7 Movimientos oscilatorios. El oscilador armónico

ESQUEMA DE LA UNIDAD

1. Oscilaciones o vibraciones armónicas
páginas 185/186

- **1.1. ¿Por qué se producen los movimientos oscilatorios?**
  páginas 185/186
- **1.2. ¿Cuándo decimos que un movimiento oscilatorio es armónico?**
  página 186

2. El movimiento armónico simple
páginas 187/192

- **2.1. Formas de escribir la ecuación de un movimiento armónico simple**
  páginas 188/189
- **2.2. Velocidad y aceleración en un movimiento armónico simple**
  páginas 190/192
- **2.3. Gráficas de posición, velocidad y aceleración en el movimiento armónico simple**
  página 192

3. Consideraciones dinámicas en el movimiento armónico simple
página 193

- **3.1. Relación del período y la frecuencia con las características dinámicas del oscilador**
  página 193

4. Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple
páginas 194/195

5. Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme
páginas 196/197

6. Un ejemplo de oscilador: el péndulo simple
páginas 198/199

7. Oscilaciones forzadas y fenómeno de resonancia
páginas 200/201

Cuestiones previas (página 184)

1. ¿Qué casos conoces de movimientos oscilatorios?

Hay numerosos ejemplos de movimientos oscilatorios en la naturaleza; los latidos del corazón, la traslación de la tierra, el movimiento de las olas del mar, un átomo en una red cristalina a una temperatura dada o el movimiento de los planetas. También tenemos aplicaciones técnicas en casos como el péndulo de un reloj, el cigüeñal de un automóvil, las cuerdas de un instrumento musical, etcétera.

2. ¿Qué tiene que suceder para que un cuerpo oscile?

El cuerpo deberá estar apartado de su posición de equilibrio estable y bajo la acción de una fuerza restauradora recupera la posición de equilibrio.

3. ¿Es constante la aceleración en los movimientos oscilatorios?

No es constante porque varía sinusoidalmente con el tiempo, por tanto, tendrá valores máximos y mínimos.

4. ¿Qué fuerza hace que oscile un cuerpo unido a un muelle horizontal? ¿Qué fuerza hace que oscile un péndulo simple?

En el caso de un muelle horizontal la fuerza restauradora del muelle $-kx$ que tenderá a devolverlo a su posición de equilibrio. En el caso de un péndulo simple la fuerza restauradora será la componente tangencial del peso.

5. ¿De qué factores crees que puede depender el período de oscilación de un cuerpo unido a un muelle? ¿Y el de un péndulo?

En el caso de un muelle depende de la masa del oscilador y de la constante restauradora del muelle. En el caso de un péndulo depende de la longitud del péndulo pero es independiente de la masa.

Actividades (páginas 189/199)

1 Se hace oscilar desde la posición de equilibrio un cuerpo unido a un muelle horizontal, de modo que la separación máxima de dicha posición es de 3 cm. Si se han contado 20 oscilaciones en 5 segundos, ¿cuál es la ecuación representativa de dicho movimiento?

La amplitud o máxima elongación es $A = 3$ cm, mientras que el período vale:

$$T = \frac{5}{20} = 0{,}25 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 8\pi \text{ rad/s}$$

Si deseamos representar la ecuación en función del seno, será:

$$x = 3 \text{ sen } 8\pi t \text{ cm}$$

Si lo hacemos en función del coseno, puede escribirse del siguiente modo:

$$x = 3 \cos (8\pi t \pm \pi/2) \text{ cm}$$

2 Indica cómo convendría escribir la ecuación del movimiento anterior si el cuerpo comienza a oscilar hacia la izquierda. ¿Y si lo hiciera hacia la derecha?

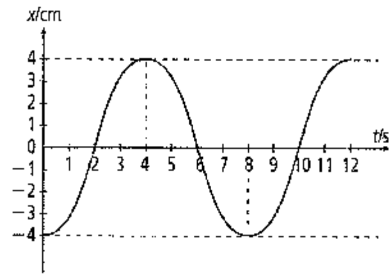
Si queremos dar la información completa, incluyendo el sentido inicial del movimiento, es conveniente usar la ecuación en forma de coseno. Si el cuerpo comienza a moverse hacia la izquierda (x negativas), la ecuación es:

$$x = 3 \cos (8\pi t + \pi/2) \text{ cm}$$

Y si lo hace hacia la derecha (x positivas):

$$x = 3 \cos (8\pi t - \pi/2) \text{ cm}$$

3 ¿Cuál es la ecuación del MAS representado en la siguiente gráfica?

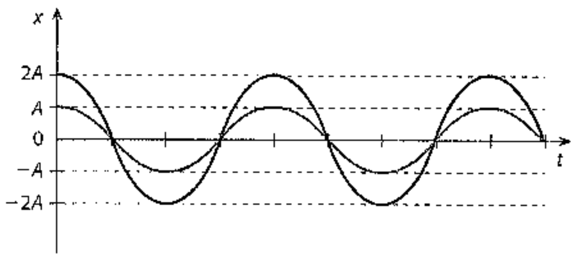


Puesto que $A = 4$ cm, $T = 8$ s y $\omega = \pi/4$ rad/s, la ecuación puede escribirse como:

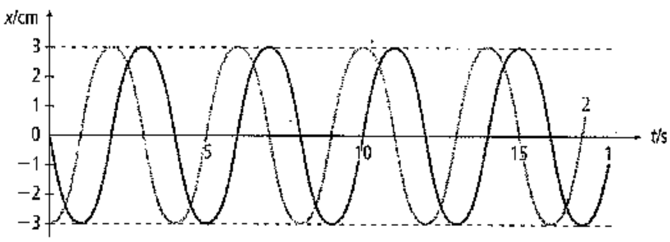
$$x = 4 \text{ sen} \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{2}\right) \text{cm}$$

4 Representa en una misma gráfica los movimientos de dos osciladores del mismo período, uno con doble amplitud que otro, que comienzan a oscilar desde el extremo positivo.

La representación gráfica pedida se puede observar en la siguiente figura:



5 PAU ¿Qué ecuaciones representan los movimientos 1 y 2 de la figura 7.14? ¿Cuál es el desfase, o diferencia de fase, entre ambos movimientos?



En ambos movimientos, $A = 3$ cm y $T = 4$ s, por lo que:

$$\omega = \pi/2 \text{ rad/s}$$

en consecuencia, la ecuación que representa el movimiento 1 es:

$$x_1 = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{2}\right) \text{cm}$$

mientras que el movimiento 2 se representaría por:

$$x_2 = 3 \cos \left(\frac{\pi}{2} t - \pi\right) \text{cm}$$

El desfase entre ambos es, por tanto, de $\pi/2$ rad.

6 Comprueba la validez de las ecuaciones de posición de los cuatro casos expuestos en la página anterior, teniendo en cuenta los tiempos que se indican y sustituyendo ω por $2\pi/T$ en cada una de las expresiones dadas.

Si partimos de la posición de equilibrio hacia la derecha, la oscilación viene dada por la siguiente expresión:

$$x = A \text{ sen} \frac{2\pi}{T} t$$

Sustituimos los distintos valores de t:

- Cuando $t = 0$, $x = 0$.
- Cuando $t = T/4$, $x = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = A$.
- Cuando $t = T/2$, $x = A \text{ sen } \pi = 0$.
- Cuando $t = 3T/4$, $x = A \text{ sen } \frac{2\pi}{T}\frac{3T}{4} = -A$.

En el resto de los casos se procede de igual modo, a partir de la ecuación representativa de cada situación inicial.

7 PAU **Un cuerpo unido a un muelle comienza a oscilar horizontalmente desde su posición extrema, a 4 cm de la posición de equilibrio, con un período de 0,3 s.**

a) **Determina su velocidad al pasar por la posición de equilibrio.**

b) **Halla su velocidad cuando $x = 2$ cm.**

Con los datos ofrecidos, podemos deducir que $A = 4$ cm y $\omega = 2\pi/T = 20{,}9$ rad/s.

a) La velocidad del cuerpo al pasar por la posición de equilibrio es máxima y vale:

$$v = \omega A = 83{,}6 \text{ cm/s}$$

b) Cuando pasa por $x = 2$ cm, la velocidad será:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 72{,}4 \text{ cm/s}$$

8 PAU **Determina la aceleración en los extremos, en $x = 2$ cm, y en $x = -1$ cm, de un oscilador armónico que tenga las características expuestas en la actividad anterior.**

En los extremos, la aceleración es máxima y vale:

$$a = -\omega^2 A = \pm 17{,}48 \text{ m/s}^2$$

En $x = 2$ cm $= 0{,}02$ m valdrá:

$$a = -\omega^2 x = -8{,}74 \text{ m/s}^2$$

Mientras que en $x = -1$ cm $= -0{,}01$ m será:

$$a = -\omega^2 x = 4{,}37 \text{ m/s}^2$$

9 **Consideremos la velocidad y la aceleración máximas de un oscilador:**

a) **¿Cómo varían si se duplica la amplitud sin modificar el período?**

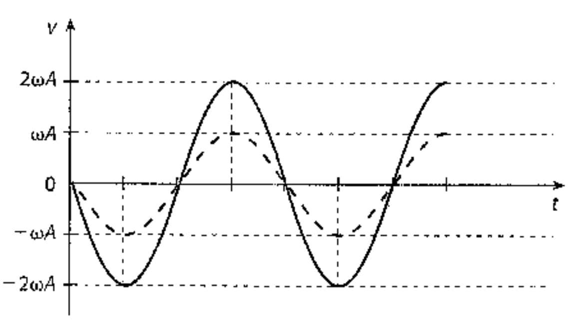
b) **¿Cómo varían si se duplica la frecuencia sin modificar la amplitud?**

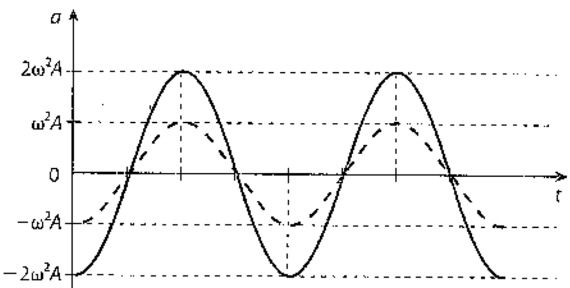
Haz las gráficas comparativas de ambos casos con la oscilación normal.

Las expresiones de la velocidad y de la aceleración máximas son, respectivamente:

$$v_{\text{máx}} = \pm\omega A$$
$$a_{\text{máx}} = -\omega^2 A$$

a) Al ser $\omega = 2\pi/T$, este factor se mantendrá constante si T no cambia. Teniendo esto en cuenta, al duplicar A, se duplicarán $v_{\text{máx}}$ y $a_{\text{máx}}$; las nuevas gráficas quedan representadas por las líneas continuas (las líneas de trazos representan las originales).





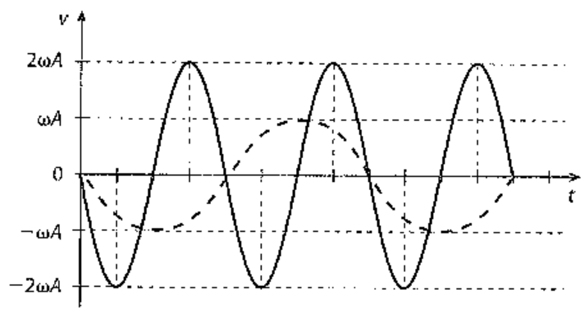
b) Escribiendo las expresiones en función de la frecuencia, tenemos:

$$v_{\text{máx}} = 2\pi f A$$
$$a_{\text{máx}} = -4\pi^2 f^2 A$$

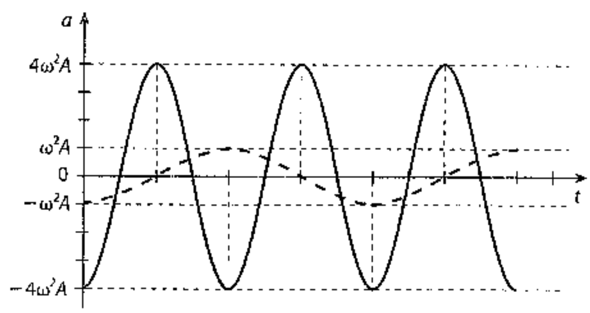
Por tanto, al duplicar f sin variar A, $v_{\text{máx}}$ se duplica y $a_{\text{máx}}$ se cuadruplica.

Por otro lado, al duplicar f, T se reduce a la mitad; las nuevas gráficas son las que aparecen representadas por las líneas continuas (las líneas de trazos representan las originales).

La gráfica correspondiente a la velocidad será:



La gráfica correspondiente a la aceleración será:



10 **Representa las gráficas de posición, velocidad y aceleración frente al tiempo de un cuerpo unido a un muelle que comienza a oscilar horizontalmente desde un extremo situado a 5 cm de la posición de equilibrio con una frecuencia de 5 Hz.**

La ecuación de posición para $\omega = 2\pi f = 10\pi$ rad/s y $A = 5$ cm, será:

$$x = 5 \cos 10\pi t \text{ cm}$$

Por tanto:

$$v = \frac{dx}{dt} = -50\pi \text{ sen } 10\pi t \text{ cm/s}$$

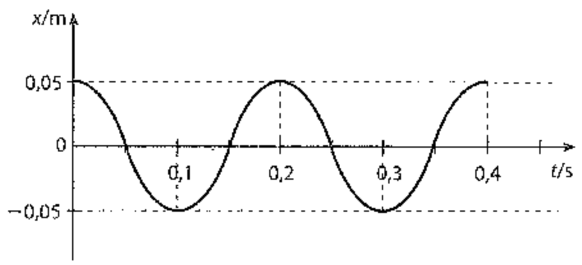
mientras que:

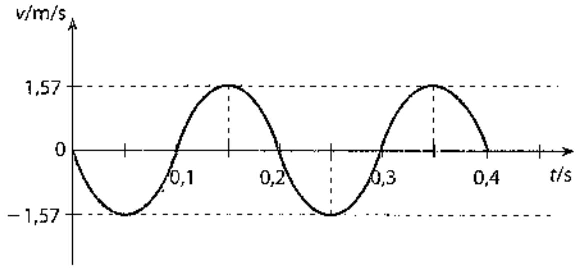
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -500\pi^2 \cos 10\pi t \text{ cm/s}^2$$

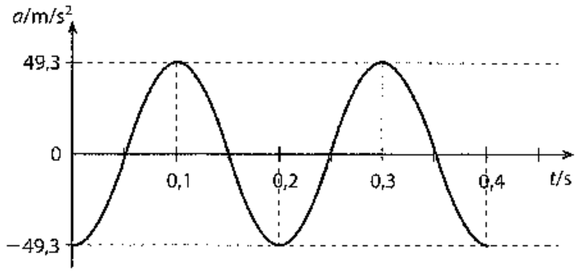
donde:

$$v_{\text{máx}} = \pm\omega A = \pm 50\pi \text{ cm/s} = \pm 1{,}57 \text{ m/s}$$
$$a_{\text{máx}} = \pm\omega^2 A = \pm 500\pi^2 \text{ cm/s}^2 = \pm 49{,}3 \text{ m/s}^2$$

Las representaciones gráficas serán las siguientes:







11 Razona cómo podríamos comparar masas midiendo sus frecuencias de oscilación al colgarlas de un mismo resorte.

Si colgamos las masas de un mismo resorte (misma k), se cumplirá en ambos osciladores que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \text{ y } \omega'^2 = \frac{k}{m'}$$

Por tanto, $m\omega^2 = m'\omega'^2$, y como, además, $\omega = 2\pi f$, se concluye:

$$\frac{m}{m'} = \frac{f'^2}{f^2}$$

Así, la relación entre las masas es igual a la relación inversa entre los cuadrados de las frecuencias de oscilación.

12 La frecuencia de oscilación de cierta masa m en un resorte es el triple que la de otra masa m'. ¿Qué relación guardan ambas masas entre sí?

Según se desprende de la expresión anterior, m será la novena parte de m', es decir:

$$m = \frac{1}{9} \cdot m'$$

13 PAU Un oscilador consistente en una masa unida a un resorte horizontal de constante restauradora k = 100 N/m se mueve según la ecuación:

$$x = 6{,}5 \cos 5\pi t \text{ cm}$$

a) **¿Cuál es la masa del oscilador?**

b) **¿Cuál es la frecuencia de oscilación?**

c) **¿Cuál es la velocidad máxima de su movimiento?**

d) **¿Cuál es la velocidad cuando la elongación es igual a la mitad de la amplitud?**

e) **¿Cuál es su aceleración máxima?**

a) De la ecuación $x = 6{,}5 \cos 5\pi t$ cm se deduce que:

$$A = 6{,}5 \text{ cm y } \omega = 5\pi \text{ rad/s}$$

Dado que $\omega^2 = k/m$, podemos determinar m:

$$m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{100}{25\pi^2} = 0{,}40 \text{ kg}$$

b) La frecuencia de oscilación es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 2{,}5 \text{ Hz}$$

c) La velocidad máxima de su movimiento es:

$$|v_{máx}| = \omega A = 102{,}1 \text{ cm/s} = 1{,}02 \text{ m/s}$$

d) Cuando la elongación es la mitad de la amplitud, la velocidad es:

$$v = \omega \sqrt{A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\, v_{máx} = 88{,}4 \text{ cm/s} = 0{,}884 \text{ m/s}$$

e) La aceleración máxima es:

$$|a| = \omega^2 A = 16 \text{ m/s}^2$$

14 Demuestra cómo a partir de la igualdad 1/2 mv^2 + 1/2 kx^2 = = 1/2 kA^2 puede obtenerse la expresión 7.7, que relaciona la velocidad con la posición del oscilador.

Puesto que $\omega^2 = k/m$, lo que implica que $k = m\omega^2$, es posible escribir la igualdad dada de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

que, simplificando, se transforma en:

$$v^2 + \omega^2 x^2 = \omega^2 A^2$$

de donde:

$$v^2 = \omega^2 (A^2 - x^2)$$

es decir:

$$v = \pm\omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

15 PAU Si la amplitud de un cuerpo que oscila con MAS es A:

a) **¿En qué punto son iguales su energía cinética y potencial?**

b) **¿En qué punto es su energía potencial el doble que la cinética?**

c) **¿En qué punto es su energía cinética el doble que la potencial?**

a) Su energía total es 1/2 kA^2. El punto en el que la energía potencial se iguala con la cinética será aquel en el que ambas expresiones valgan la mitad de la energía total. Por tanto: $E_p = E_{total}/2$.

Es decir:

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} kA^2\right)$$

Resolviendo, obtenemos:

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0{,}71 \cdot A$$

b) En este caso: $E_p = 2 \cdot E_c$.

Es decir:

$$\frac{1}{2} kx^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} mv^2$$

Sustituyendo la velocidad:

$$\frac{1}{2} kx^2 = m\omega^2 (A^2 - x^2) = k(A^2 - x^2) \Rightarrow \frac{1}{2} x^2 = A^2 - x^2$$

Es decir:

$$x = \sqrt{2/3} \cdot A = 0{,}82 \cdot A$$

c) En este caso debe cumplirse que $E_c = 2 \cdot E_p$. Es decir:

$$\frac{1}{2} k(A^2 - x^2) = kx^2 \Rightarrow A^2 - x^2 = 2x^2$$

Resolviendo, obtenemos:

$$x = \frac{A}{\sqrt{3}} = 0{,}57 \cdot A$$

16 PAU **Un cuerpo de 5 kg choca con una velocidad de 10 m/s contra un muelle de constante elástica $k = 25$ N/m. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie es de 0,2. Calcula la longitud que se comprime el muelle si consideramos la masa despreciable.**

Al chocar el cuerpo contra el muelle y comprimirlo, parte de la energía mecánica se disipa en forma de trabajo de rozamiento (no conservativo). Dicho trabajo es igual a la variación de energía mecánica del sistema:

$$W_{roz} = \Delta E$$

Por tanto:

$$-F_r x = E_f - E_0$$

El punto final es el de máxima compresión del muelle, arrastrado por la masa de 5 kg. En ese punto, la energía mecánica del sistema es la energía potencial elástica del muelle comprimido, mientras que la energía mecánica inicial era la cinética del cuerpo. Así pues:

$$-F_r x = 1/2\, kx^2 - 1/2\, mv^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\mu mgx = 1/2\, kx^2 - 1/2\, mv^2$$

de donde:

$$1/2\, kx^2 + \mu mgx - 1/2\, mv^2 = 0$$

Sustituyendo los datos, llegamos a:

$$12{,}5x^2 + 9{,}8x - 250 = 0$$

Resolviendo, obtenemos:

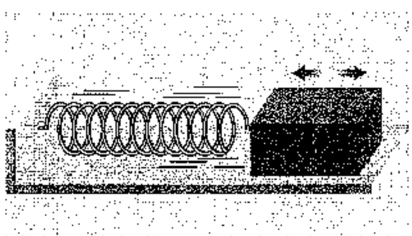
$$x = 4{,}097 \text{ m}$$

17 PAU **Un cuerpo de 1,4 kg de masa se conecta a un muelle de constante elástica 15 N/m, y el sistema oscila tal como indica la figura 7.23. La amplitud del movimiento es de 2 cm. Calcula:**

a) **La energía total del sistema.**

b) **Las energías cinética y potencial cuando el desplazamiento del cuerpo es de 1,3 cm.**

c) **La velocidad máxima del cuerpo.**



a) La energía total del sistema viene dada por:

$$E = 1/2\, kA^2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

b) Cuando $x = 1{,}3$ cm, la velocidad del cuerpo es:

$$v = \pm\omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3{,}27 \text{ rad/s}$$

Por tanto:

$$v = \pm 4{,}97 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

En consecuencia, la energía cinética en ese punto es:

$$E_c = 1/2\, mv^2 = 1{,}73 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

y la energía potencial es:

$$E_p = 1/2\, kx^2 = 1{,}27 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

Puede observarse que la suma de ambos términos da como resultado el valor calculado en el apartado ***a)***.

c) La velocidad máxima del cuerpo es:

$$v = \omega A = 6{,}54 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

18 **Deduce la expresión de la aceleración en el MAS mediante la proyección de la aceleración centrípeta del MCU.**

Si el radio es igual a la amplitud, entonces:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{A} = \omega^2 A$$

Este sería el valor de la aceleración máxima en el MAS.

En cualquier otro punto, la proyección de la aceleración centrípeta o normal sería:

$$a = a_c \cos\theta = \omega^2 A \cos \omega t$$

que corresponde a la expresión general (en valor absoluto) de la aceleración del MAS en función del tiempo.

19 PAU **¿Cómo varía el período de un péndulo al duplicar la longitud? ¿Y al disminuirla a 1/3 de su longitud original?**

Puesto que el período de un péndulo es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

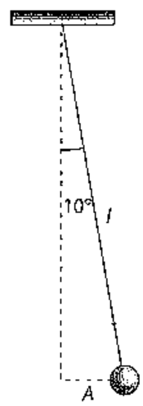
al duplicar la longitud, l, el período aumenta en un factor $\sqrt{2}$. Al reducir la longitud inicial hasta 1/3, el período disminuye en un factor $1/\sqrt{3}$.

20 **¿Bajo qué condiciones podemos decir que un péndulo simple oscila de forma armónica? ¿Cuál es la fuerza restauradora en el caso del péndulo simple?**

Un péndulo simple puede considerarse como un oscilador armónico solo si oscila con amplitudes pequeñas. La fuerza restauradora es la componente tangencial del peso, que actúa en la dirección del movimiento.

21 PAU **Se deja oscilar libremente un péndulo de 2 m de longitud después de haberlo desplazado 10° hacia la derecha de la vertical. ¿Cuál es la ecuación que nos da la elongación en función del tiempo? ¿Cuál es el período y la frecuencia de oscilación de dicho péndulo?**

La siguiente figura ilustra el enunciado del problema:



Como se observa en ella:

$$A = l \text{ sen } 10° = 0{,}35 \text{ m}$$

A su vez, dado que $\omega = \sqrt{g/l}$, su valor es:

$$\omega = 2{,}2 \text{ rad/s}$$

Por tanto, la ecuación de movimiento del péndulo es:

$$x = A \text{ sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}35 \text{ sen}\left(2{,}2t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m}$$

El período de dicho movimiento vale:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}84 \text{ s}$$

De este modo, la frecuencia será:

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}35 \text{ Hz}$$

Guía de repaso

1 ¿Qué se entiende por período y frecuencia de un movimiento oscilatorio?

El período es el tiempo que tarda en repetirse una posición dada, es decir, el que corresponde a una oscilación completa y la frecuencia es el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

2 ¿Cuándo se produce un movimiento oscilatorio?

Cuando un sistema o cuerpo está apartado de su posición de equilibrio.

3 ¿Qué condiciones deben cumplirse para que un movimiento oscilatorio sea armónico simple?

Que la partícula oscile bajo la acción de fuerzas restauradoras que obedecen a la ley de Hooke.

4 ¿Puede escribirse la ecuación de posición de un oscilador armónico indistintamente en función del seno o del coseno? ¿En qué se diferencian ambas formas? ¿Cuándo conviene usar una u otra?

Sí, hay dos formas de escribirlas en función del seno y del coseno. Se diferencian en un pequeño desfase de 90°. Dependiendo de las condiciones iniciales del problema podremos utilizarlo de una forma a otra. Esas condiciones son la posición inicial y el sentido inicial de la partícula que empieza a oscilar.

5 ¿Qué representan los distintos factores que aparecen en la ecuación del oscilador? ¿Hay alguno de ellos que dependa de las propiedades físicas del oscilador?

x representa la posición del móvil en función del tiempo; A representa el máximo o mínimo valor de la elongación x; ω es la frecuencia angular. $(\omega t + \delta)$ representa la fase; δ es la fase inicial.

De todos los factores, ω es el que depende de las características físicas del oscilador.

6 ¿Qué expresión tiene la velocidad en un movimiento armónico simple? ¿Cuándo es máxima y cuándo es cero?

Considerando la ecuación general del movimiento x en función del coseno, tendremos:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

La velocidad es máxima cuando $x = 0$.

7 ¿Qué expresión tiene la aceleración en un movimiento armónico simple? ¿Cuándo es máxima y cuándo es cero? ¿Qué sentido tiene en función de la posición?

Considerando la ecuación general del movimiento x en función del coseno, tendremos:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta)$$

La aceleración es máxima en los extremos; $x = + - A$. Es nula en la posición de equilibrio. Su sentido es opuesto a la posición x.

8 En un movimiento armónico simple, la posición, la velocidad y la aceleración varían periódicamente. ¿Son iguales los períodos en los tres casos?

Los períodos son iguales en los tres casos, pero las fases no coinciden.

9 Demuestra que la ecuación del oscilador armónico es congruente con la consideración dinámica del sistema, es decir, con el hecho de que la fuerza obedezca la ley de Hooke.

Por un lado, cuando el cuerpo es separado de su posición de equilibrio, la fuerza restauradora tenderá a devolverlo a su posición de equilibrio. Se cumple que:

$$ma = -kx \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

Por otro lado:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\omega^2 A$$

Igualando ambas aceleraciones obtenemos:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

10 ¿Por qué decimos que la frecuencia angular del oscilador armónico es una característica de las propiedades físicas del sistema?

Porque es igual a la raíz cuadrada del cociente k/m, que son las constantes físicas del oscilador.

11 ¿De qué depende el período de un oscilador armónico, de la amplitud de la oscilación?

No depende de la amplitud; depende de la masa del oscilador y de la constante restauradora del sistema.

12 ¿Cómo varían las energías cinética y potencial de un oscilador armónico? ¿Cuál es su valor máximo? ¿Por qué permanece constante la energía mecánica?

Varían de forma periódica. Su valor máximo es $1/2\ kA^2$ y se conserva debido a que las fuerzas elásticas o restauradoras de tipo Hooke son conservativas.

13 ¿Qué relación hay entre el movimiento circular uniforme y el armónico simple?

El MAS es el resultado de observar movimientos circulares desde el propio plano del movimiento.

14 ¿De qué depende el período de un péndulo simple si la amplitud de la oscilación es pequeña comparada con la longitud del péndulo?

Depende de la longitud del hilo y del valor de la aceleración de la gravedad local. Véase el epígrafe 6.

15 ¿Qué es una oscilación forzada?

Es una oscilación que tiene lugar bajo la acción de una fuerza periódica externa.

16 ¿Cuándo se produce el fenómeno de resonancia en la amplitud?

El fenómeno de la resonancia se produce cuando la frecuencia angular de la fuerza externa coincide con la frecuencia natural de oscilación del sistema, lo cual se traduce en un aumento de la amplitud de la oscilación.

El movimiento armónico simple

17 Razona cómo son los movimientos de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de π radianes. ¿En qué punto de la trayectoria se cruzan?

Un ejemplo de movimiento de dos osciladores armónicos idénticos que oscilan con un desfase de π radianes sería el caso de dos osciladores que parten de extremos opuestos o que, partiendo de la posición de equilibrio, comienzan a oscilar en sentidos opuestos. Como se demuestra en el problema de cálculo número 21, los dos osciladores se cruzarán en la posición de equilibrio.

18 Dos partículas efectúan movimientos armónicos simples de la misma amplitud y período a lo largo de la misma recta. ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas si se cruzan cuando su elongación es la mitad de la amplitud?

Si $x = A \cos \omega t$ es la ecuación de uno de los osciladores, la correspondiente al otro será $x = A \cos (\omega t + \delta)$. Cuando $x = A/2$, se cumple que:

$$A/2 = A \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = 1/2$$

Es decir:

$$\omega t = \pi/3 \text{ rad}$$

El otro oscilador se encuentra en ese mismo instante en la misma posición, si bien su sentido de movimiento es opuesto. Por tanto, debe cumplirse que:

$$\omega t + \delta = 2\pi - \pi/3 = 5\pi/3 \Rightarrow \delta = 4\pi/3 \text{ rad}$$

o bien:

$$\delta = -2\pi/3 \text{ rad}$$

19 PAU Una partícula que oscila armónicamente con una amplitud de 15 cm tarda 1,5 s en realizar una oscilación completa. Sabiendo que en $t = 0$ su velocidad es nula y su elongación es positiva, determina:

a) **La ecuación de su movimiento $x(t)$.**

b) **La velocidad y la aceleración de la oscilación en $t = 0{,}5$ s.**

c) **Los valores absolutos de velocidad y aceleración máximas.**

a) Dadas las condiciones iniciales del problema, la ecuación es de la forma $x = A \cos \omega t$, siendo $A = 15$ cm y $\omega = 2\pi/T = 4\pi/3$, pues $T = 3/2$ s. Por tanto:

$$x = 15 \cos \frac{4\pi}{3} t \text{ cm}$$

b) Derivando una y dos veces respecto al tiempo, obtenemos:

$$v = -15 \frac{4\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} t = -20\pi \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} t$$

$$v\,(t = 0{,}5 \text{ s}) = -54{,}4 \text{ cm/s}$$

$$a = -15 \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \cos \frac{4\pi}{3} t = -\frac{80\pi^2}{3} \cos \frac{4\pi}{3} t$$

$$a(t = 0{,}5 \text{ s}) = 131{,}59 \text{ cm/s}^2$$

c) Los valores absolutos de $v_{máx}$ y $a_{máx}$ son, respectivamente:

$$v_{máx} = \omega A = 62{,}8 \text{ cm/s}$$

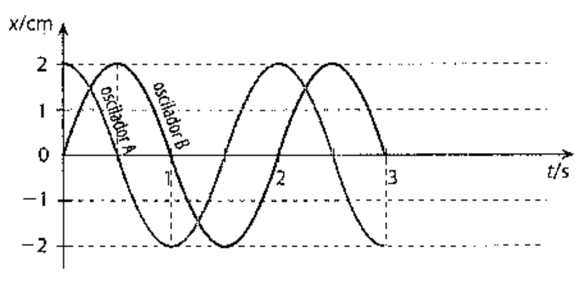
$$a_{máx} = \omega^2 A = 263{,}2 \text{ cm/s}^2$$

20 PAU Representa en una misma gráfica los movimientos de los siguientes osciladores:

- **Oscilador A: se suelta desde el extremo $x = +2$ cm de la posición de equilibrio, y su período es de 2 s.**
- **Oscilador B: idéntico al anterior, pero la oscilación parte de la posición de equilibrio hacia amplitudes positivas.**

¿Qué ecuaciones representan a ambos osciladores? ¿En qué puntos se cruzan estos?

La gráfica correspondiente es la siguiente:



y las ecuaciones son:

- Para el oscilador A:

$$x_A = 0{,}02 \cos \pi t = 0{,}02 \operatorname{sen} (\pi t + \pi/2) \text{ m}$$

- Para el oscilador B:

$$x_B = 0{,}02 \operatorname{sen} \pi t \text{ m}$$

En ambos casos, $T = 2$ s, y $\omega = 2\pi/T = \pi$ rad.

Los puntos donde se cruzan ambos osciladores se calculan haciendo $x_A = x_B$; por lo que:

$$\cos \pi t = \operatorname{sen} \pi t \Rightarrow \operatorname{tg} \pi t = 1$$

valor que corresponde a un ángulo de $\pi/4$ rad.

Así:

$$\pi t = \pi/4 \Rightarrow t = 0{,}25 \text{ s}$$

Dicho valor también correspondería al de un ángulo de $\pi/4 + \pi = 5\pi/4$ rad.

Así pues:

$$\pi t = 5\pi/4 \Rightarrow t = 1{,}25 \text{ s}$$

valores de tiempo que corresponden a las dos primeras veces que se cruzan, cosa que ocurre en los puntos:

$$x = 0{,}02 \operatorname{sen} (\pi \cdot 0{,}25) = 0{,}0141 \text{ m} = 1{,}41 \text{ cm}$$

$$x' = 0{,}02 \operatorname{sen} (\pi \cdot 1{,}25) = -0{,}0141 \text{ m} = -1{,}41 \text{ cm}$$

21 PAU Tenemos dos osciladores armónicos cuyas ecuaciones de posición son $x_1 = A \cos (\omega t + \pi/2)$ y $x_2 = A \cos (\omega t - \pi/2)$. Determina:

a) **La posición inicial.**

b) **El sentido en que comienzan a moverse los osciladores.**

c) **El punto en el que se cruzan.**

d) **La diferencia de fase entre los dos.**

a) La posición inicial, para $t = 0$, resulta ser cero en ambos casos.

b) La ecuación del primer oscilador corresponde a un oscilador que comienza a oscilar hacia valores negativos de x desde la posición de equilibrio.

Esto puede comprobarse haciendo $t = T/4$. Dado que, $T = 2\pi/\omega$, entonces:

$$t = \frac{2\pi}{4\omega}$$

por lo que:

$$x = A \cos (\omega t + \pi/2) = A \cos \left(\omega \cdot \frac{2\pi}{4\omega} + \frac{\pi}{2}\right)$$

es decir:

$$x = A \cos \pi = -A$$

Como puede observarse, al cabo de $T/4$ s, el oscilador se encuentra en la posición $x = -A$.

Por el contrario, la segunda corresponde a un oscilador que se mueve hacia valores positivos de x (hacia la derecha) desde la posición de equilibrio. Si se repite el proceso para $t = T/4$, se encontrará que $x = A$.

c) Cuando se cruzan, las posiciones de ambos coinciden, por lo que:

$$A \cos (\omega t + \pi/2) = A \cos (\omega t - \pi/2)$$

Desarrollando la expresión, tenemos:

$$\cos \omega t \cdot \cos \pi/2 - \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \pi/2 =$$
$$= \cos \omega t \cdot \cos \pi/2 + \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \pi/2$$

de donde:

$$2 \operatorname{sen} \omega t = 0$$

o bien, dado que $\omega = 2\pi/T$:

$$2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t = 0$$

igualdad que se cumple siempre que:

$$\frac{2\pi}{T} t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi\ldots$$

Por tanto, se cumple cuando:

$$t = 0, T/2, T, 3T/2\ldots$$

valores de tiempo que corresponden a $x = 0$. Es decir, como era de prever, se cruzarán siempre en la posición de equilibrio.

d) Como se desprende de las ecuaciones, la diferencia de fase es de π rad.

22 **La ecuación de posición de un oscilador es:**

$$x = 5 \cos (\pi t + \pi) \text{ cm}$$

Determina:

a) **La frecuencia y el período de oscilación.**

b) **La amplitud.**

c) **La posición inicial de la partícula.**

d) **La gráfica en los cuatro primeros segundos.**

e) **La velocidad y la aceleración del oscilador en $t = 5$ s.**

f) **La velocidad y la aceleración máximas.**

a) Dado que $\omega = 2\pi f$, entonces:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

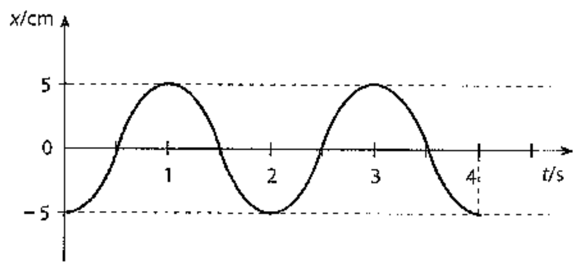
y, por tanto, $T = 2$ s.

b) Como se desprende de la ecuación, $A = 5$ cm.

c) La posición inicial, es decir, para $t = 0$, es:

$$x_0 = 5 \cos \pi = -5 \text{ cm}$$

d) La gráfica en los cuatro primeros segundos es:



e) La velocidad y la aceleración vienen dadas, respectivamente, por:

$$v = \frac{dx}{dt} = -5\pi \text{ sen } (\pi t + \pi) \text{ cm/s}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -5\pi^2 \cos (\pi t + \pi) \text{ cm/s}^2$$

cuyos valores en $t = 5$ s son:

$$v(5) = 0$$

$$a(5) = -5\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

f) La velocidad máxima es:

$$v_{máx} = \omega A = 5\pi \text{ cm/s}$$

y la aceleración:

$$a_{máx} = \omega^2 A = 5\pi^2 \text{ cm/s}^2$$

23 **PAU** **Una partícula oscila en el eje X con movimiento armónico simple. Si parte de la posición de equilibrio y comienza a oscilar hacia la derecha con una amplitud de 4 cm y una frecuencia de 1/3 Hz, determina:**

a) **La ecuación de posición.**

b) **La velocidad y la aceleración cuando $t = 5$ s.**

c) **La velocidad cuando pasa por la posición $x = -1$ cm.**

d) **El desplazamiento neto y el espacio recorrido en 1 s.**

a) Con los datos ofrecidos, deducimos que:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/3 \text{ rad/s}$$

Si la partícula comienza a oscilar hacia la derecha, su ecuación puede escribirse de estas dos maneras:

$$x = 4 \text{ sen } \frac{2\pi}{3} t \text{ cm} \qquad x = 4 \cos \left(\frac{2\pi}{3} t - \frac{\pi}{2} \right) \text{ cm}$$

b) Eligiendo la primera expresión, la velocidad y la aceleración de la partícula vienen dadas por:

$$v = \frac{8\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3} t \text{ cm/s}$$

$$a = -\frac{16\pi^2}{9} \text{ sen } \frac{2\pi}{3} t \text{ cm/s}^2$$

Sustituyendo para $t = 5$ s, obtenemos:

$$v(5) = -4{,}19 \text{ cm/s} \text{ ; } a(5) = 15{,}2 \text{ cm/s}^2$$

c) La velocidad en función de la posición es:

$$v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

para $x = -1$ cm, la velocidad será:

$$v = -8{,}11 \text{ cm/s}$$

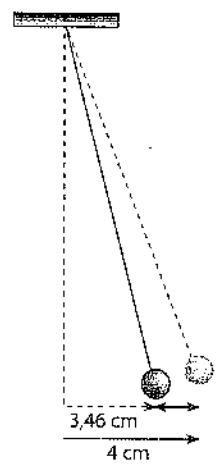
d) El desplazamiento neto será:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 3{,}46 - 0 = 3{,}46 \text{ cm}$$

Puesto que $t = 1$ s es un tiempo superior a $T/4$ (0,75 s), la partícula se encuentra a 3,46 cm de la posición de equilibrio, pero encaminándose hacia ella después de pasar por el punto de máxima elongación.

En consecuencia, el espacio recorrido es:

$$s = A + (4 - 3{,}46) = 4{,}54 \text{ cm}$$



Consideraciones dinámicas del MAS

24 **Si tenemos un cuerpo de masa desconocida y un resorte de constante k también desconocida. ¿Cómo podríamos averiguar el período de oscilación de dicho sistema sin hacerlo oscilar?**

Bastaría con colgar la masa desconocida del muelle y medir el alargamiento producido. Cuando se consigue el equilibrio, se cumple que:

$$mg = kx \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{x}{g}$$

Así pues, el período de oscilación de dicho sistema sería:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}}$$

que, como es fácil ver, puede obtenerse sin más que medir el alargamiento del muelle.

25 **Un resorte del que pende una masa m tiene una constante de fuerza k. El resorte se corta por la mitad, y la masa se cuelga de una de las mitades. ¿Oscilará ahora con el mismo período que antes? Razona y demuestra tu afirmación.**

No oscilará con el mismo período, pues el valor de k varía al cortar el muelle por la mitad. Podemos expresar k como $k = F/l$, por lo que, si $l' = l/2$, entonces $k' = 2 \cdot k$. Es decir, al cortar el muelle por la mitad, la constante k se duplica, por lo que el período disminuye en un factor:

$$T' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot T$$

26 **PAU** **Al colgar una masa del extremo de un muelle vertical, este sufre un alargamiento de 7 cm.**

a) **¿De qué magnitudes del sistema depende la relación entre el alargamiento x y la aceleración de la gravedad?**

b) **¿Cuál es el período de oscilación del sistema si comienza a oscilar en posición horizontal sin rozamiento?**

a) Cuando el sistema alcanza el equilibrio, el valor del peso y la fuerza restauradora se igualan, es decir:

$$mg = kx \Rightarrow \frac{x}{g} = \frac{m}{k}$$

Es decir, la relación entre el alargamiento y la aceleración de la gravedad es equivalente a la relación entre la masa y la constante elástica. Por tanto, dicha relación depende de las características dinámicas del sistema.

b) El periodo viene dado por la expresión:

$$T = 2\pi = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Dada la identidad anterior, podemos determinar el periodo conociendo el alargamiento del muelle:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}} = 0{,}53 \text{ s}$$

27 **PAU** **Una masa de 50 g unida a un resorte horizontal de constante $k = 200$ N/m es soltada después de haber sido desplazada 2 cm con respecto a su posición de equilibrio.**

a) **Determina su período y su frecuencia de oscilación.**

b) **Escribe su ecuación de movimiento.**

c) **Calcula la velocidad y aceleración máxima.**

d) **Establece la velocidad y la aceleración en $x = 1$ cm.**

e) **Representa con los valores correspondientes las gráficas x, v y a frente al tiempo.**

a) El período del objeto viene dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}1 \text{ s}$$

Y, por tanto:

$$f = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz}$$

b) Su ecuación se escribirá de la siguiente forma:

$$x = A \cos \omega t = 0{,}02 \cos \frac{2\pi}{T} t$$

$$x = 0{,}02 \cos 20\pi t \text{ m}$$

c) Su velocidad máxima es:

$$v_{máx} = \omega A = 1{,}26 \text{ m/s}$$

Su aceleración máxima es:

$$a_{máx} = -\omega^2 A = -79 \text{ m/s}^2$$

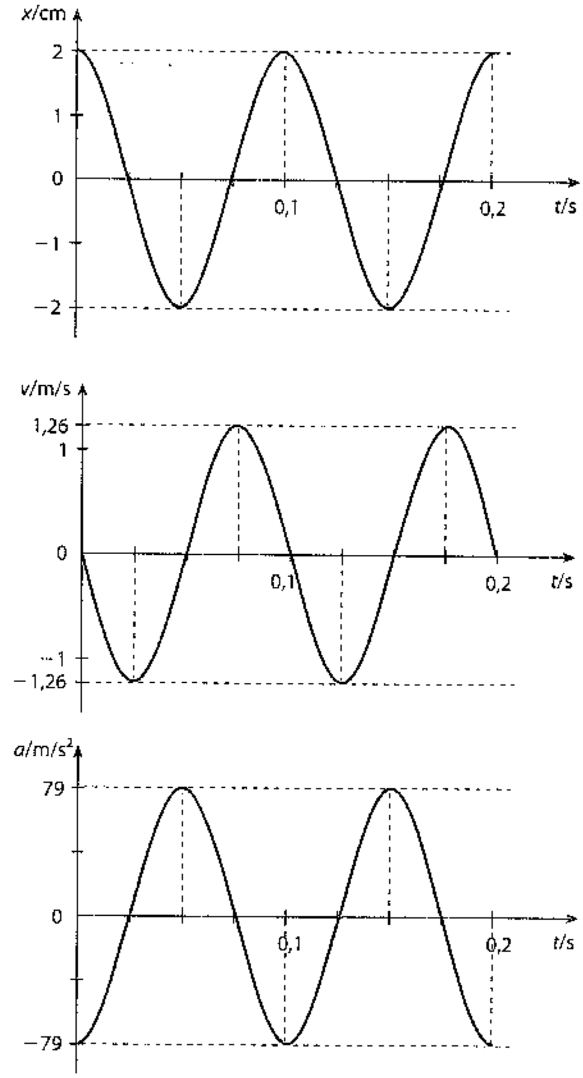
d) La velocidad y la aceleración serán, respectivamente:

$$v = \pm\omega \sqrt{A^2 - x^2} = \mp 1{,}09 \text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -39{,}44 \text{ m/s}^2$$

Según el sentido del movimiento, la velocidad será positiva o negativa.

e) Las gráficas son las siguientes:



28 **PAU** **Una masa de 200 g colgada de un resorte de constante $k = 10$ N/m oscila con una amplitud de 4 cm. Calcula:**

a) **La velocidad y la aceleración del oscilador cuando la posición de la partícula es $x = 3$ cm.**

b) **El valor máximo de la aceleración y la velocidad.**

a) La velocidad y la aceleración en función de la posición vienen dadas, respectivamente, por :

$$v = \pm\omega \sqrt{A^2 - x^2} = \pm 0{,}18 \text{ m/s}$$

$$a = -\omega^2 x = -1{,}50 \text{ m/s}^2$$

donde:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{50} \text{ rad/s}$$

b) Sus valores máximos son:

$$v_{máx} = \omega A = 0{,}28 \text{ m/s} ; a_{máx} = -\omega^2 A = 2 \text{ m/s}^2$$

Consideraciones energéticas en el MAS

29 **PAU** **Una masa de 1,5 kg unida a un muelle realiza oscilaciones armónicas sin rozamiento sobre una superficie horizontal; sabemos que la amplitud es de 3 cm y la frecuencia es de 2 Hz. Si las oscilaciones comienzan desde la máxima elongación positiva, determina:**

a) **La ecuación representativa del movimiento.**

b) **La constante elástica del muelle.**

c) **El valor de la velocidad de oscilación en $x = 2$ cm.**

d) **La energía mecánica del oscilador, así como la posición en que las energías cinética y potencial del oscilador son iguales.**

a) Puesto que la oscilación comienza desde su máxima elongación positiva, la ecuación es del tipo $x = A \cos \omega t$, donde $A = 3$ cm y $\omega = 2\pi f = 4\pi$ rad/s. Así pues:

$$x = 3 \cos 4\pi t \text{ cm}$$

b) La constante elástica del muelle es:

$$k = m\omega^2 = 1{,}5 \cdot (4\pi)^2 = 236{,}87 \text{ N/m}$$

c) La velocidad de oscilación en $x = 2$ cm, es, en valor absoluto:

$$|v| = \omega \sqrt{A^2 - x^2} = 4\pi \sqrt{5} = 28{,}1 \text{ cm/s}$$

d) La energía mecánica del oscilador es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0{,}106 \text{ J}$$

El valor de la elongación en el que la energía potencial y cinética del oscilador son iguales se obtiene de la igualdad:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 (A^2 - x^2)$$

Dado que $m\omega^2 = k$, la igualdad se reduce a:

$$x^2 = A^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} A = 2{,}12 \text{ cm}$$

30 **PAU** **Dos partículas de masas *m* y *m'*, respectivamente, efectúan oscilaciones armónicas de igual amplitud unidas a resortes de la misma constante *k*. Si $m' > m$:**

a) **¿Qué partícula tiene mayor energía mecánica?**

b) **¿Cuál de las dos tiene mayor energía cinética al pasar por la posición de equilibrio?**

c) **¿Son iguales sus velocidades en la posición de equilibrio?**

d) **¿Son iguales sus períodos de oscilación?**

a) Los dos osciladores tienen la misma energía mecánica, pues esta es igual a $1/2\ kA^2$.

b) La energía cinética en ese punto adquiere su máximo valor, que es igual a $1/2\ kA^2$ y la misma para ambos osciladores.

c) En la posición de equilibrio sus velocidades no son iguales, debido a que en ese punto se cumple que:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m}A^2$$

Dado que *k* y *A* son iguales en ambos casos, a mayor masa, menor velocidad. Es decir, la velocidad de *m'* en ese punto es menor.

d) Los períodos de oscilación no son iguales; dado que el período depende de la masa, el de mayor masa tendrá mayor período.

31 **PAU** **Una partícula de 40 g de masa unida a un muelle horizontal describe un MAS mediante el cual recorre una distancia total de 16 cm en cada ciclo completo de oscilación. Sabiendo que su aceleración máxima es de 36 cm/s^2, halla:**

a) **La frecuencia y el período del movimiento.**

b) **La constante elástica del muelle.**

c) **La energía mecánica del sistema.**

d) **La velocidad del oscilador en $x = 2$ cm.**

En cada ciclo completo, la partícula recorre cuatro veces el espacio equivalente a la amplitud. Al ser ese espacio 16 cm, resulta que la amplitud es $A = 4$ cm. Conocida la amplitud y la aceleración máxima, podemos determinar la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{máx}}{A}} = 3 \text{ rad/s}$$

a) La frecuencia es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 0{,}48 \text{ Hz}$$

El período es $T = 1/f = 2{,}1$ s.

b) La constante elástica es $k = m\omega^2 = 0{,}36$ N/m.

c) La energía mecánica del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 2{,}88 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

d) La velocidad viene dada por:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 10{,}4 \text{ cm/s}$$

32 **PAU** **Una masa de 500 g unida a un resorte oscila armónicamente con una frecuencia de 0,4 Hz. Si la energía mecánica del oscilador es de 3 J:**

a) **Calcula la constante *k* del resorte.**

b) **Determina la amplitud de la oscilación.**

c) **Representa en una misma gráfica las variaciones de la energía cinética y potencial del oscilador frente al tiempo en los cinco primeros segundos y compara dicha gráfica con la de posición.**

a) Dado que $\omega^2 = k/m$, entonces $k = m\omega^2$, donde:

$$\omega = 2\pi f = 2{,}51 \text{ rad/s}$$

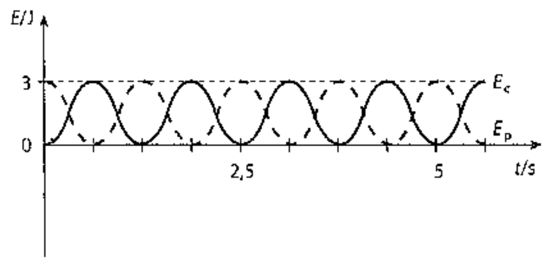
Por tanto:

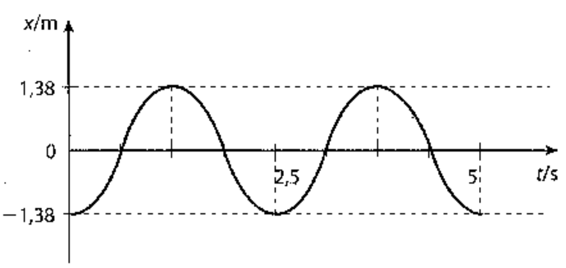
$$k = m\omega^2 = 3{,}15 \text{ N/m}$$

b) La energía mecánica del oscilador es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = 1{,}38 \text{ m}$$

c) Las gráficas pedidas son:





Nota: la oscilación vertical del muelle no supone mayor problema si consideramos que la posición de equilibrio se halla desplazada una distancia $y'_0 = mg/k$ con respecto a la posición de equilibrio y_0 sin ninguna masa colgada. Teniendo en cuenta ese nuevo sistema de referencia, el problema se aborda de idéntica manera que si se tratase de una oscilación horizontal.

Para la gráfica de posición, se ha considerado que el sistema es estirado hacia abajo y luego soltado.

33 **PAU** **Una masa de 100 g unida a un muelle horizontal de constante elástica k = 30 N/m oscila armónicamente sin amortiguamiento. Sabiendo que su amplitud es de 7 cm, determina:**

a) **La expresión de la velocidad de oscilación de la masa en función de la elongación.**

b) **La energía potencial elástica del sistema cuando la velocidad de oscilación es nula.**

c) **La energía cinética del sistema en x = 3 cm.**

d) **La energía cinética y potencial elástica del sistema cuando el módulo de la aceleración de la masa es de 8 m/s².**

a) A partir de los datos ofrecidos, podemos obtener la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30}{0{,}1}} = 17{,}32 \text{ rad/s}$$

Por lo que:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 17{,}32\sqrt{49 - x^2} \text{ cm/s}$$

b) Cuando la velocidad de oscilación es nula, la energía potencial del sistema alcanza su valor máximo, que coincide con la energía mecánica del sistema, es decir:

$$E_{p\,\text{máx}} = \frac{1}{2}kA^2 = 0{,}073\,5 \text{ J}$$

c) Cuando x = 3 cm, la velocidad es:

$$v = 17{,}32\sqrt{49 - 3^2} = 109{,}5 \text{ cm/s} \cong 1{,}1 \text{ m/s}$$

por lo que la energía cinética en ese punto es:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0{,}060\,5 \text{ J}$$

d) El valor de x correspondiente a ese valor de la aceleración es:

$$x = \frac{a}{\omega^2} = \frac{8}{300} = 0{,}026\,7 \text{ cm}$$

La energía potencial en dicho punto será:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0{,}010\,7 \text{ J}$$

Luego la energía cinética será:

$$E_c = E_{\text{mecánica}} - E_p = 0{,}062\,8 \text{ J}$$

34 **PAU** **Si la amplitud de un movimiento armónico simple se duplica, calcula cuánto varía:**

a) **Su energía mecánica y período.**

b) **Su velocidad máxima y aceleración máxima.**

a) La energía mecánica viene dada por $E = 1/2\ kA^2$. Por tanto, si A se duplica, la energía se cuadruplica: $E' = 4 \cdot E$.

El período es $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ y depende solo de las características mecánicas del oscilador y no de la amplitud. Por tanto, el período no varía: $T' = T$.

b) Su velocidad máxima es $v_{\text{máx}} = \pm\omega A$; por tanto, se duplicará: $v' = 2 \cdot v$.

Su aceleración máxima es $|a_{\text{máx}}| = |-\omega^2 A|$, por lo que también se duplicará: $a' = 2 \cdot a$.

El péndulo simple

35 **La longitud de un péndulo simple es el cuádruple que la de otro. Compara sus períodos de oscilación.**

El período del péndulo de cuádruple longitud será el doble, como se desprende de la expresión **7.15**.

36 **PAU** **Un péndulo simple de 2 m de longitud tiene un período de 2,84 s para pequeñas oscilaciones:**

a) **Determina la intensidad del campo gravitatorio en el lugar de la medición.**

b) **Si la velocidad de la bolita del péndulo cuando pasa por la posición de equilibrio es de 0,4 m/s, calcula la amplitud de la oscilación.**

c) **Si la oscilación comienza en uno de los extremos, escribe la ecuación de posición en el eje X y represéntala gráficamente en función del tiempo.**

a) El período del péndulo, para pequeñas oscilaciones, viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \cong 9{,}79 \text{ m/s}^2$$

b) En la posición de equilibrio, el péndulo alcanza su máxima velocidad, por lo que:

$$v = \omega A = \frac{2\pi}{T}A \Rightarrow A = \frac{vT}{2\pi} = 0{,}18 \text{ m}$$

c) Si suponemos que la posición inicial es la correspondiente al extremo de amplitud positiva, y considerando que $\omega = 2\pi/T = 2{,}21$, resulta:

$$x = A\cos\omega t = 0{,}18\cos 2{,}21t \text{ m}$$