## UNIDAD 8: Lugares geométricos. Cónicas

### ACTIVIDADES-PÁG. 176

**1.** El lugar geométrico es la mediatriz de ecuación $x - 5y + 3 = 0$.

**2.** El circuncentro es el punto de corte de las mediatrices.

Hallamos dos mediatrices:

Mediatriz del lado BC: $x - 2y + 2 = 0$

Mediatriz del lado AB: $x - 2 = 0$

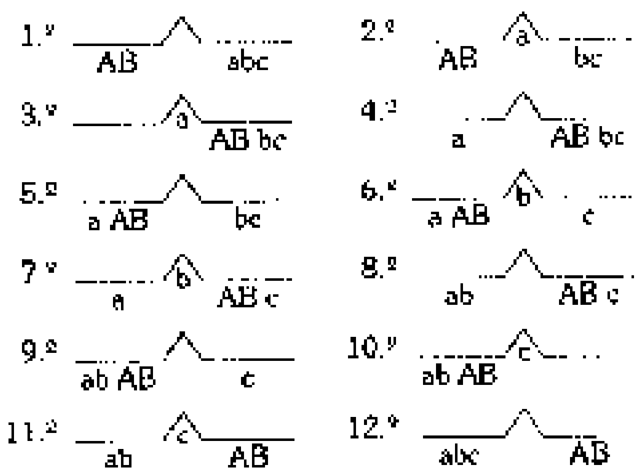
El circuncentro es el punto (2, 2).

**3.** Si se corta por un plano paralelo a la base se obtiene una circunferencia. Si el corte es por un plano oblicuo se obtiene una elipse. La orbita de la Tierra en torno al Sol es elíptica.

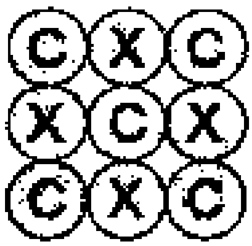
**4.** El vértice de la parábola es el punto (- 3, 1).

### ACTIVIDADES-PÁG. 193

**1.** Los pasos a seguir son los siguientes, llamando AB a los montañeros que suben y abc a los que bajan.




**2.** Señalamos las monedas con C y X.




Consideramos el caso que sólo tengamos 9 monedas. En este caso hay 5 caras, C, y 4 cruces, X.

Si la abeja parte de una moneda marcada con C, puede hacer el recorrido: CXCXCXCXC

Pero si parte de una moneda marcada con X, no puede: XCXCXC…falta una C.

En nuestro caso hay 13 caras C y 13 cruces X. Si la abeja parte de una moneda marcada con C, es posible el recorrido, pero si la abeja parte de una moneda marcada con X no es posible.

**3.** La solución queda:

Sea el número $\overline{xyz}$ el número inicial. Se cumplirá:

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 100(x - z) + (z - x)$$

Si x > z, entonces z – x < 0 y hay que escribir la expresión anterior de la forma:

$$(x - z - 1) \cdot 100 + 100 + (z - x) = (x - z - 1) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + (10 + z - x)$$

La primera cifra de este número es: x – z – 1.

La segunda cifra de este número es: 9.

La tercera cifra de este número es: 10 + z – x.

Observamos que (x – z + 1) + (10 + z – x) = 0, es decir, la primera cifra más la tercera siempre da 9 y la segunda también da 9. Luego siempre se cumple el resultado del problema.

## ACTIVIDADES-PÁG. 195

1. a) Sigue los pasos:

a) En el Campo de Entrada introduce los puntos A= (- 9, - 2); B= (1, 8) y C = (- 5, - 10)

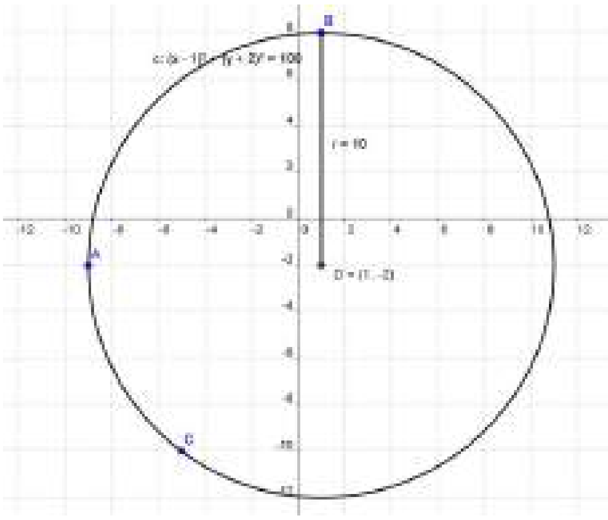
b) Con Circunferencia dados Tres de sus Puntos, dibuja la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.

c) Con la herramienta Mediatriz determina el centro como intersección de la mediatriz de los segmentos de extremos AB y AC.

d) Dibuja el radio DB con Segmento entre Dos Puntos y llámalo r.

e) En el Menú Contextual de los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

f) Arrastra el punto A, B o C y observa cómo va cambiando la circunferencia y sus elementos. Todo ello queda reflejado en la Ventana Algebraica.




b) Sigue los pasos:

a) Introduce el punto C (3, 2) y la recta a: x – 2y = 5.

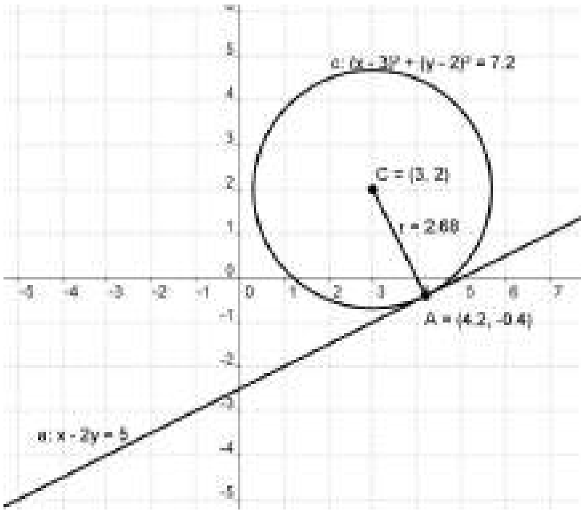
b) Traza la perpendicular a la recta a que pasa por C y determinamos el punto A como intersección de la recta dada y la perpendicular anterior.

c) Con Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos, dibuja la circunferencia de centro el punto C y que pasa por el punto A.

d) Dibuja el radio CA con Segmento entre Dos Puntos y llámalo r.

e) En el Menú Contextual de los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

f) Arrastra el punto C y observa cómo va cambiando la circunferencia y sus elementos. Todo ello queda reflejado en la Ventana Algebraica.

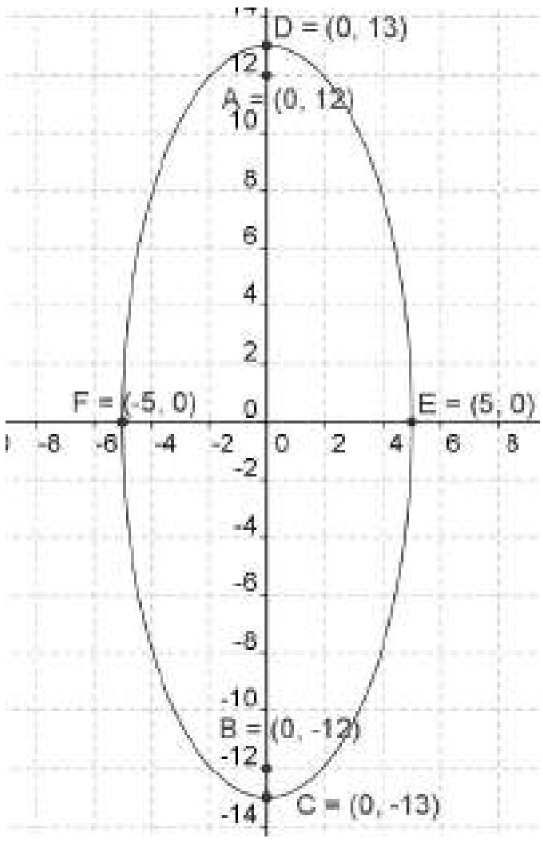



**2**. a) Sigue los pasos:

a) En el Campo de Entrada introduce la ecuación de la elipse, tecleando x^2/25+y^2/169=1.

b) Con los comandos Foco[c] y Vértice[c], dibuja los elementos correspondientes. Obtendrás como focos los puntos A ( 0, 12) y B ( 0, -12) y como vértices los puntos C (0, -13); D ( 0, 13); E (5 , 0) y F (-5, 0).

c) En el Menú Contextual de todos los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

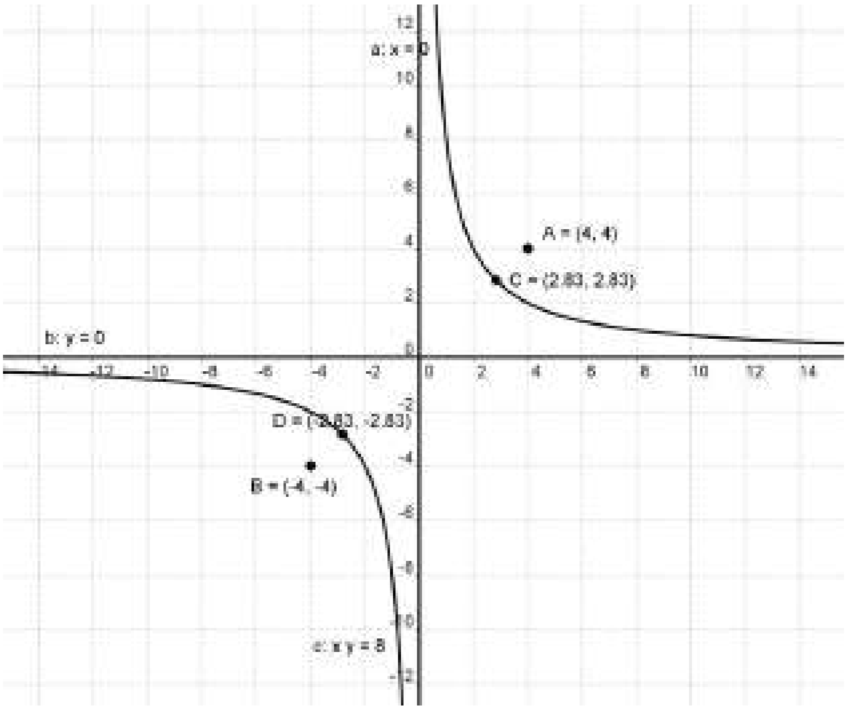


b) Sigue los pasos:

a) En el Campo de Entrada introduce la ecuación de la hipérbola, tecleando x*y=8.

b) Con los comandos Foco[c], Vértice[c] y Asíntota[c], dibuja los elementos correspondientes. Obtendrás como focos los puntos A (4, 4) y B (- 4, - 4); como vértices los puntos C (2,83; 2,83) y D (- 2,83; - 2,83) y como asíntotas las rectas a : x = 0 y b : y = 0.

c) En el Menú Contextual de todos los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.



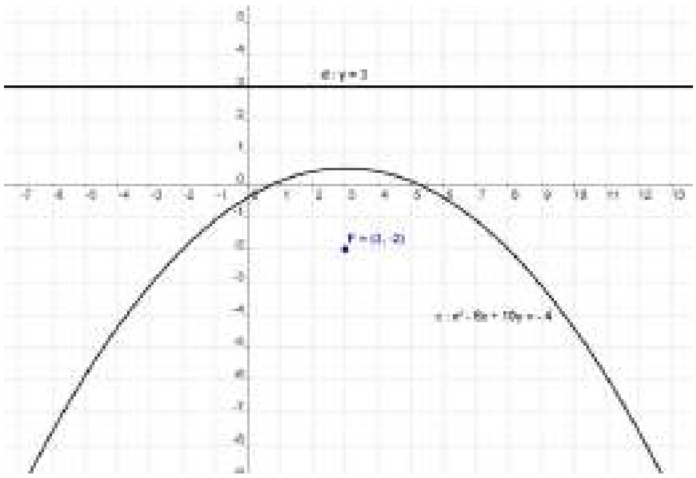

**3.** a) Sigue los pasos:

a) Introduce el punto F (3, - 2) y la recta d: y = 3.

b) Con Parábola, dibuja la parábola de foco F (3, - 2) y directriz y = 3.

c) En el *Menú Contextual* de los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

d) *Arrastra* el punto F y observa cómo va cambiando la gráfica y la ecuación de la parábola. También puedes mover la recta directriz. Todo ello queda reflejado en la Ventana Algebraica.



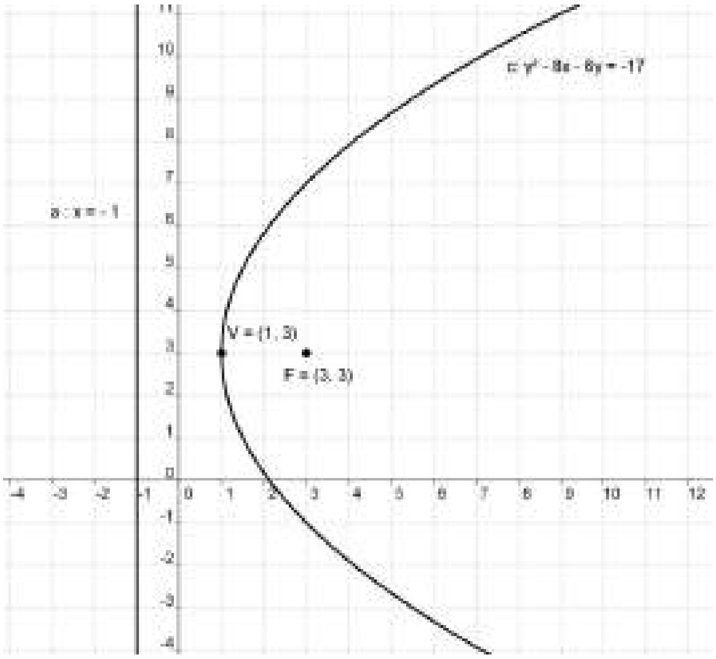
b) Sigue los pasos:

a) Introduce los puntos F=(3,3) y A=(-1,3), siendo V (1, 3) el punto medio de FA. Dibuja el punto V con la herramienta Punto Medio.

b) Dibuja una recta que pase por A y F. Traza la recta perpendicular a la recta anterior pasando por A. Ésta es la directriz de la parábola. Con Parábola, dibuja la parábola de foco F (3, 3) y directriz la recta perpendicular.

c) En el *Menú Contextual* de los objetos, elige Propiedades; en la ficha Básico escoge Muestra Rótulo:Nombre & valor.

d) *Arrastra* el punto F y observa cómo va cambiando la gráfica y la ecuación de la parábola. También puedes mover el punto V. Todo ello queda reflejado en la Ventana Algebraica.




## ACTIVIDADES-PÁG. 196

**1.** Sea P (x, y) un punto genérico del lugar geométrico buscado. Dicho punto debe cumplir que la suma de los cuadrados de sus distancias a A y a B deben ser 12 unidades: $d^2$ (P, A) + $d^2$ (P, B) = 12.

Expresando las distancias: $(x - 4)^2 + y^2 + x^2 + (y + 3)^2 = 12$.

Operando, obtenemos la expresión $2x^2 + 2y^2 - 8x + 6y + 13 = 0$.

**2.** Sea P (x, y) un punto genérico del lugar geométrico buscado. Dicho punto debe cumplir que sus distancias a A y a B deben coincidir: d (P, A) = d (P, B).

Expresando las distancias: $\sqrt{(x-6)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$ .

Elevando ambos miembros al cuadrado y operando obtenemos: x – 2y – 2 = 0, que es la ecuación del lugar geométrico buscado.

Podíamos haber hecho el problema viendo que esta definición de lugar geométrico se ajusta a la mediatriz del segmento AB

**3.** En este caso el lugar geométrico son las bisectrices de las rectas dadas:

$$x - \left(1 + \sqrt{2}\right)y - 2\sqrt{2} = 0 \text{ y } x - \left(1 - \sqrt{2}\right)y + 2\sqrt{2} = 0.$$

**4.** La ecuación del lugar geométrico es $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8^2$ o $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 56 = 0$.

**5.** En la tabla aparecen los resultados pedidos.

| Apartado | Centro | Radio | Ecuación |
|---|---|---|---|
| a) | (4, 5) | 6 | $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 6^2$ |
| b) | (7, 1) | 5 | $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$ |
| c) | (1, - 4) | 13 | $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 13^2$ |
| d) | (1, 4) | 2 | $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$ |
| e) | (- 2, 4) | 8 | $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 64$ |
| f) | (5, 2) | $\sqrt{68}$ | $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 68$ |

**6.** Las respuestas son:

a) El centro es el punto C (- 3, 4) y el radio vale 4.

b) La ecuación es $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$

**7.** La tangente en el punto P (4, 0) es la recta 4x + 3y = 16.

La tangente en el punto Q (- 4, - 6), diametralmente opuesto al punto A, es la recta 4x + 3y = - 34.

**8.** La ecuación de la circunferencia es $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4^2$.

La ecuación de la recta tangente es 5x – 12y + 97 = 0.

**9.** La circunferencia tangente a los ejes coordenados tendrá por centro C (a, - a) y su radio valdrá $|a|$ unidades. Como ha de pasar por el punto P dado, podemos escribir:

$$d(C,\ P) = radio = \sqrt{(a+6)^2 + (-a-4)^2} = a$$

Operando obtenemos dos circunferencias:

$C_1 \equiv$ centro (-3,07; 3,07) y radio 3,07 cuya ecuación es: $(x + 3{,}07)^2 + (y - 3{,}07)^2 = 3{,}07^2$.

$C_2 \equiv$ centro (- 16,93; 16,93) y radio 16,93, cuya ecuación es: $(x+ 16{,}93)^2 + (y - 16{,}93)^2 = 16{,}93^2$.

**10.** Las soluciones son:

a) El eje radical es la recta x = 0.

b) La potencia pedida es 52.

**11.** Los resultados son:

a) La distancia del centro C (- 3, 1) a la recta 8x + 6y + 19 = 0 es:

$$d = \frac{|8 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 + 19|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{1}{10} < 2 \ = radio$$

Por tanto, la recta r es secante.

b) La distancia del centro C (- 3, 1) a la recta 4x - 3y + 15 = 0 es:

$$d = \frac{|4 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 + 15|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{0}{5} = 0 < 2 = radio$$

Por tanto, la recta s es secante.

**12.** Los resultados aparecen en la tabla:

| Apartado | Focos | Semiejes | Excentricidad |
|---|---|---|---|
| a) | F ´ (- 6, 0)  F (6, 0) | a= 10, b = 8 | e = 0,6 |
| b) | F ´ (- 18,76; 0)  F (18,76; 0) | a= 20, b = 6,93 | e = 0,94 |
| c) | F ´ (- 24, 0)  F (24, 0) | a= 25, b = 7 | e = 0,96 |
| d) | F ´ (- 2,83; 0)  F (2,83; 0) | a= 3, b = 1 | e = 0,94 |

**13.** Los puntos de corte de la elipse de abscisa x = 2 son P (2; 4,33) y Q (2; - 4,33).

La tangente en P es la recta 0,72x + y = 5,77 y la normal tiene por ecuación 1,39x – y = - 1,55.

La tangente en Q es la recta 0,72x - y = 5,77 y la normal tiene por ecuación 1,39x + y = - 1,55.

## ACTIVIDADES-PÁG. 197

**14.** Las ecuaciones pedidas son:

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

c) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

b) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$

d) $\frac{x^2}{676} + \frac{y^2}{576} = 1$

**15.** Se obtiene la elipse de ecuación reducida $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Tiene los focos en los puntos F ´ (- 12, 0) y F (12, 0). Sus semiejes son a = 13 y b = 5; y su excentricidad vale e = 0,92.

**16.** La ecuación reducida de la elipse es: $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{256} = 1$.

La recta tangente a la elipse en el punto P (10, 8$\sqrt{3}$) es $4\sqrt{3}\,x + 15y = 160\sqrt{3}$.

La recta tangente en el punto Q $(10\sqrt{2}, 8\sqrt{2})$ es $4x + 5y = 80\sqrt{2}$

**17.** Los resultados aparecen en la tabla:

| Apartado | Focos | Semiejes | Excentricidad | Asíntotas |
|---|---|---|---|---|
| a) | F ´ (- 10, 0) F (10, 0) | a = 8, b = 6 | e = 1,25 | $y = \pm 0{,}75x$ |
| b) | F ´ (- 13, 0) F (13, 0) | a = 5, b = 12 | e = 2,6 | $y = \pm 2{,}4x$ |
| c) | F ´ (- 15, 0) F (15, 0) | a = 12, b = 9 | e = 1,25 | $y = \pm 0{,}75x$ |
| d) | F ´ (- 10, 0) F (10, 0) | a = 6, b = 8 | e = 1,67 | $y = \pm 1{,}33x$ |

**18.** La ecuación de esta hipérbola corresponde a una hipérbola equilátera referida a sus asíntotas.

Su asíntotas son: y = 0 y x = 0. Sus ejes son: y = x e y = - x.

Para determinar sus focos:

$\frac{a^2}{2} = 25 \Rightarrow a^2 = 50 \Rightarrow a = 5\sqrt{2} \Rightarrow c = 10$ sus focos son: (5$\sqrt{2}$, 5$\sqrt{2}$) y (- 5$\sqrt{2}$, - 5$\sqrt{2}$).

**19.** La ecuación reducida es $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

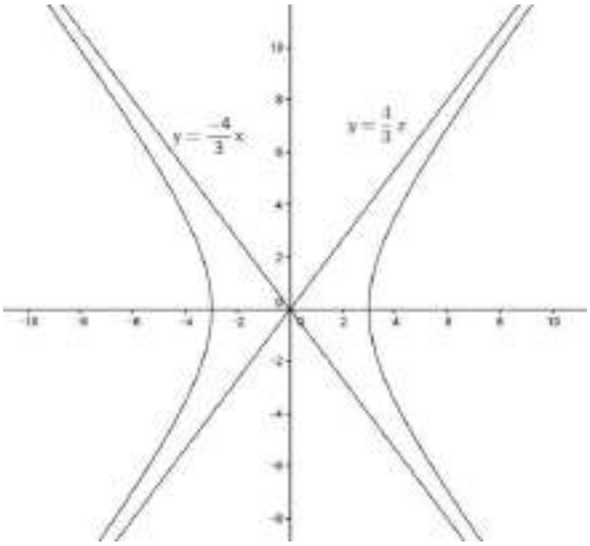
Sus vértices son los puntos A ´ (- 3, 0) y A (3, 0).

Los focos son los puntos F ´ (- 5, 0) y F (5, 0).

Las asíntotas son las rectas: $y = \frac{4}{3}x$ e $y = -\frac{4}{3}x$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}, 2\right)$ es $4\sqrt{5}x + 3y = -24$.

La gráfica es:




**20.** Las ecuaciones reducidas son:

a) $\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{49} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{81}{16}} = 1$

c) $\frac{x^2}{10{,}97} - \frac{y^2}{14{,}03} = 1$ d) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$

**21.** Es la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{64} = 1$.

**22.** Las ecuaciones de las parábolas son:

a) $(y – 5)^2 = 8 (x – 1)$ c) $(y + 3)^2 = - 20 (x + 2)$

b) $(x + 2)^2 = 16 (y – 1)$ d) $(x + 3)^2 = - 4 (y + 2)$

**23.** No existe ninguna parábola de eje paralelo a OY que verifique esas condiciones.
Si fuera la ecuación de una parábola de eje paralelo a OX sería: $x = ay^2 + by + c$.

Imponiendo que pasa por los puntos (6, 0), (12, -1) y (6, 2), obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} c = 6 \\ a - b + c = 12 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases}$$

La ecuación es $x = 2y^2 – 4y + 6$.

**24.** Los elementos de la parábola son:

Eje: x = - 2. Directriz: y = 5,25

Foco: F (-2; 4,75) Vértice: V (- 2, 5).

**25.** Los puntos de corte son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 4 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\ (4, -4) \\ Q\ (1, -1) \end{cases}$$

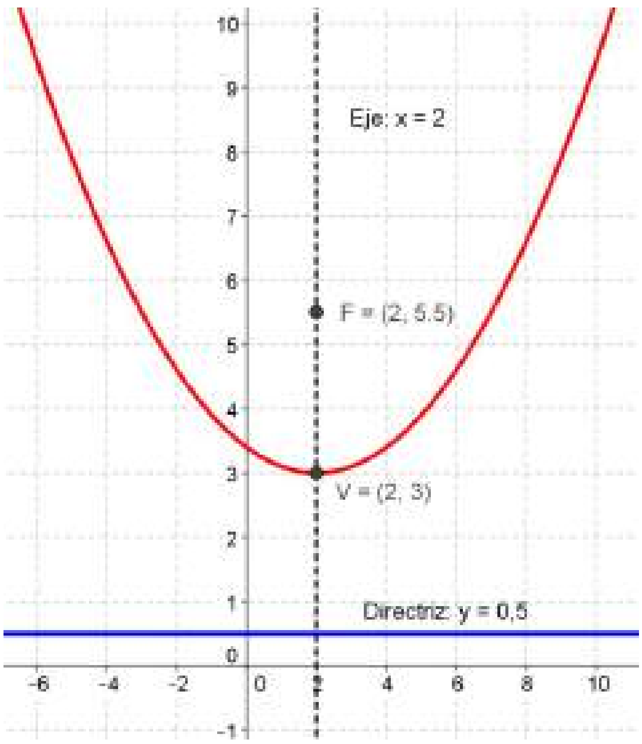
La tangente en el punto P (4, - 4) es la recta 2x – y = 12.

La tangente en el punto Q (1, - 1) es la recta 4x + y = 3.

## ACTIVIDADES-PÁG. 198

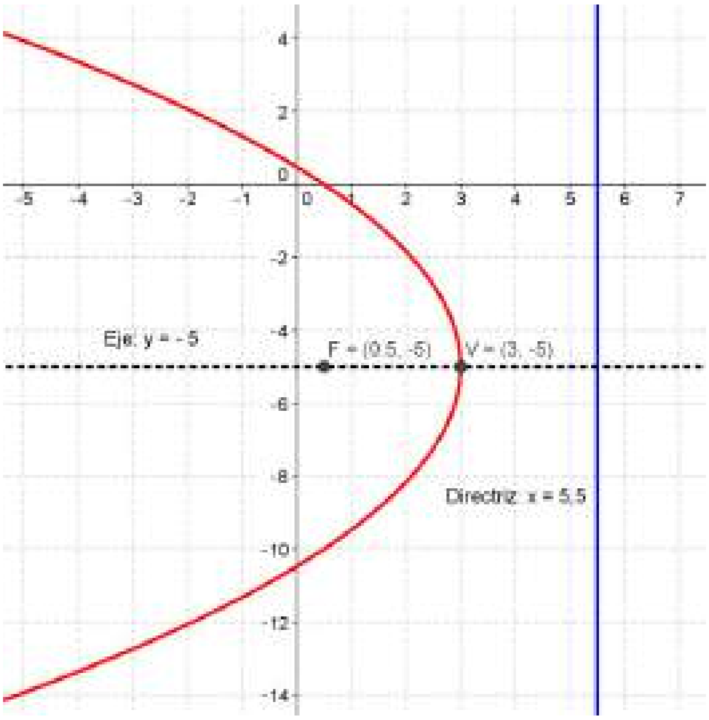
**26.** a) Los elementos son:

Eje: x = 2 Directriz: y = 0,5 Vértice: V (2, 3) Foco: F (2; 5,5)



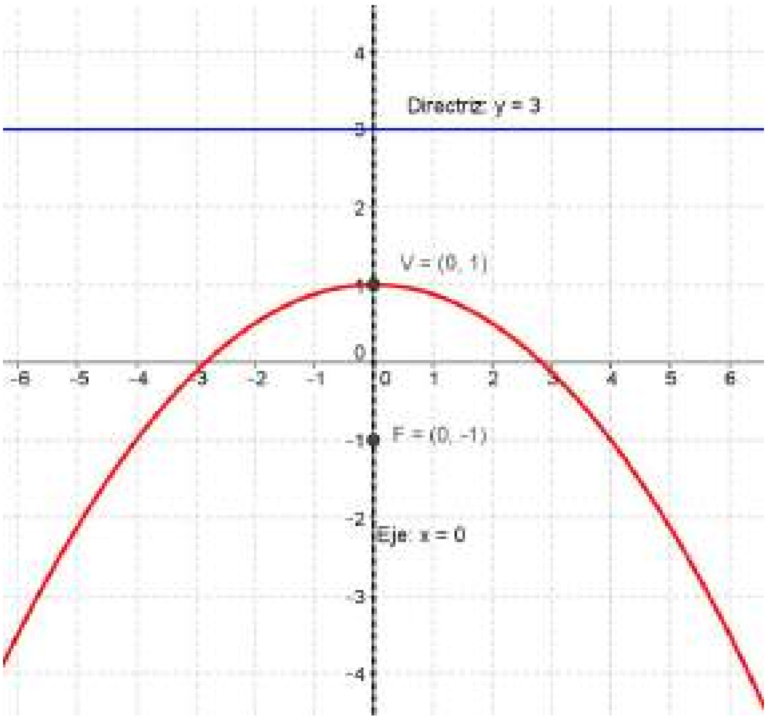
b) Los elementos son:

Eje: y = - 5 Directriz: x = 5,5 Vértice: V (3, - 5) Foco: F (0,5; - 5)




c) Los elementos son:

Eje: x = 0 Directriz: y = 3 Vértice: V (0, 1) Foco: F (0, - 1)



**27.** a) Los puntos de corte de la circunferencia con la bisectriz del primer y tercer cuadrante son:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 4,\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ (4, 4) \end{cases}$$

Los puntos de corte de la circunferencia con la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante son:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = -2,\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ (-2, 2) \end{cases}$$

El área del triángulo de vértices (0, 0); (4, 4) y (- 2, 2) es 8 unidades cuadradas.

b) Los puntos de corte de la elipse con la bisectriz del primer y tercer cuadrante son:

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 - 20y = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = \frac{10}{3},\ y = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) \end{cases}$$

Los puntos de corte de la circunferencia con la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante son:

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 - 20y = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = -\frac{10}{3},\ y = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ \left(-\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) \end{cases}$$

El área del triángulo de vértices $(0,\ 0); \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$ y $\left(-\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$ es $\frac{100}{9} = 11{,}11$ unidades cuadradas.

c) Los puntos de corte de la parábola con la bisectriz del primer y tercer cuadrante son:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 5,\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ (5, 5) \end{cases}$$

Los puntos de corte de la parábola con la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante son:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 3,\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0,\ 0) \\ (3, -3) \end{cases}$$

El área del triángulo de vértices (0, 0); (5, 5) y (3, - 3) es 15 unidades cuadradas.

**28.** Sea P (x, y) un punto del lugar geométrico buscado. Se cumplirá $2 \cdot d(P, B) = d(P, A)$.

Expresando las distancias y operando obtenemos la ecuación:

$$2 \cdot \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 14y + 42 = 0$$

La cónica obtenida es la circunferencia de centro el punto $C\left(1, 7\right)$ y radio $r = \sqrt{8}.$

**29.** La circunferencia buscada tiene su centro en el punto C (4, 6) y su radio es r = 2. Su ecuación es:

$$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 2^2$$

La recta tangente a la circunferencia y paralela a x = 2 es x = 6.

**30.** Las circunferencias dadas son tangentes. El punto de intersección de ambas circunferencias es $\left(\frac{42}{5}, \frac{16}{5}\right)$. La ecuación de la recta tangente será la recta que pasa por el punto de intersección y es perpendicular a la recta que contiene a los centros de ambas circunferencias. La ecuación es 4x – 3y = 24.

**31.** Se trata de la hipérbola equilátera que vemos en el dibujo.

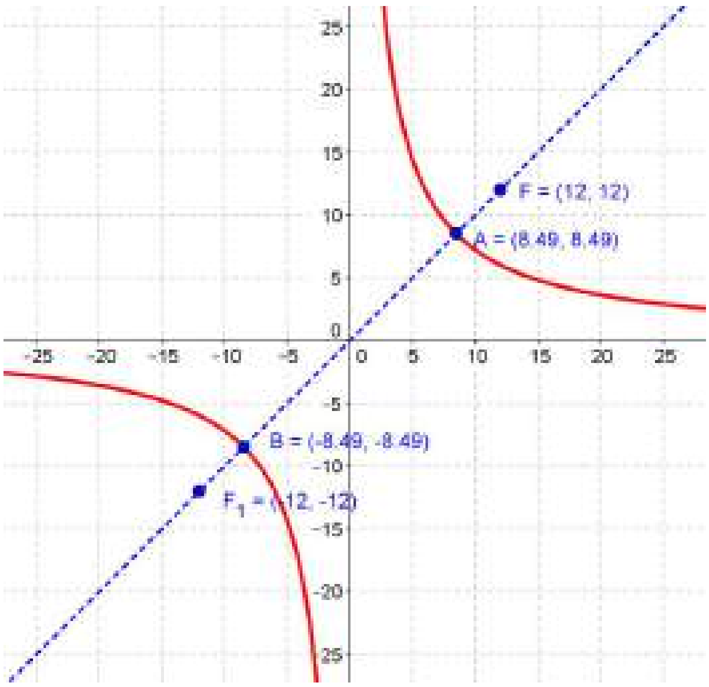
Sus elementos son:

Vértices: A (8,49; 8,49) y B (- 8,49; - 8,49)

Focos: F (12, 12) y F ´ (- 12, - 12)

Ejes: y = x e y = - x

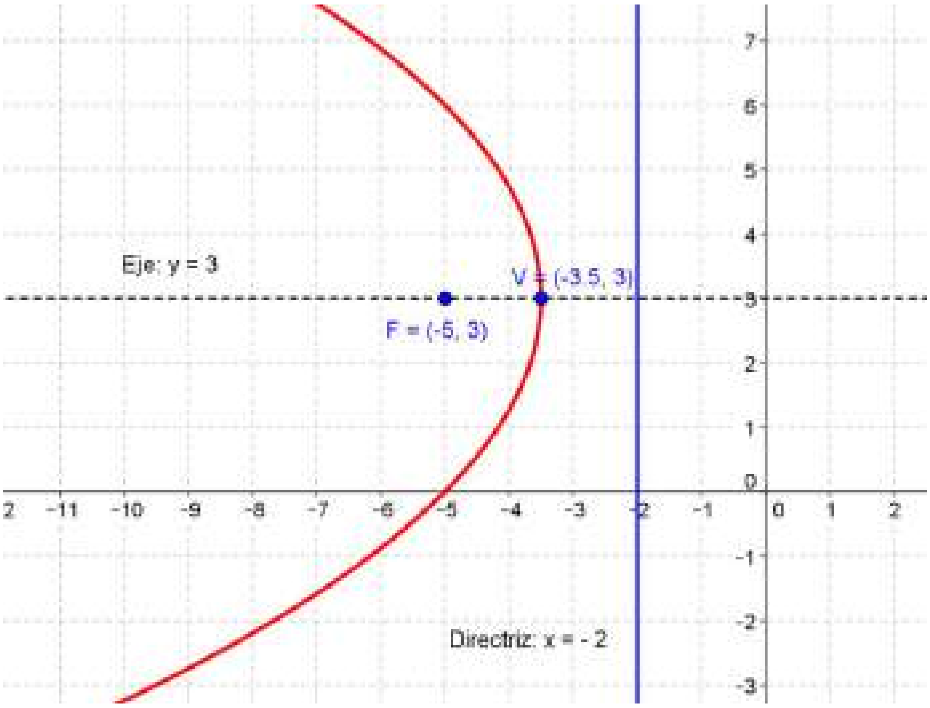
Asíntotas: y = 0 y x = 0



**32.** El lugar geométrico tiene por ecuación $6x + y^2 - 6y + 30 = 0$. Se trata de una parábola de eje paralelo a OX.

Sus elementos son:

Vértice V (-3,5; 3)
Foco: F (- 5, 3)
Directriz: x = - 2
Eje: y = 3




**33.** El foco de la parábola es el punto F (0, 20) y la directriz es la recta de ecuación y + 20 = 0

La ecuación de la parábola es $x^2 = 80y$. Determinamos los puntos de la parábola que están a una distancia b del eje OX, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 = 80y \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{80b} \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{80b};\ y = b \\ x = \sqrt{80b};\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1\left(-\sqrt{80b},\, b\right) \\ P_2\left(\sqrt{80b},\, b\right) \end{cases}$$

Como el diámetro de la antena mide 106 cm se tendrá:

$$2\sqrt{80b} = 106 \Rightarrow \sqrt{80b} = 53 \Rightarrow 80b = 2809 \Rightarrow b = \frac{2809}{80} = 35{,}11\,cm.$$

**34.** Los puntos de corte de la parábola y la recta son: P (4, 4) y $Q\left(-1, \frac{1}{4}\right)$.

La ecuación de la recta tangente en el punto P es y = 2x – 4.

La ecuación de la recta tangente en el punto Q es $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ .

Ambas rectas son perpendiculares.

**35.** a) Aplicando la definición de excentricidad de una elipse y operando:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = e \cdot a = 0{,}017 \cdot 149{,}60 \cdot 10^6 = 2{,}54 \cdot 10^6$$

A partir de la relación $a^2 = b^2 + c^2$ obtenemos:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{(149{,}60 \cdot 10^6)^2 - (2{,}54 \cdot 10^6)^2} = 149{,}58 \cdot 10^6.$$

La longitud del semieje menor de la órbita es $149{,}58 \cdot 10^6$ km.

b) Como el Sol está situado en uno de los focos de la elipse, la distancia máxima (afelio) y la mínima (perhielio) que separan a la Tierra del Sol son, respectivamente, a + c y a – c.

Tenemos los valores de las distancias:

$d_{máx} = 149{,}60 \cdot 10^6 + 2{,}54 \cdot 10^6 = 154{,}14 \cdot 10^6$ km.

$d_{mín} = 149{,}60 \cdot 10^6 - 2{,}54 \cdot 10^6 = 147{,}06 \cdot 10^6$ km.