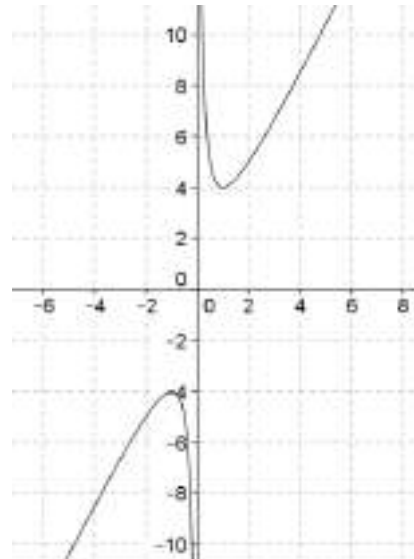


UNIDAD 6: Funciones reales. Propiedades globales

ACTIVIDADES-PÁG. 122

1. La gráfica puede ser como la que aparece en el dibujo.



2. En cada uno de los casos queda:

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = [0, +\infty)$

Simétrica respecto al eje OY.

Acotada inferiormente por $y = 0$, pero no acotada superiormente.

Mínimos en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$; Máximo en $(0, 4)$.

Tiende a $+\infty$ para x tendiendo a $\pm\infty$.

b) $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}; \text{Im } g = \mathbb{R}$

Simétrica respecto al origen de coordenadas.

No acotada

Carece de extremos relativos

Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiende a 1; si x tiende a $-\infty$ la función tiende a -1. Cuando x tiende a -1 por la izquierda la función tiende a $-\infty$ y si x tiende a -1 por la derecha la función tiende a $+\infty$. Cuando x tiende a 1 por la izquierda la función tiende a $-\infty$ y si x tiende a 1 por la derecha la función tiende a $+\infty$.

c) $\text{Dom } h = \mathbb{R}; \text{Im } h = \mathbb{R}$

No es simétrica.

No acotada.

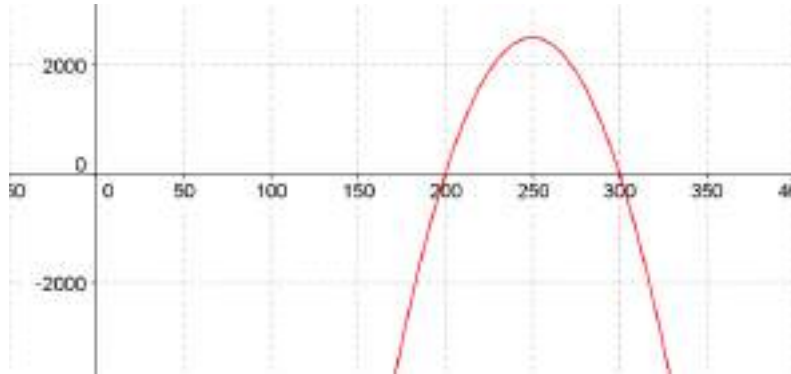
Tiene mínimo relativo en $(0, -1)$ y máximo relativo en $(2, 3)$.

Cuando x tiende a $-\infty$ la función tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a $+\infty$ la función tiende a $-\infty$.

3. La función que da los ingresos es: $I(x) = 50 \cdot x$

La función que da los beneficios es: $B(x) = -x^2 + 500 \cdot x - 60\,000$

La gráfica es:



ACTIVIDADES-PÁG. 135

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

Los números triangulares son: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ..., $\frac{n^2 + n}{2}$

Los números cuadrados son: 1, 4, 9, 16, 25, ..., x^2 .

Deba cumplirse la igualdad $\frac{n^2 + n}{2} = x^2$.

El valor de n más pequeño que cumple la igualdad es $n = 8$, ya que $\frac{8^2 + 8}{2} = x^2 \Rightarrow 36 = x^2$.

El enunciado dice que hay más de 36 cajas, por tanto hay que buscar otra solución, y ésta es:

$n = 49$, pues $\frac{49^2 + 49}{2} = 1225 = 35^2$.

Tiene 1225 cajas.

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{con } n \geq 2$$

Dando valores, obtenemos:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

... = ...

$$\frac{1}{998 \cdot 999} = \frac{1}{998} - \frac{1}{999}$$

$$\frac{1}{999 \cdot 1000} = \frac{1}{999} - \frac{1}{1000}$$

Sumando y simplificando:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{998 \cdot 999} + \frac{1}{999 \cdot 1000} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1000} = 1 - 0,001 = 0,999$$

3. Sean A, B y C las tres rebanadas. Con A_1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A_2 indicamos que se tuesta la cara 2.

1° A_1B_1 tarda: 30 s en tostar cara A_1 y B_1
 5 s en colocar A_1
 5 s en colocar B_1
 5 s en sacar B_1

2° A_2C_1 tarda: 3 s en dar vuelta A_1
 5 s en meter C_1
 30 s en tostar cara A_2 y C_1
 3 s en dar la vuelta C_2

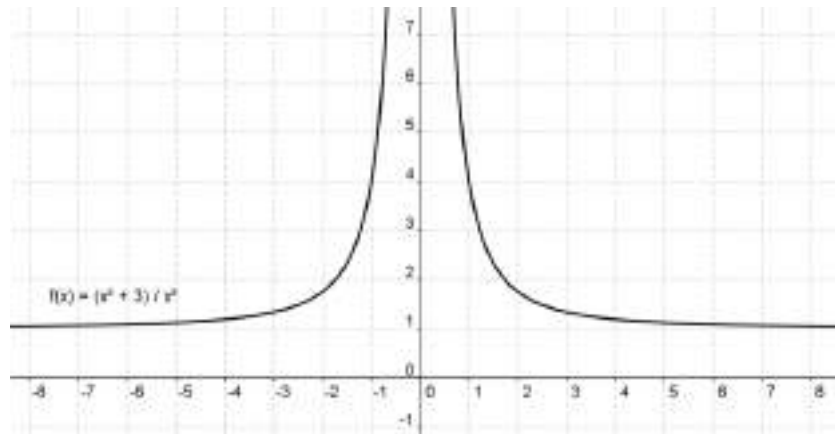
3° B_2C_2 tarda: 5 s en sacar A_2
 30 s en tostar cara B_2 y C_2
 5 s en sacar B_2
 5 s en sacar C_2

En total se necesitan 136 s en tostar 3 rebanadas.

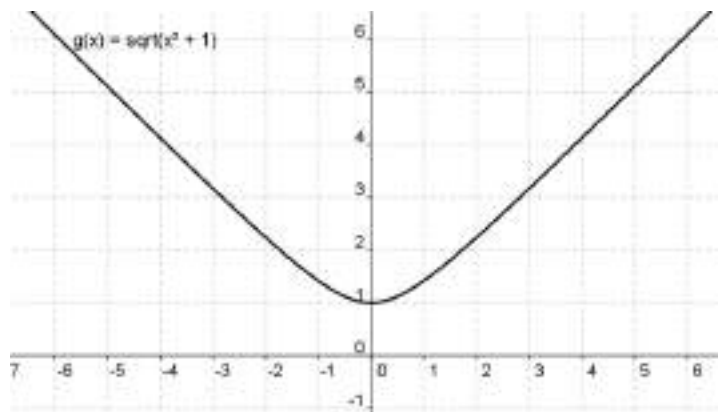
ACTIVIDADES-PÁG. 137

1. Procedemos como se indica en el apartado representación gráfica de funciones explícitas completas y obtenemos las gráficas que pueden verse a continuación:

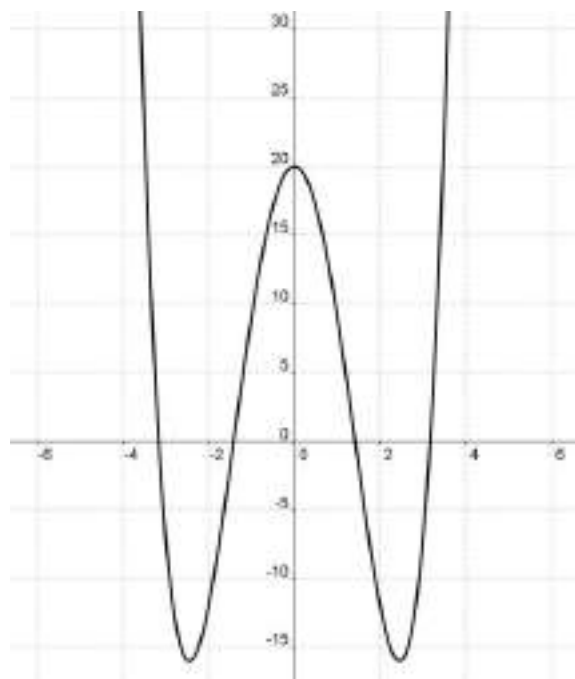
a) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2}$



b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

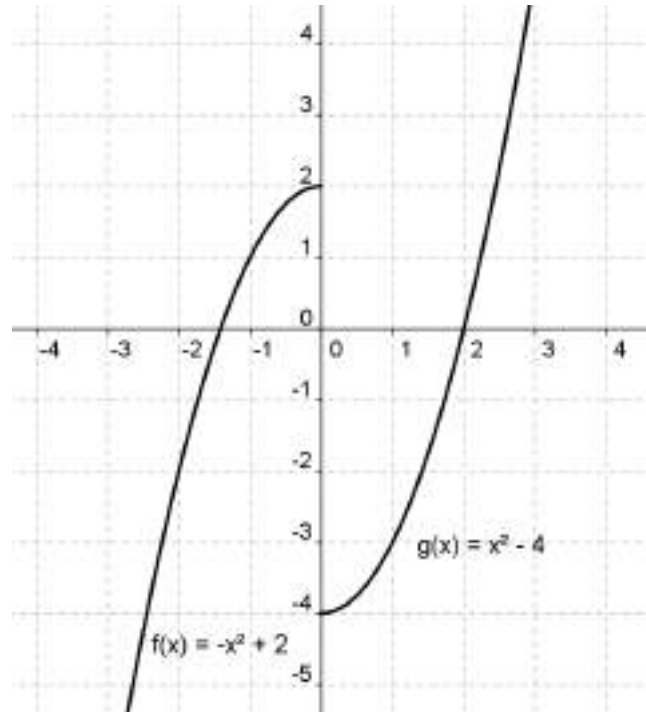


c) $h(x) = x^4 - 12x^2 + 20$

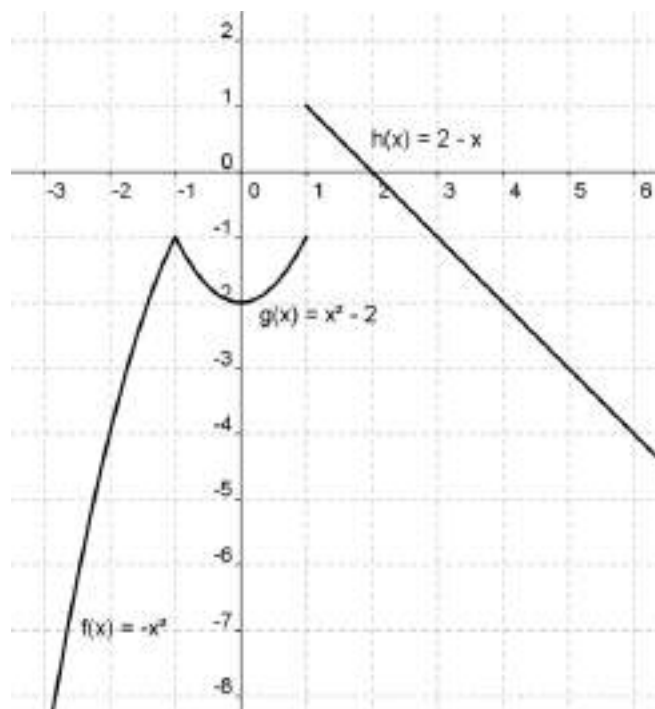


2. Procedemos como se indica en el apartado representación gráfica de funciones definidas a trozos y obtenemos las gráficas que pueden verse a continuación:

$$a) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

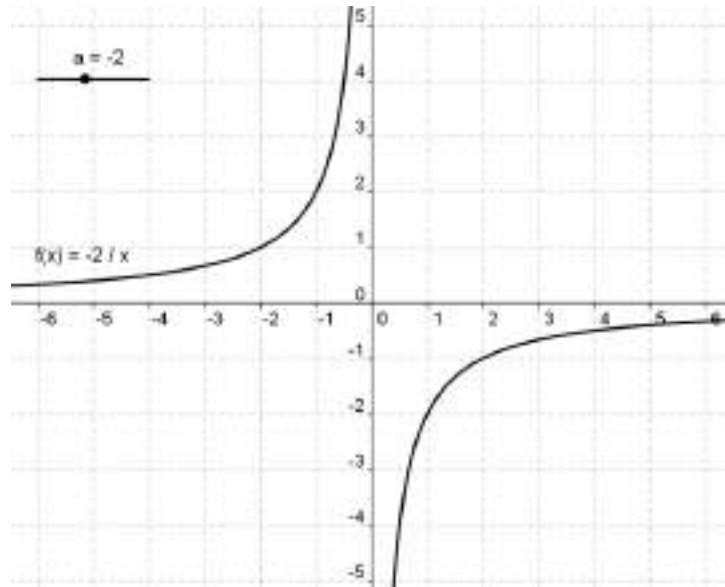


$$b) g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

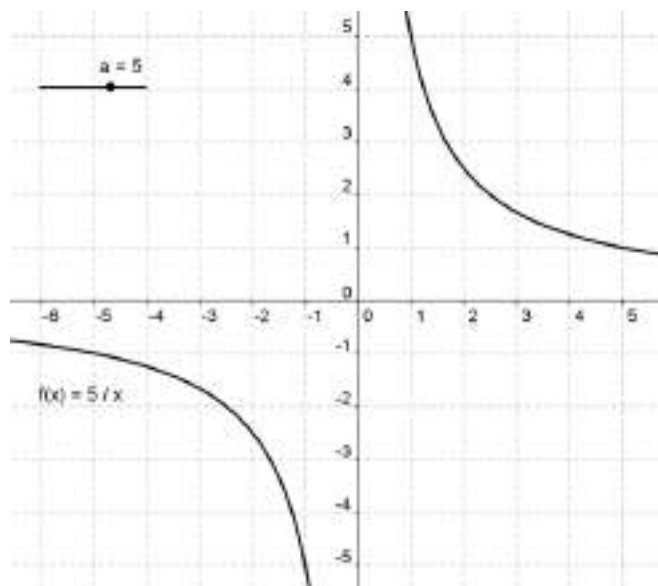


3. a) $f(x) = \frac{a}{x}$

Con la herramienta **Deslizador** y haciendo clic sobre la Zona o Vista Gráfica colocamos un deslizador, y lo llamamos a. En el *Menú Contextual* del deslizador elige **Propiedades**; en la ficha **Deslizador** escoge **Intervalo** entre -15 y 15 , **Incremento** 1.



En la Ventana de Entrada introduce una función genérica $f(x) = \frac{a}{x}$, tecleando $f(x) = a/x$. Varía los valores del deslizador y observa las variaciones de la gráfica.

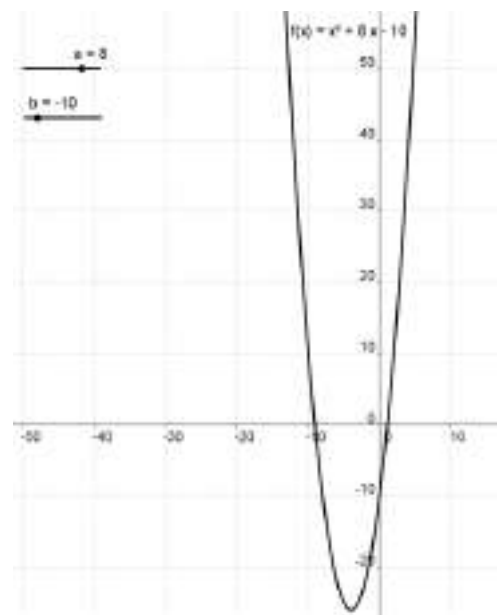
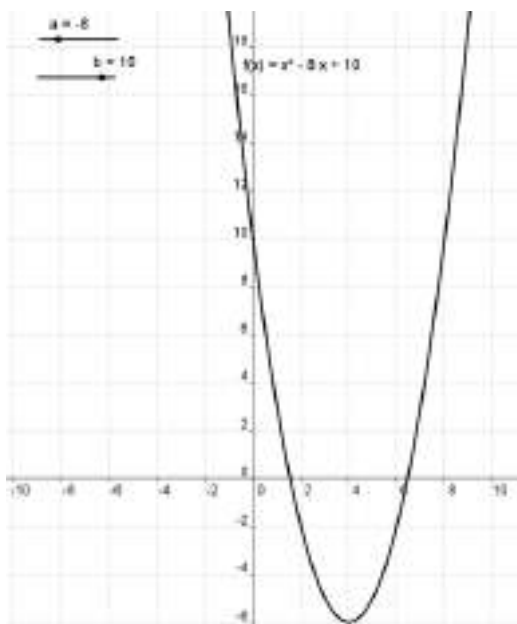
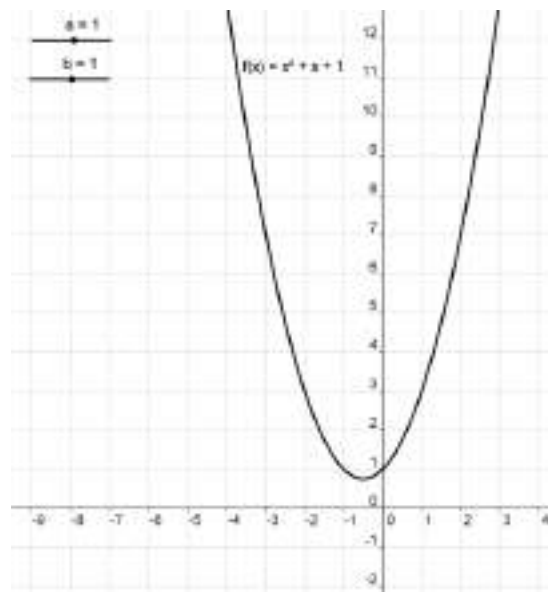


b) $f(x) = x^2 + ax + b$

Con la herramienta **Deslizador** y haciendo clic sobre la Zona o Vista Gráfica colocamos dos deslizadores, uno detrás de otro, y los llamamos a y b escoge **Intervalo** entre -15 y 15 , **Incremento** 1.

En el Campo de Entrada introduce una función genérica $f(x) = x^2 + ax + b$ tecleando la expresión $f(x) = x^2+a*x+b$

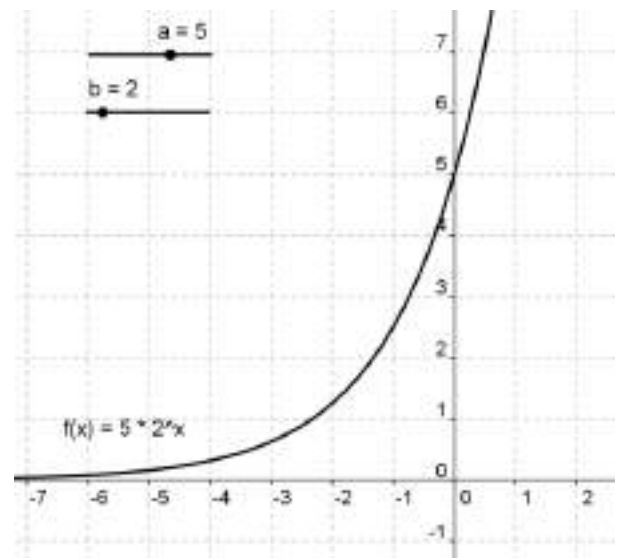
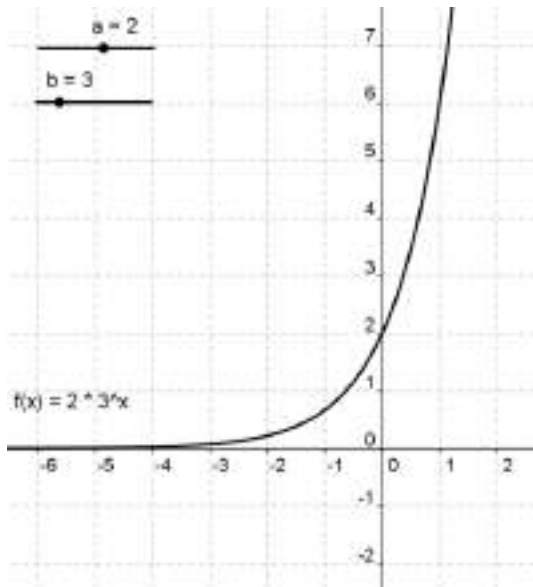
Varía los valores del deslizador y observa las variaciones de la gráfica.



c) $f(x) = a \cdot b^x$

Con la herramienta **Deslizador** y haciendo clic sobre la Zona o Vista Gráfica colocamos dos deslizadores, uno detrás de otro, y los llamamos a y b, escoge **Intervalo** entre -15 y 15 , **Incremento** 1 y en el del segundo escoge **Intervalo** entre 0 y 15, **Incremento** 1.

En la Ventana de Entrada introduce una función genérica $f(x) = a \cdot b^x$ tecleando $f(x) = a * b^x$. Varía los valores de los deslizadores y observa las variaciones de la gráfica.



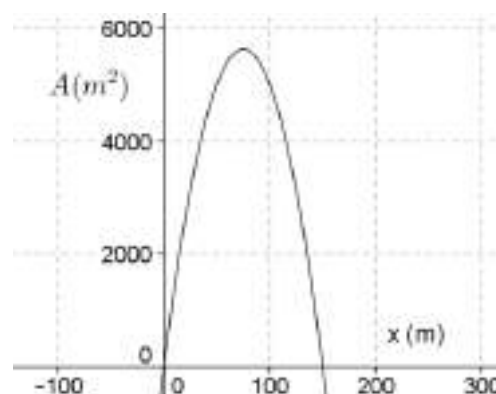
ACTIVIDADES-PÁG. 138

1. En cada caso queda:

a) Llamando x a la medida de la altura sabemos que la base mide $150 - x$, por tanto, la tabla de valores, a fórmula y la gráfica quedan:

Altura (x)	1	30	100	120
Área (A)	149	3600	5000	3600

$A(x) = x \cdot (150 - x) \Rightarrow A(x) = -x^2 + 150x$; con $\text{Dom } A = (0, 150)$ e $\text{Im } A = (0, 5625)$



b) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica, con el dominio y recorrido, son:

Espacio (m)	100	200	500	1000
Precio (€)	2,6	2,7	3	3,5

$f(x) = 2,5 + 0,0010x$. El dominio es $(0, +\infty)$ y la imagen es $(2,5; +\infty)$

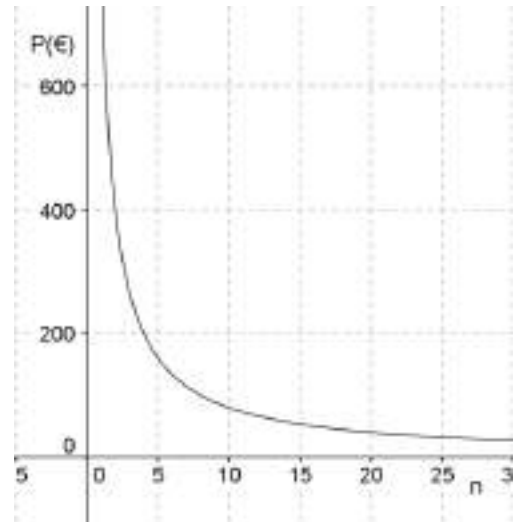
La gráfica es una línea recta casi paralela al eje OX

c) La tabla de valores, la fórmula y la gráfica son:

Nº Vecinos (n)	10	25	40
Paga cada uno (€)	80	32	20

La fórmula es: $P(x) = \frac{800}{n}$

El dominio y la imagen son: $\text{Dom } P = (0, 800)$ e $\text{Im } P = (0, +\infty)$



2. Los dominios y recorridos son:

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = (-\infty, 0]$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{Im } f = \mathbb{Z}$

c) $\text{Dom } f = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty); \text{Im } f = (0, +\infty)$

3. a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

c) $\text{Dom } f = [-2, 2]$

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

f) $\text{Dom } f = [-2, +\infty)$

4. a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. $\text{Im } f = \mathbb{R}$. Estrictamente creciente en $(-\infty, -3,46) \cup (3,46, +\infty)$. Estrictamente decreciente en $(-3,46, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +3,46)$. Máximo relativo en $(-3,46; -5,2)$ y Mínimo relativo $(3,46; 5,2)$.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. $\text{Im } f = (-3, 0]$. Estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$. Estrictamente creciente en $(0, +\infty)$, Máximo relativo en $(0, 0)$.

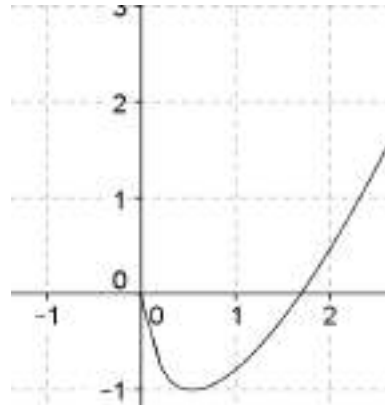
5. El número de socios fundadores es $N(0) = 20\,000$. El dominio de esta función es $[0, +\infty)$ siendo 0 el año 2005.

6. Se verifica $2 \leq x^2 + 6x + 7 \leq 7$ para $x \in [-6, -5] \cup [-1, 0]$.

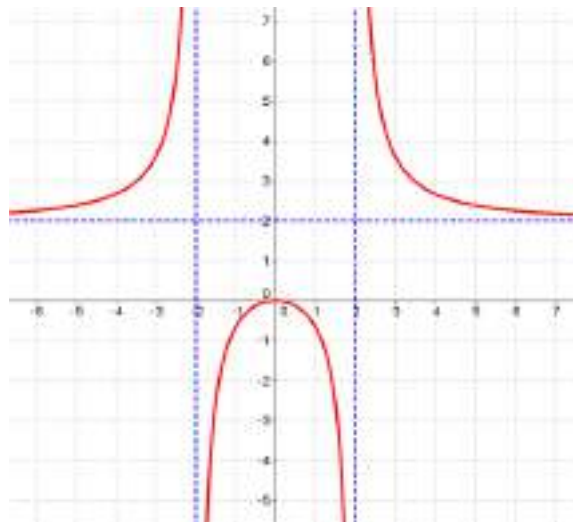
ACTIVIDADES-PÁG. 139

7. Posibles gráficas, que verifiquen las condiciones, son:

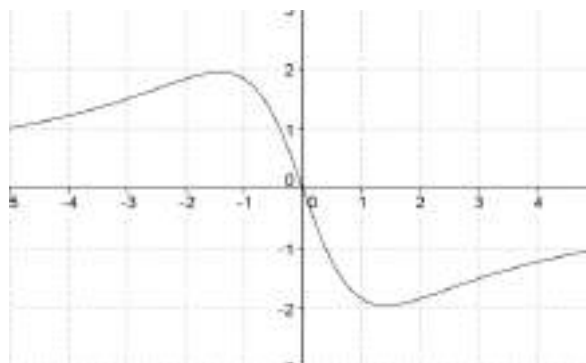
a)



b)



c)



8. a) • $y = f(x)$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{ Im } f = [0, +\infty)$$

Acotada inferiormente por 0 pero no esta acotada superiormente por lo que no esta acotada.

Estrictamente decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Estrictamente creciente en $(0, 2)$

No presenta simetría.

Mínimo relativo en $(0, 0)$ y máximo relativo en $(2; 0,54)$

b) • $y = f(x)$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}; \text{ Im } f = [-1, 1]$$

Acotada inferiormente por - 1 y superiormente por 1, por lo cual esta acotada.

Estrictamente decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Estrictamente creciente en $(-1, 1)$

Es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Mínimo relativo en $(-1, -1)$ y máximo relativo en $(1, 1)$

9. Las simetrías son:

a) Simétrica respecto al Origen.

b) Simétrica respecto al eje OY.

c) Simétrica respecto al eje OY.

d) No tiene simetría.

e) Simétrica respecto al Origen.

f) Simétrica respecto al Origen.

10. Las respuestas son:

a) El dominio es $[4, 22]$ y el recorrido $[0, 169\ 000]$

b) A las 4 de la mañana tiene 144 000 litros de agua. Disminuye de 9 de la mañana a las 22 horas.

c) La máxima capacidad la tiene a las 9 de la mañana y es de 169 000 litros.

d) Se queda sin agua a las 22 horas.

11. Las respuestas son:

$$\text{a) } f(x) + g(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1} . \text{ Dom } (f+g)(x) = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

$$\text{b) } f(x) \cdot g(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)^2} . \text{ Dom } (f \cdot g)(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{c) } f(x) : g(x) = \frac{x+1}{x-1} : \frac{2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{2} . \text{ Dom } (f : g)(x) = \mathbb{R}$$

$$\text{d) } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1} . \text{ Dom } f^{-1}(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{e) } f^{-1} \circ g(x) = \frac{x^2+1}{3-x^2} . \text{ Dom } f^{-1} \circ g(x) = \mathbb{R} - \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

f) $1/g(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Dom $(1/g(x)) = \mathbb{R}$

12. Las respuestas son:

a) $(f \circ g)(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{x + 2}}$

b) $(f \circ h \circ g)(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{-x - 2}$

c) $(g \circ h)(-1) = 1$

d) $(g \circ g)(7) = \sqrt{5}$

ACTIVIDADES-PÁG. 140

13. La función es $h(t) = -5t^2 + 25t$. La gráfica puede verse en el dibujo.

La altura máxima la alcanza a los 2,5 s y es de 31,25 m

14. Las funciones inversas son, en cada caso:

a) $f^{-1}(x) = \frac{3x - 12}{2}$

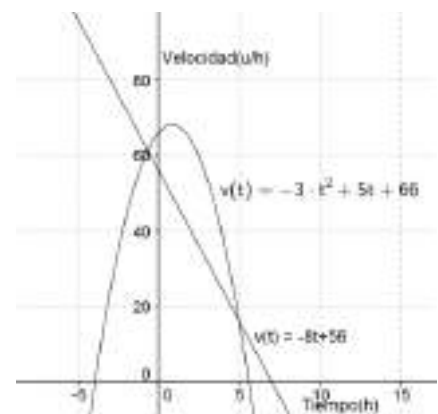
b) $f^{-1}(x) = \frac{3}{1 - 2x}$

c) $f^{-1}(x) = x^2 - 1$

Fácilmente se comprueba la propiedad que cumple la f función inversa.

15. Alcanzan la misma velocidad cuando $-3 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 66 = -8 \cdot t + 56$, es decir a las 5 horas.

Observando las gráficas podemos decir que el primero es más rentable desde $t = 0$ a $t = 5$ horas.



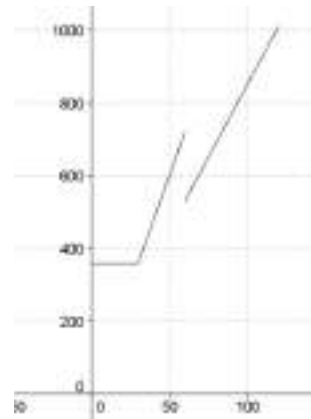
16. Llamando x al nº de espectadores, la función es

$$f(x) = f(x) \begin{cases} 360 & \text{si } 0 < x < 30 \\ 12x & \text{si } 30 \leq x \leq 60 \\ 50 + 8 \cdot x & \text{si } 60 < x \leq 120 \end{cases}$$

Su gráfica es la del dibujo.

De ella y de su expresión obtenemos que:

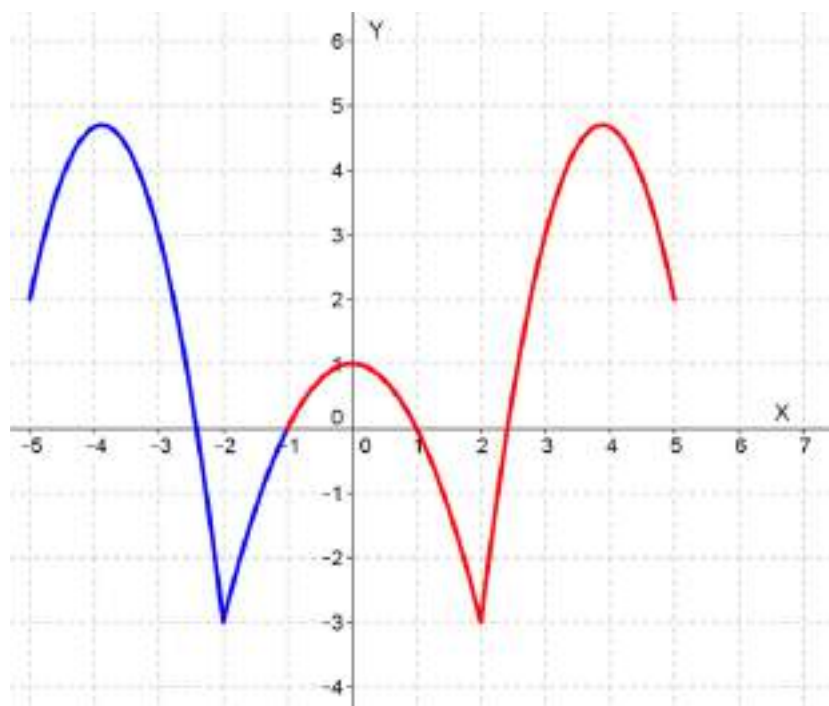
$$\text{Dom}(f) = (0, 120]. \text{ Im } f = [360, 1010]$$



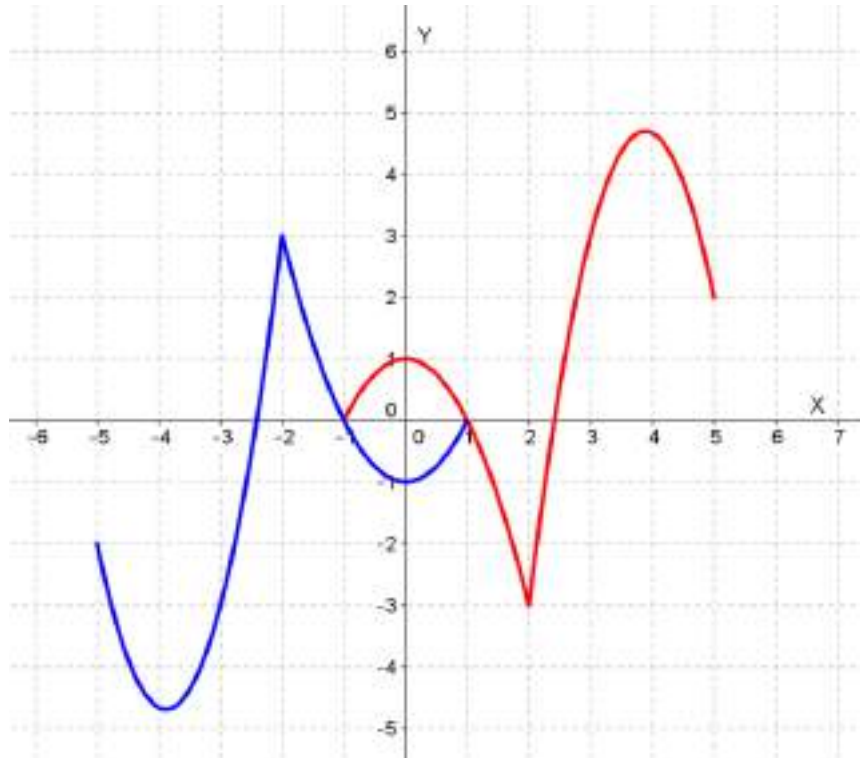
17. La función es: $f(r) = 450 \cdot r - \pi \cdot r^2 - 4 \cdot r^2$

18. En cada caso:

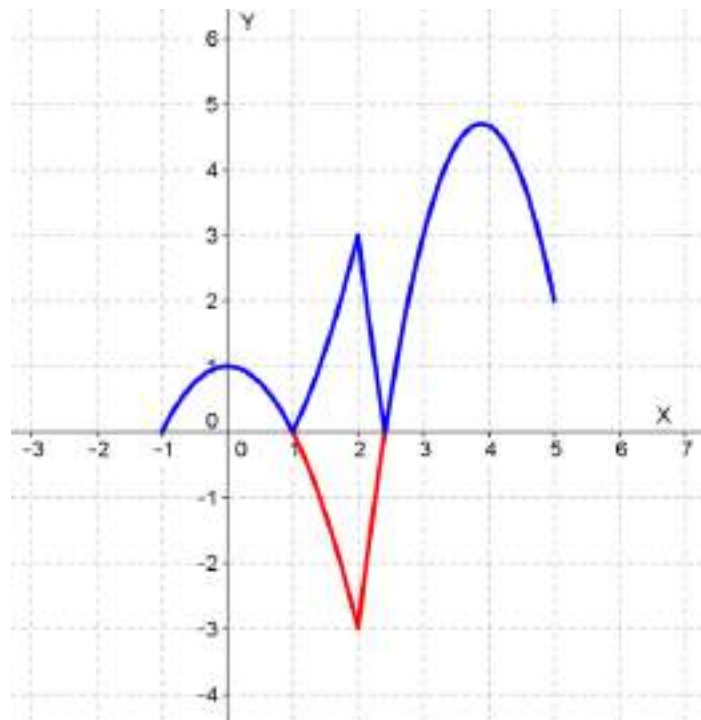
a) En el dibujo aparece la gráfica de la función $y = f(x)$ (en rojo) y la gráfica simétrica respecto del eje de ordenadas (en azul). Hay que tener en cuenta que, en algunos intervalos, ambas gráficas coinciden.



b) En el dibujo aparece la gráfica de la función $y = f(x)$ (en rojo) y la gráfica simétrica respecto del origen de coordenadas (en azul).

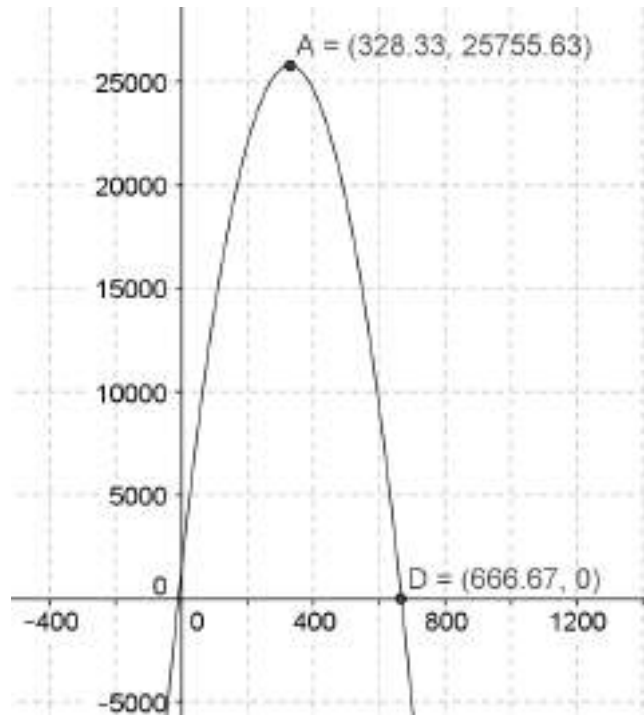


c) En el dibujo aparece la gráfica de la función $y = f(x)$ (en rojo) y la gráfica $y = |f(x)|$ (en azul). Hay que tener en cuenta que, en algunos intervalos, ambas gráficas coinciden.



19. La función es: $f(t) = (1000 - 1,5 \cdot t) \cdot (1,5 + 0,15 \cdot t) = 1500 + 147,75t - 0,225 t^2$

A la vista de su gráfica podemos decir que $\text{Dom } f = [0; 666,67]$ y que $\text{Im } f = [0; 25755,63]$.



20. Las respuestas son:

a) El beneficio que obtiene es $12 \cdot 40 - C(40) = 338,56 \text{ €}$.

b) La función buscada es: $B(x) = 12 \cdot x - C(x) = \frac{104}{9}x - \frac{7}{100}x^2 - \frac{35}{3}$.

c) El beneficio será nulo para $x = 1,05 \text{ €}$ o para $x = 164,03 \text{ €}$.

ACTIVIDADES-PÁG. 141

Ofrecemos bibliografía sobre la relación entre matemáticas y deporte.

BOLT, B. y HOBBS, D. (1991). *101 proyectos matemáticos*. Labor. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (2007) *Matemáticas en la vida misma*. Graó. Barcelona.

CORBALÁN, Fernando. (201) *Matemáticas de cerca*. Graó. Barcelona.

ORTEGA, Tomás. (2005). *Conexiones matemáticas*. Graó. Barcelona.

SORANDO MUZÁS, J. M. (2012) *Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula*. Revista Números. Volumen 80.

SORANDO MUZÁS, J. M. http://catedu.es/matematicas_mundo/

VV. AA. (2013). *Matemáticas y deporte*. Revista UNO. Graó. Barcelona.