-tan(α)*tan(β)))

y obtenemos un dibujo como el siguiente:



Nota: Para escribir la expresión $\dfrac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$ utilizamos **Inserta Texto** y escribimos lo que muestra la imagen seleccionando en **Fórmula LaTex** la facción a/b.



2. Para la resolución de la ecuación propuesta seguimos las etapas.

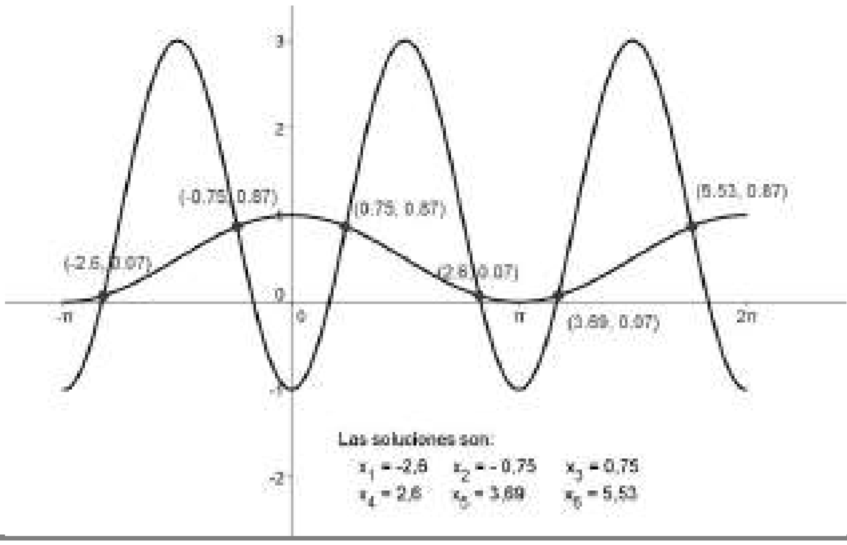
a) En el Menú contextual de los ejes coordenados cambiamos las unidades así como el valor de la distancia entre las marcas de graduación.

b) En el Campo de Entrada introducimos las funciones f(x) = $3 \cdot sen^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2 \cdot \cos x - 2$ y g(x) = $2 \cdot \cos(2x - \pi) + 1$ con el comando **Función** [$3 \cdot sen^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2 \cdot \cos x - 2$**, -π, π]** y **Función** [$2 \cdot \cos(2x - \pi) + 1$**, -π, π] y** observamos sus gráficas.

c) Para hallar las soluciones, con la herramienta **Intersección de dos objetos**, hacemos clic sucesivamente sobre ambas gráficas en las proximidades de los puntos de corte.

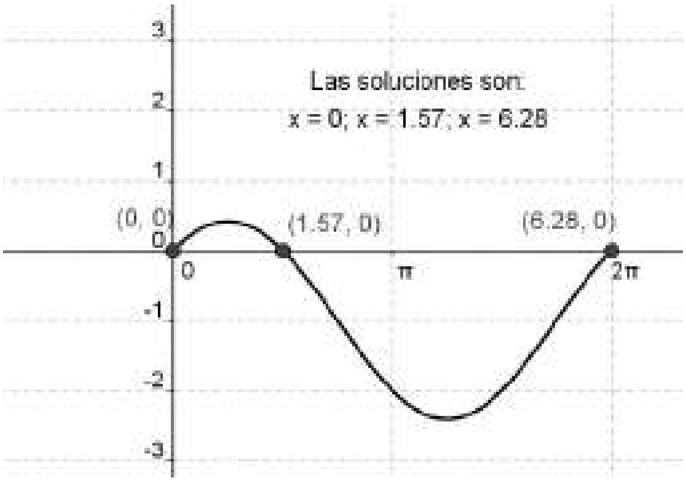
d) En el Menú contextual de los puntos hallados podemos visualizar sus coordenadas, de forma que las abscisas de estos son las soluciones buscadas.

e) Introducimos el texto que aparece en el dibujo.

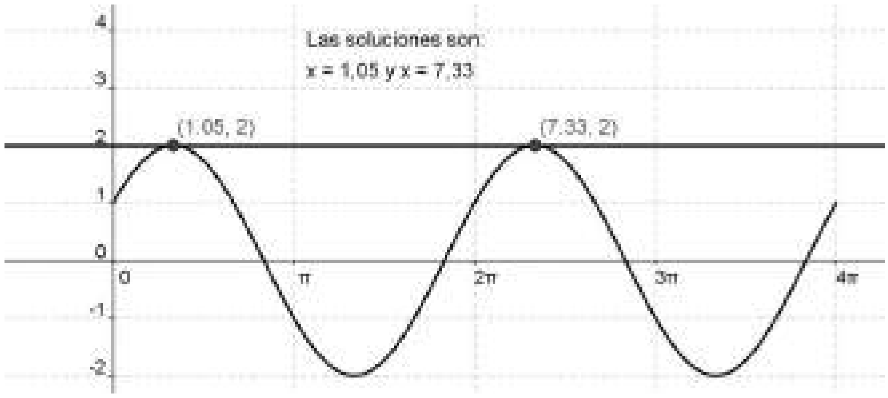


3. Procediendo como en el ejercicio anterior, obtenemos:

a) sen x + cos x = 1 en [0, 2π]



b) cos x + $\sqrt{3}$ sen x = 2 en [0, 4π]



ACTIVIDADES-PÁG. 128

1. Si $sen\ a = \frac{3}{5}$ y el ángulo a está en el segundo cuadrante, entonces $\cos\ a = -\frac{4}{5}\ y\ tg\ a = -\frac{3}{4}$.

Si $\cos\ b = \frac{4}{5}$ y el ángulo b pertenece al cuarto cuadrante, entonces $sen\ b = -\frac{3}{5}\ y\ tg\ b = -\frac{3}{4}$

Teniendo en cuenta los teoremas de adición, obtenemos:

a) sen (a + b) = $\frac{24}{25}$ b) cos (a - b) = - 1 c) tg (a + b) = $-\frac{24}{7}$

2. Teniendo en cuenta las formulas del ángulo doble y los teoremas de adición, obtenemos:

a) sen 90º = sen (2 · 45º) = 2 · sen 45º · cos 45º = 1

b) cos 90º = cos (2 · 45º) = $\cos^2$ 45º - sen^2 45º = 0

c) sen 120º = sen (2 · 60º) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) cos 120º = cos (2 · 60º) = $-\frac{1}{2}$

e) tg 120º = tg (2 · 60º) = $-\sqrt{3}$

f) sen 105º = sen (45º + 60) = $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

g) cos 105º = $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

h) tg 105º = $-\left(2+\sqrt{3}\right)$

3. Teniendo en cuenta que tg a = 1,5 y tg b = - 2,5 y los teoremas de adición, obtenemos:

a) tg (a + b) = - 0,2105

b) tg (a – b) = - 1,4545

c) tg (2a + b) = 0,98

En este último apartado hay que tener en cuenta que tg 2a = - 2,4.

4. Para ello es suficiente con utilizar los teoremas de adición para el seno, coseno y tangente estudiados en esta unidad.

5. Desarrollando y operando, obtenemos:
sen a · sen (b – c) – sen b · sen (a – c) + sen c · sen (a – b) =

= sen a · sen b · cos c – sen a · sen c · cos b - sen b · sen a · cos c + sen b · sen c · cos a + sen c · sen a ·

· cos b – sen c · sen b · cos a = 0

6. Tenemos en cuenta la relación:

cos (a + b) · cos (a – b) = (cos a · cos b – sen a · sen b) · (cos a · cos b + sen a · sen b) =
= $\cos^2$ a · $\cos^2$ b – sen^2 a · sen^2 b

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

$$\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b = \cos^2 a \cdot (1 - \text{sen}^2 b) - (1 - \cos^2 a) \cdot \text{sen}^2 b = \cos^2 a - \text{sen}^2 b$$

$$\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b = \cos^2 b \cdot (1 - \text{sen}^2 a) - (1 - \cos^2 b) \cdot \text{sen}^2 a = \cos^2 b - \text{sen}^2 a$$

7. Queda:

a) $\cos 3a = \cos (2a + a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

b) $\text{sen } 4a = \text{sen } (2 \cdot 2a) = (4 \text{ sen } a - 8 \text{ sen}^3 a) \cdot \sqrt{1 - sen^2 \ a}$

8. Si cos 80º = 0,17, entonces sen 80º = 0,98 y tg 80º = 5,76. Los valores pedidos, teniendo en cuenta las fórmulas del ángulo doble, son:

a) sen 160º = sen (2 · 80º) = 0,34

b) cos 160º = cos (2 · 80º) = - 0,94

c) tg 160º = tg (2 · 80º) = - 0,36

9. Si cos 80º = 0,17, entonces sen 80º = 0,98 y tg 80º = 5,76. Los valores pedidos, teniendo en cuenta las fórmulas del ángulo mitad, son:

a) $\text{sen } 40^\circ = \text{sen}\left(\frac{80^\circ}{2}\right) = 0{,}64$; $\cos 40^\circ = \cos\left(\frac{80^\circ}{2}\right) = 0{,}76$; $\text{tg } 40^\circ = \text{tg}\left(\frac{80^\circ}{2}\right) = 0{,}84$

b) $\text{sen } 20^\circ = \text{sen}\left(\frac{40^\circ}{2}\right) = 0{,}34$; $\cos 20^\circ = \cos\left(\frac{40^\circ}{2}\right) = 0{,}94$; $\text{tg } 20^\circ = \text{tg}\left(\frac{40^\circ}{2}\right) = 0{,}36$

c) $\text{sen } 10^\circ = \text{sen}\left(\frac{20^\circ}{2}\right) = 0{,}17$; $\cos 10^\circ = \cos\left(\frac{20^\circ}{2}\right) = 0{,}98$; $\text{tg } 10^\circ = \text{tg}\left(\frac{20^\circ}{2}\right) = 0{,}18$

10. Si $\cot g\ 2a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, entonces $tg\ 2a = \sqrt{3}$. El valor de tangente es:

$$tg\ 2a = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \cdot tg\ a}{1 - tg^2\ a} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\ tg^2\ a + 2\ tg\ a - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} tg\ a = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ o \\ tg = -\sqrt{3} \end{cases}$$

11. Expresamos todas las razones en función de sen a y cos a y operamos:

a) $\dfrac{1 - tg\ a}{1 + tg\ a} - \dfrac{1 - sen\ 2a}{\cos\ 2a} = \dfrac{1 - \dfrac{sen\ a}{\cos\ a}}{1 + \dfrac{sen\ a}{\cos\ a}} - \dfrac{1 - 2\ sen\ a \cos\ a}{\cos^2\ a - sen^2\ a} =$

$= \dfrac{\cos\ a - sen\ a}{\cos\ a + sen\ a} - \dfrac{1 - 2\ sen\ a \cos a}{\cos^2\ a - sen^2\ a} = \dfrac{(\cos\ a - sen\ a)^2 - 1 + 2\ sen\ a \cos a}{\cos^2\ a - sen^2\ a} = 0$

b) $\dfrac{sen^2\ a}{\cos\ a} + \dfrac{2 sen\ a}{tg\ 2a} = \dfrac{sen^2\ a}{\cos\ a} + \dfrac{2\ sen\ a \cos\ 2a}{sen\ 2a} = \dfrac{sen^2\ a}{\cos a} + \dfrac{2\ sen\ a\ (\cos^2\ a - sen^2\ a)}{2\ sen\ a \cos\ a} =$

$= \dfrac{\cos^2\ a}{\cos\ a} = \cos\ a$

12. La comprobación puede hacerse de la siguiente manera:

a) $\dfrac{2\ tg\ a}{1 + tg^2\ a} = \dfrac{2\dfrac{sen\ a}{\cos\ a}}{1 + \dfrac{sen^2\ a}{\cos^2\ a}} = \dfrac{\dfrac{2 sen a}{\cos\ a}}{\dfrac{\cos^2 a + sen^2 a}{\cos^2\ a}} = \dfrac{2\ sen\ a \cos^2 a}{\cos\ a} = 2\ sen\ a \cos\ a = sen 2a$

b) $\text{cotg a} - 2\ \text{cotg 2a} = \dfrac{\cos\ a}{sen\ a} - \dfrac{2\cos\ 2a}{sen\ 2a} = \dfrac{\cos^2 a - \cos^2 a + sen^2 a}{sen\ a \cos a} = \dfrac{sen^2\ a}{sen a \cos a} = \dfrac{sen\ a}{\cos\ a} = tg\ a$

c) $\dfrac{tg\ a + sen\ a}{2\ tg\ a} = \dfrac{\dfrac{sen a}{\cos a} + sen a}{2\dfrac{sen\ a}{\cos\ a}} = \dfrac{sen\ a + sen a \cos a}{2 sen\ a} = \dfrac{1 + \cos a}{2} = \cos^2\ \dfrac{a}{2}$

d) $\dfrac{tg\ a}{tg\ 2a - tg\ a} = \dfrac{tg\ a}{\dfrac{2\ tg\ a}{1 - tg^2\ a} - tg\ a} = \dfrac{(1 - tg^2\ a)\ tg\ a}{tg\ a\ (1 + tg^2\ a)} = \cos\ 2a$

ACTIVIDADES-PÁG. 129

13. Los valores pedidos son:

$sen\ \dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - \dfrac{1}{7}}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}} = 0{,}6547$ $\qquad$ $\cos s\ \dfrac{a}{2} = -\sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{1}{7}}{2}} = -\sqrt{\dfrac{4}{7}} = -0{,}7559$

14. Si $sen\, a = -\frac{1}{3}$ y el ángulo es del cuarto cuadrante, el valor del coseno es $\cos a = \frac{\sqrt{8}}{3}$.

El valor de tg a/2 es:

$$tg\ \frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{8}}{3}}{1+\frac{\sqrt{8}}{3}}} = -\sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{3+\sqrt{8}}} = -\left(3-\sqrt{8}\right)$$

15. Los valores de las razones pedidas son: $\cos a = -\frac{1}{9}$ y $sen\ a = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

16. Queda expresado del siguiente modo:

a) $$\frac{1-\cos a}{sen\ a} = \frac{1-\cos^2\frac{a}{2}+sen^2\frac{a}{2}}{2\ sen\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\,sen^2\frac{a}{2}}{2\ sen\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = tg\ \frac{a}{2}$$

b) $$\frac{sen\ 2a}{1+\cos 2a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a} = \frac{2\ sen\ a\cdot\cos a}{1+\cos^2 a - sen^2 a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos^2\frac{a}{2}-sen^2\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{2\cdot 2\ sen\ \frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos^2 a}{(2\cos^2 a)\cdot\left(2\cos^2\frac{a}{2}\right)} = tg\ \frac{a}{2}$$

17. Los resultados son:

a) $$\frac{sen150^\circ - sen\ 50^\circ}{\cos 150^\circ + \cos 50^\circ} = \frac{2\cos 100\cdot sen\ 50}{2\cos 100\cdot\cos 50} = tg\ 50$$

b) $$\frac{sen195^\circ - sen\ 75^\circ}{sen\ 195^\circ + sen\ 75^\circ} = \frac{2\cos 135\cdot sen\ 60}{2\ sen\ 135\cdot\cos 60} = \cot g\ 135\cdot tg\ 60 = -\ \mathrm{tg}\ 60 = -\ \sqrt{3}$$

c) $$\frac{\cos 160^\circ - \cos 100^\circ}{sen\ 160^\circ + sen\ 100^\circ} = \frac{-2\ sen\ 130\cdot sen30}{2\ sen\ 130\cdot\cos 30} = -\ tg\ 30 = -\ \frac{\sqrt{3}}{3}$$

18. a) Desarrollamos el numerador de la fracción teniendo en cuenta los teoremas de adición, operamos y vemos que coincide con el numerador, por tanto, el resultado de la fracción se 1.

b) Se demuestra del siguiente modo:

$$\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{sen\,(a+b)+sen\,(a-b)}=\frac{-2\cdot sen\ a\cdot sen\,(-b)}{2\cdot sen\ a\cos b}=tg\ b\,.$$

19. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) $sen\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{24}+k_1\pi\ o\ x=\frac{5\pi}{24}+k_2\pi\ con\ k_1,k_2\in Z$

b) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{11\pi}{36}+2k_1\frac{\pi}{3}\ o\ x=\frac{19\pi}{36}+2k_2\frac{\pi}{3}\ con\ k_1,k_2\in Z$

c) $tg\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3} \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k_1\frac{\pi}{2}\ con\ k_1\in Z$

d) $\cos\left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=-\frac{2\pi}{3}+4k_1\pi\ o\ x=\frac{8\pi}{3}+4k_2\pi\ con\ k_1,k_2\in Z$

e) sen 3x – sen 30º = 0 $\Rightarrow x=10^{\circ}+120^{\circ}k_1\ o\ x=50^{\circ}+120^{\circ}k_2\ con\ k_1,k_2\in Z$

f) $\cot g\left(\frac{x+45^{\circ}}{2}\right)=\sqrt{3} \Rightarrow x=15^{\circ}+360^{\circ}k_1\ con\ k_1\in Z$

20. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) sen 2x = 2 cos x $\Rightarrow$ 2 sen x · cos x = 2 cos x $\Rightarrow$ 2 sen x · cos x – 2cos x = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ cos x = 0; sen x = 1 $\Rightarrow$ **$x_1 = 90^{\circ} + 180^{\circ}\cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z.**

b) sen x + sen 3x = cos x $\Rightarrow$ 2 sen 2x · cos x = cos x $\Rightarrow$ 2 sen 2x · cos x – cos x = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ cos x = 0; sen 2x = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **$x_1 = 90^{\circ} + 180^{\circ}\cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z; $x_2 = 15^{\circ} + 180^{\circ}\cdot k_2$ con $k_2 \in$ Z y $x_3 = 75^{\circ} + 180^{\circ}\cdot k_3$ con $k_3 \in$ Z.**

c) sen 4x = sen 2x $\Rightarrow$ 2 sen 2x · cos 2x = sen 2x $\Rightarrow$ 2 sen 2x · cos 2x – sen 2x = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sen 2x · (2 cos 2x – 1) = 0 $\Rightarrow$ cos 2x = $\frac{1}{2}$; sen 2x = 0 $\Rightarrow$ **$x_1 = 0^{\circ} + 90^{\circ}\cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z; $x_2 = 30^{\circ} + 180^{\circ}\cdot k_2$ con $k_2 \in$ Z y $x_3 = 150^{\circ} + 180^{\circ}\cdot k_3$ con $k_3 \in$ Z.**

d) cos 2x – cos 6x = sen 5x + sen 3x $\Rightarrow$ - 2 sen 4x · sen (- 2x) = 2 sen 4x · cos x $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2 sen 4x · (sen 2x – cos x) = 0 $\Rightarrow$

- sen 4x = 0 $\Rightarrow$ **$x_1 = 45^{\circ}\cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z**

● sen 2x – cos x = 0 $\Rightarrow$ cos x (2 sen x – 1)= 0 $\Rightarrow$ cos x = 0; sen x = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **$x_2 = 90^o + 180^o \cdot k_2$ con $k_2 \in$ Z; $x_3 = 30^o + 360^o \cdot k_3$ con $k_3 \in$ Z y $x_4 = 150^o + 360^o \cdot k_4$ con $k_4 \in$ Z.**

e) sen 2x · cos x = 6 sen^3 x $\Rightarrow$ 2 sen x cos^2 x – 6 sen^3 x = 0 $\Rightarrow$ 2 sen x (cos^2 x – 3 sen^2 x) = 0 $\Rightarrow$

● sen x = 0 $\Rightarrow$ **$x_1 = 0^o + 180^o \cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z**

● cos^2 x – 3 sen^2 x = 0 $\Rightarrow$ cos^2 x – 3 (1 – cos^2 x) = 0 $\Rightarrow$ cos x = $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ **$x_2 = 30^o + 180^o \cdot k_2$ con $k_2 \in$ Z y $x_3 = 150^o + 180^o \cdot k_3$ con $k_3 \in$ Z.**

f) 2 sen x = tg x $\Rightarrow$ sen x (2 cos x – 1) = 0 $\Rightarrow$ sen x = 0; cos x = $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **$x_1 = 0^o + 180^o \cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z; $x_2 = 60^o + 360^o \cdot k_2$ con $k_2 \in$ Z y $x_3 = 300^o + 360^o \cdot k_3$ con $k_3 \in$ Z.**

21. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) sen x = 1 + 2 cos^2 x $\Rightarrow$ sen x = 1 + 2 – 2 sen^2 x $\Rightarrow$ 2 sen^2 x + sen x – 3 = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sen x = 1 $\Rightarrow$ **$x_1 = 90^o + 360^o \cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z**

b) sec x + tg x = cos x $\Rightarrow$ $\frac{1}{\cos x} + \frac{sen\ x}{\cos x} = \cos x$ $\Rightarrow \begin{cases} senx = 0 \Rightarrow x = \pi \cdot k_1 \\ sen\ x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k_2\pi \end{cases}$

con k_1 , $k_2 \in$ Z

c) 6 cos^2 $\frac{x}{2}$ + cos x = 1 $\Rightarrow$ $6\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2 + \cos x = 1$ $\Rightarrow$ $3 + 3\cos x + \cos x = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ cos x = - $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **$x_1 = 120^o + 360^o \cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z; $x_2 = 240^o + 360^o \cdot k_2$ con $k_2 \in$ Z**

d) 6 cos^2 x + 6 sen^2 x = 5 + sen x $\Rightarrow$ 6 = 5 + sen x $\Rightarrow$ sen x = 1 $\Rightarrow$ **$x_1 = 90^o + 360^o \cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z**

e) tg 2x · tg x = 1 $\Rightarrow$ $\frac{2\,tg^2\,x}{1 - tg^2\,x} = 1$ $\Rightarrow$ $tg = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ **$x_1 = 30^o + 180^o \cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z y $x_2 = 150^o + 180^o \cdot k_2$ con $k_2 \in$ Z**

f) cos^2 x = 3 sen^2 x $\Rightarrow$ 1 = 4 sen^2 x $\Rightarrow$ sen x = $\pm\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ **$x_1 = 30^o + 180^o \cdot k_1$ con $k_1 \in$ Z y $x_2 = 150^o + 180^o \cdot k_2$ con $k_2 \in$ Z**

22. Las soluciones de las ecuaciones son:

a) sen x + $\sqrt{3}$ cos x= 2 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2} sen\ x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\ x = 1$ $\Rightarrow$ sen (x + 60º) = 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **x_1 = 30º + 360º · k_1 con $k_1 \in$ Z**

b) sen x + cos x = $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}} sen\ x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\ x = 1$ $\Rightarrow$ sen (x + 45º) = 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **x_1 = 45º + 360º · k_1 con $k_1 \in$ Z**

c) sen x + cos x = $\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ Imposible ya que sen x + cos x $\leq$ 2.**23.** Las soluciones de los sistemas, en el primer giro, son:

a) Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos: 2x + 1 = 3, entonces x = 1.

Sustituyendo el valor anterior en la primera ecuación y operando, obtenemos:

$\text{sen}^2\ y = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\ y = \pm\ 1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{\pi}{2}\ e\ y_2 = \frac{3\pi}{2}.$

Las soluciones del sistema son: $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)\ y\ \left(1,\ \frac{3\pi}{2}\right)$

b) Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos: sen (x + y) = 1, entonces (x + y) = 90º o x = 90º - y.

Sustituyendo la expresión anterior en la primera ecuación y operando, obtenemos:

$\text{sen}\ (90º - y) \cdot \cos\ y = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 y = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Las soluciones del sistema son: (60º, 30º); (300º, 150º); (240º, 210º) y (120º, 330º).

c) De la segunda ecuación obtenemos: x + y = 0º, entonces x = - y

Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos:

$\cos\ (-y) + \cos\ y = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \cos\ y = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\ y = \frac{1}{2}.$

Las soluciones del sistema son: (300º, 60º) y (60º, 300º).

d) Despejamos y = 90º - x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

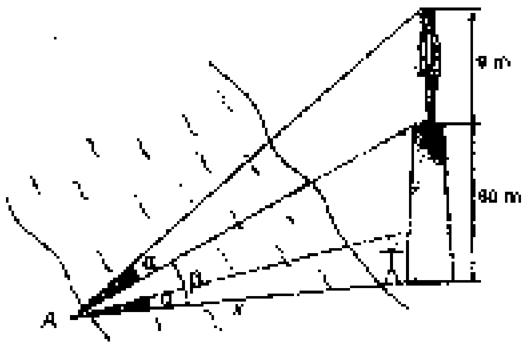
$$sen\ x + sen\ (90º - x) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow 2 \cdot sen\ 45º \cdot \cos\,(x - 45º) = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\,(x - 45º) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x - 45º = 30º\ \acute{o}\ \ x - 45º = 330º$$

Las soluciones del sistema son: (15º, 75º) y (75º, 15º).

ACTIVIDADES-PÁG. 130

24. Según la siguiente figura:

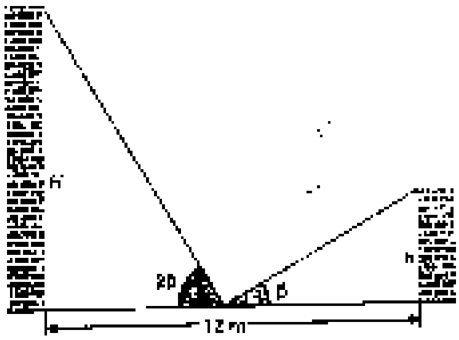


Llamando β al ángulo bajo el cual se ve el pedestal, tenemos:

$$tg\ (\beta + \alpha) = \frac{tg\ \beta + tg\ \alpha}{1 - tg\ \beta \cdot tg\ \alpha}; \quad \frac{60+9}{x} = \frac{\frac{60}{x} + \frac{1{,}8}{x}}{1 - \frac{60}{x} \cdot \frac{1{,}8}{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{69}{x} = \frac{61{,}8\ x}{x^2 - 108} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 7{,}2x^2 = 7452 \quad \Rightarrow \quad x = 32{,}17\ m.$$

La anchura del río es de 32,17 metros.
25. Sea el esquema:



Los cálculos quedan:

$$tg\ \ 60º = \frac{H}{6} \quad \Rightarrow \quad H = 6 \cdot \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad H = 10{,}39\ m.$$

$$tg\ \ 30º = \frac{h}{6} \quad \Rightarrow \quad h = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad h = 3{,}46\ m.$$

En la expresión $tg\ (2\beta) = \frac{2\ tg\ \beta}{1 - tg^2\ \beta}$, sustituimos $tg\ 2\beta = \frac{H}{6}\ \ y\ tg\ \beta = \frac{h}{6}$, y obtenemos:

$$\frac{H}{6} = \frac{2 \cdot \frac{h}{6}}{1 - \frac{h^2}{36}} \quad \Rightarrow \quad H \cdot h^2 + 72h - 36\,H = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{6\sqrt{36 + H^2} - 36}{H}$$

Esta es relación que liga ambas alturas. Relación que se verifica para los valores obtenidos anteriormente.

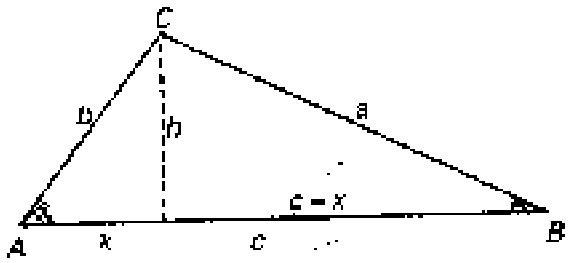
26. A partir del desarrollo de tg (A + B + C) y de sustituir A + B + C = 180º, obtenemos la expresión buscada:

$$tg\ (A + B + C) = tg\ [A + (B + C)] = \frac{tg\ A + tg\ (B + C)}{1 - tg\ A \cdot tg\ (B + C)} =$$

$$= \frac{tg\ A + tg\ B + tg\ C - tg\ A \cdot tg\ B \cdot tg\ C}{1 - tg\ B \cdot tg\ C - tg\ A \cdot tg\ B - tg\ A \cdot tg\ C}$$

Como A + B + C = 0, entonces tg (A + B + C) = 0 y queda tg A + tg B + tg C = tg A · tg B · tg C

27. Sea el triángulo:



El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2}\,base \cdot altura = \frac{1}{2} c \cdot h$$

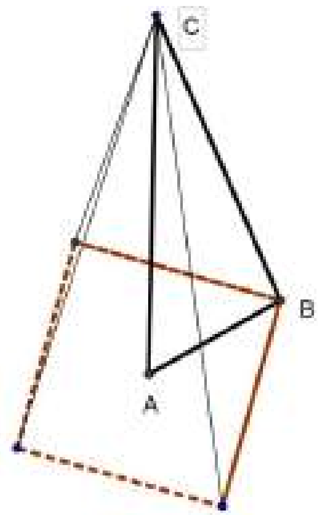
Vamos a calcular h:

$$\left.\begin{aligned} tg\ A &= \frac{h}{x} \\ tg\ B &= \frac{h}{c - x} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad h = c \cdot \frac{tg\ A \cdot tg\ B}{tg\ A + tg\ B}$$

De modo que sustituyendo en el área obtenemos la fórmula buscada.

$$S = \frac{1}{2} c \cdot c \cdot \frac{tg\ A \cdot tg\ B}{tg\ A + tg\ B} = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{tg\ A \cdot tg\ B}{tg\ A + tg\ B}$$

28. En el dibujo adjunto aparece la antena, AC, y los cables, uno de ellos BC.



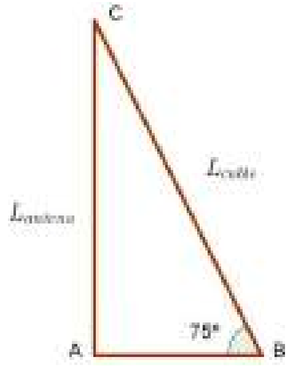
En el dibujo puede apreciarse el triángulo ABC, rectángulo en A, con el ángulo en B de 75º y sus lados son:

- AC la longitud de la antena,
- AB la mitad de la diagonal de la base,
- BC la longitud de uno de los cables.

La medida de AB es la mitad de la diagonal del cuadrado de lado 80 m, por tanto:

$$AB = \frac{1}{2} \cdot D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80^2 + 80^2} \quad \Rightarrow \quad AB = 56{,}57\ m$$

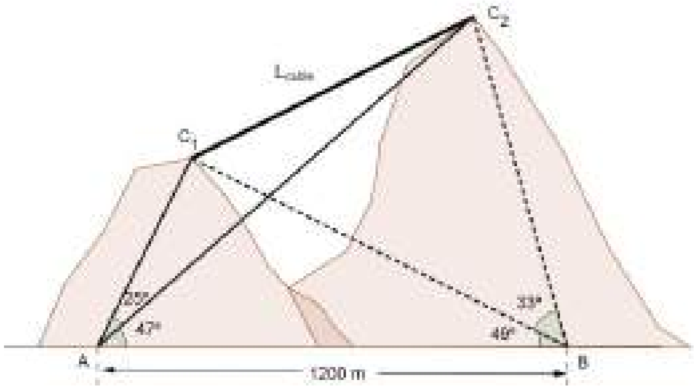
Calculamos la longitud de cada cable y la longitud de la antena en el triángulo ABC:

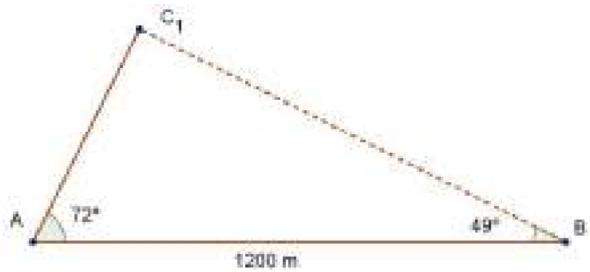


$$\cos\ 75^\circ = \frac{56{,}57}{L_{cable}} \quad \Rightarrow \quad L_{cable} = \frac{56{,}57}{\cos\ 75^\circ} \quad \Rightarrow \quad L_{cable} = 218{,}57\, m.$$

$$tg\ 75^\circ = \frac{L_{antena}}{56{,}57} \quad \Rightarrow \quad L_{antena} = 56{,}57 \cdot tg\ 75^\circ \quad \Rightarrow \quad L_{antena} = 211{,}12\ m.$$

29. Sea el dibujo del enunciado:





En el triángulo ABC_1:

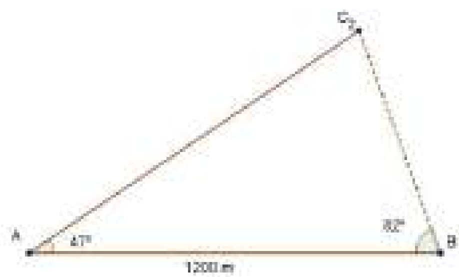
El ángulo C_1 vale $C_1 = 180º - 72º - 49º = 59º$.

Utilizando el teorema de los senos:

$$\frac{1200}{sen\ 59^\circ} = \frac{AC_1}{sen\ 49^\circ} = \frac{BC_1}{sen\ 72^\circ} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} AC_1 = 1200 \cdot \dfrac{sen\ 49^\circ}{sen\ 59^\circ} = 1056{,}56 \\ BC_1 = 1200 \cdot \dfrac{sen\ 72^\circ}{sen\ 59^\circ} = 1331{,}44 \end{cases}$$

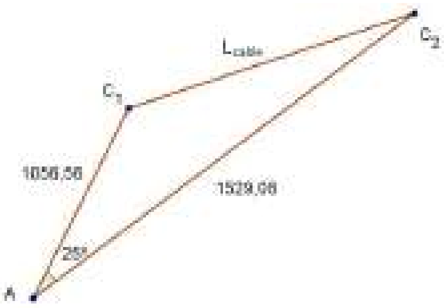
En el triángulo ABC_2:

El ángulo C_2 vale $C_2 = 180º - 47º - 82º = 51º$.



Utilizando el teorema de los senos:

$$\frac{1200}{sen\ 51^\circ} = \frac{AC_2}{sen\ 82^\circ} = \frac{BC_2}{sen\ 47^\circ} \Rightarrow \begin{cases} AC_2 = 1200 \cdot \dfrac{sen\ 82^\circ}{sen\ 51^\circ} = 1529{,}08 \\ BC_2 = 1200 \cdot \dfrac{sen\ 47^\circ}{sen\ 51^\circ} = 1129{,}29 \end{cases}$$



Determinamos la longitud del cable, L_{cable}, en el triángulo AC_1C_2 aplicando el teorema del coseno:

$$L^2_{acble} = 1056{,}56^2 + 1529{,}08^2 - 2 \cdot 1056{,}56 \cdot 1529{,}08 \cdot \cos 25^\circ \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L_{cable} = 725{,}26\ m.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 131

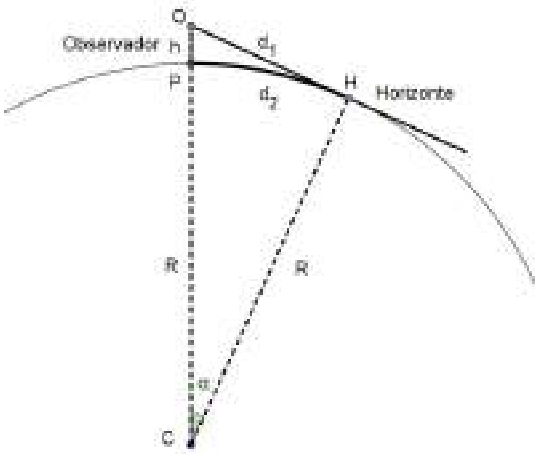
a) La distancia que buscamos es d_1 = OH, como puede verse en la figura.

El triángulo OHC es rectángulo en H ya que el radio y la tangente en H son perpendiculares.

Aplicando el teorema de Pitágoras y operando, obtenemos:

$$(R+h)^2 = R^2 + d_1^2 \ \Rightarrow\ R^2 + h^2 + 2Rh = R^2 + d_1^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ h^2 + 2Rh = d_1^2 \ \Rightarrow\ d_1 = \sqrt{h^2 + 2Rh} \ \Rightarrow\ d_1 \approx \sqrt{2Rh}$$



En la expresión final no se ha tenido en cuenta h^2, ya que su valor será prácticamente nulo comparado con el valor de 2Rh.

Para el caso de una persona que tenga los ojos a h = 1,8 m = 0,0018 km del suelo y dado que el radio de la Tierra es R = 6371 km, tenemos:

$$d \approx \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0{,}0018} \approx 4{,}789\ km.$$

b) En este caso hay que calcular la distancia d_2, correspondiente al arco de círculo PH.

En el triángulo OHC podemos calcular:

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+h} \ \Rightarrow\ \alpha = \arccos \frac{R}{R+h}$$

En el triángulo curvilíneo PHC tenemos en cuenta la relación "arco = radio · ángulo" y obtenemos:

$$d_2 = R \cdot \arccos \frac{R}{R+h}$$

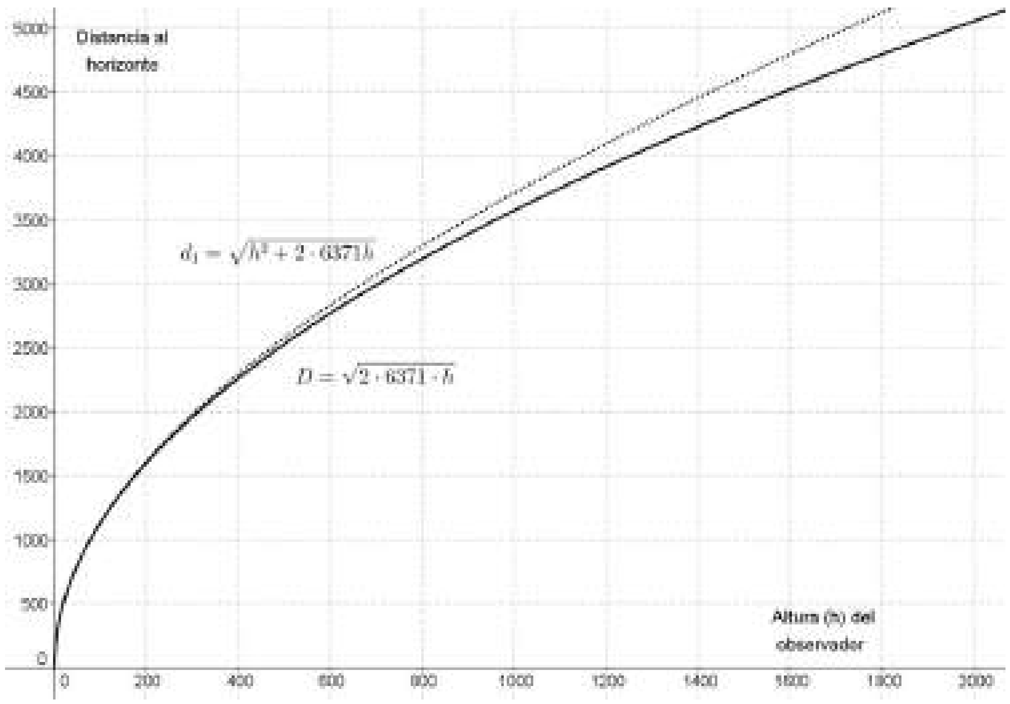
Para h = 1,8 m = 0,0018 km, obtenemos:

$$d_2 = 6371 \cdot \arccos \frac{6371}{6371 + 0{,}0018} \approx 4{,}789 \, km.$$

El resultado es prácticamente igual al obtenido con anterioridad. Esto es debido a que R y R + h tienen valores muy próximos y, por tanto, el ángulo es muy pequeño.

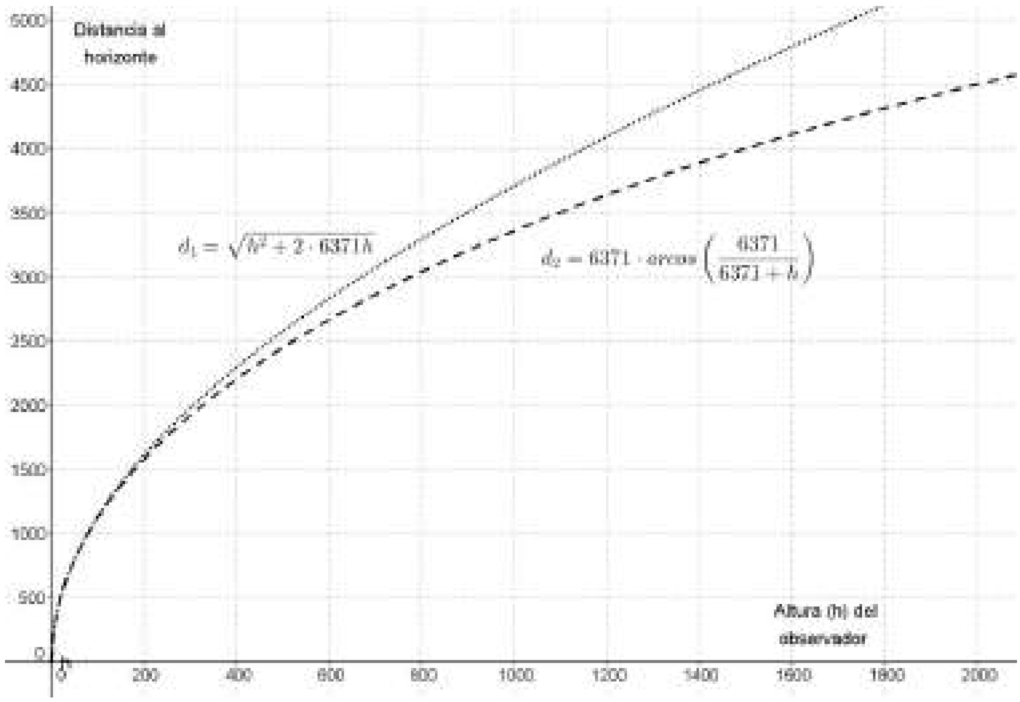
c) En la gráfica pueden verse las gráficas de las funciones que relacionan la distancia al horizonte, tomando o no el término h^2. Estas funciones son:

$$d_1 = \sqrt{h^2 + 2 \cdot 6371 \cdot h} \quad \text{y} \quad D = \sqrt{2 \cdot 6371 \cdot h}$$



En la gráfica pueden verse las gráficas de las funciones de las distancias al horizonte:

$$d_1 = \sqrt{h^2 + 2 \cdot 6371h} \quad \text{y} \quad d_2 = 6371 \cdot \arccos\left(\frac{6371}{6371 + h}\right)$$



d) Debemos resolver la siguiente ecuación:

$$50 = \sqrt{2 \cdot R \cdot h} \quad \Rightarrow \quad 50^2 = 2 \cdot 6371 \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{2500}{2 \cdot 6371} \approx 0{,}1962\, km.$$

Tendríamos que subir a unos 200 m de altura.

e) Desde una altura h se puede ver un casquete esférico de altura R · (1 – cos α), donde $\alpha = \arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$

Teniendo en cuenta que el área de un casquete esférico viene dada por la fórmula A = 2πRh, tenemos:

$$A = 2\pi R \cdot R \cdot \left[1 - \cos\left(\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)\right)\right] \quad \Rightarrow \quad A = 2\pi R^2 \cdot \left[1 - \frac{R}{R+h}\right]$$

Tomando la altura del Everest h = 8848 m = 8,848 km, tenemos:

$$A = 2\pi 6371^2 \cdot \left[1 - \frac{6371}{6371 + 8{,}848}\right] \approx 353\,696 km^2.$$

UNIDAD 6: Números complejos