Para consultar los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje evaluables, véase la Programación.

8 GEOMETRÍA ANALÍTICA

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.9. (EA 1.9.1.) CE 1.14. (EA 1.14.3.)

Página 195

Resuelve

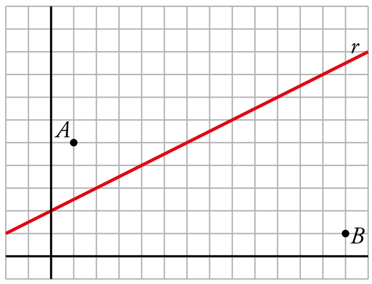
El embarcadero

Tenemos dos pueblos, A y B, cada uno a un lado de un canal. Se desea construir un embarcadero situado exactamente a la misma distancia de los dos pueblos. ¿Dónde habrá que hacerlo?

Para decidirlo, colocamos unos ejes coordenados y razonamos del siguiente modo:

Los puntos de la mediatriz del segmento AB están a la misma distancia de los extremos de este. Por tanto, el punto buscado, P, es la intersección de la recta r (el canal) con la recta s (perpendicular a AB en su punto medio).

Halla las coordenadas de P.



Coordenadas de $A = (1, 5)$

Coordenadas de $B = (13, 1)$

Hallamos las coordenadas de M, punto medio entre A y B.

$$M = \left(\frac{1+13}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (7, 3)$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{AB} = (13, 1) - (1, 5) = (12, -4)$

La recta s pasa por M y tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 12)$.

La ecuación de s es: $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12}$

La ecuación de r es $y = \dfrac{1}{2}x + 2$.

P es la solución del sistema: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + 2 \\[2mm] \dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-3}{12} \end{cases} \rightarrow x = 8, \ y = 6$

Solución: $P = (8, 6)$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

1 ▶ PUNTOS Y VECTORES EN EL PLANO

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 197

Hazlo tú

1 Averigua m para que $P(1, 4)$, $Q(5, -2)$ y $R(m, 0)$ estén alineados.

$\overrightarrow{PQ} = (4, -6)$

$\overrightarrow{QR} = (m, 0) - (5, -2) = (m - 5, 2)$

$$\frac{4}{m-5} = \frac{-6}{2} \to m - 5 = \frac{-3}{4} \to m = \frac{17}{4} = 4,25$$

Piensa y practica

1 Halla las coordenadas de $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{NM}$, siendo $M(7, -5)$ y $N(-2, -11)$.

$\overrightarrow{MN} = (-2, -11) - (7, -5) = (-9, -6)$

$\overrightarrow{NM} = (7, -5) - (-2, -11) = (9, 6)$

2 Averigua si están alineados los puntos $P(7, 11)$, $Q(4, -3)$ y $R(10, 25)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (-3, -14) \\ \overrightarrow{QR} = (6, 28) \end{array}\right\} \to \frac{-3}{6} = \frac{-14}{28} \to A,\ B \text{ y } C \text{ están alineados.}$$

3 Halla las coordenadas del punto A sabiendo que $B(-2, 1)$ y $\overrightarrow{AB} = (-5, 6)$.

Buscamos $A(x, y)$, lo encontraremos a partir del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - x, 1 - y) = (-5, 6) \to \begin{cases} -2 - x = -5 \to x = 3 \\ 1 - y = 6 \to y = -5 \end{cases} \to A(3, -5)$$

4 Determina los valores de los parámetros a y b donde $\overrightarrow{AB} = (-3, -2)$, $A(a, 2)$ y $B(-2, b)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - a, b - 2) = (-3, -2) \to \begin{cases} -2 - a = -3 \to a = 1 \\ b - 2 = -2 \to b = 0 \end{cases} \to A(1, 2) \text{ y } B(-2, 0)$$

Página 198

5 Lápices al centro. **[Los alumnos pueden exponer en grupo sus estrategias de resolución para encontrar los puntos que propone el ejercicio tal y como se indica en esta técnica].**

Dados los puntos $P(3, 9)$ y $Q(8, -1)$:

a) Halla el punto medio de PQ.

b) Halla el simétrico de P respecto de Q.

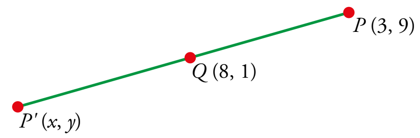
c) Halla el simétrico de Q respecto de P.

d) Obtén un punto A de PQ tal que $\overrightarrow{PA} = 2/3\ \overrightarrow{AQ}$.

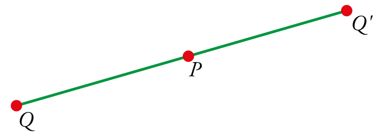
e) Obtén un punto B de PQ tal que $\overrightarrow{PB} / \overrightarrow{PQ} = 1/5$.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

a) $M\left(\frac{3+8}{2}, \frac{9+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 4\right)$



b) $\left.\begin{array}{l}\frac{3+x}{2} = 8 \rightarrow x = 13 \\ \frac{9+y}{2} = -1 \rightarrow y = -11\end{array}\right\} P'(13, -11)$



c) Llamamos $Q'(x', y')$ al simétrico de Q respecto de P.

Así:

$\left.\begin{array}{l}\frac{x'+8}{2} = 3 \rightarrow x' = -2 \\ \frac{y'+(-1)}{2} = 9 \rightarrow y' = 19\end{array}\right\} Q'(-2, 19)$

d) Llamamos $A(x, y)$ al punto que buscamos. Debe cumplirse que:

$\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{2}{3}(8-x, -1-y)$

$\left.\begin{array}{l}x-3 = \frac{2}{3}(8-x) \rightarrow x = 5 \\ y-9 = \frac{2}{3}(-1-y) \rightarrow y = 5\end{array}\right\} A(5, 5)$

e) Llamamos $B(x, y)$ al punto que buscamos.

$\overrightarrow{PB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{PQ} \rightarrow (x-3, y-9) = \frac{1}{5}(5, -10) = (1, -2)$

$\left.\begin{array}{l}x-3 = 1 \rightarrow x = 4 \\ y-9 = -2 \rightarrow y = 7\end{array}\right\} B(4, 7)$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

2 ▸ ECUACIONES DE UNA RECTA

C.E.: CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 200

Hazlo tú

1 Obtén las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $P(7, -4)$ y $Q(3, 2)$.

Vector de posición de P: $\vec{p} = (7, -4)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (3, 2) - (7, -4) = (-4, 6)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 7 - 4\lambda \\ y = -4 + 6\lambda \end{cases}$$

Ecuación en forma continua:

$$\frac{x-7}{-4} = \frac{y+4}{6}$$

Hazlo tú

2 Obtén las ecuaciones paramétricas de la recta $\frac{x-5}{0} = \frac{y}{-7}$.

Vector de posición de P: $\vec{p} = (5, 0)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (0, -7)$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -7\lambda \end{cases}$$

Página 202

Hazlo tú

1 Obtén todas las formas posibles de la ecuación de la recta que pasa por $A(-2, 5)$ y $B(3, -5)$.

Vector de posición de A: $\overrightarrow{OA} = (-2, 5)$

Vector de dirección de la recta: $\vec{d} = (3, -5) - (-2, 5) = (5, -10) = 5(1, -2)$

Vamos a tomar como vector de dirección de la recta un vector proporcional al anterior: $\vec{d'} = (1, -2)$.

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 5 - 2\lambda \end{cases}$$

Ecuación en forma continua:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{-2}$$

Ecuación implícita:

$$-2(x+2) = y - 5 \rightarrow -2x - 4 = y - 5 \rightarrow -2x - y + 1 = 0$$

Ecuación explícita:

$$y = -2x + 1$$

Ecuación punto-pendiente:

$$m = \frac{-2}{1}$$

$$y = -2(x + 2) + 5$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Hazlo tú

2 **Obtén la ecuación implícita de** $r: \begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases}$.

$$\frac{x}{5} = \frac{y-4}{-1} \to -x = 5y - 20 \to -x - 5y + 20 = 0$$

Página 203

Hazlo tú

3 **Da las ecuaciones paramétricas de la recta** $y = -2x + 7$.

Encontramos un punto A de la recta dando a x el valor 0: $x = 0 \to A = (0, 7)$

$$m = -2 \to \vec{d} = (1, -2)$$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \end{cases}$

Hazlo tú

4 **Halla las ecuaciones paramétricas e implícita de la recta** $\dfrac{x-5}{0} = \dfrac{y+1}{2}$.

Punto de la recta: $A = (5, -1)$

$\vec{d} = (0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación implícita: $x = 5$

Piensa y practica

1 **Halla las ecuaciones paramétricas, continua, implícita, explícita y punto-pendiente de la recta que pasa por** A **y** B**, en cada caso:**

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3)$ **b)** $A(0, 4)$, $B(6, 0)$

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5)$ **d)** $A(3, 5)$, $B(3, 2)$

a) $A(-1, -1)$, $B(3, 3) \to \overrightarrow{AB} = (4, 4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{4}$

Implícita: $x - y = 0$ Explícita: $y = x$

b) $A(0, 4)$, $B(6, 0) \to \overrightarrow{AB} = (6, -4)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y-4}{-4}$

Implícita: $-4x - 6y + 24 = 0$ Explícita: $y = \dfrac{-4}{6}x + 4$

c) $A(3, 5)$, $B(-1, 5) \to \overrightarrow{AB} = (-4, 0)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 - 4\lambda \\ y = 5 \end{cases}$ Continua: $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-5}{0}$

Implícita: $y - 5 = 0$ Explícita: $y = 5$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

d) $A(3, 5)$, $B(3, 2) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (0, -3)$

Paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 - 3\lambda \end{cases}$

Continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-5}{-3}$

Implícita: $x - 3 = 0$

Explícita: No existe, pues se trata de una recta vertical de ecuación $x = 3$.

2 **Obtén las ecuaciones implícita, paramétricas y continua de la recta $y = 2x + 3$.**

$y = 2x + 3$

- Buscamos dos puntos de la recta y su vector dirección:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + 3 = 3 \rightarrow A(0, 3) \\ \text{Si } x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \rightarrow B(1, 5) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$$

- Implícita: $2x - y + 3 = 0$
- Paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

- Continua:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-3}{2}$$

3 1-2-4. **[Los alumnos y las alumnas pueden primero buscar las soluciones de forma individual para luego ponerlas en común tal y como se indica en esta estrategia].**

a) Encuentra dos puntos, P y Q, pertenecientes a la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$.

b) Comprueba que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a $(2, -3)$.

c) Escribe las ecuaciones paramétricas de r.

d) Escribe su ecuación explícita y comprueba que el vector $(1, m)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ (m es la pendiente de r).

a) $r: 2x - 3y + 6 = 0$

Si $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 - 3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow P(0, 2)$

Si $x = -3 \rightarrow 2 \cdot (-3) - 3y + 6 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow Q(-3, 0)$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} \perp (2, -3) \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot (2, -3) = 0$

$(-3, -2) \cdot (2, -3) = (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -6 + 6 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$

d) Despejamos y en la ecuación de r:

$2x - 3y + 6 = 0 \rightarrow 2x + 6 = 3y \rightarrow \dfrac{2}{3}x + 2 = y$

Explícita: $y = \dfrac{2}{3}x + 2$

$m = \dfrac{2}{3} \rightarrow (1, m) = \left(1, \dfrac{2}{3}\right)$

El vector $\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ si sus coordenadas son proporcionales:

$(-3, -2) = \lambda\left(1, \dfrac{2}{3}\right) \rightarrow \lambda = -3$

Los vectores son proporcionales y, por tanto, paralelos.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

3 ▶ HAZ DE RECTAS

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 204

1 **Halla la recta del haz de centro $P(-3, 5)$ que pasa por el punto Q (8, 4).**

Hemos de hallar la recta que pasa por $P(-3, 5)$ y $Q(8, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (11, -1)$

$r: \dfrac{x+3}{11} = \dfrac{y-5}{-1}$

2 **Los haces de rectas cuyos centros son $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$ tienen una recta en común. ¿Cuál es?**

Es la recta que pasa por $P(4, 0)$ y $Q(-6, 4)$.

$\overrightarrow{PQ} = (-10, 4)$

$r: \dfrac{x-4}{-10} = \dfrac{y-0}{4}$

3 **[El trabajo con el haz de rectas propuesto por el enunciado puede servir para poner en práctica la iniciativa (dimensión productiva) de esta clave].**

Las siguientes rectas:

$$r: 3x - 5y - 7 = 0 \qquad s: x + y + 4 = 0$$

forman parte de un mismo haz. ¿Cuál de las rectas de ese haz tiene pendiente 4?

- El centro del haz es el punto de corte de r y s. Lo hallamos:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y - 7 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x = -y - 4$$

$$3(-y-4) - 5y - 7 = 0 \rightarrow -8y - 19 = 0 \rightarrow y = -\frac{19}{8}$$

$$x = -y - 4 = \frac{19}{8} - 4 = -\frac{13}{8}$$

El centro del haz es el punto $P\left(-\dfrac{13}{8}, -\dfrac{19}{8}\right)$.

- Ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente igual a 4:

$$y = \frac{19}{8} + 4\left(x + \frac{13}{8}\right) \rightarrow 32x - 8y + 7 = 0$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

4 ▶ REFLEXIONES SOBRE ECUACIONES CON Y SIN «PARÁMETROS»

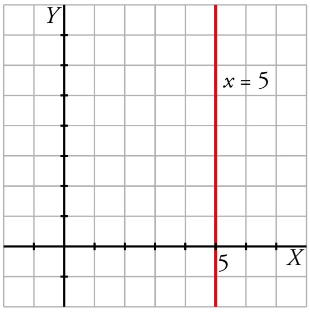
C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 205

1 **Representa.**

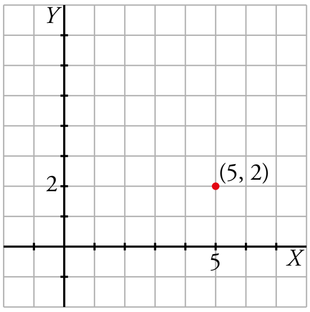
a) $x = 5$ **b)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = \lambda \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ **d)** $y = 2$ **e)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x = t \\ y = s \end{cases}$

a)

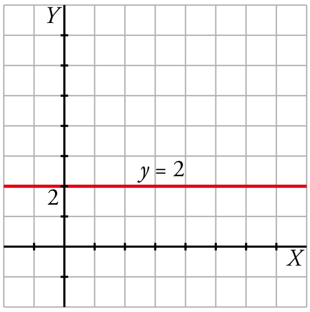


b) Es la misma que la del apartado a).

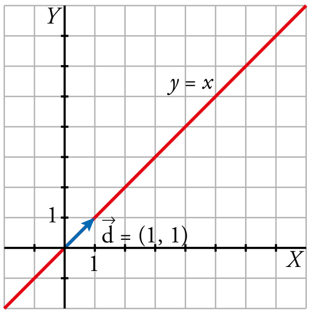
c) Es un punto, el punto (5, 2).



d)



e) Pasa por $O = (0, 0)$. Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$.



f) Tenemos cualquier punto del plano, pues no hay ninguna restricción.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

5 PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

C.E.: CE 1.1. (EA 1.1.1.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 206

1 ¿Verdadero o falso? Cada una de las siguientes rectas es paralela a $\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{2}$:

a) $2x + 5y - 4 = 0$ **b)** $5x + 2y = 0$ **c)** $2x - 5y + 1 = 0$

d) $y = \frac{5}{2}x + 4$ **e)** $y = \frac{-5}{2}x + 1$ **f)** $y = \frac{2}{5}x - 3$

El vector de dirección de la recta $\frac{x-2}{5} = \frac{y-2}{2}$ es $\vec{d} = (5, 2)$.

a) Vector de dirección: $(-5, 2) \not\parallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

b) Vector de dirección: $(-2, 5) \not\parallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

c) Vector de dirección: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Verdadero.

d) $m = \frac{5}{2} \to$ Vector de dirección: $(2, 5) \not\parallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

e) $m = -\frac{5}{2} \to$ Vector de dirección: $(2, -5) \not\parallel (5, 2) \Rightarrow$ Falso.

f) $m = \frac{2}{5} \to$ Vector de dirección: $(5, 2) \parallel (5, 2) \Rightarrow$ Verdadero.

2 ¿Verdadero o falso? Cada una de las siguientes rectas es perpendicular a $x - 2y + 4 = 0$:

a) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) $y = 2x + 1$ **e)** $y = -2x + 3$ **f)** $y = \frac{x}{2}$

El vector perpendicular a la recta $x - 2y + 4 = 0$ es $(1, -2)$.

a) Vector de dirección: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Verdadero.

b) Vector de dirección: $(-2, 1) \not\parallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

c) Vector de dirección: $(1, 2) \not\parallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

d) $m = 2 \to$ Vector de dirección: $(1, 2) \not\parallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso

e) $m = -2 \to$ Vector de dirección: $(1, -2) \parallel (1, -2) \Rightarrow$ Verdadero.

f) $m = \frac{1}{2} \to$ Vector de dirección: $(2, 1) \not\parallel (1, -2) \Rightarrow$ Falso.

Página 207

Hazlo tú

1 Halla una paralela y una perpendicular a r: $\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2}$ que pasen por $(7, -5)$.

El vector de dirección de la recta $\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2}$ es $\vec{d} = (3, -2)$. Vector normal: $\vec{n} = (2, 3)$.

Recta paralela:

$$r_1: \begin{cases} x = \ \ 7 + 3\lambda \\ y = -5 - 2\lambda \end{cases}$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Recta perpendicular:

$$r_2: \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \end{cases}$$

Hazlo tú

2 **Halla la recta $r_1 \parallel r: 5x - y + 4 = 0$ que pase por (3, –5); y la recta $r_2 \perp r$ que pase por (0, 0).**

El vector de dirección de la recta $r: 5x - y + 4 = 0$ es $\vec{d} = (-1, -5) = -(1, 5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, -1)$.

Recta paralela:

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -5 + 5\lambda \end{cases}$$

Recta perpendicular:

$$r_2: \begin{cases} x = 3 + 5\lambda \\ y = -5 - \lambda \end{cases}$$

Hazlo tú

3 **Dada la recta $r: \dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$, halla:**

a) Las ecuaciones paramétricas de $r_1 \perp r$ que pase por (–2, 0);

b) La ecuación implícita de $r_2 \parallel r$ que pase por (0, –3);

c) La ecuación explícita de $r_3 \parallel r$ que pase por (–3, 5).

El vector de dirección de la recta $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y}{-5}$ es $\vec{d} = (2, -5)$. Vector normal: $\vec{n} = (5, 2)$.

a) Recta perpendicular:

$$r_1: \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$$

b) Recta paralela:

$$r_2: \frac{x}{2} = \frac{y+3}{-5} \to -5x = 2y + 6 \to -5x - 2y - 6 = 0$$

c) Recta paralela:

$$r_3: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-5} \to -5x - 15 = 2y - 10 \to -5x - 2y - 5 = 0 \to y = -\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$$

Piensa y practica

3 **Escribe las ecuaciones paramétricas de dos rectas que pasen por $P(4, -3)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a $r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases}$.**

$r: \begin{cases} x = 2 - 5\lambda \\ y = 4 + 2\lambda \end{cases} \to$ Vector dirección de r: $\vec{v}_r = (-5, 2)$

- Recta paralela a r que pasa por P:

  $P(4, -3)$; $\vec{v}_s = \vec{v}_r = (-5, 2)$

  $s: \begin{cases} x = 4 - 5\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases}$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

- Recta perpendicular a r que pasa por P:

$P(4, -3)$; $\vec{v}_l = (2, 5)$

$$l: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -3 + 5\lambda \end{cases}$$

4 **Dada la recta r: $y = -2x + 5$, halla:**

a) Las ecuaciones paramétricas de una recta r_1 paralela a r que pase por $(0, -2)$.

b) La ecuación explícita de una recta r_2 paralela a r y de otra r_3, perpendicular a r y que ambas pasen por $(0, 1)$.

c) La ecuación implícita de una recta r_4, perpendicular a r y que pase por $(-2, 5)$.

$r: y = -2x + 5$

Pendiente $m = -2 \rightarrow$ Vector de dirección de la recta es $\vec{d} = (1, -2)$. Vector normal: $\vec{n} = (2, 1)$.

a) $r_1: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

b) $r_2: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} \rightarrow -2x = y - 1 \rightarrow y = -2x + 1$

$r_3: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow x = 2y - 2 \rightarrow x - 2y + 2 = 0 \rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 1$

c) $r_4: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-5}{1} \rightarrow x + 2 = 2y - 10 \rightarrow x - 2y + 12 = 0$

5 **Dada s: $\begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$, halla:**

a) La ecuación continua de una recta r_1 perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.

b) La ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.

c) La ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

$s: \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 3\lambda \end{cases} \rightarrow P(5, 0) \in s$; $\vec{v}_s = (-1, 3)$

a) El vector dirección de r_1 es $\vec{v}_{r_1} = (3, 1)$. $P_1(5, -3) \in r_1$.

$r_1: \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y+3}{1}$

b) El vector dirección de r_2 es el mismo que el de s: $\vec{v}_{r_2} = (-1, 3)$. $P_2(0, 4) \in r_2$.

$r_2: \dfrac{x-0}{-1} = \dfrac{y-4}{3} \rightarrow 3x = -y + 4 \rightarrow 3x + y - 4 = 0$

c) El vector dirección de r_3 es el mismo que el de r_1: $\vec{v}_{r_3} = (3, 1)$. $P_3(-3, 0) \in r_3$.

$r_3: \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-0}{1} \rightarrow y = \dfrac{1}{3}x + 1$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

6 **Determina las ecuaciones implícitas de dos rectas que pasen por $P(-3, 4)$ y sean paralela y perpendicular, respectivamente, a $r: 5x - 2y + 3 = 0$.**

$r: 5x - 2y + 3 = 0 \rightarrow 5x + 3 = 2y \rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

La pendiente de r es $m_r = \frac{5}{2}$

- Recta s paralela a r que pasa por $P(-3, 4)$:

  $m_s = m_r = \frac{5}{2}$

  $s: y - 4 = \frac{5}{2}(x + 3) \rightarrow s: 5x - 2y + 23 = 0$

- Recta l perpendicular a r que pasa por $P(-3, 4)$:

  $m_l = -\frac{l}{m_r} = -\frac{2}{5}$

  $l: y - 4 = -\frac{2}{5}(x + 3) \rightarrow l: 2x + 5y - 14 = 0$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

6 ▶ POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 208

Hazlo tú

1 **Determina la posición relativa y el punto de corte, si existe, de las rectas**

$$r_1: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -5 - 5\lambda \end{cases} \text{ y } r_2: \begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 6 - \lambda \end{cases}.$$

Vector de dirección de r_1: $\vec{d} = (2, -5)$

Vector de dirección de r_2: $\vec{d}' = (1, -1)$

No son proporcionales, luego las rectas se cortan.

Punto de corte:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda = -4 + \mu \\ -5 - 5\lambda = 6 - \mu \end{cases} \to \mu = 1, \ \lambda = -2$$

Para esos valores de los parámetros: $x = -4 + 1 = -3$; $y = 6 - 1 = 5$

Punto de corte: $(-3, 5)$

Hazlo tú

2 **Halla la posición relativa de las rectas** $r_1: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases}$ **y** $r_2: \begin{cases} x = 8 + 4\lambda \\ y = 3 + 10\lambda \end{cases}$.

Vector de dirección de r_1: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de dirección de r_2: $\vec{d}' = (4, 10)$

Son proporcionales, $(4, 10) = 2(2, 5)$, luego las rectas son paralelas o coincidentes.

Punto de r_1: $(0, 1)$

Sustituimos en r_2:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4\lambda \\ 1 = 3 + 10\lambda \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4\lambda \to \lambda = -2 \\ 1 = 3 + 10\lambda \to \lambda = -\frac{1}{5} \end{cases} \to \text{No hay solución, las rectas son paralelas.}$$

Hazlo tú

3 **Determina la posición relativa de** $r_1: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + 5\lambda \end{cases}$ **y** $r_2: \begin{cases} x = 8 + 4\lambda \\ y = 21 + 10\lambda \end{cases}$.

Vector de dirección de r_1: $\vec{d} = (2, 5)$

Vector de dirección de r_2: $\vec{d}' = (4, 10)$

Son proporcionales, $(4, 10) = 2(2, 5)$, luego las rectas son paralelas o coincidentes.

Punto de r_1: $(0, 1)$

Sustituimos en r_2:

$$\begin{cases} 0 = 8 + 4\lambda \\ 1 = 21 + 10\lambda \end{cases} \to \begin{cases} 0 = 8 + 4\lambda \to \lambda = -2 \\ 1 = 21 + 10\lambda \to \lambda = -2 \end{cases}$$

Para $t = -2$ obtenemos el punto $(0, 1)$ que está en las dos rectas.

Las rectas r_1 y r_2 tienen la misma dirección y un punto en común, luego son coincidentes.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Página 209

1 Comprobamos. **[Los alumnos y las alumnas pueden compartir las comprobaciones de la posición relativas de las rectas con sus compañeros y compañeras tal y como explica esta estrategia].**

Averigua la posición relativa de estos pares de rectas:

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0$

$s: 6x + 10y + 4 = 0$

b) $r: 2x + y - 6 = 0$

$s: x - y = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$

d) $r: 3x - 5y = 0, \quad s: \begin{cases} x = 2 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases}$

a) $r: 3x + 5y - 8 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, 5)$

$s: 6x + 10y + 4 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (6, 10)$

$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} \neq \frac{-8}{4} \rightarrow$ Las dos rectas son paralelas.

b) $r: 2x + y - 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (2, 1)$

$s: x - y = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (1, -1)$

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} \rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

c) $r: \begin{cases} x = 7 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (5, -3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, -2)$

$\frac{5}{1} \neq \frac{-3}{-2} \rightarrow$ Las dos rectas se cortan.

d) $r: 3x - 5y = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, -5) \rightarrow \vec{v}_r = (5, 3)$

$s: \begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (5, 3), \ P_s = (2, 1)$

Como $\vec{v}_r = \vec{v}_s$ y $P_s \notin r$, las rectas son paralelas.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

7 ÁNGULO DE DOS RECTAS

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 210

1 Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{cases}$ $\quad r_2: \begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \end{cases}$

b) $r_1: x + 2y - 17 = 0$ $\quad r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

c) $r_1: y = 5x - 1$ $\quad r_2: y = 4x + 3$

d) $r_1: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{cases}$ $\quad r_2: 3x - 5y + 4 = 0$

a) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1); \ \vec{v}_{r_2} = (-4, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{|(-2,1) \bullet (-4,3)|}{|(-2,1)|\,|(-4,3)|} = \frac{11}{(\sqrt{5}) \cdot (5)} \approx 0{,}9838699101 \ \to \ \alpha = 10°\ 18'\ 17{,}45''$$

b) Vector normal de r_1: $\vec{n}_1 = (1, 2)$

Vector normal de r_2: $\vec{n}_2 = (3, -5)$

$$\cos\alpha = \frac{|(1,2) \bullet (3,-5)|}{|(1,2)|\,|(3,-5)|} = \frac{7}{(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \ \to \ \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

c) $m_{r_1} = 5; \ m_{r_2} = 4$

$$tg\,\alpha = \left|\frac{4-5}{1+5 \cdot 4}\right| = \frac{1}{21} \approx 0{,}0476190 \ \to \ \alpha = 2°\ 43'\ 34{,}72''$$

d) $\vec{v}_{r_1} = (-2, 1); \ \vec{v}_{r_2} = (5, 3)$

$$\cos\alpha = \frac{|(-2,1) \bullet (5,3)|}{|(-2,1)|\,|(5,3)|} = \frac{7}{(\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{34})} \approx 0{,}5368754922 \ \to \ \alpha = 57°\ 31'\ 43{,}71''$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

8 ▶ CÁLCULO DE DISTANCIAS

C.E.: CE 1.5. (EA 1.5.1.-EA 1.5.2.-EA 1.5.3.) CE 1.6. (EA 1.6.1.-EA 1.6.2.) CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 211

1 **$P(-6, -3)$, $Q(9, 5)$**

$r: 3x - 4y + 9 = 0$

$s: 5x + 15 = 0$

Calcula la distancia entre P y Q, las distancias de cada uno de los puntos a cada recta y la distancia entre r y s.

Veamos que la distancia entre r y s es cero ya que tienen punto de corte:

s: $x = -3$, sustituimos en r: $-9 - 4y + 9 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (-3, 0)$ es punto de corte de r y s.

2 **a) Halla el área del triángulo de vértices $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$, $C(5, 2)$ con la fórmula de Herón.**

b) Hállala, también, mediante la aplicación de la fórmula habitual $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$, siendo b la medida del lado AC. ¿Hay otra forma más sencilla?

a) $A(-3, 8)$, $B(-3, 2)$, $C(5, 2)$

Fórmula de Herón: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\left.\begin{array}{l} a = |\overrightarrow{BC}| = |(8, 0)| = 8 \\ b = |\overrightarrow{AC}| = |(8, -6)| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \\ c = |\overrightarrow{AB}| = |(0, -6)| = 6 \end{array}\right\} \; p = \frac{8 + 10 + 6}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{12(12-8)(12-10)(12-6)} = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6} = \sqrt{576} = 24 \text{ u}^2$$

b) $S = \dfrac{b \cdot h_b}{2}$

- $b = |\overrightarrow{AC}| = 10$ (del apartado anterior)
- Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $A(-3, 8)$ y $C(5, 2)$:

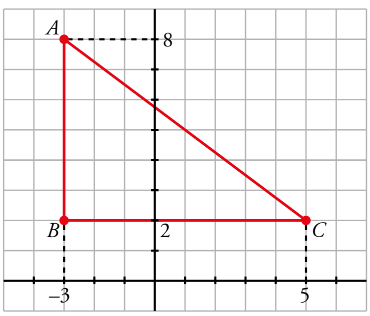
  Pendiente: $m = \dfrac{-6}{8} = \dfrac{-3}{4} \rightarrow y = 2 - \dfrac{3}{4}(x - 5) \rightarrow r: 3x + 4y - 23 = 0$

- $h_b = dist\,[B, r] = \dfrac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot (2) - 23|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{24}{5}$

  $S = \dfrac{10 \cdot (24/5)}{2} = 24 \text{ u}^2$

Habría sido más sencillo si hubiéramos dibujado el triángulo.

Observa:



Es claro que $\overline{AB} = 6$ y $\overline{BC} = 8$.

Como el triángulo es rectángulo, $S = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ u}^2$.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

C.E.: CE 1.14. (EA 1.14.1.-EA 1.14.2.-EA 1.14.3.) CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

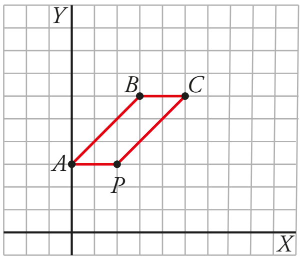
Página 212

1. Puntos y vectores en el plano

Hazlo tú

- **Dados los puntos $A(0, 3)$, $B(3, 6)$ y $C(5, 6)$, halla otro punto, P, que haga que el cuadrilátero formado por los cuatro puntos sea un paralelogramo. Atención: puede haber dos soluciones.**

Consideramos que $\overrightarrow{BC} \,//\, \overrightarrow{AP}$:



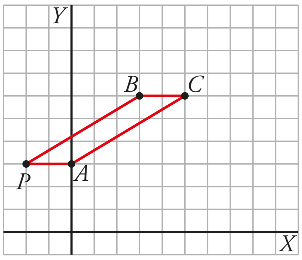
$\overrightarrow{BC}$ está sobre la recta $y = 6$.

Así que una paralela a ella será cualquier recta con $y = constante.$

$\overrightarrow{BC} \,//\, \overrightarrow{AP} \rightarrow$ buscamos una paralela que pase por $A(0, 3) \rightarrow y = 3$ es la que buscamos $\rightarrow$ como P está sobre esta recta tendremos $P(p, 3)$ y $\overrightarrow{AP} = (p, 0)$.

Sabemos que debe cumplirse: $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AP}| \rightarrow \sqrt{4} = \sqrt{p^2} \rightarrow p = \pm 2$

La solución que hemos dibujado es $P(2, 3)$, y la segunda solución, $P = (-2, 3)$ sería así:



2. Simétrico de un punto respecto de una recta

Hazlo tú

- **Halla el punto simétrico de $A(2, 2)$ respecto de la recta $r: y = 6 - x$.**

Pendiente de r: $m = -1$

Pendiente de la recta s perpendicular a r: $m' = -\dfrac{1}{-1} = 1$

Vector de dirección de la recta s: $\vec{d}\,' = (1, 1)$

Ecuación de s: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} \rightarrow x - 2 = y - 2 \rightarrow x - y = 0$

M es el punto de intersección de las rectas r y s:

$$\begin{cases} y = 6 - x \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 3 \rightarrow M = (3, 3)$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

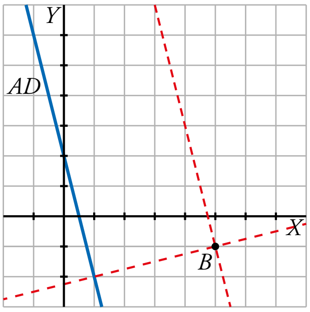
M es el punto medio entre A y $A' = (x, y)$

$$(3, 3) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \to \begin{cases} 3 = \dfrac{x+2}{2} \to x = 4 \\ 3 = \dfrac{y+2}{2} \to y = 4 \end{cases} \to A' = (4, 4)$$

3. Rectas paralelas y perpendiculares a una dada

Hazlo tú

- **Del cuadrado *ABCD* conocemos el vértice *B*(5, –1) y la ecuación del lado *AD*, $y = -4x + 2$. Halla la ecuación de los lados *BC* y *AB*.**



El lado BC es paralelo a AD y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de AD: $m = -4$

Pendiente de BC: $m = -4$. Vector de dirección de BC: $\vec{d} = (1, -4)$

Ecuación de BC: $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+1}{-4}$

El lado AB es perpendicular a AD y pasa por $B = (5, -1)$:

Pendiente de AB: $m = \dfrac{1}{4}$. Vector de dirección de BC: $\vec{d}' = (4, 1)$

Ecuación de AB: $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y+1}{4}$

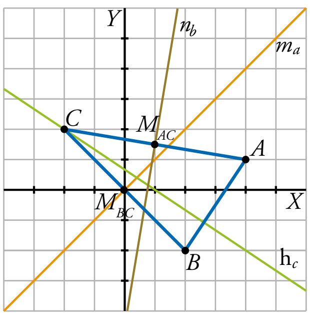
Página 213

4. Rectas notables en un triángulo

Hazlo tú

- **En el triángulo de vértices *A*(4, 1), *B*(2, –2) y *C*(–2, 2) calcula la mediatriz relativa al lado *BC*, la altura que parte de *C* y la mediana relativa al lado *AC*.**

Usamos la misma notación que en el ejercicio resuelto.



Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

a) La mediatriz relativa al lado BC, m_a, es la perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ que pasa por M_{BC}.

$\overrightarrow{BC} = (-2, 2) - (2, -2) = (-4, 4)$

$M_{BC} = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (0, 0)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{BC}$: $\vec{d}' = (4, 4)$

Ecuación de m_a: $\frac{x}{4} = \frac{y}{4} \rightarrow x = y$

b) La altura que parte de C, h_C, es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por C.

$\overrightarrow{AB} = (2, -2) - (4, 1) = (-2, 3)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$: $\vec{d}' = (3, 2)$

Ecuación de h_C: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{2}$

c) La mediana relativa al lado AC, n_b, es perpendicular a $\overrightarrow{AC}$ y pasa por M_{AC}.

$\overrightarrow{AC} = (-2, 2) - (4, 1) = (-6, 1)$

$M_{AC} = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$

Vector perpendicular a $\overrightarrow{AC}$: $\vec{d}' = (1, 6)$

Ecuación de n_b: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{3}{2}}{6}$

5. Rectas paralelas a una dada a una distancia determinada

Hazlo tú

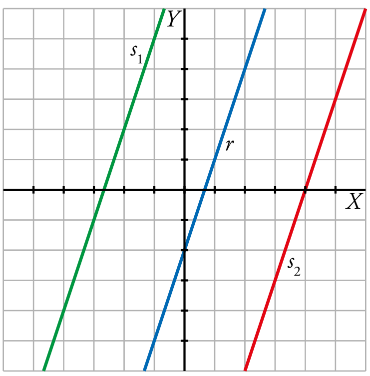
- **Halla las ecuaciones de las rectas que distan $\sqrt{10}$ unidades de r: $y = 3x - 2$.**

s_k: $3x - y + k = 0$

Punto de r: $P = (0, -2)$

$$dist(P, s_k) = \sqrt{10} \rightarrow \frac{|3 \cdot 0 - (-2) + k|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} \rightarrow |k+2| = 10 \rightarrow \begin{cases} k+2 = 10 \rightarrow k = 8 \\ k+2 = -10 \rightarrow k = -12 \end{cases}$$

Las rectas buscadas son s_1: $3x - y + 8 = 0$ y s_2: $3x - y - 12 = 0$.



Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

6. Distancias y área en un triángulo

Hazlo tú

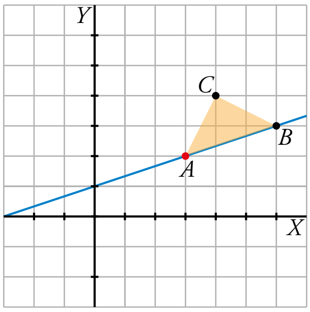
- **Resuelve este mismo ejercicio para $r: x - 3y + 3 = 0$, $B(6, 3)$ y $C(4, 4)$.**

a) Sustituimos las coordenadas de los vértices B y C en la ecuación de r. Obtenemos que $B \in r$ y $C \notin r$. Por tanto, el lado desigual es AB: $dist(A, C) = dist(B, C) \neq dist(A, B)$.

Como $A \in r$, sus coordenadas deben cumplir su ecuación, es decir, $A = (3y - 3, y)$.

$dist(A, C) = dist(B, C) \to \sqrt{(4-(3y-3))^2 + (4-y)^2} = \sqrt{4+1} \to 10y^2 - 50y + 65 = 5 \to y_1 = 3,\ y_2 = 2$

Obtenemos dos soluciones, $A(3, 2)$ y $A'(6, 3)$, pero $A' = B$ no es válida.



b) Tomando como base AB, $\text{Área} = \frac{1}{2}\text{ base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot dist(A, B) \cdot dist(C, r)$

$dist(A, B) = \sqrt{(3-6)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$ u

$dist(C, r) = \frac{|4 - 12 + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ u

$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{10}\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u}^2$

Página 214

7. Recta que pasa por un punto y forma un ángulo determinado con otra recta dada

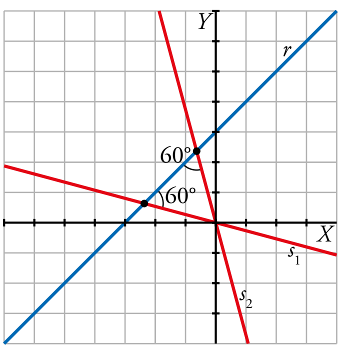
Hazlo tú

- **Halla la ecuación de una recta que pase por el origen de coordenadas y forme un ángulo de 60° con la recta $r: y = x + 3$.**

Pendiente de r: $m_r = 1$

Pendiente de s: m_s

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{1-m_s}{1+m_s}\right| \to \begin{cases} \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = \sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \\[2ex] \dfrac{1-m_s}{1+m_s} = -\sqrt{3} \to m_s = \dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \end{cases}$$



Como pasa por $O = (0, 0)$:

$$s_1: y = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}x; \quad s_2: y = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}x$$

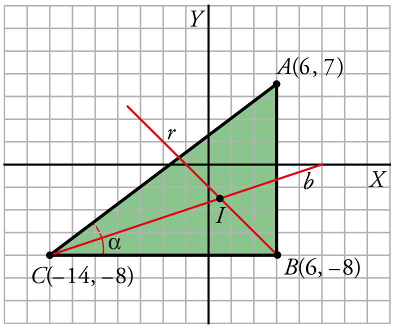
Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

8. Cálculo del incentro de un triángulo rectángulo

Hazlo tú

- **Calcula las coordenadas del incentro del triángulo cuyos vértices son:**

$A(6, 7)$, $B(6, -8)$ y $C(-14, -8)$



Por su construcción, $\hat{B} = 90°$.

Busquemos la bisectriz de $\hat{B}$, la recta r que forma 45° con el eje X y con la recta por B y C, que es la recta $y = -8$.

Su pendiente es -1: $y = -x + k$

Además pasa por B: $-8 = -6 + k \rightarrow k = -2 \rightarrow r: y = -x - 2$

Busquemos ahora la bisectriz de $\hat{C}$, la recta que forma un ángulo $\frac{\alpha}{2}$ con el eje X y con la recta $y = -8$.

Sabemos que su pendiente es $tg\,\frac{\alpha}{2}$:

$$cos\,\alpha = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|(-20, 0)|}{(-20, -15)} = \frac{20}{\sqrt{625}} = \frac{4}{5}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \rightarrow b: y = \frac{1}{3}x + k$$

También sabemos que pasa por C: $-8 = \frac{1}{3}(-14) + k \rightarrow k = -\frac{10}{3} \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$

Buscamos el punto de corte de r y b, que será el incentro buscado:

$$\begin{cases} y = -x - 2 \\ y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases}$$

Sustituimos la primera en la segunda:

$$-x - 2 = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \rightarrow -\frac{4}{3}x = -\frac{10}{3} + 2 = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 1;\ y = -3 \rightarrow I(1, -3)$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Página 215

9. Cálculo de las bisectrices de dos rectas

Hazlo tú

- **Halla el ángulo entre las rectas r y s y las ecuaciones de sus dos bisectrices:**

$$r: \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 7 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

Si llamamos α al ángulo que forman r y s:

$$cos\,\alpha = \frac{|\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(1,4)}|}{|\overrightarrow{(2,3)}|\,|\overrightarrow{(1,4)}|} = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}} \to \alpha = 19°39'$$

Buscamos ahora la bisectriz entre r y s, por lo que queremos saber su punto de corte P:

$$(-2 + 2\lambda, 1 + 3\lambda) = (7 + \mu, 1 + 4\mu) \to \mu = 2\lambda - 9$$

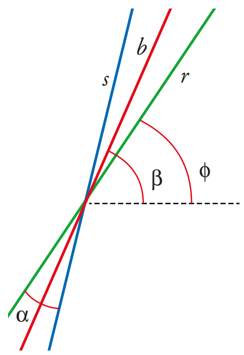
Si sustituimos ahora en la segunda coordenada:

$$1 + 3\lambda = 1 + 4(2\lambda - 9) \to -5\lambda = -36 \to \lambda = \frac{36}{5} \to P = \left(\frac{62}{5}, \frac{113}{5}\right)$$

El ángulo que forma b con r y s es $\frac{\alpha}{2}$, por lo que buscaremos su tangente:

$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}942}{1 + 0{,}942}} = 0{,}173$ y su signo es positivo ya que α pertenece al primer cuadrante.

Para saber la pendiente de b necesitamos hallar la tangente del ángulo que forma b con el eje de las abscisas, ángulo al que llamaremos β, teniendo en cuenta que ϕ será el ángulo de r con el eje de abscisas:



$\beta = \theta + \frac{\alpha}{2}$ es el ángulo que forma b con el eje X.

ϕ es la pendiente de r, por tanto, $\phi = \frac{3}{2}$.

$$tg\,\beta = tg\left(\phi + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{tg\phi + tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg\phi \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 + 0{,}173}{1 - \frac{3}{2} \cdot 0{,}173} = 2{,}26$$

b pasa por P y tiene pendiente 2,26:

$$b: \;\; y = 2{,}26\left(x - \frac{62}{5}\right) + \frac{113}{5}$$

Nos falta hallar la segunda bisectriz, que sabemos que es perpendicular a b y pasa por P:

$$y = -\frac{1}{2{,}26}\left(x - \frac{62}{5}\right) + \frac{113}{5} \to y = -0{,}44\left(x - \frac{62}{5}\right) + \frac{113}{5}$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

10. Recta simétrica a otra respecto a una tercera dada

Hazlo tú

- **Halla la recta t, simétrica de la recta $r: -2x + 3y + 2 = 0$ respecto de la recta $s: -5x + y + 18 = 0$.**

Calculamos A, el punto de intersección de r y t:

$$\begin{cases} -2x + 3y + \ \ 2 = 0 \\ -5x + \ \ y + 18 = 0 \end{cases} \to A = (4, 2)$$

Ahora, tomamos un punto P de r: $P = (1, 0)$

Calculamos la recta a perpendicular a s que pasa por $P = (1, 0)$:

$$\vec{d}_s = (-1, -5) \to \vec{d}_a = (5, -1)$$

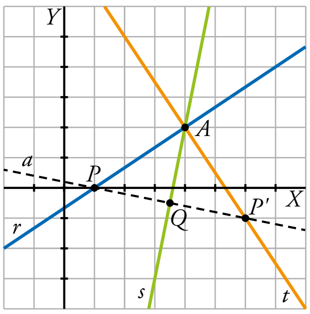
$$a: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-1} \to -x + 1 = 5y \to -x - 5y + 1 = 0$$

Determinamos Q, punto de corte de a y s:

$$\begin{cases} -x - 5y + \ \ 1 = 0 \\ -5x + \ \ y + 18 = 0 \end{cases} \to Q = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

Calculamos $P' = (x, y)$, simétrico de P respecto a Q:

$$\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right) \to P' = (6, -1)$$



La recta t pasa por $A = (4, 2)$ y por P'.

$$\overrightarrow{AP'} = (6, -1) - (4, 2) = (2, 3)$$

$$t: \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{3}$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

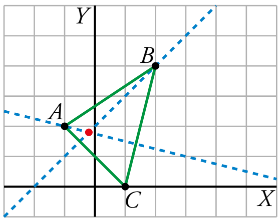
EJERCICIOS Y PROBLEMAS GUIADOS

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 216

1. Cálculo del ortocentro de un triángulo

• **Hallar el ortocentro del triángulo de vértices $A(-1, 2)$, $B(2, 4)$ y $C(1, 0)$.**



a) $\overrightarrow{BC} = (-1, -4)$

Altura h_A: Pasa por $A = (-1, 2)$ y tiene vector de dirección $\overrightarrow{d_{h_A}} = (-4, 1)$.

h_A: $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-2}{1} \to x + 1 = -4y + 8 \to x + 4y - 7 = 0$

b) $\overrightarrow{AC} = (2, -2)$

Altura h_B: Pasa por $B = (2, 4)$ y tiene vector de dirección $\overrightarrow{d_{h_B}} = (2, 2)$.

h_B: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-4}{2} \to 2x - 4 = 2y - 8 \to 2x - 2y + 4 = 0$

El ortocentro es el punto de corte de h_A y h_B:

$$\begin{cases} x + 4y - 7 = 0 \\ 2x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \to x = -\frac{1}{5},\ y = \frac{9}{5}$$

Ortocentro: $\left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{9}{5}\right)$

2. Determinación de un punto que equidista de dos rectas

• **Determinar un punto P del eje de ordenadas que equidiste de estas rectas:**

r: $6x - 8y + 1 = 0$

s: $4x + 3y - 3 = 0$

a) $P \in OY \to P = (0, y)$

b) $P = (0, y)$

$$dist(P, r) = dist(P, s) \to \frac{|-8y+1|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|3y-3|}{\sqrt{16+9}} \to \frac{|-8y+1|}{10} = \frac{|3y-3|}{5} \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{-8y+1}{10} = \dfrac{3y-3}{5} \to y = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{-8y+1}{10} = -\dfrac{3y-3}{5} \to y = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

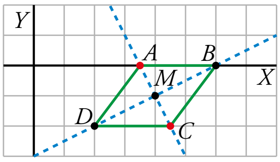
Los puntos solución son:

$$P = \left(0, \frac{1}{2}\right),\ P' = \left(0, -\frac{5}{2}\right)$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

3. Vértices de un rombo

- **Un rombo $ABCD$ tiene el vértice A en el eje de abscisas. Otros dos vértices opuestos son $B(6, 0)$ y $D(2, -2)$. Hallar A y C.**



$\overrightarrow{BD} = (-4, -2)$

$M_{BD} = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = (4, -1)$

d = diagonal AC perpendicular a BD

d pasa por M_{BD} y tiene vector director $(-2, 4)$.

$$d: \frac{x-4}{-2} = \frac{y+1}{4} \to 4x - 16 = -2y - 2 \to 4x + 2y - 14 = 0$$

A es la intersección de d y el eje OX:

$$\begin{cases} 4x + 2y - 14 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = \frac{7}{2},\ y = 0 \to A = \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

$C = (x, y)$ es el simétrico de A respecto a M_{BD}:

$$(4, -1) = \left(\frac{x + \frac{7}{2}}{2}, \frac{y}{2}\right) \to C = \left(\frac{9}{2}, -2\right)$$

4. Vértices de un triángulo conocidas algunas rectas notables

- **En un triángulo ABC conocemos el vértice $A(3, 5)$, la ecuación de la mediatriz relativa al lado AB, m_c: $x - 2y + 2 = 0$ y la altura que pasa por B, h_B: $3x - y - 14 = 0$.**

  Además, sabemos que BC está sobre la altura h_B.

  Calcular los vértices B y C.

a) El lado AC pasa por $A = (3, 5)$ y es perpendicular a h_B.

Vector de dirección del lado AC: $\vec{d} = (3, -1)$

Ecuación del lado AC: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-5}{-1} \to -x + 3 = 3y - 15 \to -x - 3y + 18 = 0$

b) $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ -x - 3y + 18 = 0 \end{cases} \to x = 6,\ y = 4 \to C = (6, 4)$

c) El lado AB pasa por $A = (3, 5)$ y es perpendicular a m_C.

Vector de dirección del lado AB: $\vec{d} = (1, -2)$

Ecuación de lado AB: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} \to -2x + 6 = y - 5 \to -2x - y + 11 = 0$

d) $\begin{cases} 3x - y - 14 = 0 \\ -2x - y + 11 = 0 \end{cases} \to x = 5,\ y = 1 \to B = (5, 1)$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

C.E.: CE todos los tratados en la unidad excepto el 1.9. (EA todos los tratados en la unidad excepto el 1.9.1.)

Página 217

Para practicar

Coordenadas de puntos

1 **Halla las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$, siendo:**

a) $A(0, 0)$, $B(-1, 2)$ **b) $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$**

a) $\overrightarrow{AB} = (-1, 2) - (0, 0) = (-1, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (0, 0) - (-1, 2) = (1, -2)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-2, 5) - (2, 3) = (-4, 2)$

$\overrightarrow{BA} = (2, 3) - (-2, 5) = (4, -2)$

2 **Determina si los puntos $A(5, -2)$, $B(3, -2)$ y $C(-5, -2)$ están alineados.**

$\overrightarrow{AB} = (3, -2) - (5, -2) = (-2, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (-5, -2) - (3, -2) = (-8, 0)$

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales, por tanto, A, B y C están alineados.

3 **Determina k para que los puntos $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ y $C(6, k)$ estén alineados.**

Debe ocurrir que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (5, -4) \\ \overrightarrow{BC} = (4, k-1)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \rightarrow 5k - 5 = -16 \rightarrow k = \frac{-11}{5}$$

4 **Sean $A(8, -2)$ y $B(-4, 2)$ dos puntos. Calcula:**

a) M, punto medio de A y B.

b) S, simétrico de A respecto a B.

c) P, tal que A sea el punto medio del segmento BP.

a) $M = \left(\frac{8-4}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (2, 0)$

b) B es el punto medio entre A y $S = (x, y)$

$$(-4, 2) = \left(\frac{x+8}{2}, \frac{y-2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -4 = \dfrac{x+8}{2} \rightarrow x = -16 \\ 2 = \dfrac{y-2}{2} \rightarrow y = 6 \end{cases}$$

$S = (-16, 6)$

c) P es el simétrico de B respecto de $A \rightarrow A$ es el punto medio entre B y P.

$P = (x, y)$

$$(8, -2) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 8 = \dfrac{x-4}{2} \rightarrow x = 20 \\ -2 = \dfrac{y+2}{2} \rightarrow y = -6 \end{cases}$$

$P = (20, -6)$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

5 Da las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos $A(3, 4)$ y $B(0, -2)$ en dos partes tales que $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA}$.

Sea $P(x, y)$.

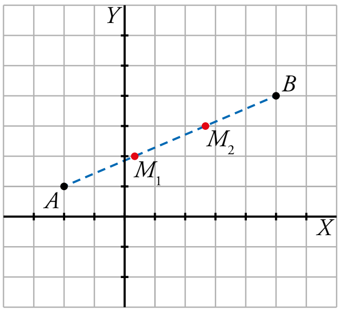
Sustituimos en la condición que nos imponen:

$\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{PA} \rightarrow (x - 0, y - (-2)) = 2(3 - x, 4 - y) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2(3-x) \\ y+2 = 2(4-y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6-2x \\ y+2 = 8-2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow P(2, 2)$$

6 Determina los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales, siendo $A(-2, 1)$ y $B(5, 4)$.

Buscamos las coordenadas de los puntos M_1, M_2 de la figura.



$\overrightarrow{AB} = (7, 3)$

$M_1 = (x, y)$

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (7, 3) = 3(x+2, y-1) \rightarrow \begin{cases} 7 = 3x + 6 \rightarrow x = \dfrac{1}{3} \\ 3 = 3y - 3 \rightarrow y = 2 \end{cases} \rightarrow M_1 = \left(\dfrac{1}{3}, 2\right)$$

$M_2 = (x, y)$

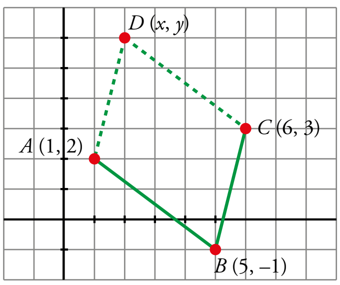
$$\overrightarrow{AM_2} = 2\overrightarrow{AM_1} \rightarrow (x+2, y-1) = 2\left(\dfrac{1}{3} + 2, 2 - 1\right) \rightarrow \begin{cases} x + 2 = \dfrac{14}{3} \rightarrow x = \dfrac{8}{3} \\ y - 1 = 2 \rightarrow y = 3 \end{cases} \rightarrow M_2 = \left(\dfrac{8}{3}, 3\right)$$

7 Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ y $C(6, 3)$.

Sea $D(x, y)$.

Debe cumplirse: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$(5 - 1, -1 -2) = (6 - x, 3 - y) \rightarrow \begin{cases} 4 = 6 - x \\ -3 = 3 - y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \rightarrow D(2, 6)$$

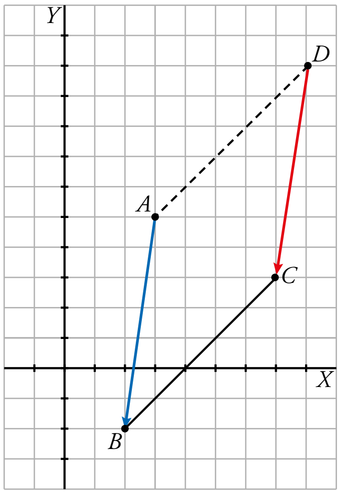


8 Conocemos tres vértices de un rombo $ABCD$, $A(3, 5)$, $B(2, -2)$ y $C(7, 3)$. Determina el vértice D.

* ***Las diagonales de un rombo se cortan en sus puntos medios y son perpendiculares.***

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

En un rombo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



$\overrightarrow{AB} = (-1, -7)$

$D = (x, y)$

$(-1, -7) = (7 - x, 3 - y) \rightarrow \begin{cases} -1 = 7 - x \rightarrow x = 8 \\ -7 = 3 - y \rightarrow y = 10 \end{cases} \rightarrow D = (8, 10)$

Ecuaciones de rectas

9 **Escribe las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por A y tiene dirección paralela al vector $\vec{d}$.**

a) $A(-3, 7)$, $\vec{d}(4, -1)$ **b)** $A(-1, 0)$, $\vec{d}(0, 2)$

Obtén 2 puntos más para cada recta.

a) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-3, 7) + k(4, -1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -3 + 4k \\ y = 7 - k \end{cases}$

Dando valores al parámetro k, obtenemos puntos: (1, 6), (5, 5)

b) Ecuación vectorial: $(x, y) = (-1, 0) + k(0, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = -1 + 0 \cdot k \\ y = 2k \end{cases}$

Puntos: (–1, 2), (–1, 4)

10 **Escribe la ecuación de la recta que pasa por P y Q de todas las formas posibles.**

a) $P(6, -2)$ **y** $Q(0, 5)$ **b)** $P(3, 2)$ **y** $Q(3, 6)$

c) $P(0, 0)$ **y** $Q(8, 0)$ **d)** $P(0, 0)$ **y** $Q(0, -2)$

a) $\overrightarrow{PQ} = (-6, 7)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (6, -2) + t(-6, 7)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-6}{-6} = \dfrac{y+2}{7}$

Ecuación implícita: $7x + 6y - 30 = 0$

Ecuación explícita: $y = -\dfrac{7}{6}x + 5$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

b) $\overrightarrow{PQ} = (0, 4)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (3, 2) + t(0, 4)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-3}{0} = \dfrac{y-2}{4}$

Ecuación implícita: $x - 3 = 0$

c) $\overrightarrow{PQ} = (8, 0)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(8, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x-0}{8} = \dfrac{y-0}{0}$

Ecuación implícita y explícita: $y = 0$

d) $\overrightarrow{PQ} = (0, -2)$

Ecuación vectorial: $(x, y) = (0, 0) + t(0, -2)$

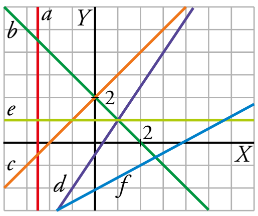
Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \end{cases}$

Ecuación continua: $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{-2}$

Ecuación implícita: $x = 0$

Ecuación explícita no tiene.

11 **Halla las ecuaciones de las rectas *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*.**



$a \rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$

$b \rightarrow \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-1}$

$c \rightarrow \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{1}$

$d \rightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3}$

$e \rightarrow y = 1$

$f \rightarrow y = \dfrac{x}{2} - 2$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

12 Determina un vector normal y la ecuación implícita de cada una de las siguientes rectas:

a) $r: \dfrac{x+1}{-2} = y - 1$

b) $s: \begin{cases} x = -\lambda + 1 \\ y = 5\lambda - 2 \end{cases}$

c) $t: \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = -2 + 3\lambda \end{cases}$

d) $u: y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{7}$

a) $\vec{n} = (1, 2)$

Ecuación implícita: $x + 2y + k = 0$

Como pasa por $P = (-1, 0)$, sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la recta para calcular k.

$-1 + 0 + k = 0 \rightarrow k = 1$

$r: x + 2y + 1 = 0$

b) $\vec{n} = (5, 1)$

Ecuación implícita: $5x + y + k = 0$

Como pasa por $P = (-1, 2)$, sustituimos sus coordenadas en la ecuación de la recta para calcular k.

$5(-1) + 2 + k = 0 \rightarrow k = 3$

$s: 5x + y + 3 = 0$

c) Un punto de t es $A(1, -2)$.

El vector director de t es $\vec{v}(1, 3)$, por lo que un vector normal será $\vec{w}(3, -1)$ y la pendiente de una recta normal será $-\dfrac{1}{3}$.

Su ecuación implícita será:

$3(x-1) - (y+2) = 0 \rightarrow 3x - y - 5 = 0$

d) Un vector normal de u es $\vec{v}\left(\dfrac{1}{4}, -1\right)$, y buscamos un punto de u, por ejemplo $A\left(0; \dfrac{5}{7}\right)$:

$x = \dfrac{1}{4}t;\ y = \dfrac{5}{7} - t \rightarrow 4x = \dfrac{5}{7} - y \rightarrow 4x + y - \dfrac{5}{7} = 0$ es una recta solución

13 Obtén, para cada una de las siguientes rectas, un vector dirección, un vector normal y su pendiente:

a) $r_1: \begin{cases} x = 2\lambda - 1 \\ y = 5\lambda \end{cases}$

b) $r_2: \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{4}$

c) $r_3: x + 3 = 0$

d) $r_4: y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$

$\vec{d}$: vector de dirección; $\vec{n}$: vector normal; m = pendiente.

a) $\vec{d} = (2, 5);\ \vec{n} = (-5, 2);\ m = \dfrac{5}{2}$

b) $\vec{d} = (2, 4);\ \vec{n} = (-4, 2);\ m = 2$

c) $\vec{d} = (0, 1);\ \vec{n} = (1, 0);$ m no se puede calcular porque es una recta vertical.

d) $\vec{d} = (3, 1);\ \vec{n} = (1, -3);\ m = \dfrac{1}{3}$

14 Determina un punto y un vector dirección de cada recta. Utilízalos para dar sus ecuaciones continuas y paramétricas.

a) $3x - 2y + 1 = 0$

b) $y = 2(x - 1) + 7$

c) $x - 3 = 0$

d) $y = \dfrac{2}{3}x + 1$

$\vec{d}$: vector de dirección

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

a) $\vec{d} = (2, 3)$; $P = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \frac{1}{2} + 3\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x}{2} = \frac{y - \frac{1}{2}}{3}$

b) $\vec{d} = (1, 2)$; $P = (0, 5)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 5 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x}{1} = \frac{y - 5}{2}$

c) $\vec{d} = (0, 1)$; $P = (3, 0)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x - 3}{0} = \frac{y}{1}$

d) $\vec{d} = (3, 2)$; $P = (0, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y - 1}{2}$

15 Comprueba si el punto $P(5, -7)$ pertenece a estas rectas:

a) $r: \begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2\lambda \end{cases}$ **b) $s: \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{5}$**

a) Sustituimos las coordenadas de P en la ecuación de la recta:

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 13 - 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5 = 5 \\ -7 = 13 - 2\lambda \end{cases} \rightarrow t = 10$$

Hay solución, luego $P \in r$.

b) $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{5} \rightarrow \frac{5 - 1}{2} = \frac{-7 - 3}{5} \rightarrow \frac{4}{2} \neq \frac{-10}{5}$ luego $P \notin s$.

16 Halla el valor de k para que la recta $x + ky - 7 = 0$ contenga al punto $A(5, -2)$.

$(5, -2) \rightarrow 5 + k(-2) - 7 = 0 \rightarrow -2k = 2 \rightarrow k = -1$

Haz de rectas

17 Consideramos el haz de rectas de centro $(3, -2)$.

a) Escribe la ecuación de este haz de rectas.

b) ¿Qué recta de este haz pasa por el punto $(-1, 5)$?

c) ¿Cuál de las rectas del haz es paralela a $2x + y = 0$?

d) Determina la ecuación de la recta del haz cuya distancia al origen es igual a 3.

a) $a(x - 3) + b(y + 2) = 0$; o bien $y = -2 + m(x - 3)$

b) Si pasa por $(-1, 5)$, entonces, sustituyendo en $y = -2 + m(x - 3)$, obtenemos:

$$5 = -2 + m(-1 - 3) \rightarrow 7 = -4m \rightarrow m = -\frac{7}{4}; \text{ es decir:}$$

$$y = -2 - \frac{7}{4}(x - 3) \rightarrow 4y = -8 - 7x + 21 \rightarrow 7x + 4y - 13 = 0$$

c) Si es paralela a $2x + y = 0$ tendrá pendiente -2.

Por tanto, será:

$$y = -2 - 2(x - 3) \rightarrow y = -2 - 2x + 6 \rightarrow 2x + y - 4 = 0$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

d) Una recta del haz tiene por ecuación:

$y = -2 + m(x-3) \;\rightarrow\; y = -2 + mx - 3m \;\rightarrow\; mx - y - 3m - 2 = 0$

Su distancia al origen ha de ser igual a 3:

$\dfrac{|-3m-2|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$; es decir:

$|-3m-2| = 3\sqrt{m^2+1}$. Elevamos al cuadrado y operamos:

$9m^2 + 12m + 4 = 9(m^2+1)$

$9m^2 + 12m + 4 = 9m^2 + 9$

$12m = 5 \;\rightarrow\; m = \dfrac{5}{12}$

Por tanto, será:

$\dfrac{5}{12}x - y - \dfrac{5}{12} - 2 = 0 \;\rightarrow\; 5x - 12y - 39 = 0$

18 Determina cuál es el centro del haz de rectas de la ecuación $3kx + 2y - 3k + 4 = 0$.

Llamamos (x_0, y_0) al centro del haz. Vamos a escribir la ecuación que nos dan de la forma:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$

$3kx + 2y - 3k + 4 = 0 \;\rightarrow\; 3k(x - x_0) + 2(y - y_0) = 0$

$3kx - 3kx_0 + 2y - 2y_0 = 0$

$3kx + 2y - 3kx_0 - 2y_0 = 0$

Han de ser iguales las dos ecuaciones. Por tanto:

$-3kx_0 = -3k \;\rightarrow\; x_0 = 1$

$-2y_0 = 4 \;\rightarrow\; y_0 = -2$

El centro del haz es el punto $(1, -2)$.

19 Las rectas $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ forman parte del mismo haz de rectas. ¿Qué recta de dicho haz tiene pendiente -2?

Si $r: y = 3$ y $s: y = 2x - 1$ están en el mismo haz de rectas, el centro de dicho haz es el punto de corte de estas rectas: $P(2, 3)$.

Buscamos la recta que pasa por $P(2, 3)$ y tiene pendiente $m = -2$:

$$y = -2(x-2) + 3 \;\rightarrow\; y = -2x + 7$$

20 Escribe en cada caso la ecuación del haz de rectas en el que están incluidas las siguientes rectas:

a) $3x + y - 2 = 0$; $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-5}{-3}$

b) $\begin{cases} x = 7 + 3\lambda \\ y = 1 + 4\lambda \end{cases}$ y su perpendicular que pasa por (0, 0).

c) $x - 2y + 5 = 0$ y su recta simétrica con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

a) Transformamos la segunda recta a forma continua:

$3(x-1) = -1(y-5) \;\rightarrow\; 3x + y - 8 = 0$

Tenemos que las dos rectas tienen el mismo vector normal (3, 1) por lo que son rectas paralelas y no existe el haz de rectas porque no hay punto de corte

b) La recta buscada s es perpendicular a r, por lo que su vector director es por ejemplo $\vec{v}(4, -3)$.

Además pasa por (0, 0):

$s: x = 4t;\; y = -3t$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Buscamos su punto de corte, A:

$4t = 7 + 3\lambda;\ -3t = 1 + 4\lambda$

Aislamos en la primera ecuación: $\lambda = \dfrac{4t-7}{3}$

Sustituimos en la segunda:

$-3t = 1 + 4\left(\dfrac{4t-7}{3}\right) \to -9t = 3 + 16t - 28 \to t = 1 \to A(4, -3)$

Ya podemos escribir el haz de rectas por A como:

$k(x-4) + k'(y+3) = 0$

c) La bisectriz del primer cuadrante es la recta b: $y = x$ y se corta con r en el punto $P(5, 5)$.

Por lo tanto ya podemos definir el haz de rectas porque tenemos el punto de corte también con la recta simétrica, que pasará también por P:

$$k(x-5) + k'(y-5) = 0$$

Página 218

Paralelismo y perpendicularidad

21 Escribe las ecuaciones de dos rectas que pasen por (0, 0): una paralela y otra perpendicular a cada una de las rectas de las actividades 12 y 13.

Del ejercicio 12:

r tiene $\vec{v}(2, 1) \to$ paralela $r': \dfrac{x}{2} = y$; perpendicular $r'': \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2}$

s tiene $\vec{v}(-1, 5) \to$ paralela $r': \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{5}$; perpendicular $r'': \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{1}$

t tiene $\vec{v}(1, 3) \to$ paralela $r': \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{3}$; perpendicular $r'': \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-1}$

u tiene $\vec{v}(3, 1) \to$ paralela $r': \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{1}$; perpendicular $r'': \dfrac{-x}{1} = \dfrac{y}{3}$

Del ejercicio 13:

r_1 tiene $\vec{v}(2, 5) \to$ paralela $r': \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5}$; perpendicular $r'': \dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{-2}$

r_2 tiene $\vec{v}(2, -4) \to$ paralela $r': \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-4}$; perpendicular $r'': \dfrac{x}{-4} = \dfrac{y}{-2}$

r_3 tiene $\vec{v}(0, 1) \to$ paralela $r': x = 0$; perpendicular $r'': y = 0$

r_4 tiene $\vec{v}\left(1, \dfrac{1}{3}\right) \to$ paralela $r': x = 3y$; perpendicular $r'': 3x = -y$

22 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases}$, obtén en forma explícita las siguientes rectas:

a) Paralela a r que pasa por $A(-1, -3)$.

b) Perpendicular a r que pasa por $B(-2, 5)$.

$r: \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \to \vec{v}_r = (-5, 1)$

a) $\vec{v}_s = (-5, 1)$, $A(-1, -3) \to s: y = -\dfrac{1}{5}(x+1) - 3 \to s: y = -\dfrac{1}{5}x - \dfrac{16}{5}$

b) $\vec{v}_s = (1, 5)$, $B(-2, 5) \to s: y = 5(x+2) + 5 \to s: y = 5x + 15$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

23 **De una cierta recta r conocemos su pendiente $m = \frac{2}{3}$. Halla la recta s en cada caso.**

a) s es paralela a r y pasa por (0, 0).

b) s es perpendicular a r y pasa por (1, 2).

a) Al ser paralela, tiene la misma pendiente. Además, pasa por (0, 0). Por tanto, $s: y = \frac{2}{3}x$.

b) Al ser perpendicular, su pendiente es $-\frac{1}{m} = \frac{-3}{2}$. Por tanto, $y = \frac{-3}{2}(x-1)+2 \to y = \frac{-3}{2}x + \frac{7}{2}$.

24 **Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, -3)$ y es:**

a) Paralela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.

b) Perpendicular a la recta $x + y - 3 = 0$.

c) Paralela a la recta $2y - 3 = 0$.

d) Perpendicular a la recta $x + 5 = 0$.

a) r tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $P(1, -3) \to r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2}$

b) r tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P(1, -3) \to r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1}$

c) Es paralela al eje OX y pasa por $P(1, -3) \to r: y = -3$

d) Es paralela al eje OX y pasa por $P(1, -3) \to r: y = -3$

25 **El vector normal de la recta r es $\vec{n}(2, -3)$. Obtén, en cada caso, la ecuación de la recta s.**

a) s es paralela a r y contiene al punto $P(2, -3)$.

b) s es perpendicular a r y pasa por $Q(0, 1)$.

a) s tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $P(2, -3)$.

$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2}$

b) s tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -3)$ y pasa por $Q(0, 1)$.

$s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3}$

26 **Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas:**

a) r_1, paralela al eje de abscisas que pasa por $A(-1, -2)$.

b) r_2, perpendicular al eje OX que contiene a $B(1, 0)$.

c) r_3, paralela al eje de ordenadas que pasa por $C(3, 5)$.

d) r_4, perpendicular al eje OY que contiene a $D(-1, 7)$.

a) $r_1: y = -2$ b) $r_2: x = 1$ c) $r_3: x = 3$ d) $r_4: y = 7$

27 **Dada la recta $4x + 3y - 6 = 0$, escribe la ecuación de la recta perpendicular a ella en el punto de corte con el eje de ordenadas.**

Punto de corte con el eje de ordenadas P:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to x = 0, y = 2$$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 3)$ y pasa por $P = (0, 2)$.

$s: \frac{x}{4} = \frac{y-2}{3}$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

28 Determina, en cada caso, una recta que pase por el punto $P(-2, -3)$ y sea:

a) Paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

b) Perpendicular a la bisectriz del segundo cuadrante.

a) Bisectriz del primer cuadrante: $y = x$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P = (-2, -3)$.

$$s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} \rightarrow x + 2 = y + 3$$

b) Bisectriz del segundo cuadrante: $y = -x$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $P = (-2, 3)$.

$$s: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{1} \rightarrow x + 2 = y + 3$$

29 De un triángulo conocemos el vértice $A(1, 3)$ y la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ que contiene al lado BC. Halla la ecuación de la altura relativa al vértice A.

h_A es perpendicular a r y pasa por $A = (1, 3)$.

h_A tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -3)$ y pasa por $A = (1, 3)$.

$$h_A: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3}$$

30 Halla, en cada caso, el valor de k para que la recta $r: y = kx + 1$ sea:

a) Paralela al eje OX.

b) Perpendicular a la recta $2x + 3y + 7 = 0$.

Pendiente de r: $m = k$

a) Pendiente del eje OX: $m' = 0$, luego $m = m' = 0 \rightarrow k = 0$

b) Pendiente de $2x + 3y + 7 = 0$: $m' = -\frac{2}{3}$, luego $m = -\frac{1}{m'} = \frac{3}{2} \rightarrow k = \frac{3}{2}$

31 Halla el punto simétrico de $P(1, 1)$ respecto a la recta de ecuación $x - 2y - 4 = 0$.

** Mira el problema resuelto número 2.*

Llamamos r a la recta: $x - 2y - 4 = 0$.

s: perpendicular a r que pasa por $P = (1, 1)$

s tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -2)$

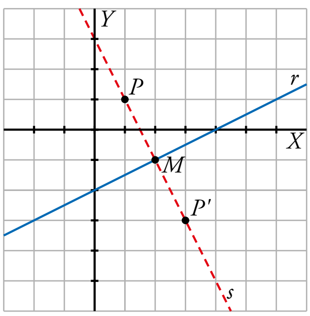
$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} \rightarrow -2x + 2 = y - 1 \rightarrow -2x - y + 3 = 0$$

M = punto de corte de las rectas

$$\begin{cases} -2x - y + 3 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 2,\ y = -1 \rightarrow M = (2, -1)$$

M es el punto medio entre P y $P' = (x, y)$, su simétrico respecto de r.

$$(2, -1) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{x+1}{2} \rightarrow x = 3 \\ -1 = \dfrac{y+1}{2} \rightarrow y = -2 \end{cases} \rightarrow P' = (3, -3)$$



Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Posición relativa de dos rectas

32 **Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Calcula el punto de corte cuando sean secantes.**

a) $r: 5x + y + 7 = 0;\ s: \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -10\lambda - 3 \end{cases}$

b) $r: 3x + 5y + 10 = 0;\ s: -3x + 5y + 10 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = \lambda + 3 \end{cases};\ s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) $r: y = 2x + 1;\ s: y = \frac{-1}{2}x + 1$

a) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 5x + y + 7 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (5, 1) \rightarrow \vec{v}_r = (-1, 5)$

$s: \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = -10\lambda - 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (2, -10)$

Como los vectores dirección son proporcionales $(\vec{v}_s = -2\vec{v}_r)$, las rectas o son paralelas o son coincidentes.

Como $P(1, -3) \in s$ y $P \notin r$, las rectas son paralelas.

b) Buscamos un vector dirección de cada recta:

$r: 3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_r = (3, 5) \rightarrow \vec{v}_r = (-5, 3)$

$s: -3x + 5y + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_s = (-3, 5) \rightarrow \vec{v}_s = (5, 3)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas se obtiene el punto de corte, (0, –2).

c) Buscamos un vector dirección de cada recta

$r: \begin{cases} x = 3\lambda - 1 \\ y = \lambda + 3 \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (3, 1)$

$s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (1, 2)$

Como los vectores dirección no son proporcionales, las rectas son secantes.

El punto de corte se obtiene tomando $\lambda = 1$ en la recta r y $\lambda = 2$ en la recta s. Es el punto (2, 4).

d) $m_r = 2;\ m = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Las rectas son perpendiculares.

$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases} \rightarrow x = 0, y = 1 \rightarrow$ Punto de corte $P = (0, 1)$.

33 **A partir de la recta $r: 3x - 5y + 7 = 0$, escribe la ecuación implícita de una recta que sea:**

a) **paralela a r.**

b) **secante y no perpendicular a r.**

c) **perpendicular a r.**

d) **coincidente (distinta ecuación).**

a) $3x - 5y = 0$

b) $x - y = 0$

c) $5x + 3y + 7 = 0$

d) $6x - 10y + 14 = 0$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

34 Determina k para que las rectas r y s sean paralelas.

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-2} \qquad s: \frac{x+5}{-6} = \frac{y-1}{k}$$

Para que sean paralelas, sus vectores dirección han de ser proporcionales, es decir:

$$\frac{3}{-6} = \frac{-2}{k} \rightarrow k = 4$$

35 Halla el valor de k para que estas rectas sean coincidentes:

$$r: 2x + 3y + 5 = 0 \qquad s: \begin{cases} x = -6\lambda + k \\ y = 4\lambda + 2 \end{cases}$$

Expresamos ambas rectas en forma implícita:

r: $2x + 3y + 5 = 0$

s: $4x + 6y - 12 - 4k = 0$

Para que $r = s$, estas ecuaciones tienen que ser proporcionales, y por tanto:

$$-12 - 4k = 10 \rightarrow k = \frac{22}{-4} = \frac{-11}{2}$$

36 Calcula k para que r y s sean perpendiculares.

$$r: y = 2x + 1 \qquad s: 3x + ky + 3 = 0$$

$$m_r = 2; \; m = -\frac{3}{k}$$

Para que sean perpendiculares, $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Luego, $2 = \dfrac{k}{3} \rightarrow k = 6$

Ángulos

37 Halla el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

a) $r: y = 2x + 5$
$s: y = -3x + 1$

b) $r: 3x - 5y + 7 = 0$
$s: 10x + 6y - 3 = 0$

c) $r: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}; \; s: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 4 + \lambda \end{cases}$

d) $r: 2x - y = 0$
$s: 2y + 3 = 0$

a) $\left.\begin{array}{l} r: y = 2x + 5 \\ s: y = -3x + 1 \end{array}\right\} \rightarrow$ sus pendientes son: $\begin{cases} m_r = 2 \\ m_s = -3 \end{cases}$

$$tg\, \alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \right| = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = 1 \rightarrow \alpha = 45°$$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (3, -5) \perp r_1 \\ \vec{w} = (10, 6) \perp r_2 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \equiv \widehat{r_1, r_2} = \widehat{\vec{v}, \vec{w}} \rightarrow cos\, \alpha = \dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \dfrac{|30 - 30|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = 0 \rightarrow \alpha = 90°$

c) Los vectores dirección de esas rectas son $\vec{d}_1 = (-1, 2)$ y $\vec{d}_2 = (-3, 1)$.

Entonces:

$$cos\, \alpha = \frac{|\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2|}{|\vec{d}_1||\vec{d}_2|} = \frac{|3 + 2|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45°$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

d) $\left.\begin{array}{l}\vec{a}_1=(2,-1)\perp r_1\\ \vec{a}_2=(0,2)\perp r_2\end{array}\right\}\to \alpha\equiv\widehat{r_1,r_2}=\widehat{\vec{a}_1,\vec{a}_2}\to$

$$\to cos\ \alpha=\frac{|\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}=\frac{|0-2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{4}}=\frac{2}{\sqrt{5}\cdot 2}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\approx 0,4472\to\alpha=63°\ 26'\ 5,82''$$

38 **Calcula las ecuaciones de las bisectrices de las rectas del ejercicio anterior.**

* ***La resolución del ejercicio resuelto 9 puede ayudarte.***

a) $\alpha=45°\to tg\dfrac{\alpha}{2}=0{,}4142$

Punto de corte: $P\left(-\dfrac{4}{5},\dfrac{17}{5}\right)$

$tg\ \phi=2$ (pendiente de r)

Buscamos la pendiente de la bisectriz:

$$tg\ \beta=tg\left(\phi+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{tg\ \phi+tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tg\ \phi\cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2+0{,}4142}{1-2\cdot 0{,}4142}=14{,}061$$

La bisectriz buscada es: $y=14{,}061\left(x+\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{17}{5}$

La segunda bisectriz pasa por el mismo punto P y es perpendicular a la primera bisectriz, por lo tanto:

$$y=-\frac{1}{14{,}061}\left(x+\frac{4}{5}\right)+\frac{17}{5}$$

b) $\alpha=90°\to tg\dfrac{\alpha}{2}=1$

Punto de corte: $P(-0{,}397;1{,}61)$

$tg\ \phi=\dfrac{3}{5}$ $\left(\text{pendiente de } r\text{: } y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{7}{5}\right)$

Buscamos la pendiente de la bisectriz:

$$tg\ \beta=tg\left(\phi+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{tg\ \phi+tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tg\ \phi\cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{5}+1}{1-\frac{3}{5}}=4$$

La bisectriz buscada es:

$$y=4\,(x+0{,}397)+1{,}162$$

La segunda bisectriz pasa por el mismo punto P y es perpendicular a la primera bisectriz, por lo tanto:

$$y=-0{,}25\,(x+0{,}397)+1{,}162$$

c) $\alpha=45°\to tg\dfrac{\alpha}{2}=0{,}4142$

Punto de corte: $P(1{,}4;3{,}2)$

$tg\ \phi=-2$ (pendiente de r)

Buscamos la pendiente de la bisectriz:

$$tg\ \beta=tg\left(\phi+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{tg\ \phi+tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-tg\ \phi\cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{-2+0{,}4142}{1+2\cdot 0{,}4142}=-0{,}867$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

La bisectriz buscada es:

$y = -0{,}867\,(x - 1{,}4) + 3{,}2$

La segunda bisectriz pasa por el mismo punto P y es perpendicular a la primera bisectriz, por lo tanto:

$$y = \frac{1}{0{,}867}(x - 1{,}4) + 3{,}2$$

d) $\cos\alpha = 0{,}4472 \;\to\; tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = 0{,}618$

Punto de corte: $P\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

En este caso como s es paralela al eje de las X, la pendiente de la bisectriz es directamente $tg\,\frac{\alpha}{2}$:

$tg\,\beta = tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}618$

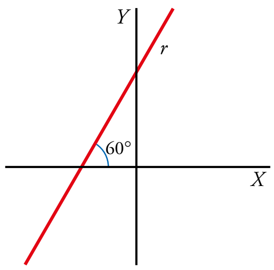
La bisectriz buscada es:

$y = 0{,}618\left(x + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{2}$

La segunda bisectriz pasa por el mismo punto P y es perpendicular a la primera bisectriz, por lo tanto:

$$y = -\frac{1}{0{,}618}\left(x + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{2}$$

39 Calcula n de modo que la recta $3x + ny - 2 = 0$ forme un ángulo de 60° con el eje OX.



$\left.\begin{array}{l} tg\,60° = \sqrt{3} \\ m_r = -\frac{3}{n} \end{array}\right\}$ Como $tg\,60° = m_r$, se tiene que:

$\sqrt{3} = -\frac{3}{n} \;\to\; n = \frac{-3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$

40 Calcula m y n en estas rectas sabiendo que r pasa por el punto $P(1, 4)$ y que r y s forman un ángulo de 45°:

r: $mx - 2y + 5 = 0$ $\qquad$ s: $nx + 6y - 8 = 0$

$P \in r \;\to\; m \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 5 = 0 \;\to\; m = 3$

r: $3x - 2y + 5 = 0 \;\to\; y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \;\to\; m_r = \frac{3}{2}$

s: $nx + 6y - 8 = 0 \;\to\; y = -\frac{n}{6}x + \frac{8}{6} \;\to\; m_s = -\frac{n}{6}$

$tg\,45° = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right| = \left|\frac{-(n/6) - (3/2)}{1 - (n/6)(3/2)}\right| = \left|\frac{-2n - 18}{12 - 3n}\right| = 1$

Hay dos posibilidades:

- $\frac{-2n-18}{12-3n} = 1 \;\to\; -2n - 18 = 12 - 3n \;\to\; n = 30$
- $\frac{-2n-18}{12-3n} = -1 \;\to\; -2n - 18 = -12 + 3n \;\to\; n = -\frac{6}{5}$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Página 219

41 **Las rectas de ecuación $r: 3x - 2y + 6 = 0$; $s: 2x + y - 6 = 0$ y $t: 2x - 5y - 4 = 0$ son los lados de un triángulo. Represéntalo y halla sus ángulos.**

$A(5, k)$, $B(3, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, -2-k)$

$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-k)^2} = 2 \rightarrow 4 + 4 + 4k + k^2 = 4 \rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -2$

Distancias

42 **Calcula en cada caso la distancia entre A y B:**

a) $A(0, 0)$ y $B(3, 4)$ **b) $A(-1, 4)$ y $B(3, -2)$**

c) $A(1, 1)$ y $B(-2, 3)$ **d) $A(-3, -5)$ y $B(-2, -1)$**

a) $|\overrightarrow{AB}| = |(3, 4)| = \sqrt{9 + 16} = 5$

b) $|\overrightarrow{AB}| = |(4, -6)| = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

c) $|\overrightarrow{AB}| = |(-3, 2)| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

d) $|\overrightarrow{AB}| = |(1, 4)| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

43 **Calcula k de modo que la distancia entre los puntos $A(5, k)$ y $B(3, -2)$ sea igual a 2.**

$A(5, k)$, $B(3, -2)$, $\overrightarrow{AB} = (-2, -2-k)$

$dist(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2-k)^2} = 2 \rightarrow 4 + 4 + 4k + k^2 = 4 \rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow k = -2$

44 **Determina, en cada caso, si el triángulo ABC es equilátero, isósceles o escaleno.**

a) $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$

b) $A(1, 3)$, $B(3, 5)$, $C(-1, 7)$

c) $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$, $C(-2, -3)$

a) $dist(A, B) = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2} = 2$

$dist(A, C) = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

$dist(B, C) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-\sqrt{3})^2} = 2$

Triángulo equilátero.

b) $dist(A, B) = \sqrt{(1-3)^2 + (3-5)^2} = 2\sqrt{2}$

$dist(A, C) = \sqrt{(1+1)^2 + (3-7)^2} = 2\sqrt{5}$

$dist(B, C) = \sqrt{(3+1)^2 + (5-7)^2} = 2\sqrt{5}$

Triángulo isósceles.

c) $dist(A, B) = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$

$dist(A, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

$dist(B, C) = \sqrt{(2+2)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{13}$

Triángulo isósceles.

45 **Halla la longitud del segmento que determina la recta $x - 2y + 5 = 0$ al cortar a los ejes de coordenadas.**

Hay que calcular la distancia entre los puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas.

Calculamos primero dichos puntos:

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

- $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow -2y+5=0 \rightarrow y=\dfrac{5}{2} \rightarrow A\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$ es el punto de corte con el eje Y.
- $\begin{cases} x-2y+5=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow x+5=0 \rightarrow x=-5 \rightarrow B(-5, 0)$ es el punto de corte con el eje X.
- Luego $\overline{AB} = dist(A, B) = \sqrt{(5-0)^2+\left(0-\dfrac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{25+\dfrac{25}{4}} = \sqrt{\dfrac{125}{4}} = \dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

46 Halla las distancias de $O(0, 0)$ y $P(-1, 2)$ a estas rectas:

a) $3x - 4y + 5 = 0$ **b) $2x + 5 = 0$**

c) $\begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 8\lambda \end{cases}$ **d) $(x, y) = \left(\dfrac{-1}{2}, 1\right) + (2, 1)\lambda$**

a) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{9+16}} = 1$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|3\cdot(-1)-4\cdot 2+5|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{6}{5}$ u

b) $dist(O, r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{5}{2}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2\cdot(-1)+5|}{\sqrt{0+4}} = \dfrac{3}{2}$ u

c) $r: \dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{8} \rightarrow 8x-6y=0$

$dist(O, r) = \dfrac{|0|}{\sqrt{64+36}} = 0$ u $\rightarrow O \in r$

$dist(P, r) = \dfrac{|8\cdot(-1)-6\cdot 2|}{\sqrt{64+36}} = 2$ u

d) $r: \dfrac{x+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{y-1}{1} \rightarrow x+\dfrac{1}{2} = 2y-2 \rightarrow x-2y+\dfrac{3}{2}=0 \rightarrow 2x-4y+3=0$

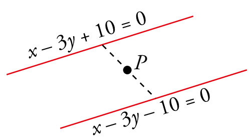
$dist(O, r) = \dfrac{|3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{3}{10}\sqrt{5}$ u

$dist(P, r) = \dfrac{|2\cdot(-1)-4\cdot 2+3|}{\sqrt{4+16}} = \dfrac{7}{10}\sqrt{5}$ u

47 Determina c para que la distancia de $r: x - 3y + c = 0$ al punto $(6, 2)$ sea de $\sqrt{10}$ unidades (hay dos soluciones).

$dist(P, r) = \dfrac{|1\cdot 6-3\cdot 2+c|}{\sqrt{1+9}} = \dfrac{|6-6+c|}{\sqrt{10}} = \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

Hay dos soluciones: $\begin{cases} \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \rightarrow c_1 = 10 \\ \dfrac{|c|}{\sqrt{10}} = -\sqrt{10} \rightarrow c_2 = -10 \end{cases}$



Las dos rectas solución serán dos rectas paralelas.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

48 Halla la distancia entre los siguientes pares de rectas:

a) $r: 3x + 5 = 0;\ \ s: \begin{cases} x = 2/5 \\ y = 3 - 4\lambda \end{cases}$

b) $r: y = \dfrac{-2}{3}x + 1;\ \ s: \dfrac{1-x}{3} = \dfrac{y+1}{2}$

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{cases};\ \ s: \begin{cases} x = 1 - 8\lambda \\ y = 6\lambda \end{cases}$

d) $r: 2x + 4y + 8 = 0;\ \ s: y = -\dfrac{1}{2}x$

a) $P' = (0, 0) \in r'$

$dist(r, r') = dist(P', r) = \dfrac{|5|}{\sqrt{9+0}} = \dfrac{5}{3}$ u

b) Las rectas son paralelas.

$P' = (1, -1) \in r'$

$r: 2x + 3y - 1 = 0$

$dist(r, r') = dist(P', r) =$ u

c) Son paralelas, $P(1, 0) \in s$.

$r: 3x + 4y - 10 = 0 \ \rightarrow\ d(r, s) = d(P, s) = \dfrac{|3-10|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{7}{5}$

d) Veamos que no son paralelas y por lo tanto su distancia es cero. Encontramos el punto de corte (8, –4) o vemos por sus vectores que no son paralelas:

$$s: \vec{v}(1, -2)$$

Tal y como nos dan r lo más rápido es encontrar su vector normal $\vec{n}(2, 4)$ o un vector director $\vec{u}(4, -2)$.

Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales no pueden ser paralelos.

49 Comprueba que el triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ y $C(4, 2)$ es rectángulo y halla su área.

Veamos si se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(0+3)^2 + (5-1)^2} = 5 \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(4+3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{50} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + (2-5)^2} = 5 \end{array}\right\}\ 5^2 + 5^2 = (\sqrt{50})^2 \ \rightarrow \ \text{Por tanto, el triángulo es rectángulo.}$$

Área $= \dfrac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \dfrac{1}{2} \cdot 25 = 12,5$ u^2

50 Halla el área del cuadrado de diagonal AB, con $A(5, -3)$ y $B(-7, 2)$.

$\overrightarrow{AB} = (-12, 5)$

$|\overrightarrow{AB}| = 13$

Buscamos el punto medio entre A y B:

$$Q = \frac{A+B}{2} = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Buscamos la recta d perpendicular a AB por Q, con vector $\vec{n}(5, 12)$:

b: $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+\frac{1}{2}}{12}$; sus puntos son de la forma: $\left(-1+5t, -\dfrac{1}{2}+12t\right)$

Sabemos que los puntos C y D pertenecen a la recta b y su distancia a Q es la mitad de la distancia entre A y B:

$$C\left(-1+5t, -\frac{1}{2}+12t\right)$$

$$|\overrightarrow{QC}| = |(5t,\ 12t)| = \sqrt{25t^2+144t^2} = \pm 13t = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{13}{2} \ \rightarrow\ t = \pm\frac{1}{2}$$

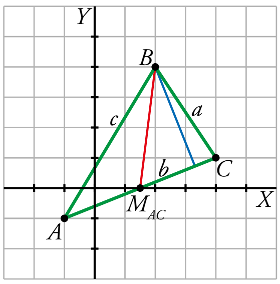
- Si $t = +\dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ C = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{11}{2}\right)$
- Si $t = -\dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ D = \left(\dfrac{-7}{2}, \dfrac{-13}{2}\right)$

$\text{Área} = |\overrightarrow{AC}|^2 = \dfrac{169}{2} = 84{,}5 \text{ u}^2$

NOTA: La podríamos haber encontrado más rápidamente teniendo en cuenta que el área se puede expresar también en función de la medida de su diagonal:

$$\text{Área} = \frac{d^2}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2} = \frac{13^2}{2} = \frac{169}{2} = 84{,}5 \text{ u}^2$$

51 **En el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(2, 4)$ y $C(4, 1)$, halla las longitudes de la mediana y de la altura que parten de B.**



a) Longitud de la mediana = $dist(B, M_{AC})$

$M_{AC} = \left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

$dist\ (B, M_{AC}) = \sqrt{\left(2-\dfrac{3}{2}\right)^2 + (4-0)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{65}$

b) Longitud de la altura = $dist(B, \text{lado } AC)$

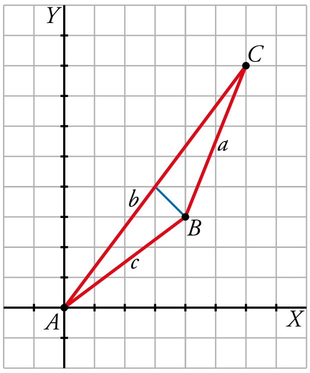
$\overrightarrow{AC} = (5, 2)$

r: $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+1}{2} \ \rightarrow\ 2x+2 = 5y+5 \ \rightarrow$ lado AC: $2x - 5y - 3 = 0$

$dist(B, r) = \dfrac{|2\cdot 2 - 5\cdot 4 - 3|}{\sqrt{4+25}} = \dfrac{19}{29}\sqrt{29}$ u

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

52 **Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, 3)$ y $C(6, 8)$, calcula su área.**



$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$

$\text{Base} = dist(A, C) = \sqrt{(0-6)^2 + (0-8)^2} = 10 \text{ u}$

$\text{Altura} = dist(B, \text{lado } AC)$

Lado AC:

$\overrightarrow{AC} = (6, 8)$

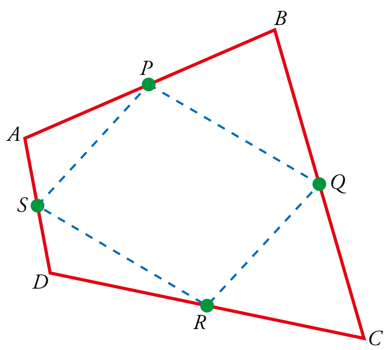
$r: \frac{x}{6} = \frac{y}{8} \rightarrow 8x - 6y = 0 \rightarrow 4x - 3y = 0$

$dist(B, \text{lado } AC) = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{7}{5} \text{ u}$

$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7}{5} = 7 \text{ u}^2$

Para resolver

53 **Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices $A(3, 8)$, $B(5, 2)$, $C(1, 0)$ y $D(-1, 6)$.**



$P\left(\frac{5+3}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = (4, 5)$

$Q(3, 1)$; $R(0, 3)$; $S(1, 7)$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (3-4, 1-5) = (-1, -4) \\ \overrightarrow{SR} = (0-1, 3-7) = (-1, -4) \end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{SP} = (4-1, 5-7) = (3, -2) \\ \overrightarrow{RQ} = (3-0, 1-3) = (3, -2) \end{array}\right\} \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$

54 **En un triángulo equilátero conocemos dos vértices, $A(\sqrt{3}/2, 0)$ y $B(-\sqrt{3}/2, 0)$. Halla el tercer vértice.**

El vértice $C = (x, y)$ está en la mediatriz del segmento AB y $dist(A, C) = dist(A, B)$.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

r: Mediatriz de AB

$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 0)$

Punto medio de AB:

$M_{AB} = (0, 0)$

$r: x = 0$

$$dist(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4}}$$

$$dist(A, B) = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{3}$$

Las coordenadas de C son la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - \sqrt{3}x + y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + \frac{3}{4} = \sqrt{3} \end{cases} \to y = \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3} \to y = -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}$$

Hay dos triángulos equiláteros con vértices A y B.

$$C = \left(0, \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right),\ C' = \left(0, -\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{3} - 3}\right)$$

55 Los puntos $A(2, 2)$ y $B(5, 1)$ son dos vértices consecutivos del hexágono regular $ABCDEF$. Calcula:

a) La altura del hexágono (el doble de su apotema). **b) El área del hexágono.**

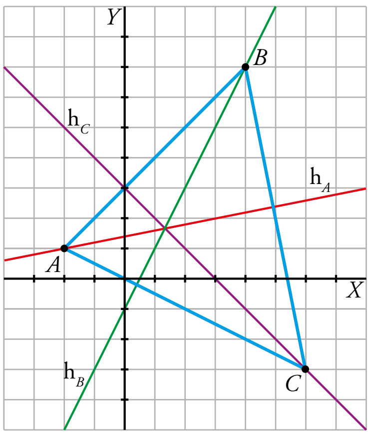
a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = (3, -1)$ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{10}$

Al ser A y B vértices consecutivos del hexágono, serán también dos vértices de uno de los 6 triángulos equiláteros que hay dentro del hexágono, por lo que sabemos cuánto miden los lados de estos triángulos. La altura del triángulo h parte en dos triángulos rectángulos a dicho triángulo equilátero, por lo que podemos aplicar el teorema de Pitágoras para encontrar dicha altura:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \mathrm{h}^2 + \left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right|^2 \to 10 = \mathrm{h}^2 + \frac{10}{4} \to \mathrm{h} = \frac{\sqrt{30}}{2} \to \mathrm{h}' = \sqrt{30} \text{ es la altura del hexágono}$$

b) $$\text{Área}_{\text{HEXÁGONO}} = 6 \cdot \text{Área}_{\text{TRIÁNGULO}} = 6 \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \mathrm{h}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{30}}{2}}{2} = 15\sqrt{3}$$

56 Calcula las ecuaciones de las alturas del triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$. Halla el ortocentro.



- h_A es perpendicular a BC y pasa por $A = (1, 3)$.

  $\overrightarrow{BC} = (2, -10) = 2(1, -5)$

  h_A tiene vector de dirección $\vec{d} = (5, 1)$ y pasa por $A = (-2, 1)$.

  $$h_A: \frac{x + 2}{5} = \frac{y - 1}{1} \to x + 2 = 5y - 5 \to x - 5y + 7 = 0$$

- h_B es perpendicular a AC y pasa por $B = (4, 7)$.

  $\overrightarrow{AC} = (8, -4) = 4(2, -1)$

  h_B tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 2)$ y pasa por $B = (4, 7)$.

  $$h_B: \frac{x - 4}{1} = \frac{y - 7}{2} \to 2x - 8 = y - 7 \to 2x - y - 1 = 0$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

- h_C es perpendicular a AB y pasa por $C = (6, -3)$.

  $\overrightarrow{AB} = (6, 6) = 6(1, 1)$

  h_C tiene vector de dirección $\vec{d} = (-1, 1)$ y pasa por $C = (6, -3)$.

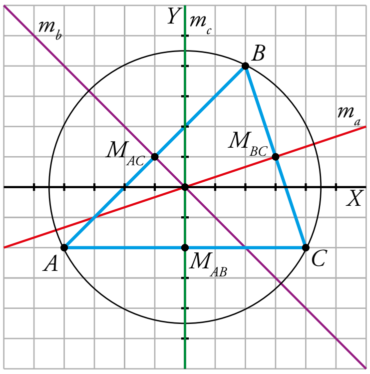
  h_C: $\dfrac{x-6}{-1} = \dfrac{y+3}{1} \to x - 6 = -y - 3 \to x + y - 3 = 0$

  El ortocentro es el punto de intersección de las alturas. Como las tres alturas se cortan en el mismo punto, para calcular el ortocentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las alturas.

  $$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \to x = \frac{4}{3},\ y = \frac{5}{3}$$

  Las coordenadas del ortocentro son $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

57 Da las ecuaciones de las mediatrices del triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(2, 4)$. Halla el circuncentro.



- m_a es perpendicular a BC y pasa por M_{BC}.

  BC tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (-2, 6) = 2(-1, 3)$.

  $M_{BC} = (3, 1)$

  m_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 1)$ y pasa por $M_{BC} = (3, 1)$.

  m_a: $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-1}{1} \to x - 3y = 0$

- m_b es perpendicular a AC y pasa por M_{AC}.

  AC tiene vector de dirección $\overrightarrow{AC} = (6, 6) = 6(1, 1)$.

  $M_{AC} = (-1, 1)$

  m_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -1)$ y pasa por $M_{BC} = (-1, 1)$.

  m_b: $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-1} \to x + y = 0$

- m_c es perpendicular a AB y pasa por M_{AB}.

  AB tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (8, 0) = 8(1, 0)$.

  $M_{AB} = (0, -2)$

  m_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $M_{AB} = (0, -2)$.

  m_c: $x = 0$

  El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices. Como las tres mediatrices se cortan en el mismo punto, para calcular el circuncentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las mediatrices.

  $$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \to x = 0,\ y = 0$$

  Las coordenadas del circuncentro son: $(0, 0)$.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

58 **Los puntos $A(-2, 6)$, $B(-5, -3)$ y $C(2, -2)$ son tres puntos de una circunferencia. Calcula su centro y su radio.**

El centro de la circunferencia será el punto intersección de las 3 mediatrices de los lados del triángulo *ABC*, que pasan por el punto medio de sus lados y el vértice contrario:

$\overrightarrow{AB} = (-3, -9)$

$\overrightarrow{BC} = (7, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (4, -8)$

$A' = \dfrac{B + C}{2} = \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$

$B' = \dfrac{A + C}{2} = (0, 2)$

$C' = \dfrac{A + B}{2} = \left(-\dfrac{7}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

m_a pasa por A', podemos definir un vector director $\vec{a}$ perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (7, 1) \to$

$\to \vec{a}(1, -7)$ y $m_a: \dfrac{x + \frac{3}{2}}{1} = \dfrac{y + \frac{5}{2}}{-7}$

m_b pasa por B', podemos definir un vector director $\vec{b}$ perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (4, -8) \to$
$\to \vec{b}(2, 1)$ y $m_b: x = 2y - 4$

m_c pasa por C', podemos definir un vector director $\vec{c}$ perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (-3, -9) \to$

$\to \vec{c}(3, -1)$ y $m_c: \dfrac{x + \frac{7}{2}}{3} = \dfrac{y - \frac{3}{2}}{-1}$

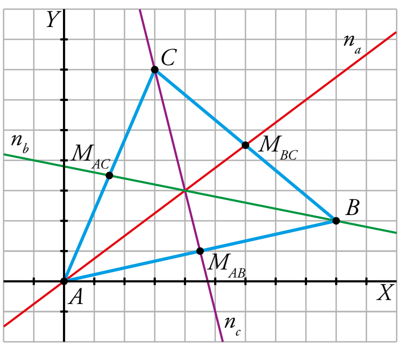
Buscamos el centro de la circunferencia en la intersección de dos de las 3 mediatrices:

$$m_b \cap m_c = O \to \begin{cases} -\left(x + \dfrac{7}{2}\right) = 3\left(y - \dfrac{3}{2}\right) \\ x = 2y - 4 \end{cases}$$

$O(-2, 1)$ será el centro de la circunferencia, su radio será $|\overrightarrow{OC}| = 5$.

59 **[La aplicación de las definiciones necesarias para buscar las rectas y el punto indicados servirá para que el alumnado trabaje el autoconocimiento (dimensión personal)].**

En el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(9, 2)$ y $C(3, 7)$, determina las ecuaciones de las medianas y calcula el baricentro.



- n_a pasa por A y por M_{BC}.

$M_{BC} = \left(\dfrac{12}{2}, \dfrac{9}{2}\right) = \left(6, \dfrac{9}{2}\right)$

$\overrightarrow{AM_{BC}} = \left(6, \dfrac{9}{2}\right) = \dfrac{3}{2}(4, 3)$

n_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (4, 3)$ y pasa por $A = (0, 0)$.

$n_a: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{3} \to 3x - 4y = 0$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

- n_b pasa por B y por M_{AC}.

$M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

$\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(\frac{-15}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(-5, 1)$

n_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (-5, 1)$ y pasa por $B = (9, 2)$.

n_b: $\frac{x-9}{-5} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x - 9 = -5y + 10 \rightarrow x + 5y - 19 = 0$

- n_c pasa por C y por M_{AB}.

$M_{AB} = \left(\frac{9}{2}, 1\right)$

$\overrightarrow{CM_{AB}} = \left(\frac{3}{2}, -6\right) = \frac{3}{2}(1, -4)$

n_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -4)$ y pasa por $C = (3, 7)$.

n_c: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-4} \rightarrow -4x + 12 = y - 7 \rightarrow -4x - y + 19 = 0$

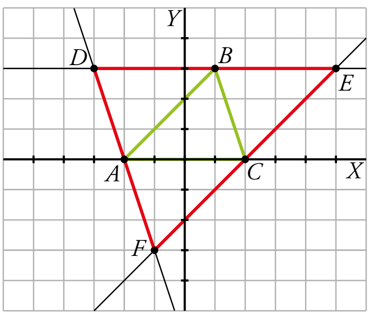
El baricentro es el punto de intersección de las medianas. Como las tres medianas se cortan en el mismo punto, para calcular el baricentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las medianas.

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -4x - y + 19 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 4, y = 3$$

Las coordenadas del baricentro son: (4, 3).

60 En un triángulo de vértices $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ y $C(2, 0)$ trazamos desde cada vértice una recta paralela al lado opuesto. Halla los vértices del triángulo que determinan los puntos de corte de estas rectas y comprueba que es semejante a ABC.

** Para comprobar que dos triángulos son semejantes, basta ver que sus ángulos son iguales.*



$\overrightarrow{AB} = (3, 3) = 3(1, 1)$

$\overrightarrow{AC} = (4, 0) = 4(1, 0)$

$\overrightarrow{BC} = (1, -3)$

El lado EF:

- Es paralelo a AB y pasa por C.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $C = (2, 0)$.
- $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} \rightarrow x - 2 = y \rightarrow x - y - 2 = 0$

El lado DE:

- Es paralelo a AC y pasa por B.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $B = (1, 3)$.
- $y = 3$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

El lado DF:

- Es paralelo a BC y pasa por A.
- Tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, -3)$ y pasa por $C = (-2, 0)$.
- $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-3} \rightarrow -3x - 6 = y \rightarrow -3x - y - 6 = 0$

Los puntos de corte de cada par de rectas son: $D(-3, 3)$, $E(5, 3)$ y $F(-1, -3)$.

$$cos\,\widehat{D} = cos\,(\widehat{(1,-3),(1,0)}) = cos\,(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}}) = cos\,\widehat{C}$$

$$cos\,\widehat{E} = cos\,(\widehat{(1,1),(1,0)}) = cos\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = cos\,\widehat{A}$$

Si tienen dos ángulos iguales, los triángulos son semejantes.

61 **a) Calcula el punto, P', de la recta r: $x - 2y + 4 = 0$ más cercano al punto $P(1, -2)$.**

b) ¿A qué distancia se encuentra de él?

c) Comprueba que la distancia que has hallado es igual a la distancia de P a r.

La distancia mínima de un punto a una recta se halla trazando la perpendicular de dicho punto a la recta, por lo que buscaremos la recta s que pasa por P y es perpendicular a r. El vector perpendicular a r será $v(1, -2)$.

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} \rightarrow -2x + 2 = y + 2$$

El punto buscado es la intersección de r y s:

$$\begin{cases} x = 2y + 4 \\ -2x + 2 = y + 2 \end{cases}$$

b) $dist(P, P') = \sqrt{\left(1 + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{8}{5}\right)^2} = \frac{9}{\sqrt{5}}$

c) $dist(P, r) = \frac{|1 + 4 + 4|}{\sqrt{1+4}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$

62 **Calcula el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas r: $x = 3$; s: $2x + 3y - 6 = 0$ y t: $x - y - 7 = 0$.**

Los vértices están en la intersección de las rectas.

$A = r \cap s$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 0 \rightarrow A = (3, 0)$$

$B = r \cap t$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = -4 \rightarrow B = (3, -4)$$

$C = s \cap t$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{27}{5}, y = -\frac{8}{5} \rightarrow C = \left(\frac{27}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

Área $= \frac{1}{2} \cdot$ base $\cdot$ altura

Base $= dist(A, B) = \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2} = 4$ u

Altura $= dist(C, lado\ AB)$

$Lado\ AB = l$; $\overrightarrow{AB} = (0, 4) = 4(0, 1)$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

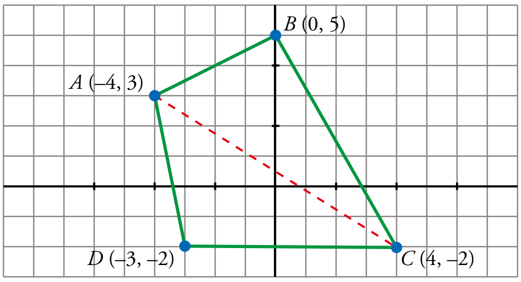
l tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $A = (3, 0)$.

$l: x = 3 \rightarrow x - 3 = 0$

$$dist(C, lado\ AB) = \frac{\left|\frac{27}{5} - 3\right|}{1} = \frac{12}{5} \text{ u}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{12}{5} = \frac{24}{5} \text{ u}^2$$

63 Halla el área del cuadrilátero de vértices $A(-4, 3)$, $B(0, 5)$, $C(4, -2)$ y $D(-3, -2)$.



- La diagonal AC divide el cuadrilátero en dos triángulos con la misma base, cuya medida es:

  $|\overrightarrow{AC}| = |(8, -5)| = \sqrt{89}$

- Sean h_B y h_D las alturas desde B y D, respectivamente, a la base:

  $h_B = dist(B, r)$ y $h_D = dist(D, r)$

  donde r es la recta que contiene el segmento $\overrightarrow{AC}$.

  Tomando como vector dirección de r el vector $\overrightarrow{AC}$, la ecuación de dicha recta es:

  $$\left.\begin{array}{l} 5x + 8y + k = 0 \\ \text{Como } (-4, 3) \in r \end{array}\right\} -20 + 24 + k = 0 \rightarrow k = -4 \rightarrow r: 5x + 8y - 4 = 0$$

  Luego:

  $$h_B = dist(B, r) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{36}{\sqrt{89}}$$

  $$h_D = dist(D, r) = \frac{|5(-3) + 8(-2) - 4|}{\sqrt{89}} = \frac{35}{\sqrt{89}}$$

- Así:

  $$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ADC} = \frac{b \cdot h_B}{2} + \frac{b \cdot h_D}{2} = \frac{b}{2}(h_B + h_D) = \frac{\sqrt{89}}{2}\left(\frac{36}{\sqrt{89}} + \frac{35}{\sqrt{89}}\right) = \frac{71}{2}$$

64 El lado desigual del triángulo isósceles ABC, tiene por extremos $A(1, -2)$ y $B(4, 3)$. El vértice C está en la recta $3x - y + 8 = 0$. Halla las coordenadas de C y el área del triángulo.

- La recta del lado desigual (base) tiene como vector dirección $\overrightarrow{AB} = (3, 5)$:

  $$r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} \rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{5} \rightarrow r: 5x - 3y - 11 = 0$$

- La recta que contiene la altura tiene por vector dirección $\vec{a} = (-5, 3) \perp \overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio del lado desigual AB, es decir, por $M\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

  $$h_c: \begin{cases} x = \frac{5}{2} - 5t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \end{cases} \rightarrow \frac{2x-5}{-10} = \frac{2y-1}{6} \rightarrow h_c: 12x + 20y - 40 = 0 \rightarrow h_c: 6x + 10y - 20 = 0$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

- $C = s \cap h_c$ donde $s: 3x - y + 8 = 0$.

$$\begin{cases} 3x - \ \ y + \ 8 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} -6x + \ 2y - 16 = 0 \\ \ \ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$$

$12y - 36 = 0 \to y = \dfrac{36}{12} = 3 \to 3x - 3 + 8 = 0 \to 3x + 5 = 0 \to x = \dfrac{-5}{3}$

Luego: $C\left(\dfrac{-5}{3}, 3\right)$

- Área $= \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CM}|}{2} \overset{(*)}{=} \dfrac{\sqrt{34} \cdot \sqrt{\left(\dfrac{850}{6}\right)}}{2} \approx 14,17$

$$(*) \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, 5) \to |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{34} \\ \overrightarrow{CM}\left(\dfrac{-25}{6}, \dfrac{-5}{2}\right) \to |\overrightarrow{CM}| = \dfrac{\sqrt{850}}{6} \end{cases}$$

65 **Calcula c para que la distancia entre las rectas de ecuaciones $4x + 3y - 6 = 0$ y $4x + 3y + c = 0$ sea igual a 3.**

Sea $P \in r_1$ donde $x_0 = 0 \to y_0 = 2 \to P(0, 2) \in r_1$

Así, $dist(r_1, r_2) = dist(P, r_2) = \dfrac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + c|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \to \dfrac{|6 + c|}{5} = 3 \to \begin{cases} 6 + c = 15 \to c_1 = 9 \\ 6 + c = -15 \to c_2 = -21 \end{cases}$

Página 220

66 **Determina, en cada caso, un punto P de la recta $r: y = -x + 1$ tal que:**

a) La distancia de P a $s: 3x - 4y + 2 = 0$ sea 1.

b) P diste 3 unidades del eje OX.

c) La distancia de P al eje OY sea 4 unidades.

d) P equidiste de las rectas $x - y + 5 = 0$ y $x + y + 1 = 0$.

a) $P = (x, y)$

$P \in r \to y = -x + 1$

$dist(P, r) = \dfrac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = 1$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \dfrac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = 1 \end{cases} \to \frac{|3x - 4(-x + 1) + 2|}{\sqrt{9 + 16}} = 1 \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{3x - 4(-x + 1) + 2}{\sqrt{9 + 16}} = 1 \to x = 1 \\ \dfrac{3x - 4(-x + 1) + 2}{\sqrt{9 + 16}} = -1 \to x = -\dfrac{3}{7} \end{cases} \to \begin{cases} x = 1 \to y = 0 \\ x = -\dfrac{3}{7} \to y = \dfrac{10}{7} \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = \left(-\dfrac{3}{7}, \dfrac{10}{7}\right)$

b) Eje $OX: y = 0$

$dist(P, OX) = \dfrac{|y|}{1} = 3$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|y|}{1} = 3 \end{cases} \rightarrow \dfrac{|-x+1|}{1} = 3 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x+1}{1} = 3 \rightarrow x = -2 \\ \dfrac{-x+1}{1} = -3 \rightarrow x = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow y = 3 \\ x = 4 \rightarrow y = -3 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (-2, 3)$, $P_2 = (4, -3)$

c) Eje OY: $x = 0$

$$dist(P, OX) = \frac{|x|}{1} = 4$$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|x|}{1} = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{1} = 4 \rightarrow x = 4 \\ \dfrac{x}{1} = -4 \rightarrow x = -4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow y = -3 \\ x = -4 \rightarrow y = 5 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (4, -3)$, $P_2 = (-4, 5)$

d) $dist(P, r) = \dfrac{|x-y+5|}{\sqrt{1+1}}$, $dist(P, r') = \dfrac{|x+y+1|}{\sqrt{1+1}}$

Las coordenadas de P son la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ \dfrac{|x-y+5|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{|x+y+1|}{\sqrt{1+1}} \end{cases} \rightarrow |x-(-x+1)+5| = |x+(-x+1)+1| \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-(-x+1)+5 = x+(-x+1)+1 \rightarrow x = -1 \\ x-(-x+1)+5 = -(x+(-x+1)+1) \rightarrow x = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow y = 2 \\ x = -3 \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1 = (-1, 2)$, $P_2 = (-3, 4)$

67 Halla un punto del eje de abscisas que equidiste de las rectas $4x + 3y + 6 = 0$ y $3x + 4y - 9 = 0$.

$P(x, 0)$ debe verificar $dist(P, r) = dist(P, s)$:

$$\frac{|4x+3\cdot 0+6|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x+4\cdot 0-9|}{\sqrt{25}} \rightarrow \begin{cases} 4x+6 = 3x-9 \rightarrow x_1 = -15 \\ 4x+6 = -(3x-9) \rightarrow x_2 = 3/7 \end{cases}$$

Soluciones: $P_1(-15, 0)$, $P_2\left(\dfrac{3}{7}, 0\right)$

68 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas r y s y forma un ángulo de 45° con la recta $x + 5y - 6 = 0$.

r: $3x - y - 9 = 0$ $\quad$ s: $x - 3 = 0$

Llamamos t a la recta que buscamos. t pasa por $P = r \cap s$ y tiene pendiente m.

$$tg\, 45° = \left|\frac{m-5}{1+5m}\right| \rightarrow 1 = \left|\frac{m-5}{1+5m}\right| \rightarrow \begin{cases} \dfrac{m-5}{1+5m} = 1 \rightarrow m = -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{m-5}{1+5m} = -1 \rightarrow m = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y - 9 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3,\ y = 0 \rightarrow P = (3, 0)$$

t_1 tiene pendiente $m = -\dfrac{3}{2}$ y pasa por $P = (3, 0)$.

$$t_1:\ y = -\frac{3}{2}(x-3)$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

t_2 tiene pendiente $m = \frac{2}{3}$ y pasa por $P = (3, 0)$.

t_2: $y = \frac{2}{3}(x - 3)$

69 **Dadas r: $2x - y - 17 = 0$ y s: $3x - ky - 8 = 0$, calcula k para que r y s se corten formando un ángulo de 60°.**

$$cos\,(\widehat{r, s}) = \left|\frac{(1,2)\cdot(k,3)}{\sqrt{1+4}\sqrt{k^2+9}}\right| \to cos\,60° = \left|\frac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}}\right| \to \frac{1}{2} = \left|\frac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} \dfrac{1}{2} = \dfrac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}} \to k = 24 - 15\sqrt{3} \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{k+6}{\sqrt{5}\sqrt{k^2+9}} \to k = 24 + 15\sqrt{3} \end{cases}$$

Soluciones: $k_1 = 24 - 15\sqrt{3}$; $k_2 = 24 + 15\sqrt{3}$

70 **Halla los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A(-3, 2)$, $B(8, -1)$ y $C(3, -4)$.**

$\overrightarrow{AB} = (11, -3)$; $\overrightarrow{AC} = (6, -6) = 6(1, -1)$; $\overrightarrow{BC} = (-5, -3)$

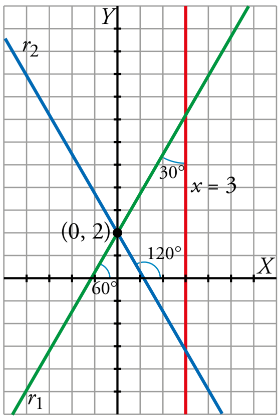
r contiene al lado AB; s contiene al lado AC; t contiene al lado BC

$$cos\,(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{(11,-3)\cdot(1,-1)}{\sqrt{121+9}\sqrt{1+1}} = 0,87 \to (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 29°\,45'$$

$$cos\,(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{(-11,3)\cdot(-5,-3)}{\sqrt{121+9}\sqrt{25+9}} = 0,69 \to (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = 46°\,14'$$

$$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 180° - (29°\,45' + 46°\,14') = 104°\,1'$$

71 **Halla la ecuación de la recta que pasa por (0, 2) y forma un ángulo de 30° con $x = 3$.**



La recta r forma un ángulo de 60° o de 120° con el eje OX.

Su pendiente es:

$$\begin{cases} m_1 = tg\,60° = \sqrt{3}, \text{ o bien} \\ m_2 = tg\,120° = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que debe pasar por $P(0, 2)$, las posibles soluciones son:

r_1: $y = \sqrt{3}x + 2$

r_2: $y = -\sqrt{3}x + 2$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

72 **Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por $A(-2, 2)$ y forman un ángulo de 60° con $x = y$.**

$b: x = y \to$ su pendiente es $m_b = 1$

$$tg\ 60° = \left|\frac{1-m}{1+1\cdot m}\right| \to \sqrt{3} = \left|\frac{1-m}{1+m}\right| \to$$

$$\to \begin{cases} \sqrt{3}+\sqrt{3}m = 1-m \to m_1 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \\ -\sqrt{3}-\sqrt{3}m = 1-m \to m_2 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que pasan por $A(-2, 2)$:

$$r_1: y-2 = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}(x+2)$$

$$r_2: y-2 = \frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+1}(x+2)$$

ECUACIONES PUNTO-PENDIENTE

73 **Dada la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$, halla la ecuación de la recta simétrica de r respecto al eje de abscisas.**

Calculamos $P = r \cap OX$:

$$\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ y=0 \end{cases} \to x = -\frac{5}{2},\ y = 0 \to P = \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$

Buscamos un punto Q de r y encontramos su simétrico, Q', respecto de OX:

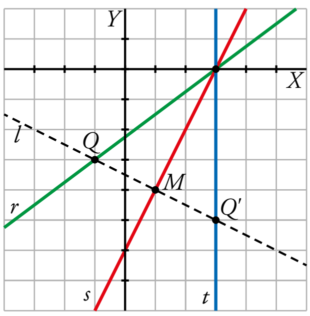
$$Q = \left(0, \frac{5}{3}\right) \to Q' = \left(0, -\frac{5}{3}\right)$$

La recta r' pasa por P y por Q':

$$\overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{6}(3, -2)$$

$$r': \frac{x+\frac{5}{2}}{3} = \frac{y}{-2}$$

74 **Halla la recta, t, simétrica a $r: -3x + 4y + 9 = 0$ respecto de la recta $s: 2x - y - 6 = 0$.**



Calculamos $P = r \cap s$:

$$\begin{cases} -3x+4y+9=0 \\ 2x-y-6=0 \end{cases} \to x = 3,\ y = 0 \to P = (3, 0)$$

Buscamos un punto $Q \neq P$ de r y encontramos su simétrico, Q', respecto de s.

$Q \in r \to x = -1 \to y = -3$

$Q = (-1, -3)$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Simétrico de Q respecto de s:

Calculamos la recta l perpendicular a s que pasa por Q:

l tiene vector de dirección $\vec{d} = (2, -1)$ y pasa por $Q = (-1, -3)$.

$l: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+3}{-1} \to -x-1 = 2y+6 \to -x-2y-7=0$

$M = s \cap l$

$\begin{cases} -x-2y-7=0 \\ 2x-y-6=0 \end{cases} \to x = 1, y = -4 \to M = (1, -4)$

M es el punto medio entre Q y $Q' = (x, y)$.

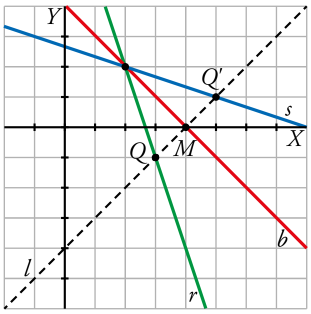
$(1, -4) = \left(\dfrac{x-1}{2}, \dfrac{y-3}{2}\right) \to \begin{cases} 1 = \dfrac{x-1}{2} \to x = 3 \\ -4 = \dfrac{y-3}{2} \to y = -5 \end{cases} \to Q' = (3, -5)$

La recta t pasa por P y por $Q' = (3, -5)$:

$\overrightarrow{PQ'} = (0, -5) = 5(0, 1)$

$t: x = 3$

75 **La recta $b: y = -x + 4$ es la bisectriz del ángulo formado por las rectas $r: 3x + y - 8 = 0$ y s. Halla la ecuación de s.**



s es la simétrica de r respecto de b.

b tiene pendiente $m = -1$. Calculamos $P = r \cap b$:

$\begin{cases} 3x + y - 8 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \to x = 2, y = 2 \to P = (2, 2)$

Buscamos un punto $Q \neq P$ de r y encontramos su simétrico, Q', respecto de b.

$Q \in r \to x = 3 \to y = -1$

$Q = (3, -1)$

Para hallar el simétrico de Q respecto de b, calculamos la recta l perpendicular a b que pasa por Q:

l tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $Q = (3, -1)$.

$l: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{1} \to x - 3 = y + 1 \to x - y - 4 = 0$

$M = b \cap l$

$\begin{cases} y = -x + 4 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \to x = 4, y = 0 \to M = (4, 0)$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

M es el punto medio entre Q y $Q' = (x, y)$:

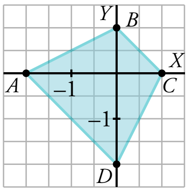
$$(4, 0) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y-1}{2}\right) \to \begin{cases} 4 = \dfrac{x+3}{2} \to x = 5 \\ 0 = \dfrac{y-1}{2} \to y = 1 \end{cases} \to Q' = (5, 1)$$

La recta s pasa por P y por $Q' = (5, 1)$

$\overrightarrow{PQ'} = (3, -1)$

$$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1}$$

76 **Sean A, B, C y D los puntos de corte de las rectas $x - 2y + 2 = 0$ y $2x - y - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas. Prueba que el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles y halla su área.**



Sean: $A = r \cap \text{eje } OX$: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = -2 \to A(-2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } OY$: $\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 1 \to B(0, 1)$

$C = s \cap \text{eje } OX$: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to x = 1 \to C(1, 0)$

$D = s \cap \text{eje } OY$: $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to y = -2 \to D(0, -2)$

Calculamos los vectores dirección de los lados:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, 1) \\ \overrightarrow{BC} = (1, -1) \\ \overrightarrow{CD} = (-1, -2) \\ \overrightarrow{DA} = (-2, 2) \end{array}\right\} \to \begin{cases} \overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{BC} \to \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA} \\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5} = |\overrightarrow{CD}| \end{cases}$$

Luego, efectivamente, $ABCD$ es un trapecio isósceles de bases BC y DA.

Para calcular el área necesitamos la altura:

$$\text{Como } \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD}(2, -2) \\ D(0, -2) \end{array}\right\} \to y = -x - 2 \to AD: x + y + 2 = 0$$

$$\text{h} = dist(B, AD) = \frac{|0 + 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Así:

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{DA}|}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2}$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

77 La recta $x + y - 2 = 0$ y una recta paralela a ella que pasa por el punto (0, 5) determinan, junto con los ejes de coordenadas, un trapecio isósceles. Halla su área.

$$\left.\begin{array}{l} s \,//\, r: x + y - 2 = 0 \;\to\; x + y + k = 0 \\ P(0, 5) \in s \end{array}\right\} \to\; 0 + 5 + k = 0 \;\to\; k = -5$$

Luego $s: x + y - 5 = 0$

Sean: $A = r \cap \text{eje } X: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to\; x = 2 \;\to\; A(2, 0)$

$B = r \cap \text{eje } Y: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to\; y = 2 \;\to\; B(0, 2)$

$C = s \cap \text{eje } X: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to\; x = 5 \;\to\; C(5, 0)$

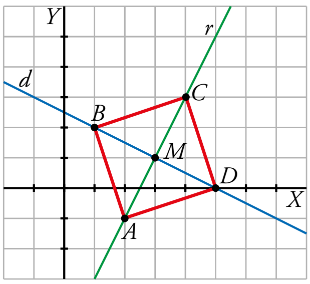
$D = s \cap \text{eje } Y: \begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \to\; y = 5 \;\to\; D(0, 5)$

$\overrightarrow{AB} = (-2, 2);\; \overrightarrow{CD} = (-5, 5)$

$$\text{Área} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot \text{h} = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot dist\,(A, s) = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{50}}{2} \cdot \frac{|2 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{21}{2}\ \text{u}^2$$

78 De un cuadrado conocemos la ecuación de una de sus diagonales, $d: x + 2y - 5 = 0$, y un vértice, $A(2, -1)$. Calcula el resto de vértices y su área.



$A \notin d$, luego el vértice C es el simétrico de A respecto de d.

r: perpendicular a d que pasa por A.

r tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 2)$ y pasa por $A = (2, -1)$.

$r: \dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 1}{2} \;\to\; 2x - y = 5$

$M = r \cap d$

$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \to\; x = 3, y = 1 \;\to\; M = (3, 1)$

M es el punto medio entre A y $C = (x, y)$.

$$(3, 1) = \left(\frac{x + 2}{2}, \frac{y - 1}{2}\right) \to \begin{cases} 3 = \dfrac{x + 2}{2} \;\to\; x = 4 \\ 1 = \dfrac{y - 1}{2} \;\to\; y = 3 \end{cases} \to\; C = (4, 3)$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

El vértice $B = (x, y)$ verifica: $B \in d$ y $dist(M, A) = dist(M, B)$, luego B es solución del sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-1)^2} \end{cases} \to \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{5} \end{cases} \to x = 1,\ y = 2;\ x = 5,\ y = 0$$

Estas son las coordenadas de los vértices que faltan: $B = (1, 2)$, $D = (5, 0)$.

Tenemos un cuadrado de lado $\sqrt{10}$. Su área es $10\ u^2$.

79 Halla el área del mayor triángulo rectángulo inscrito en una circunferencia de diámetro AB, con $A(5, -3)$ y $B(-7, 2)$.

Para que el área sea máxima su base y su altura deberán ser tan grandes como podamos, por lo que deberán ser su diámetro y su radio:

$$\text{diámetro} = |\overrightarrow{AB}| = |(-12,5)| = 13$$

$$\text{radio} = \frac{\text{diámetro}}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{\text{diámetro} \cdot \text{radio}}{2} = \frac{13 \cdot \frac{13}{2}}{2} = \frac{169}{4} = 42{,}25$$

80 Dos de los lados de un paralelogramo están sobre las rectas $x + y - 2 = 0$ y $x - 2y + 4 = 0$ y uno de sus vértices es el punto (6, 0). Halla los otros vértices.

- Como las rectas no son paralelas, el punto donde se corten será un vértice:

$$\begin{array}{l} r_1: \\ r_2: \end{array} \begin{cases} x + \ \ y - 2 = 0 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \ \ x + \ \ y - 2 = 0 \\ -x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3y - 6 = 0 \to y = 2 \to x + 2 - 2 = 0 \to x = 0$$

Luego un vértice es $A(0, 2)$.

- El vértice que nos dan, $C(6, 0)$, no pertenece a ninguna de las rectas anteriores (pues no verifica sus ecuaciones, como podemos comprobar fácilmente sustituyendo los valores de x e y por las coordenadas de C). Así pues, el vértice C no es consecutivo de A.

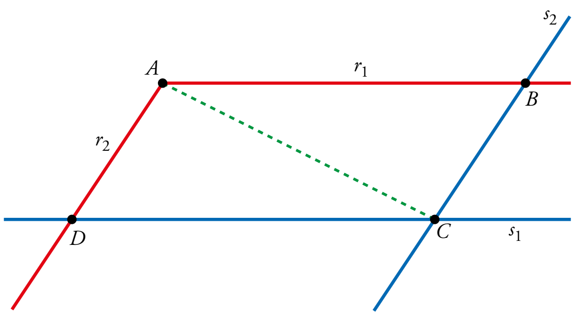
Sean $s_1 // r_1$ una recta que pasa por C y $s_2 // r_2$ una recta que pasa por C.

Se trata de las rectas sobre las que están los otros lados.

Así, los otros vértices, B y D, serán los puntos de corte de:

$r_1 \cap s_2 = B$

$r_2 \cap s_1 = D$



$$s_1: \begin{cases} x + y + a = 0 \\ C \in s_1 \to 6 + 0 + a = 0 \to a = -6 \end{cases} \to s_1: x + y - 6 = 0$$

$$s_2: \begin{cases} x - 2y + b = 0 \\ C \in s_2 \to 6 - 0 + b = 0 \to b = -6 \end{cases} \to s_2: x - 2y - 6 = 0$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

- $B = r_1 \cap s_2 : \begin{cases} x + \ \ y - 2 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$

  Resolviendo el sistema:

  De la primera ecuación $\rightarrow x = 2 - y \rightarrow$ en la segunda $\rightarrow 2 - y - 2y - 6 = 0 \rightarrow$

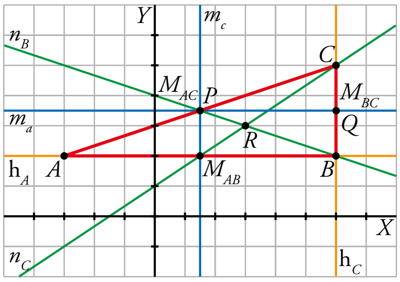
  $$\rightarrow y = \frac{-4}{3} \rightarrow x = \frac{10}{3} \rightarrow B\left(\frac{10}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

- $D = r_2 \cap s_1 : \left.\begin{cases} x + 2y + 4 = 0 \\ x + \ \ y - 6 = 0 \rightarrow x = 6 - y \end{cases}\right\} \rightarrow 6 - y - 2y + 4 = 0 \rightarrow$

  $$\rightarrow y = \frac{10}{3} \rightarrow x = \frac{8}{3} \rightarrow D\left(\frac{8}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

81 **[La búsqueda de los puntos que deben estar alienados en la recta de Euler requiere que el alumnado trabaje la asunción de riesgos (dimensión productiva)].**

En un triángulo, baricentro, ortocentro y circuncentro están alineados. La recta que los contiene se llama recta de Euler. Compruébalo en el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(6, 2)$ y $C(6, 5)$.



- Circuncentro: P.

  Calculamos dos mediatrices y su intersección.

  m_a es perpendicular a BC y pasa por M_{BC}.

  BC tiene vector de dirección $\overrightarrow{BC} = (6, 5) - (6, 2) = (0, 2) = 2(0, 1)$

  $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$

  m_a tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $M_{BC} = \left(6, \frac{7}{2}\right)$.

  $m_a : y = \frac{7}{2}$

  m_c es perpendicular a AB y pasa por M_{AB}.

  AB tiene vector de dirección $\overrightarrow{AB} = (6, 2) - (-3, 2) = (9, 0) = 9(1, 0)$.

  $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

  m_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

  $m_c : x = \frac{3}{2}$

  El circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices.

  $$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

  Las coordenadas del circuncentro son $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

- Baricentro: R.

  Calculamos dos medianas y su intersección.

  n_b pasa por B y por M_{AC}.

  $M_{AC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

  $\overrightarrow{BM_{AC}} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) - (6, 2) = \left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(-3, 1)$

  n_b tiene vector de dirección $\vec{d} = (-3, 1)$ y pasa por $B = (6, 2)$.

  n_b: $\frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{1} \rightarrow x - 6 = -3y + 6 \rightarrow x + 3y - 12 = 0$

  n_c pasa por C y por M_{AB}.

  $M_{AB} = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$

  $\overrightarrow{CM_{AB}} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) - (6, 5) = \left(-\frac{9}{2}, -3\right) = -\frac{3}{2}(3, 2)$

  n_c tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 2)$ y pasa por $C = (6, 5)$.

  n_c: $\frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{2} \rightarrow 2x - 12 = 3y - 15 \rightarrow 2x - 3y + 3 = 0$

  El baricentro es el punto de intersección de las medianas. Como las tres medianas se cortan en el mismo punto, para calcular el baricentro es suficiente con resolver el sistema formado por dos de las medianas.

  $$\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ 2x - 3y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 3$$

  Las coordenadas del baricentro son: $R = (3, 3)$.

- Ortocentro: Q.

  Calculamos dos alturas y su intersección.

  h_A es perpendicular a BC y pasa por $A = (-3, 2)$.

  $\overrightarrow{BC} = (0, 2) = 2(0, 1)$

  h_A tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 0)$ y pasa por $A = (-3, 2)$.

  h_A: $y = 2$

  h_C es perpendicular a AB y pasa por $C = (6, 5)$.

  $\overrightarrow{AB} = 9(1, 0)$

  h_C tiene vector de dirección $\vec{d} = (0, 1)$ y pasa por $C = (6, 5)$.

  h_C: $x = 6$

  El ortocentro es el punto de intersección de las alturas.

  $$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

  Las coordenadas del ortocentro son: $Q = (6, 2)$.

  $P = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$; $Q = (6, 2)$; $R = (3, 3)$

  Para ver si están alineados, calculamos los vectores:

  $\overrightarrow{PQ} = (6, 2) - \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}(3, -1)$

  $\overrightarrow{QR} = (3, 3) - (6, 2) = (-3, 1) = (-1)(3, -1)$

  Luego los vectores son proporcionales y, por tanto, los puntos están alineados.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

82 **$A(0, 0)$ y $B(3, 6)$ son dos puntos de la recta $y = 2x$. C y D son los puntos de la recta $2x - y + 5 = 0$ más cercanos a B y A, respectivamente. Calcula el área del rectángulo $ABCD$.**

Buscamos la recta t que es perpendicular a s y pasa por A, ya que entonces calculando la intersección de t con s encontraremos el punto C.

El vector director v de t es normal a $s \to \vec{v}(2, -1)$

$$t: \frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-1} \to -\frac{x}{2} = y$$

Para calcular $t \cap s$, sustituimos t en s:

$$2x + \frac{x}{2} + 5 = 0 \to x = -2;\ y = 1 \to C(-2, 1)$$

$$\text{Área} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| = |(3, 6)| \cdot |(-2, 1)| = \sqrt{45}\sqrt{5} = 15$$

83 **De un triángulo conocemos dos vértices, $A(0, 0)$ y $B(5, 0)$ y la longitud del lado AC, 3. Además, la tangente del ángulo formado por los lados AB y AC es $\frac{4}{3}$.**

a) Calcula la ecuación del lado AC.

b) Determina el vértice C.

c) Halla la longitud de la altura relativa a C.

d) Obtén el área del triángulo.

* ***Puedes calcular la altura utilizando razones trigonométricas.***

a) La recta que contiene al lado AC tiene pendiente $\frac{4}{3}$ porque el lado AB está en el eje OX, y la tangente del ángulo que forma una recta con el eje horizontal positivo es su pendiente, luego $r: y = \frac{4}{3}x$.

b) C está en la recta $r: y = \frac{4}{3}x$ y $dist(A, C) = 3$, luego C es solución del sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x \\ \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 3 \end{cases} \to x = -\frac{9}{5}, y = -\frac{12}{5};\ x = \frac{9}{5}, y = \frac{12}{5}$$

Como la tangente del ángulo es positiva, $C = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

c) $AB: y = 0$

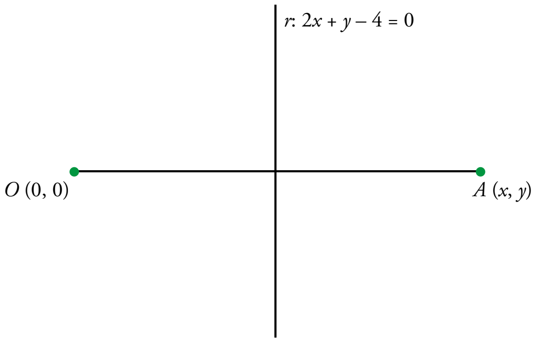
Altura $= dist\,(C, AB) = \frac{12}{5}$ u

d) $dist\,(A, B) = 3$ u

Área $= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{12}{5} = \frac{18}{5}$ u^2

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

84 **La recta $2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto (0, 0). Halla las coordenadas del otro extremo.**



Un vector dirección de la recta es $\vec{v} = (1, -2)$.

- Debe verificarse que: $\vec{v} \perp \overrightarrow{OA} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$$(1, -2) \cdot (x, y) = 0 \to x - 2y = 0 \to x = 2y$$

- Además, el punto medio de OA, M, pertenece a la recta:

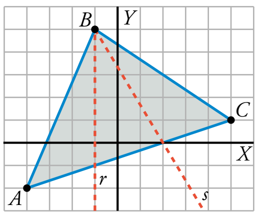
$$M\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) \in r \to 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \to$$

$$\to 2 \cdot \frac{2y}{2} + \frac{y}{2} - 4 = 0 \to 4y + y - 8 = 0 \to$$

$$\to y = \frac{8}{5} \to x = 2 \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{5}$$

Luego: $A\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$

85 **Dado el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(-1, 5)$ y $C(5, 1)$, halla las ecuaciones de las rectas r y s que parten de B y cortan a AC, dividiendo al triángulo en tres triángulos de igual área.**



- La altura de los tres triángulos es igual a la distancia de B al lado AC. Por tanto, tendrán la misma área si tienen la misma base. Así, se trata de hallar los puntos, P y Q, que dividen al lado AC en tres partes iguales.

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{3} = \left(-\frac{2}{3}, -1\right); \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC}}{3} = \left(\frac{8}{3}, 0\right)$$

- La recta r es la que pasa por B y por P:

$x = -1$

- La recta s es la que pasa por B y por Q:

$$m = \frac{5 - 0}{-1 - 2} = -\frac{5}{3}$$

$$y = 5 - \frac{5}{3}(x + 1)$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

86 **De un rombo $ABCD$ sabemos que los vértices B y D están en la recta $r: y = 2x + 2$ y que $A(4, 0)$. Halla las coordenadas de C.**

La diagonal BD está en la recta r.

Las diagonales de un rombo son perpendiculares y se cortan en el punto medio, luego la perpendicular trazada desde A a la recta r, que llamaremos s, cortará a r en el punto medio M entre A y $C = (x, y)$.

La recta s perpendicular a r tiene pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y pasa por $A = (4, 0)$.

$s: y = -\frac{1}{2}x + k$

Sustituimos las coordenadas de A en la ecuación para calcular k.

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + k \to k = 2 \to s: y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$M = r \cap s$

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \to x = 0,\ y = 2 \to M = (0, 2)$$

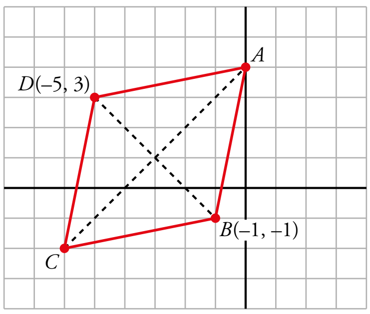
$$(0, 2) = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y}{2}\right) \to \begin{cases} 0 = \frac{x+4}{2} \to x = -4 \\ 2 = \frac{y}{2} \to y = 4 \end{cases} \to C = (-4, 4)$$

87 **Un rombo $ABCD$ tiene un vértice en el eje de ordenadas; otros dos vértices opuestos son $B(-1, -1)$ y $D(-5, 3)$. Halla las coordenadas de los vértices A y C y el área del rombo.**

Sea $A \in$ eje $Y \to A = (0, y_1)$ y sea el punto $C = (x_2, y_2)$.

Como estamos trabajando con un rombo, sus diagonales AC y BD se cortan en su punto medio, M.

Además, $AC \perp BD$.



- $M\left(\frac{-1-5}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (-3, 1)$ es el punto medio de BD (y de AC).

- Sea d la recta perpendicular a BD por M (será, por tanto, la que contiene a AC):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BD} = (-4, 4) \to \vec{d} = (4, 4) \text{ es vector dirección de } d \\ M(-3, 1) \in d \end{array}\right\} \to$$

$$\to \begin{cases} \text{La pendiente de } d \text{ es } m_d = \frac{4}{4} = 1 \\ M(-3, 1) \in d \end{cases} \to d: y - 1 = (x + 3) \to d: y = x + 4$$

- Así:

$$A = d \cap \text{eje } Y: \begin{cases} y = x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \to y = 4 \to A(0, 4)$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

• M es el punto medio de $AC \to (-3,\ 1) = \left(\dfrac{0+x_2}{2}, \dfrac{4+y_2}{2}\right) \to \left\{\begin{array}{l} -3 = \dfrac{x_2}{2} \to x_2 = -6 \\ 1 = \dfrac{4+y_2}{2} \to y_2 = -2 \end{array}\right\} \to C(-6,\ -2)$

• Área $= \dfrac{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}{2}$

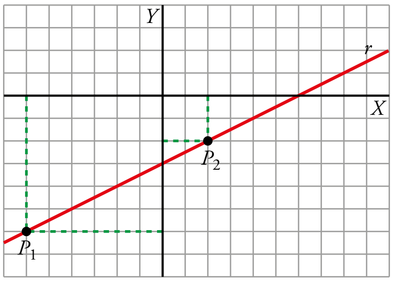
$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = |(-6, -6)| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BD}| = |(-4, 4)| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \to \text{Área} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 24 \text{ u}^2$$

88 **Encuentra un punto en la recta $x - 2y - 6 = 0$ que equidiste de los ejes de coordenadas.**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Eje } X\text{: } y = 0 \\ \text{Eje } Y\text{: } x = 0 \\ P(x, y) \in r \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} dist\,(P, \text{eje } X) = dist\,(P, \text{eje } Y) \\ x - 2y - 6 = 0 \end{array}\right. \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} \dfrac{|y|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{0^2+1^2}} \\ x - 2y - 6 = 0 \end{array}\right. \to \text{dos casos: } \left\{\begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array}\right. \to$$

$$\to \left\{\begin{array}{l} y - 2y - 6 = 0 \to y_1 = -6 \to x_1 = -6 \\ -y - 2y - 6 = 0 \to y_2 = -2 \to x_2 = 2 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} P_1(-6, -6) \\ P_2(2, -2) \end{array}\right.$$



89 **Un punto P, que es equidistante de los puntos $A(3, 4)$ y $B(-5, 6)$, dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de P?**

• $d(P, OX) = 2d(P, OY) \to |y| = 2|x| \to \left\{\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -2x \end{array}\right.$

• $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}| \to \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(-5-x)^2 + (6-y)^2} \to$

$\to x^2 + 9 - 6x + y^2 + 16 - 8y = x^2 + 25 + 10x + y^2 + 36 - 12y \to$

$\to -6x - 8y + 25 = 10x - 12y + 61 \to 16x - 4y + 36 = 0 \to 4x - y + 9 = 0$

• Como deben cumplirse las dos condiciones, habrá dos soluciones:

$$P_1\text{: } \left\{\begin{array}{l} y = 2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{array}\right. \to 4x - 2x + 9 = 0 \to x = \frac{-9}{2} \to y = -9$$

Luego: $P_1\left(\dfrac{-9}{2}, -9\right)$

$$P_2\text{: } \left\{\begin{array}{l} y = -2x \\ 4x - y + 9 = 0 \end{array}\right. \to 4x + 2x + 9 = 0 \to x = \frac{-9}{6} = \frac{-3}{2} \to y = 3$$

Luego: $P_2\left(\dfrac{-3}{2}, 3\right)$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Página 221

Cuestiones teóricas

90 **¿Verdadero o falso?**

a) Si el punto P' es el simétrico de P respecto de la recta r, entonces $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular al vector director de r.

b) Si en la recta $r: \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \end{cases}$ damos a λ los valores 1, 2 y 3, obtenemos respectivamente los puntos A, B y C. Entonces C es simétrico de A con respecto a B.

c) La recta $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$ pasa por el origen de coordenadas.

d) La recta $ax + by + c = 0$ es perpendicular a $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$.

e) Si el punto $P(m, n)$ es la intersección de $s: \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$ y $r: ax + by + c = 0$ con $c \neq 0$, la distancia entre r y el origen de coordenadas es $\sqrt{m^2 + n^2}$ (ayúdate con un dibujo).

f) La recta $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 \end{cases}$ es paralela al eje Y.

g) La recta $4x - 2 = 0$ es paralela al eje Y.

a) Verdadero, por definición, tal y como hemos visto en el ejercicio resuelto 2 de la página 212.

b) Verdadero.

Si $\lambda = 1$, $A(6, -2)$.

Si $\lambda = 2$, $B(10, -5)$.

Si $\lambda = 3$, $C(14, -8)$.

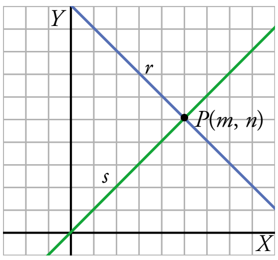
$$\frac{A + C}{2} = \frac{(20, -10)}{2} = (10, -5)$$

c) Verdadero. Está en forma continua, pasa por (0, 0) y tiene vector director (a, b).

d) Verdadero. La forma implícita de la primera recta nos dice precisamente que su vector normal es (a, b).

e) Verdadero.

El vector director de s es (a, b), que a su vez es el vector normal de r, por lo que son perpendiculares. Entonces se cumple por definición de distancia de un punto a una recta.



f) Falso. Un vector director es (3, 0), por lo que es paralela al eje de las X.

g) Verdadero. La recta es $x = 1/2$.

91 **[La respuesta clara a las cuestiones planteadas requiere que el alumnado trabaje la destreza expresión escrita de esta clave].**

a) ¿Qué se puede decir de una recta si en su ecuación general falta el término independiente?

b) ¿Y si falta el término en x?

c) ¿Y si falta el término en y?

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

a) La recta pasa por (0, 0).

b) Es una recta horizontal (paralela al eje OX).

c) Es una recta vertical (paralela al eje OY).

Para profundizar

92 **Las rectas $x + y - 2 = 0$ y $9x - 3y - 4 = 0$ son dos alturas del triángulo ABC de vértice $A(2, 2)$. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo.**

A no pertenece a ninguna de las dos alturas, luego los lados del triángulo estarán en las rectas que pasan por $A = (2, 2)$ y son perpendiculares a las rectas dadas.

$r: x + y - 2 = 0$ tiene vector de dirección $(-1, 1)$.

El *lado* AB tiene vector de dirección $\vec{d} = (1, 1)$ y pasa por $A = (2, 2)$.

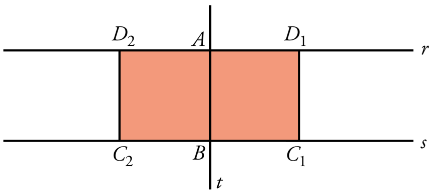
Lado AB: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = y - 2 \to x - y = 0$

$s: 9x - 3y - 4 = 0$ tiene vector de dirección $\vec{d} = (-3, 9) = 3(-1, 3)$.

El *lado* AC tiene vector de dirección $\vec{d} = (3, 1)$ y pasa por $A = (2, 2)$.

Lado AC: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{1} \to x - 2 = 3y - 6 \to x - 3y - 4 = 0$

93 **Dos vértices contiguos de un cuadrado son $A(3, 1)$ y $B(4, 5)$. Calcula los otros vértices. ¿Cuántas soluciones hay?**



C y D son puntos de las rectas s y r perpendiculares a AB, y cuyas distancias a B y A, respectivamente, son $|\overrightarrow{AB}|$:

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to s: x + 4y + k = 0 \\ \text{Como } B \in s\end{array}\right\} \to 4 + 20 + k = 0 \to k = -24 \to s: x + 4y - 24 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to r: x + 4y + k' = 0 \\ \text{Como } A \in r\end{array}\right\} \to 3 + 4 + k' = 0 \to k' = -7 \to r: x + 4y - 7 = 0$

- $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (1, 4) \to t: 4x - y + k'' = 0 \\ \text{Como } A \in t\end{array}\right\} \to 12 - 1 + k'' = 0 \to k'' = -11 \to t: 4x - y - 11 = 0$

- C y D son puntos que están en las rectas cuya distancia a AB es $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{17}$.

  Sean $P(x, y)$ tales que:

  $$dist(P, t) = \frac{|4x - y - 11|}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

  $$\begin{cases} 4x - y - 11 = 17 \to \\ 4x - y - 11 = -17 \to \end{cases} \begin{cases} t_1: 4x - y - 28 = 0 \\ t_2: 4x - y + 6 = 0 \end{cases}$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

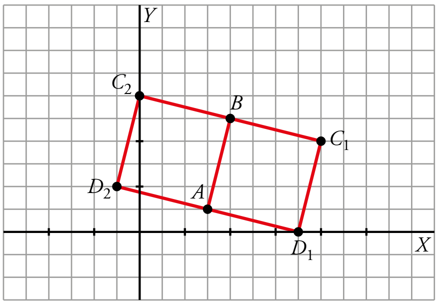
Son dos rectas paralelas. Hay dos soluciones. Así:

$C_1 = t_1 \cap s \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \to x = 24 - 4y \end{cases} \to 96 - 16y - y - 28 = 0 \to y = 4 \to x = 8 \to C_1(8, 4)$

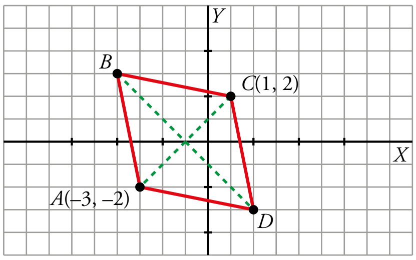
$C_2 = t_2 \cap s \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 24 = 0 \to x = 24 - 4y \end{cases} \to 96 - 16y - y + 6 = 0 \to y = 6 \to x = 0 \to C_2(0, 6)$

$D_1 = t_1 \cap r \begin{cases} 4x - y - 28 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \to x = 7 - 4y \end{cases} \to 28 - 16y - y - 28 = 0 \to y = 0 \to x = 7 \to D_1(7, 0)$

$D_2 = t_2 \cap r \begin{cases} 4x - y + 6 = 0 \\ x + 4y - 7 = 0 \to x = 7 - 4y \end{cases} \to 28 - 16y - y + 6 = 0 \to y = 2 \to x = -1 \to D_2(-1, 2)$



94 **La diagonal menor de un rombo mide lo mismo que su lado y sus extremos son los puntos $A(-3, -2)$ y $C(1, 2)$. Halla los vértices B y D y el perímetro del rombo.**



- $\overrightarrow{AC} = (4, 4) \to |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

  Como esta diagonal mide lo mismo que el lado, entonces el perímetro será:

  Perímetro = $4\,|\overrightarrow{AC}| = 16\sqrt{2}$

- Los otros dos vértices están en la perpendicular de $\overrightarrow{AC}$ por su punto medio $M(-1, 0)$.

  $\left.\begin{array}{l} \text{La recta } AC \text{ tiene por vector director } (1,1) \to x - y + k = 0 \\ \text{Como, además, } A(-3,-2) \in \text{ recta } AC \end{array}\right\} \to$

  $$\to -3 + 2 + k = 0 \to k = 1 \to AC: x - y + 1 = 0$$

  La recta s perpendicular a AC será:

  $\left.\begin{array}{l} s: x + y + k' = 0 \\ \text{Como } M(-1, 0) \in s \end{array}\right\} \to -1 + k' = 0 \to k' = 1 \to s: x + y + 1 = 0$

  Los puntos B y C serán los (x, y) que estén en s y cuya distancia al vértice A sea igual a la diagonal, es decir, igual a $4\sqrt{2}$.

  $(x, y) \in s \to x + y + 1 = 0 \to x = -1 - y$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+2)^2}=4\sqrt{2} \to (x+3)^2+(y+2)^2=32 \to$$

$$\to (2-y)^2+(y+2)^2=32 \to 4+y^2-4y+y^2+4+4y=32 \to 2y^2=24 \to$$

$$\to y^2=12 \to \begin{cases} y_1=2\sqrt{3} \to x_1=-1-2\sqrt{3} \\ y_2=-2\sqrt{3} \to x_2=-1+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Luego, los vértices B y C son:

$$(-1-2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}) \text{ y } (-1+2\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$$

95 Demuestra que las coordenadas del baricentro del triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ son:

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

* ***Utiliza que $2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{BG}$ donde M es el punto medio de AC.***

$G=(x, y)$

$$M_{AC}=\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$$

$$2\overrightarrow{GM_{AC}}=\overrightarrow{BG}$$

$$2\left(\frac{x_1+x_3}{2}-x, \frac{y_1+y_3}{2}-y\right)=(x-x_2, y-y_2)$$

$$\begin{cases} 2\left(\dfrac{x_1+x_3}{2}-x\right)=x-x_2 \\ 2\left(\dfrac{y_1+y_3}{2}-y\right)=y-y_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_3-2x=x-x_2 \\ y_1+y_3-2y=y-y_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1+x_3+x_2=3x \\ y_1+y_3+y_2=3y \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_3+x_2}{3} \\ y=\dfrac{y_1+y_3+y_2}{3} \end{cases}$$

96 $A(1, 1)$ y $B(5, 1)$ son dos vértices de un trapecio rectángulo y uno de sus lados está sobre la recta $y=x+1$. Calcula los otros dos vértices (hay dos soluciones).

Podemos comprobar que $A, B \notin r$.

Como un lado está sobre r, los otros dos vértices están en r y, por tanto, A y B son vértices consecutivos.

Además, un vector dirección de r es $\vec{r}=(1, 1)$, que no es proporcional a $\overrightarrow{AB}=(4, 0)$.

Por tanto, $\vec{r} \nparallel \overrightarrow{AB} \to$ los lados AB y CD no son paralelos, luego no son las bases del trapecio.

Podemos construir dos trapecios:

a) ABC_1D_1, donde AB es la altura del trapecio:

C_1 y D_1 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a AB que pasan por B y A, respectivamente.

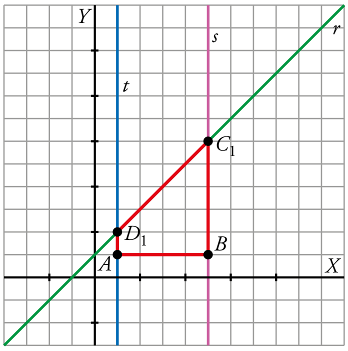
- $$\left.\begin{array}{l} t \perp \overrightarrow{AB} \to 4x+k=0 \\ \text{Como } A(1,1)\in t \end{array}\right\} \to 4+k=0 \to k=-4 \to t: 4x-4=0 \to t: x=1$$

  Así: $D_1=t\cap r$: $\begin{cases} x=1 \\ y=x+1 \end{cases} \to y=2 \to D_1(1, 2)$

- $$\left.\begin{array}{l} s \perp \overrightarrow{AB} \to 4x+k=0 \\ \text{Como } B(5,1)\in s \end{array}\right\} \to 4\cdot 5+k=0 \to k=-20 \to s: 4x-20=0 \to s: x=5$$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Así: $C_1 = s \cap r: \begin{cases} x = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \to y = 6 \to C_1(5, 6)$



b) ABC_2D_2, donde C_2D_2 es la altura del trapecio:

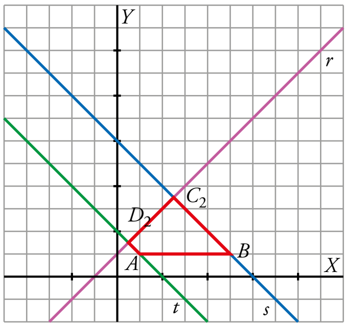
C_2 y D_2 serán los puntos de corte de r con las rectas perpendiculares a r que pasan por B y A, respectivamente (es decir, C_2 y D_2 son los pies de dichas perpendiculares).

- $\left.\begin{array}{l} t \perp r \to y = -x + k \\ \text{Como } A \in t \end{array}\right\} \to 1 = -1 + k \to k = 2 \to t: y = -x + 2$

  Así: $D_2 = t \cap r: \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 1 \end{cases} \to -x + 2 = x + 1 \to 1 = 2x \to x = \dfrac{1}{2} \to y = \dfrac{3}{2} \to D_2\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$

- $\left.\begin{array}{l} s \perp r \to y = -x + k \\ \text{Como } B \in s \end{array}\right\} \to 1 = -5 + k \to k = 6 \to s: y = -x + 6$

  Así: $C_2 = s \cap r: \begin{cases} y = -x + 6 \\ y = x + 1 \end{cases} \to -x + 6 = x + 1 \to 5 = 2x \to x = \dfrac{5}{2} \to y = \dfrac{7}{2} \to C_2\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$



97 **Toda recta se puede expresar como $x \cos\theta + y \sin\theta = d$, donde θ es el ángulo que forma la recta con el eje de ordenadas y d es su distancia al origen de coordenadas (se conoce como *ecuación de Hesse*). Escribe en esa forma la recta $4x + 3y - 12 = 0$.**

$dist(O, r) = \dfrac{|-12|}{5}$

$d = \dfrac{|-12|}{5} = \dfrac{12}{5}$

Dividimos entre 5 en la ecuación de la recta y obtenemos:

$\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y = \dfrac{12}{5} \to 0{,}8x + 0{,}6y = \dfrac{12}{5}$

$0{,}8 = \cos 36° \, 52'$

$0{,}6 = \text{sen } 36° \, 52'$

Luego la ecuación que buscamos es: $x \cos 36° \, 52' + y \,\text{sen } 36° \, 52' = \dfrac{12}{5}$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

AUTOEVALUACIÓN

C.E.: CE 4.4. (EA 4.4.1.-EA 4.4.2.-EA 4.4.3.)

Página 173

1 Se consideran los puntos $A(0, 1)$, $B(4, 9)$ y $C(-4, k)$.

a) Calcula las coordenadas de un punto P que divide al segmento AB en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$.

b) Determina k para que el punto C sea el simétrico de B respecto de A.

a) $A(0, 1)$, $B(4, 9)$, $C(-4, k)$

Sea $P(x, y)$:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} \to (x, y-1) = \frac{1}{3}(4-x, 9-y) \to \left.\begin{cases} 3x = 4 - x \to x = 1 \\ 3y - 3 = 9 - y \to y = 3 \end{cases}\right\} \to P(1, 3)$$

b) A debe ser el punto medio de CB.

$$(0, 1) = \left(\frac{4-4}{2}, \frac{9+k}{2}\right) \to 9 + k = 2 \to k = -7$$

2 Calcula la ecuación de estas rectas:

a) Pasa por $A(3, 2)$ y por $B(-2, 1)$, en forma paramétrica e implícita.

b) Pasa por (0, 0) y tiene pendiente $m = -\frac{1}{3}$, en forma continua y explícita.

a) Vector dirección $\vec{d} = \overrightarrow{BA} = (5, 1)$. Vector de posición: $\vec{p}(3, 2)$

Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$

$t = y - 2$; $x = 3 + 5(y - 2) = 3 + 5y - 10 \to x - 5y + 7 = 0$

Ecuación implícita: $x - 5y + 7 = 0$

b) $m = -\frac{1}{3} \to$ vector dirección: $\vec{d}(3, -1)$

Ecuación continua: $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1}$

$3y = -x \to y = -\frac{x}{3}$

Ecuación explícita: $y = -\frac{x}{3}$

3 Halla las ecuaciones de las siguientes rectas:

a) Pasa por $P(2, -3)$ y es perpendicular a $y = \frac{-2}{5}x + 1$.

b) Es paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ y su ordenada en el origen es 2.

a) Una recta perpendicular a la dada tiene pendiente $m = \frac{5}{2}$. Como ha de pasar por $P(2, -3)$, su ecuación es:

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x - 2) \to 2y + 6 = 5x - 10 \to 5x - 2y - 16 = 0$$

b) Una recta paralela a $2x + 3y + 1 = 0$ es $2x + 3y + k = 0$.

Como ha de pasar por (0, 2), debe ser $k = -6$.

La recta buscada es $2x + 3y - 6 = 0$.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

4 **Escribe la ecuación del haz de rectas que pasa por (5, 1) y halla la recta de dicho haz que pasa por (0, 1).**

El haz de rectas que pasa por el punto (5, 1) es $a(x-5)+b(y-1)=0$.

La recta del haz que pasa por (0, 1) es la recta que pasa por (5, 1) y por (0, 1). Por tanto, su ecuación es:

$$\frac{x}{5}=\frac{y-1}{0} \rightarrow y=1$$

5 **Estudia la posición relativa de las rectas r y s y de las rectas r y t, donde:**

$$r: 3x+5y-34=0 \qquad s: y=\frac{5}{3}x \qquad t: \begin{cases} x=k \\ y=2 \end{cases}$$

- Posición relativa de r y s:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5,3) \\ \text{Vector dirección de } s,\ \vec{d}_s(3,5)\end{array}\right\} \ r \text{ y } s \text{ son perpendiculares.}$$

- Posición relativa de r y t:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Vector dirección de } t,\ \vec{d}_t(1,0) \\ \text{Vector dirección de } r,\ \vec{d}_r(-5,3)\end{array}\right\} \ r \text{ y } t \text{ son secantes.}$$

6 **Calcula k para que las rectas $r: y=3$ y $s: y=kx+1$ formen un ángulo de 60°.**

La recta $r: y=3$ es paralela al eje de abscisas. Así, la tangente del ángulo que forman r y s coincide con la pendiente de s, que es igual a k. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = k \\ tg\ 60° = \sqrt{3}\end{array}\right\} k=\sqrt{3}$$

7 **Considera los puntos $A(0, k)$ y $B(8, 5)$ y la recta $r: 3x+4y+1=0$. Determina el valor de k para que:**

a) La distancia entre A y B sea igual a 10.

b) La distancia entre A y r sea 1.

a) $dist(A, B)=\sqrt{8^2+(5-k)^2}=\sqrt{64+25+k^2-10k}=10 \rightarrow k^2-10k-11=0 \ \begin{cases} k=11 \\ k=-1 \end{cases}$

b) $dist(A, r)=\dfrac{|3\cdot 0+4\cdot k+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|4k+1|}{5}=1 \ \begin{cases} 4k+1=5 \rightarrow k=1 \\ 4k+1=-5 \rightarrow k=-3/2 \end{cases}$

8 **En el triángulo de vértices $A(-3, 2)$, $B(1, 3)$ y $C(4, 1)$, halla el ortocentro y el circuncentro.**

ORTOCENTRO: $R=h_A \cap h_B \cap h_C$ donde h_A, h_B y h_C son las tres alturas (desde A, B y C, respectivamente).

- $h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC}=(3,-2) \rightarrow \vec{a}=(2,3) \\ A \in h_A \end{cases} \rightarrow h_A: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=2+3t \end{cases} \rightarrow \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{3} \rightarrow h_A: 3x-2y+13=0$

- $h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC}=(7,-1) \rightarrow \vec{b}=(1,7) \\ B \in h_B \end{cases} \rightarrow h_B: \begin{cases} x=1+t \\ y=3+7t \end{cases} \rightarrow x-1=\dfrac{y-3}{7} \rightarrow h_B: 7x-y-4=0$

- $h_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB}=(4,1) \rightarrow \vec{c}=(1,-4) \\ C \in h_C \end{cases} \rightarrow h_C: \begin{cases} x=4+t \\ y=1-4t \end{cases} \rightarrow x-4=\dfrac{y-1}{-4} \rightarrow h_C: 4x+y-17=0$

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/

Bastaría con haber calculado dos de las tres alturas y ver el punto de intersección:

$$h_B \cap h_C: \begin{cases} 7x - y - \ \ 4 = 0 \\ 4x + y - 17 = 0 \end{cases} \quad \text{Sumando:}$$

$$11x \qquad - 21 = 0 \ \rightarrow \ x = \frac{21}{11}; \ y = 7x - 4 = 7 \cdot \frac{21}{11} - 4 = \frac{147 - 44}{11} = \frac{103}{11} \ \rightarrow \ R\left(\frac{21}{11}, \frac{103}{11}\right)$$

NOTA: Puede comprobarse que el ortocentro, R, está también en h_A. Basta con sustituir en su ecuación.

CIRCUNCENTRO: $S = m_A \cap m_B \cap m_C$, donde m_A, m_B y m_C son las tres mediatrices (desde A, B y C, respectivamente)

- $m_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} \ \rightarrow \ \vec{a} = (2, 3) \\ \text{Punto medio de } BC\text{: } M\left(\frac{5}{2}, 2\right) \in m_A \end{cases} \rightarrow \ y - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) \ \rightarrow \ y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$

- $m_C \begin{cases} \vec{c} \perp \overrightarrow{AB} = (4, 1) \ \rightarrow \ \vec{c} = (1, -4) \\ \text{Punto medio de } AB\text{: } M'\left(-1, \frac{5}{2}\right) \in m_C \end{cases} \rightarrow \ y - \frac{5}{2} = -4(x + 1) \ \rightarrow \ y = -4x - \frac{3}{2}$

Así:

$$S = m_A \cap m_C : \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} \\ y = -4x - \frac{3}{2} \end{cases} \ \rightarrow \ \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = -4x - \frac{3}{2} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ 6x - 7 = -16x - 6 \ \rightarrow \ 22x = 1 \ \rightarrow \ x = \frac{1}{22} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ y = -4 \cdot \frac{1}{22} - \frac{3}{2} = \frac{-4 - 33}{22} = \frac{-37}{22}$$

Así, $S\left(\frac{1}{22}, \frac{-37}{22}\right)$.

NOTA: Se podría calcular m_B y comprobar que $S \in m_B$.

Solucionario descargado de: https://solucionarios.academy/