UNIDAD 7: Geometría analítica en el plano

ACTIVIDADES-PÁG. 154

1. El valor de a es $a = -\frac{1}{5}$.

2. Las ecuaciones de las rectas son:

a) $x + y - 7 = 0$

b) $x - y + 3 = 0$

3. El baricentro de un triángulo de vértices A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) y C (x_3, y_3) tiene de coordenadas:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

En nuestro caso queda $G = \left(-\frac{2}{3}, \frac{13}{3} \right)$.

4. Calculemos las longitudes de los lados del triángulo:

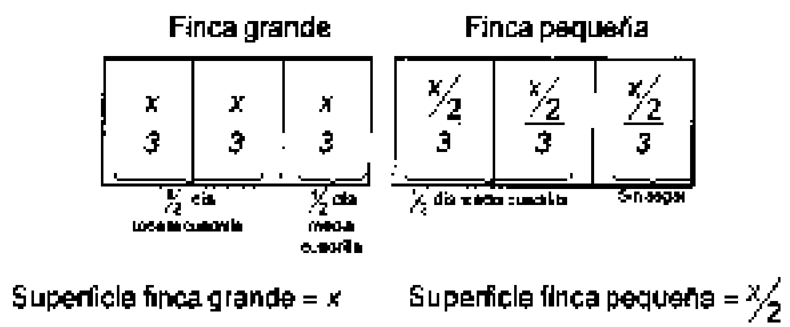
$d\ (P, Q) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ $\qquad d\ (P, R) = 6$ $\qquad d\ (Q, R) = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

El perímetro mide:

$$Perímetro = 4\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{5} \approx 16{,}13\ u.\ l.$$

ACTIVIDADES-PÁG. 169

1. Podemos resolver el problema mediante ecuaciones, pero es un camino muy complicado. Intentaremos representar la situación:



Las condiciones del problema nos muestran que si toda la cuadrilla trabajó durante la mitad del día en la finca grande y sólo la mitad de la cuadrilla el otro medio día. Entonces la mitad de la cuadrilla vendimió la tercera parte de la finca grande en medio día, es decir, $x/3$. Luego en la finca pequeña durante media día vendimiaron el equivalente a la finca grande, es decir, $x/3 = 2x/6$, luego quedó sin vendimiar $x/6$ de la finca pequeña que la vendimió un trabajador al día siguiente.

Si un trabajador vendimia $x/6$ en un día y se vendimiaron el campo grande $3x/3$ más el pequeño $\left(3x/6 - x/6\right)$ todos los trabajadores en 1 día, entonces el primer día se hicieron:

$$\frac{3x}{3} + \left(\frac{3x}{6} - \frac{x}{6}\right) = \frac{6x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{8x}{6} = 8 \cdot \left(\frac{x}{6}\right)$$

Es decir, en la cuadrilla había 8 vendimiadores.

2. Hay que ver que $x^2 - 1 = \dot{12}$.

$$x^2 = (x-1)\cdot(x+1) \quad \Rightarrow \quad Al\ ser\ x\ primo > 3 \quad \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = \dot{3} \ y \ x + 1 = \dot{4} \\ \qquad o \\ x - 1 = \dot{4} \ y \ x + 1 = \dot{3} \end{cases}$$

En ambos casos, $x^2 - 1 = \dot{3} \cdot \dot{4} = \dot{12}$.

3. Hacemos el siguiente diagrama:

Páginas numeradas	1 - 9	10 - 99	100 - 999	1000 - 1025
Dígitos usados	9	180	2700	100
Total dígitos	9	180 + 9	180 + 9 + 2700 = 2889	2889 + 100

En total hacen falta: 2889 + 100 = 2989 dígitos.

100 dígitos son 25 páginas, entonces hacen falta 999 + 25 = 1024 páginas.

El libro tiene 1024 páginas.

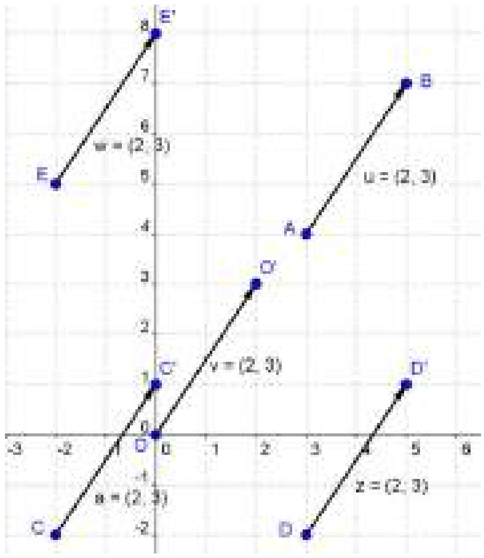
4. Por medio de ensayo y error dirigido se obtiene:

- Con la información referida a los Reyes (R) y las Damas (D) llegamos a que puede ser RDD o DRD.
- Con la información referida a los Corazones (C) y las Picas (P) llegamos a que puede ser PCP o PPC.

Juntamos los resultados obtenidos y llegamos a que la solución es: Rey de Picas – Dama de Picas – Dama de Corazones.

ACTIVIDADES-PÁG. 171

1. Procedemos como en el apartado de vectores en el plano y operaciones entre ellos y obtenemos:

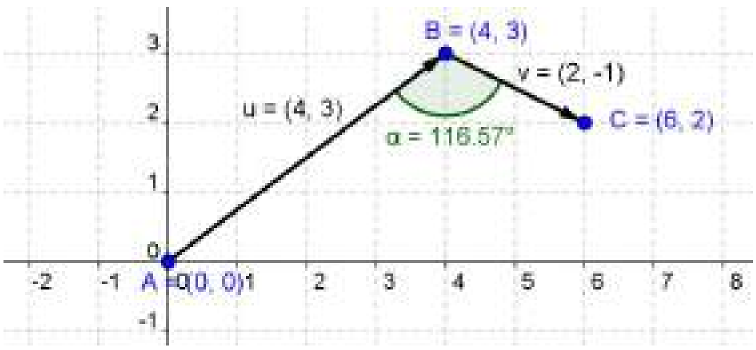


2. Seguimos los pasos:

a) Repite los primeros apartados de la construcción de vectores.

b) Con la herramienta Ángulo, dibuja el ángulo entre los dos vectores.

c) Arrastra el punto B o el punto C y observa cómo varía el valor del ángulo.

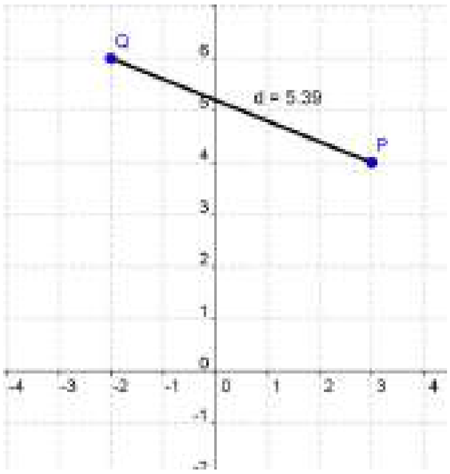


3. i) Los pasos a seguir son:

a) En el Campo de Entrada introduce los puntos P = (3, 4) y Q = (-2, 6).

b) Dibuja el segmento PQ y muestra su valor. También puede dibujarse el vector de extremos P y Q y determinar su longitud.

c) Arrastra el punto P o el punto Q y observa cómo cambia el valor de la distancia.



ii) Seguimos los pasos indicados:

a) En el Campo de Entrada introduce la recta r ≡ 3x + 4y = 12.

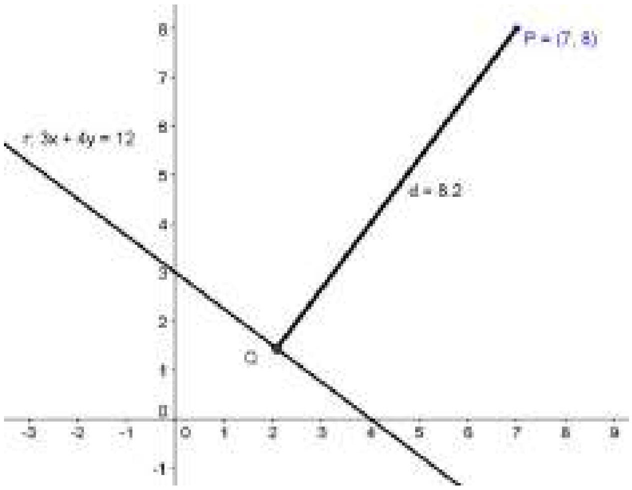
b) Arrastra el origen de coordenadas para dejarlo como aparece en el dibujo.

c) En el Campo de Entrada, introduce el punto P = (7, 8) y muestra su valor.

d) Dibuja una recta perpendicular desde P a r. Halla el punto Q, intersección de las dos rectas.

e) Oculta la recta perpendicular. Dibuja el segmento PQ y muestra su valor.

f) Arrastra el punto P o haz doble-clic en la Ventana Algebraica sobre la recta, y modifícala y observa cómo cambia el valor de la distancia.



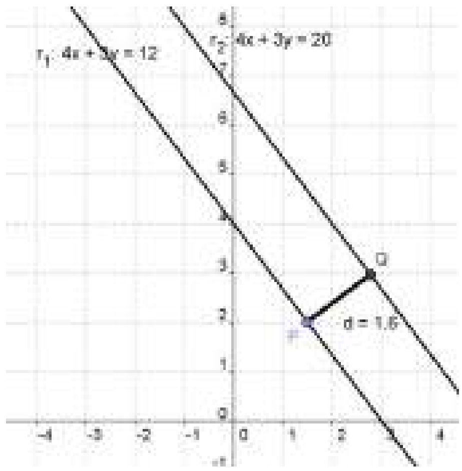
iii) Realizamos las etapas que siguen:

a) En el Campo de Entrada introduce las rectas r1: 4x + 3y = 12 y
r2: 4x + 3y = 20.

b) Dibuja un punto P sobre la recta r1. Traza la perpendicular por P a la recta r2. Halla el punto Q, intersección de las dos rectas.

c) Oculta la recta perpendicular. Dibuja el segmento PQ y muestra su valor.

d) Arrastra cualquiera de la rectas, el punto P o haz doble-clic en la Ventana Algebraica sobre la rectas, y modifícalas y observa cómo cambia el valor de la distancia.



ACTIVIDADES-PÁG. 172

1. a) El extremo del vector es el punto de coordenadas (8, 4).

b) El origen del vector es el punto de coordenadas (4, - 8).

2. Las soluciones de los diferentes apartados son:

a) $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{26}$; $\left|\vec{w}\right| = 5$; $\left|\vec{u}\right| = 13$

b) $\cos\left(\vec{v}, \vec{w}\right) = \dfrac{17}{5\sqrt{26}}$; $\cos\left(\vec{v}, \vec{u}\right) = \dfrac{65}{13\sqrt{26}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$; $\cos\left(\vec{w}, \vec{u}\right) = \dfrac{33}{65}$

c) $\left(\vec{v}, \vec{w}\right) = 48^\circ\ 10'\ 47''$ $\left(\vec{v}, \vec{u}\right) = 11^\circ\ 18'\ 36''$ $\left(\vec{w}, \vec{u}\right) = 59^\circ\ 29'\ 23''$

d) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{u} = (3,\ 21)$

e) $3\ \vec{v} = 3 \cdot (1, 5) = (3, 15)$.

f) Un vector normal a $\vec{w} = (-3,\ 4)$ *es* $\vec{n}\ (4,\ 3)$.

3. La solución de cada apartado es:

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{w}\right| \cdot \cos\left(\vec{v}, \vec{w}\right) = 4 \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 12\ \sqrt{2} = 16{,}97$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{w}\right| \cdot \cos\left(\vec{v}, \vec{w}\right) = 3 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$

c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (3,\ -4) \cdot (-12,\ -5) = -16$

d) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (-3,\ 4) \cdot (15,\ -20) = -125$

4. Existen tres soluciones que son los puntos D_1 (2, 4); D_2 (- 4, - 2) y D_3 (4, 0).

5. Hay dos valores posibles: $x_1 = -3$ con $y_1 = 9$ y $x_2 = -3$ con $y_2 = -9$.

6. Las soluciones son los vectores unitarios $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. La demostración aparece a continuación:

Como $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son unitarios, entonces $\left|\vec{v}\right| = \left|\vec{w}\right| = 1$.

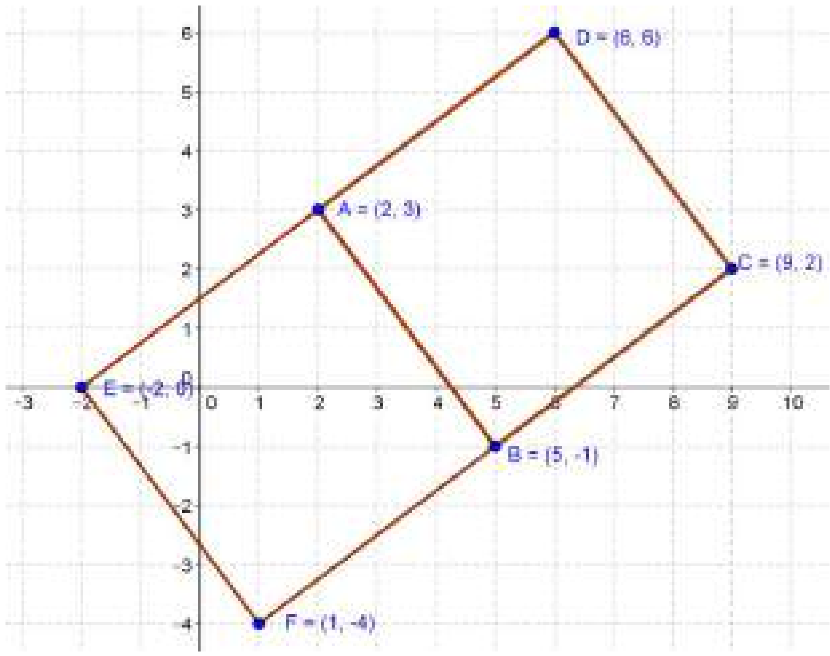
Calculemos el producto escalar de $(\vec{v} + \vec{w})$ por $(\vec{v} - \vec{w})$:

$$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \left(\vec{v} - \vec{w}\right) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{w} = \left|\vec{v}\right|^2 - \left|w\right|^2 = 0.$$

Al ser su producto escalar nulo, podemos decir que son ortogonales.

8. El vector que une los vértices A y B es $\overrightarrow{v_{AB}} = (3, -4)$.

Mediante los vectores perpendiculares y paralelos al vector $\overrightarrow{v_{AB}} = (3, -4)$ obtenemos las dos soluciones del problema como se observa en el dibujo.



Cualquiera de los dos cuadrados tiene de lado 5 unidades y de área 25 uc

9. Las ecuaciones de las rectas aparecen en la tabla:

	Ecuación Vectorial	Ecuaciones paramétricas	Ecuación continua	Ecuación general	Ecuación explícita
a)	(x, y) = (4, - 2) + t (- 1, 3)	$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$	$\frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{3}$	3x + y - 10= 0	y = - 3x + 10
b)	$\vec{u} = (4, 6)$ (x, y) = (- 2, - 5) + t (4, 6)	$\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -5 + 6t \end{cases}$	$\frac{x+2}{4} = \frac{y+5}{6}$	3x - 2y – 4 = 0	$y = \frac{3}{2}x - 2$
c)	$\vec{u} = (1, 3)$ (x, y) = (- 3, 4) + t (1, 3)	$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$	$\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{3}$	3x - y + 13 = 0	y = 3x + 13
d)	(x, y) = (0, 0) + t (1, 1)	$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$	$\frac{x}{1} = \frac{y}{1}$	x -+ y = 0	y = x
e)	$\vec{u} = (2, 0)$ (x, y) = (1, - 3) + t (2, 0)	$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 \end{cases}$	$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0}$	y + 3 = 0	y = - 3

10. Dos puntos de esa recta son P (0, 4) y Q (4, -2). Un vector director pude ser $\vec{v_1} = (4, -6)$ o $\vec{v_2} = (2, -3)$.

Con estos datos obtenemos las ecuaciones:

Ecuación vectorial: $(x,\ y) = (0,\ 4) + t \cdot (2,\ -3)$ Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-3}$ Ecuación explícita: $y = -\frac{3}{2}x + 4$

11. Las ecuaciones de las rectas pedidas son:

- Eje OX: Pasa por el punto (0, 0) y uno de sus vectores directores es $\vec{v} = (1,\ 0)$.
  La ecuación será: y = 0.

- Eje OY: Pasa por el punto (0, 0) y uno de sus vectores directores es $\vec{v} = (0,\ 1)$.
  La ecuación será: x = 0.

● Bisectriz 1er y 3er cuadrante: Pasa por el punto (0, 0) y forma un ángulo de 45º con el eje OX, es decir: m = tg 45º = 1.

La ecuación será: y = x.

● Bisectriz 2º y 3º cuadrante: Pasa por el punto (0, 0) y forma un ángulo de 135º con el eje OX, es decir: m = tg 135º = - 1.

La ecuación será: y = - x.

12. La posición relativa de los pares de rectas es:

a) Secantes b) Coincidentes c) Paralelas

ACTIVIDADES-PÁG. 173

13. Los vectores directores y normales son, respectivamente:

a) $\vec{u} = (-3, 4)$ y $\vec{n} = (4, 3)$

b) $\vec{u} = (1, 4)$ y $\vec{n} = (4, -1)$

c) $\vec{u} = (-1, 3)$ y $\vec{n} = (3, 1)$

d) $\vec{u} = (1, -1)$ y $\vec{n} = (1, 1)$

14. Los ángulos de las rectas son:

a) 0º b) 81º 52´ 12´´ c) 90º

15. Los valores del parámetro a en cada caso son:

a) a = 4 b) $a = \frac{2}{3}$ c) $a = -\frac{3}{2}$

16. El perímetro del rectángulo mide 30 unidades lineales.

17. La distancia del punto A (3, 2) a la recta r : 5x - 12y - 4 = 0 es:

$$d\left(A,\ r\right) = \frac{\left|5 \cdot 3 - 12 \cdot 2 - 4\right|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{13}{13} = 1\ unidad\ \ lineal.$$

18. La longitud del lado del cuadrado es la distancia que separa a las rectas paralelas r: 4x + 3y - 5 = 0 y s: 8x + 6y + 7 = 0.

Esta longitud es la distancia entre el punto P (2, - 1) perteneciente a la recta r, y la recta s:

$$d\left(P,\ s\right) = \frac{\left|8 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + 7\right|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{17}{10} = 1{,}7\,.$$

El área del cuadrado es $1{,}7^2 = 2{,}89$ unidades cuadradas.

19. Las rectas pedidas son:

a) Paralela: $7x - 2y = 0$ Perpendicular: $2x + 7y = 0$

b) Paralela: $3x + y + 1 = 0$ Perpendicular: $x - 3y + 7 = 0$

c) Paralela: $5x + 2y - 23 = 0$ Perpendicular: $2x - 5y + 14 = 0$

20. El punto de intersección es (-2, 3). La recta es $x - y + 5 = 0$.

21. El valor de m en cada uno de los apartados es:

a) El valor de las pendientes de las rectas es $m_1 = \frac{-3}{-5}$ y $m_2 = \frac{-6}{m}$. Si son paralelas las pendientes deben coincidir:

$$m_1 = m_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{-5} = \frac{-6}{m} \quad \Rightarrow \quad m = -10.$$

b) El valor de las pendientes de las rectas es $m_1 = \frac{-3}{-5}$ y $m_2 = \frac{-6}{m}$. Si son perpendiculares sus pendientes cumplen $m_1 \cdot m_2 = -1$:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{-5} \cdot \frac{-6}{m} = -1 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{18}{5}.$$

c) No existe ningún valor de m para que sean coincidentes.

d) Si el punto P (6, 5) pertenece a la recta $6x + my = 1$, se cumplirá: $36 + 5m = 1$, es decir, $m = -7$.

22. La recta mediatriz es $5x - 4y + 9 = 0$.

23. El punto es P (3, -4).

24. El punto de la recta que equidista de los dos del enunciado es (0, 4).

25. El punto proyección es (0, - 2).

26. El punto de la recta $2x + 3y - 13 = 0$ más cercano al origen de coordenadas es (2, 3).

ACTIVIDADES-PÁG. 174

27. a) La ecuación de la recta que pasa por los vértices A (- 3, 2) y B (1, 6) es:

$$\frac{y-2}{6-2}=\frac{x+3}{1+3} \Rightarrow y-2=x+3 \Rightarrow y=x+5 \Rightarrow x-y+5=0$$

La mediatriz del lado AB pasa por su punto medio M (- 1, 4) y es perpendicular al lado AB. Su ecuación es:

$$y-4=-(x+1) \Rightarrow y=-x+3 \Rightarrow x+y-3=0.$$

b) La mediana desde C es la recta que pasa por C (4, - 3) y M (- 1, 4). Su ecuación es:

$$\frac{y+3}{4+3}=\frac{x-4}{-1-4} \Rightarrow y+3=-\frac{7}{5}(x-4) \Rightarrow 7x+5y-13=0.$$

c) La altura desde el vértice C (4, - 3) pasa por este punto y es perpendicular a la recta AB. Su ecuación es:

$$y+3=-(x-4) \Rightarrow y=-x+1 \Rightarrow x+y-1=0.$$

El punto, P, de corte de la altura con el lado AB es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x-y=-5 \\ x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow P\ (-2,\ 3).$$

28. La solución queda:

a) El simétrico del punto B (2, 5) respecto del origen de coordenadas es B´ (- 2, - 5).

b) El simétrico del punto A (4, - 1) respecto de la recta x + 2y – 7 = 0 es A´ (6, 3).

29. Las respuestas son:

a) Todas las rectas paralelas a la dada tiene por ecuación 3x + 4y + K = 0. Basándonos en esto, calcularemos el valor de K que cumpla las condiciones dadas.

Tomamos un punto de la recta 3x + 4y – 1 = 0, por ejemplo P (- 1, 1), entonces:

$$\frac{|3\cdot(-1)+4\cdot 1+K|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3 \Rightarrow \frac{|K+1|}{5}=3 \Rightarrow |K+1|=15 \Rightarrow \begin{cases} K=14 \\ K=16 \end{cases}$$

Hay dos rectas paralelas que disten 3 unidades de la dada y son las rectas de ecuaciones:

$$3x+4y+14=0 \qquad\qquad 3x+4y-16=0$$

b) Todas las rectas perpendiculares a la dada tiene por ecuación 4x - 3y + K = 0. Si distan 6 unidades del origen de coordenadas, se cumplirá:

$$\frac{|4\cdot(0)-3\cdot 0+K|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=6 \quad\Rightarrow\quad \frac{|K|}{5}=6 \quad\Rightarrow\quad |K|=30 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} K=30 \\ K=-30 \end{cases}$$

Hay dos rectas perpendiculares que disten 36unidades del origen de coordenadas y son las rectas de ecuaciones:

4x - 3y + 30 = 0 4x - 3y – 30 = 0

30. El vértice C es el punto C (4, 8) y el área del triángulo isósceles es 13 unidades cuadradas.

31. Las coordenadas de los puntos notables son: ortocentro $\left(-2,-\frac{10}{3}\right)$, circuncentro $\left(4,\frac{14}{3}\right)$ y baricentro (2, 2).

Puede comprobarse que los puntos anteriores están sobre la recta de Euler, de ecuación 4x – 3y – 2 = 0.

32. Los vértices A y C son los puntos A (0, 7) y C (8, - 1).

33. El vértice C por pertenecer a la recta es C (a, - 3 – a).

$$Área=\frac{base\cdot altura}{2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} base=d\ (A.,\ B)=\sqrt{5} \\ altura=d\ (C,\ r_{AB})=\left|\frac{a-8}{\sqrt{5}}\right| \end{cases}$$

Operando:

$$6=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\left|\frac{a-8}{\sqrt{5}}\right| \quad\Rightarrow\quad |a-8|=12 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} a=20 \ \Rightarrow\ C\ (20,-23) \\ a=-4 \ \Rightarrow\ C\ (-4,1) \end{cases}$$

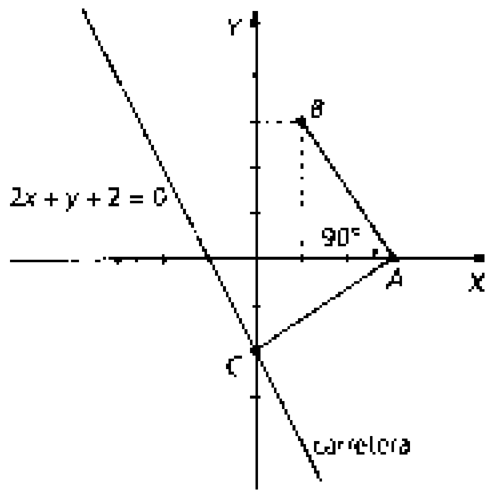
34. La solución queda:

El punto C, por pertenecer a la recta, será de la forma C (a, - 2a – 2).

A la vista del dibujo se debe cumplir:

$$\overrightarrow{V_{AB}}\cdot\overrightarrow{V_{AC}}=0 \quad\Rightarrow\quad (a-3,-2a-2)\cdot(-2,3)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad a=0 \quad\Rightarrow\quad C\ (0,-2).$$



35. Los vértices del paralelogramo buscado son: A (4, 6); el punto B es el punto en el cual se corta la recta y = 5x + 2 y la paralela a x + 3y + 10 = 0, pasando por A (4, 6).

Es decir:

$$\begin{cases} y = 5x + 2 \\ x + 3y - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow B\ (1,\ 7)$$

$$\begin{cases} y = 5x + 2 \\ x + 3y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\ (-1,\ -3)$$

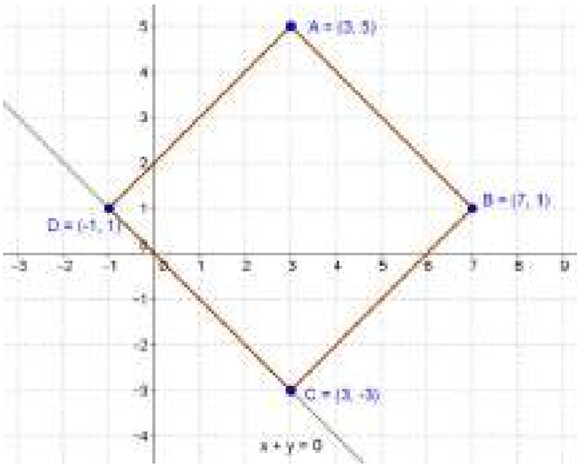
$$\begin{cases} y = 5x - 14 \\ x + 3y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(2,\ 4)$$

El área vale 32 unidades cuadradas.

36. El vértice C está en la intersección de la recta perpendicular a AB por B y la bisectriz del 4º cuadrante.

$\overrightarrow{V_{AB}} = (4,\ -4) \quad \Rightarrow$ la recta perpendicular tiene por vector $\vec{w} = (4, 4)$ y pasa por B (7, 1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x-7}{4} = \frac{y-1}{4} \Rightarrow x - y - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\ (3,\ -3).$$



El vector $\overrightarrow{V_{BC}} = (-4,\ -4)$ es paralelo e igual a $\overrightarrow{V_{AD}}$, luego D (- 1, 1)

Área del rectángulo = base · altura = d (B, C) · d (A, B) =

$$= \sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 32\ u^2.$$

37. La ecuación de la recta que pasa por los puntos M (0, 4) y N (3, 0) es:

$$\frac{y-0}{4-0} = \frac{x-3}{0-3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}(x-3) \Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0$$

Como el lugar de la estación, punto P, está a la misma distancia de M y de N, este punto estará en la mediatriz del segmento de extremos M y N. La ecuación de la mediatriz es la recta perpendicular a la recta que pasa por A y por B, que pasa por el punto medio del segmento de extremos M y N, $Q\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$:

$$y - 2 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}$$

Sea $P\left(a, \frac{3}{4}a - \frac{7}{8}\right)$ un punto cualquiera de la mediatriz, su distancia al punto Q será 10 km. Imponiendo esta condición obtenemos:

$$d\ (P, Q) = 10 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a - \frac{7}{8} - 2\right)^2} = 10$$

Elevamos al cuadrado y operando, obtenemos la ecuación $100a^2 - 468a - 5727 = 0$. Las soluciones son:

a = 10,26 y a = - 5,58.

Con las soluciones anteriores obtenemos dos posibles ubicaciones de la estación de distribución:

P_1 (10,26; 6,82) y P_2 (- 5,58; - 5,06).

ACTIVIDADES-PÁG. 175

Existe una amplísima bibliografía sobre la relación entre matemáticas y arte. Ofrecemos algunos textos significativos.

CORBALÁN, Fernando. (2010) *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza.* RBA. Barcelona.

FERNÁNDEZ, I. y REYES, M. A. (2006) *Geometría con el hexágono y el octógono.* Proyecto Sur. Granada.

LIVIO, Mario. (2006) *La proporción áurea. La historia de phi, el número más sorprendente del mundo.* Ariel. Barcelona.

MARTÍN CASALDERREY, F. (2010) *La burla de los sentidos. El arte visto con ojos matemáticos.* RBA. Barcelona.

MEAVILLA SEGUÍ, V. (2007) *Las matemáticas del arte. Inspiración ma(r)temática.* Almuzara. Córdoba.

VV. AA. (2005) *Geometría en los Reales Alcázares de Sevilla.* Junta de Andalucía. Sevilla.

VV. AA. (2009) *La proporción: arte y matemáticas.* Graó. Barcelona.

VV. AA. (2009) *Matemáticas en la catedral de Burgos.* Caja Círculo. Burgos.