Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

# 6 NÚMEROS COMPLEJOS

C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.)

## Página 153

### Resuelve

### ¿Cómo operar con $\sqrt{-1}$?

**Vamos a proceder como antiguamente: cuando nos encontremos con $\sqrt{-1}$ seguiremos adelante operando con ella con naturalidad y teniendo en cuenta que $(\sqrt{-1})^2 = -1$.**

**1** **Con el fin de comprobar que $a$ y $b$ son las raíces de un polinomio, podemos poner $(x-a)(x-b)$ y operar para obtener dicho polinomio. Por ejemplo, vamos a aplicar esta técnica para comprobar que $2+3\sqrt{-1}$ y $2-3\sqrt{-1}$ son las raíces del polinomio $x^2-4x+13$:**

$$[x-(2+3\sqrt{-1})][x-(2-3\sqrt{-1})] = x^2-(2+3\sqrt{-1})x-(2-3\sqrt{-1})x+(2+3\sqrt{-1})(2-3\sqrt{-1}) =$$

$$= x^2-2x-3\sqrt{-1}x-2x+3\sqrt{-1}x+2^2-(3\sqrt{-1})^2 = x^2-4x+4-9\cdot(-1) = x^2-4x+13$$

**Halla las raíces de la ecuación $x^2-4x+5$ y, aplicando la técnica que acabamos de ver, comprueba que efectivamente lo son.**

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

$$\left[x-(2+\sqrt{-1})\right]\left[x-(2-\sqrt{-1})\right] = x^2 - x(2-\sqrt{-1}) - x(2+\sqrt{-1}) + (2+\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1}) =$$

$$= x^2-4x+4-2\sqrt{-1}+2\sqrt{-1}-(-1) = x^2-4x+5$$

**2** **Comprobemos ahora que $-8$ tiene tres raíces cúbicas: $-2$, $1+\sqrt{3}\sqrt{-1}$ y $1-\sqrt{3}\sqrt{-1}$.**

**La primera es clara:**

$$(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

**Veamos la segunda:**

$$(1+\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2\cdot(\sqrt{3}\sqrt{-1}) + 3\cdot 1\cdot(\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 =$$

$$= 1+3\sqrt{3}\sqrt{-1}+3(\sqrt{3})^2(\sqrt{-1})^2+(\sqrt{3})^3(\sqrt{-1})^3 = 1+3\sqrt{3}\sqrt{-1}+9(-1)+3\sqrt{3}(-1\cdot\sqrt{-1}) =$$

$$= 1+3\sqrt{3}\sqrt{-1}-9-3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8$$

**Comprueba tú la tercera viendo que $(1-\sqrt{3}\sqrt{-1})^3$ es igual a $-8$.**

$$(1-\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 = 1^3 - 3\cdot 1^2\cdot\sqrt{3}\sqrt{-1} + 3\cdot 1\cdot(\sqrt{3}\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{3}\sqrt{-1})^3 =$$

$$= 1-3\sqrt{3}\sqrt{-1}+3\cdot 3\cdot(-1)-3\sqrt{3}\cdot(-1)\sqrt{-1} = 1-3\sqrt{3}\sqrt{-1}-9+3\sqrt{3}\sqrt{-1} = -8$$

# 1 ▶ EN QUÉ CONSISTEN LOS NÚMEROS COMPLEJOS

**C.E.: CE 1.10.** (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 2.2.** (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

## Página 154

**1** La inversa. **[El alumnado puede buscar contraejemplos de las afirmaciones falsas para poner en práctica esta llave de pensamiento].**

**¿Verdadero o falso?**

**a) El número 7 es un número real. Por tanto, no es un número complejo.**

**b) Si $a + bi$ es un número complejo, entonces no puede ser número real.**

**c) Para que el número complejo $a + bi$ sea imaginario hace falta que $a$ sea cero.**

**d) Para que el número complejo $a + bi$ sea imaginario es necesario que $b$ sea distinto de cero.**

**e) El número $0 + 0i$ ni es complejo ni es real.**

**f) El número 5 no tiene conjugado.**

**g) Si un número complejo coincide con su conjugado, entonces es un número real.**

**h) Si un número complejo coincide con su opuesto, entonces es el cero.**

**i) Si el opuesto de un número complejo coincide con su conjugado, entonces es imaginario puro.**

a) Falso. Los números reales son números complejos cuya parte imaginaria es cero.

b) Falso. Si $b = 0$ el número complejo también es un número real.

c) Falso. La parte real no influye. Es imaginario si su parte imaginaria no es nula.

d) Verdadero.

e) Falso. El número $0 + 0i$ es real pero no es imaginario porque su parte imaginaria es cero.

f) Falso. El conjugado de $5 = 5 + 0i$ es $\overline{5} = 5 - 0i$.

g) Verdadero. Si $a + bi = a - bi \to b = -b \to 2b = 0 \to b = 0$

Por tanto, su parte imaginaria es cero y es un número real.

h) Verdadero. Si $a + bi = -a - bi \to 2a + 2bi = 0 \to \begin{cases} 2a = 0 \to a = 0 \\ 2b = 0 \to b = 0 \end{cases}$

i) Verdadero (siempre que el número no sea cero).

Si $-a - bi = a - bi \to -a = a \to 2a = 0 \to a = 0$

**2** **De los siguientes números complejos:**

$$3 + 2i,\ -\sqrt{3} + 5i,\ 2i,\ 7,\ 0$$

**a) ¿Cuáles son números reales? Ponlos en forma binómica.**

**b) ¿Cuáles son imaginarios?**

**c) ¿Cuáles son imaginarios puros? Ponlos en forma binómica.**

**d) Escribe el opuesto de cada uno de ellos.**

**e) Escribe el conjugado de cada uno de ellos.**

a) $7 = 7 + 0i$ y $0 = 0 + 0i$ son números reales.

b) Los números imaginarios son $3 + 2i$, $-\sqrt{3} + 5i$ y $2i$.

c) $2i = 0 + 2i$ es imaginario puro.

d) El opuesto de $z = 3 + 2i$ es $-z = -3 - 2i$.

El opuesto de $z = -\sqrt{3} + 5i$ es $-z = \sqrt{3} - 5i$.

El opuesto de $z = 2i$ es $-z = -2i$.

El opuesto de $z = 7$ es $-z = -7$.

El opuesto de $z = 0$ es $-z = 0$.

e) El conjugado de $z = 3 + 2i$ es $\overline{z} = 3 - 2i$.

El conjugado de $z = 2i$ es $\overline{z} = -2i$.

El conjugado de $z = 0$ es $\overline{z} = 0$.

El conjugado de $z = -\sqrt{3} + 5i$ es $\overline{z} = -\sqrt{3} - 5i$.

El conjugado de $z = 7$ es $\overline{z} = 7$.

## Página 155

**3 Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles son imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:**

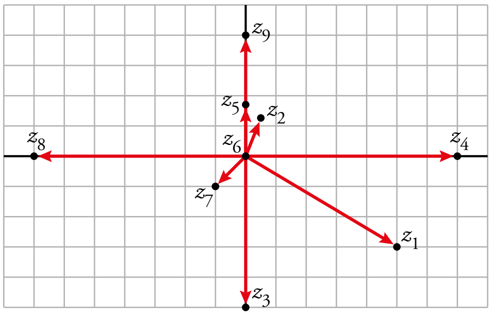
$$\mathbf{5 - 3i;\ \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i;\ -5i;\ 7;\ \sqrt{3}i;\ 0;\ -1 - i;\ -7;\ 4i}$$

Si llamamos:

$z_1 = 5 - 3i$ $\qquad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{4}i$ $\qquad z_3 = -5i$

$z_4 = 7$ $\qquad z_5 = \sqrt{3}\,i$ $\qquad z_6 = 0$

$z_7 = -1 - i$ $\qquad z_8 = -7$ $\qquad z_9 = 4i$




Son reales $z_4$, $z_6$ y $z_8$. El resto son imaginarios. Son imaginarios puros $z_3$, $z_5$ y $z_9$.

**4 Resuelve las ecuaciones y representa las soluciones.**

**a)** $\mathbf{z^2 + 4 = 0}$

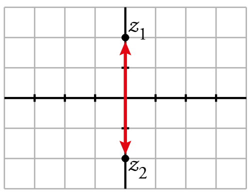
**b)** $\mathbf{z^2 + 6z + 10 = 0}$

**c)** $\mathbf{3z^2 + 27 = 0}$

**d)** $\mathbf{3z^2 - 27 = 0}$

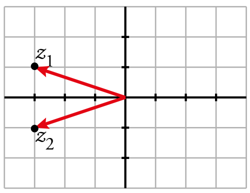
a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm\sqrt{-4} \rightarrow z = \pm i$

Las soluciones son $z_1 = i$ y $z_2 = -i$.



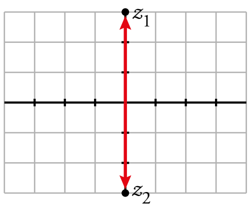

b) $z^2 + 6z + 10 = 0 \rightarrow z = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$

Las soluciones son: $z_1 = -3 + i$ y $z_2 = -3 - i$.



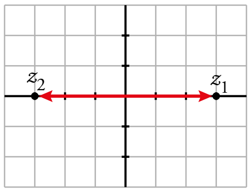

c) $3z^2 + 27 = 0 \rightarrow z^2 = -9 \rightarrow z = \pm\sqrt{-9} \rightarrow z = \pm 3i$

Las soluciones son $z_1 = 3i$ y $z_2 = -3i$.



d) $3z^2 - 27 = 0 \;\rightarrow\; z^2 = 9 \;\rightarrow\; z = \pm\sqrt{9} \;\rightarrow\; z = \pm 3$

Las soluciones son: $z_1 = 3$ y $z_2 = -3$.



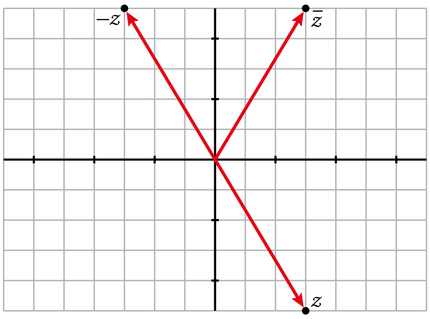

**5** **Representa gráficamente cada número complejo, su opuesto y su conjugado.**

**a)** $\boldsymbol{3 - 5i}$ **b)** $\boldsymbol{5 + 2i}$ **c)** $\boldsymbol{-1 - 2i}$

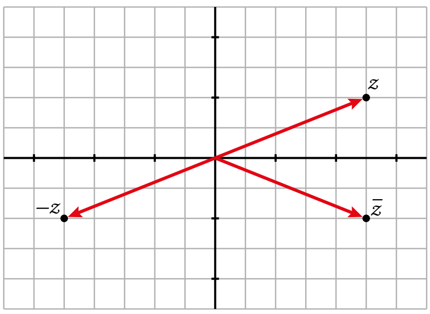
**d)** $\boldsymbol{-2 + 3i}$ **e)** $\boldsymbol{5}$ **f)** $\boldsymbol{0}$

**g)** $\boldsymbol{2i}$ **h)** $\boldsymbol{-5i}$ **i)** $\boldsymbol{-2}$

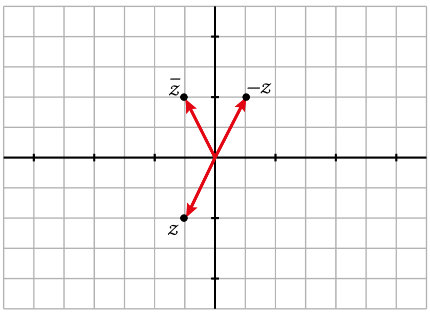
a) $z = 3 - 5i \;\rightarrow\; \begin{cases} -z = -3 + 5i \\ \overline{z} = 3 + 5i \end{cases}$



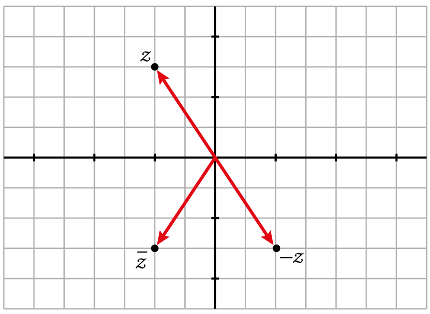

b) $z = 5 + 2i \;\rightarrow\; \begin{cases} -z = -5 - 2i \\ \overline{z} = 5 - 2i \end{cases}$



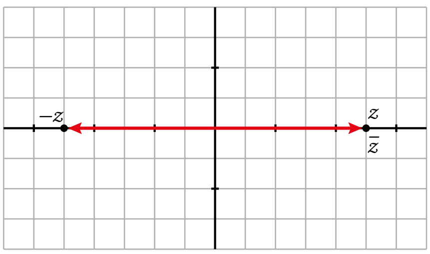

c) $z = -1 - 2i \;\rightarrow\; \begin{cases} -z = 1 + 2i \\ \overline{z} = -1 + 2i \end{cases}$



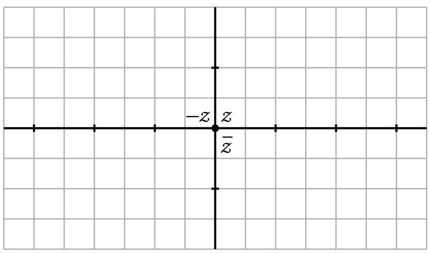

d) $z = -2 + 3i \;\rightarrow\; \begin{cases} -z = 2 - 3i \\ \overline{z} = -2 - 3i \end{cases}$



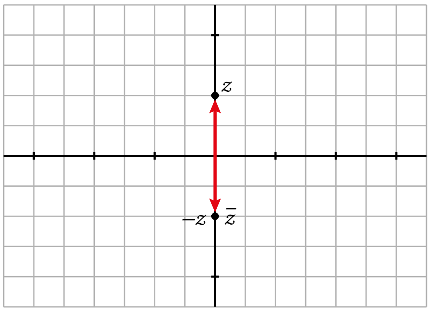

e) $z = 5 + 0i \;\rightarrow\; \begin{cases} -z = -5 + 0i \\ \overline{z} = 5 - 0i \end{cases}$



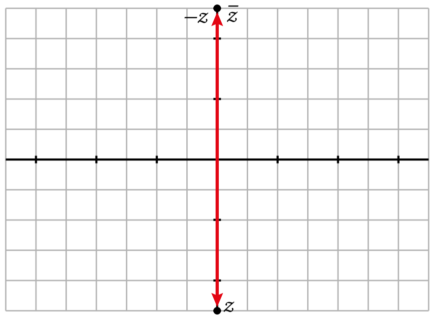

f) $z = 0 + 0i \;\rightarrow\; \begin{cases} -z = 0 + 0i \\ \overline{z} = 0 - 0i \end{cases}$



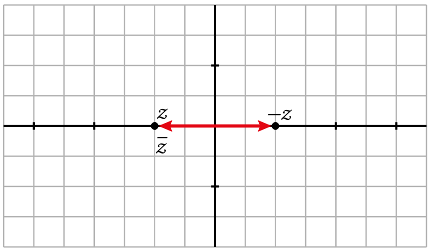
g) $z = 0 + 2i \;\rightarrow\; \begin{cases} -z = 0 - 2i \\ \overline{z} = 0 - 2i \end{cases}$




h) $z = 0 - 5i \;\rightarrow\; \begin{cases} -z = 0 + 5i \\ \overline{z} = 0 + 5i \end{cases}$




i) $z = -2 + 0i \;\rightarrow\; \begin{cases} -z = 2 - 0i \\ \overline{z} = -2 - 0i \end{cases}$




**6** **[La búsqueda del método para solucionar la ecuación permite poner en práctica la asunción de riesgos de la dimensión productiva de esta clave].**

**¿Cuántas soluciones tiene $z^3 + 2z^2 + 17z = 0$? Hállalas y represéntalas.**

Sacamos $z$ factor común y ya tenemos que $z = 0$ es una solución:

$$z(z^2 + 2z + 17) = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 17}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{4(1-17)}}{2} = -1 \pm \frac{2\sqrt{(-16)}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{16i}}{2} = 1 \pm 4i$$

Por lo que sus dos soluciones imaginarias son conjugadas.

# 2 ▶ OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

## Página 156

**1** **¿Verdadero o falso?**

**a) La suma de un número complejo y su opuesto es 0.**

**b) La suma de un número complejo y su conjugado es un número imaginario puro.**

**c) La suma de un número complejo y su conjugado es un número real.**

**d) El cuadrado de un número complejo cualquiera es un número real.**

**e) El cuadrado de un número imaginario puro es un número real.**

**f) El cociente de dos números imaginarios puros es un número real pues** $\frac{ai}{a'i} = \frac{a}{a'}$**.**

a) Verdadero. En efecto, $(a + bi) + (-a - bi) = 0$.

b) Falso. Por ejemplo, $(5 + 3i) + (5 - 3i) = 10$.

c) Verdadero. Porque $(a + bi) + (a - bi) = 2a$ es un número real.

d) Falso. Por ejemplo, $(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i$ no es un número real.

e) Verdadero. En efecto, $(bi)^2 = b^2 i^2 = -b^2$ es un número real.

f) Verdadero. Podemos simplificar la fracción dividiendo numerador y denominador entre $i$.

## Página 157

### Hazlo tú

**1** **Obtén un polinomio de segundo grado cuyas raíces sean** $\sqrt{2}i$ **y** $-\sqrt{2}i$**.**

$P(x) = (x - \sqrt{2}i)[x - (-\sqrt{2}i)] = (x - \sqrt{2}i)(x + \sqrt{2}i) = x^2 - (\sqrt{2}i)^2 = x^2 - (-2) = x^2 + 2$

### Piensa y practica

**2** **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:**

**a)** $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i)$

**b)** $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)$

**c)** $(3 + 2i)(4 - 2i)$

**d)** $(2 + 3i)(5 - 6i)$

**e)** $(-i + 1)(3 - 2i)(1 + 3i)$

**f)** $\frac{2 + 4i}{4 - 2i}$

**g)** $\frac{1 - 4i}{3 + i}$

**h)** $\frac{4 + 4i}{-3 + 5i}$

**i)** $\frac{5 + i}{-2 - i}$

**j)** $\frac{1 + 5i}{3 + 4i}$

**k)** $\frac{4 - 2i}{i}$

**l)** $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$

**m)** $\frac{(-3i)^2(1 - 2i)}{2 + 2i}$

a) $(6 - 5i) + (2 - i) - 2(-5 + 6i) = 6 - 5i + 2 - i + 10 - 12i = 18 - 18i$

b) $(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i) = 2 - 3i - 5 - 4i + 3 - 2i = -9i$

c) $(3 + 2i)(4 - 2i) = 12 - 6i + 8i - 4i^2 = 12 + 2i + 4 = 16 + 2i$

d) $(2 + 3i)(5 - 6i) = 10 - 12i + 15i - 18i^2 = 10 + 3i + 18 = 28 + 3i$

e) $(-i+1)(3-2i)(1+3i) = (-3i+2i^2+3-2i)(1+3i) = (3-2-5i)(1+3i) =$

$= (1-5i)(1+3i) = 1+3i-5i-15i^2 = 1+15-2i = 16-2i$

f) $\dfrac{2+4i}{4-2i} = \dfrac{(2+4i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \dfrac{8+4i+16i+8i^2}{16-4i^2} = \dfrac{20i}{16+4} = \dfrac{20i}{20} = i$

g) $\dfrac{1-4i}{3+i} = \dfrac{(1-4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{3-i-12i+4i^2}{9-i^2} = \dfrac{3-13i-4}{9+1} = \dfrac{-1-13i}{10} = \dfrac{-1}{10} - \dfrac{13}{10}i$

h) $\dfrac{4+4i}{-3+5i} = \dfrac{(4+4i)(-3-5i)}{(-3+5i)(-3-5i)} = \dfrac{-12-20i-12i-20i^2}{9-25i^2} = \dfrac{-12-32i+20}{9+25} =$

$= \dfrac{8-32i}{34} = \dfrac{8}{34} - \dfrac{32}{34}i = \dfrac{4}{17} - \dfrac{16}{17}i$

i) $\dfrac{5+i}{-2-i} = \dfrac{(5+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \dfrac{-10+5i-2i+i^2}{4+1} = \dfrac{-10+3i-1}{5} = \dfrac{-11+3i}{5} = \dfrac{-11}{5} + \dfrac{3}{5}i$

j) $\dfrac{1+5i}{3+4i} = \dfrac{(1+5i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3-4i+15i-20i^2}{9-16i^2} = \dfrac{3+11i+20}{9+16} = \dfrac{23+11i}{25} = \dfrac{23}{25} + \dfrac{11}{25}i$

k) $\dfrac{4-2i}{i} = \dfrac{(4-2i)(-i)}{i(-i)} = \dfrac{-4i+2i^2}{1} = -4i-2 = -2-4i$

l) $6 - 3\left(5 + \dfrac{2}{5}i\right) = 6 - 15 + \dfrac{6}{5}i = -9 + \dfrac{6}{5}i$

m) $\dfrac{(-3i)^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{9i^2(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9(1-2i)}{(2+2i)} = \dfrac{-9+18i}{(2+2i)} = \dfrac{(-9+18i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} =$

$= \dfrac{-18+18i+36i-36i^2}{4-4i^2} = \dfrac{-18+54i+36}{4+4} = \dfrac{18+54i}{8} = \dfrac{18}{8} + \dfrac{54}{8}i = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{4}i$

**3** **Halla las siguientes potencias:**

**a)** $\mathbf{(2+3i)^3}$ **b)** $\mathbf{(1-2i)^4}$

a) $(2+3i)^3 = \binom{3}{0}2^3 + \binom{3}{1}2^2\cdot 3i + \binom{3}{2}2\cdot(3i)^2 + \binom{3}{3}(3i)^3 =$

$= 8 + 3\cdot 4\cdot 3i + \dfrac{3\cdot 2}{2}\cdot 2\cdot(-9) + 27i(-1) = 8 + 36i - 54 - 27i = -46 + 9i$

b) $(1-2i)^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1}1^3(-2i) + \binom{4}{2}1^2(-2i)^2 + \binom{4}{3}1\cdot(-2i)^3 + \binom{4}{4}(-2i)^4 =$

$= 1 + 4\cdot(-2i) + \dfrac{3\cdot 4}{2}\cdot(-4) + \dfrac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}(-8)i^3 + 16 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i$

**4** **Obtén polinomios cuyas raíces sean:**

**a)** $\mathbf{2+\sqrt{3}\,i}$ **y** $\mathbf{2-\sqrt{3}\,i}$

**b)** $\mathbf{-3i}$ **y** $\mathbf{3i}$

**c)** $\mathbf{1+2i}$ **y** $\mathbf{3-4i}$

**(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales).**

a) $[x-(2+\sqrt{3}i)]\,[x-(2-\sqrt{3}i)] = [(x-2)-\sqrt{3}i]\,[(x-2)+\sqrt{3}i] = (x-2)^2 - (\sqrt{3}i)^2 =$

$= x^2 - 4x + 4 - 3i^2 = x^2 - 4x + 4 + 3 = x^2 - 4x + 7$

b) $[x-(-3i)]\,[x-3i] = [x+3i]\,[x-3i] = x^2 - 9i^2 = x^2 + 9$

c) $[x-(1+2i)]\,[x-(3-4i)] = [(x-1)-2i]\,[(x-3)+4i] =$

$= (x-1)(x-3) + 4(x-1)i - 2(x-3)i - 8i^2 =$

$= x^2 - 4x + 3 + (4x - 4 - 2x + 6)i + 8 = x^2 - 4x + 11 + (2x+2)i =$

$= x^2 - 4x + 11 + 2ix + 2i = x^2 + (-4+2i)x + (11+2i)$

**5** **Calcula $x$ para que $(25 - xi)^2$ sea imaginario puro. (Ayuda: desarrolla $(25 - xi)^2$ e iguala a cero la componente real).**

$(25 - xi)^2 = 625 + x^2 i^2 - 50xi = (625 - x^2) - 50xi$

Para que sea imaginario puro:

$625 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 625 \rightarrow x = \pm\sqrt{625} = \pm 25$

Hay dos soluciones: $x_1 = -25$, $x_2 = 25$

**6** **[El conocimiento de las propiedades de los números complejos necesario para resolver la actividad permite trabajar la productividad (dimensión productiva de esta clave)].**

**Calcula $x$ para que $(2 + xi)^2$ sea imaginario puro.**

Desarrollamos:

$$(2 + xi)^2 = 4 + x^2 i^2 + 4xi = 4 - x^2 + 4xi$$

Queremos que sea imaginario puro, es decir que no tenga parte real, por lo que se tiene que cumplir:

$$4 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$$

# 3 ▶ NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

**C.E.: CE 1.10.** (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 2.2.** (EA 2.2.1.)

## Página 159

**1** Parada de 5 minutos. **[La reflexión por parejas que plantea esta técnica puede ser una buena forma de que el alumnado coopere para decidir si las afirmaciones son verdaderas o falsas].**

**¿Verdadero o falso?**

**a) Los módulos de dos números complejos opuestos son iguales pero con signos distintos.**

**b) Los módulos de dos complejos opuestos son iguales.**

**c) Los módulos de dos complejos conjugados son iguales.**

**d) Los argumentos de dos números complejos opuestos difieren en 180°.**

**e) Los argumentos de dos números complejos conjugados son opuestos** $(\alpha \text{ y } -\alpha)$.

**f) El argumento de cualquier número real es 0°.**

**g) El argumento de los números reales negativos es 180°.**

**h) El argumento de un imaginario puro es 90° o 270°.**

a) Falso. El módulo de un número complejo no nulo siempre es un número positivo.

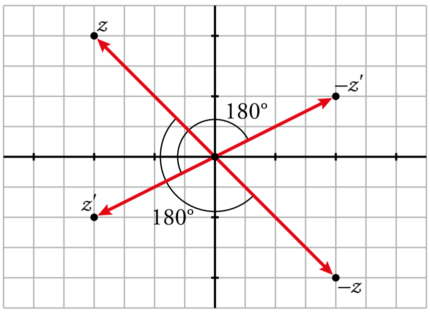
b) Verdadero.

Si $z = a + bi \to -z = -a - bi \to |-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

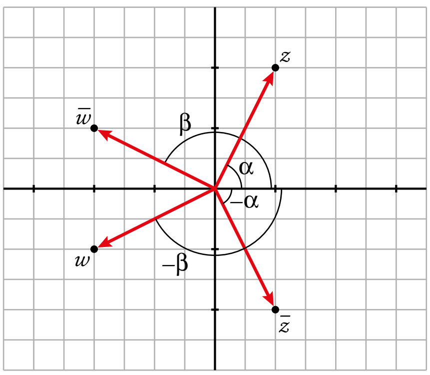
c) Verdadero.

Si $z = a + bi \to \overline{z} = a - bi \to |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

d) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:




e) Verdadero. Podemos verlo en el gráfico siguiente:




f) Falso. Solo los números reales positivos tienen argumento 0°.

g) Verdadero, porque sus afijos están en el eje horizontal negativo que forma 180° con el eje horizontal positivo.

h) Verdadero, porque su afijo está en el eje vertical que forma 90° con el eje horizontal positivo, en el caso en que la parte imaginaria sea positiva, y 270° en el caso en que la parte imaginaria sea negativa.

**2** **Escribe en forma polar los siguientes números complejos:**

**a)** $1+\sqrt{3}i$ **b)** $\sqrt{3}+i$ **c)** $-1+i$

**d)** $5-12i$ **e)** $3i$ **f)** $-5$

a) $1+\sqrt{3}\,i = 2_{60°}$ b) $\sqrt{3}+i = 2_{30°}$ c) $-1+i = \sqrt{2}_{135°}$

d) $5-12i = 13_{292°\,37'}$ e) $3i = 3_{90°}$ f) $-5 = 5_{180°}$

**3** **Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado de $r_\alpha$.**

Opuesto: $-z = r_{180°+\alpha}$ Conjugado: $\overline{z} = r_{360°-\alpha}$

**4** **Escribe en forma binómica estos números complejos:**

**a)** $5_{(\pi/6)\ rad}$ **b)** $2_{135°}$ **c)** $2_{495°}$

**d)** $3_{240°}$ **e)** $5_{180°}$ **f)** $4_{90°}$

a) $5_{(\pi/6)} = 5\left(cos\,\frac{\pi}{6} + i\,sen\,\frac{\pi}{6}\right) = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

b) $2_{135°} = 2\,(cos\,135° + i\,sen\,135°) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

c) $2_{495°} = 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

d) $3_{240°} = 3\,(cos\,240° + i\,sen\,240°) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

e) $5_{180°} = -5$

f) $4_{90°} = 4i$

**5** **Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:**

$z = 8(cos\ 30° + i\ sen\ 30°)$

$z = 8_{30°} = 8\,(cos\,30° + i\,sen\,30°) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{2} + \frac{8}{2}i = 4\sqrt{3} + 4i$

**6** **Sean los números complejos $z_1 = 4_{60°}$ y $z_2 = 3_{210°}$.**

**a)** **Expresa $z_1$ y $z_2$ en forma binómica.**

**b)** **Halla $z_1 \cdot z_2$ y $z_2/z_1$, y exprésalos en forma polar.**

**c)** **Compara los módulos de $z_1 \cdot z_2$ y de $z_2/z_1$ con los de $z_1$ y $z_2$ e intenta encontrar relaciones entre ellos.**

a) $z_1 = 4_{60°} = 4\,(cos\,60° + i\,sen\,60°) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

$z_2 = 3_{210°} = 3\,(cos\,210° + i\,sen\,210°) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

b) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 2\sqrt{3}\,i)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right) = -3\sqrt{3} - 3i - 9i - 3\sqrt{3}\,i^2 = -3\sqrt{3} - 12i + 3\sqrt{3} = -12i = 12_{270°}$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)}{(2 + 2\sqrt{3}\,i)} = \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)(2 - 2\sqrt{3}\,i)}{(2 + 2\sqrt{3}\,i)\,(2 - 2\sqrt{3}\,i)} = \frac{-3\sqrt{3} - 3i + 9i + 3\sqrt{3}\,i^2}{4 - 12i^2} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3} + 6i - 3\sqrt{3}}{4 + 12} = \frac{-6\sqrt{3} + 6i}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$$

c) $z_1 \cdot z_2 = 4_{60°} \cdot 3_{210°} = (4 \cdot 3)_{60° + 210°} = 12_{270°}$

$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3_{210°}}{4_{60°}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{210° - 60°} = \left(\frac{3}{4}\right)_{150°}$

**7** **Realiza el ejercicio 3 de la página 157 pasando primero a forma polar. Convierte la solución a forma binómica y comprueba que obtienes los mismos resultados.**

a) En el ejercicio 3a) de la página 157 hemos visto que $(2+3i)^3 = -46+9i$.

Pasamos a forma polar, veamos que $2+3i = \sqrt{13}_{56^\circ 19'}$

Empezamos buscando el módulo: $r = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

Busquemos su argumento: $tg\,\alpha = \dfrac{3}{2} \rightarrow \alpha = 56,31^\circ = 56^\circ 19'$

Calculamos ahora $(2+3i)^3 = (\sqrt{13}_{56^\circ 19'})^3$, que tendrá módulo igual a $13\sqrt{13}$ y argumento $56^\circ 19' \cdot 3 = 169^\circ 10'$.

Por lo tanto: $(2+3i)^3 = (13\sqrt{13})_{169^\circ 10'}$

Pasemos ahora la solución a binómica para ver que obtenemos el mismo resultado.

$$a = 13\sqrt{13}\,cos(169^\circ 10') = -46$$

$$b = 13\sqrt{13}\,sen(169^\circ 10') = 9$$

b) En la actividad 3b) de la página 157 hemos visto que $(1-2i)^4 = -7+24i$.

Pasamos a forma polar. Veamos que $1-2i = \sqrt{5}_{-63^\circ 26'}$.

$r = \sqrt{1+5} = \sqrt{5}$

$tg\,\alpha = -2 \rightarrow \alpha = -63^\circ 26'$

Calculamos ahora $(1-2i)^4 = (\sqrt{5}_{-63^\circ 26'})^4$ que tendrá módulo 25 y su argumento será:

$-63^\circ 26' \cdot 4 = -253^\circ 44' = -253,74^\circ + 360^\circ = 106^\circ 16'$

Por lo tanto: $(1-2i)^4 = 25_{106^\circ 16'}$

Pasemos ahora la solución a binómica para ver que obtenemos el mismo resultado.

$$a = 25\,cos(106^\circ 26') = -7$$

$$b = 25\,sen(106^\circ 16') = 24$$

# 4 ▶ OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR

**C.E.: CE 1.10.** (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) **CE 2.2.** (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

## Página 160

**1 ¿Verdadero o falso?**

**a) Al multiplicar un número complejo $z$ por la unidad imaginaria $i$, se gira 90° alrededor del origen.**

**b) Al dividir $z$ por $i$, se gira 90° alrededor del origen en el sentido de las agujas del reloj.**

**c) El módulo de $r_\alpha \cdot r'_\beta$ puede ser menor que $r$.**

**d) $(r_{45°})^4$ es un número real negativo.**

**e) $r_{30°}$ y $r_{330°}$ son conjugados.**

**f) $r_{30°}$ y $r_{210°}$ son opuestos.**

a) Verdadero, porque $i = 1_{90°}$. Al multiplicar por $i$ mantenemos el módulo del número complejo y sumamos un ángulo de 90° a su argumento, es decir, lo giramos 90° en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

b) Verdadero, porque $i = 1_{90°}$. Al dividir por $i$ mantenemos el módulo del número complejo y restamos un ángulo de 90° a su argumento, es decir, lo giramos 90° en el sentido de las agujas del reloj.

c) Verdadero. Si $r' < 1$ el módulo del producto, que es $r \cdot r'$, es menor que $r$.

d) Verdadero. $(r_{45°})^4 = (r^4)_{4 \cdot 45°} = (r^4)_{180°}$ que está en la parte negativa del eje real.

e) Verdadero. 330° = –30°. Por tanto, son números complejos conjugados.

f) Verdadero. Los ángulos 210° y 30° se diferencian en 180°. Por tanto, son números complejos opuestos.

## Página 161

### Hazlo tú

**1 Halla $z_1/z_2$; $z_1^6$; $z_2^3$.**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4_{60°}}{3_{210°}} = \left(\frac{4}{3}\right)_{60° - 210°} = \left(\frac{4}{3}\right)_{-150°} = \left(\frac{4}{3}\right)_{210°}$$

$$z_1^6 = (4_{60°})^6 = (4^6)_{6 \cdot 60°} = 4\,096_{360°} = 4\,096_{0°}$$

$$z_2^3 = (3_{210°})^3 = (3^3)_{3 \cdot 210°} = 27_{630°} = 27_{270°}$$

### Piensa y practica

**2 Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:**

**a) $1_{150°} \cdot 5_{30°}$**

**b) $6_{45°} : 3_{15°}$**

**c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°}$**

**d) $5_{(2\pi/3)\ rad} : 1_{60°}$**

**e) $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$**

**f) $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$**

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°} = 5_{180°} = -5$

b) $6_{45°} : 3_{15°} = 2_{30°} = 2\,(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°} = 6_{120°} = 6\,(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3\sqrt{3}\,i$

d) $5_{(2\pi/3)\,rad} : 1_{60°} = 5_{120°} : 1_{60°} = 5_{60°} = 5\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 5\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

e) $(1 - \sqrt{3}\,i)^5 = (2_{300°})^5 = 32_{1\,500°} = 32_{60°} = 32\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 32\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 16 + 16\sqrt{3}\,i$

f) $4i = 4_{90°}$

**3** **Compara los resultados en cada caso.**

**a)** $(2_{30°})^3$, $(2_{150°})^3$, $(2_{270°})^3$

**b)** $(2_{60°})^4$, $(2_{150°})^4$, $(2_{240°})^4$, $(2_{330°})^4$

a) $(2_{30°})^3 = 2^3_{3\cdot 30°} = 8_{90°}$

$(2_{150°})^3 = 2^3_{3\cdot 150°} = 8_{450°} = 8_{90°}$

$(2_{270°})^3 = 8_{3\cdot 270°} = 8_{810°} = 8_{90°}$

b) $(2_{60°})^4 = 2^4_{4\cdot 60°} = 16_{240°}$

$(2_{150°})^4 = 16_{600°} = 16_{240°}$

$(2_{240°})^4 = 16_{960°} = 16_{240°}$

$(2_{330°})^4 = 16_{1\,320°} = 16_{240°}$

**4** **Dados los complejos** $z = 5_{45°}$, $w = 2_{15°}$, $t = 4i$, **obtén en forma polar:**

**a)** $z \cdot t$

**b)** $\dfrac{z}{w^2}$

**c)** $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2}$

**d)** $\dfrac{z \cdot w^3}{t}$

$z = 5_{45°}$ $\quad w = 2_{15°}$ $\quad t = 4i = 4_{90°}$

a) $z \cdot w = 10_{60°}$

b) $\dfrac{z}{w^2} = \dfrac{z}{4_{30°}} = \dfrac{5_{45°}}{4_{30°}} = \left(\dfrac{5}{4}\right)_{15°}$

c) $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2} = \dfrac{125_{135°}}{2_{15°} \cdot 16_{180°}} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{-60°} = \left(\dfrac{125}{32}\right)_{300°}$

d) $\dfrac{z \cdot w^3}{t} = \dfrac{5_{45°} \cdot 8_{45°}}{4_{90°}} = 10_{0°} = 10$

**5** **Expresa** $\cos 3\alpha$ **y** $\text{sen}\, 3\alpha$ **en función de** $\text{sen}\, \alpha$ **y** $\cos \alpha$ **utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que:**

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(1_\alpha)^3 = 1\,(\cos \alpha + i\, \text{sen}\, \alpha)^3 = \cos^3 \alpha + i\, 3 \cos^2 \alpha\, \text{sen}\, \alpha + 3\, i^2 \cos \alpha\, \text{sen}^2 \alpha + i^3\, \text{sen}^3 \alpha =$

$= \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha\, \text{sen}\, \alpha\, i - 3 \cos \alpha\, \text{sen}^2 \alpha - i\, \text{sen}^3 \alpha =$

$= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha\, \text{sen}^2 \alpha) + (3 \cos^2 \alpha\, \text{sen}\, \alpha - \text{sen}^3 \alpha)\, i$

Por otra parte: $(1_\alpha)^3 = 1_{3\alpha} = \cos 3\alpha + i\, \text{sen}\, 3\alpha$

Por tanto: $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha\, \text{sen}^2 \alpha$

$\text{sen}\, 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha\, \text{sen}\, \alpha - \text{sen}^3 \alpha$

# 5 ▶ RADICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

## Página 163

**1 ¿Verdadero o falso?**

**a) Los números reales negativos no tienen raíces cuadradas en el campo complejo.**

**b) El real –9 tiene dos raíces imaginarias puras, $3i$ y $-3i$.**

**c) El número 16 tiene dos raíces cuartas reales, 2 y –2, y otras dos imaginarias puras, $2i$ y $-2i$.**

**d) Ninguna de las cuatro raíces cuartas de –16 es un número real.**

**e) El número –8 tiene una raíz cúbica real, el –2. Las otras dos raíces cúbicas son números imaginarios conjugados.**

**f) $2_{84°}$ es una raíz quinta de $32_{60°}$.**

a) Falso. Las raíces cuadradas de los números reales negativos son números complejos imaginarios puros.

b) Verdadero. Porque $(3i)^2 = 3^2 i^2 = -9$ y $(-3i)^2 = (-3)^2 i^2 = -9$.

c) Verdadero. Porque $2^4 = 16$, $(-2)^4 = 16$, $(2i)^4 = 2^4 i^4 = 16$ y $(-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16$.

d) Verdadero. La potencia cuarta de un número real no nulo siempre es un número positivo y no puede dar nunca –16.

e) Verdadero. Las raíces están en los vértices de un triángulo equilátero y son $2_{60°}$, $-2 = 2_{180°}$ y $2_{300°}$.

Como los ángulos 300° y 60° son opuestos porque 300° = 360° – 60°, los correspondientes números son conjugados.

f) Verdadero: $(2_{84°})^5 = (2^5)_{5 \cdot 84°} = 32_{420°} = 32_{60°}$

**2 Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.**

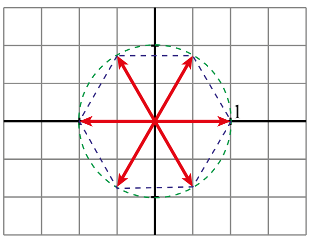
$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1_{0°}} = 1_{(360° \cdot k)/6} = 1_{60° \cdot k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$1_{0°} = 1$ $\qquad 1_{60°} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad 1_{120°} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1_{180°} = -1$ $\qquad 1_{240°} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\qquad 1_{300°} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Representación



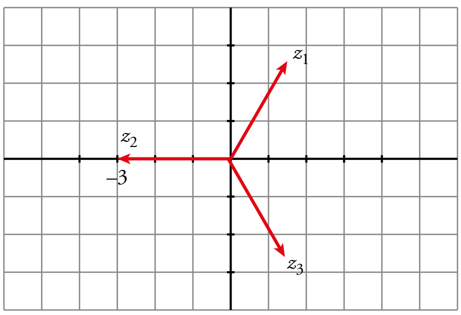

**3 Resuelve $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.**

$z^3 + 27 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° + 360° n)/3} = 3_{60° + 120° n}$; $n = 0, 1, 2$

$z_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z_2 = 3_{180°} = -3$

$z_3 = 3_{300°} = 3(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°) = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$



**4** **Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $\boldsymbol{z^4 + 81 = 0}$ **b)** $\boldsymbol{z^6 + 64 = 0}$

a) $z^4 + 81 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81_{180°}} = 3_{(180° + 360°\,k)/2} = 3_{45° + 90°\,k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$3_{45°} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i;\ 3_{135°} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i;\ 3_{225°} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i;\ 3_{315°} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$$

b) $z^6 + 64 = 0 \rightarrow z = \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/6} = 2_{30° + 60°\,k};\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$$2_{30°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \qquad 2_{90°} = 2i$$

$$2_{150°} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i \qquad 2_{210°} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$2_{270°} = -2i \qquad 2_{330°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

**5** **Calcula.**

**a)** $\sqrt[3]{-i}$ **b)** $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$ **c)** $\sqrt{-25}$ **d)** $\sqrt[3]{\dfrac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}}$

a) $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270°}} = 1_{(270° + 360°\,k)/3};\ k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$$1_{90°} = i \qquad 1_{210°} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad 1_{330°} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i} = \sqrt[4]{16_{120°}} = 2_{(120° + 360°\,k)/4} = 2_{30° + 90°\,k};\ k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

$$2_{30°} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i \qquad 2_{120°} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2_{210°} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -1 - \sqrt{3}i \qquad 2_{300°} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3} \cdot i$$

c) $\sqrt{-25} = \sqrt{25_{180°}} = 5_{(180° + 360°\,k)/2} = 5_{90° + 180°\,k};\ k = 0, 1$

Las dos raíces son: $5_{90°} = 5i;\ 5_{270°} = -5i$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}\,i}} = \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{8}_{135°}}{2_{60°}}} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{75°}} = \sqrt[6]{2}_{(75° + 360°\,k)/3} = \sqrt[6]{2}_{25° + 120°\,k};\ k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son: $\sqrt[6]{2}_{25°};\ \sqrt[6]{2}_{145°};\ \sqrt[6]{2}_{265°}$

**6** **Comprueba que si** $\boldsymbol{z}$ **y** $\boldsymbol{w}$ **son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones:**

$$\boldsymbol{z \cdot w,\ \frac{z}{w},\ z^2,\ z^3}$$

$z$ y $w$ raíces sextas de 1 $\rightarrow z^6 = 1,\ w^6 = 1$

$(z \cdot w)^6 = z^6 \cdot w^6 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z \cdot w$ es raíz sexta de 1.

$\left(\dfrac{z}{w}\right)^6 = \dfrac{z^6}{w^6} = \dfrac{1}{1} = 1 \rightarrow \dfrac{z}{w}$ es raíz sexta de 1.

$(z^2)^6 = z^{12} = (z^4)^3 = 1^3 = 1 \rightarrow z^2$ es raíz sexta de 1.

$(z^3)^6 = z^{18} = z^{16} \cdot z^2 = (z^4)^4 \cdot z^2 = 1^4 \cdot 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow z^3$ es raíz sexta de 1.

**7** **El número $4 + 3i$ es la raíz cuarta de un cierto número complejo, $z$. Halla las otras tres raíces cuartas de $z$.**

$4 + 3i = 5_{36°\,52'}$

Las otras tres raíces cuartas de $z$ serán:

$5_{36°\,52' + 90°} = 5_{126°\,52'} = -3 + 4i$

$5_{36°\,52' + 180°} = 5_{216°\,52'} = -4 - 3i$

$5_{36°\,52' + 270°} = 5_{306°\,52'} = 3 - 4i$

**8** **Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:**

**a)** $\sqrt{-121}$ **b)** $\sqrt[3]{-125}$ **c)** $\sqrt[3]{2 - 2i}$

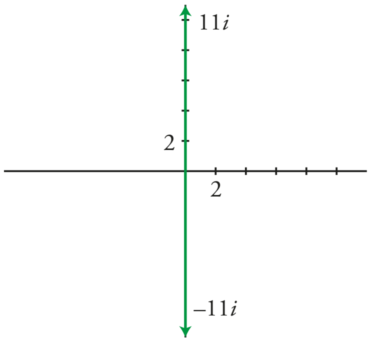
**d)** $\sqrt[3]{\dfrac{1 - i}{1 + i}}$ **e)** $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}}$ **f)** $\sqrt[3]{64i}$

a) $\sqrt{-121} = \sqrt{121_{180°}} = \sqrt{121}_{\frac{180°}{2}} = 11_{90° + 180°\,k}$ para $k = 0, 1$

Sus argumentos son $90°$ y $270°$ por lo que sus dos raíces serán:

$z_1 = 11_{90°} = 11i$

$z_2 = 11_{270°} = -11i$



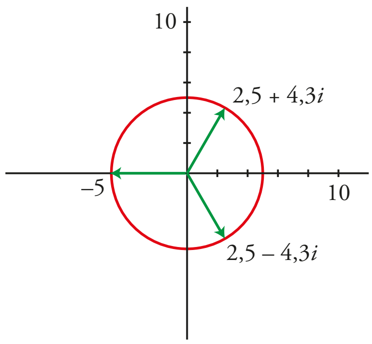

b) $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{125_{180°}} = \sqrt[3]{125}_{\frac{180°}{3}} = 5_{60° + 120°k}$ para $k = 0, 1, 2$

Sus tres raíces son

$z_1 = 5_{60°} = 2{,}5 + 4{,}3i$

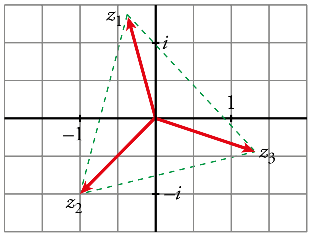
$z_2 = 5_{180°} = -5$

$z_3 = 5_{300°} = 2{,}5 - 4{,}3i$



c) $\sqrt[3]{2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{315°}} = \sqrt{2}_{(315° + 360°\, k)/3} = \sqrt{2}_{105° + 120°\, k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:



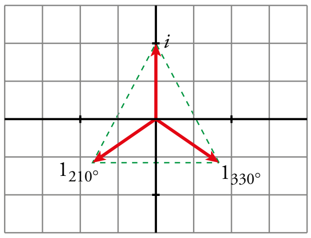

$z_1 = \sqrt{2}_{105°} = -0,37 + 1,37i$

$z_2 = \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

$z_3 = \sqrt{2}_{345°} = 1,37 - 0,37i$

d) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}_{315°}}{\sqrt{2}_{45°}}} = \sqrt[3]{1_{270°}} = 1_{(270° + 360°\, k)/3} = 1_{90° + 120°\, k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:



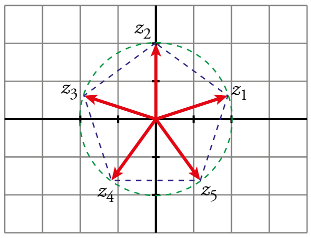

$1_{90°} = i$

$1_{210°} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$1_{330°} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

e) $\sqrt[5]{-\frac{32}{i}} = \sqrt[5]{-\frac{32\,(-i)}{i\,(-i)}} = \sqrt[5]{32i} = \sqrt[5]{32_{90°}} = 2_{(90° + 360°\, k)/5} = 2_{18° + 72°\, k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:




$z_1 = 2_{18°} = 1,9 + 0,6i$

$z_2 = 2_{90°} = 2i$

$z_3 = 2_{162°} = -1,9 + 0,6i$

$z_4 = 2_{234°} = -1,2 - 1,6i$

$z_5 = 2_{306°} = 1,2 - 1,6i$

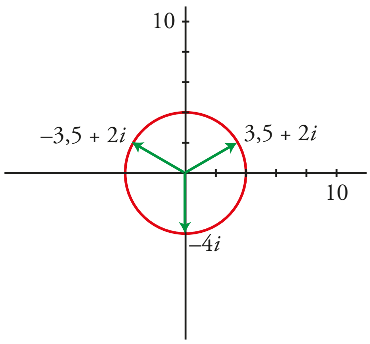
f) $\sqrt[3]{64i} = \sqrt[3]{64_{90°}} = 4_{\frac{90°}{3}} = 4_{30° + 120° k}$ para $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$z_1 = 4_{30°} = 3,5 + 2i$

$z_2 = 4_{150°} = -3,5 + 2i$

$z_3 = 4_{270°} = -4i$



# 6 ▶ NÚMEROS COMPLEJOS CON LA CALCULADORA

C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

## Página 164

**1 Comprueba con la calculadora los resultados de los ejercicios 2, 3 y 4 de la página 161.**

Ejercicio 2 de la página161.

a) Se configura la calculadora en formato complejos: [MENU] → **2:Complejos**

Como los números están en forma polar: [SHIFT] [MENU] [▼] → **2:Complejos** y se escoge la forma polar.

Para introducir los números, por ejemplo, $1_{150°}$, hay que pulsar:

1 [SHIFT] [ENG] 15

Para pasar el resultado del producto, en este caso $5_{180°}$, a forma polar:

[OPTN] [▼] 2 [=]

Y se obtiene el resultado, –5.

b) Se resuelve de forma análoga al apartado a).

c) Se resuelve de forma análoga al apartado a).

d) Se resuelve de forma análoga al apartado a) teniendo en cuenta que $2\pi/3 = 120°$.

e) En este caso, el número está dado en forma binomial, así que hay que configurar la calculadora en este modo: [SHIFT] [MENU] [▼] → **2:Complejos** y se escoge esta forma.

La operación se introduce de esta forma:

[(] 1 [–] [√■] 3 [▶] [ENG] [)] [x■] 5 [=]

Para pasar el resultado, en este caso, $16 + 27{,}713i$, a forma polar:

[OPTN] [▼] 1 [=]

Y se obtiene el resultado, $32_{60°}$.

f) Se resuelve de forma análoga al apartado e).

El ejercicio 3 de la página 161 se resuelve de forma análoga al ejercicio 1a) anterior.

El ejercicio 4 de la página 161 se resuelve de forma análoga al ejercicio 1a) anterior, teniendo en cuenta que previamente hay que hallar $t = 4i$ en forma polar.

**2 a) Halla las raíces cúbicas de 1 y las de –1 con la calculadora resolviendo las ecuaciones $x^3 - 1 = 0$ y $x^3 + 1 = 0$.**

**b) Halla las raíces cuartas de 16 y de –16.**

Para resolver este ejercicio hay que utilizar la configuración descrita en el recuadro «Cálculo de soluciones (complejas de una solución con la calculadora)».

a) Las raíces cúbicas de 1 son: $x_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2};\ x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

Las raíces cúbicas de –1 son: $x_1 = -1;\ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2};\ x_3 = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

b) Para hallar las raíces cuartas de 16 hay que resolver la ecuación $x^4 - 16 = 0$:

$x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = 2i;\ x_4 = -2i$

Para hallar las raíces cuartas de 16 hay que resolver la ecuación $x^4 + 16 = 0$:

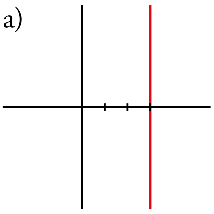
$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i;\ x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;\ x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i;\ x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

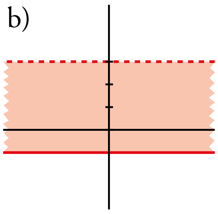
# 7 ▸ DESCRIPCIONES GRÁFICAS CON NÚMEROS COMPLEJOS

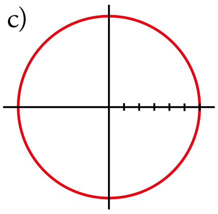
C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

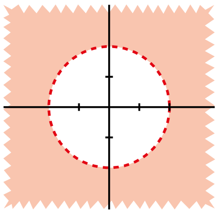
## Página 165

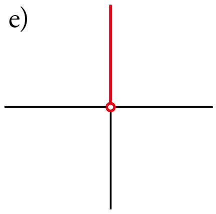
**1** **Describe con palabras cada una de las familias («son los números complejos cuya parte real vale…»), escribe su ecuación o inecuación (usando *Re*, *Im*, | |, *Arg*) y da un representante de cada una de ellas.**

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

a) $Re\ z = 3$

b) $-1 \le Im\ z < 3$

c) $|z| = 6$

d) $|z| > 2$

e) $Arg\ z = 90°$

**2** **Representa:**

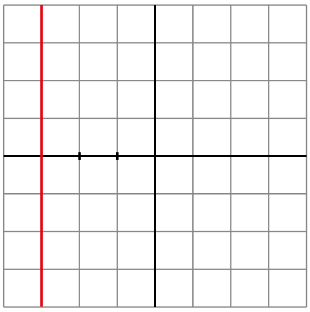
**a)** $Re\ (z) = -3$

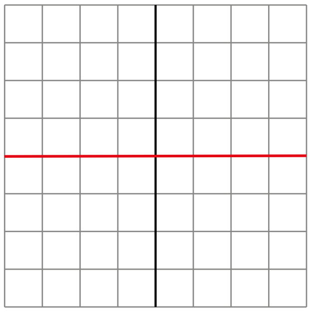
**b)** $Im\ (z) = 0$

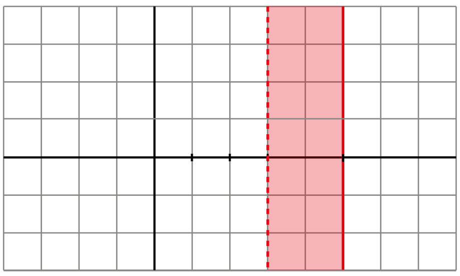
**c)** $3 < Re\ (z) \le 5$

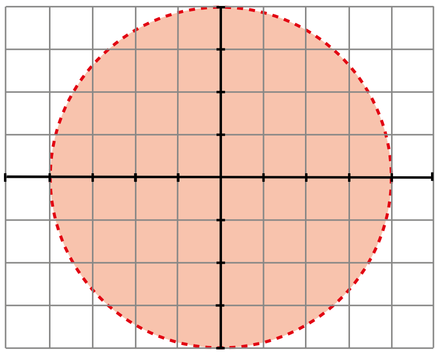
**d)** $|z| < 4$

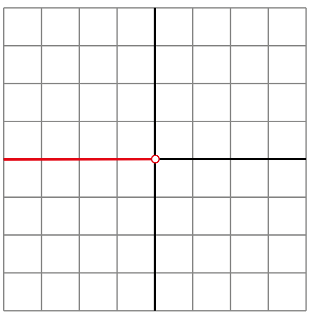
**e)** $Arg\ (z) = 180°$

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

# EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

## Página 166

### 1. Operaciones con números complejos en forma binómica

#### Hazlo tú

- **Calcula el valor de $a$ y $b$ para que se verifique $a - 3i = \dfrac{1+bi}{5-3i}$.**

Calculamos el segundo miembro de la igualdad.

$$\frac{1+bi}{5-3i} = \frac{(1+bi)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{5+3i+5bi+3bi^2}{25+9} = \frac{5-3b+(3+5b)i}{34}$$

Igualamos las partes real e imaginaria.

$$\begin{cases} a = \dfrac{5-3b}{34} \\ -3 = \dfrac{3+5b}{34} \end{cases} \to -102 = 3+5b \to b = -21$$

$$a = \frac{5-3b}{34} \to a = \frac{5-3(-21)}{34} \to a = 2$$

### 2. Números complejos conjugados

#### Hazlo tú

- **El producto de dos números complejos conjugados es $48_{0°}$ y el argumento de su cociente es 60°. Hállalos.**

Llamemos $r_\alpha$ y $r_{-\alpha}$ a los dos números complejos conjugados que buscamos.

$$r_\alpha \cdot r_{-\alpha} = 48_{0°} \to \begin{cases} r^2 = 48° \\ \alpha - \alpha = 0° \end{cases} \to r = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$r_\alpha / r_{-\alpha} = 1_{2\alpha} \to 2\alpha = 60° \to \alpha = 30°$$

Por tanto, los números son:

$$z_1 = (4\sqrt{3})_{30°}$$

$$z_2 = (4\sqrt{3})_{-30°} = (4\sqrt{3})_{330°}$$

### 3. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo y los números complejos

#### Hazlo tú

- **Halla *sen* 15° y *cos* 15° a partir del cociente $1_{45°} : 1_{30°}$.**

$1_{45°} : 1_{30°} = 1_{15°} = 1\,(cos\, 15° + i\, sen\, 15°) = cos\, 15° + i\, sen\, 15°$

$$\left.\begin{array}{l} 1_{45°} = 1\,(cos\, 45° + i\, sen\, 45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ 1_{30°} = 1\,(cos\, 30° + i\, sen\, 30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i \end{array}\right\} \to$$

$$\to \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{\sqrt{3}+i} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i+\sqrt{6}i+\sqrt{2}}{3+1} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i}{4}$$

Por tanto:

$$cos\,15° + i\,sen\,15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i \;\to\; \begin{cases} cos\,15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ sen\,15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

## Página 167

## 4. Operaciones con números complejos en forma polar

### Hazlo tú

- **Calcula y representa las soluciones de $\sqrt[4]{(-2+2\sqrt{3}\,i)^3}$.**

Pasamos $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ a forma polar teniendo en cuenta que se encuentra en el segundo cuadrante.

$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$tg\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \;\to\; \alpha = 120°$

Ahora calculamos $z^3 = (4_{120°})^3 = (4^3)_{3\,.\,120°} = 64_{360°} = 64_{0°}$

Las raíces cuartas buscadas son:

$\sqrt[4]{64_{0°}} = \sqrt[4]{64}_{\frac{0\cdot 360k}{4}}$; $k = 0, 1, 2, 3$

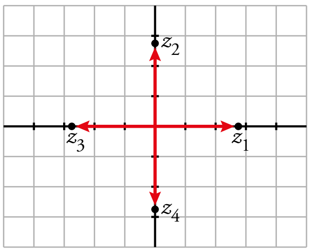
Si $k = 0 \;\to\; z_1 = 2\sqrt{2}_{0°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,0° + i\,sen\,0°) = 2\sqrt{2}$

Si $k = 1 \;\to\; z_2 = 2\sqrt{2}_{90°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,90° + i\,sen\,90°) = 2\sqrt{2}\,i$

Si $k = 2 \;\to\; z_3 = 2\sqrt{2}_{180°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,180° + i\,sen\,180°) = -2\sqrt{2}$

Si $k = 3 \;\to\; z_4 = 2\sqrt{2}_{270°} = 2\sqrt{2}\,(cos\,270° + i\,sen\,270°) = -2\sqrt{2}\,i$

La representación gráfica de las raíces es:




## 5. Resolución de ecuaciones en $\mathbb{C}$

### Hazlo tú

- **Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $z^4 + 1 = 0$

**b)** $iz + 3i - 2 = 1 + i$

a) $z^4 + 1 = 0 \;\to\; z^4 = -1 \;\to\; z = \sqrt[4]{-1}$

$-1 = 1_{180°}$. Por tanto, $z = \sqrt[4]{1_{180°}} = 1_{(180+360k)/4}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Si $k = 0 \;\to\; z_1 = 1_{45°} = 1\,(cos\,45° + i\,sen\,45°) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 1 \;\to\; z_2 = 1_{135°} = 1\,(cos\,135° + i\,sen\,135°) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{225°} = 1\,(cos\ 225° + i\ sen\ 225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{315°} = 1\,(cos\ 315° + i\ sen\ 315°) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $iz + 3i - 2 = 1 + i \rightarrow iz = 1 + i - 3i + 2 \rightarrow iz = 3 - 2i \rightarrow z = \frac{3-2i}{i} = \frac{(3-2i)\,i}{i \cdot i} = -2 - 3i$

## 6. Cálculo del valor de un parámetro real en una igualdad entre complejos

### Hazlo tú

- **Halla el valor de $x$:**

$\boldsymbol{\sqrt{x} = \sqrt{3+\sqrt{7}i} + \sqrt{3-\sqrt{7}i}}$

Elevamos al cuadrado los dos miembros y operamos:

$x = 3 + \sqrt{7}i + 3 - \sqrt{7}i + 2\sqrt{9 - 7i^2} = 6 + 8 = 14$

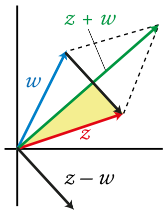
## Página 168

## 7. Ley del paralelogramo

### Hazlo tú

- **Si los vectores tuvieran el mismo módulo, formarían un rombo y sus diagonales serían perpendiculares. Interpreta gráficamente la situación para encontrar otra demostración del teorema de Pitágoras.**

Como dice el enunciado tenemos un rombo de diagonales perpendiculares, cuyos 4 lados tendrán igual módulo $z$. Consideremos el triángulo rectángulo coloreado, cuya hipotenusa será $z$, y sus catetos $\frac{z+w}{2}$ y $\frac{z-w}{2}$.




Sustituimos los datos que tenemos en nuestro caso concreto para ver que se cumple el teorema de Pitágoras:

$$2\left(|z|^2 + |w|^2\right) = |z+w|^2 + |z-w|^2 \rightarrow 2\left(|z|^2 + |z|^2\right) = |z+w|^2 + |z-w|^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4|z|^2 = |z+w|^2 + |z-w|^2 \rightarrow |z|^2 = \frac{|z+w|^2 + |z-w|^2}{4} = \frac{|z+w|^2}{4} + \frac{|z-w|^2}{4} = \left|\frac{z+w}{2}\right|^2 + \left|\frac{z-w}{2}\right|^2$$

# EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

## Página 169

### 1. Números reales y números imaginarios

- **Hallar el valor que debe tener $x$ para que el cociente $\frac{1+3xi}{3-4i}$ sea:**

  **a) Un número real.**

  **b) Un número imaginario puro.**

$$\frac{1+3xi}{3-4i} = \frac{(1+3xi)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+9xi+12xi^2}{9+16} = \frac{3-12x+(4+9x)i}{25}$$

a) Para que sea real, la parte imaginaria debe ser 0.

$4+9x=0 \ \rightarrow \ x=-\frac{9}{4}$

b) Para que sea imaginario puro, la parte real debe ser 0.

$3-12x=0 \ \rightarrow \ x=\frac{1}{4}$

### 2. Números complejos que cumplen ciertas condiciones

- **Hallar un número complejo que tenga el mismo módulo que $4\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ y cuyo afijo esté en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.**

El número buscado debe ser de la forma $a+ai$ para que esté en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.

$$|a+ai| = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2a^2}$$

$$|4\sqrt{2}+3\sqrt{2}i| = \sqrt{(4\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$$

Luego:

$$\sqrt{2a^2} = 5\sqrt{2} \ \rightarrow \ 2a^2=50 \ \rightarrow \ a^2=25 \ \rightarrow \ \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = -5 \end{cases}$$

Por tanto, los números complejos buscados son $z_1 = 5+5i$ y $z_2 = -5-5i$.

### 3. Suma de números complejos expresados en forma polar

- **Calcular:**

$$\mathbf{2_{\frac{\pi}{6}} - \sqrt{3}_{\pi} + 3_{\frac{3\pi}{2}}}$$

$$2_{\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+i$$

$$\sqrt{3}_{\pi} = \sqrt{3}\,(\cos \pi + i\ \text{sen}\ \pi) = -\sqrt{3}$$

Por tanto:

$$2_{\frac{\pi}{6}} - \sqrt{3}_{\pi} + 3_{\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3}+i-(-\sqrt{3})+(-3i) = 2\sqrt{3}-2i \quad \text{(que está en el cuarto cuadrante)}$$

$$|2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = 4$$

$$tg\ \alpha = \frac{-2}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \ \rightarrow \ \alpha = 330° = \frac{11\pi}{6}\ \text{rad}$$

## 4. Potencias y raíces de números complejos

- **Una de las raíces sextas de un número complejo $z$ es $-\sqrt{3}+i$. Calcular $z$ y el área del hexágono cuyos vértices son los afijos de las raíces sextas de $z$. Hallar esos afijos.**

Como $z=(-\sqrt{3}+i)^6$, pasamos a forma polar el número $-\sqrt{3}+i$ que está en el segundo cuadrante.

$$|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

$$tg\ \alpha=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ \to\ \alpha=150°$$

$$z=(2_{150°})^6=(2^6)_{6\cdot 150°}=64_{900°}=64_{180°}$$

$$\sqrt[6]{64_{180°}}=\sqrt[6]{64}_{(180\cdot 360k)/6};\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

Las raíces y los afijos son:

Si $k=0\ \to\ z_1=2_{30°}=2(cos\ 30°+i\ sen\ 30°)=\sqrt{3}+i\ \to\ A(\sqrt{3},1)$

Si $k=1\ \to\ z_2=2_{90°}=2(cos\ 90°+i\ sen\ 90°)=2i\ \to\ B(0,2)$

Si $k=2\ \to\ z_3=2_{150°}=2(cos\ 150°+i\ sen\ 150°)=-\sqrt{3}+i\ \to\ C(-\sqrt{3},1)$

Si $k=3\ \to\ z_4=2_{210°}=2(cos\ 210°+i\ sen\ 210°)=-\sqrt{3}-i\ \to\ D(-\sqrt{3},-1)$

Si $k=4\ \to\ z_5=2_{270°}=2(cos\ 270°+i\ sen\ 270°)=-2i\ \to\ E(0,-2)$

Si $k=5\ \to\ z_6=2_{330°}=2(cos\ 330°+i\ sen\ 330°)=\sqrt{3}-i\ \to\ F(\sqrt{3},-1)$

La longitud del lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita, que es igual al módulo de cualquiera de las raíces, es decir, 2. El apotema del hexágono regular es $2\cdot cos\ 30°=\sqrt{3}$.

Por tanto, el área del hexágono es:

$$A=\frac{\text{perímetro}\cdot\text{apotema}}{2}=\frac{6\cdot 2\cdot\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}\ \text{u}^2$$

## 5. Interpretación gráfica de igualdades con números complejos

- **Representar los números complejos que cumplen la condición dada.**

**a)** $z+\bar{z}=2$

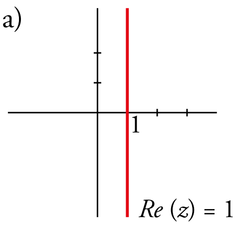
**b)** $z-\bar{z}=-4i$

**c)** $|z|=3$

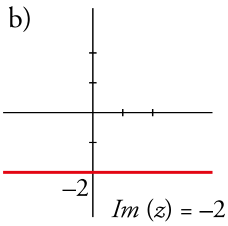
a) Si $z=a+bi\ \to\ a+bi+a-bi=2\ \to\ 2a=2\ \to\ a=1\ \to\ Re(z)=1$ y se obtiene la figura a).

b) Si $z=a+bi\ \to\ a+bi-(a-bi)=-4i\ \to\ 2bi=-4i\ \to\ 2b=-4\ \to\ b=-2\ \to\ Im\ (z)=-2$ y se obtiene la figura b).

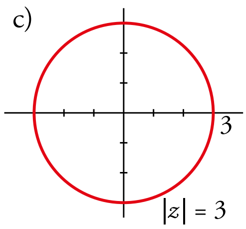
a)




b)




c)



# EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad (EA todos los tratados en la unidad)

## Página 170

### Para practicar

### Números complejos en forma binómica. Operaciones

**1** **Calcula.**

**a)** $(3 + 2i)\ (2 - i) - (1 - i)\ (2 - 3i)$

**b)** $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i)$

**c)** $-2i - (4 - i)5i$

**d)** $(4 - 3i)\ (4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

**e)** $(2 + i)^3 - (2 - i)^2$

**f)** $(1 + 2i)^4$

**Comprueba los resultados con la calculadora.**

a) $(3 + 2i)\ (2 - i) - (1 - i)\ (2 - 3i) = 6 - 3i + 4i - 2i^2 - 2 + 3i + 2i - 3i^2 =$

$= 6 - 3i + 4i + 2 - 2 + 3i + 2i + 3 = 9 + 6i$

b) $3 + 2i\ (-1 + i) - (5 - 4i) = 3 - 2i + 2i^2 - 5 + 4i = 3 - 2i - 2 - 5 + 4i = -4 + 2i$

c) $-2i - (4 - i)5i = -2i - 20i + 5i^2 = -22i - 5 = -5 - 22i$

d) $(4 - 3i)\ (4 + 3i) - (4 - 3i)^2 = 16 - (3i)^2 - 16 - 9i^2 + 24i = 16 + 9 - 16 + 9 + 24i = 18 + 24i$

e) $(2 + i)^3 - (2 - i)^2 = (2 + i)\ (2 + i)^2 - (2 - i)^2 = (2 + i)\ (4 + 4i - 1) - (4 - 4i - 1) =$

$= 6 + 8i + 3i - 4 - 3 + 4i = -1 + 15i$

f) $(1 + 2i)^4 = (1 + 2i)^2\ (1 + 2i)^2 = (1 + 4i - 4)\ (1 + 4i - 4) = (-3 + 4i)\ (-3 + 4i) = 9 - 12i - 12i - 16 = -7 - 24i$

**2** **Calcula.**

**a)** $i^{37}$ **b)** $i^{126}$ **c)** $i^{-7}$ **d)** $i^{64}$ **e)** $i^{-216}$

a) $i^{37} = i^1 = i$

b) $i^{126} = i^2 = -1$

c) $i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i} = i$

d) $i^{64} = i^0 = 1$

e) $i^{-216} = \frac{1}{i^{216}} = \frac{1}{i^0} = \frac{1}{1} = 1$

**3** **Calcula en forma binómica.**

**a)** $\dfrac{(3+3i)\ (4-2i)}{2-2i}$

**b)** $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)\ (-1+i)}$

**c)** $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)$

**d)** $\dfrac{1+i}{2-i} + \dfrac{-3-2i}{1+3i}$

**e)** $\dfrac{(2+i)^3 + (2i)^4}{i}$

**f)** $\dfrac{(1-i)^3 - i^8}{(1+i)^2}$

a) $\dfrac{(3+3i)\ (4-2i)}{2-2i} = \dfrac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i} = \dfrac{18+6i}{2-2i} = \dfrac{(18+6i)\ (2+2i)}{(2-2i)\ (2+2i)} =$

$= \dfrac{36+36i+12i-12}{4+4} = \dfrac{24+48i}{8} = 3+6i$

b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)\ (-1+i)} = \dfrac{-2+3i}{-4+4i-2i-2} = \dfrac{-2+3i}{-6+2i} = \dfrac{(-2+3i)\ (-6-2i)}{(-6+2i)\ (-6-2i)} =$

$= \dfrac{12+4i-18i+6}{36+4} = \dfrac{18-14i}{40} = \dfrac{9-7i}{20} = \dfrac{9}{20} - \dfrac{7}{20}i$

c) $\frac{2+5i}{3-2i}(1-i) = \frac{2-2i+5i+5}{3-2i} = \frac{7+3i}{3-2i} = \frac{(7+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{21+14i+9i-6}{9+4} = \frac{15+23i}{13} = \frac{15}{13}+\frac{23}{13}i$

d) $\frac{1+i}{2-i}+\frac{-3-2i}{1+3i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\frac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{2+i+2i-1}{4+1}+\frac{-3+9i-2i-6}{1+9} =$

$= \frac{1+3i}{5}+\frac{-9+7i}{10} = \frac{2+6i-9+7i}{10} = \frac{-7+13i}{10} = \frac{-7}{10}+\frac{13}{10}i$

e) $\frac{(2+i)^3+(2i)^4}{i} = \frac{2+11i+16}{i} = \frac{18+11i}{i} = 11-18i$

f) $\frac{(1-i)^3-i^8}{(1+i)^2} = \frac{-2-2i-1}{(1+i)^2} = \frac{-3-2i}{2i} = -1+\frac{3}{2}i$

**4** **Dados $z = 1-3i$, $w = -3+2i$, $t = -2i$, calcula:**

**a)** $zwt$ **b)** $zt - w(t+z)$ **c)** $\frac{w}{z}t$

**d)** $\frac{2z-3t}{w}$ **e)** $\frac{3z+it}{3}w$ **f)** $\frac{z^2-wt^2}{2}$

$z = 1-3i;\ w = -3+2i;\ t = -2i$

a) $zwt = (1-3i)(-3+2i)(-2i) = (-3+2i+9i-6i^2)(-2i) = (3+11i)(-2i) = -6i-22i^2 = 22-6i$

b) $zt - w(t+z) = (1-3i)(-2i)-(-3+2i)(-2i+1-3i) = (-2i+6i^2)-(-3+3i)(1-5i) =$

$= (-6-2i)-(-3+2i)(1-5i) = (-6-2i)-(-3+15i+2i-10i^2) =$

$= (-6-2i)-(7+17i) = -13-19i$

c) $\frac{w}{z}t = \frac{-3+2i}{1-3i}(-2i) = \frac{6i-4i^2}{1-3i} = \frac{(4+6i)(1+3i)}{1^2-(3i)^2} = \frac{4+12i+6i+18i^2}{1+9} =$

$= \frac{-14+18i}{10} = -\frac{7}{5}+\frac{9}{5}i$

d) $\frac{2z-3t}{w} = \frac{2(1-3i)-3(-2i)}{-3+2i} = \frac{2-6i+6i}{-3+2i} = \frac{2(-3-2i)}{(-3)^2-(2i)^2} = \frac{-6-4i}{9+4} = -\frac{6}{13}-\frac{4}{13}i$

e) $\frac{3z+it}{3}w = \frac{3(1-3i)+i(-2i)}{3}(-3+2i) = \frac{3-9i+2}{3}(-3+2i) =$

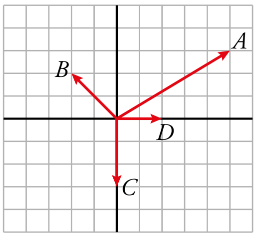
$= \left(\frac{5}{3}-3i\right)(-3+2i) = -5+\frac{10}{3}i+9i-6i^2 = 1+\frac{37}{3}i$

f) $\frac{z^2-wt^2}{2} = \frac{(1-3i)^2-(-3+2i)(-2i)^2}{2} = \frac{1-6i+9i^2-(-3+2i)(-4)}{2} =$

$= \frac{-8-6i-12+8i}{2} = \frac{-20}{2}+\frac{2}{2}i = -10+i$

**5** **Los puntos $A$, $B$, $C$, $D$ corresponden a los afijos de los números complejos $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$.**

**Efectúa y representa.**




**a)** $z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3$ **b)** $(z_2 - z_1)^2$

**c)** $\frac{5(z_1-z_4)}{z_2+z_3}$ **d)** $\frac{\bar{z}_1-\bar{z}_2}{z_3+z_4}$

$z_1 = 5+3i \qquad z_2 = -2+2i \qquad z_3 = -3i \qquad z_4 = 2$

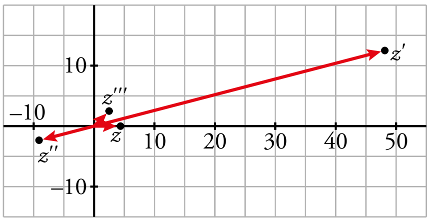
a) $z = z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3 = (5+3i)2-(-2+2i)(-3i) = 10+6i-6i+6i^2 = 4$

b) $z' = (z_2-z_1)^2 = [-2+2i-(5+3i)]^2 = (-7-i)^2 = 49+14i+i^2 = 48+14i$

c) $z'' = \dfrac{5(z_1 - z_4)}{z_2 + z_3} = \dfrac{5(5 + 3i - 2)}{-2 + 2i + (-3i)} = \dfrac{5(3 + 3i)}{-2 - i} = \dfrac{(15 + 15i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = \dfrac{-30 + 15i - 30i + 15i^2}{4 + 1} = -9 - 3i$

d) $z''' = \dfrac{\overline{z_1} - \overline{z_2}}{z_3 + z_4} = \dfrac{5 - 3i - (-2 - 2i)}{2 - 3i} = \dfrac{(7 - i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \dfrac{14 + 21i - 2i - 3i^2}{4 + 9} = \dfrac{17 + 19i}{13}$

Representación gráfica:




**6** **Dado el número complejo $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, prueba que:**

**a)** $1 + z + z^2 = 0$ **b)** $\dfrac{1}{z} = z^2$

a) $z^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{2}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

b) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i} = \dfrac{1}{\dfrac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}} = \dfrac{2}{-1 + \sqrt{3}\,i} = \dfrac{2(-1 - \sqrt{3}\,i)}{(-1 + \sqrt{3}\,i)(-1 - \sqrt{3}\,i)} =$

$= \dfrac{2(-1 - \sqrt{3}\,i)}{1 + 3} = \dfrac{2(-1 - \sqrt{3}\,i)}{4} = \dfrac{-1 - \sqrt{3}\,i}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$z^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (lo habíamos calculado en a).

Por tanto; $\dfrac{1}{z} = z^2$.

**7** **Calcula $m$ y $n$ para que se verifique la igualdad $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$.**

$(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$

$(2 + n) + (m + 5)\,i = 7 - 2i \;\rightarrow\; \left.\begin{cases} 2 + n = 7 \\ m + 5 = -2 \end{cases}\right\} \begin{matrix} n = 5 \\ m = -7 \end{matrix}$

**8** **Determina $k$ para que el cociente $\dfrac{k + i}{1 + i}$ sea igual a $2 - i$.**

$\dfrac{k + i}{1 + i} = \dfrac{(k + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \dfrac{k - ki + i + 1}{1 + 1} = \dfrac{(k + 1) + (1 - k)\,i}{2} = \left(\dfrac{k + 1}{2}\right) + \left(\dfrac{1 - k}{2}\right)i = 2 - i \;\rightarrow\; \begin{cases} \dfrac{k + 1}{2} = 2 \;\rightarrow\; k = 3 \\ \dfrac{1 - k}{2} = -1 \;\rightarrow\; k = 3 \end{cases}$

Por tanto, $k = 3$.

**9** **Dados los complejos $2 - ai$ y $3 - bi$, halla $a$ y $b$ para que su producto sea igual a $8 + 4i$.**

$(2 - ai)(3 - bi) = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 8 + 4i$

$6 - 2bi - 3ai - ab = 8 + 4i$

$(6 - ab) + (-2b - 3a)\,i = 8 + 4i$

$$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -2b - 3a = 4 \end{cases}$$

$$b = \frac{4 + 3a}{-2}$$

$$6 - a\left(\frac{4+3a}{-2}\right) = 8 \;\to\; 6 + \frac{4a + 3a^2}{2} = 8$$

$$\frac{4a + 3a^2}{2} = 2 \;\to\; 4a + 3a^2 = 4 \;\to\; 3a^2 + 4a - 4 = 0$$

$$a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{-4 \pm 8}{6} \;\begin{cases} a = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \;\to\; b = -3 \\ a = \dfrac{-12}{6} = -2 \;\to\; b = 1 \end{cases}$$

## Números complejos en forma polar

**10** **Representa estos números complejos, sus opuestos y sus conjugados. Exprésalos en forma polar:**

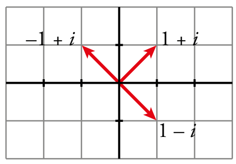
**a)** $\mathbf{1 - i}$ **b)** $\mathbf{-1 + i}$ **c)** $\mathbf{\sqrt{3} + i}$ **d)** $\mathbf{-\sqrt{3} - i}$

**e)** $\mathbf{-4}$ **f)** $\mathbf{-2i}$ **g)** $\mathbf{-\frac{3}{4}i}$ **h)** $\mathbf{2 + 2\sqrt{3}i}$

a) $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

Opuesto: $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

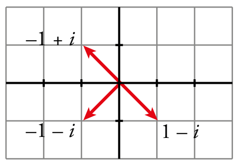
Conjugado: $1 + i = \sqrt{2}_{45°}$




b) $-1 + i = \sqrt{2}_{135°}$

Opuesto: $1 - i = \sqrt{2}_{315°}$

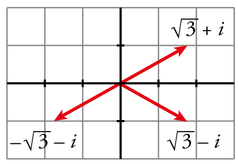
Conjugado: $-1 - i = \sqrt{2}_{225°}$




c) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

Opuesto: $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

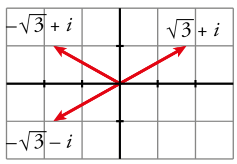
Conjugado: $\sqrt{3} - i = 2_{330°}$




d) $-\sqrt{3} - i = 2_{210°}$

Opuesto: $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

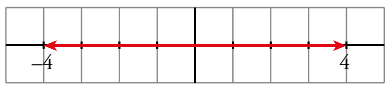
Conjugado: $-\sqrt{3} + i = 2_{150°}$

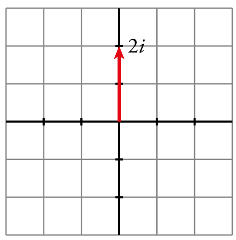



e) $-4 = 4_{180°}$

Opuesto: $4 = 4_{0°}$

Conjugado: $-4 = 4_{180°}$




f) $-2i = 2_{90°}$

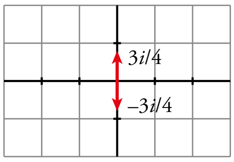
Opuesto: $2i = 2_{90°}$

Conjugado: $2i = 2_{90°}$

g) $-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{270°}$

Opuesto: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90°}$

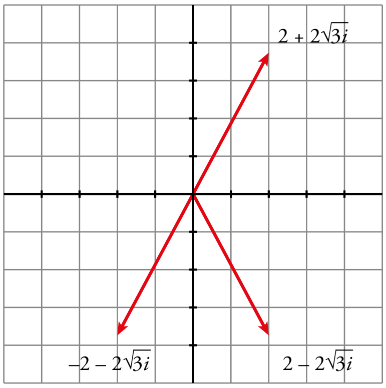
Conjugado: $\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{90°}$




h) $2 + 2\sqrt{3}\,i = 4_{60°}$

Opuesto: $-2 - 2\sqrt{3}\,i = 4_{240°}$

Conjugado: $2 - 2\sqrt{3}\,i = 4_{300°}$




**11** **Escribe en forma binómica estos números complejos:**

**a)** $2_{45°}$ **b)** $3_{\pi/6}$ **c)** $\sqrt{2}_{180°}$ **d)** $17_{0°}$

**e)** $1_{\pi/2}$ **f)** $5_{270°}$ **g)** $1_{150°}$ **h)** $4_{100°}$

a) $2_{45°} = 2\,(cos\,45° + i\,sen\,45°) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

b) $3_{(\pi/6)} = 3\left(cos\,\frac{\pi}{6} + i\,sen\,\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

c) $\sqrt{2}_{180°} = \sqrt{2}\,(cos\,180° + i\,sen\,180°) = \sqrt{2}\,(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}$

d) $17_{0°} = 17$

e) $1_{(\pi/2)} = cos\,\frac{\pi}{2} + i\,sen\,\frac{\pi}{2} = i$

f) $5_{270°} = -5i$

g) $1_{150°} = cos\,150° + i\,sen\,150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

h) $4_{100°} = 4\,(cos\,100° + i\,sen\,100°) = 4\,(-0,17 + i \cdot 0,98) = -0,69 + 3,94i$

**12** **Dados los complejos $z_1 = 2_{270°}$; $z_2 = 4_{120°}$; $z_3 = 3_{315°}$; calcula:**

**a)** $z_1 \cdot z_2$ **b)** $z_2 \cdot z_3$ **c)** $z_1 \cdot z_3$

**d)** $\frac{z_3}{z_1}$ **e)** $\frac{z_2}{z_1}$ **f)** $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$

**g)** $z_1^2$ **h)** $z_2^3$ **i)** $z_3^4$

**Comprueba los resultados con la calculadora.**

a) $z_1 \cdot z_2 = 8_{30°}$ b) $z_2 \cdot z_3 = 12_{75°}$ c) $z_1 \cdot z_3 = 6_{225°}$

d) $\frac{z_3}{z_1} = 1,5_{45°}$ e) $\frac{z_2}{z_1} = 2_{-150°} = 2_{210°}$ f) $\frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} = 1,5_{105°}$

g) $z_1^2 = 4_{180°}$ h) $z_2^3 = 64_{0°}$ i) $z_3^4 = 81_{180°}$

**13** **Calcula:** $\dfrac{(2_{45°})^2}{[i(1+i)]^3}$

$$\frac{(2_{45°})^2}{\left[i(1+i)\right]^3}=\frac{4_{90°}}{i^3(1+i)(1+i)^2}=\frac{4i}{i^3(1+i)(1+i)^2}=\frac{4}{i^2(1+i)(2i)}=\frac{4}{2-2i}=\frac{2}{1-i}=\frac{2}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=1+i$$

**14** **Expresa en forma polar y calcula.**

**a)** $(-1-i)^5$ **b)** $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}\,i}$ **c)** $\sqrt[4]{64}$

**d)** $\sqrt[3]{125i}$ **e)** $(-2\sqrt{3}+2i)^6$ **f)** $(3-4i)^3$

a) $(-1-i)^5=(\sqrt{2}_{225°})^5=4\sqrt{2}_{1\,125°}=4\sqrt{2}_{45°}=4\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=4+4i$

b) $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}\,i}=\sqrt[4]{2_{300°}}=\sqrt[4]{2}_{(300°+360°\,n)/4}=\sqrt[4]{2}_{75°+90°\,n};\ \ n=0,1,2,3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt[4]{2}_{75°}$ $\sqrt[4]{2}_{165°}$ $\sqrt[4]{2}_{255°}$ $\sqrt[4]{2}_{345°}$

c) $\sqrt[4]{64}=\sqrt[4]{64_{0°}}=\sqrt[4]{2^6}_{(360°\,k)/4}=2\sqrt{2}_{90°\,k};\ \ k=0,1,2,3$

Las cuatro raíces son: $2\sqrt{2}_{0°}=2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{90°}=2\sqrt{2}\,i$ $2\sqrt{2}_{180°}=-2\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}_{270°}=-2\sqrt{2}\,i$

d) $\sqrt[3]{125i}=\sqrt[3]{125_{90°}}=5_{30°+120°k}$ para $k=0,1,2$

Las 3 raíces son:

$5_{30°}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5}{2}i$

$5_{150°}=\dfrac{-5\sqrt{3}}{2}+\dfrac{5}{2}i$

$5_{270°}=-5i$

e) $(-2\sqrt{3}+2i)^6=(4_{150°})^6=4\,096_{900°}=4\,096_{180°}=-4\,096$

f) $(3-4i)^3=(5_{306°\,52'})^3=125_{920°\,36'}=125_{200°\,36'}$

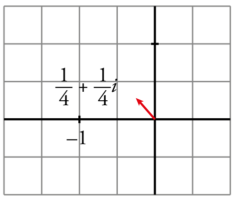
**15** **Calcula y representa gráficamente el resultado.**

**a)** $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}$

a) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^3=\left(\dfrac{\sqrt{2}_{315°}}{2_{30°}}\right)^3=\left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{285°}\right)^3=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{855°}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)_{135°}=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\cos 135+i\,\text{sen}\,135°)=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{-1}{4}+\dfrac{1}{4}i$




b) $\sqrt[3]{\dfrac{1+i}{2-i}}=\sqrt[3]{\dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}}=\sqrt[3]{\dfrac{1+3i}{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i}=$

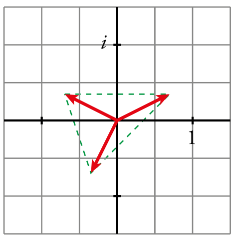
$=\sqrt[3]{\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71°\,34'}}=\left(\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{(71°\,34'+360°\,k)/3}=\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23°\,51'+120°\,k};\ \ k=0,1,2$

Las tres raíces son:

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{23°\,51'}=0,785+0,347i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{143°\,51'}=-0,693+0,56i$

$\sqrt[6]{\dfrac{2}{5}}_{263°\,51'}=-0,092-0,853i$

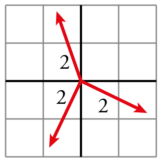


**16** **Calcula y representa las soluciones.**

**a)** $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i}$ **b)** $\sqrt[4]{-16}$ **c)** $\sqrt[3]{-27i}$

a) $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i} = \sqrt[3]{8_{300°}} = 2_{(300° + 360°\,k)/3} = 2_{100° + 120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:



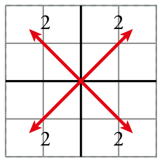

$2_{100°} = -0{,}35 + 1{,}97i$

$2_{220°} = -1{,}53 - 1{,}26i$

$2_{340°} = 1{,}88 - 0{,}68i$

b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/4} = 2_{45° + 90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son:

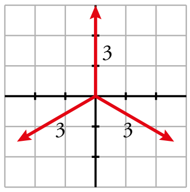



$2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ $\quad 2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ $\quad 2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

c) $\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270°}} = 3_{(270° + 360°\,k)/3}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:




$3_{90°} = 3i$

$3_{210°} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

$3_{330°} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

**17** **Calcula pasando a forma polar.**

**a)** $(1 + i\sqrt{3})^5$ **b)** $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

**c)** $\sqrt[6]{-729}$ **d)** $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}}$

a) $(1+i\sqrt{3})^5 = (2_{60°})^5 = 32_{300°} = 32\,(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°) = 32\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 16 - 16\sqrt{3}\,i$

b) $\dfrac{8}{(1-i)^5} = \dfrac{8_{0°}}{(\sqrt{2}_{315°})^5} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{1\,575°}} = \dfrac{8_{0°}}{4\sqrt{2}_{135°}} = \left(\dfrac{8}{4\sqrt{2}}\right)_{-135°} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)_{225°} =$

$= \sqrt{2}_{225°} = \sqrt{2}\,(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°) = \sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -1 - i$

c) $\sqrt[6]{-729} = \sqrt[6]{729_{180°}} = 3_{30° + 60°k}$ para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son:

$3_{30°} = 2{,}6 + \dfrac{3}{2}i$ $\quad 3_{90°} = 3i$ $\quad 3_{150°} = -2{,}6 + \dfrac{3}{2}i$

$3_{210°} = -2{,}6 - \dfrac{3}{2}i$ $\quad 3_{270°} = -3i$ $\quad 3_{330°} = 2{,}6 - \dfrac{3i}{2}$

d) $\sqrt{\dfrac{2-2i}{-3+3i}} = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}_{315°}}{3\sqrt{2}_{135°}}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)_{180°} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{(180° + 360°\,k)/2} = \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90° + 180°\,k}$; $k = 0, 1$

Las dos raíces son:

$\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{90°} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ $\quad \left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)_{270°} = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$

**18 Expresa en forma polar $z$, su opuesto $-z$, y su conjugado $\bar{z}$ en cada uno de estos casos:**

**a)** $z = 1 - \sqrt{3}i$ **b)** $z = -2 - 2i$

**c)** $z = -2\sqrt{3} + 2i$ **d)** $z = -5$

**e)** $z = 7i$ **f)** $z = -3 - 4i$

a) $z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{300°}$; $-z = -1 + \sqrt{3}i = 2_{120°}$; $\bar{z} = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60°}$

b) $z = -2 - 2i = 2\sqrt{2}_{225°}$; $-z = 2 + 2i = 2\sqrt{2}_{45°}$; $\bar{z} = -2 + 2i = 2\sqrt{2}_{135°}$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i = 4_{150°}$; $-z = 2\sqrt{3} - 2i = 4_{330°}$; $\bar{z} = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210°}$

d) $z = -5 = 5_{180°}$; $-z = 5 = 5_{0°}$; $\bar{z} = -5 = 5_{180°}$

e) $z = 7i = 7_{90°}$; $-z = -7i = 7_{270°}$; $\bar{z} = -7i = 7_{270°}$

f) $z = -3 - 4i = 5_{233,13°}$; $-z = 3 + 4i = 5_{53,13°}$; $\bar{z} = -3 + 4i = 5_{126,87°}$

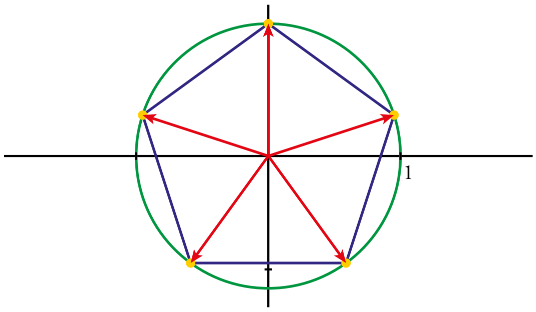
**19 Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:**

**a)** $\sqrt[5]{i}$ **b)** $\sqrt[6]{-1}$ **c)** $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$

a) $\sqrt[5]{i} = \sqrt[5]{1_{90°}} = 1_{(90° + 360°\,k)/5} = 1_{18° + 72°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son: $1_{18°}$; $1_{90°}$; $1_{162°}$; $1_{234°}$; $1_{306°}$

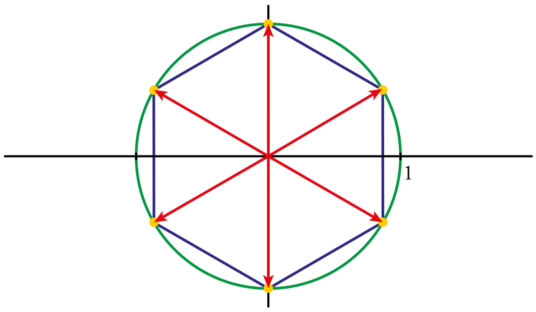
Representación del polígono (pentágono):




b) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1_{180°}} = 1_{(180° + 360°\,k)/6} = 1_{30° + 60°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Las seis raíces son: $1_{30°}$; $1_{90°}$; $1_{150°}$; $1_{210°}$; $1_{270°}$; $1_{330°}$

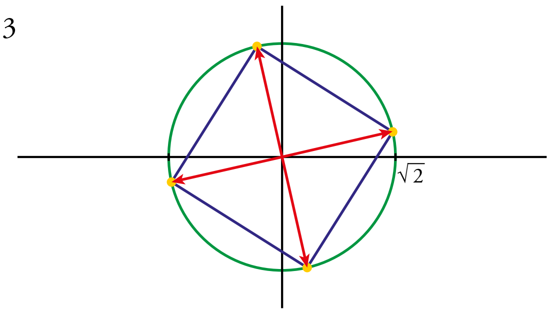
Representación del polígono (hexágono):




c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i} = \sqrt[4]{4_{30°}} = \sqrt[4]{2^2}_{(30° + 360°\,k)/4} = \sqrt{2}_{7°\,30' + 90°\,k}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Las cuatro raíces son: $\sqrt{2}_{7°\,30'}$; $\sqrt{2}_{97°\,30'}$; $\sqrt{2}_{187°\,30'}$; $\sqrt{2}_{277°\,30'}$

Representación del polígono (cuadrado):




**20 Calcula $\bar{z}^5$ y $\sqrt[4]{z}$, siendo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.**

Primero, pasamos $z$ a forma polar:

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$tg\ \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \to \alpha = 120°$$ porque $z$ está en el segundo cuadrante.

Luego $z = 1_{120°}$.

$\bar{z}^5 = (1_{-120°})^5 = (1_{240°})^5 = (1^5)_{5 \cdot 240°} = 1_{120°} = z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1_{240°}} = (\sqrt[4]{1})_{(240° + 360° k)/4}$; $k = 0, 1, 2, 3$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 1_{60°} = 1\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 1_{150°} = 1\,(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{240°} = 1\,(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{330°} = 1\,(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

## Página 171

### Ecuaciones y sistemas en $\mathbb{C}$

**21** **Resuelve y expresa las soluciones en forma binómica:**

**a)** $z^2 + 4 = 0$ **b)** $z^2 + z + 4 = 0$

**c)** $z^2 + 3z + 7 = 0$ **d)** $z^2 - z + 1 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ $\begin{cases} z_1 = -2i \\ z_2 = 2i \end{cases}$

b) $z^2 + z + 4 = 0 \rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}\,i}{2}$ $\begin{cases} z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i \\ z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i \end{cases}$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0 \rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19}\,i}{2}$ $\begin{cases} z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i \\ z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases}$

d) $z^2 - z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$

**22** **Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $z^5 + 32 = 0$ **b)** $iz^3 - 27 = 0$

**c)** $z^3 + \frac{1}{8}i = 0$ **d)** $iz^4 + 4 = 0$

a) $z^5 + 32 = 0 \rightarrow z^5 = -32$

$z = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32_{180°}} = 2_{(180° + 360° k)/5} = 2_{36° + 72° k}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4$

Las cinco raíces son:

$2_{36°}$ $2_{108°}$ $2_{180°}$ $2_{252°}$ $2_{324°}$

b) $iz^3 - 27 = 0 \rightarrow z^3 + 27i = 0 \rightarrow z^3 = -27i$

$z = \sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27_{270°}} = 3_{(270° + 360° k)/3} = 3_{90° + 120° k}$; $k = 0, 1, 2$

Las tres raíces son:

$3_{90°}$ $3_{210°}$ $3_{330°}$

c) $z^3 + (1/8)\,i = 0 \;\rightarrow\; z = \sqrt[3]{(-1/8)\,i} = \sqrt[3]{1/8_{270°}} = 1/2_{(270° + 360°\,k)/3} = 1/2_{90° + 120°\,k};\;\; k = 0,\ 1,\ 2$

Las tres raíces son:

$1/2_{90°} = 2i \qquad 1/2_{210°} = -\sqrt{3} - i \qquad 1/2_{330°} = \sqrt{3} - i$

d) $iz^4 + 4 = 0 \;\rightarrow\; z^4 - 4i = 0 \;\rightarrow\; z^4 = 4i$

$z = \sqrt[4]{4i} = \sqrt[4]{4_{90°}} = \sqrt{2}_{(90° + 360°\,k)/4} = \sqrt{2}_{22°\,30' + 90°\,k};\;\; k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Las cuatro raíces son:

$\sqrt{2}_{22°\,30'} = 1,3 + 0,5i$

$\sqrt{2}_{112°\,30'} = -0,5 + 1,3i$

$\sqrt{2}_{202°\,30'} = -1,3 - 0,5i$

$\sqrt{2}_{292°\,30'} = 0,5 - 1,3i$

**23 Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:**

**a) $z^2 + 4i = 0$** **b) $z^2 - 2z + 5 = 0$**

**c) $2z^2 + 10 = 0$** **d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$**

a) $z^2 + 4i = 0 \;\rightarrow\; z^2 = -4i \;\rightarrow\; z = \sqrt{-4i} = \sqrt{4_{270°}} \;\rightarrow\; z = 2_{(270° + 360°\,k)/2};\;\; k = 0,\ 1$

Las dos raíces son: $z_1 = 2_{135°}$, $z_2 = 2_{315°}$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \;\rightarrow\; z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{1 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \;<\; \begin{array}{l} z_1 = 1 - 2i \\ z_2 = 1 + 2i \end{array}$

c) $2z^2 + 10 = 0 \;\rightarrow\; 2z^2 = -10 \;\rightarrow\; z^2 = -5 \;\rightarrow\; z = \pm\sqrt{5}\,i \;<\; \begin{array}{l} z_1 = -\sqrt{5}\,i \\ z_2 = \sqrt{5}\,i \end{array}$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$z^2 = t$

$t^2 + 13t + 36 = 0$

$t = \dfrac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \dfrac{-13 \pm 5}{2} \;<\; \begin{array}{l} t = -4 \\ t = -9 \end{array}$

$z^2 = -4 \;\rightarrow\; z = \pm 2i$

$z^2 = -9 \;\rightarrow\; z = \pm 3i$

Las soluciones son: $2i = 2_{90°}$; $-2i = 2_{270°}$; $3i = 3_{90°}$; $-3i = 3_{270°}$

**24 Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:**

**a) $z^4 - 1 = 0$** **b) $z^4 + 16 = 0$** **c) $z^4 - 8z = 0$**

a) $z^4 - 1 = 0 \;\rightarrow\; z^4 = 1 \;\rightarrow\; z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0°}} = 1_{360°\,k/4} = 1_{90°k};\;\; k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Las cuatro raíces son:

$1_{0°} = 1 \qquad 1_{90°} = i$

$1_{180°} = -1 \qquad 1_{270°} = -i$

b) $z^4 + 16 = 0 \;\rightarrow\; z^4 = -16 \;\rightarrow\; z^4 = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180°}} = 2_{(180° + 360°\,k)/4} = 2_{45° + 90°\,k};\;\; k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Las cuatro raíces son:

$2_{45°} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{135°} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

$2_{225°} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

$2_{315°} = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

c) $z^4 - 8z = 0 \rightarrow z(z^3 - 8) = 0 \begin{cases} z = 0 \\ z = \sqrt[3]{8} \end{cases}$

$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8_{0°}} = 2_{(360°\,k)/3} = 2_{120°\,k}$; $k = 0, 1, 2$

Las soluciones de la ecuación son: $0$; $2_{0°} = 2$; $2_{120°} = -1 + \sqrt{3}\,i$; $2_{240°} = -1 - \sqrt{3}\,i$

**25 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} 3z - w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$ b) $\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + w = 6 - i \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3z - \ \ w = 1 - i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases} \xrightarrow{-3\cdot(1.^a)} \begin{cases} -9z + 3w = -3 + 3i \\ 2z - 3w = 8 - 8i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $-7z = 5 - 5i \rightarrow z = -\frac{5}{7} + \frac{5}{7}i$

$3\left(-\frac{5}{7} + \frac{5}{7}i\right) - w = 1 - i \rightarrow w = -\frac{15}{7} + \frac{15}{7}i - 1 + i = -\frac{22}{7} + \frac{22}{7}i$

b) $\begin{cases} z + 3w = 8 - 3i \\ 2z + \ \ w = 6 - i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^a)} \begin{cases} -2z - 6w = -16 + 6i \\ 2z + \ \ w = 6 - i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $-5w = -10 + 5i \rightarrow w = 2 - i$

$z + 3(2 - i) = 8 - 3i \rightarrow z = 8 - 3i - 6 + 3i = 2$

c) $\begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 3z - 2w = 11i \end{cases} \xrightarrow{2\cdot(2.^a)} \begin{cases} 5z + 4w = 11i \\ 6z - 4w = 22i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $11z = 33i \rightarrow z = 3i$

$5(3i) + 4w = 11i \rightarrow 4w = -4i \rightarrow w = -i$

d) $\begin{cases} 2z - 5w = -5 + 2i \\ 4z - 3w = -3 - 10i \end{cases} \xrightarrow{-2\cdot(1.^a)} \begin{cases} -4z + 10w = 10 - 4i \\ 4z - \ \ 3w = -3 - 10i \end{cases}$

Sumando obtenemos: $7w = 7 - 14i \rightarrow w = 1 - 2i$

$2z - 5(1 - 2i) = -5 + 2i \rightarrow 2z = -5 + 2i + 5 - 10i \rightarrow z = -4i$

## Interpretación gráfica de igualdades y desigualdades

**26 Representa y describe con palabras cada una de estas familias de números complejos:**

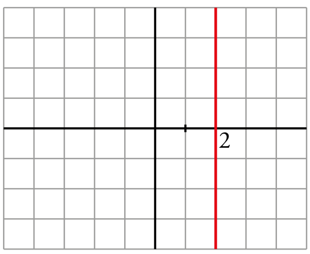
**a)** $Re\,(z) = 2$ **b)** $Im\,(z) = 1$

**c)** $Re\,(z) \le 0$ **d)** $-1 \le Im\,(z) \le 3$

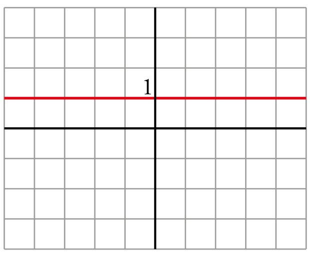
**e)** $-2 < Re\,(z) < 5$ **f)** $|z| \le 3$

**g)** $Arg\,(z) = 45°$ **h)** $0° \le Arg\,(z) \le 90°$

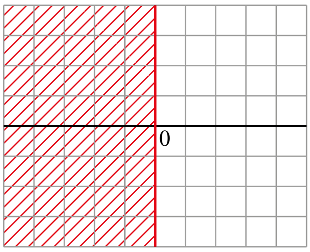
a)



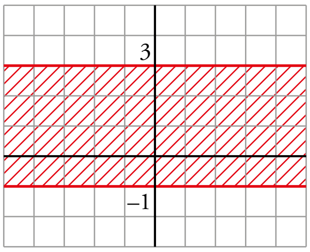

b)



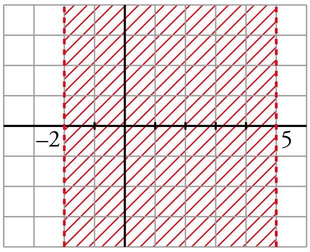
c)



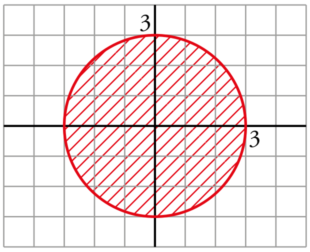

d)



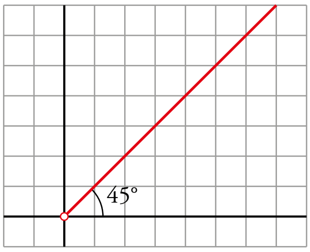

e)



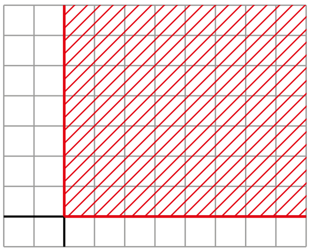

f)




g)




h)



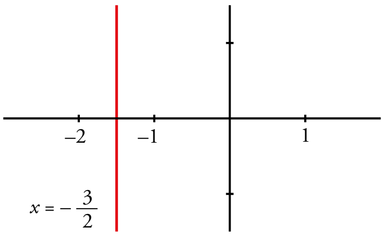
**27 Representa los números complejos $z$ tales que $z + \bar{z} = -3$.**

Llamamos $z = x + iy$.

Entonces: $\bar{z} = x - iy$

Así, $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = -3 \rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Representación:




**28 Representa los números complejos que verifican:**

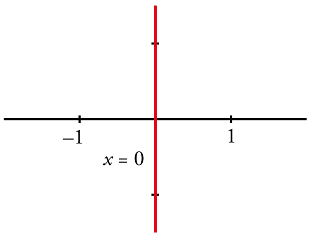
**a)** $\bar{z} = -z$

**b)** $|z + \bar{z}| = 3$

**c)** $|z - \bar{z}| = 4$

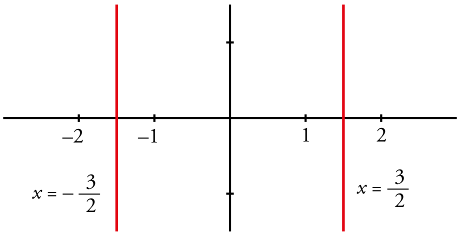
a) $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$

$\bar{z} = -z \rightarrow x - iy = -x - iy \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$ (es el eje imaginario)



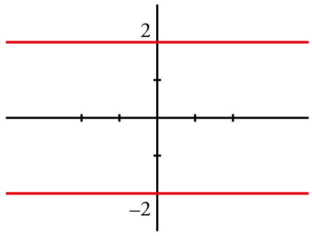
b) $z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x$

$$|z + \overline{z}| = |2x| = 3 \left\langle \begin{array}{l} 2x = 3 \;\rightarrow\; x = 3/2 \\ 2x = -3 \;\rightarrow\; x = -3/2 \end{array} \right.$$

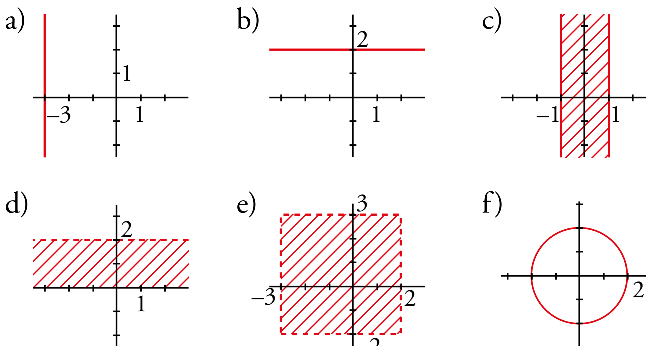



c) $z - \overline{z} = x + iy - z + iy = 2yi$

$$|z - \overline{z}| = |2yi| = |2y| = 4 \left\langle \begin{array}{l} 2y = 4 \;\rightarrow\; y = 2 \\ 2y = -4 \;\rightarrow\; y = -2 \end{array} \right.$$




**29** **Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:**




* *En a), b) y f) es una igualdad. En c) y d), una desigualdad. En e), dos desigualdades.*

a) $Re\, z = -3$ b) $Im\, z = 2$ c) $-1 \le Re\, z \le 1$

d) $0 \le Im\, z < 2$ e) $\begin{cases} -3 < Re\, z < 2 \\ -2 < Im\, z < 3 \end{cases}$ f) $|z| = 3$

## Para resolver

**30** **Calcula $a$ y $b$ de modo que se verifique: $(a + bi)^2 = 3 + 4i$**

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i \;\rightarrow\; a^2 + bi^2 + 2abi = 3 + 4i \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; a^2 - b^2 + 2abi = 3 + 4i \;\rightarrow\; \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \;\rightarrow\; b = \dfrac{4}{2a} = \dfrac{2}{a} \end{cases}$$

$$a^2 - \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 3 \;\rightarrow\; a^2 - \frac{4}{a^2} = 3 \;\rightarrow\; a^4 - 4 = 3a^2 \;\rightarrow\; a^4 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$a^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} a^2 = 4 \to a = \pm 2 \\ a^2 = -1 \text{ (no vale)} \end{cases}$$

$a = -2 \to b = -1$

$a = 2 \to b = 1$

**31** **Halla el valor de $b$ para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea un número:**

**a) Imaginario puro.** **b) Real.**

$$(3-6i)(4+bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b = (12+6b) + (3b-24)i$$

a) $12 + 6b = 0 \to b = -2$

b) $3b - 24 = 0 \to b = 8$

**32** **Calcula $x$ para que el resultado de $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.**

$(x+2+ix)(x-i) = x^2 - xi + 2x - 2i + x^2 i - xi^2 =$

$= x^2 - xi + 2x - 2i + ix^2 + x = (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2 - x - 2 = 0 \to x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

**33** **¿Para qué valores de $x$ es imaginario puro el cociente $\frac{x-4i}{x+i}$?**

$$\frac{x-4i}{x+i} = \frac{(x-4i)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{x^2-4}{x^2+1} + \frac{-5x}{x^2+1} i$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$\frac{x^2-4}{x^2+1} = 0 \to x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

**34** **Calcula el valor que debe tener $a$ para que el módulo del cociente $\frac{a+2i}{1-i}$ sea $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.**

$$z = \frac{a+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{a + ai + 2i + 2i^2}{1+1} = \frac{a-2+(a+2)i}{2}$$

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{a-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+4}{2}} \to \sqrt{\frac{a^2+4}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\frac{a^2+4}{2} = \frac{9}{2} \to a^2 = 5 \begin{cases} a_1 = \sqrt{5} \\ a_2 = -\sqrt{5} \end{cases}$$

**35** **Halla el valor de $x$ en las siguientes igualdades:**

**a)** $\sqrt{4+\sqrt{20}\,i} + \sqrt{4-\sqrt{20}\,i} = \sqrt{x}$ **b)** $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{6}\,i} - \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i} = \sqrt{2x}$

a) $\sqrt{4+\sqrt{20}\,i} + \sqrt{4-\sqrt{20}\,i} = \sqrt{x}$

Elevamos al cuadrado a ambos lados y operamos:

$x = 4 + \sqrt{20}\,i + 4 - \sqrt{20}\,i + 2\sqrt{36}$

$x = 20$

b) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{6}\,i} - \sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{6}\,i} = \sqrt{2x}$

Elevamos al cuadrado a ambos lados y operamos:

$2x = \sqrt{3} + \sqrt{6}\,i + \sqrt{3} - \sqrt{6}\,i - 2\sqrt{9}$

$2x = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{9} \to x = \sqrt{3} - 3$

**36** **Si $z = (i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \dots + i^{10})(3 + ki)$, halla el valor de $k$ para que el módulo de $z$ sea 5.**

$i^0 + i^1 + \dots + i^{10} = \dfrac{i \cdot i^{10} - i^0}{i - 1}$ porque es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $i$.

$$\frac{i \cdot i^{10} - i^0}{i-1} = \frac{i^{11} - i^0}{i-1} = \frac{-i-1}{i-1} = \frac{(-i-1)(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{-i^2 - i - i - 1}{i^2 - 1} = \frac{-2i}{-2} = i$$

Por tanto: $z = i \cdot (3 + ki) = -k + 3i$

$|z| = \sqrt{(-k)^2 + 3^2} = \sqrt{k^2 + 9}$

$|z| = 5 \rightarrow \sqrt{k^2 + 9} = 5 \rightarrow k_1 = 2,\ k_2 = -2$

**37** **Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos 8.**

* ***Llámalos $r_\alpha$ y $s_\beta$ y escribe las condiciones que los relacionan.***

$\dfrac{r}{s} = 3$

$r + s = 8$

$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3}$

$\alpha - \beta = 0°$

Hallamos sus módulos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{r}{s} = 3 \\ r + s = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} r = 3s \\ 3s + s = 8;\ 4s = 8;\ s = 2;\ r = 6 \end{array}$$

Hallamos sus argumentos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3} \\ \alpha - \beta = 0 \end{array}\right\} \alpha = \beta;\ 2\beta = \frac{\pi}{3};\ \beta = \frac{\pi}{6};\ \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Los números serán: $6_{\pi/6}$ y $2_{\pi/6}$

**38** **El producto de dos números complejos es –27 y uno de ellos es igual al cuadrado del otro. Calcúlalos.**

Llamemos $z$ y $w$ a los complejos buscados.

$$\left\{\begin{array}{l} zw = -27 \\ z = w^2 \end{array}\right. \rightarrow w^3 = -27 \rightarrow w = \sqrt[3]{-27} \rightarrow w = \sqrt[3]{27_{180°}} = 3_{(180° \cdot 360° k)/3};\ k = 0, 1, 2$$

- Si $k = 0 \rightarrow w_1 = 3_{60°} = 3(\cos 60° + i\,\text{sen}\,60°) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

  $z_1 = w_1^2 = (3_{60°})^2 = 9_{120°} = 9(\cos 120° + i\,\text{sen}\,120°) = -\dfrac{9}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i$

- Si $k = 1 \rightarrow w_2 = 3_{180°} = 3(\cos 180° + i\,\text{sen}\,180°) = -3$

  $z_2 = w_2^2 = (3_{180°})^2 = 9_{0°} = 9(\cos 0° + i\,\text{sen}\,0°) = 9$

- Si $k = 2 \rightarrow w_3 = 3_{300°} = 3(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$

  $z_3 = w_3^2 = (3_{300°})^2 = 9_{240°} = 9(\cos 240° + i\,\text{sen}\,240°) = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i$

Hemos obtenido tres soluciones del problema.

**39** **Halla dos números complejos conjugados sabiendo que su suma es 8 y que la suma de sus módulos es 10.**

$\left.\begin{array}{l} z + \overline{z} = 8 \\ |z| + |\overline{z}| = 10 \end{array}\right\}$ Como $|z| = |\overline{z}| \to |z| = 5$

Si llamamos:

$z = a + bi \to \overline{z} = a - bi$

$z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a = 8 \to a = 4$

$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2} = 5 \to 16 + b^2 = 25 \to b^2 = 9 \to b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Hay dos soluciones:

$z_1 = 4 + 3i \to \overline{z}_1 = 4 - 3i$

$z_2 = 4 - 3i \to \overline{z}_2 = 4 + 3i$

**40** **Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula la longitud del lado del triángulo que se forma al unir esos tres puntos.**

* ***Usa el teorema del coseno para hallar la longitud del lado.***

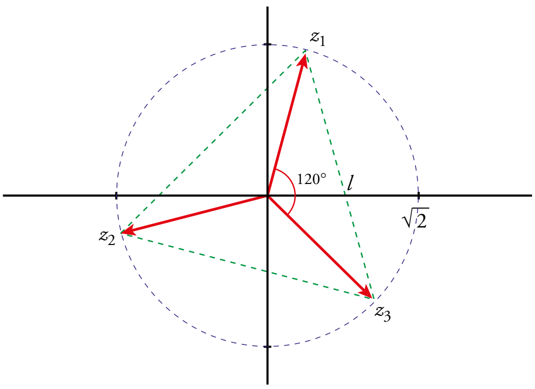
$\sqrt[3]{-2-2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}_{225°}} = \sqrt{2}_{(225° + 360°\, k)/3} = \sqrt{2}_{75° + 120°\, k}$

Las tres raíces son:

$z_1 = \sqrt{2}_{75°}$

$z_2 = \sqrt{2}_{195°}$

$z_3 = \sqrt{2}_{315°}$




Para hallar la longitud del lado, aplicamos el teorema del coseno:

$l^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\, cos\, 120° = 2 + 2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + 2 = 6$

$l = \sqrt{6}$

**41** **Dibuja el hexágono cuyos vértices son los afijos de $\sqrt[6]{-64}$.**

**¿Obtienes el mismo hexágono con los afijos de $\sqrt[6]{64i}$; $\sqrt[6]{64}$; $\sqrt[6]{-64i}$?**

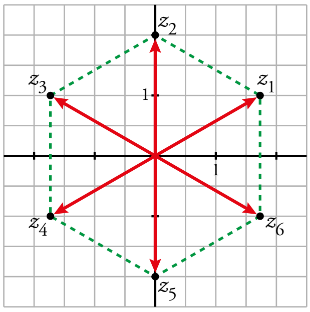
**Compruébalo y representa los resultados obtenidos.**

$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64_{180°}} = 2_{(180° + 360°\, k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \to z_1 = 2_{30°} = 2\,(cos\, 30° + i\, sen\, 30°) = \sqrt{3} + i$
- Si $k = 1 \to z_2 = 2_{90°} = 2\,(cos\, 90° + i\, sen\, 90°) = 2i$
- Si $k = 2 \to z_3 = 2_{150°} = 2\,(cos\, 150° + i\, sen\, 150°) = -\sqrt{3} + i$
- Si $k = 3 \to z_4 = 2_{210°} = 2\,(cos\, 210° + i\, sen\, 210°) = -\sqrt{3} - i$

- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{270°} = 2\,(cos\ 270° + i\ sen\ 270°) = -2i$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{330°} = 2\,(cos\ 330° + i\ sen\ 330°) = \sqrt{3} - i$

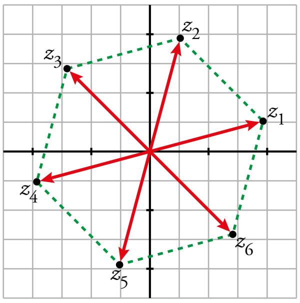
Representación gráfica:




No se obtiene el mismo hexágono porque las raíces sextas de dos números distintos son diferentes. Se obtienen hexágonos girados con respecto al primero. Veamos los siguientes casos:

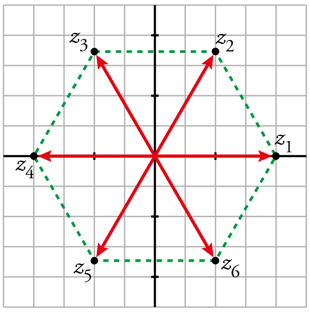
$\sqrt[6]{64i} = \sqrt[6]{64_{90°}} = 2_{(90° + 360°k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{15°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{75°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{135°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{195°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{255°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{315°}$



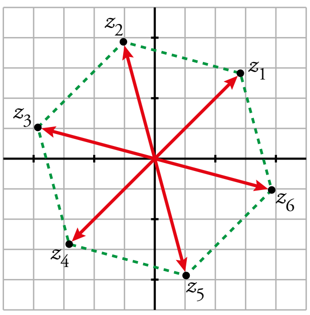

$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{64_{0°}} = 2_{(0° + 360°k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{0°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{60°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{120°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{180°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{240°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{300°}$

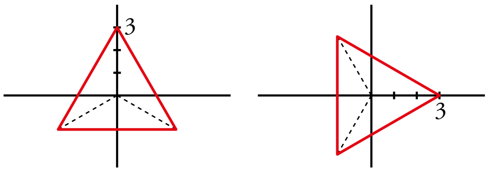



$\sqrt[6]{-64i} = \sqrt[6]{64_{270°}} = 2_{(270° + 360°k)/6}$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

- Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{45°}$
- Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{105°}$
- Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{165°}$
- Si $k = 3 \rightarrow z_4 = 2_{225°}$
- Si $k = 4 \rightarrow z_5 = 2_{285°}$
- Si $k = 5 \rightarrow z_6 = 2_{345°}$



**42** **[El análisis de la información gráfica permite al alumnado trabajar la creación y creatividad de la dimensión personal de esta clave].**
**Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos triángulos equiláteros.**




**Calcula en cada caso el número complejo cuyas raíces cúbicas son esos vértices.**

Como los afijos están en los vértices de un triángulo equilátero, los números complejos son:

a) $z_1 = 3_{90°} = 3i$

$$z_2 = 3_{210°} = 3(\cos 210° + i\, \text{sen}\, 210°) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$z_3 = 3_{330°} = 3(\cos 330° + i\, \text{sen}\, 330°) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

b) $z_1 = 3_{0°} = 3$

$$z_2 = 3_{120°} = 3(\cos 120° + i\, \text{sen}\, 120°) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = 3_{240°} = 3(\cos 240° + i\, \text{sen}\, 240°) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

## Página 172

**43** **¿Pueden ser las raíces de un complejo $z$ los números $2_{28°}$, $2_{100°}$, $2_{172°}$, $2_{244°}$ y $2_{316°}$? En caso afirmativo, halla $z$.**

* ***Comprueba si el ángulo que forman cada dos de ellas es el de un pentágono regular.***

$$28° + 72° = 100° \qquad 100° + 72° = 172°$$

$$172° + 72° = 244° \qquad 244° + 72° = 316°$$

Sí son las raíces quintas de un número complejo. Lo hallamos elevando a la quinta cualquiera de ellas:

$$z = (2_{28°})^5 = 32_{140°}$$

**44** **Comprobamos. [Antes de corregir el ejercicio en clase, el alumnado puede compartir sus conclusiones y aportar las estrategias que ha seguido para su realización].**

**El número complejo $3_{40°}$ es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.**

Los otros vértices serán:

$$3_{112°} \qquad 3_{184°} \qquad 3_{256°} \qquad 3_{328°}$$

El número será: $z = (3_{40°})^5 = 243$

**45** **Una de las raíces cúbicas de un número complejo $z$ es $1 + i$. Halla $z$ y las otras raíces cúbicas.**

$1 + i = \sqrt{2}_{45°}$

Las otras raíces cúbicas son:

$\sqrt{2}_{45° + 120°} = \sqrt{2}_{165°} \qquad \sqrt{2}_{165° + 120°} = \sqrt{2}_{285°}$

Hallamos $z$:

$$z = (1+i)^3 = (\sqrt{2}_{45°})^3 = \sqrt{8}_{135°} = \sqrt{8}(\cos 135° + i\, \text{sen}\, 135°) = \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 + 2i$$

**46** **Busca dos números complejos cuya suma sea $-3 + 3i$ y que una de las raíces cuadradas de su cociente sea $2i$.**

Sean $z$ y $w$ los números complejos buscados. Entonces,

$$\begin{cases} z + w = -3 + 3i \\ \dfrac{z}{w} = (2i)^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z + w = -3 + 3i \rightarrow -4w + w = -3 + 3i \rightarrow w = 1 - i \\ z = -4w \end{cases}$$

$z = -4(1 - i) = -4 + 4i$

**47** **Expresa $\cos 4\alpha$ y $\operatorname{sen} 4\alpha$ en función de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$, utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.**

$$\cos 4\alpha + i \operatorname{sen} 4\alpha = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^4 = \cos^4 \alpha + 4i \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 6 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - 4i \cos \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha =$$
$$= \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha + i(4 \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 4 \cos \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha)$$

De aquí obtenemos que:

$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^4 \alpha$

$\operatorname{sen} 4\alpha = 4 \cos^3 \alpha \operatorname{sen} \alpha - 4 \cos \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha$

**48** **[La interpretación de la información aportada por el enunciado y la búsqueda de una solución permite trabajar la iniciativa (dimensión productiva de esta clave)].**

**Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Halla los otros vértices y la longitud de su lado.**

El punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ corresponde al afijo del número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2_{45°}$.

Para hallar los otros vértices, multiplicamos $z$ por $1_{72°}$:

$z_2 = 2_{117°} = -0,91 + 1,78i$ $\quad z_3 = 2_{189°} = -1,97 - 0,31i$

$z_4 = 2_{261°} = -0,31 - 1,97i$ $\quad z_5 = 2_{333°} = 1,78 - 0,91i$

Los otros cuatro vértices serán:

$(-0,91; 1,78)$ $\quad (-1,97; -0,31)$ $\quad (-0,31; -1,97)$ $\quad (1,78; -0,91)$

Hallamos la longitud del lado aplicando el teorema del coseno:

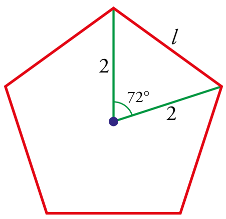
$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\cos 72°$

$l^2 = 4 + 4 - 4 \cdot 0,31$

$l^2 = 8 - 1,24$

$l^2 = 6,76$

$l = 2,6$ unidades




**49** **El afijo de $3 + 2i$ es uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen de coordenadas. Halla los otros vértices y el área del cuadrado.**

Si tenemos un vértice de un cuadrado centrado en el origen, para calcular los otros vértices tenemos que multiplicar por $i = 1_{90°}$ y así hacer giros de 90°.

$z_1 = 3 + 2i$ $\quad z_2 = (3 + 2i)i = -2 + 3i$ $\quad z_3 = (-2 + 3i)i = -3 - 2i$ $\quad z_4 = (-3 - 2i)i = 2 - 3i$

Los otros vértices serán: $(-2, 3)$, $(-3, -2)$ y $(2, -3)$.

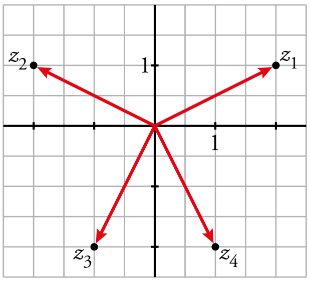
La diagonal del cuadrado mide: $2|z_1| = 2\sqrt{9 + 4} = 2\sqrt{13}$ porque está centrado en el origen.

El área del cuadrado es (usando la fórmula del área de un rombo):

$$A = \frac{2\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}}{2} = 26 \text{ u}^2$$

**50** **¿Pueden ser los números complejos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.**

No, porque sus afijos no se encuentran en los vértices de un polígono regular centrado en el origen. Podemos comprobarlo en el siguiente gráfico:




**51** **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:**

**a)** $1 + i$ **y** $1 - i$ **b)** $5i$ **y** $-5i$

**c)** $2 - 3i$ **y** $2 + 3i$ **d)** $4 - i$ **y** $1 + 2i$

a) $[x - (1 + i)][x - (1 - i)] = x^2 - (1 - i)x - (1 + i)x + (1 - i^2) =$

$= x^2 - (1 - i + 1 + i)x + (1 - i^2) = x^2 - 2x + 2 = 0$

b) $(x - 5i)(x + 5i) = x^2 + 5xi - 5xi - 25i^2 = x^2 + 25 = 0$

c) $[x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)] = (x - 2 - 3i)(x - 2 + 3i) =$

$= x^2 - 2x + 3xi - 2x + 4 - 6i - 3xi + 6i - 9i^2 = x^2 - 4x + 13 = 0$

d) En este caso, la ecuación de segundo grado no tendrá coeficientes reales porque las soluciones no son números complejos conjugados.

$[x - (4 - i)][x - (1 + 2i)] = (x - 4 + i)(x - 1 - 2i) = x^2 - (5 + i)x + 6 + 7i = 0$

**52** **Halla el valor que debe tener $m$ para que $1 - 2i$ sea una solución de la ecuación siguiente: $z^2 - mz + 5 = 0$**

Calculamos las soluciones de la ecuación:

$$z = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 20}}{2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2 - 20}{4}}$$

Si $\frac{m}{2} = 1 \rightarrow m = 2 \rightarrow \frac{m^2 - 20}{4} = \frac{4 - 20}{4} = -4$

Comprobamos ahora cuáles son las soluciones si $m = 2$.

$$z = \frac{2}{2} \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$$

Luego, en efecto, $1 - 2i$ es una de ellas.

**53** **Resuelve estas ecuaciones:**

**a)** $2z + 3i - 2 = 3 + zi$ **b)** $(5 + i)z = 3z + 4i - 2$

**c)** $(1 - i)z^2 = 1 + i$ **d)** $(i^{23} - i^{37})z = 2i^{22} - 3i^{19}$

a) $2z - zi = 3 - 3i + 2 \rightarrow z(2 - i) = 5 - 3i \rightarrow z = \frac{5 - 3i}{2 - i} = \frac{(5 - 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{13 - i}{5}$

b) $(5 + i)z - 3z = 4i - 2 \rightarrow (2 + i)z = 4i - 2 \rightarrow z = \frac{4i - 2}{2 + i} = \frac{2i(2 + i)}{2 + i} = 2i$

c) $z^2 = \frac{1 + i}{1 - i} \rightarrow z^2 = \frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} \rightarrow z^2 = \frac{(1 + i)^2}{2}$

$z_1 = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = -\frac{1 + i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

d) $(-i - i)z = 2(-1) - 3(-i) \rightarrow -2iz = -2 + 3i \rightarrow z = \frac{-2 + 3i}{-2i} = -\frac{3}{2} - i$

**54** **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:**

**a)** $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ iz + (1 - i)\, w = 1 + 3i \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} z - w = 5 - 3i \\ (2 + i)\, z + iw = 3 - 3i \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{cases}$

a) Multiplicamos por $-i$ la primera ecuación:

$\left.\begin{array}{l} -iz - iw = i + 2 \\ iz + (1 - i)\, w = 1 + 3i \end{array}\right\}$ Sumamos miembro a miembro:

$-iw + (1 - i)w = i + 2 + 1 + 3i \;\to\; (1 - 2i)w = 3 + 4i$

$$w = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{1^2 - 2i^2} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i$$

$z = -1 + 2i - w = -1 + 2i + 1 - 2i = 0$

*Solución*: $z = 0$; $w = -1 + 2i$

b) Multiplicamos por $i$ la primera ecuación:

$\left.\begin{array}{l} zi - wi = 5i + 3 \\ (2 + i)\, z + wi = 3 - 3i \end{array}\right\}$ Sumamos miembro a miembro:

$zi + (2 + i)\, z = 5i + 3 + 3 - 3i \;\to\; (2 + 2i)\, z = 6 + 2i$

$$z = \frac{6 + 2i}{2 + 2i} = \frac{(6 + 2i)(2 - 2i)}{4 - 4i^2} = \frac{16 - 8i}{8} = 2 - i$$

$w = z - 5 + 3i = 2 - i - 5 + 3i = -3 + 2i$

*Solución*: $z = 2 - i$; $w = -3 + 2i$

c) $\left.\begin{array}{l} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{array}\right\}$ Sumando miembro a miembro:

$2z = -4 + 6i \;\to\; z = -2 + 3i$

$w = (-1 + 2i) - (-2 + 3i) = 1 - i$

*Solución*: $z = -2 + 3i$; $w = 1 - i$

d) $\left.\begin{array}{l} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{array}\right\}$ Multiplicamos por –2 la 2.ª ecuación y sumamos:

$\left.\begin{array}{l} z + 2w = 2 + i \\ -2iz - 2w = -10 - 10i \end{array}\right\}$ $(1 - 2i)\, z = -8 - 9i \;\to\; z = \dfrac{-8 - 9i}{1 - 2i} = 2 - 5i$

$$w = \frac{2 + i - (2 - 5i)}{2} = \frac{6i}{2} = 3i$$

*Solución*: $z = 2 - 5i$; $w = 3i$

**55** **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

**a)** $z^3 + z^2 - 2 = 0$ **b)** $z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0$

**c)** $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$ **d)** $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

a) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$z^3 + z^2 - 2 = (z - 1)(z^2 + 2z + 2) \;\to\; z_1 = 1$

$z^2 + 2z + 2 = 0 \;\to\; z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i \;\to\; z_2 = -1 + i,\; z_3 = -1 - i$

b) Usando el método de Ruffini, obtenemos:

$z^3 - 3z^2 + z + 5 = (z+1)(z^2 - 4z + 5) \rightarrow z_1 = -1$

$z^2 - 4z + 5 = 0 \rightarrow z = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = 2 \pm i \rightarrow z_2 = 2 + i,\ z_3 = 2 - i$

c) $z^4 - 7z^2 - 144 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$z^2 = -9 \rightarrow z = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i \rightarrow z_1 = 3i,\ z_2 = -3i$

$z^2 = 16 \rightarrow z = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow z_3 = 4,\ z_4 = -4$

d) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$

Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el correspondiente cambio de variable, obtenemos:

$z^2 = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm i$

$z^2 = -1 + i = \sqrt{2}_{135°} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{135°}} = \sqrt[4]{2}_{(135 + 360°k)/2};\ k = 0, 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{67,5°};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{247,5°}$

$z^2 = -1 - i = \sqrt{2}_{225°} \rightarrow z = \sqrt{\sqrt{2}_{225°}} = \sqrt[4]{2}_{(225° + 360°k)/2};\ k = 0, 1 \rightarrow z_1 = \sqrt[4]{2}_{112,5°};\ z_2 = \sqrt[4]{2}_{292,5°}$

**56** **Halla los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.**

Buscamos los números tales que $z^2 = \overline{z}$.

En forma polar, $(r_\alpha)^2 = r_{-\alpha}$

$$(r^2)_{2\alpha} = r_{-\alpha} \rightarrow \begin{cases} r^2 = r \\ 2\alpha = -\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r(r-1) = 0 \\ 3\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0°,\ \alpha_2 = 120°,\ \alpha_3 = 240° \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \rightarrow z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \rightarrow z_2 = 1_{0°},\ z_3 = 1_{120°},\ z_4 = 1_{240°} \text{ son las demás soluciones} \end{cases}$$

(Para calcular los valores de $\alpha$ hemos igualado $3\alpha$ a 0°, 360° y 720°.)

Los números son:

$z_1 = 0 \quad z_2 = 1_{0°} \quad z_3 = 1_{120°} \quad z_4 = 1_{240°}$

## Cuestiones teóricas

**57** **¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0°?**

No, también son reales los números con argumento 180° (los negativos).

**58** **Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con $z$ los números $r_{\alpha + 180°}$ y $r_{360° - \alpha}$?**

$r_{\alpha + 180°} = -z$ (opuesto de $z$)

$r_{360° - \alpha} = \overline{z}$ (conjugado de $z$)

**59** **Comprueba que:**

**a)** $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

**b)** $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

**c)** $\overline{kz} = k\,\overline{z}$, **con** $k \in \mathbb{R}$

$z = a + bi = r_\alpha \rightarrow \overline{z} = a - bi = r_{360° - \alpha}$

$w = c + di = r'_\beta \rightarrow \overline{w} = c - di = r'_{360° - \beta}$

a) $z + w = (a+c) + (b+d)i \rightarrow \overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i$

$\overline{z} + \overline{w} = a - bi + c - di = (a+c) - (b+d)i = \overline{z+w}$

b) $z \cdot w = (r \cdot r')_{\alpha + \beta} \;\rightarrow\; \overline{z \cdot w} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)}$

$\overline{z} \cdot \overline{w} = (r \cdot r')_{360° - \alpha + 360° - \beta} = (r \cdot r')_{360° - (\alpha + \beta)} = \overline{z \cdot w}$

c) $kz = ka + kbi \;\rightarrow\; \overline{kz} = ka - kbi$

$k\overline{z} = ka - kbi = \overline{kz}$

**60** **Demuestra la siguiente identidad:**

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{360° - \alpha} \;\rightarrow\; \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|}$$

**61** **El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real? Acláralo con un ejemplo.**

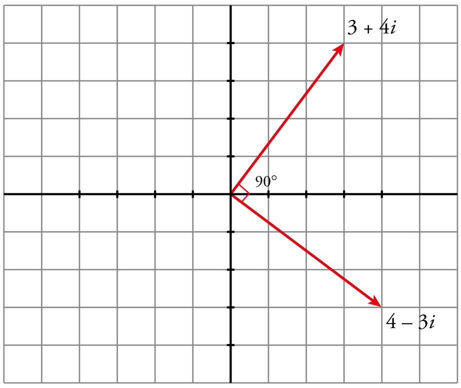
Sí. Por ejemplo:

$z = i, \;\; w = i$

$z \cdot w = i \cdot i = i^2 = -1 \in \mathbb{R}$

**62** **Representa el número complejo $z = 4 - 3i$. Multiplícalo por $i$ y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a $z$ un giro de 90°.**

$iz = 4i - 3i^2 = 3 + 4i$




**63** **¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?**

Se diferencian en 180°. Si el argumento del número es $\alpha$, el de su opuesto es:

$$180° + \alpha$$

**64** **¿Qué condición debe cumplir un número complejo $z = a + bi$ para que $\bar{z} = \frac{1}{z}$?**

* ***Halla $\frac{1}{z}$, e iguala a $a - bi$.***

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = a - bi$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a}{a^2 + b^2} = a \\[2ex] \dfrac{-b}{a^2 + b^2} = -b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \dfrac{a}{a} = a^2 + b^2 \;\rightarrow\; a^2 + b^2 = 1 \text{ (módulo 1)} \\[2ex] \text{Ha de tener módulo 1.} \end{array}$$

**65** **Sean $z$ y $w$ dos números complejos tales que:**

$$|z| = \sqrt{2} \qquad |w| = \sqrt{2}$$

**Determina cuáles de las siguientes igualdades son verdaderas y cuáles son falsas:**

**a)** $|z + w| = 2\sqrt{2}$ **b)** $|3z| = 3\sqrt{2}$

**c)** $|z \cdot w| = 2$ **d)** $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Para resolver este problema debemos tener en cuenta que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$:

$z = a + bi \;\to\; z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

a) Falso, porque $z + w$ representa la diagonal del cuadrado cuyos lados son $z$ y $w$. Por tanto, su longitud no puede ser la suma de las longitudes de los lados.

b) Verdadero.

Si $z = a + bi \to 3z = 3a + 3bi$

$|3z| = |3a + 3bi| = \sqrt{(3a)^2 + (3b)^2} = 3\sqrt{a^2 + b^2} = 3|z| = 3\sqrt{2}$

c) Verdadero. El módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos, tal como hemos visto en las operaciones en forma polar.

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

d) Verdadero. En forma polar $\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$ y, por tanto, el módulo del inverso de un número complejo es el inverso del módulo.

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**66** **Si $z = r_\alpha$ y $w = s_\beta$, ¿qué relación debe existir entre $\alpha$ y $\beta$ para que ocurra cada una de las siguientes afirmaciones sea verdadera?**

**a)** $z \cdot w$ **es imaginario puro.**

**b)** $\frac{z}{w}$ **es un número real.**

**c)** $z \cdot w$ **se encuentra en la bisectriz del primer o tercer cuadrante.**

a) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha + \beta}$

Por tanto $\alpha + \beta = 90°$ o $\alpha + \beta = 270°$, es decir, $\beta = 90° - \alpha$, $\beta = 450° - \alpha$ o $\beta = 270° - \alpha$, $\beta = 630° - \alpha$.

b) $\frac{z}{w} = \frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha - \beta}$

Por tanto, $\alpha - \beta = 0°$ o $\alpha - \beta = 180°$, es decir, $\beta = \alpha$ o $\beta = \alpha - 180°$.

c) $z \cdot w = r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha + \beta}$

Por tanto, $\alpha + \beta = 45°$ o $\alpha + \beta = 225°$, es decir, $\beta = 45° - \alpha$, $\beta = 405° - \alpha$ o $\beta = 225° - \alpha$, $\beta = 585° - \alpha$.

**67** **Sea $z \neq 0$ un número complejo y $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Justifica que los afijos de $z$, $zw$ y $zw^2$ son los vértices de un triángulo equilátero.**

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$tg\, \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \;\to\; \alpha = 120°$$

El afijo de $zw = z \cdot (1_{120°})$ es el punto que se obtiene girando $z$ un ángulo de 120° respecto del origen de coordenadas.

De la misma forma, el afijo de $zw^2 = z \cdot (1_{240°})$ es el punto que se obtiene girando $z$ un ángulo de 240° respecto del origen de coordenadas.

Por tanto, los afijos de los tres números complejos están en los vértices de un triángulo equilátero.

## Página 173

### Para profundizar

**68** **Cualquier ecuación cúbica (aunque no tenga ninguna raíz entera), $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, se puede resolver mediante el método de Cardano, aplicando esta fórmula:**

$$z = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}$$

**con** $p = \dfrac{3b - a^2}{3}$, $q = \dfrac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$ **y** $\Delta = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$

**Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene una solución real y dos complejas; si $\Delta = 0$, tiene dos soluciones reales, una de ellas doble y la otra simple (aunque también pueden coincidir); y, si $\Delta < 0$, se obtienen tres soluciones reales simples. Este último caso resulta muy interesante, pues resulta necesario pasar por los números complejos para obtener las soluciones reales.**

**Resuelve, usando el método de Cardano, esta ecuación:**

$$z^3 + 2z^2 - z - 2 = 0$$

**Para ello, aplica la fórmula anterior. Obtendrás $\Delta = \dfrac{-1}{3}$, por lo que $\sqrt{\Delta} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}i$.**

**Para calcular las raíces de la ecuación, expresa $\dfrac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}$ y $\dfrac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}$ en forma polar y halla todas sus raíces.**

Para la ecuación que nos piden solucionar tenemos $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$.

Busquemos los valores de $p$, $q$ y $\Delta$:

$$p = \frac{-3-4}{3} = -\frac{7}{3} \qquad q = \frac{16+18-54}{27} = \frac{-20}{27}$$

$$\Delta = \left(-\frac{10}{27}\right)^2 + \left(\frac{-7}{9}\right)^3 = \frac{100}{729} - \frac{343}{729} = -\frac{243}{729} = -\frac{1}{3} \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{-\frac{1}{3}} = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

Por tanto: $-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\Delta} = \dfrac{20}{54} + \dfrac{i}{\sqrt{3}}$

Buscamos la forma polar de $-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\Delta} = \dfrac{20}{54} + \dfrac{i}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{27} + \dfrac{i}{\sqrt{3}}$:

$$r = \sqrt{\frac{100}{729} + \frac{1}{3}} = 0{,}69$$

$$tg\,\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{10}{27}} = \frac{27}{10\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 57{,}3° \rightarrow \frac{10}{27} + \frac{i}{\sqrt{3}} = 0{,}69_{57{,}3°}$$

Para encontrar la forma polar de $\dfrac{10}{27} - \dfrac{i}{3}$ calculamos $r$ y $\alpha$:

$$r = \sqrt{\frac{100}{729} + \frac{1}{3}} = 0{,}69$$

$$tg\,\alpha = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{10}{27}} = \frac{-27}{10\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = -57{,}3° \rightarrow \frac{10}{27} + \frac{i}{\sqrt{3}} = 0{,}69_{-57{,}3°}$$

Para hallar el valor de $z$ con el método de Cardano nos falta hallar las raíces cúbicas de estas dos expresiones:

$$\sqrt[3]{\frac{10}{27}+\frac{i}{\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{0,69_{57,3°}} = 0,88_{19° + \frac{360°}{3}k} \quad \text{para} \quad k = 0,\ 1,\ 2$$

Sus 3 raíces son: $0,88_{19°}$; $0,88_{139°}$; $0,88_{258°}$ que en forma binómica se escriben como:

$z_1 = -0,17 - 0,87i$

$z_2 = 0,83 + 0,29i$

$z_3 = -0,67 + 0,58i$

$$\sqrt[3]{\frac{10}{27}-\frac{i}{\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{0,69_{-57,3°}} = 0,88_{-19° + \frac{360°}{3}k} \quad \text{para} \quad k = 0,\ 1,\ 2$$

Sus 3 raíces son: $0,88_{-19°}$; $0,88_{101°}$; $0,88_{221°}$ que en forma binómica se escriben como:

$z_4 = \overline{z_1} = -0,17 + 0,87i$

$z_5 = \overline{z_2} = 0,83 - 0,29i$

$z_6 = \overline{z_3} = -0,67 + 0,58i$

Buscamos ahora las raíces de la ecuación aplicando la fórmula:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3} = -\frac{2}{3}$$

Como $\Delta < 0$, sabemos por el enunciado que habrá 3 soluciones reales, por lo que al sumar las raíces encontradas, lo hacemos de forma que la parte imaginaria sea 0. Hemos visto que cada raíz $z_1, z_2, z_3$ tiene una raíz conjugada en $z_4, z_5, z_6$ por lo que sumando una raíz y su conjugada obtendremos la parte imaginaria igual a cero como queremos:

$$z_1 + z_4 = -0,17 - 0,87i + (-0,17 + 0,87i) - \frac{2}{3} = -1$$

$$z_2 + z_5 = 0,83 + 0,29i + (0,83 - 0,29i) - \frac{2}{3} = 1$$

$$z_3 + z_6 = -0,67 + 0,58i + (-0,67 + 0,58i) - \frac{2}{3} = -2$$

**69 Halla los números complejos cuyo cubo coincide con el cuadrado de su conjugado.**

Si el número complejo es $r_\alpha$ tenemos que:

$$(r_\alpha)^3 = (r_{-\alpha})^2 \to (r^3)_{3\alpha} = (r^2)_{-2\alpha} \to \begin{cases} r^3 = r^2 \\ 3\alpha = -2\alpha \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r^3 - r^2 = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r^2(r-1) = 0 \\ 5\alpha = 0° + 360°k \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r_1 = 0,\ r_2 = 1 \\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 72°,\ \alpha_3 = 144°,\ \alpha_4 = 216°,\ \alpha_5 = 288° \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} r_1 = 0 \to z_1 = 0 \text{ es una solución} \\ r_2 = 1 \to z_2 = 1_{0°},\ z_3 = 1_{72°},\ z_4 = 1_{144°},\ z_5 = 1_{216°},\ z_6 = 1_{288°} \end{cases}$$

son las demás soluciones.

Los números son: $0$, $1_{0°}$, $1_{72°}$, $1_{144°}$, $1_{216°}$ y $1_{288°}$.

**70** **Si el producto de dos números complejos es –8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?**

$$\left.\begin{array}{l} z = r_\alpha \\ w = r'_\beta \\ -8 = 8_{180°} \\ 2 = 2_{0°} \end{array}\right\} r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta} = 8_{180°} \to \begin{cases} r \cdot r' = 8 \\ \alpha + \beta = 180° \end{cases}$$

$$\frac{(r_\alpha)^3}{r'_\beta} = \frac{r^3{}_{3\alpha}}{r'_\beta} = \left(\frac{r^3}{r'}\right)_{3\alpha-\beta} = 2_{0°} \to \begin{cases} \dfrac{r^3}{r'} = 2 \\ 3\alpha - \beta = 0° \end{cases}$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} r \cdot r' = 8 \\ r^3 = 2r' \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} r' = \dfrac{8}{r} \\ r' = \dfrac{r^3}{2} \end{array}\right\} \frac{8}{r} = \frac{r^3}{2} \to 16 = r^4 \to \begin{cases} r = 2 \\ r' = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180° \\ 3\alpha = \beta \end{array}\right\} \alpha + 3\alpha = 180° \to 4\alpha = 180° \to \begin{cases} \alpha = 45° \\ \beta = 135° \end{cases}$$

Por tanto, $z = 2_{45°}$, $w = 4_{135°}$

**71** **Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado que obtengas:**

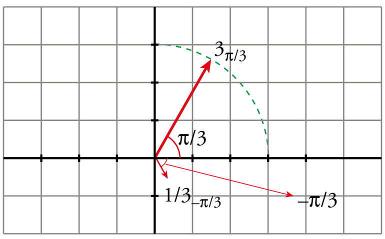
**a)** $\mathbf{3_{\pi/3}}$

**b)** $\mathbf{2i}$

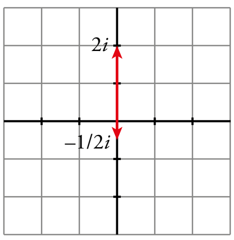
**c)** $\mathbf{-1 + i}$

**¿Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?**

a) $\dfrac{1}{3_{\pi/3}} = \dfrac{1_{0°}}{3_{\pi/3}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{-\pi/3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)_{5\pi/3}$



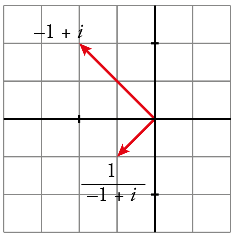

b) $\dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2} = \dfrac{-1}{2}i = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{270°}$



c) $-1+i=\sqrt{2}_{135°}$

$$\frac{1}{-1+i}=\frac{1_{0°}}{\sqrt{2}_{135°}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-135°}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{225°}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

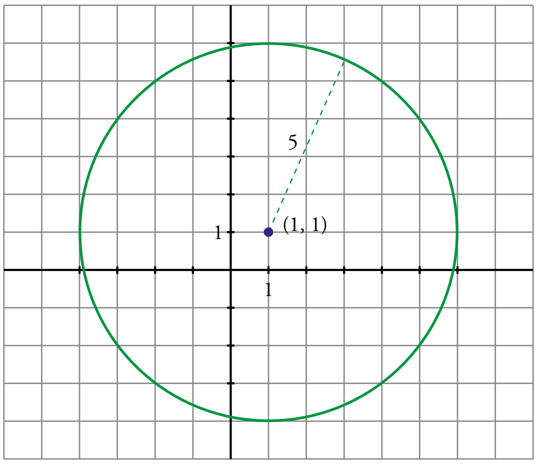
Si $z=r_\alpha$ entonces $\frac{1}{z}=\left(\frac{1}{r}\right)_{360°-\alpha}$.



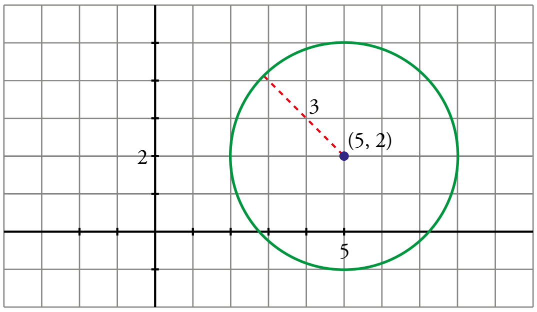

**72** **Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?**

**a)** $|z-(1+i)|=5$ **b)** $|z-(5+2i)|=3$

a) Circunferencia con centro en (1, 1) y radio 5.




b) Circunferencia con centro en (5, 2) y radio 3.




**73** **Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1, 1) y radio 3.**

$|z-(1+i)|=3$

**74** **La suma de los números complejos $z = a + 3i$ y $w = b - 5i$ dividida por su diferencia es un número imaginario puro. Prueba que $z$ y $w$ han de tener el mismo módulo.**

$z + w = a + b - 2i$

$z - w = a - b + 8i$

$\frac{a+b-2i}{a-b+8i} = ki$ con $k$ número real $\rightarrow$ $a + b - 2i = (a - b + 8i)ki$ $\rightarrow$

$$\rightarrow a+b-2i = -8k + k(a-b)i \rightarrow \begin{cases} a+b=-8k \\ -2 = k(a-b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=-8k \\ a-b=-\frac{2}{k} \end{cases}$$

Multiplicando miembro a miembro obtenemos: $a^2 - b^2 = 16$

Por otro lado:

$|z| = \sqrt{a^2+3^2} = \sqrt{a^2+9}$

$|w| = \sqrt{b^2+(-5)^2} = \sqrt{b^2+25}$

Para que los módulos sean iguales, debería ser:

$\sqrt{a^2+9} = \sqrt{b^2+25}$ $\rightarrow$ $a^2+9=b^2+25$ $\rightarrow$ $a^2-b^2=16$ y esto es exactamente lo que hemos obtenido a partir de los datos del problema.

**75** **Sea $z$ un número complejo cuyo afijo está en la bisectriz del primer cuadrante. Comprueba que $\frac{z-1-i}{z+1+i}$ es un número real.**

El número complejo que está en la bisectriz del primer cuadrante es de la forma $z = a + ai$.

$$\frac{a+ai-1-i}{a+ai+1+i} = \frac{a-1+(a-1)i}{a+1+(a+1)i} = \frac{[a-1+(a-1)i]\cdot[a+1-(a+1)i]}{[a+1+(a+1)i]\cdot[a+1-(a+1)i]} =$$

$$= \frac{(a-1)(a+1)-(a-1)(a+1)i+(a-1)(a+1)i-(a-1)(a+1)i^2}{(a+1)^2+(a+1)^2} =$$

$$= \frac{2(a-1)(a+1)}{2(a+1)^2} = \frac{a-1}{a+1}, \text{ que es un número real.}$$

# AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 1.10. (EA 1.10.1.-EA 1.10.2.-EA 1.10.3.) CE 2.2. (EA 2.2.1.-EA 2.2.2.)

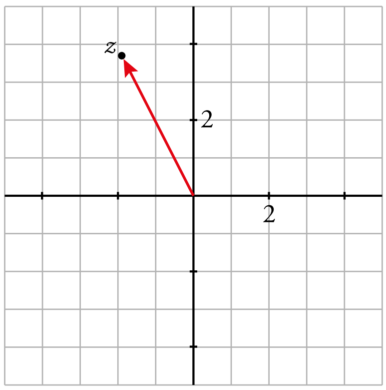
## Página 173

**1 Efectúa y representa la solución.**

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)(2-i)}{-3+i}$$

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)(2-i)}{-3+i}=\frac{9+4i^2-12i-(2-i+2i-i^2)}{-3+i}=\frac{5-12i-3-i}{-3+i}=$$

$$=\frac{(2-13i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-6+13i^2-2i+39i}{9-i^2}=\frac{-19+37i}{10}=-\frac{19}{10}+\frac{37}{10}i$$



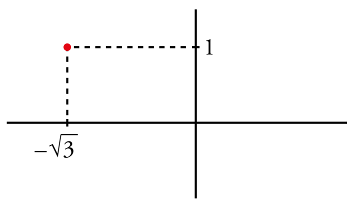

**2 Calcula $z$ y expresa el resultado en forma binómica.**

$$\sqrt[4]{z}=\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}$$

$$z=\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^4$$

Pasamos numerador y denominador a forma polar:

$$-\sqrt{3}+i \;\; \begin{cases} r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2 \\ tg\ \alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\rightarrow\; \alpha=150° \end{cases}$$




$$\sqrt{2}\,i \;\rightarrow\; \sqrt{2}_{90°}$$

$$z=\left(\frac{2_{150°}}{\sqrt{2}_{90°}}\right)^4=(\sqrt{2}_{60°})^4=4_{240°} \;\rightarrow\; z=4\,(cos\ 240°+i\ sen\ 240°)$$

$$z=4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2-2\sqrt{3}\,i$$

**3 Halla $a$ y $b$ para que se verifique la igualdad:**

**$5(a-2i)=(3+i)(b-i)$**

$$5a-10i=3b-i^2-3i+bi \;\rightarrow\; 5a-10i=3b+1+(-3+b)\,i$$

Igualando las componentes $\left.\begin{cases}5a=3b+1\\-10=-3+b\end{cases}\right\} \rightarrow\; b=-7,\; a=-4$

**4** **Resuelve la ecuación:**

$z^2 - 10z + 29 = 0$

$$z = \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{10 \pm 4i}{2} \left\langle \begin{array}{l} z_1 = 5 + 2i \\ z_2 = 5 - 2i \end{array} \right.$$

*Soluciones*; $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 5 - 2i$

**5** **Calcula el valor que debe tomar $x$ para que el módulo de $\frac{x+2i}{1-i}$ sea igual a 2.**

$$\frac{x+2i}{1-i} = \frac{(x+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{x+2i^2+xi+2i}{1-i^2} = \frac{x-2+(x+2)\,i}{1+1} = \frac{x-2}{2} + \frac{x+2}{2}i$$

$$\text{Módulo} = \sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2} = 2 \to \sqrt{\frac{x^2+4}{2}} = 2 \to \frac{x^2+4}{2} = 4 \to$$

$$\to x^2 + 4 = 8 \to x^2 = 4 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{array} \right.$$

*Soluciones:* $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

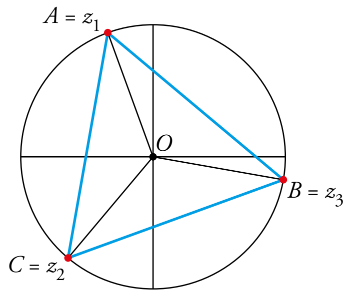
**6** **Halla el lado del triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} - 4i$.**

$z = \sqrt[3]{4\sqrt{3} - 4i}$

Expresamos $4\sqrt{3} - 4i$ en forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = 8 \\ tg\ \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \alpha = 330° \end{array}\right\} 4\sqrt{3} - 4i = 8_{330°}$$

$$z = \sqrt[3]{8_{330°}} = \sqrt[3]{8}_{(330° + 360° k)3} \left\langle \begin{array}{l} z_1 = 2_{110°} \\ z_2 = 2_{230°} \\ z_3 = 2_{350°} \end{array} \right.$$



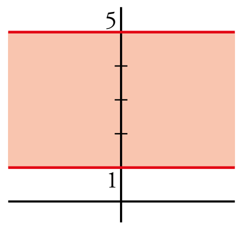

En el triángulo $AOB$ conocemos dos lados, $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$, y el ángulo comprendido, 120°. Aplicando el teorema del coseno, obtenemos el lado del triángulo, $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2\cos 120° = 12 \to \overline{AB} = \sqrt{12} = 3\sqrt{3}\ \text{u}$$

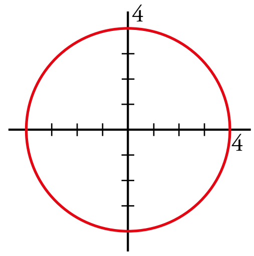
**7** **Representa gráficamente.**

**a)** $1 \le Im(z) \le 5$ **b)** $|z| = 4$ **c)** $z + \bar{z} = -4$

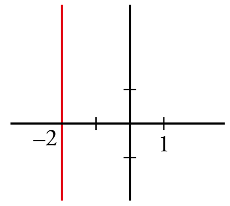
a)




b)




c) $a + bi + a - bi = -4 \to 2a = -4 \to a = -2$



**8** **Halla dos números complejos tales que su cociente sea $2_{150°}$ y su producto $18_{90°}$.**

$$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 2_{150°} \rightarrow \frac{r}{s} = 2;\ \alpha - \beta = 150°$$

$$r_\alpha \cdot s_\beta = 18_{90°} \rightarrow r \cdot s = 18;\ \alpha + \beta = 90°$$

Resolvemos los sistemas:

$$\begin{cases} \dfrac{r}{s} = 2 \\ r \cdot s = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha - \beta = 150° \\ \alpha + \beta = 90° \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\begin{cases} r = 6 \\ s = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 120° \\ \beta = -30° = 330° \end{cases}$$

Los números son $6_{120°}$ y $3_{330°}$. Otra posible solución es: $6_{300°}$ y $3_{150°}$.

**9** **Demuestra que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.**

Supongamos que $z = a + bi$. Entonces:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

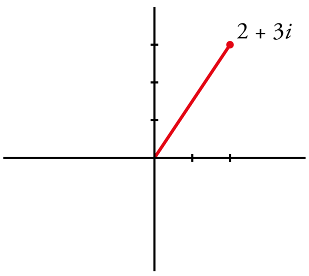
**10** **Calcula el valor de *cos* 120° y de *sen* 120° a partir del producto $1_{90°} \cdot 1_{30°}$.**

$$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1\,(cos\,90° + i\,sen\,90°) \cdot 1\,(cos\,30° + i\,sen\,30°) =$$

$$= i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1_{120°} = 1\,(cos\,120° + i\,sen\,120°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow cos\,120° = -\frac{1}{2};\ sen\,120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**11** **Halla el número complejo $z$ que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de 30° con centro en el origen.**




Multiplicamos por $1_{30°} = 1\,(cos\,30° + i\,sen\,30°)$.

$$z = (2 + 3i) \cdot 1_{30°} = (2 + 3i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z = \sqrt{3} + \frac{3}{2}i^2 + i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} + \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}i$$