

UNIDAD 7: Funciones polinómicas. Interpolación

ACTIVIDADES-PÁG. 142

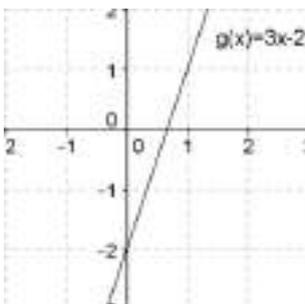
1. Las representaciones quedan:

a) $f(x) = -3$



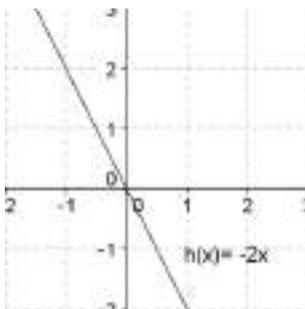
$f(x)$ es una función constante.
 $\text{Dom } f = \mathbb{R}$
 $\text{Im } f = \{-3\}$
 Acotada por -3 .

b) $g(x) = 3x - 2$



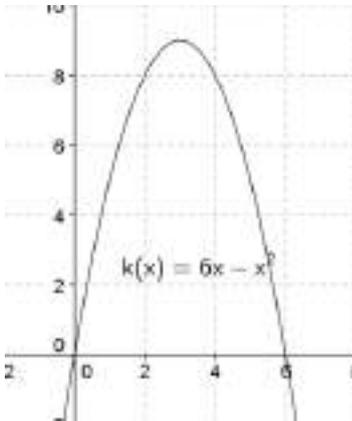
$g(x)$ es una función afín.
 $\text{Dom } g = \mathbb{R}$
 $\text{Im } g = \{\mathbb{R}\}$
 Estrictamente creciente en su dominio.

c) $h(x) = -2x$



$h(x)$ es una función lineal.
 $\text{Dom } h = \mathbb{R}$
 $\text{Im } h = \{\mathbb{R}\}$
 Estrictamente decreciente en su dominio.

d) $k(x) = 6x - x^2$



$k(x)$ es una función cuadrática.

Dom $f = \mathbb{R}$

Im $k = (-\infty, 9]$

Acotada superiormente por 9.

Estrictamente creciente en $(-\infty, 3)$.

Estrictamente decreciente en $(3, +\infty)$

Máximo en $(3, 9)$.

2. La función es $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

3. La asociación es: a) con (III) b) con (IV) c) con (I) d) con (II)

ACTIVIDADES-PÁG. 157

1. Llamamos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

$$5 \cdot (4B + 3N) = 4 \cdot (3B + 5N) \Rightarrow 20B + 15N = 12B + 20N \Rightarrow 8B = 5N$$

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas de la pirámide es:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 14^2 + 15^2 = 1240 \text{ naranjas.}$$

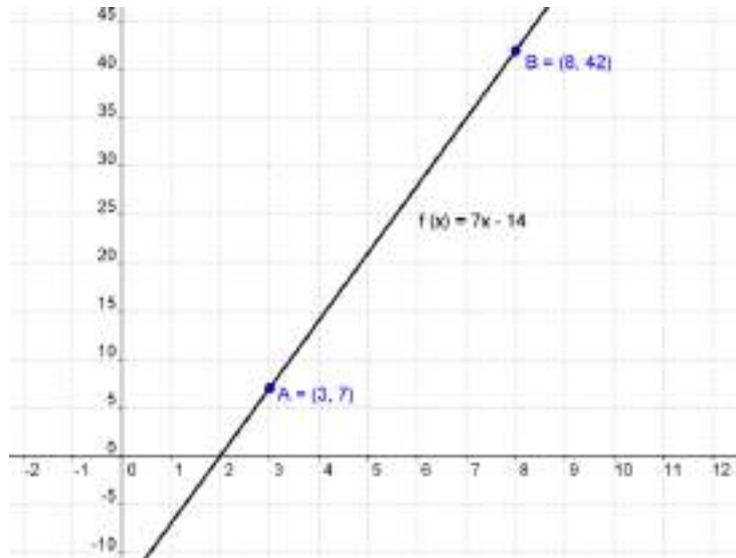
3. Por medio de ensayo y error dirigido se obtiene:

- Con la información referida a los Reyes (R) y las Damas (D) llegamos a que puede ser RDD o DRD.
- Con la información referida a los Corazones (C) y las Picas (P) llegamos a que puede ser PCP o PPC.

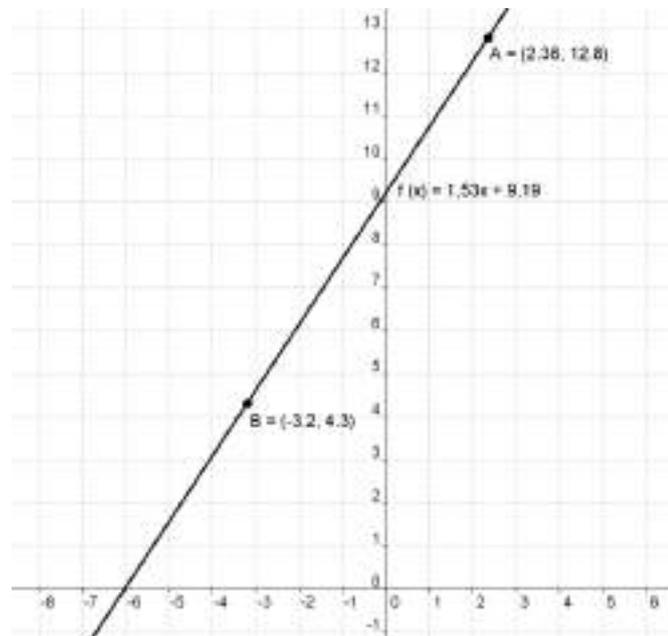
Juntamos los resultados obtenidos y llegamos a que la solución es: Rey de Picas – Dama de Picas – Dama de Corazones.

ACTIVIDADES-PÁG. 159

1. a) Siguiendo los pasos descritos, obtenemos $f(x) = 7x - 14$ como polinomio interpolador.



b) En este caso obtenemos $f(x) = 1,53x + 9,19$.



2. Procedemos como en los casos anteriores:

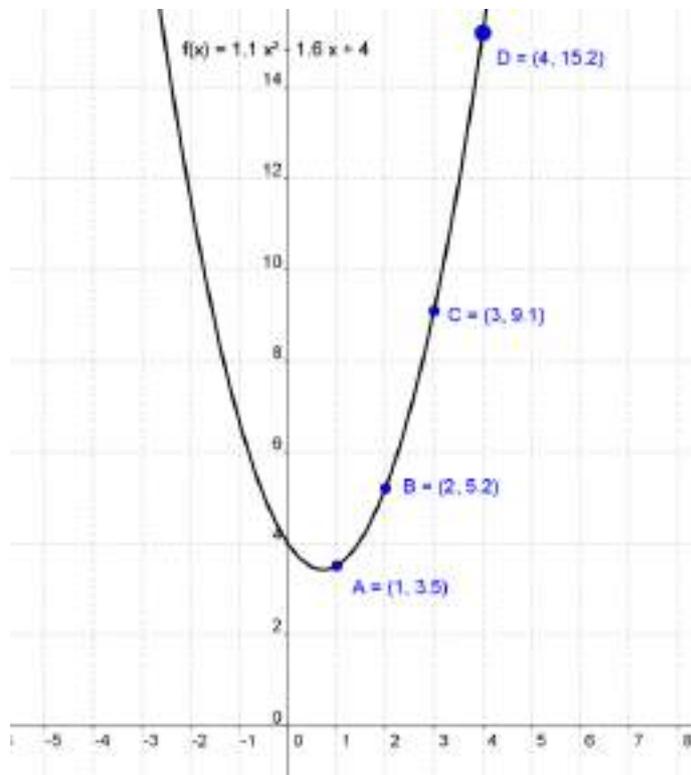
a) Introducimos los puntos $A = (1, 3.5)$; $B = (2, 5.2)$ y $C = (3, 9.1)$.

b) Dibujamos la función interpoladora con el comando Polinomio [A,B,C].

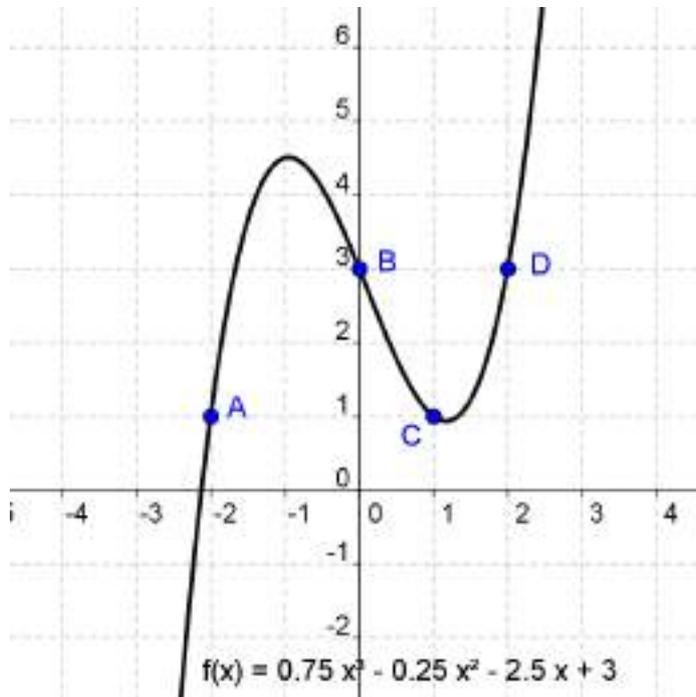
c) En el menú contextual de cada elemento determinamos su nombre y valor.

d) Obtenemos el gasto previsto para el año 2012 escribiendo en el Campo de Entrada $f(4)$ y nos da que el gasto 15200 euros.

Puedes verlo dibujado en la gráfica como punto D.



3. Procediendo como en los casos anteriores obtenemos el polinomio $f(x) = 0,75x^3 - 0,25x^2 - 2,5x + 3$.



ACTIVIDADES-PÁG. 160

1. En cada caso queda:

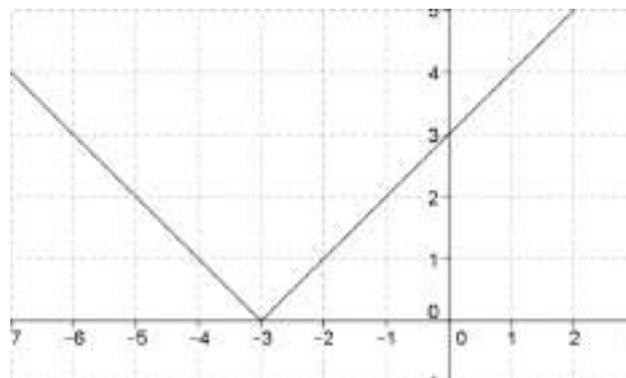
a) La función es $y = \frac{7}{3}x$.

b) Es la función lineal $y = 2x$. Es una función lineal.

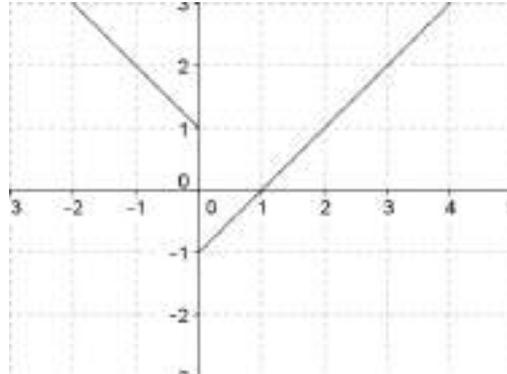
c) Su ecuación es $y = \frac{3}{4}x - 3$. La pendiente de esta recta vale $\frac{3}{4}$.

2. Las gráficas quedan:

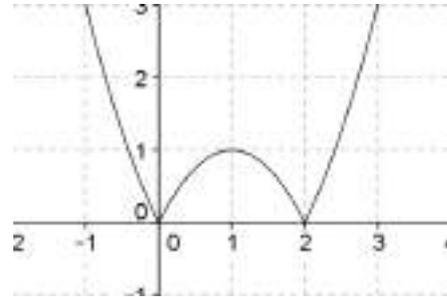
a) $f(x) = |x + 3|$



b) $f(x) = |x| - \frac{|x|}{x}$



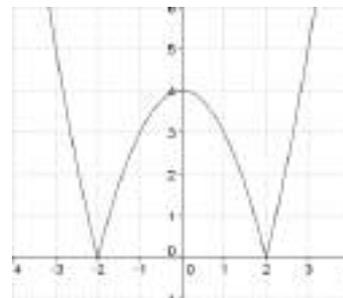
c) $f(x) = |x^2 - 2x|$



3. Las gráficas quedan:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \text{ ó } x \geq 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \end{cases}$

Dom $f = \mathbb{R}$
Im $f = [0, +\infty)$



b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

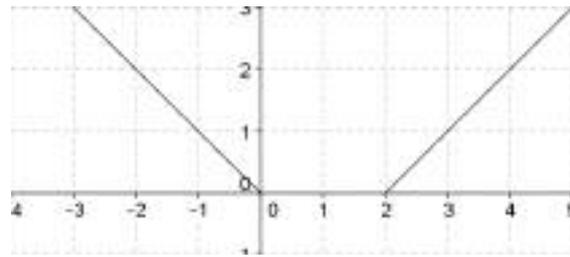
Dom $f = \mathbb{R}$
Im $f = \{-1, 0, 1\}$



$$c) f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x-2 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

$$\text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$$

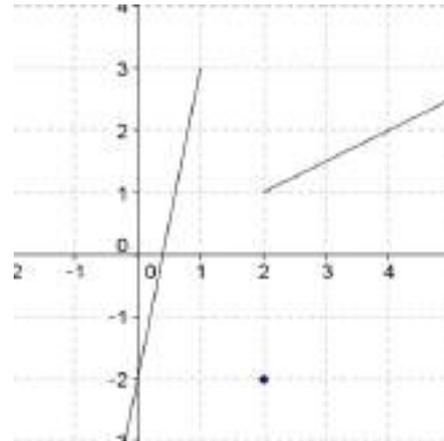
$$\text{Im } f = [0, +\infty)$$



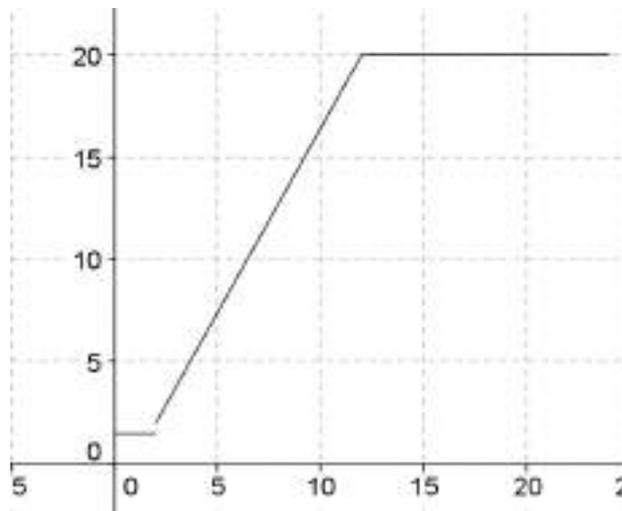
$$d) f(x) = \begin{cases} 5x-2 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{Dom } f = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$$

$$\text{Im } f = \mathbb{R}$$



4. La representación gráfica es:

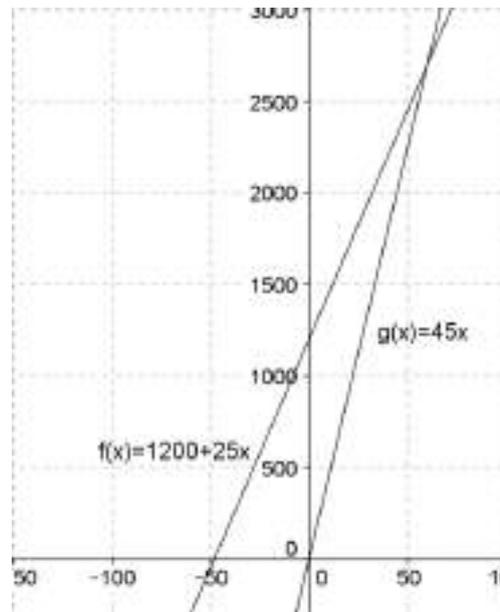


5. La expresión de la función es $P(x) = 1,5x + 2,75$. Cobra 1,5 €/km y 2,75 € por bajada de bandera.

6. La solución queda:

- a) La función es $P = 1200 + 25 \cdot x$, donde P es el precio a cobrar en euros y x los kilómetros.
 b) La función para la otra empresa es $P = 45 \cdot x$, donde P es el precio a cobrar en euros y x los kilómetros.

Las gráficas aparecen en el dibujo.



Para los primeros 60 km interesa más la segunda opción. Para 60 km da igual una que otra y a partir de 60 km es más barata la primera opción.

c) La función primera será: $f(x) = \frac{121}{100} P = \frac{121}{100} (1200 + 25 \cdot x)$

La función segunda será: $g(x) = \frac{121}{100} P = \frac{121}{100} (45 \cdot x)$

Todas las ordenadas de ambas funciones quedan multiplicadas por 1,21.

7. Las representaciones gráficas y sus características son:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = [-1, +\infty)$

Estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$.

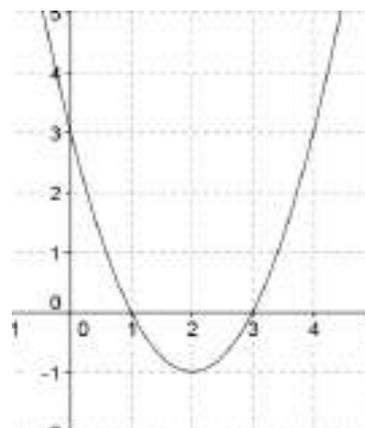
Estrictamente creciente en $(2, +\infty)$

Mínimo relativo en $(2, -1)$.

Está acotada inferiormente por -1 .

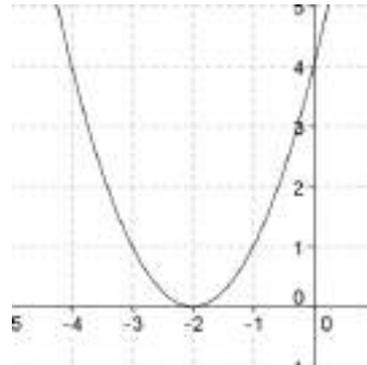
Mínimo absoluto en -1 .

Es simétrica respecto de su eje $x = 2$.



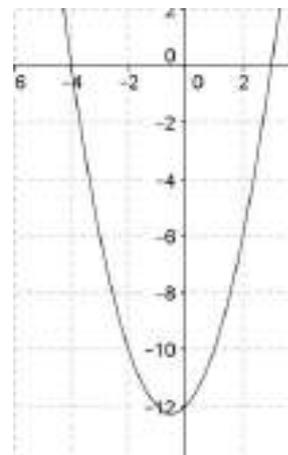
b) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Im $f = [0, +\infty)$
- Estrictamente decreciente en $(-\infty, -2)$.
- Estrictamente creciente en $(-2, +\infty)$
- Mínimo relativo en $(-2, 0)$.
- Está acotada inferiormente por 0. Mínimo absoluto en 0.
- Es simétrica respecto de su eje $x = -2$.



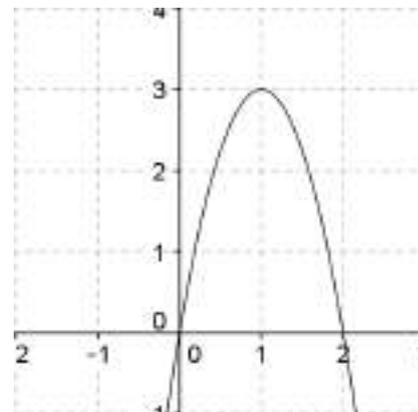
c) $f(x) = x^2 + x - 12$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Im $f = [-12,25; +\infty)$
- Estrictamente decreciente en $(-\infty, -1/2)$.
- Estrictamente creciente en $(-1/2, +\infty)$
- Mínimo relativo en $(-1/2; -12,25)$.
- Está acotada inferiormente por -12,25. Mínimo absoluto en -12,25.
- Es simétrica respecto de su eje $x = -1/2$.



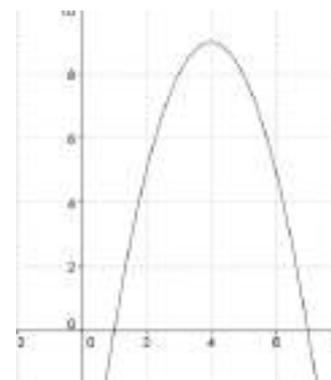
d) $f(x) = -3x^2 + 6x$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Im $f = (-\infty, 3]$
- Estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$.
- Estrictamente decreciente en $(1, +\infty)$
- Máximo relativo en $(1, 3)$.
- Está acotada superiormente por 3.
- Máximo absoluto en 3.
- Es simétrica respecto de su eje $x = 1$.

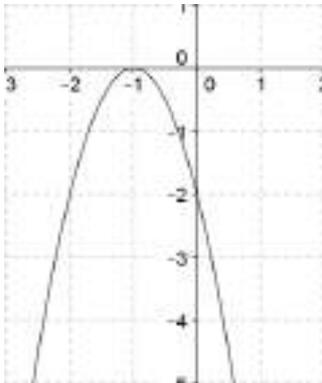


e) $f(x) = -x^2 + 8x - 7$

- Dom $f = \mathbb{R}$
- Im $f = (-\infty, 9]$
- Estrictamente creciente en $(-\infty, 4)$.
- Estrictamente decreciente en $(4, +\infty)$
- Máximo relativo en $(4, 9)$.
- Está acotada superiormente por 9.
- Máximo absoluto 9.
- Es simétrica respecto de su eje $x = 4$.



f) $f(x) = -2x^2 - 4x - 2$



Dom $f = \mathbb{R}$

Im $f = (-\infty, 0]$

Estrictamente creciente en $(-\infty, -1)$.

Estrictamente decreciente en $(-1, +\infty)$

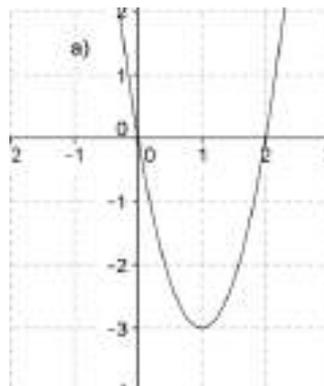
Máximo relativo en $(-1, 0)$.

Está acotada superiormente por 0. Máximo absoluto 0.

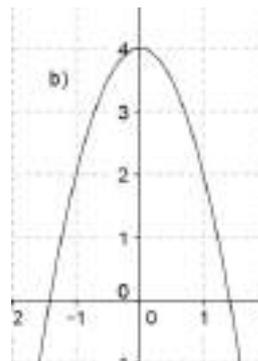
Es simétrica respecto de su eje $x = -1$.

ACTIVIDADES-PÁG. 161

8. Las soluciones se presentan bajo las gráficas.

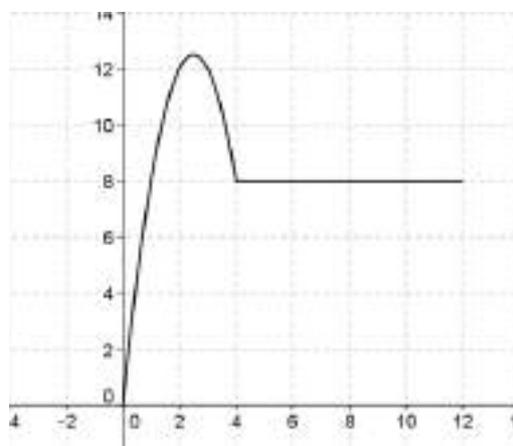


$f(x) = 3x^2 - 6x$



$f(x) = (-16/9)x^2 + 4$

9. La representación gráfica es:



El beneficio es de 12 millones de euros al 2º año y al 3º.

10. Las soluciones de los apartados son:

a) El precio de equilibrio se consigue cuando coinciden ambas funciones:

$$\frac{425}{3}p - 326 = 51570 - \frac{1454}{5}p \Rightarrow p = 120 \text{ €}$$

La cantidad de equilibrio es $f_o(120) = f_d(120) = 16\,674$ unidades.

b) Si el precio es de 135 € entonces: $f_o(135) = 18\,799$ unidades produce el almacén y $f_d(135) = 12\,312$ unidades demanda el público, es decir hay sobreabundancia de unidades.

Si el precio es de 105 € entonces: $f_o(105) = 14\,549$ unidades produce el almacén y $f_d(105) = 21\,036$ unidades demanda el público, es decir hay escasez de unidades.

11. a) La función demanda es $f_d(p) = -2p + 110$

b) La función oferta es : $f_o(p) = 1,5p + 15$

c) El precio de equilibrio es $p = 27,14$ euros. Si $p = 40$ € entonces $f_o(40) = 75$ unidades oferta la empresa y $f_d(40) = 30$ unidades demanda el comprador. En este caso se produce exceso de carteras.

12. El polinomio buscado es $P(x) = x + 2$.

Para el valor $a = 0$, obtenemos $P(0) = 0 + 2$, es decir, $P(0) = 2$.

Para el valor $a = 5$, obtenemos $P(5) = 5 + 2$, es decir, $P(5) = 7$.

13. El polinomio interpolador es $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$:

$$\begin{cases} a_0 + 5a_1 + 25a_2 = 49 \\ a_0 + 10a_1 + 100a_2 = 105 \\ a_0 + 25a_1 + 625a_2 = 352 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 37/6 \\ a_1 = 29/4 \\ a_2 = 79/300 \end{cases} \Rightarrow P(x) = \frac{79}{300}x^2 + \frac{29}{4}x + \frac{37}{6}$$

$$P(15) = 174,17 \text{ mm}$$

$$P(20) = 256,5 \text{ mm}$$

Las aproximaciones obtenidas son bastante buenas.

14. El polinomio interpolado es $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$:

$$\begin{cases} a_0 = 48 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 52 \\ a_0 + 6a_1 + 36a_2 = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 48 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = 1/9 \end{cases} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{9}x^2 + x + 48$$

Un bebe de 1 año, es decir de 12 meses, tendría una longitud media de $P(12) = 76$ cm.

ACTIVIDADES-PÁG. 162

15. La solución queda:

- El punto de intersección lo hallamos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 16x \\ y = -2x + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = 1 \\ y = 14 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son (8, 0) y (1, 14).

El ingreso total máximo se produce para $x = 4$ dólares y es 32.

- El ingreso total pasa de 14 a 24 dólares para valores de $x \in (1, 2)$.

La función $f(x)$ que da la cantidad de producto fabricado disminuye de 14 a 12 unidades, no aumenta y el precio pasa de 1 a 2 dólares.

16. a) El precio de equilibrio se consigue cuando coinciden ambas funciones:

$$0,2 \cdot p^2 - 65 = 340 - 0,25 \cdot p^2 \Rightarrow p = 30 \text{ €}$$

La cantidad de equilibrio es $f_o(30) = f_d(30) = 115$ motos.

b) Se produce escasez de motos cuando $340 - 0,25 \cdot p^2 > 0,2 \cdot p^2 - 65 + 99 \Rightarrow p \in (0, 26) \text{ €}$

17. Consideramos el mes de mayo como el mes inicial ($x = 0$). El polinomio interpolador, $P(x) = ax^2 + bx + c$, para los datos de la tabla, es:

Mayo $x = 0$	Agosto $x = 3$	Septiembre $x = 4$
2,4	2,7	2,9

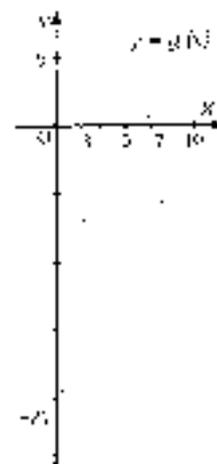
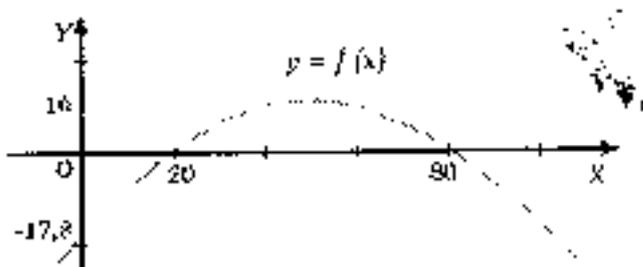
$$P(x) = 0,025x^2 + 0,025x + 2,4$$

La inflación estimada para el mes de julio ($x = 2$) es $P(2) = 2,55$.

La inflación estimada para el mes de octubre ($x = 5$) es $P(5) = 3,15$.

18. Las soluciones de los apartados son:

a) Las representaciones quedan:



b) En el primer caso hay que fabricar entre 20 y 80 unidades y en el segundo caso entre 3 y 7 unidades.

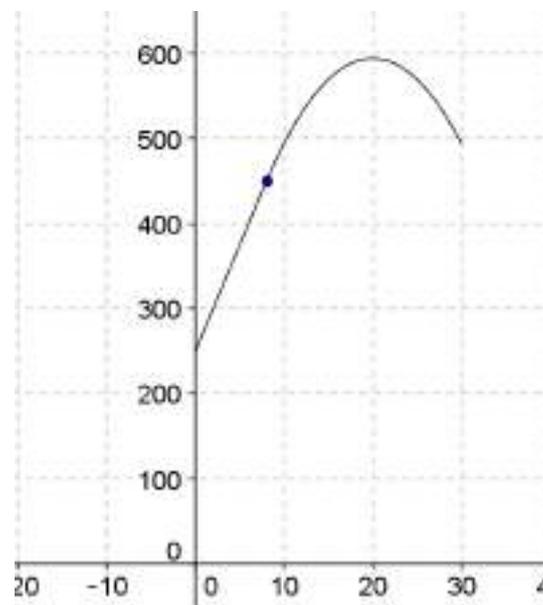
c) En la función $f(x)$ el mayor beneficio se produce al fabricar 50 unidades y este beneficio es de 10 000 euros.

En la función $g(x)$ el mayor beneficio se produce al fabricar 5 unidades y este beneficio es de 4 000 euros.

d) Obtiene los mismos beneficios cuando:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{90}(-x^2 + 100x - 1600) = 10x - x^2 - 21 \Rightarrow x = 8,6 ; x = 0,38$$

19. La representación gráfica es:



La oferta máxima la alcanza para $p = 20$ €.

La oferta es menor de 450 unidades para $p \in (0,8)$

20. Considerando 2011 como año 0, 2012 como año 1 y 2014 como año 3, obtenemos la función de interpolación cuadrática que se ajusta a estos datos:

$$\begin{cases} P(0) = 54 \Rightarrow a_0 = 54 \\ P(2) = 57 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 57 \\ P(3) = 4,6 \Rightarrow a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 54 \\ a_1 = \frac{8}{3} \\ a_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 54$$

Para el año 2015 se prevé que haya $P(4) = 70$ millones de turistas por el interior de España.

ACTIVIDADES-PÁG. 163

Existe una amplísima bibliografía sobre la relación entre matemáticas y arte. Ofrecemos algunos textos significativos.

CORBALÁN, Fernando. (2010) *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. RBA. Barcelona.

FERNÁNDEZ, I. y REYES, M. A. (2006) *Geometría con el hexágono y el octógono*. Proyecto Sur. Granada.

LIVIO, Mario. (2006) *La proporción áurea. La historia de phi, el número más sorprendente del mundo*. Ariel. Barcelona.

MARTÍN CASALDERREY, F. (2010) *La burla de los sentidos. El arte visto con ojos matemáticos*. RBA. Barcelona.

MEAVILLA SEGUÍ, V. (2007) *Las matemáticas del arte. Inspiración ma(r)temática*. Almuzara. Córdoba.

VV. AA. (2005) *Geometría en los Reales Alcázares de Sevilla*. Junta de Andalucía. Sevilla.

VV. AA. (2009) *La proporción: arte y matemáticas*. Graó. Barcelona.

VV. AA. (2009) *Matemáticas en la catedral de Burgos*. Caja Círculo. Burgos.