UNIDAD 9: Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas

ACTIVIDADES-PÁG. 184

1. a) x = - 5 b) x = 2,81 c) x = 1 d) x = 1/3

2. C = 3,5; a = 2

3. a) $y = 2^{x-2}$ con (II) c) $y = \log_2 (x + 2)$ con (III)

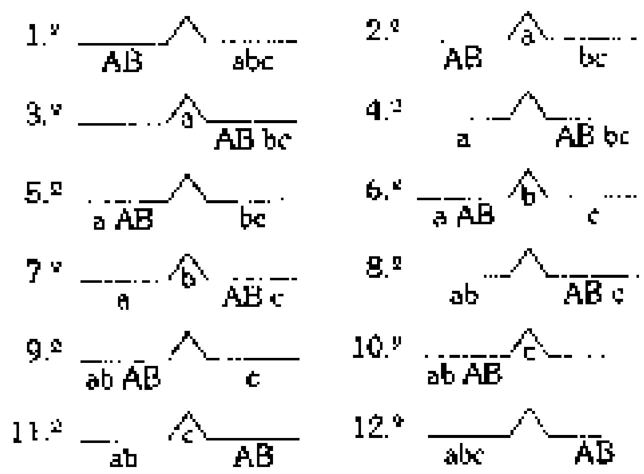
b) $y = 2^x - 2$ con (IV) d) $y = \log_2 (x) + 2$ con (I)

a) Dom f = R ; Im f = R ; Creciente en R
b) Dom f = R ; Im f = $(-2, +\infty)$; Creciente en R
c) Dom f = $(-2, +\infty)$; Im f = R ; Creciente en R
d) Dom f = $(0, +\infty)$; Im f = R ; Creciente en R

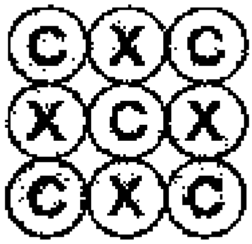
4. No podemos. Para ello la ventana debería estar a h = 10 · sen 70º = 9,40 m del suelo como máximo.

ACTIVIDADES-PÁG. 201

1. Los pasos a seguir son los siguientes, llamando AB a los montañeros que suben y abc a los que bajan.



2. Señalamos las monedas con C y X.



Consideramos el caso que sólo tengamos 9 monedas. En este caso hay 5 caras, C, y 4 cruces, X.

Si la abeja parte de una moneda marcada con C, puede hacer el recorrido: CXCXCXCXC

Pero si parte de una moneda marcada con X, no puede: XCXCXC…falta una C.

En nuestro caso hay 13 caras C y 13 cruces X. Si la abeja parte de una moneda marcada con C, es posible el recorrido, pero si la abeja parte de una moneda marcada con X no es posible.

3. La solución queda:

Sea el número $\overline{xyz}$ el número inicial. Se cumplirá:

$$(100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 100(x - z) + (z - x)$$

Si $x > z$, entonces $z - x < 0$ y hay que escribir la expresión anterior de la forma:

$$(x - z - 1) \cdot 100 + 100 + (z - x) = (x - z - 1) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + (10 + z - x)$$

La primera cifra de este número es: $x - z - 1$.

La segunda cifra de este número es: 9.

La tercera cifra de este número es: $10 + z - x$.

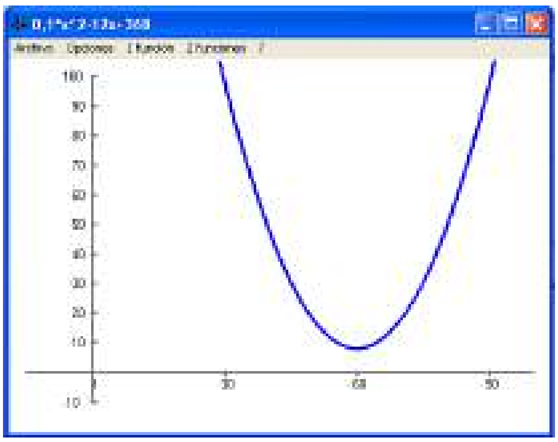
Observamos que $(x - z + 1) + (10 + z - x) = 0$, es decir, la primera cifra más la tercera siempre da 9 y la segunda también da 9. Luego siempre se cumple el resultado del problema.

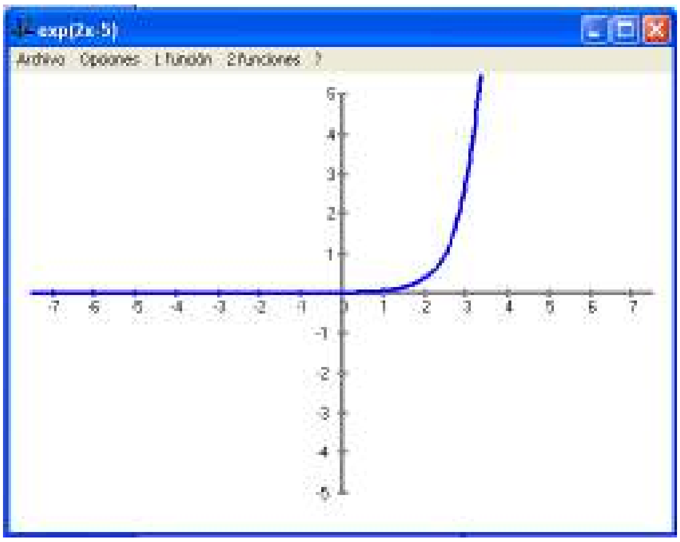
ACTIVIDADES-PÁG. 203

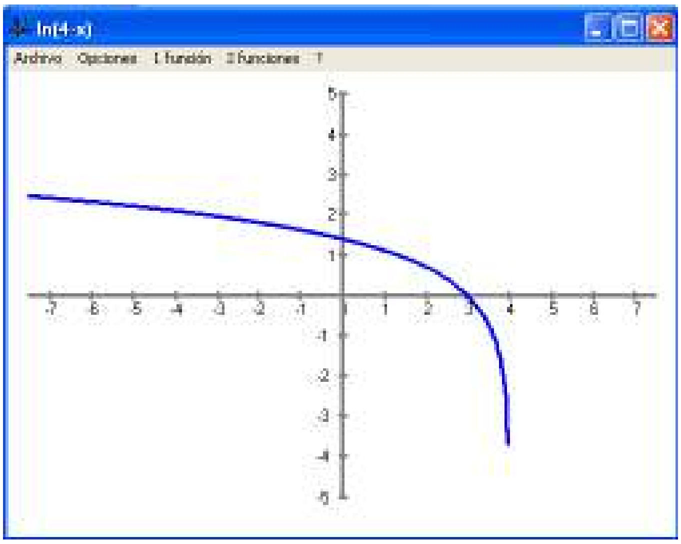
1. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = 0{,}1x^2 - 12x + 368$ b) $g(x) = e^{2x - 5}$ c) $h(x) = \ln(4 - x)$

En las siguientes imágenes podemos ver las gráficas de estas funciones:



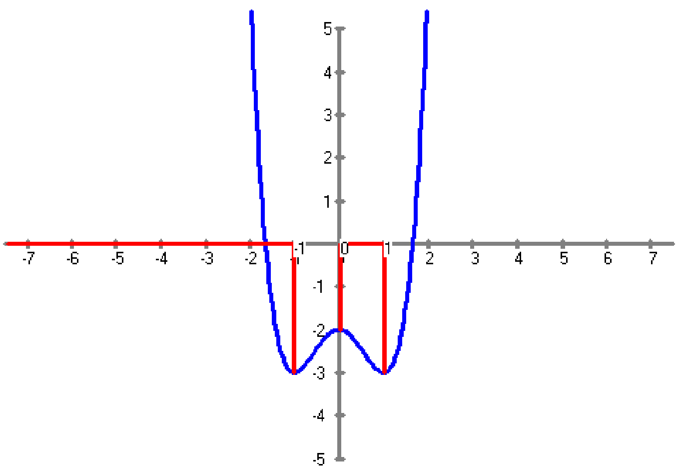




2. Estudia la monotonía y los extremos de las funciones y halla los puntos de corte de f(x) y g(x):

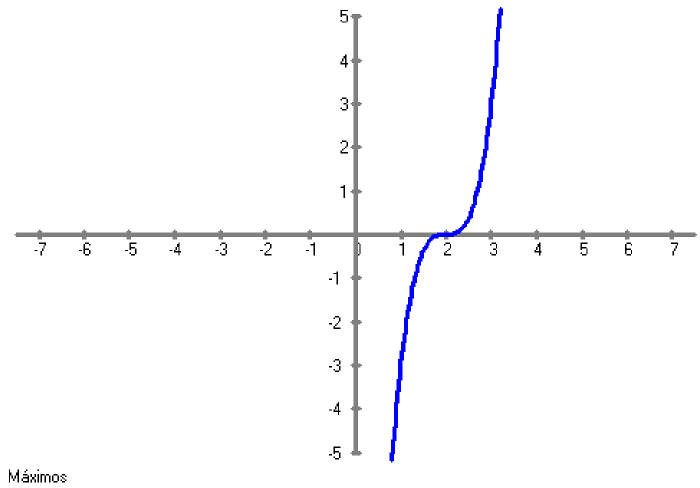
a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ b) $g(x) = 3(x - 2)^3$ c) $h(x) = x \cdot e^x$

a) La función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ es creciente en $(-1, 0) \cup (1,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$. Tiene un máximo relativo en (0, -2) y dos mínimos relativos en los puntos (-1, -3) y (1, -3) como podemos ver en su gráfica.

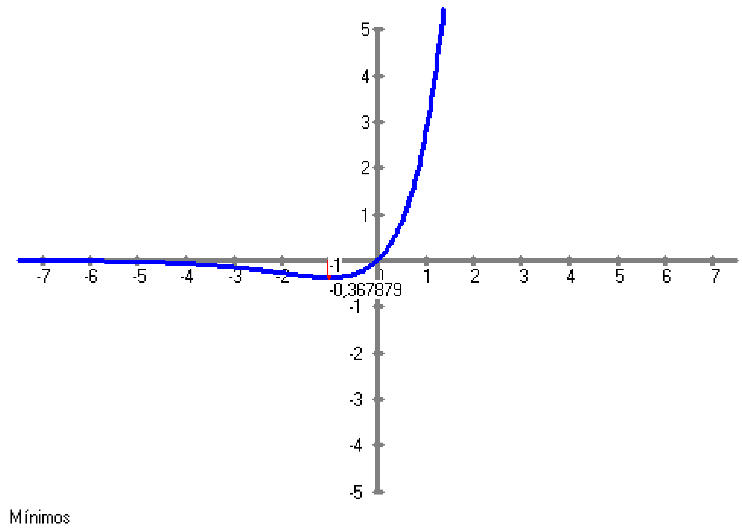


Intervalos de decrecimiento

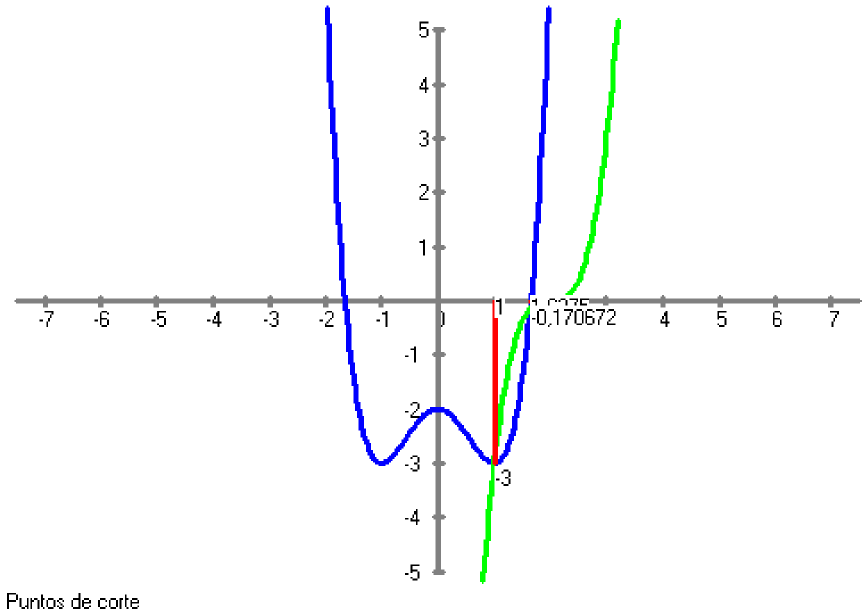
b) La función $g(x) = 3\,(x - 2)^3$ es creciente en R. Carece de extremos relativos como podemos ver en su gráfica.



c) La función $f(x) = x \cdot e^x$ es creciente en $(-1,+\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-1)$. Tiene un mínimo relativo en el punto (- 1, - 0,37) y carece de máximos relativos, como podemos ver en su gráfica.



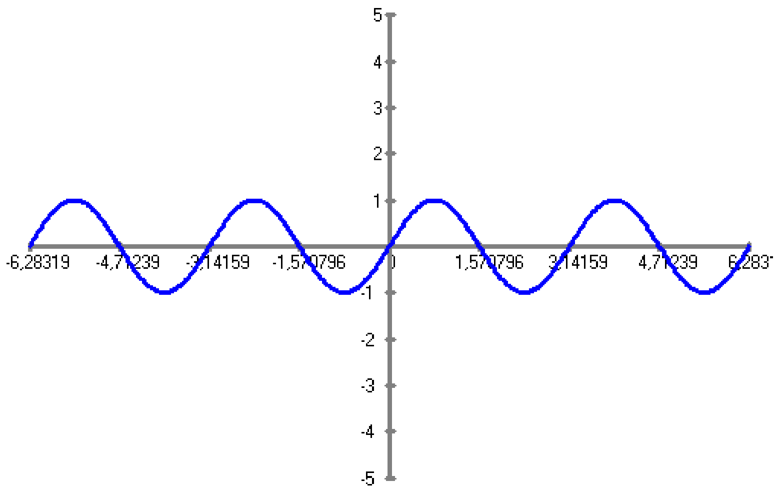
Los puntos de corte de las funciones f(x) y g(x) son (1,-3) y (1,64; -0,18) como podemos ver en la imagen:



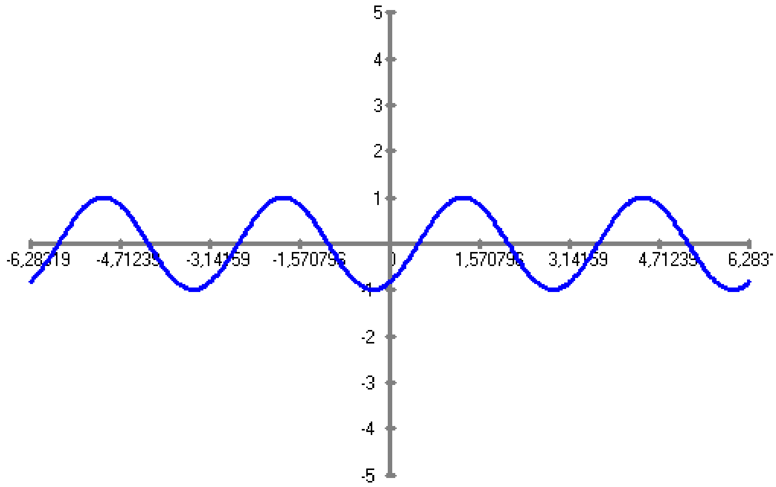
3. Representa las siguientes funciones e indica las transformaciones geométricas que permiten dibujar las gráficas de las funciones g(x) y h(x) a partir de la gráfica de f(x).

a) f (x) = sen 2x b) g (x) = sen (2x -1) c) h (x) = 4 · sen 2x

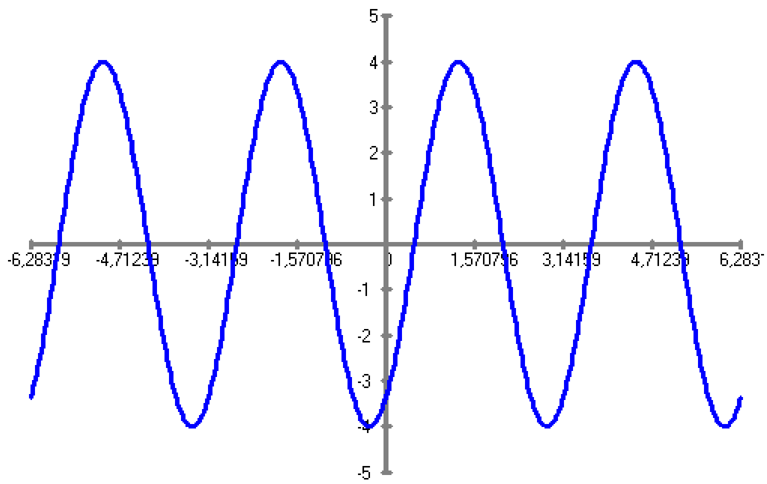
a) La gráfica puede verse en el dibujo.



b) La gráfica de la función g(x) se obtiene a partir de la gráfica de f(x) mediante una traslación de vector (0,5; 0).



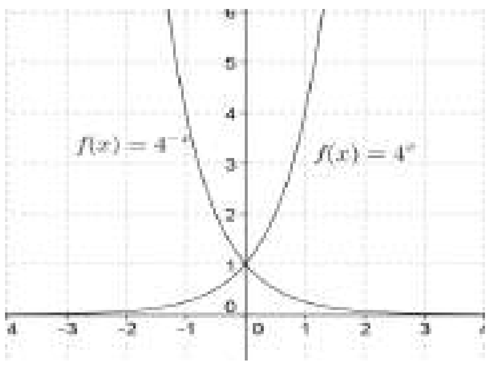
c) La gráfica de la función h(x) se obtiene a partir de la gráfica de f(x) mediante una dilatación multiplicando sus ordenadas por 4.



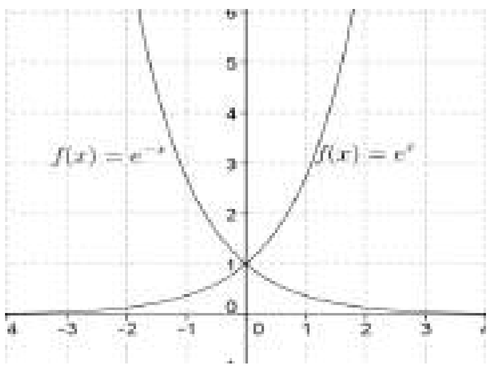
ACTIVIDADES-PÁG. 204

1. Las gráficas quedan:

a) y b)



c) y d)



2. En cada uno de los casos:

- $y = e^x + 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, según el vector $\vec{v}\ (0, 2)$.

- $y = e^x - 3$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, según el vector $\vec{v}\ (0, -3)$.

- $y = e^{x+1}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, según el vector $\vec{v}\ (-1, 0)$.

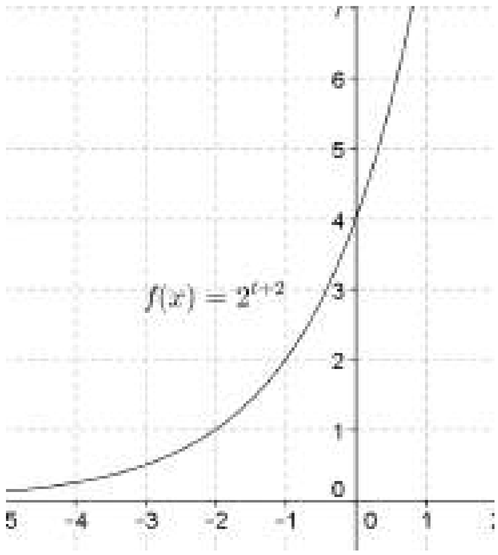
- $y = e^{x-3}$ se obtiene de trasladar la gráfica de la función $y = e^x$, según el vector $\vec{v}\ (3, 0)$.

3. La función $f(x) = 3^x$ es simétrica de $g(x) = 3^{-x}$ respecto del eje de ordenadas. La función $h(x) = 3^{|x|}$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. Es la recta x = 0

4. Dentro de un año tendremos 12 bulbos.

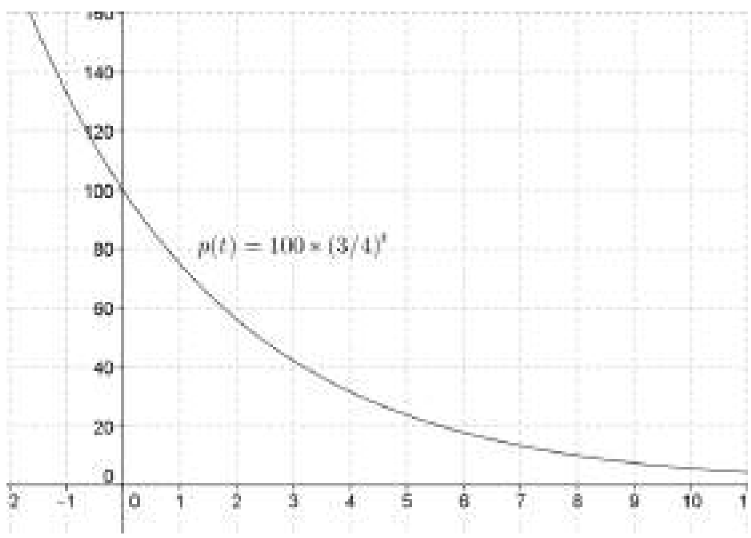
Dentro de 6 años tendremos $4 \cdot 2^6$ bulbos, es decir 256 bulbos.

La función es $f(x) = 2^{t+2}$ y su gráfica puede verse en el dibujo.



5. La solución queda:

a) La gráfica es:



La parte negativa de la gráfica no tiene sentido.

El corte en OY indica el número de automóviles que funcionan en el momento de salir de la cadena de montaje.

b) Para t = 10, p = 5,63 % siguen funcionado al cabo de 10 años.

c) Han de pasar 4,82 años.

6. La solución queda:

a) En el año 1800 hay una unidad de madera.

En el año 1600 había $(1,6)^{-2} = 0,39$ unidades de madera.

En el año 1900 había $1,6^{1} = 1,6$ unidades de madera.

En el año 2010 había $1,6^{2,10} = 2,68$ unidades de madera.

b) La función que se ajusta a esta situación es $f(t) = 1,6^{t}$ unidades de madera en función del tiempo, en siglos, a partir de 1800.

c) Para que haya el doble de madera que en 1800 se ha de verificar:

$$2 = 1,6^t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,6} = 1,475 \; siglos$$, es decir, en el año 1800 + 148 = 1948.

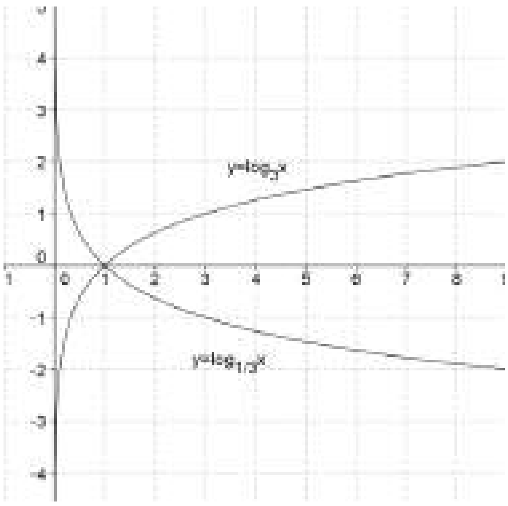
Para que haya la mitad de madera que en 1800 se ha de verificar:

$$\frac{1}{2} = 1,6^t \Rightarrow t = \frac{\log 0,5}{\log 1,6} = -1,475 \; siglos$$, es decir, en el año 1800 - 148 = 1652.

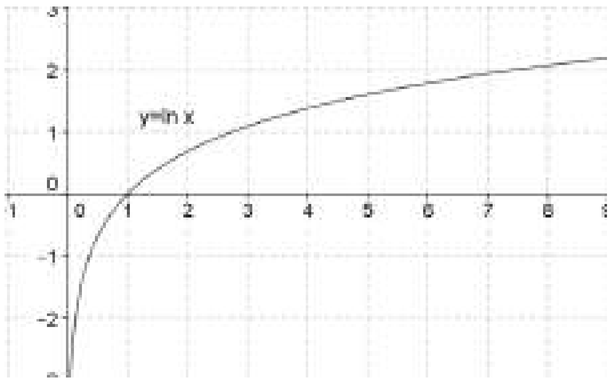
d) Se cuadriplica la cantidad de madera cada:

$$4 = 1,6^t \Rightarrow t = \frac{\log 4}{\log 1,6} = 2,95 \; siglos \, .$$

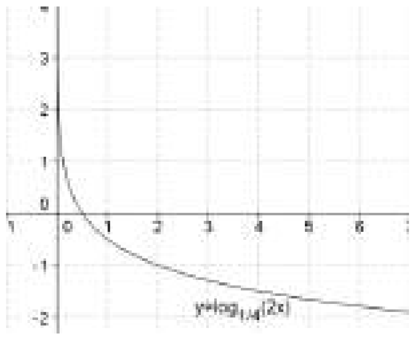
7. Las gráficas quedan: a) $y = \log_3 x$ y b) $y = \log_{1/3} x$



c) y = ln x



d) $y = \log_{1/4}(2x)$



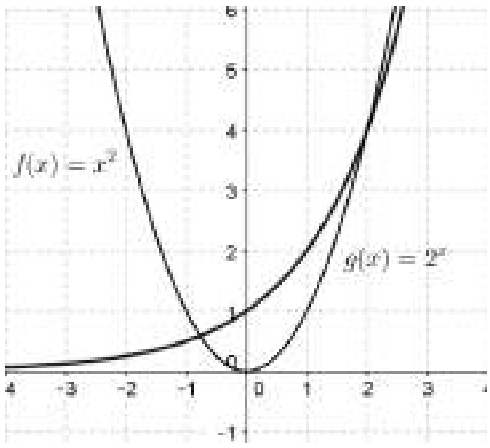
ACTIVIDADES-PÁG. 205

8. A partir de la gráfica dada, hacemos las siguientes transformaciones:

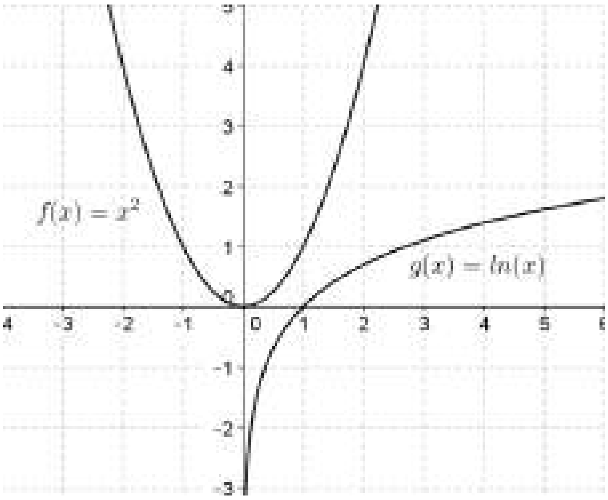
- $y = 2 + \log_2 x$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$ según el vector $\vec{v}\,(0,2)$
- $y = \log_2 x - 2$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, según el vector $\vec{v}\,(0,-2)$.
- $y = \log_2 (x+3)$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, según el vector $\vec{v}\,(-3,0)$
- $y = \log_2 (x-1)$ se obtiene de trasladar la gráfica de $y = \log_2 x$, según el vector $\vec{v}\,(1,0)$-

9. Las soluciones son:

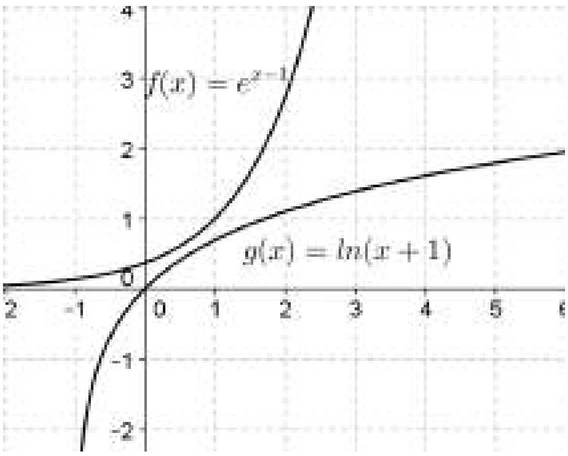
a) A partir de las gráficas siguientes podemos decir que la desigualdad $2^x > x^2$ es cierta para valores de x del intervalo (- 0,77 ; 2)



b) A partir de las gráficas siguientes podemos decir que la desigualdad $x^2 < \ln x$ no se cumple para ningún valor de x.

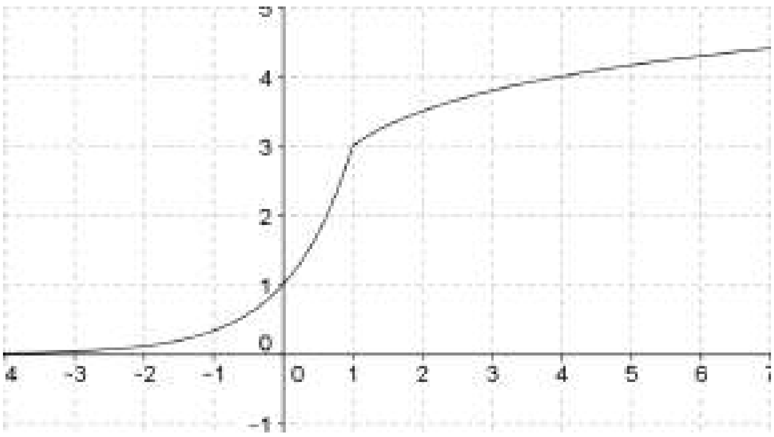


c) A partir de las gráficas siguientes podemos decir que la desigualdad $e^{x-1} \geq \ln(x+1)$ es cierta para todos los valores reales que tome x.



10. La correspondencia es: a) con $g(x) = 5^x$; b) con $h(x) = \log_5 x$ y c) con $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

11. La gráfica es:



12. Contamos el tiempo, t, a partir del momento actual. Imponiendo las condiciones del enunciado obtenemos:

$$\begin{cases} 100 = A \cdot e^{-6B} \\ 2100 = A \cdot e^{0 \cdot B} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2100 \\ B = 0{,}5074 \end{cases}$$

La función buscada es: $N = 2100 \cdot e^{0{,}5074 \cdot t}$

Para que haya 14 850 ejemplares han de pasar t años, y se debe verificar:

$$14\,850 = 2100 \cdot e^{0{,}5074 \cdot t} \quad \Rightarrow \quad t = 3{,}86 \text{ años.}$$

13. El precio del producto al cabo de t años será $P(t) = 4 \cdot 1{,}12^t$.

Para que el producto valga 8 € han de pasar $t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}12} = 6{,}12$ años.

14. En cada uno de los casos:

Son positivas las razones trigonométricas de los apartados a), b) y e)

Son negativas las razones trigonométricas de los apartados c) y d).

15. Las reducciones quedarán:

a) $1215° = 3 \cdot 360° + 135° \quad \Rightarrow \quad 1215° \cong 135°$

b) $-60° = 300° - 360° \quad \Rightarrow \quad -60° \cong 300°$

c) $\dfrac{23\pi}{6} \cong \dfrac{11\pi}{6}$

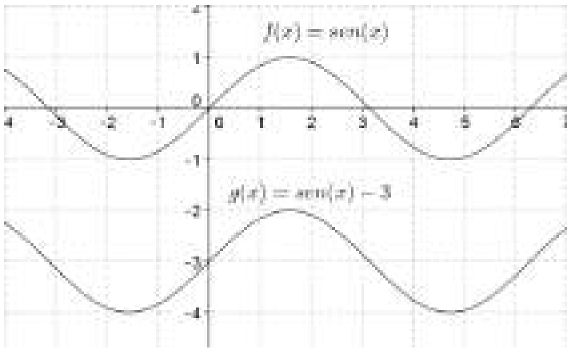
d) $18750° = 52 \cdot 360° + 30° \quad \Rightarrow \quad 18750° \cong 30°$

e) $\dfrac{26\pi}{3} \cong \dfrac{2\pi}{3}$

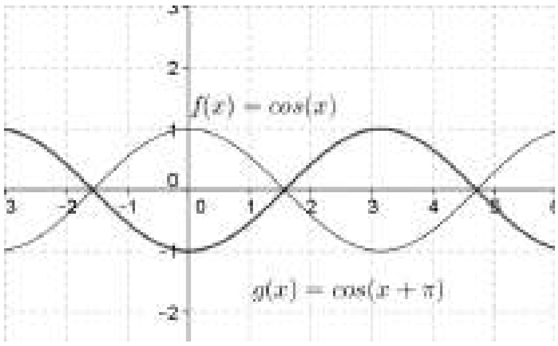
ACTIVIDADES-PÁG. 206

16. Las gráficas pedidas son:

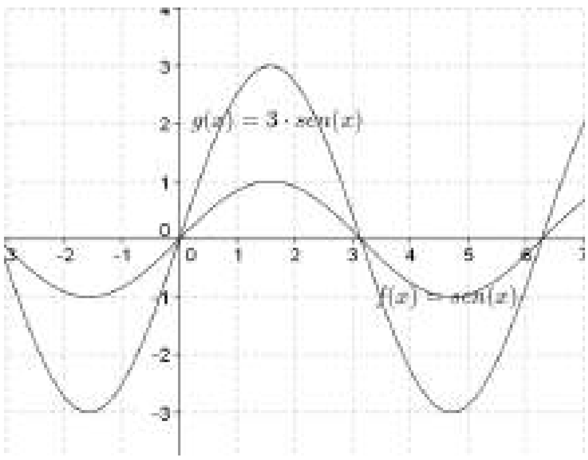
a) La gráfica de la función f(x) = sen x – 3 se obtiene de aplicar a la de la función f(x) = sen x una traslación de vector $\vec{v}\,(0,-3)$ como vemos en las gráficas siguientes:



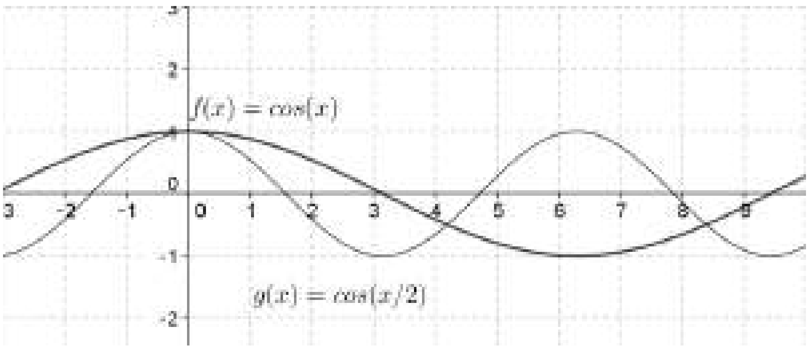
b) La gráfica de la función f(x) = cos (x + π) se obtiene de aplicar a la de la función f(x) = cos x una simetría de eje OX, o una traslación de vector $\vec{v}\,(-\pi,0)$como vemos en las gráficas siguientes:



c) La gráfica de la función f(x) = 3 · sen x se obtiene de dilatar la gráfica de la función f(x) = sen x multiplicando sus ordenadas por 3 como podemos ver en las gráficas siguientes:



d) La función $f(x) = \cos \dfrac{x}{2}$ se obtiene de la función f(x) = cos x y si teniendo en cuenta que si el periodo de esta función es 2 π el de la que nos piden es (2 π)/(1/2) = 4 π



17. Con un crecimiento anual del 2% al cabo de t años, habrá en la Tierra una población de:

$$P = 1{,}02^t \cdot 4\,500 \text{ millones de habitantes.}$$

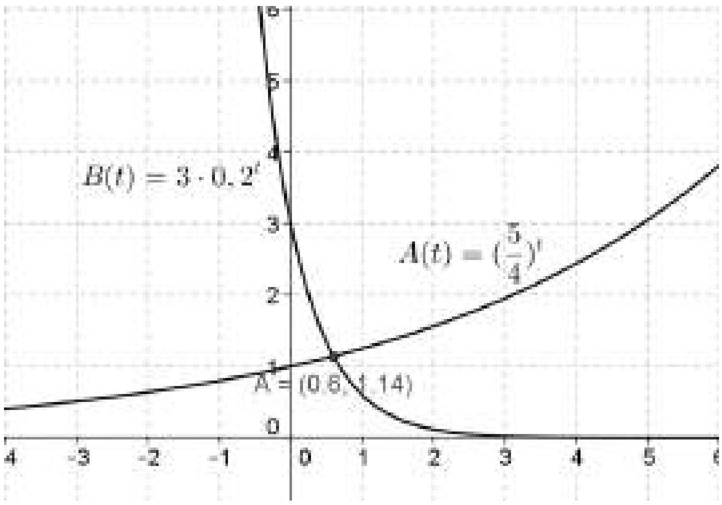
De este modo: $10\,000 = 1{,}02^t \cdot 4\,500$, entonces $t = \dfrac{\log \dfrac{10000}{4500}}{\log 1{,}02} = 40{,}32$ *años* .

Al cabo de 40,32 años la población será de 10 mil millones.

18. Las soluciones son:

a) Las gráficas pueden verse en el dibujo.

Al nacer la especie A medía 1 cm y la B medía 3 cm.



b) Para ver en qué momento miden lo mismo resolvemos la ecuación:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^t = 3\cdot 0{,}2^t \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log(1{,}25)-\log(0{,}2)} \Rightarrow t = 0{,}5995 \text{ años} .$$

Miden lo mismo al cabo de 0,6 años, es decir al cabo de 219 días. A partir de este momento la especie A sigue creciendo y la B disminuyendo de tamaño.

19. Las respuestas son:

a) La dosis inicial ha sido de 10 mg

b) Para ver en qué momento deja de hacer efecto el fármaco resolvemos la ecuación:

$$0{,}15 = 10\cdot 0{,}72^t \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}015}{\log(0{,}72)} \Rightarrow t = 12{,}784 \text{ horas}$$

20. Las soluciones son:

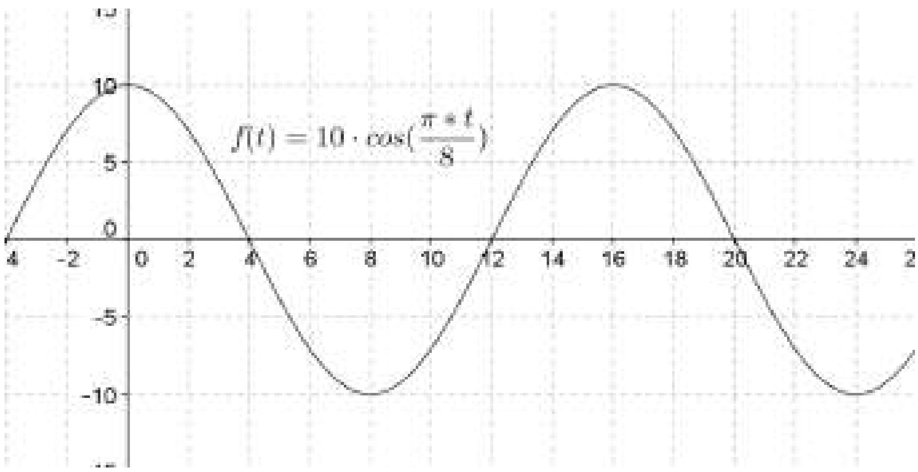
a) Si x = 12, entonces y = 5,49 metros es capaz de recorrer en un minuto después de 12 horas de entrenamiento.

b) Si y = 12 metros por minuto, entonces se cumplirá:

$$12 = 16\,(1 - e^{-0{,}035x}) \Rightarrow 0{,}75 = 1 - e^{-0{,}035x} \Rightarrow e^{-0{,}035x} = 0{,}25 \Rightarrow x = \frac{\ln 0{,}25}{-0{,}035} = 39{,}61$$

Tendrá que realizar 39,61 horas de entrenamiento.

21. En la gráfica podemos ver que la longitud máxima, de 10 m, la alcanza a las 0 horas y a las 16 horas y la mínima, de -10 m, a las 8 y a las 24 horas.



22. Las respuestas son:

a) El terremoto de 2011 tuvo una magnitud de:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log \left(\frac{7{,}9 \cdot 10^{17}}{2{,}5 \cdot 10^{4}} \right) = 8{,}9998 \approx 9$$

b) El terremoto de Lisboa liberó una energía de:

$$8{,}7 = \frac{2}{3} \cdot \log \left(\frac{E}{2{,}5 \cdot 10^{4}} \right) \Rightarrow E = 2{,}5 \cdot 10^{4} \cdot 10^{13{,}05} \Rightarrow E = 2{,}81 \cdot 10^{17} \;\; julios$$

c) Hallamos el cociente $\dfrac{7{,}9 \cdot 10^{17}}{2{,}81 \cdot 10^{17}} = 2{,}8$

El terremoto de Japón fue 2,8 veces más potente que el de Lisboa

d) Resolvemos las inecuaciones:

$$5 \leq \frac{2}{3} \cdot \log \left(\frac{E}{2{,}5 \cdot 10^{4}} \right) \leq 7 \quad \Rightarrow \quad 7{,}9 \cdot 10^{11} \leq E \leq 7{,}9 \cdot 10^{14}$$

Es decir debe encontrarse entre $7{,}95 \cdot 10^{11}$ julios y $7{,}9 \cdot 10^{14}$ julios

23. La función viene dada por $P(t) = 0{,}88^{t} \cdot x$ siendo x el precio de compra y t los años desde que se compró. Haciendo $528 = 0{,}88^{t} \cdot x$ obtenemos que el precio del ordenador es de 600 €.

Por tanto la función es $P(t) = 600 \cdot 0{,}88^{t}$

El ordenador reduce su valor a la mitad al cabo de: $t = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}88} = 5{,}42 \;\; años$

El ordenador reduce su valor a la décima parte al cabo de: $t = \dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}88} = 18{,}01 \;\; años$

ACTIVIDADES-PÁG. 207

Ofrecemos bibliografía sobre la relación entre matemáticas y ciclismo.

CORBALÁN, Fernando. (201) *Matemáticas de cerca.* Graó. Barcelona.

ORTEGA, Tomás. (2005). *Conexiones matemáticas.* Graó. Barcelona.

SORANDO MUZÁS, J. M. (2012) *Matemáticas y deporte. Sugerencias para el aula.* Revista Números. Volumen 80.

SORANDO MUZÁS, J. M. http://catedu.es/matematicas_mundo/

http://plataformarecorridosciclistas.org/2009/11/22/rampas-maximas-superadas-en-competicion/