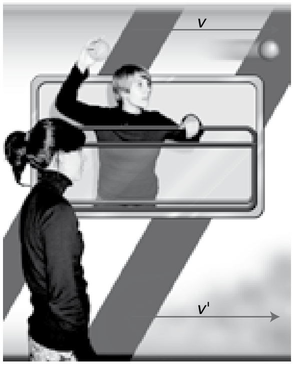
Actividades

1. **El pasajero de la figura arroja una pelota con una velocidad *v* con respecto a sí mismo. Si el vagón se mueve en el mismo sentido con una velocidad *v′*, ¿con qué velocidad se mueve la pelota respecto de un observador que está parado fuera del tren?**



La velocidad de la pelota respecto del observador que está en reposo fuera del tren es $v_0 = v + v'$.

2. **Un observador se encuentra en la terraza de un edificio situado a 20 metros de la calle, donde se encuentra un segundo observador. Si el primero lanza una piedra verticalmente hacia arriba, escribe las ecuaciones de transformación que permitan calcular, en cualquier instante, la posición de la piedra con respecto de los dos observadores.**

Las ecuaciones del movimiento para el observador situado en la terraza y para el observador situado en la calle son, respectivamente:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y' = 20 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

De donde se deduce la ecuación de transformación $y' = y + 20$.

3. **Escribe las ecuaciones de transformación en el caso de que el segundo observador de la actividad anterior subiera en un ascensor con velocidad constante de 0,5 m/s.**

$$y = (v_0 - 0{,}05)t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y' = 20 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

4. **¿Cambiarían las ecuaciones de transformación anteriores en el caso de que el primer observador dejara caer la piedra en lugar de lanzarla hacia arriba?**

Si se dejara caer la piedra, las ecuaciones del movimiento serían:

$$y = -\frac{1}{2} g t^2; \qquad y' = 20 - \frac{1}{2} g t^2$$

por tanto, la ecuación de transformación no varía:

$$y' = y + 20$$

5. **¿Se pueden aplicar las ecuaciones de transformación en el caso de que el ascensor de la actividad 3 ascendiera con aceleración constante?**

Consultar Epígrafe 11.4.C de la página 257 del libro del alumno.

6. **Un automóvil circula a 120 km/h por una carretera y adelanta a un camión que se mueve a una velocidad de 80 km/h. ¿Con qué velocidad se mueve un vehículo respecto del otro?**

Sin consideramos que el observador inicial *0* circula a 120 km/h y el observador *0′* circula a 80 km/h,

$v = u - u' = 120$ km/h $- 80$ km/h $= 40$ km/h

7. **¿Cuál sería la velocidad relativa de cada vehículo si el camión y el coche se cruzaran circulando en sentido contrario?**

En ese caso la velocidad relativa entre los dos vehículos es $v = u - u' = 120$ km/h $+ 80$ km/h $= 200$ km/h

8. **¿Por qué no se puede medir la contracción que experimenta un objeto al moverse?**

Porque el metro utilizado en la medida también sufre la misma contracción relativa, de forma que la razón entre las longitudes del objeto y del metro permanecería constante.

9. **Un observador terrestre mide la longitud de una nave que pasa próxima a la Tierra y que se mueve a una velocidad $v < c$ resultando ser L. Los astronautas que viajan en la nave le comunican por radio que la longitud de su nave es L_0.**

   a) **¿Coinciden ambas longitudes? ¿Cuál es mayor? Razona las respuestas.**

   b) **Si la nave espacial se moviese a la velocidad de la luz, ¿cuál sería la longitud que mediría el observador terrestre?**

Consultar Epígrafe 11.7.B de la página 263 del libro del alumno.

10. **Para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz la mecánica de Newton sigue siendo válida. Explica razonadamente por qué.**

Si la velocidad *v* es muy pequeña, comparada con la velocidad de la luz, el factor de transformación:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

tiende al valor uno, y entonces, las transformaciones de Lorentz coinciden con las transformaciones de Galileo.

11. **Comprueba que si *u* y *v* son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, la transformación relativista de la velocidad coincide con la transformación de la velocidad de Galileo.**

Las transformaciones galileana y relativista de la velocidad son, respectivamente:

$$u' = u - v; \qquad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

Si *u* y *v* son muy pequeñas comparadas con *c*, se cumple que:

$$\frac{uv}{c^2} \cong 0$$

En este caso las dos transformaciones coinciden.

12. Comprueba si un objeto que se mueve con una velocidad *c* con relación a un observador *S,* también tiene una velocidad *c* respecto de un observador *S′* (independientemente de la velocidad *v* de *S′*).

En este caso $u = c$. Si aplicamos la transformación relativista de la velocidad, tenemos:

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{cv}{c^2}} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{c - v}{\frac{c - v}{c}} = c$$

Ciencia, tecnología y sociedad

1. ¿Qué es una lente gravitacional?

Es el efecto de desviar la luz por campos gravitatorios muy intensos.

2. ¿ Qué diferencias existen entre una lente óptica y una lente gravitacional?

Una lente óptica tiene el punto focal bien definido. Una lente gravitacional no tiene un foco bien definido. En una lente óptica los rayos luminosos son tanto más desviados cuanto más alejados del eje óptico inciden en la lente. En una lente gravitacional ocurre lo contrario.

3. ¿Qué criterio se utiliza para detectar materia oscura en nuestra galaxia?

El aumento de brillo de una estrella originado por una lente gravitacional.

4. Una aplicación de las lentes gravitacionales es determinar la masa de una galaxia. ¿En qué condiciones?

La galaxia que origina la lente gravitacional ha de tener simetría esférica.

Problemas propuestos

1. Una nave espacial *A* pasa ante un observador *B* con una velocidad relativa de 0,200*c*. El observador *B* calcula que una persona de la nave necesita 3,96 s en realizar una tarea determinada. ¿Qué tiempo medirá la persona de la nave para realizar dicha tarea? (Fig. 11.18).

El tiempo medido por el observador de la nave:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}2\,c}{c}\right)^2} = 3{,}96 \text{ s} \cdot 0{,}979 = 3{,}88 \text{ s}$$

2. Un astronauta de 30 años se casa con una mujer de 20 años poco antes de emprender un viaje espacial. Cuando retorna a la Tierra ella tiene 35 años y él 32. ¿Cuánto ha durado el viaje según los relojes de la Tierra y cuál fue la velocidad media durante el viaje?

El tiempo transcurrido según los relojes de la Tierra viene dado por la diferencia de edad de la mujer: 15 años. En este caso, pues, $t = 15$ años y $t' = 2$ años. Por tanto, tenemos que:

$$2 \text{ años} = 15 \text{ años} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,; \qquad \frac{4}{225} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

de donde se deduce que $v = 0{,}99\,c$.

3. Dos observadores, uno en tierra y otro en una nave espacial, sincronizan sus relojes a las 12 horas, en el instante en que parte la nave con una velocidad media de 10^8 m/s. Si el astronauta pudiera leer el reloj del observador en tierra a través de un telescopio, ¿qué hora leería una vez que ha transcurrido una hora y media para él?

La dilatación del tiempo viene dada por:

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1{,}5 \text{ h}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1{,}5 \text{ h}}{\sqrt{\frac{8}{9}}} =$$

$$= \frac{4{,}5 \text{ h}}{\sqrt{8}} = 1{,}59 \text{ h} = 1 \text{ h } 35 \text{ min}$$

4. Dos gemelos tienen 25 años de edad; entonces uno de ellos sale en un viaje por el espacio a una velocidad constante. Para el gemelo que viaja en la nave, cuando regresa, han transcurrido 6 años, mientras que su hermano que quedó en Tierra tiene entonces 43 años. ¿Cuál fue la velocidad de la nave?

Aplicamos la expresión que nos permite calcular la variación del tiempo:

$$t' = t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

En este caso, $t = 43 - 25 = 18$ años; $t' = 6$ años.

$$\frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,; \qquad \frac{1}{9} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

$c^2 = 9c^2 - 9v^2$; $9v^2 = 8c^2$; $3v = 2{,}83\,c$; $v = 2{,}8 \cdot 10^8$ m/s

5. ¿A qué velocidad debería desplazarse un astronauta para que el tiempo transcurrido en la cápsula espacial sea la mitad del tiempo transcurrido en la Tierra?

Aplicamos la expresión de la dilatación del tiempo, que en este caso es $t' = \frac{1}{2}t$.

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,; \qquad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}\,; \qquad \frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$4c^2 - 4v^2 = c^2$; $\qquad 4v^2 = 3c^2$

De donde: $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ m/s.

6. Las aeronaves de las líneas aéreas comerciales vuelan a una velocidad media de 250 m/s, con respecto a la Tierra. ¿Deberán reajustar los pasajeros sus relojes después de un vuelo para corregir la dilatación temporal? Razona tu respuesta.

No. Porque la velocidad de 250 m/s es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz. Por tanto, la dilatación del tiempo es despreciable.

7. Analizando un haz de partículas radiactivas en un laboratorio se observa que cada partícula tiene una vida media

de 2 · 10^{-8}s. Después de este tiempo la partícula cambia a una nueva forma. Cuando las mismas partículas estaban en reposo, tenían una vida media de 0,75 · 10^{-8} s. ¿Con qué velocidad se mueven las partículas del haz?

Aplicamos la trasformación relativista del tiempo:

$$t = t' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ ; \ t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t' \ ; \ t^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t'^2 \ ;$$

$$4 \cdot 10^{16} \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0{,}75^2 \cdot 10^{16}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{4 - 0{,}75^2}{4} = 0{,}859 \ ; \quad v = \sqrt{0{,}859} \cdot 3 \cdot 10^8 = 2{,}78 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Contracción de la longitud

8. Cuando una nave espacial está en reposo con respecto a un observador, su longitud es de 50 m. ¿Qué longitud medirá el mismo observador cuando la nave se mueve con una velocidad de 2,4 · 10^8 m/s?

Aplicamos la expresión que determina la contracción lineal:

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 50 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}8c)^2}{c^2}} = 30 \text{ m}$$

siendo $v = 2{,}4 \cdot 10^8$ m/s = $0{,}8c$

9. ¿Cuál debe ser la velocidad de una varilla para que su longitud se reduzca a la tercera parte de la que tiene en reposo?

Despejamos la velocidad en la expresión que determina la contracción lineal:

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} ; \qquad \frac{1}{3} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{1}{9} = 1 - \frac{v^2}{c^2};$$

de donde:

$v = 0{,}94c$

10. Un observador terrestre aprecia que una nave se mueve a una velocidad de $0{,}312c$. ¿En qué proporción se contrae para él la nave?

La nave se contrae en una proporción definida por:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}31c}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - 0{,}31^2} = 0{,}95 ; \qquad \ell = 0{,}95\ \ell'$$

El porcentaje de la contracción viene dado por:

$$\frac{\ell' - \ell}{\ell'} \cdot 100 = \frac{\ell' - 0{,}95\ell'}{\ell'} \cdot 100 = 5\ \%$$

11. En un universo hipotético, la velocidad de la luz es de 20 m/s. ¿En qué porcentaje se reduce la longitud de un objeto que se mueve a 15 m/s respecto de un observador en reposo?

La relación de las longitudes viene dada por:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{20}\right)^2} = 0{,}66 ; \qquad \ell = 0{,}66\,\ell'$$

El porcentaje pedido será:

$$\frac{\ell' - \ell}{\ell'} \cdot 100 = \frac{\ell' - 0{,}66\,\ell'}{\ell'} \cdot 100 = 34\ \%$$

12. ¿A qué velocidad debería viajar un cohete para que su longitud se contrajera en un 50%?

Aplicamos la ecuación que define la contracción:

$$\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} ; \qquad \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} ; \qquad \frac{1}{4} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

$v^2 = 0{,}75c^2$; $\qquad v = 0{,}866 \cdot 3 \cdot 10^8$ m/s $= 2{,}6 \cdot 10^8$ m/s

13. Calcula la velocidad relativa de una regla sabiendo que para un observador ligado a ella mide un metro y para un observador exterior la regla mide 0,98 m.

De la expresión $\ell = \ell' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ se obtiene la velocidad.

En este caso es ℓ = 98 cm y ℓ' = 100 cm.

$$100^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 98^2$$

de donde:

$$v = \sqrt{100^2 - 98^2} \cdot \frac{c}{100} = 0{,}199c = 60\,000 \text{ km/s}$$

14. Un astronauta que va a gran velocidad en una nave espacial sostiene un metro en la mano. ¿Qué advierte en cuanto a la longitud del metro al girarlo desde la posición paralela a la línea de movimiento a una posición perpendicular?

No observaría ninguna variación, puesto que aprecia que la longitud propia es constante. En cambio, un observador exterior en reposo observaría cómo el metro se hace más estrecho.

15. Una nave se mueve en línea recta pasando cerca de la Tierra con una velocidad 2 · 10^8 m/s. Un observador desde la Tierra ve un haz de rayos láser (luz) según una trayectoria paralela. ¿Cuál es la velocidad del haz láser para el observador de la nave?

La misma que para el observador de la Tierra, 3 · 10^8 m/s, porque la velocidad de la luz es absoluta. Es la misma para todos los observadores cualquiera que sea su velocidad relativa.

16. Cuando un cohete pasa en su órbita por la Tierra con una velocidad v manda un pulso de luz por delante de él. ¿Con qué velocidad se moverá el pulso de luz respecto a un observador que se encuentra sobre la Tierra?

La velocidad de la luz es constante para todos los observadores independientemente del estado de movimiento en que se encuentren.

17. Una nave espacial se desplaza, respecto a un observador situado en la Tierra, con una velocidad v_1 = 0,15c. En un momento dado es adelantada por otra nave que se mueve en la misma dirección y sentido con una velocidad v_2 = 0,2c. ¿Qué velocidad tiene esta nave respecto de la primera?

Aplicamos la transformación relativista de la velocidad:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}} = \frac{0{,}2c - 0{,}15c}{1 - \dfrac{(0{,}2 \cdot 0{,}15)c^2}{c^2}} = \frac{0{,}05\,c}{1 - 0{,}003} = 0{,}05\,c$$

Masa relativista. Equivalencia entre masa y energía

18. La masa en reposo de un electrón es $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg. ¿Cuál es su masa relativista si su velocidad es $0{,}80c$?

La masa relativista de un cuerpo en movimiento viene dada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{0{,}6} = 1{,}5 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

19. Un electrón se acelera hasta alcanzar una velocidad $0{,}80c$. Compara su energía cinética relativista con el valor dado por la mecánica de Newton.

Datos: masa en reposo del electrón, $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $c = 8 \cdot 10^8$ m/s.

Aplicando el resultado del problema anterior, obtenemos la energía relativista:

$$E_c = (m - m_0)\,c^2 =$$

$$= (1{,}5 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} - 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}) \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 5{,}49 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

La energía cinética no relativista está determinada por la expresión clásica:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (0{,}8c)^2 = 2{,}62 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

20. ¿Cuál es la masa de un electrón que se mueve con la velocidad de $2{,}0 \cdot 10^8$ m/s? ¿Cuál es su energía total? ¿Cuál es su energía cinética relativista?

La masa del electrón en movimiento vale:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{\dfrac{5}{9}}} =$$

$$= 1{,}22 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

$$E = m c^2 = 1{,}22 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 1{,}1 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

Energía cinética relativista:

$$E_c = (m - m_0)\,c^2 =$$

$$= (12{,}2 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} - 9{,}1 \cdot 10^{-31})\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

21. ¿Con qué velocidad se debe mover un cuerpo para que su masa se haga el doble?

Se ha de cumplir que $m = 2m_0$. Despejamos la velocidad de la expresión:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}; \qquad 2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}};$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0{,}25; \qquad v = 0{,}87\,c$$

22. Halla la masa y la energía total de un electrón que se mueve con una velocidad de $1{,}00 \cdot 10^8$ m/s.

Masa del electrón en movimiento:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{10^8}{3 \cdot 10^8}\right)^2}} = 9{,}65 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

La energía total será:

$$E = m c^2 = 9{,}65 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 8{,}69 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

23. ¿A qué velocidad debería moverse un cuerpo para que su masa en movimiento fuera exactamente cinco veces su masa en reposo?

Sustituimos el valor de la masa de la partícula cuando está en movimiento en la ecuación:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}};$$

si:

$$m = 5\,m_0$$

se tiene:

$$5 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1$$

$$25 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1; \qquad 25 \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2} = 1$$

$$25c^2 - 25v^2 = c^2; \qquad 25v^2 = 24c^2; \qquad 5v = 4{,}899\,c$$

$$v = \frac{4{,}899}{5} \cdot 3 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 2{,}94 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

24. Calcula la energía en reposo de un protón sabiendo que su masa en reposo es $1{,}672 \cdot 10^{-27}$ kg.

La energía en reposo viene determinada por la ecuación $E = m_0 c^2$. Para el caso de un protón, esta energía es:

$$E = 1{,}672 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 1{,}50 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

25. Un electrón se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 1,5 MV y, en consecuencia, adquiere una energía de 1,5 MeV. Calcula su velocidad y su masa.

Datos: $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

La energía potencial que origina el campo eléctrico se convierte en energía cinética relativista.

$$Vq = \frac{1}{2} m_0 v^2 = (m - m_0)\,c^2$$

siendo m la masa del electrón en movimiento.

Energía recibida por el electrón:

$$Vq = 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = 2{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

Por tanto, la variación de la masa será:

$$m - m_0 = \frac{E}{c^2} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 2{,}67 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

La masa del electrón en movimiento toma el valor:

$m = m_0 + 2{,}67 \cdot 10^{-30}$ kg $= 0{,}91 \cdot 10^{-30}$ kg $+ 2{,}67 \cdot 10^{-30}$ kg $=$

$= 3{,}6 \cdot 10^{-30}$ kg

De la expresión $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$, despejamos la velocidad.

$$v^2 = c^2 \left[1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2\right] = c^2 \left[1 - \left(\frac{0{,}91}{3{,}6}\right)^2\right]$$

de donde se deduce que $v = 0{,}97\,c$.

26. Calcula la energía que se debe suministrar a un electrón para que alcance una velocidad 0,9 *c* partiendo del reposo.

La energía cinética relativista viene dada por:

$$E_c = (m - m_0)\,c^2 = \left[\frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0\right] c^2 =$$

$$= 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}9)^2}} - 1\right) =$$

$$= 1{,}06 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 0{,}662\ \text{MeV}$$

27. Un electrón se mueve con una velocidad 0,85 *c*. Calcula su energía total y su energía cinética en eV.

La energía total del electrón es:

$$E = m\,c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,c^2 = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2}{\sqrt{1 - (0{,}85)^2}} =$$

$$= 1{,}55 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 0{,}97\ \text{MeV}$$

La energía cinética se obtiene restando la energía en reposo de la energía total:

$$E_c = E - m_0\,c^2 = 1{,}55 \cdot 10^{-13}\ \text{J} - 0{,}82 \cdot 10^{-13}\ \text{J} =$$

$$= 0{,}73 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 0{,}46\ \text{MeV}$$

28. La energía total de un protón es tres veces su energía en reposo.

a) **¿Cuál es la energía en reposo del protón?**

b) **¿Cuál es la velocidad del protón?**

c) **¿Cuál es la energía cinética del protón?**

Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) Energía del protón en reposo:

$$E_c = m_0\,c^2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 =$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{J} = 938\ \text{MeV}$$

b) Puesto que la energía total es tres veces la energía en reposo, se cumple que:

$$m\,c^2 = 3\,m_0\,c^2$$

o bien:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = 3\,m_0 \Rightarrow 1 = 9 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

de donde:

$$9\,v^2 = 8\,c^2; \qquad v = 2{,}8 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

c) La energía del protón será:

$$E = (m - m_0)\,c^2 = m\,c^2 - m_0\,c^2 = 3\,m_0\,c^2 - m_0\,c^2 = 2\,m_0\,c^2$$

Antes hemos visto que $m_0\,c^2 = 938$ MeV. Por tanto, la energía pedida será:

$$E_c = 1876\ \text{MeV}$$

29. ¿A qué velocidad debería moverse un objeto para que su masa en movimiento fuera cuatro veces su masa en reposo?

La variación de la masa queda determinada por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

siendo:

$$m = 4\,m_0$$

$$16 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1; \qquad 16 \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2} = 1$$

$$16\,c^2 - 16\,v^2 = c^2; \qquad 16\,v^2 = 15\,c^2; \qquad v = 2{,}9 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

30. Un electrón se acelera partiendo del reposo a través de una diferencia de potencial de 0,30 MV. Calcula m/m_0, la relación entre su masa en movimiento y su masa en reposo.

La energía suministrada al electrón se convierte en energía relativista.

$$V\,q = m\,c^2 - m_0\,c^2$$

$$m\,c^2 = q\,V + m_0\,c^2; \qquad m = \frac{q\,V}{c^2} + m_0$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{q\,V}{m_0\,c^2} + 1 = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}3 \cdot 10^6\ \text{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2} + 1 = 1{,}58$$

31. La masa de un electrón en reposo es $m_0 = 9{,}10 \cdot 10^{-31}$ kg. Si el electrón tiene una velocidad de $2{,}10 \cdot 10^8$ m/s, calcula:

a) **La masa del electrón a esa velocidad.**

b) **Su energía total.**

c) **La energía del electrón en reposo.**

d) **La energía cinética del electrón.**

e) **¿A qué diferencia de potencial ha sido sometido el electrón para alcanzar la velocidad indicada?**

a) La masa del electrón, a la velocidad dada, viene determinada directamente por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - \dfrac{2{,}1^2 \cdot 10^{16}}{9 \cdot 10^{16}}}} =$$

$$= \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{\sqrt{1 - 0{,}49}} = 1{,}27 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$$

b) Energía total:

$$E = m\,c^2 = 1{,}27 \cdot 10^{-30}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 1{,}15 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

c) La energía del electrón en reposo viene dada por:

$E_0 = m_0 c^2 = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$

d) $E - E_0 = 1{,}15 \cdot 10^{-13}\ \text{J} - 8{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{J} = 3{,}3 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$

e) $qV = \dfrac{1}{2} m_0 v^2$,

de donde:

$$V = \frac{m_0 v^2}{2q} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 2{,}1^2 \cdot 10^{16}\ \text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 1{,}25 \cdot 10^5\ \text{V}$$

32. Un electrón tiene una energía en reposo de 0, 51 MeV. Si el electrón se mueve con una velocidad de 0,8c, se pide determinar:

***a)* Su masa natural.**

***b)* Su cantidad de movimiento.**

***c)* Su energía total.**

Datos: carga del electrón $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; velocidad de la luz $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) La masa en reposo la obtenemos a partir de la expresión de la energía en reposo:

$$E_0 = m_o c^2\ ;\ m_o = \frac{E_o}{c^2} = \frac{0{,}511 \cdot 10^6\ eV \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J/eV}{9 \cdot 10^{16}} =$$
$$= 9{,}08 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

Para hallar la masa de la partícula en movimiento aplicamos la transformación relativista:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{(0{,}8c)^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0{,}64}} =$$

$= 1{,}67 \cdot 9{,}08 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = 1{,}51 \cdot 10^{-30}\ \text{kg}$

b) La cantidad de movimiento viene dada por P = m v

$= 1{,}51 \cdot 10^{-30} \cdot 0{,}8 \cdot 3 \cdot 10^8 = 3{,}62 \cdot 10^{-22}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$

c) Energía total $E = m\,c^2 = 1{,}51 \cdot 10^{-30} \cdot 9 \cdot 10^{16} =$
$= 1{,}36 \cdot 10^{-13}\ J = 8{,}3 MeV$