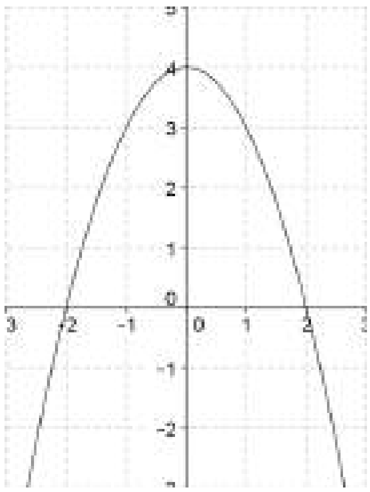
UNIDAD 8: Funciones racionales e irracionales

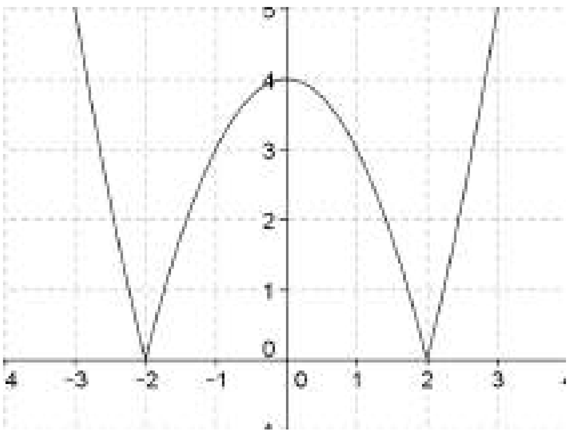
ACTIVIDADES-PÁG. 164

1. La expresión algebraica correspondiente al problema es $t = \dfrac{400}{v}$ y la distancia entre las ciudades es de 400 km.

2. a) La gráfica es la simétrica respecto de OX de la función dada.



b) La gráfica es el valor absoluto de la función dada y se obtiene dejando igual la parte positiva y haciendo la simétrica respecto de OX con la negativa.



3. La asociación es: a) con (III) b) con (I) c) con (II)

ACTIVIDADES-PÁG. 177

1. La suma queda 1 + 3 + 5 + 7 +…+ (2n – 1) = $\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = n^2$

2. La solución queda:

1er piso: se necesitan 2 naipes.
2º piso: se necesitan 5 naipes.
3er piso: se necesitan 8 naipes.
4º piso: se necesitan 11 naipes.

Luego en el enésimo piso habrá (3n – 1) naipes.

Una torre de n pisos tendrá $\frac{(3n+1)\cdot n}{2}$ naipes.

Una torre de 15 pisos tendrá $\frac{(3\cdot 15+1)\cdot 15}{2} = 345$ naipes.

Veamos cuántos pisos tendrá un castillo de 3775 naipes:

$$\frac{(3n+1)\cdot n}{2} = 3775 \quad \Rightarrow \quad 3n^2 + n - 7750 \quad \Rightarrow \quad n = 50 \text{ pisos.}$$

3. Imaginamos que la rueda del padre tarda 6 segundos en dar una vuelta y la del hijo 6 segundos en dar vuelta y media.

En la situación de partida vuelven a estar a cabo de 12´´, pero en ningún momento coincidirán las marcas azules sobre el suelo.

4. El cuadrado de cualquier número entero termina en 0, 1, 4, 5, 6 ó 9.

Si un número cuadrado es par, su cuadrado es múltiplo de 4.

Así, $14^2 = 169 = \dot{4}$.

Si el número entero es impar, su cuadrado es múltiplo de 4 + 1, Así, $13^2 = 169 = \dot{4} + 1$.

Ahora bien, si el número al cuadrado termina en 111, 555, 666 ó 999, éstos no son múltiplos de 4 ni múltiplo de 4 + 1, luego no pueden ser.

Veamos, pues, los que terminan en 000 ó 444.

Efectivamente, $1444 = 38^2$, luego también se verifican si no son cero las cifras.

5. La demostración queda de la siguiente forma:

El valor de (2n)! es (2n)! = 2n · (2n – 1) · (2n – 2) ·… ·3 · 2 · 1.

Veamos si es cierta la igualdad anterior transformada en otra:

$$2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 > [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)]^2 \cdot \sqrt{2n+1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)} > \sqrt{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2n \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot ... \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n+1}$$

Esto es lo que vamos a demostrar por el método de inducción:

Para n = 1: $2 > \sqrt{2 \cdot 1 + 1} \quad \Rightarrow \quad 2 > \sqrt{3}$.

Supongamos que se cierto para n: $\dfrac{2n \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot ... \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n+1}$.

Veamos que es cierto para n + 1: $\dfrac{(2n+2) \cdot 2n \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot ... \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \sqrt{2n+3}$ [I]

$$\frac{(2n+2) \cdot 2n \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1) \cdot (2n-1) \cdot ... \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{(2n+2)}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n) \cdot (2n-2) \cdot ... \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n-1) \cdot ... \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} > \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \sqrt{2n+1} > \sqrt{2n+3}$$

Elevando al cuadrado:

$$(2n+2)^2 \cdot (2n+1) > (2n+1) > (2n+1)^2 \cdot (2n+3) \quad \Rightarrow \quad 16n + 4 > 14n + 3 \quad \Rightarrow \quad 2n + 1 > 0$$

Esto siempre es cierto ya que n es un número natural.

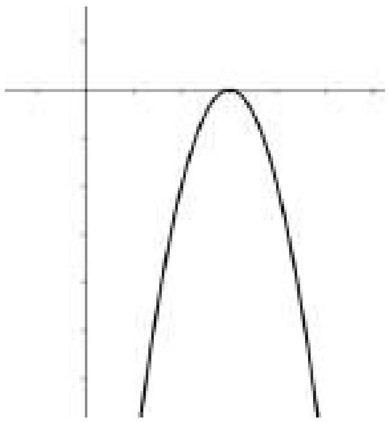
Por tanto, la desigualdad [I] es cierta y el enunciado es cierto.

ACTIVIDADES-PÁG. 179

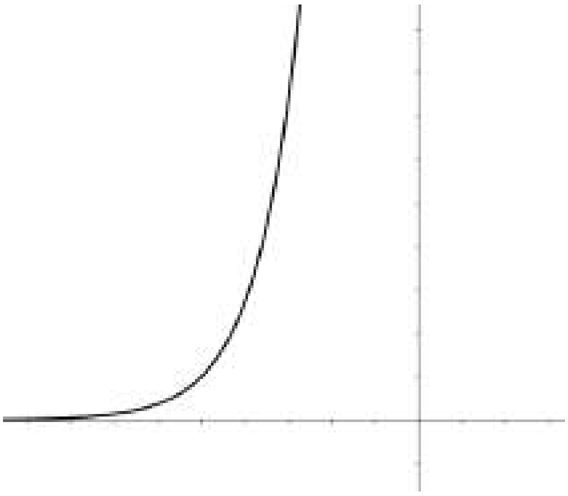
1. a) Introducimos en la pantalla que aparece después de pulsar la tecla la expresión:

-X ^2 + 12 * X - 36

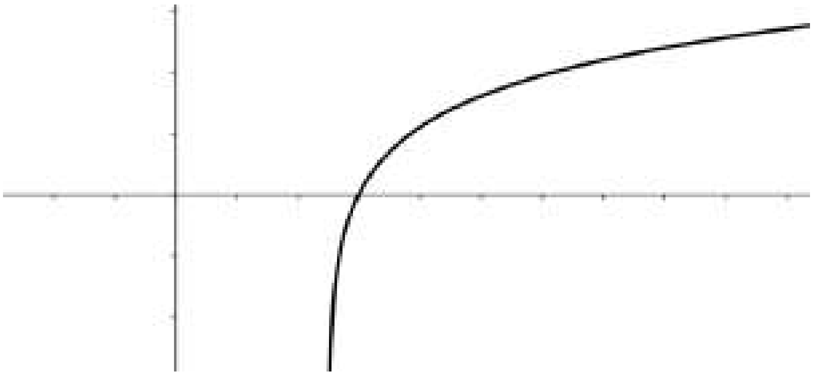
Pulsamos la tecla GRAPH para representar la función, y modificamos las opciones de la pantalla con la tecla WINDOW. Obtenemos la gráfica del dibujo.



b) Procediendo como en el apartado anterior y tecleando **e^(X+5)**, obtenemos:



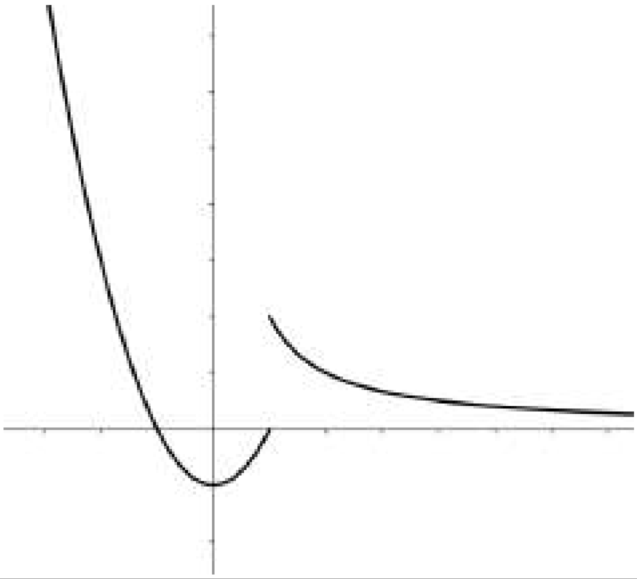
c) Procediendo como en los apartados anteriores y tecleando **ln(2*X-5)**, obtenemos:



2. a) Escribimos en **Y_1=** la expresión:

$$(X\text{^}2 - 1) * (X < 1) + (2/X) * (X \geq 1)$$

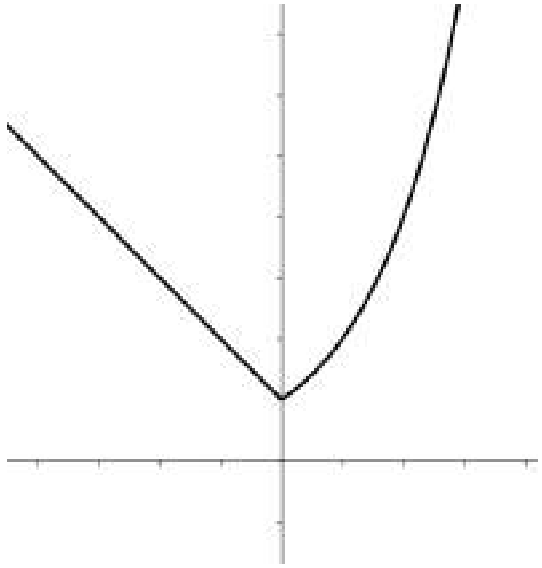
y obtenemos la gráfica:



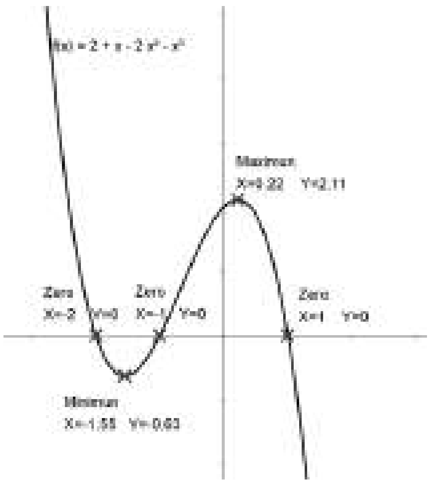
b) Escribimos en **Y_1=** la expresión:

$$(-X + 1) * (X \leq 0) + (2\text{^}X) * (X > 0)$$

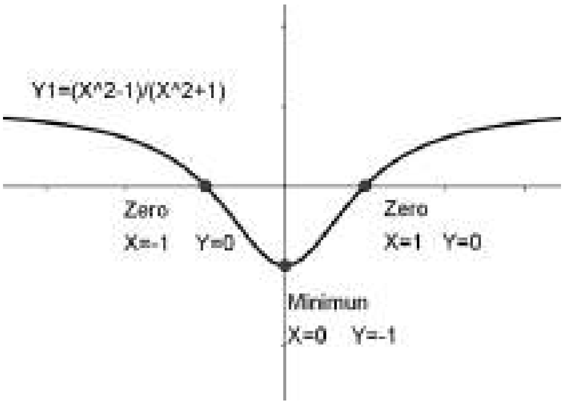
y obtenemos la gráfica:



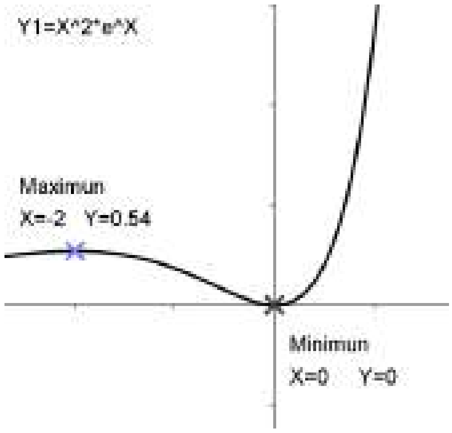
3. a) Representamos la función f (x) = $2 + x - 2x^2 - x^3$ y con las opciones del menú que ofrece la tecla  obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene tres cortes con OX en los puntos (- 2, 0); (- 1, 0) y (1, 0); un máximo relativo en (0,22; 2,11) y un mínimo relativo en (-1,55; - 0,63).



b) Para la función g (x) = $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ procedemos como en el apartado anterior y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene dos cortes con OX en los puntos (- 1, 0) y (1, 0) y un mínimo relativo en (0, - 1).

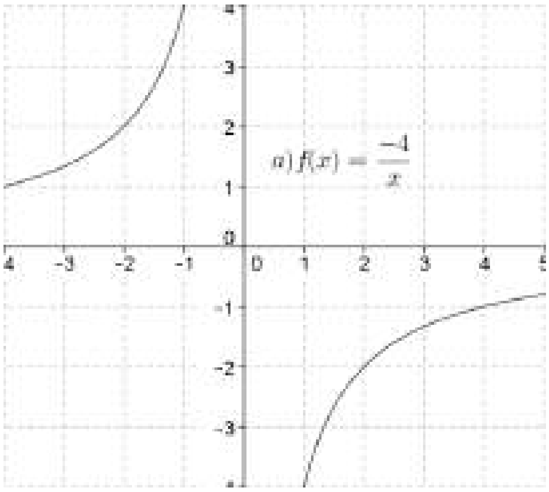


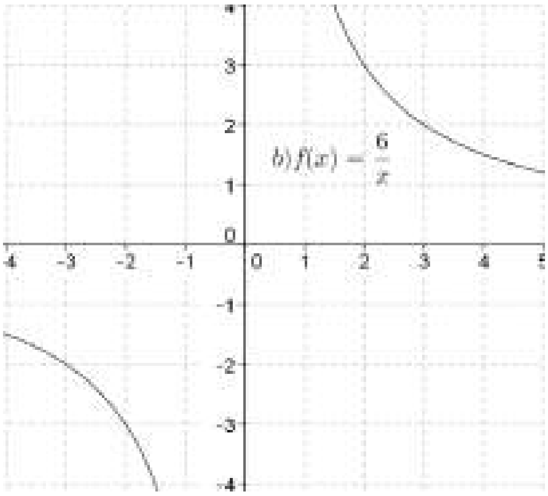
c) Para la función h (x) = $x^2 \cdot e^x$ procedemos como en los apartados anteriores y obtenemos, como vemos en la imagen, que la función tiene un corte con OX en el punto (0, 0); un máximo relativo en (-2; 0,54) y un mínimo relativo en (0, 0).

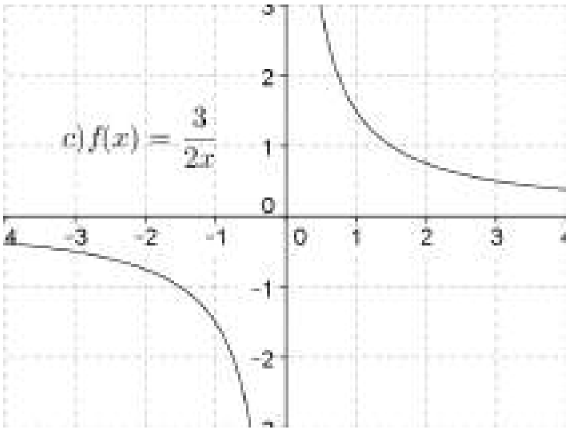


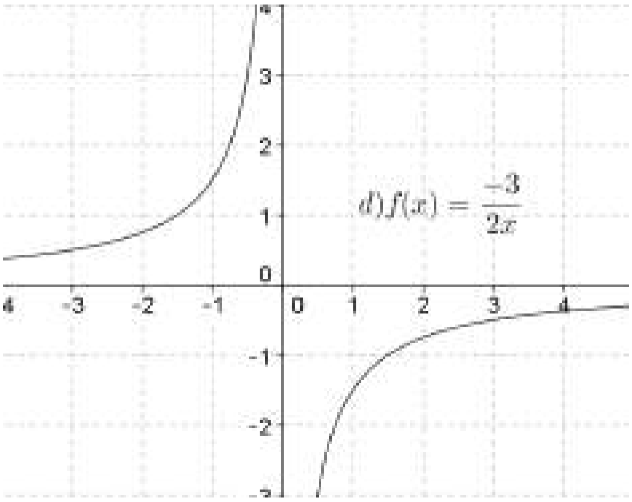
ACTIVIDADES-PÁG. 180

1. Las representaciones quedan:





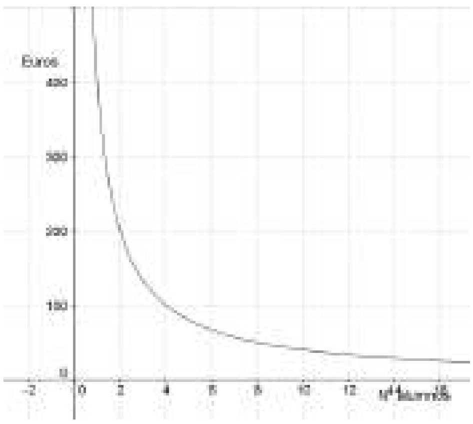




2. En cada uno de los casos son:

a) $y = -\dfrac{1}{2x}$ b) $y = \dfrac{5}{2x}$ c) $y = \dfrac{-5}{2x}$

3. La función es $f(x) = \dfrac{400}{x}$. Es una función de proporcionalidad inversa. La parte negativa de la gráfica no tiene sentido en el contexto del problema. La gráfica correspondiente viene dada por:

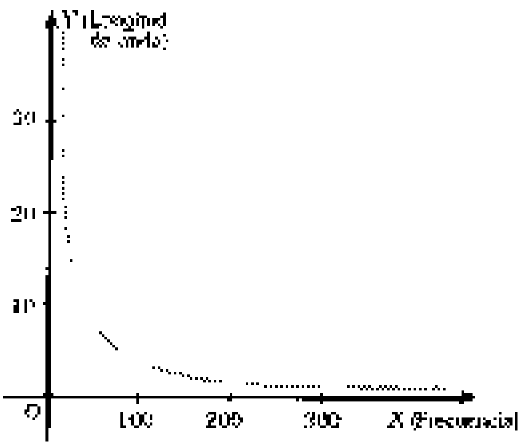


4. La solución de cada apartado es:

a) La tabla completa es:

Frecuencia (ciclos/segundo)	6	60	75	150	500	800	1200
Longitud de onda (metros)	50	5	4	2	0,6	0,375	0,25

b) La gráfica aparece en el dibujo:



c) La fórmula pedida es: $y = \dfrac{300}{x}$.

5. Llamando n al número de pintores y t al número de días, se obtiene la función $t = \dfrac{96}{n}$.

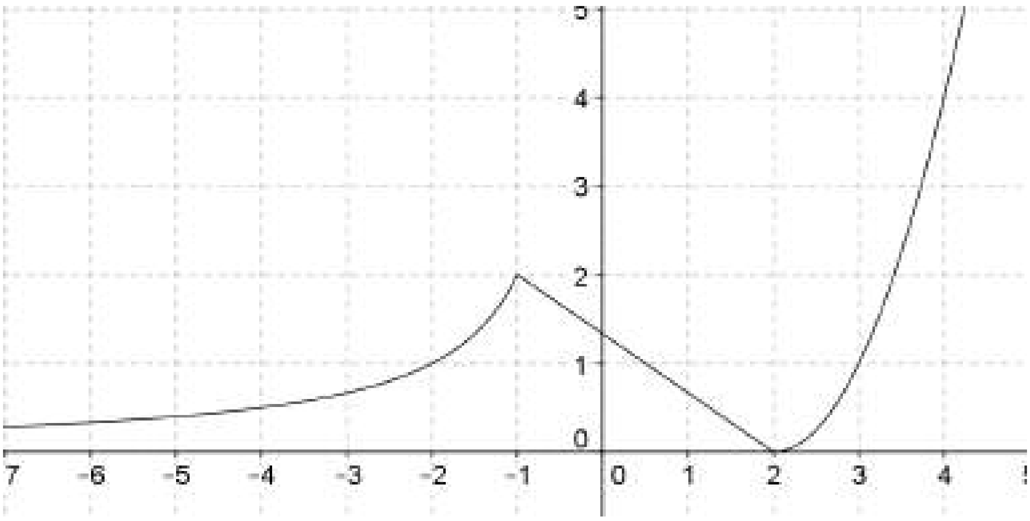
La tabla correspondiente viene dada por:

Nº pintores (n)	4	6	8	10	12
Tiempo (días)	24	16	12	9,6	8

6. Para $x \in \left(10^4\ ,\ 10^5\right)$

ACTIVIDADES-PÁG. 181

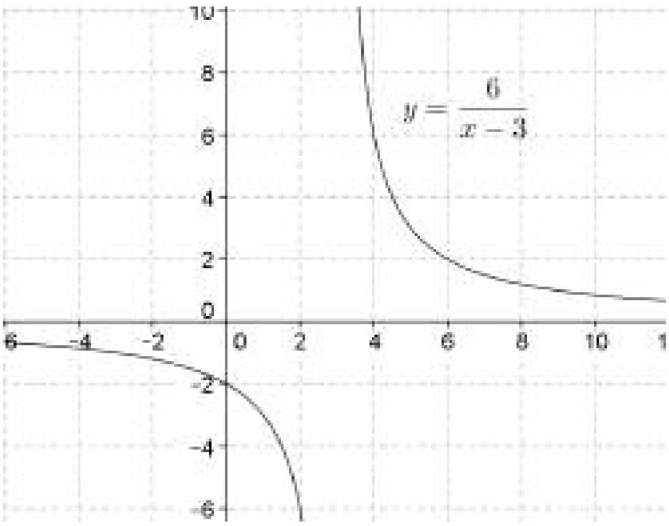
7. La gráfica es:



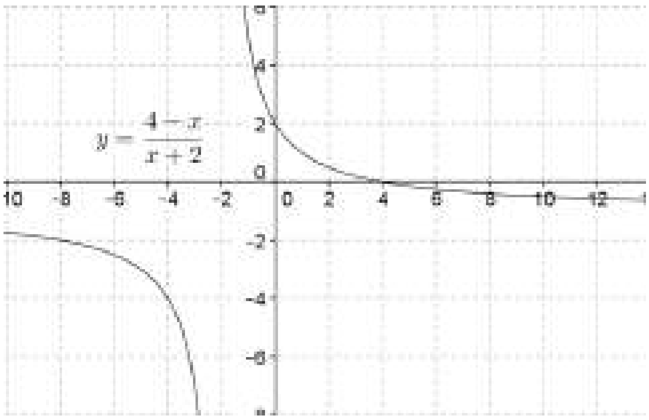
Dom f = R ; Im f = $\left[0, +\infty\right)$
Creciente $\left(-\infty, ´-1\right) \cup \left(2, +\infty\right)$ y decreciente (-1, 2)

8. En cada uno de los casos:

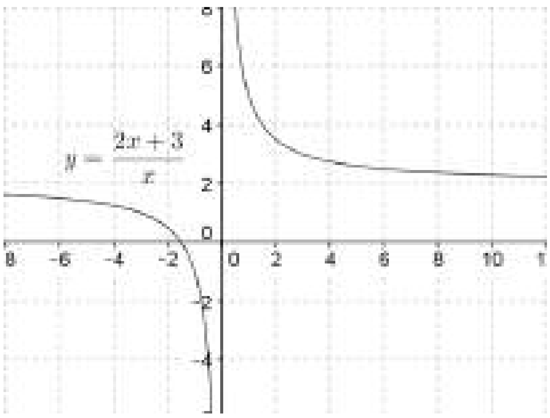
a) La función $y = \dfrac{6}{x-3}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones x = 3 e y = 0.



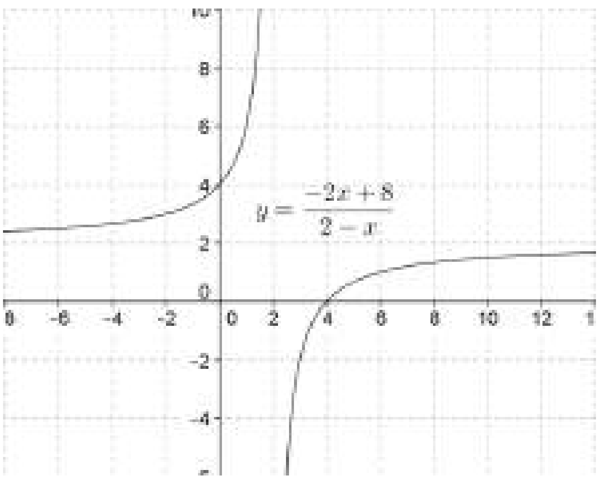
b) La función $y = \dfrac{4-x}{x+2}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones x = - 2 e y = -1.



c) La función $y = \dfrac{2x+3}{x}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones: x = 0 e y = 2.



d) La función $y = \dfrac{-2x+8}{2-x}$ tiene como asíntotas las rectas de ecuaciones x = 2 e y = 2.



9. Los dominios son:

a) Dom f = $[3, +\infty)$

b) Dom f = R

c) Dom f = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

d) Dom f = $[-2, 2]$

10. Las asociaciones son:

a) con g(x) $= -\sqrt{4+x}$

b) con h(x) = $\sqrt[3]{x+1}$

c) con f(x) = $\sqrt{4-x}$

11. Las respuestas son:

a) La gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x} - 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x}$ según el vector $\vec{v}\,(0,-2)$

b) La gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x} + 1$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x}$ según el vector $\vec{v}\,(0,1)$

c) La gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x-3} + 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{3}{x}$ según el vector $\vec{v}\,(3,2)$

12. Las soluciones son:

a) La gráfica de la función y = x^2 - 4 se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(0,-4)$

b) La gráfica de la función y = $(x-2)^2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(2,0)$

c) La gráfica de la función y = $(x-1)^2 + 4$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(1,4)$

d) La gráfica de la función $y = x^2 + 6x + 5 = (x + 3)^2 - 4$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(-3,-4)$

13. Las respuestas son:

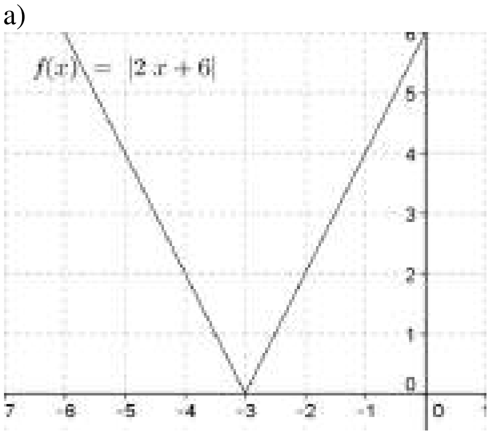
a) La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x} + 3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}\,(0,3)$

b) La gráfica de la función $g(x) = \sqrt{x+2}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}\,(-2,0)$

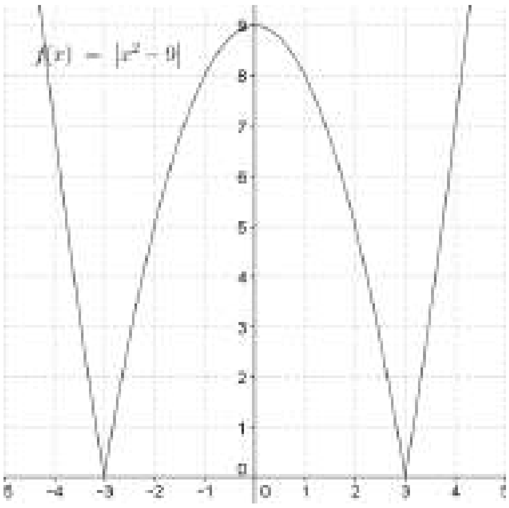
c) La gráfica de la función $h(x) = 4 - \sqrt{x-1}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}\,(1,-4)$ y a esta aplicarle una simetría horizontal de eje OX.

14. Las gráficas son:

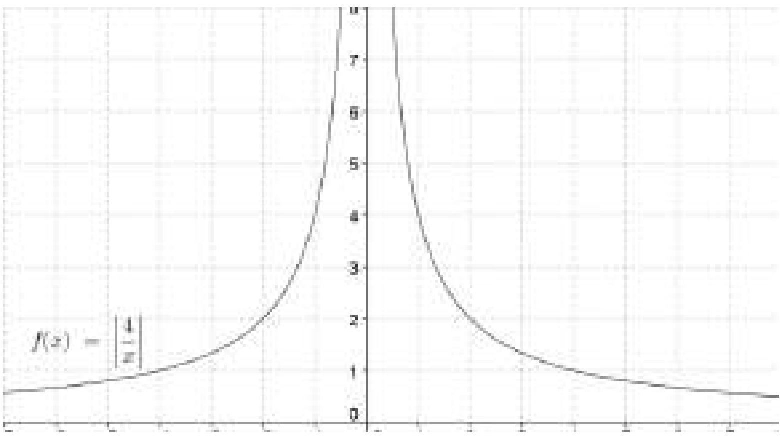
a)



b)

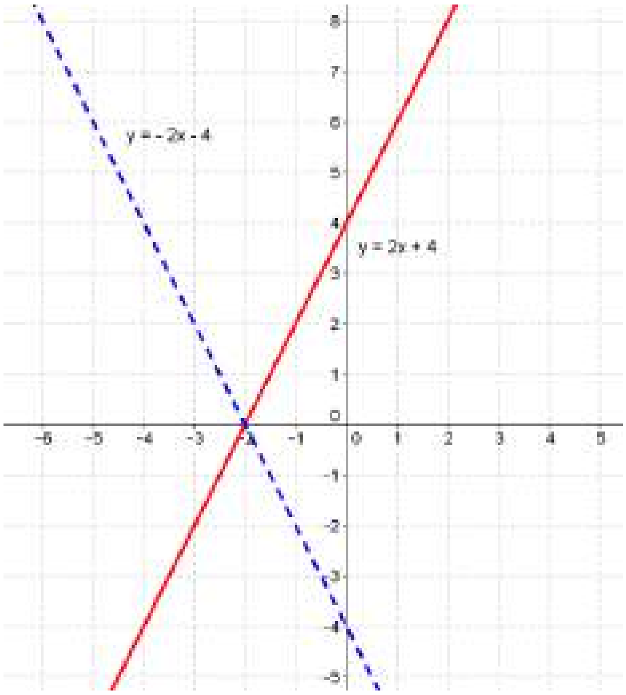


c)

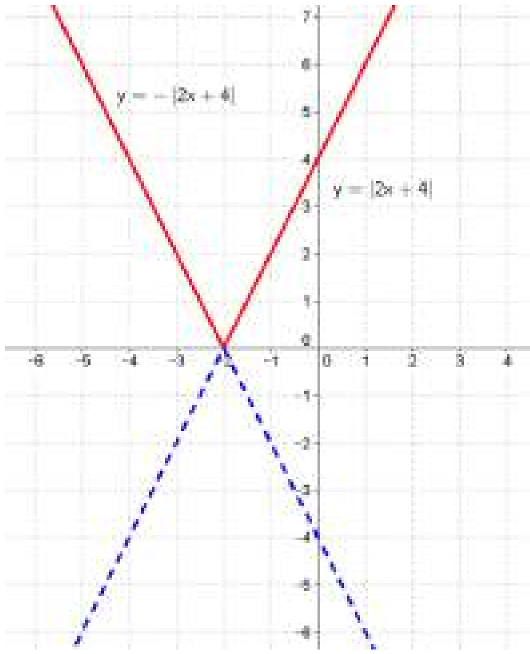


15. Las gráficas de las funciones se han dibujado en trazo continuo de color rojo y las gráficas de sus funciones opuestas están dibujadas en trazo discontinuo de color azul.

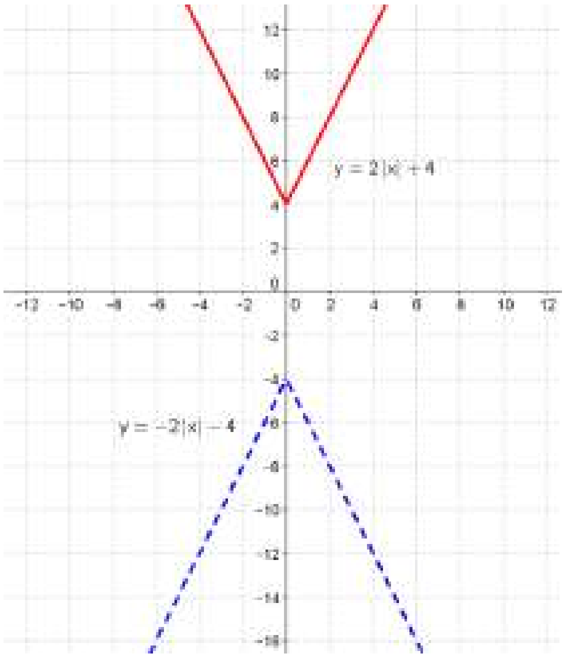
a)



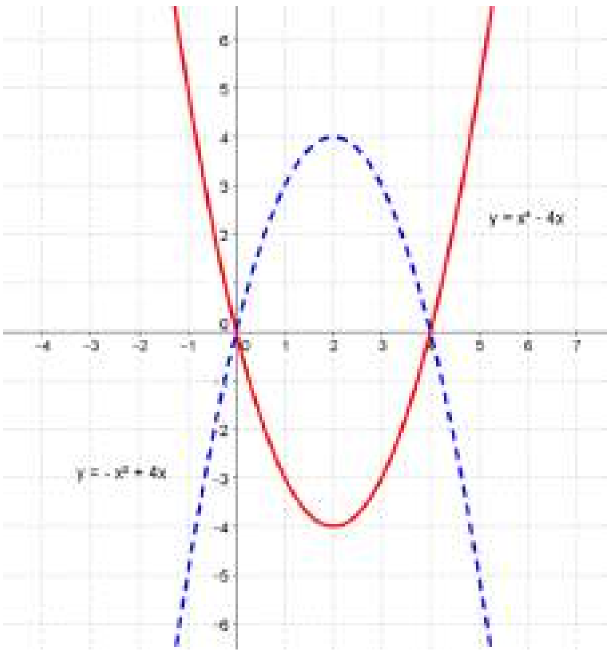
b)



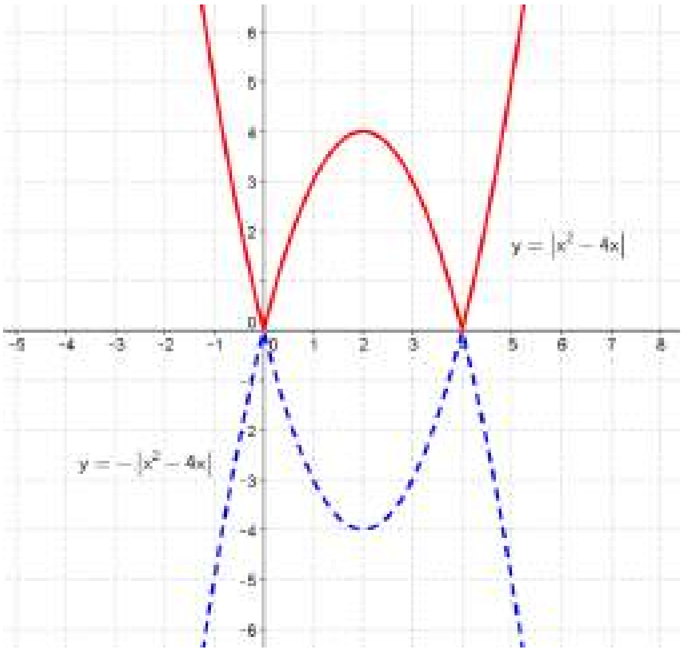
c)



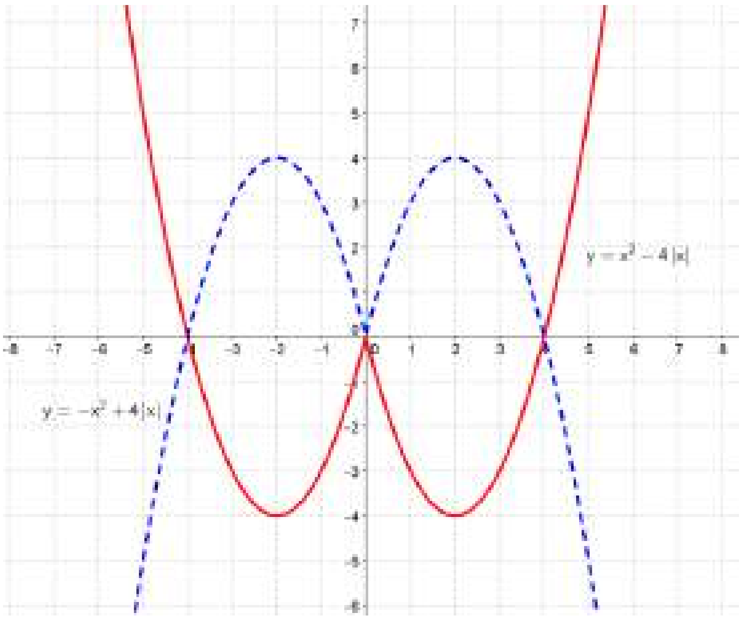
d)



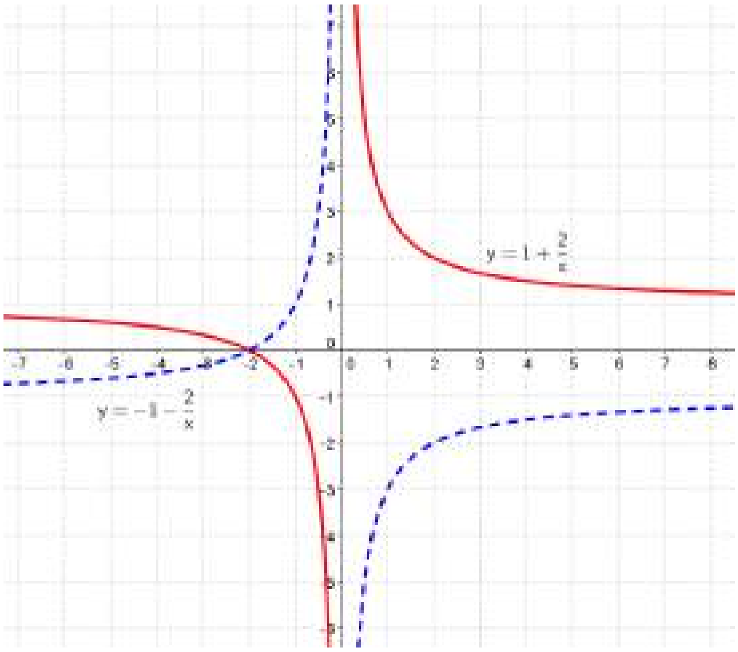
e)



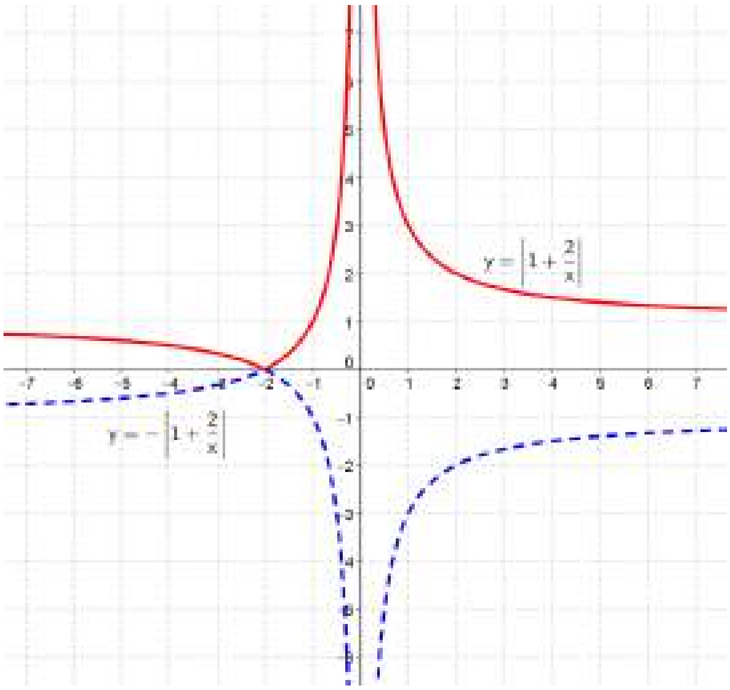
f)



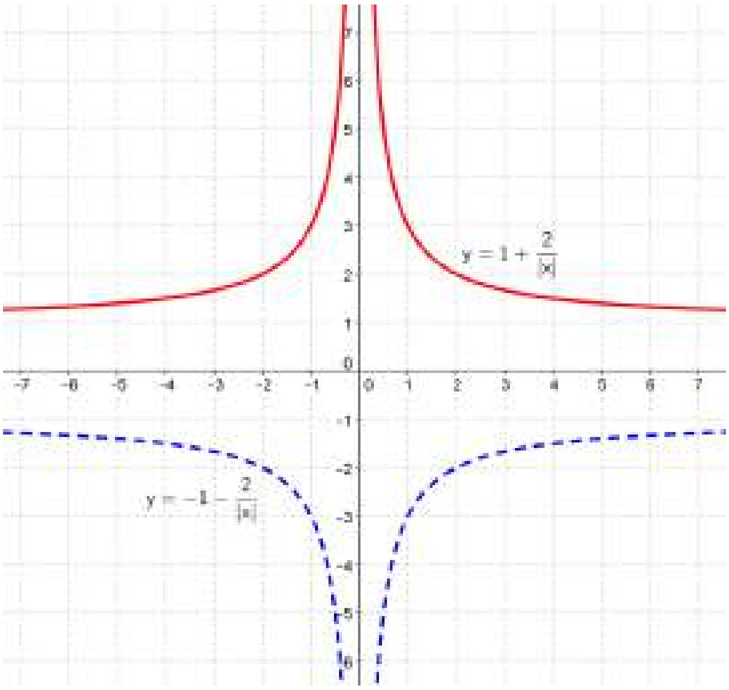
g)


$y = 1 + \frac{2}{x}$
$y = -1 - \frac{2}{x}$

h)


$y = \left|1 + \frac{2}{x}\right|$
$y = -\left|1 + \frac{2}{x}\right|$

i)



ACTIVIDADES-PÁG. 182

16. a) El tamaño inicial de la población es 40 000 animales.

b) En el año 3 había unos 170 000 animales, aproximadamente, y en el año 6 había unos 184000 animales, es decir ha ido aumentando a razón de unos 4670 animales por año.

c) Si se estabilizaría en 200 000 animales.

17. Las respuestas son:

a) La gráfica de la función $y = x^4 - 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = x^4$ según el vector $\vec{v}\,(0,-2)$.

b) La gráfica de la función $y = \sqrt{x-9}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ según el vector $\vec{v}\,(9,0)$.

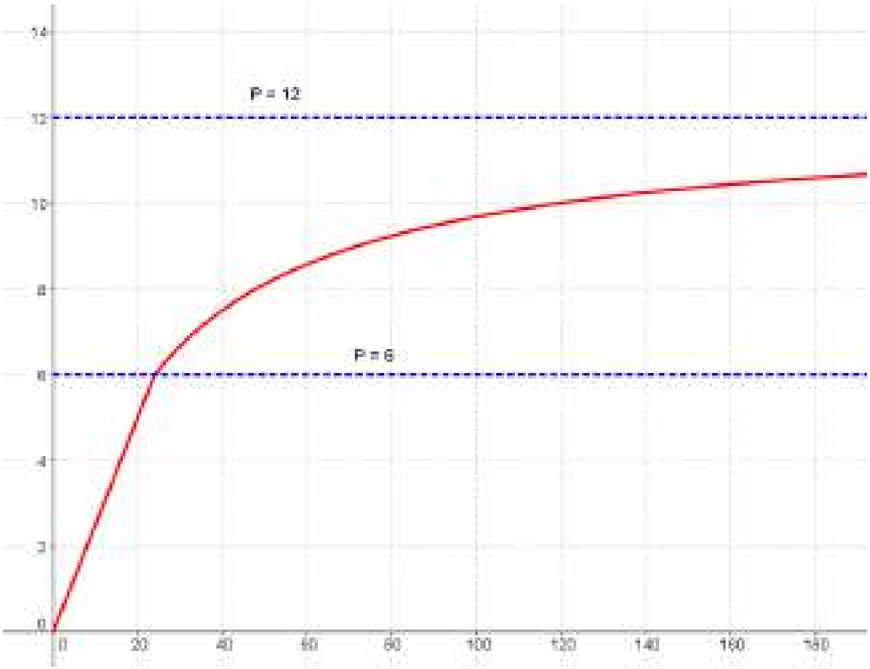
c) La gráfica de la función $y = -x^2 + 8x - 12 = 4 - (x-4)^2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $f(x) = x^2$ según el vector $\vec{v}\,(4,-4)$ y a esta función aplicarle una simetría de eje OX.

d) La gráfica de la función $y = (x-2)^3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = x^3$ según el vector $\vec{v}\,(2,0)$.

e) La gráfica de la función $y = \dfrac{1}{(x+1)^4}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x^4}$ según el vector $\vec{v}\,(-1,0)$.

e) La gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x+2} - 3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{x}$ según el vector $\vec{v}\,(-2,-3)$.

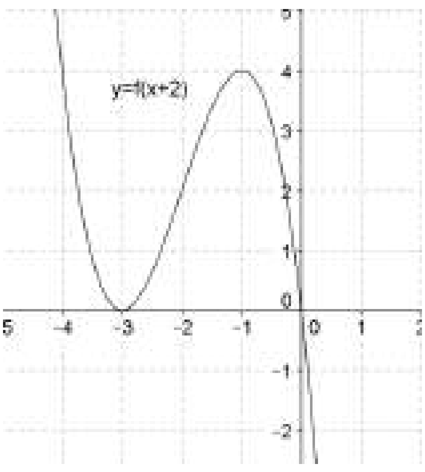
18. La gráfica de la función aparece en el dibujo:

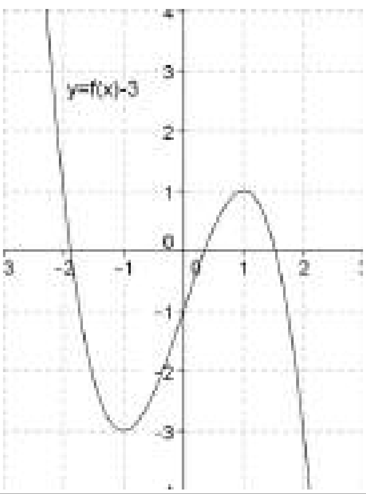


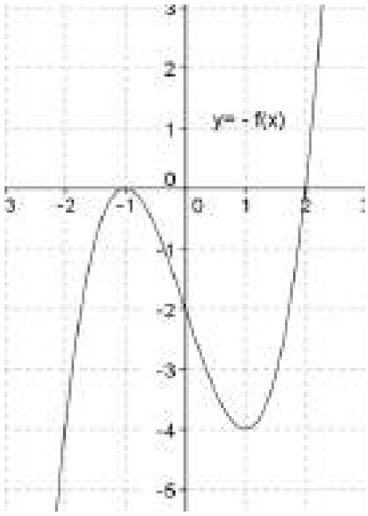
No aprobará el examen si dedica menos de 24 horas.

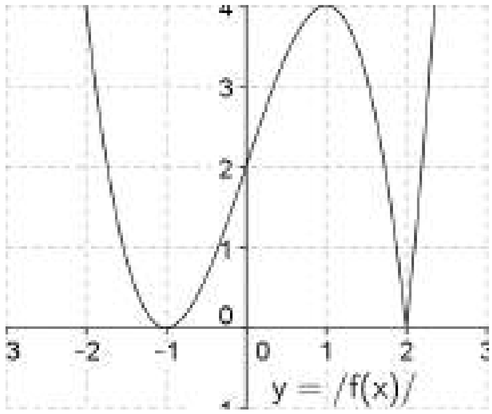
La nota máxima que puede alcanzar en este examen es de 12 puntos.

19. Las gráficas quedan:



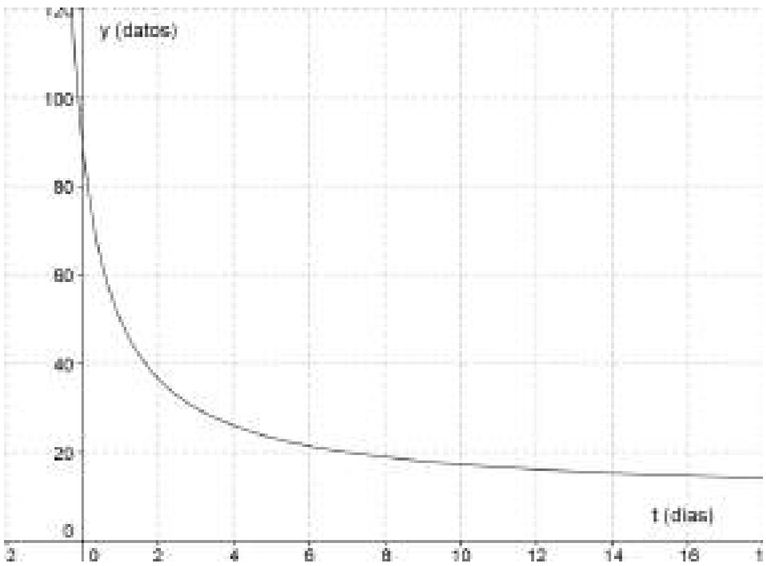






20. a) La tabla y la gráfica quedan:

t	y
0	90
1	50
3	30
4	26
9	18
10	17,27
100	10,8
1000	10,07



Esta función presenta asíntota vertical en la recta t = - 1 y asíntota horizontal y = 10. La parte negativa no tiene sentido en el contexto del problema.

b) Al cabo de 10 días recuerda $\frac{10 \cdot 10 + 90}{10 + 1} = 17{,}27 \ datos.$

Al cabo de 18 días recuerda $\frac{10 \cdot 18 + 90}{18 + 1} = 14{,}21 \ datos.$

c) El mayor número de datos que retiene es de 90 y el menor es 10 datos.

ACTIVIDADES-PÁG. 183

a) Las funciones $y = \frac{2}{x^n}$ con n par son: $y = \frac{2}{x^2}$, $y = \frac{2}{x^4}$, $y = \frac{2}{x^6}$ …

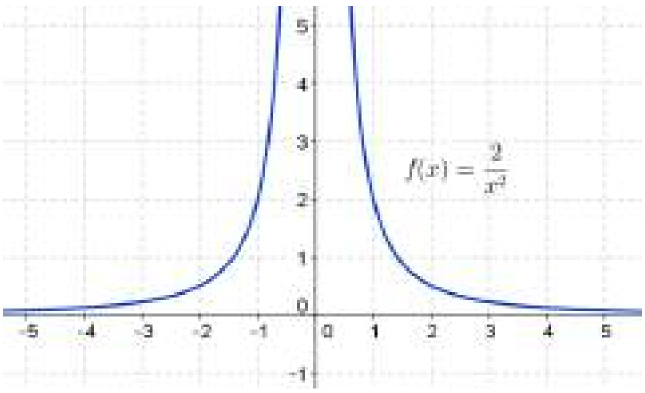
Sus principales características son:

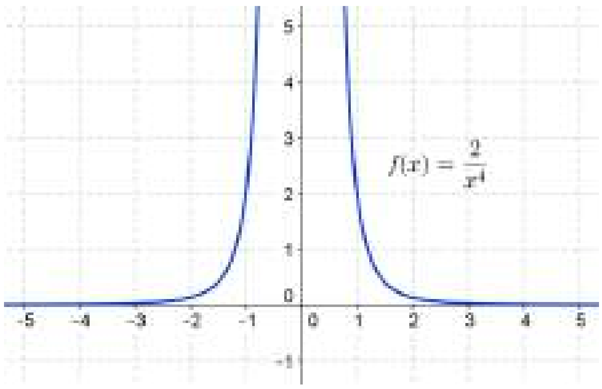
- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: $(0, +\infty)$
- Simetría respecto eje OY, ya que $f(-x) = \frac{2}{(-x)^n} = \frac{2}{x^n} = f(x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

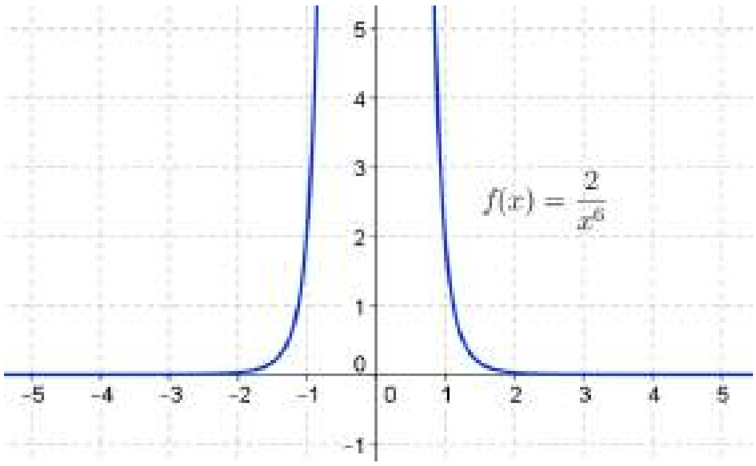
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

- Creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$. La primera derivada es $y' = \frac{-2n}{x^{n+1}}$
- Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en R – {0}. La segunda derivada es $y'' = \frac{2n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:







Las funciones $y = \frac{2}{x^n}$ con n impar son: $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{2}{x^3}$, $y = \frac{2}{x^5}$ …

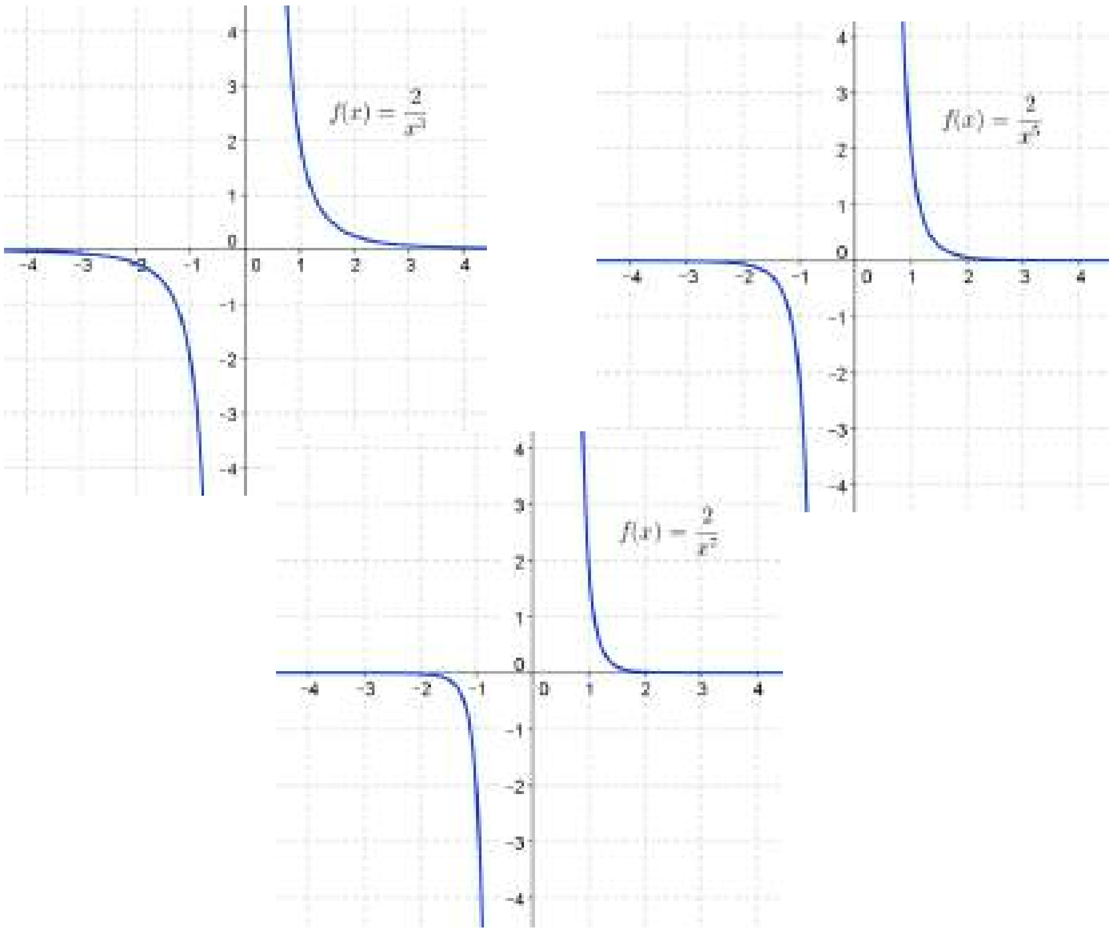
Sus principales características son:

- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: R – {0}
- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f\ (-\ x) = \frac{2}{(-\ x)^n} = -\ \frac{2}{x^n} = -\ f\ (x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{x^n} = -\ \infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x^n} = +\ \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^n} = 0$$

- Decreciente en R – {0}. La primera derivada es $y´ = \frac{-\ 2n}{x^{n+1}}$
- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(-\ \infty,\ 0)$ Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(0,\ +\ \infty)$. La segunda derivada es $y´´ = \frac{2n(n\ +\ 1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:



b) Estudiamos las principales características de las funciones $y = \dfrac{k}{x^n}$, siendo k un valor cualquiera.

b$_1$) En el caso k = 0, la función $y = \dfrac{0}{x^n} = 0$ es una función constante y no comparte las características de la familia de funciones.

b$_2$) En el caso k > 0 las características de las funciones coinciden con las descritas en el apartado anterior.

b$_3$) En el caso k < 0, por ejemplo k = - 3, tenemos dos opciones distintas:

(I) Las funciones $y = \dfrac{-3}{x^n}$ con n par son: $y = \dfrac{-3}{x^2}$, $y = \dfrac{-3}{x^4}$, $y = \dfrac{-3}{x^6}$ …

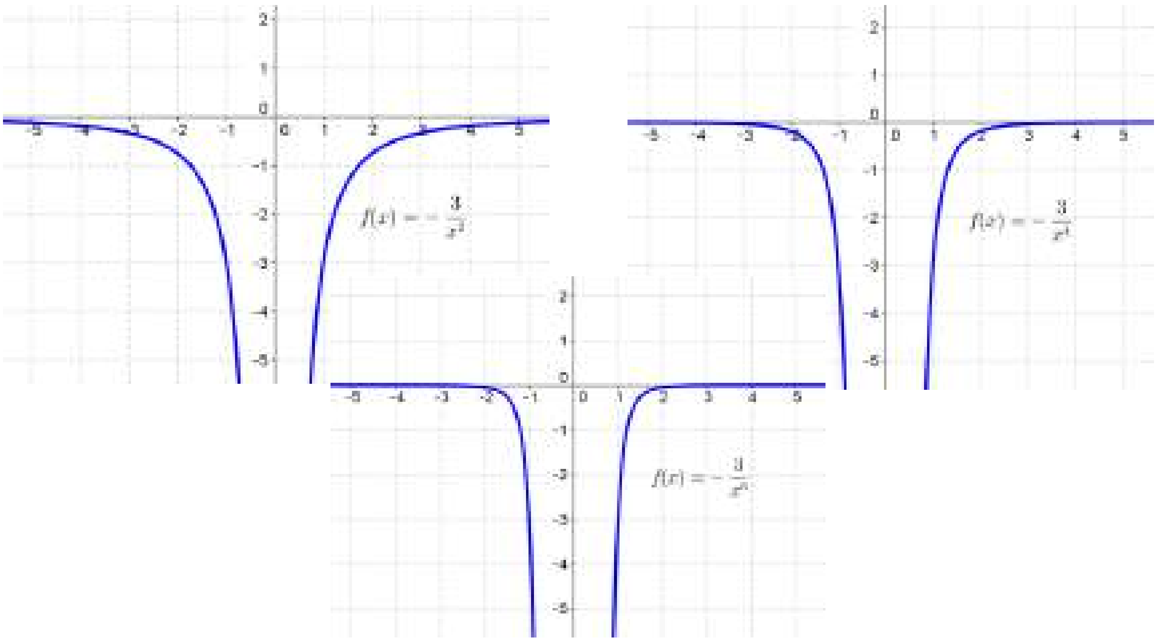
Sus principales características son:

- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: $(-\infty, 0)$
- Simetría respecto eje OY, ya que $f(-x) = \dfrac{-3}{(-x)^n} = \dfrac{-3}{x^n} = f(x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-3}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{-3}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{x^n} = 0$$

- Decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. La primera derivada es $y' = \dfrac{3n}{x^{n+1}}$
- Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en R – {0}. La segunda derivada es $y'' = -\dfrac{3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:



(II) Las funciones $y = \dfrac{-3}{x^n}$ con n impar son: $y = \dfrac{-3}{x}$, $y = \dfrac{-3}{x^3}$, $y = \dfrac{-3}{x^5}\ldots$

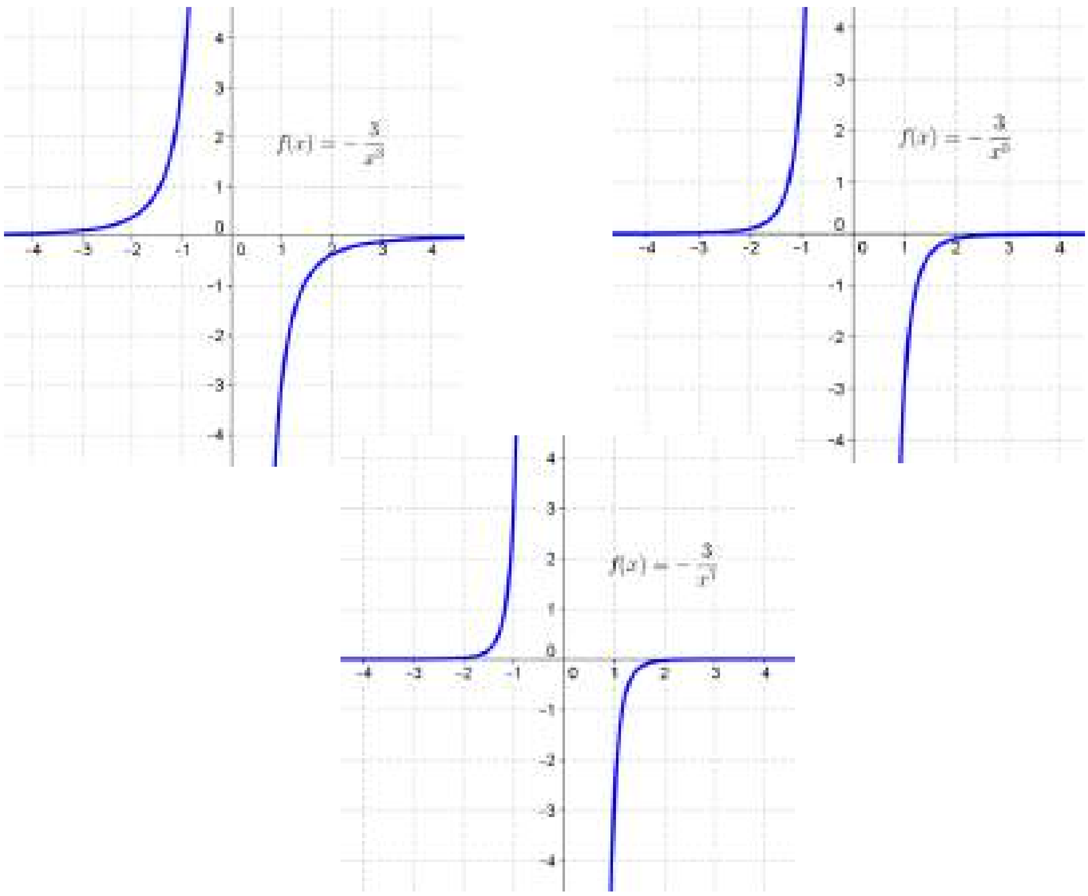
Sus principales características son:

- Dominio: R – {0}.
- Recorrido: R – {0}
- Simetría respecto del origen de coordenadas, ya que $f\ (-x) = \dfrac{-3}{(-x)^n} = \dfrac{3}{x^n} = -f\ (x)$
- Asíntotas: x = 0 e y = 0, al cumplirse:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-3}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{-3}{x^n} = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{-3}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{-3}{x^n} = 0$$

- Creciente en R – {0}. La primera derivada es $y' = \dfrac{3n}{x^{n+1}}$
- Convexa (cóncava hacia las Y positivas) en $(-\infty, 0)$. Cóncava (cóncava hacia las Y negativas) en $(0, +\infty)$. La segunda derivada es $y'' = \dfrac{-3n(n+1)}{x^{n+2}}$

Algunas de las gráficas son:



c) Las respuestas a los aparatados aparecen a continuación:

c1) La derivada de la función $y = \dfrac{k}{x^n}$ es $y\,' = -\dfrac{kn}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a,\ \dfrac{k}{a^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{a^n} = -\frac{kn}{a^{n+1}}\,(x-a) \qquad \Rightarrow \qquad knx + a^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A:\begin{cases} knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \left(\frac{n+1}{n}a,\ 0\right)$$

$$B:\begin{cases} x = 0 \\ knx + a^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k(n+1)}{a^n} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B = \left(0,\ \frac{k(n+1)}{a^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

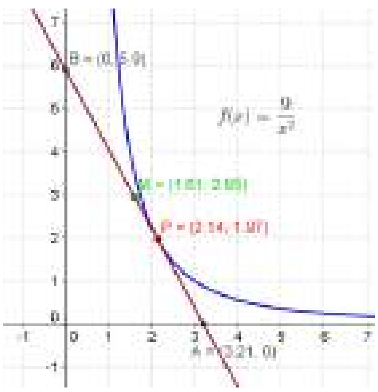
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\dfrac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \qquad\qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \dfrac{k(n+1)}{a^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2a^n}$$

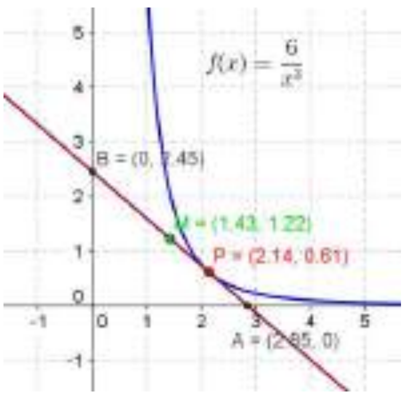
Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

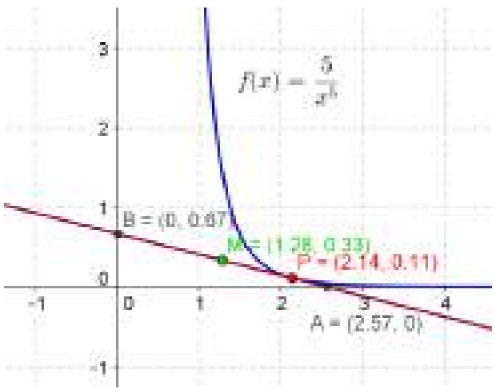
$$x_M = x_P \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{2n}a = a \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{2n} = 1 \;\Rightarrow\; n+1 = 2n \;\Rightarrow\; n = 1$$

$$y_M = y_P \;\Rightarrow\; \frac{k(n+1)}{2a^n} = \frac{k}{a^n} \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{2} = 1 \;\Rightarrow\; n+1 = 2 \;\Rightarrow\; n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M (en color verde), del segmento de extremos A y B no es el punto P (en color rojo). Esto puede observarse en los dibujos que siguen.







c_2) El área del triángulo OAB es:

$$Área = \frac{OA \cdot OB}{2} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} a \right) \cdot \frac{k\ (n+1)}{a^n} \quad \Rightarrow \quad Área = \frac{k\ (n+1)^2}{2na^{n-1}}$$

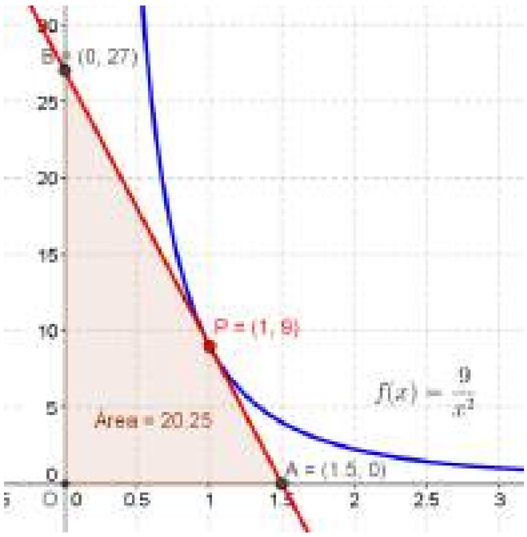
Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

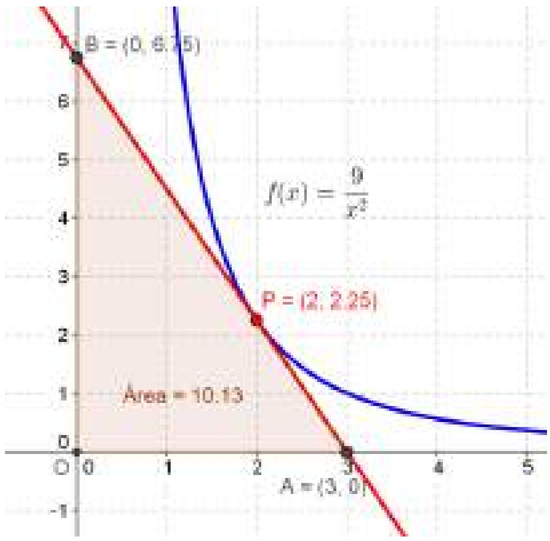
En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f\ (x) = \frac{9}{x^2}$ en los puntos de abscisas a = 1, a = 2 y a = 3.

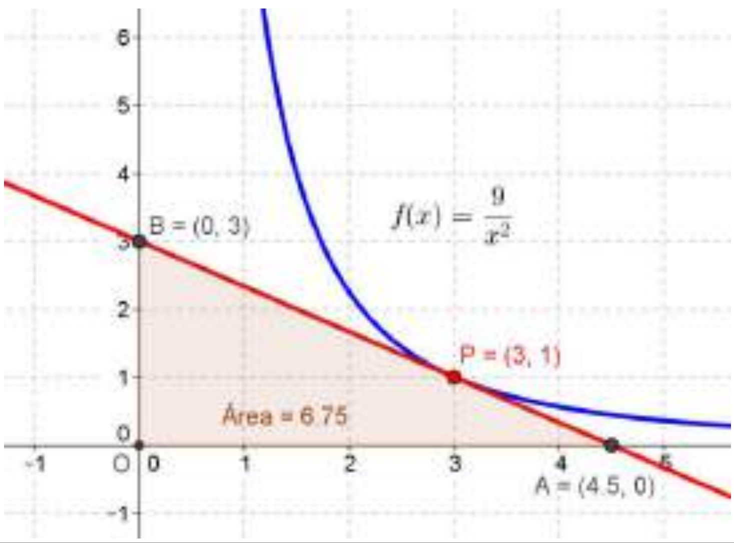
Si k = 9, n = 2 y a = 1, obtenemos: $Área = \frac{9\ (2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 1^{2-1}} = \frac{81}{4} = 20{,}25\ u^2$.

Si k = 9, n = 2 y a = 2, obtenemos: $Área = \frac{9\ (2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2^{2-1}} = \frac{81}{8} = 10{,}125\ u^2$.

Si k = 9, n = 2 y a = 3, obtenemos: $Área = \frac{9\ (2+1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 3^{2-1}} = \frac{81}{12} = 6{,}75\ u^2$.







d) Las respuestas a los apartados aparecen a continuación:

d₁) La derivada de la función $y = \dfrac{k}{nx^n}$ es $y\,' = -\dfrac{k}{x^{n+1}}$. Sea $P\left(a,\ \dfrac{k}{na^n}\right)$ un punto de la función.

La ecuación de la recta tangente a la curva en P es:

$$y - \frac{k}{na^n} = -\frac{k}{a^{n+1}}\,(x - a) \quad \Rightarrow \quad knx + na^{n+1}y = k(n+1)a$$

Los puntos de corte A (con OX) y B (con OY) con los ejes coordenados son:

$$A:\begin{cases} knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{n+1}{n}a \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \left(\frac{n+1}{n}a,\ 0\right)$$

$$B:\begin{cases} x = 0 \\ knx + na^{n+1}y = k(n+1)a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k(n+1)}{na^n} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B = \left(0,\ \frac{k(n+1)}{na^n}\right)$$

Sea M el punto medio del segmento de extremos A y B; sus coordenadas son:

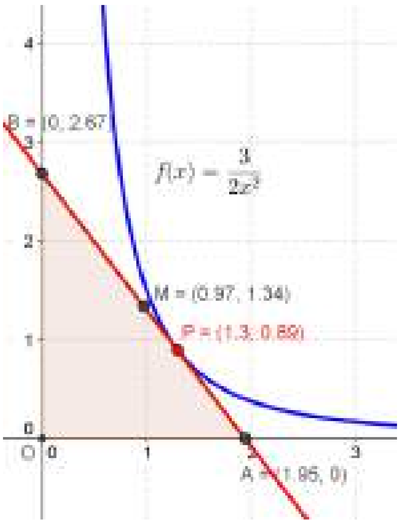
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\dfrac{n+1}{n}a + 0}{2} = \frac{n+1}{2n}a \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + \dfrac{k(n+1)}{na^n}}{2} = \frac{k(n+1)}{2na^n}$$

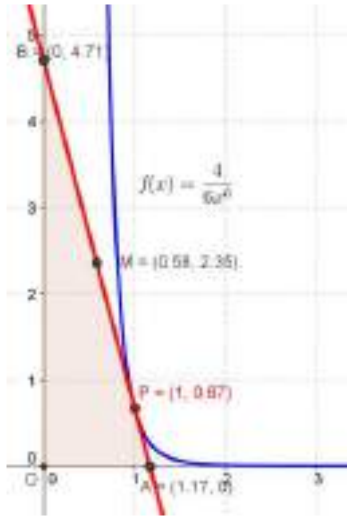
Para que el punto M coincida con el punto P debe cumplirse:

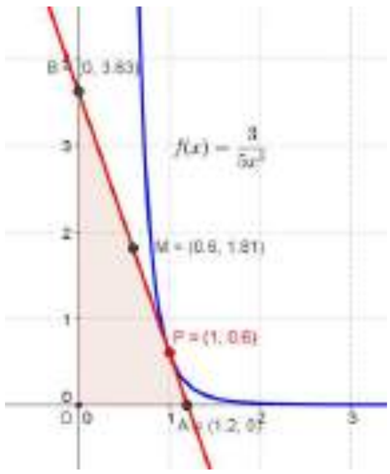
$$x_M = x_P \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{2n}a = a \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{2n} = 1 \;\Rightarrow\; n+1 = 2n \;\Rightarrow\; n = 1$$

$$y_M = y_P \;\Rightarrow\; \frac{k(n+1)}{2na^n} = \frac{k}{na^n} \;\Rightarrow\; \frac{n+1}{2} = 1 \;\Rightarrow\; n+1 = 2 \;\Rightarrow\; n = 1$$

Como n debe ser mayor o igual que 2, el punto medio, M, del segmento de extremos A y B nunca coincide con el punto P. Esto puede observarse en los dibujos que siguen.







d_2) El área del triángulo OAB es:

$$\acute{A}rea = \frac{OA \cdot OB}{2} \quad \Rightarrow \quad \acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n} a \right) \cdot \frac{k\,(n+1)}{na^n} \quad \Rightarrow \quad \acute{A}rea = \frac{k\,(n+1)^2}{2n^2 a^{n-1}}$$

Observamos que el área del triángulo depende de los parámetros k y n que definen la función y de la variable a que nos da la posición del punto P sobre la gráfica de la función.

En las imágenes pueden verse las áreas de los triángulos OAB para la función $f\ (x) = \dfrac{5}{2x^2}$ en los puntos de abscisas a = 1, a = 2 y a = 3.

Si k = 5, n = 2 y a = 1, obtenemos: $\acute{A}rea = \dfrac{5\,(2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 1^{2-1}} = \dfrac{45}{8} = 5{,}625\ u^2$.

Si k = 5, n = 2 y a = 2, obtenemos: $\acute{A}rea = \dfrac{5\,(2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 2^{2-1}} = \dfrac{45}{16} = 2{,}81\ u^2$.

Si k = 5, n = 2 y a = 3, obtenemos: $\acute{A}rea = \dfrac{5\,(2+1)^2}{2 \cdot 2^2 \cdot 3^{2-1}} = \dfrac{45}{24} = 1{,}875\ u^2$.