12 ELECTROSTÁTICA

Para consultar los **criterios de evaluación** y los **estándares de aprendizaje evaluables**, véase la Programación.

1 NATURALEZA ELÉCTRICA DE LA MATERIA

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) **CE.7.10.** (EA.7.10.1.)

Página 337

1 Determina cuántos electrones debe perder un cuerpo para quedar cargado con una carga de 1 C.

Cuando un cuerpo pierde un electrón, queda cargado positivamente con una carga igual a *e*. El número de electrones que debe perder para que quede cargado con un culombio es:

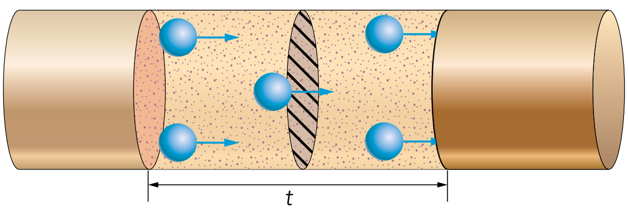
$$n.^\circ\ e^- = \frac{1\ \text{C}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \dfrac{\text{C}}{e^-}} = 6{,}25 \cdot 10^{18} e^- = 6{,}25 \text{ trillones de } e^-$$

2 ¿Cuántos electrones ha ganado un cuerpo que tiene una carga de –2,5 pC?

Cada electrón tiene una carga igual a *e* con signo negativo. El número de electrones que hay que ganar para juntar una carga de –2,5 pC es:

$$n.^\circ\ e^- = \frac{-2{,}5 \cdot 10^{-12}\ \text{C}}{-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \dfrac{\text{C}}{e^-}} \approx 1{,}56 \cdot 10^{7}\ e^- = 15{,}6 \text{ millones de } e^-$$

3 Si por un cable pasa una corriente eléctrica de intensidad un amperio, 1 A, significa que pasa un culombio cada segundo. ¿Cuántos electrones pasarán por una sección del cable en una milésima de segundo si la corriente eléctrica es de 1 mA?



Una corriente eléctrica de intensidad 1 mA significa que pasa 1 mC cada segundo. En una milésima de segundo, pasa 1 µC.

O si se prefiere, utilizamos la ecuación de la intensidad eléctrica:

$$I = \frac{C}{t} \rightarrow C = I \cdot t = 10^{-3}\ \text{A} \cdot 10^{-3}\ \text{s} = 10^{-6}\ \text{C} = 1\ \mu\text{C}$$

Por tanto, la carga que pasa es de 1 µC, esto quiere decir que la cantidad de electrones que han pasado en sentido contrario es:

$$\text{n.}^\circ\ e^- = \frac{10^{-6}\ \text{C}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \dfrac{\text{C}}{e^-}} = 6{,}25 \cdot 10^{12}\ e^- = 6{,}25 \text{ billones de } e^-$$

2 LEY DE COULOMB

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) **CE.7.9.** (EA.7.9.1-7.9.2.) **CE.7.10.** (EA.7.10.1.)

Página 339

4 **Dos cuerpos cargados se atraen cuando están separados una cierta distancia. ¿Con qué fuerza se atraerán si los situamos al doble de distancia?**

Puesto que el módulo de la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, quiere decir que el producto $F \cdot r^2$ se mantiene constante. Por tanto, la nueva fuerza (F') será:

$$F \cdot r^2 = F' \cdot r'^2 \rightarrow F \cdot r^2 = F' \cdot (2 \cdot r)^2 \rightarrow F' = \frac{r^2}{4 \cdot r^2} \cdot F = \frac{1}{4} \cdot F$$

Luego la fuerza se reduce en un cuarto.

5 **Dos cuerpos cargados se encuentran separados una distancia r_0. ¿A qué distancia tendremos que separarlos si queremos que se repelan con un 10 % de la fuerza con la que lo hacen ahora?**

A diferencia del anterior, este ejercicio lo resolveremos utilizando las expresiones matemáticas de la ley de Coulomb.

Si llamamos F_0 a la fuerza ejercida cuando la distancia es r_0, se cumplirá:

$$F_0 = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0^2}$$

Queremos que se cumpla que, a la nueva distancia r, la fuerza sea $0{,}1 \cdot F_0$, es decir:

$$0{,}1 \cdot F_0 = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2}$$

Despejamos r^2:

$$r^2 = K \cdot \frac{q \cdot q'}{0{,}1 \cdot F_0}$$

y sustituimos F_0 por el valor inicial que conocíamos:

$$r^2 = K \cdot \frac{q \cdot q'}{0{,}1} \cdot \frac{1}{F_0} = K \cdot \frac{q \cdot q'}{0{,}1} \cdot \frac{r_0^2}{K \cdot q \cdot q'} = \frac{r_0^2}{0{,}1} \rightarrow r = \frac{r_0}{\sqrt{0{,}1}} \approx 3{,}16 \cdot r_0$$

6 **En un átomo de hidrógeno, la distancia entre el protón y el electrón en su estado fundamental es de $5{,}26 \cdot 10^{-11}$ m. Calcula la fuerza eléctrica con la que se atraen, y compárala con la fuerza gravitatoria que se ejercen.**

Dato: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

La fuerza electrostática es:

$$F_e = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0^2} = K_0 \cdot \frac{e \cdot (-e)}{r_0^2} = K_0 \cdot \frac{-e^2}{r_0^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{(5{,}26 \cdot 10^{-11})^2} \approx -8{,}33 \cdot 10^{-8}\ \text{N}$$

La fuerza gravitatoria es (introducimos un menos para hacer la fuerza gravitatoria atractiva):

$$F_g = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_0^2} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{(5{,}26 \cdot 10^{-11})^2} \approx -3{,}66 \cdot 10^{-47}\ \text{N}$$

Si las comparamos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{-8{,}33 \cdot 10^{-8}}{-3{,}66 \cdot 10^{-47}} \approx 2 \cdot 10^{39}$$

Vemos que la fuerza eléctrica es unas $2 \cdot 10^{39}$ veces mayor que la gravitatoria. Es lógico pensar que la fuerza gravitatoria no influye prácticamente nada en el comportamiento de los átomos.

7 **Un cuerpo colocado en el suelo tiene un carga de 0,2 C. Por encima colocamos una bola de 200 g de masa y con una carga de 2 μC. ¿A qué altura quedará suspendida la bola?**

La fuerza de repulsión electrostática tiene que igualarse con el peso:

$$m \cdot g = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{K \cdot q \cdot q'}{m \cdot g}} = \sqrt{\frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot 0{,}2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0{,}200 \cdot 9{,}8}} \approx 42{,}9 \text{ m}$$

8 **Una carga de 2 μC hace contacto con un cuerpo, inicialmente neutro, y le comunica parte de su carga eléctrica. Cuando ambos se separan 25 cm, se repelen con una fuerza de 0,1 N. ¿Cuál es la carga final de cada uno?**

La suma de la carga de los dos cuerpos tiene que ser de 2 μC, ya que la carga se reparte entre estos dos cuerpos:

$$q_1 + q_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Puesto que conocemos la fuerza con la que se repelen:

$$F_0 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_0^2} \rightarrow q_1 \cdot q_2 = \frac{F_0 \cdot r_0^2}{K_0} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}25^2}{9{,}0 \cdot 10^9} \approx 6{,}94 \cdot 10^{-13} \text{ C}^2$$

Así que, tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left\{\begin{matrix} q_1 + q_2 = 2 \cdot 10^{-6} \\ q_1 \cdot q_2 = 6{,}94 \cdot 10^{-13} \end{matrix}\right\} \rightarrow q_1 + \frac{6{,}94 \cdot 10^{-13}}{q_1} = 2 \cdot 10^{-6} \rightarrow q_1^2 + 6{,}94 \cdot 10^{-13} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot q_1$$

$$q_1^2 - 2 \cdot 10^{-6} \cdot q_1 + 6{,}94 \cdot 10^{-13} = 0$$

$$q_1 = \frac{2 \cdot 10^{-6} \pm \sqrt{\left(2 \cdot 10^{-6}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6{,}94 \cdot 10^{-13}}}{2} \approx 1{,}55 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 1{,}55 \text{ μC}$$

$$q_2 = 2 \cdot 10^{-6} - 1{,}55 \cdot 10^{-6} = 0{,}45 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 0{,}45 \text{ μC}$$

9 **A partir del valor de la constante de Coulomb, *K*, en el agua, deduce el valor de la constante dieléctrica, *ε*, en este medio. Relaciona este resultado con la permitividad en el vacío.**

La constante *K* es:

$$K = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot K} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 1{,}1 \cdot 10^8} \approx 7{,}23 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

La constante dieléctrica relativa del agua es:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{7{,}23 \cdot 10^{-10}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \approx 81{,}7$$

10 **En la tabla de la página anterior, se recogen los valores de las constantes de Coulomb en diferentes medios. ¿En cuál de esos materiales crees que se atraerán con más fuerza eléctrica dos cuerpos cargados? ¿Por qué? Explica tu respuesta haciendo referencia a la permitividad del medio. Busca el valor de esta constante en otros medios y comenta lo encontrado con el resto de la clase.**

Respuesta abierta.

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de información acerca de las características de los distintos tipos de textos, lo que le será de utilidad para elaborar y argumentar su respuesta.

11 **Grupo nominal. ¿Por qué crees que la electricidad se transporta en hilos de cobre, aluminio o acero? Las redes eléctricas causan un gran impacto medioambiental difícil de controlar. Por grupos, realizad una búsqueda de lugares en los que las redes eléctricas hayan supuesto un problema en el entorno y si ha podido subsanarse. ¿Qué soluciones se proponen desde asociaciones o gobiernos? Redactad un informe con lo que hayáis encontrado y con vuestras propias propuestas.**

Respuesta abierta.

En **anayaeducacion.es** explicamos cómo aplicar la técnica de aprendizaje cooperativo «Grupo nominal», propuesta para la resolución de esta actividad en grupo.

12 ODS **A partir de las ideas recogidas en el ejercicio anterior, ¿qué soluciones proponéis para lograr la meta 7.1? Buscad proyectos reales que se estén llevando a cabo como *Smiling Through Light* en Sierra Leona y comentadlos en clase.**

Respuesta abierta.

Para poder responder a la pregunta planteada en esta actividad, su alumnado puede consultar en **anayaeducacion.es** un vídeo con la información relativa a la meta 7.1 de los ODS.

3 CARÁCTER VECTORIAL DE LA LEY DE COULOMB

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.9. (EA.7.9.1.-7.9.2.) CE.7.10. (EA.7.10.1.)

Página 341

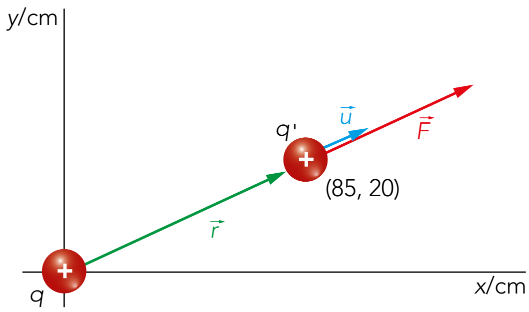
13 **Un cuerpo con una carga de 10 mC está situado en el origen de coordenadas. Calcula la fuerza que se ejercerá sobre otra carga de 4 μC colocada en el punto (85, 20) cm.**

Veamos las coordenadas del vector $\vec{r}$.

$\vec{r} = (85, 20) - (0, 0) = (85, 20)$ cm

El vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$ es:

$$\vec{u} = \frac{(85, 20)}{\sqrt{85^2 + 20^2}} \approx \frac{(85, 20)}{87{,}32}$$



Ahora, calcularemos el valor de la fuerza:

$$F = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-6}}{\left[85^2 + 20^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 472 \text{ N}$$

Y la expresión vectorial es:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} = 472 \cdot \frac{(85, 20)}{87{,}32} \cdot \left(15{,}7; 3{,}7\right) \text{ N}$$

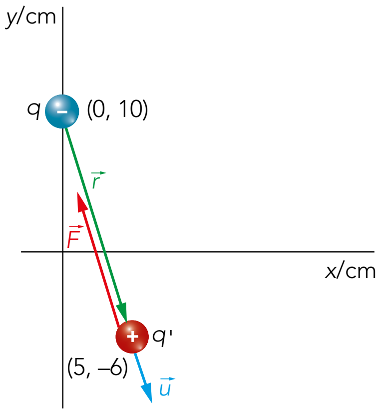
14 **Una carga de –5 mC está colocada en la posición (0, 10) cm. Calcula la fuerza que se ejercerá sobre otra carga de 2 nC colocada en el punto (5, –6) cm.**

Veamos las coordenadas del vector $\vec{r}$.

$\vec{r} = (5, -6) - (0, 10) = (5, -16)$ cm

El vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$ es:

$$\vec{u} = \frac{(5, -16)}{\sqrt{5^2 + (-16)^2}} \approx \frac{(5, -16)}{16{,}76}$$



Ahora calcularemos el valor de la fuerza:

$$F = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{\left[5^2 + (-16)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx -3{,}2 \text{ N}$$

Y la expresión vectorial es:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} = -3{,}2 \cdot \frac{(5, -16)}{16{,}76} \approx (-0{,}95;\ 3{,}05) \text{ N}$$

15 **Calcula la fuerza que se ejerce sobre una carga $q' = 5$ μC en (0, 3) cm debida a las cargas $q_1 = 0{,}1$ mC en (1, 4) cm, $q_2 = -5{,}0$ mC en (–5, 2) cm y $q_3 = -4{,}5$ mC en (6, 5) cm.**

Inicialmente, vamos a calcular los tres vectores $\vec{r}$:

$\vec{r}_1 = (0, 3) - (1, 4) = (-1, -1)$ cm

$\vec{r}_2 = (0, 3) - (-5, 2) = (5, 1)$ cm

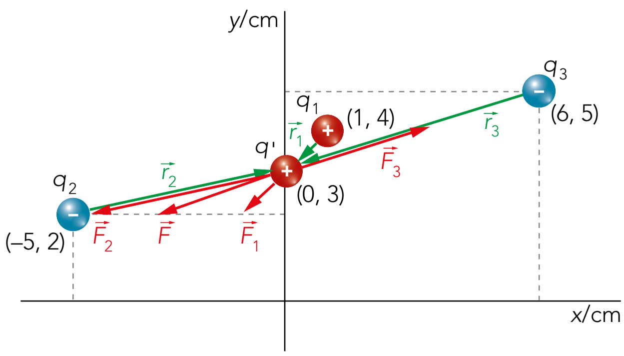
$\vec{r}_3 = (0, 3) - (6, 5) = (-6, -2)$ cm

Ahora los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{(-1, -1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} \approx \frac{(-1, -1)}{1{,}41}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(5, 1)}{\sqrt{5^2 + 1^2}} \approx \frac{(5, 1)}{5{,}10}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{(-6, -2)}{\sqrt{(-6)^2 + (-2)^2}} \approx \frac{(-6, -2)}{6{,}32}$$



Determinamos el valor de cada fuerza:

$$F_1 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{\left[(-1)^2 + (-1)^2\right] \cdot 10^{-4}} = 22\,500 \text{ N}$$

$$F_2 = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{\left[5^2 + 1^2\right] \cdot 10^{-4}} = -86\,538 \text{ N}$$

$$F_3 = K_0 \cdot \frac{q_3 \cdot q'}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{\left[(-6)^2 + (-2)^2\right] \cdot 10^{-4}} = -50\,625 \text{ N}$$

Expresamos vectorialmente las tres fuerzas:

$$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{u}_1 = 22\,500 \cdot \frac{(-1, -1)}{1{,}41} \approx (-15\,957, -15\,957) \text{ N}$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{u}_2 = -86\,538 \cdot \frac{(5, 1)}{5{,}10} \approx (-84\,841, -16\,968) \text{ N}$$

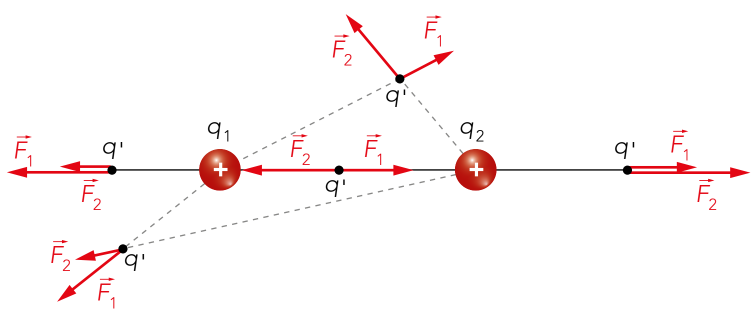
$$\vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_3 = -50\,625 \cdot \frac{(-6, -2)}{6{,}32} \approx (48\,062, 16\,021) \text{ N}$$

La fuerza neta es la suma de estas tres fuerzas:

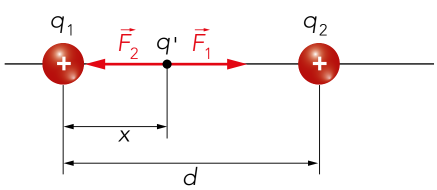
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-15\,957, -15\,957) + (-84\,841, -16\,968) + (48\,062, 16\,021) = (-52\,736, -16\,904) \text{ N}$$

16 Dos cargas, q_1 = 4 mC y q_2 = 8 mC, están separadas un metro. ¿En qué punto podremos colocar una carga q' para que quede en equilibrio?

Si realizamos el dibujo de dos cargas positivas separadas una cierta distancia, podremos ver que, solo en la recta que forman las dos cargas, es posible que exista un punto donde las fuerzas sobre q' se anulen, ya que es el único lugar donde las dos fuerzas tienen la misma dirección. Además, solo en el segmento que queda entre las dos cargas, las dos fuerzas tienen sentido opuesto. Por tanto, de existir un punto donde se anulen las dos fuerzas, tiene que estar en este segmento.



Llamemos x a la distancia desde q_1 hasta el punto buscado, y d, a la distancia entre las dos cargas. Ahora, imponemos la condición de que las dos fuerzas en el punto x se anulan puesto que tienen el mismo módulo:



$$\left|F_1\right| = \left|F_2\right| \rightarrow K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{x^2} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{\left(d - x\right)^2} \rightarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{\left(d - x\right)^2} \rightarrow \left(q_1 - q_2\right) \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot q_1 \cdot x + q_1 \cdot d^2 = 0$$

$$-4 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 - 8 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4 \cdot 10^{-3} = 0 \rightarrow x^2 + 2 \cdot x - 1 = 0 \rightarrow x \approx 0{,}414 \text{ m} = 41{,}4 \text{ cm}$$

Nos hemos quedado con la solución positiva, ya que la negativa no tiene significado en nuestro ejercicio.

En la imagen hemos supuesto que $q' > 0$, pero si fuese $q' < 0$, los cálculos servirían, aunque los vectores habría que dibujarlos con el sentido cambiado.

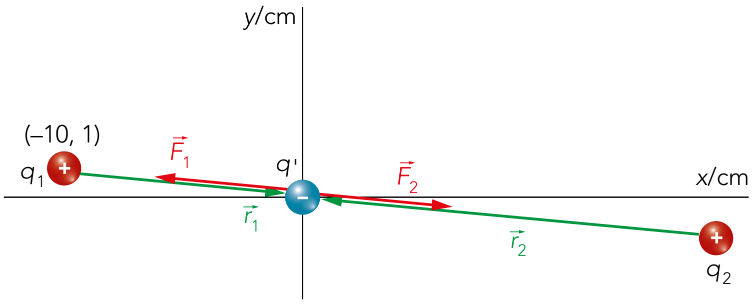
17 **Una carga $q' = -1$ nC colocada en el origen de coordenadas es atraída por otra carga $q_1 = 3$ mC situada en (–10, 1) cm. ¿Dónde colocamos una carga $q_2 = 9$ mC para dejar a q' en equilibrio?**

Si unimos con una recta las dos cargas, q_1 y q', tal y como se ve en la imagen de abajo, deducimos que la carga $q_2 = 9$ mC habrá que colocarla en la parte derecha de dicha recta.

El vector $\vec{r}_1$ es:

$\vec{r}_1 = (0, 0) - (-10, 1) = (10, -1)$ cm

Imponemos que sean los módulos iguales:



$$\left|F_1\right| = \left|F_2\right| \rightarrow K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot \left|q'\right|}{r_1^2} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot \left|q'\right|}{r_2^2} \rightarrow \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2} \rightarrow r_2 = \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \cdot r_1 = \sqrt{\frac{9}{3}} \cdot \sqrt{10^2 + \left(-1\right)^2} \approx 17{,}4 \text{ cm}$$

La ecuación de la recta que pasa por (–10, 1) con la dirección de $\vec{r}_1 = (10, -1)$ es:

$$\frac{x + 10}{10} = \frac{y - 1}{-1} \rightarrow y = -\frac{x}{10}$$

Por tanto, las coordenadas de la carga q_2 tienen que ser del tipo:

$$\vec{r}_2 = \left(x, -\frac{x}{10}\right)$$

con $x > 0$, para que esté en la recta y a la derecha de q'.

Además, tiene que cumplir que su módulo sea:

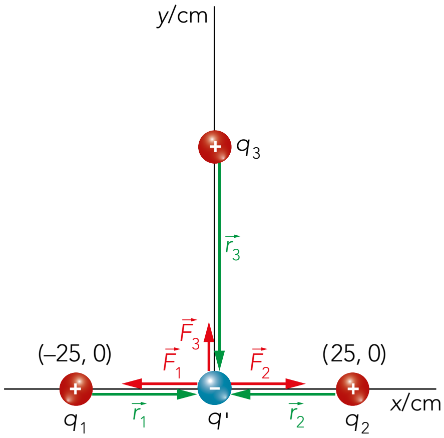
$$r_2 = \sqrt{x^2 + \left(-\frac{x}{10}\right)^2} = 17{,}4 \rightarrow x^2 + \frac{x^2}{100} = 17{,}4^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{17{,}4^2 \cdot 100}{101}} \approx 17{,}3 \text{ cm}$$

Por tanto:

$$\vec{r}_2 = (17{,}3, -1{,}7) \text{ cm}$$

18 **Tres cargas de 2 C están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de medio metro de lado. Determina la fuerza que se ejercerá sobre una carga testigo de –1 pC colocada en la mitad de uno de los lados.**

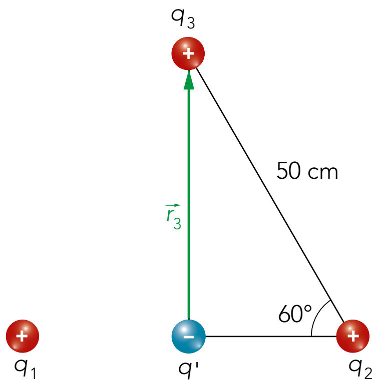
Vamos a utilizar unos ejes y dibujamos el triángulo en la disposición que nos parezca más fácil:



Se observa que, debido a la simetría del ejercicio, las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se anulan entre sí. Por tanto, la fuerza total es la $\vec{F}_3$. Por eso, solamente calcularemos $\vec{F}_3$:

$$F_3 = K_0 \cdot \frac{q_3 \cdot q'}{r_3^2}$$

r_3 es la altura del triángulo:



$$\text{sen } 60° = \frac{r_3}{50} \rightarrow r_3 = 50 \cdot \text{sen } 60° \approx 43{,}3 \text{ cm}$$

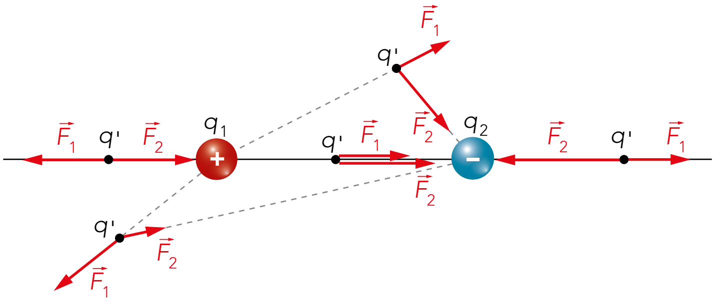
$$F_3 = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot \left(-1 \cdot 10^{-12}\right)}{43{,}3^2 \cdot 10^{-4}} \approx -0{,}096 \text{ N}$$

Ahora, multiplicamos por el vector unitario $\vec{u}_3 = (0, -1)$.

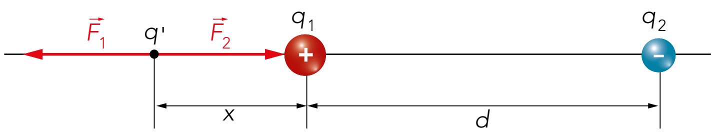
$$\vec{F} = \vec{F}_3 = F_3 \cdot \vec{u}_3 = -0{,}096 \cdot \left(0; -1\right) = \left(0; 0{,}096\right) \text{ N}$$

19 **La carga q_1 = 0,4 mC está separada un metro de la carga q_2 = –1,2 mC. Encuentra el punto en el que podremos colocar una carga testigo y que quede en equilibrio.**

Si realizamos el dibujo de dos cargas separadas una cierta distancia, podremos ver que solo en la recta que forman las dos cargas, es posible que exista un punto donde las fuerzas sobre q' se anulen, ya que es el único lugar donde las dos fuerzas tienen la misma dirección. Pero no puede ser en el segmento que hay entre las dos cargas, ya que las dos fuerzas tienen el mismo sentido. La carga q' deberá estar más lejos de la carga mayor $|q_2|$ que de la menor $|q_1|$; por tanto, según la disposición que hemos considerado, el punto buscado estará sobre la parte izquierda de la recta.



En la imagen de abajo, hemos llamado x a la distancia desde q_1 hasta el punto buscado, y d, a la distancia que separa las dos cargas. Ahora, imponemos la condición de que las dos fuerzas en el punto x se anulan puesto que tienen el mismo módulo:



$$|F_1| = |F_2| \rightarrow K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{x^2} = K_0 \cdot \frac{|q_2| \cdot q'}{(d+x)^2} \rightarrow \frac{q_1}{x^2} = \frac{|q_2|}{(d+x)^2} \rightarrow (q_1 - |q_2|) \cdot x^2 + 2 \cdot d \cdot q_1 \cdot x + q_1 \cdot d^2 = 0$$

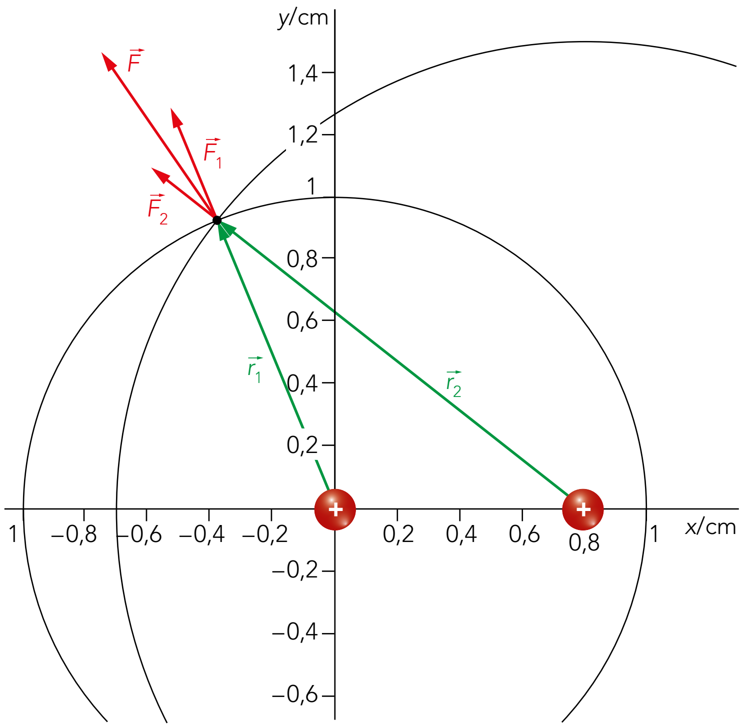
$$-0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 0{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot x + 0{,}4 \cdot 10^{-3} = 0 \rightarrow x^2 - x - 0{,}5 = 0 \rightarrow x \approx 1{,}366 \text{ m}$$

Nos hemos quedado con la solución positiva, que es la que tiene sentido en nuestro ejercicio.

En la imagen hemos supuesto que $q' > 0$, pero que si fuese $q' < 0$ los cálculos servirían, aunque los vectores habría que dibujarlos con el sentido cambiado.

20 Piensa y comparte en pareja. **Dos cargas de 8 mC cada una se encuentran separadas 80 cm. Calcula la fuerza que se ejercerá sobre una tercera carga testigo de 1 μC situada a 1 m de una de las cargas y 1,5 m de la otra.**

Como se muestra en la imagen, existen dos puntos que cumplen esta condición. Si dibujamos las dos cargas fuente sobre el eje x, los dos puntos son simétricos con respecto a este eje. Nos centraremos solamente en uno de ellos. El resultado que obtengamos será simétrico en el otro punto.



Vamos a calcular primero el valor de cada fuerza:

$$F_1 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1^2} = 72 \text{ N}$$

$$F_2 = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{1{,}5^2} = 32 \text{ N}$$

La parte complicada del ejercicio es calcular los vectores unitarios; para ello, es necesario calcular las coordenadas del punto donde está q'. Este punto lo calcularemos estudiando la intersección de las dos circunferencias.

$$\begin{Bmatrix} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - 0{,}8)^2 + y^2 = 1{,}5^2 \end{Bmatrix} \rightarrow \ x \approx -0{,}38 \text{ cm};\ y \approx 0{,}92 \text{ cm}$$

Ya podemos escribir los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (-0{,}38;\ 0{,}92) - (0;\ 0) = (-0{,}38;\ 0{,}92) \text{ m}$$

$$\vec{r}_2 = (-0{,}38;\ 0{,}92) - (0{,}8;\ 0) = (-1{,}18;\ 0{,}92) \text{ m}$$

Los vectores unitarios son:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(-0{,}38;\ 0{,}92)}{\sqrt{(-0{,}38)^2 + 0{,}92^2}} \approx (-0{,}382;\ 0{,}924)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-1{,}18;\ 0{,}92)}{\sqrt{(-1{,}18)^2 + 0{,}92^2}} \approx (-0{,}789;\ 0{,}615)$$

Por tanto:

$\vec{F}_1 = F_1 \cdot \vec{u}_1 = 72 \cdot (-0{,}382;\ 0{,}924) \approx (-27{,}50;\ 66{,}53)$ N

$\vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{u}_2 = 32 \cdot (-0{,}789;\ 0{,}615) \approx (-25{,}25;\ 19{,}68)$ N

La fuerza total es:

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (-27{,}50;\ 66{,}53) + (-25{,}25;\ 19{,}68) = (-52{,}75;\ 86{,}21)$ N

En el punto inferior, la fuerza es:

$\vec{F}' \approx (-52{,}8;\ 86{,}2)$ N

En **anayaeducacion.es** su alumnado dispone de un documento que explica cómo aplicar la estrategia de desarrollo del pensamiento «Piensa y comparte en pareja».

21 **Además de las fuerzas gravitatoria y eléctrica, también existe otra fuerza importante que se puede apreciar a simple vista llamada fuerza magnética, que, en combinación con la eléctrica, se denomina electromagnética. Uno de los ejemplos naturales de esta fuerza son las auroras polares, fenómenos que se producen en los polos terrestres en determinadas épocas del año en los que el cielo nocturno toma colores muy llamativos. Busca la explicación científica a este hecho e ilústralo con imágenes.**

Respuesta abierta.

Conviene que el alumnado recuerde y tenga presentes las normas básicas de ciudadanía digital, que puede consultar en los recursos relacionados con la clave TIC en **anayaeducacion.es**.

22 **La distancia que hay entre los protones en un núcleo es del orden de 10^{-15} m. Compara la fuerza de repulsión eléctrica con la de atracción gravitatoria.**

Datos: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

La fuerza electrostática es:

$$F_e = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0^2} = K_0 \cdot \frac{e \cdot e}{r_0^2} = K_0 \cdot \frac{e^2}{r_0^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-15})^2} \approx 230{,}4 \text{ N}$$

La fuerza gravitatoria es (introducimos un menos para hacer la fuerza gravitatoria atractiva):

$$F_g = G \cdot \frac{m_p \cdot m_p}{r_0^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{(1{,}67 \cdot 10^{-27})^2}{(10^{-15})^2} \approx 1{,}86 \cdot 10^{-34} \text{ N}$$

Si las comparamos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{230,4}{1,86 \cdot 10^{-34}} \approx 1,24 \cdot 10^{36}$$

Vemos que la fuerza eléctrica es unas 10^{36} veces mayor que la gravitatoria. Es lógico pensar que la fuerza gravitatoria no influye prácticamente nada en el comportamiento de los átomos.

4 CAMPO ELECTROSTÁTICO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.7.9. (EA.7.9.2.) CE.7.10. (EA.7.10.1.)

Página 343

23 El campo eléctrico en el punto *P* es (1, 2) · 10^5 N/C. ¿Qué fuerza se ejercerá sobre una carga de –3 mC colocada en dicho punto?

Simplemente tenemos en cuenta que el campo eléctrico es una fuerza por unidad de carga:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = -3 \cdot 10^{-3} \cdot (1, 2) \cdot 10^5 = (-300, -600) \text{ N}$$

24 Sobre una carga de –6 μC se ejerce una fuerza electrostática de (–0,060; 0,012) N. ¿Qué valor tiene el campo electrostático en ese punto?

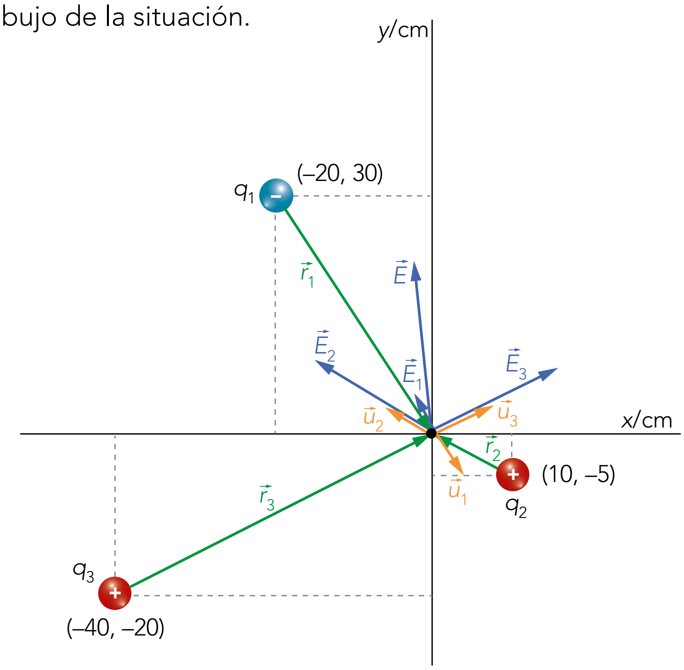
Teniendo en cuenta la relación entre el campo eléctrico y la fuerza que experimenta una carga:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{(-0,060;\ 0,012)}{-6 \cdot 10^{-6}} = (10\,000;\ -2\,000) \text{ N/C}$$

25 Disponemos de tres cargas: q_1 = –5 nC en (–20, 30), q_2 = –1 nC en (10, –5) y q_3 = 15 nC en (–40, –20). Determina el campo eléctrico creado en el punto *P* = (0, 0). ¿Qué fuerza se ejercerá sobre una carga de –5 mC colocada en el punto *P*?

Nota: todas las coordenadas se expresan en cm.

Realicemos un dibujo de la situación.



Calculemos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (0, 0) - (-20, 30) = (20, -30) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (0, 0) - (10, -5) = (-10, 5) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_3 = (0, 0) - (-40, -20) = (40, 20) \text{ cm}$$

Ahora, los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(20, -30)}{\sqrt{20^2 + (-30)^2}} \approx \frac{(20, -30)}{36{,}056}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-10{,}5)}{\sqrt{(-10)^2 + 5^2}} \approx \frac{(-10{,}5)}{11{,}180}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3} = \frac{(40, 20)}{\sqrt{40^2 + 20^2}} \approx \frac{(40, 20)}{44{,}721}$$

Veamos los valores de los campos:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-9}}{\left(20^2 + (-30)^2\right) \cdot 10^{-4}} \approx -346 \text{ N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9}}{\left((-10)^2 + 5^2\right) \cdot 10^{-4}} \approx 720 \text{ N/C}$$

$$E_3 = K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{15 \cdot 10^{-9}}{\left(40^2 + 20^2\right) \cdot 10^{-4}} \approx 675 \text{ N/C}$$

Ya podemos escribir cada campo vectorialmente:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = -346 \cdot \frac{(20, -30)}{36{,}056} \approx (-192, 288) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = 720 \cdot \frac{(-10{,}5)}{11{,}180} \approx (-644, 322) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_3 = E_3 \cdot \vec{u}_3 = 675 \cdot \frac{(40, 20)}{44{,}721} \approx (604, 302) \text{ N/C}$$

El campo total o neto es la suma de todos:

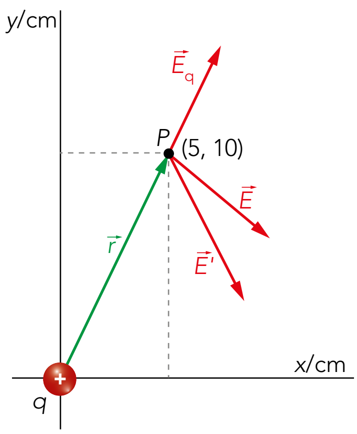
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = (-192, 288) + (-644, 322) + (604, 302) = (-232, 912) \text{ N/C}$$

Aplicamos la expresión que relaciona el campo con la fuerza:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = -5 \cdot 10^{-3} \cdot (-232; 912) \approx (1{,}2; -4{,}6) \text{ N}$$

26 El campo eléctrico en el punto *P* = (5, 10) cm es (250, –451) N/C. Si colocamos una carga de 0,2 nC en el punto (0, 0), ¿qué valor tendrá ahora el campo en el punto *P*?

Aplicamos el principio de superposición. Al campo existente en el punto *P*, le sumamos (vectorialmente) el producido por la carga de 0,2 nC. Así que, calculemos el campo eléctrico que crea la carga en el punto *P*.



El vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (5, 10) - (0, 0) = (5, 10) \text{ cm}$$

El vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(5, 10)}{5^2 + 10^2} \approx (0{,}447,\ 0{,}894)$$

El valor del campo:

$$E_q = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}2 \cdot 10^{-9}}{\left[5^2 + 10^2\right] \cdot 10^{-4}} = 144 \text{ N/C}$$

Y por último, la expresión vectorial del campo:

$$\vec{E}_q = E_q \cdot \vec{u} = 144 \cdot (0{,}447,\ 0{,}894) \approx (64,\ 129) \text{ N/C}$$

El campo total en el punto P es:

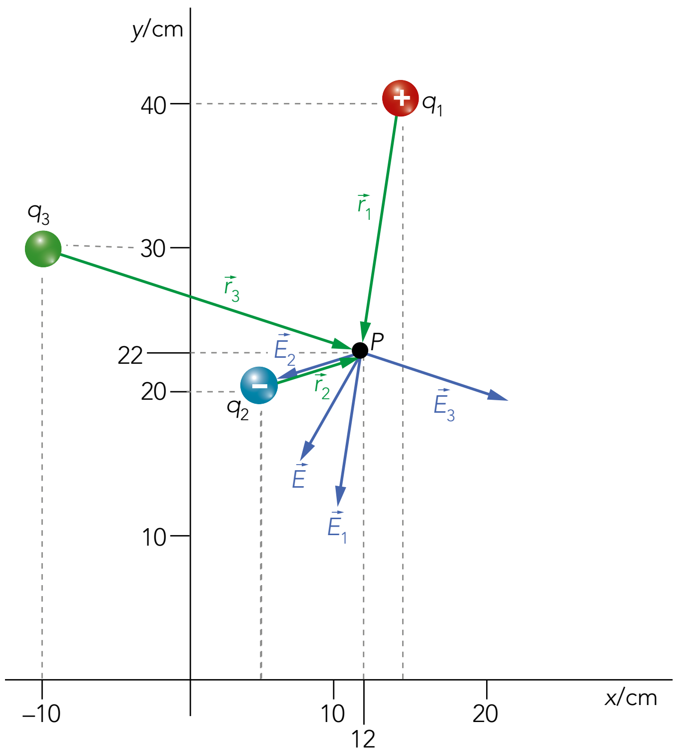
$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_q = (250, -451) + (64,\ 128) = (314,\ -323) \text{ N/C}$$

27 Disponemos de tres cargas: q_1 = 6 μC en (15, 40), q_2 = −2 μC en (5, −20) y q_3 en (−10, 30). Si el campo creado por estas tres cargas en P = (12, 22), es (−1,992, −3,093) · 10^6 N/C, ¿qué valor tendrá la carga q_3?

Nota: todas las coordenadas se expresan en cm.

Fe de erratas de la primera edición del libro del alumnado: Las coordenadas de la carga q_2 que aparecen en el enunciado hacen el problema irresoluble. Para que se pueda resolver, las coordenadas de la carga q_2 deben ser (5, 20). Con esta modificiación, se resuelve a continuación.

Haciendo un dibujo de la situación, se deduce que la carga q_3 tiene que ser positiva, ya que si fuese negativa, los tres vectores del campo nunca podrían sumar un vector con coordenada x positiva.



Tendremos que proceder de manera análoga a si conociéramos todas las cargas. Cuando impongamos el principio de superposición al campo eléctrico, obtendremos una ecuación con nuestra incógnita E_3 lista para despejar.

Calculemos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (12,\ 22) - (15,\ 40) = (-3,\ -18)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_2 = (12,\ 22) - (5,\ 20) = (7,\ 2)\ \text{cm}$$

$$\vec{r}_3 = (12,\ 22) - (-10,\ 30) = (22,\ -8)\ \text{cm}$$

Ahora los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(-3,\ -18)}{\sqrt{(-3)^2 + (-18)^2}} \approx \frac{(-3, -18)}{18{,}248}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(7,\ 2)}{\sqrt{7^2 + 2^2}} \approx \frac{(7,\ 2)}{7{,}280}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3} = \frac{(22,\ -8)}{\sqrt{22^2 + (-8)^2}} \approx \frac{(22,\ -8)}{23{,}409}$$

Veamos los valores de los campos:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}}{\left[(-3)^2 + (-18)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 1{,}62 \cdot 10^6\ \text{N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{\left[7^2 + 2^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx -3{,}40 \cdot 10^6\ \text{N/C}$$

$$E_3 = K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_3}{\left[22^2 + (-8)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 1{,}642 \cdot 10^{11} \cdot q_3\ \text{N/C}$$

Ya podemos escribir cada campo vectorialmente:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = 1{,}62 \cdot 10^6 \cdot \frac{(-3,\ -18)}{18{,}248} \approx (-0{,}266;\ -1{,}598) \cdot 10^6\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = -3{,}40 \cdot 10^6 \cdot \frac{(7,\ 2)}{7{,}280} \approx (-3{,}269;\ -0{,}934) \cdot 10^6\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_3 = E_3 \cdot \vec{u}_3 = 1{,}642 \cdot 10^{11} \cdot q_3 \cdot \frac{(22,\ -8)}{23{,}409} \approx (154\,316{,}716;\ -56\,115{,}169) \cdot 10^6 \cdot q_3\ \text{N/C}$$

El campo total o neto es la suma de todos:

$$\vec{E} = (-0{,}266;\ -1{,}598) \cdot 10^6 + (-3{,}269;\ -0{,}934) \cdot 10^6 + (154\,316{,}716;\ -56\,115{,}169) \cdot 10^6 \cdot q_3$$

$$\vec{E} = (-1{,}992;\ -3{,}093) \cdot 10^6\ \text{N/C}$$

Despejando en cualquiera de las coordenadas, obtenemos q_3. Debe comprobarse que se obtiene el mismo resultado independientemente de la coordenada que utilicemos para calcular el valor de la carga.

$$q_3 \approx 10\ \mu\text{C}$$

28 **El campo eléctrico en un punto *P*, creado por una carga en el punto *A*, es (–860, 1320) N/C. ¿Qué valor tendrá el campo si nos alejamos una distancia tres veces mayor a *AP* y en la misma dirección?**

El módulo del campo eléctrico es:

$$E = \sqrt{(-860)^2 + 1\,320^2} \approx 1\,575 \text{ N/C}$$

Tenemos que calcular el valor actual de r.

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} \rightarrow r = \frac{K_0 \cdot q}{E}$$

Si la nueva distancia es $r' = 3 \cdot r$, su campo E' será:

$$E' = K_0 \cdot \frac{q}{r'^2} = K_0 \cdot \frac{q}{(3 \cdot r)^2} = \frac{1}{9} \cdot K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{E}{9} = \frac{1\,575}{9} = 175 \text{ N/C}$$

Puesto que este vector tiene la misma dirección y sentido que el anterior, cumple que sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{E}{E_x} = \frac{E'}{E'_x} \rightarrow E'_x = \frac{E'}{E} \cdot E_x = \frac{175}{1\,575} \cdot (-860) \approx -96 \text{ N/C}$$

$$\frac{E}{E_y} = \frac{E'}{E'_y} \rightarrow E'_y = \frac{E'}{E} \cdot E_y = \frac{175}{1\,575} \cdot 1\,320 \approx 147 \text{ N/C}$$

Por tanto:

$$\vec{E}' = (-96,\ 147) \text{ N/C}$$

29 **La idea de campo eléctrico es muy complicada de entender, ya que requiere de una abstracción muy grande respecto a todo lo que conocemos. ¿Alguna vez has visto las líneas de campo? Para entender su importancia, busca ejemplos de la vida cotidiana en donde el campo eléctrico sea clave en su funcionamiento. Explica con un póster lo que has encontrado y compara tus hallazgos con los del resto de compañeros y compañeras.**

Respuesta abierta.

Recuerde a su alumnado que en el apartado Plan Lingüístico de **anayaeducacion.es** dispone de información sobre los distintos tipos de textos.

30 **Nuestro cuerpo es una fuente de energía eléctrica. Piensa en los calambres que sufres al tocar a otras personas u objetos, o en cómo se transporta la información entre las neuronas. Busca más ejemplos y relaciónalos con lo que has aprendido hasta ahora. A continuación, puedes ir a la sección TIC del final de esta unidad y ejecutar una aplicación que reproduce y explica alguno de estos fenómenos.**

Respuesta abierta.

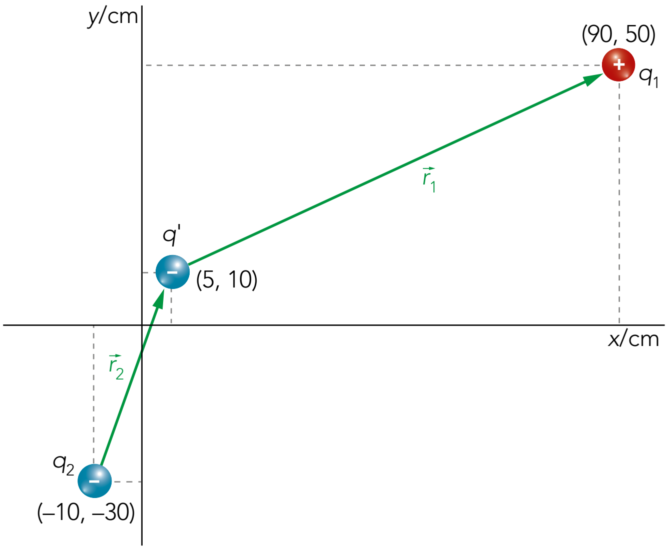
5 ENERGÍA POTENCIAL

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.8.4. (EA.8.4.1.)

Página 347

31 **Calcula la energía potencial que tiene la carga q' = –5 μC en (5, 10) cm debido a las cargas: q_1 = 2 mC en (90, 50) cm y q_2 = –5 mC en (–10, –30) cm.**

Tenemos que aplicar el principio de superposición.



Calculemos las $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (5, 10) - (90, 50) = (-85, -40) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (5, 10) - (-10, -30) = (15, 40) \text{ cm}$$

Cada energía potencial individual es:

$$E_{p_1} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-5 \cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{\left(-85\right)^2 + \left(-40\right)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -95{,}80 \text{ J}$$

$$E_{p_2} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-5 \cdot 10^{-6}\right)}{\sqrt{15^2 + 40^2} \cdot 10^{-2}} \approx 526{,}69 \text{ J}$$

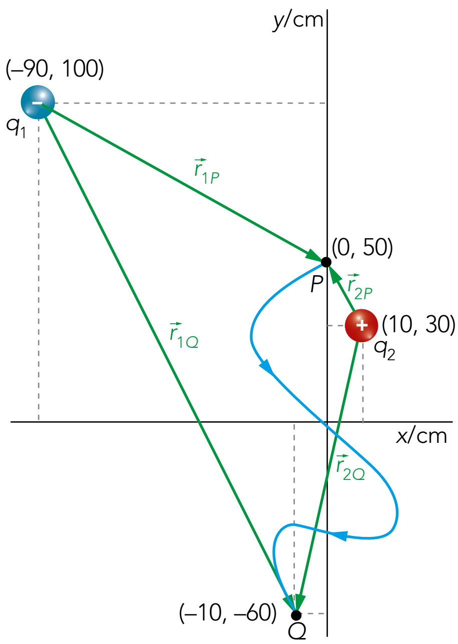
Por tanto:

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = -95{,}80 + 526{,}69 = 430{,}89 \text{ J}$$

32 Disponemos de dos cargas, q_1 = –5 μC en (–90, 100) y q_2 = 6 μC en (10, 30). Calcula el trabajo que habrá que realizar para desplazar una carga q' = 2 mC que inicialmente está en reposo en (0, 50) hasta dejarla en reposo en (–10, –60). ¿Qué trabajo realiza la fuerza eléctrica del campo creado por las cargas fuente, q_1 y q_2?

Nota: todas las coordenadas se expresan en cm.

La situación es la siguiente:



Mediante la aplicación de una fuerza externa, se va a llevar la carga q' en reposo en $P = (0, 50)$ cm, hasta el punto $Q = (-10, -60)$ cm, dejándola nuevamente en reposo.

Veamos la energía potencial que tiene la carga q' en cada punto; para ello, primero calculemos las $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{1P} = (0, 50) - (-90, 100) = (90, -50) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{1Q} = (-10, -60) - (-90, 100) = (80, -160) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{2P} = (0, 50) - (10, 30) = (-10, 20) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{2Q} = (-10, -60) - (10, 30) = (-20, -90) \text{ cm}$$

Cada energía potencial individual es:

$$E_{p_{1P}} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_{1P}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{90^2 + (-50)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -87{,}42 \text{ J}$$

$$E_{p_{1Q}} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_{1Q}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{80^2 + (-160)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -50{,}31 \text{ J}$$

$$E_{p_{2P}} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_{2P}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-10)^2 + 20^2} \cdot 10^{-2}} \approx 482{,}99 \text{ J}$$

$$E_{p_{2Q}} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_{2Q}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-20)^2 + (-90)^2} \cdot 10^{-2}} \approx 117{,}14 \text{ J}$$

Por tanto:

$$E_{p_P} = E_{p_{1P}} + E_{p_{2P}} = -87{,}42 + 482{,}99 = 395{,}57 \text{ J}$$

$$E_{p_Q} = E_{p_{1Q}} + E_{p_{2Q}} = -50{,}31 + 117{,}14 = 66{,}83 \text{ J}$$

El trabajo total que se realiza es el de la fuerza eléctrica más el de la fuerza externa y, en virtud del teorema de las fuerzas vivas, es cero, ya que no hay incremento de energía cinética:

$$W_T = W_C + W_{ext} = \Delta E = 0$$

Por tanto:

$$W_{ext} = -W_C = -(-\Delta E_p) = \Delta E_p = E_{p_Q} - E_{p_P} = 66{,}83 - 395{,}57 = -328{,}74 \text{ J}$$

Es un trabajo negativo, porque la fuerza externa tiene que frenar la carga al ir de P a Q, ya que el campo tiende a desplazar la carga de manera «natural» desde P hasta Q.

Ya sabemos que:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_Q} = 395{,}57 - 66{,}83 = 328{,}74 \text{ J}$$

El trabajo del campo es positivo, porque favorece el desplazamiento de la carga.

33 Tres cargas de 1 nC están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero de 30 cm de lado. Calcula la energía necesaria para colocar una carga de 10 mC en el centro del triángulo.

La carga no experimenta ningún incremento de energía cinética, puesto que suponemos que la carga estaba inicialmente en reposo y se deja en reposo al final. Por tanto, en virtud del teorema de las fuerzas vivas, el trabajo total es cero (como vimos en el ejercicio anterior) y el trabajo externo es precisamente el trabajo realizado por la fuerza eléctrica pero cambiado de signo. Por tanto:

$$W_{ext} = -W_C = -(-\Delta E_p) = \Delta E_p = E_p(r) - E_p(\infty) = E_p(r) - 0 = E_p(r)$$

Tenemos que (como se ha visto en la unidad), la energía potencial es, precisamente, el trabajo que hay que realizar para llevar la carga desde una distancia «infinita» hasta el punto en cuestión.

Así que, lo que tenemos que calcular es la energía potencial de la carga de 10 mC que llamaremos q' en el punto final.

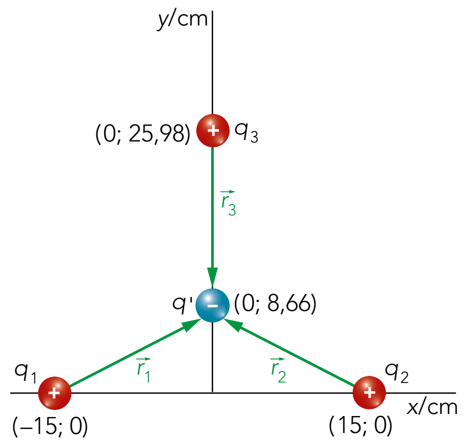
Debemos recordar o demostrar que el centro de un triángulo equilátero está a un tercio de la altura. La altura es:

$$h = l \cdot \text{sen } 60° = 30 \cdot \text{sen } 60° \approx 25{,}98 \text{ cm}$$

Así, un tercio de esta altura es:

$$\frac{1}{3}\,25{,}98 = 8{,}66 \text{ cm}$$

Colocamos las cargas que forman el triángulo como mejor nos parezca en un sistema de ejes y utilizamos los datos obtenidos.



Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (0;\, 8{,}66) - (-15,\, 0) = (15;\, 8{,}66) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (0;\, 8{,}66) - (15,\, 0) = (-15;\, 8{,}66) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_3 = (0;\, 8{,}66) - (0;\, 25{,}98) = (0;\, -17{,}32) \text{ cm}$$

Las energías potenciales de q' debidas a cada carga fuente son:

$$E_{p_1} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{15^2 + 8{,}66^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}52 \text{ J}$$

$$E_{p_2} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-15)^2 + 8{,}66^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}52 \text{ J}$$

$$E_{p_3} = K_0 \cdot \frac{q_3 \cdot q'}{r_3} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-9} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{17{,}32 \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}52 \text{ J}$$

Lógicamente, las tres energías potenciales son iguales puesto que las cargas fuente son del mismo valor (1 nC) y q' está a la misma distancia de cada una de ellas (17,32 cm).

La energía potencial es:

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} + E_{p_3} = 3 \cdot 5{,}2 \cdot 10^{-1} = 1{,}56 \text{ J}$$

Luego esta es la energía que cuesta llevar la carga q' desde una distancia «infinita» hasta el centro del triángulo.

34 **Calcula la energía necesaria para colocar dos cargas de −1 mC a una distancia de un metro.**

Puesto que el trabajo de las fuerzas eléctricas no dependen del camino, ya que son fuerzas conservativas, da igual mediante qué caminos coloquemos las dos cargas a un metro de separación. Podemos suponer que vamos donde esté una de ellas, y que la otra la cogemos «del infinito» y la llevamos a un metro de la primera. Por tanto, lo que tenemos que calcular es el trabajo de llevar una carga que estaba en «el infinito» en reposo, hasta llegar a un metro de la otra (en reposo). Y, como ya hemos visto en los ejercicios anteriores y en la unidad, esto es igual a la energía potencial que tiene la carga testigo debido a la carga fuente.

Por tanto:

$$E_p = K_0 \cdot \frac{q \cdot q}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-10^{-3} \cdot \left(-10^{-3}\right)}{1} = 9\,000 \text{ J}$$

35 **Una carga q' de 20 g, inicialmente en reposo, tiene una energía potencial de 3 J en un punto *P*, y de 8 J en otro punto, *A*.**

a) ¿Cuál es la energía mínima necesaria para llevarla desde *P* hasta *A*?

b) ¿Cuál sería la velocidad de la partícula en *A* si utilizáramos 10 J para desplazarla de *P* a *A*?

a) Puesto que nos piden el trabajo mínimo, quiere decir que la carga la colocaremos en reposo en el punto *A*. Si hiciéramos un trabajo mayor a este valor mínimo, conseguiríamos mover la carga q' de *P* a *A* y, además, dejarla con una cierta energía cinética.

Entonces, si dejamos la carga en reposo, no hay incremento de energía cinética, y en virtud del teorema de las fuerzas vivas el trabajo total es cero. Por tanto, el trabajo externo el trabajo que realiza las fuerzas eléctricas con el signo contrario:

$$W_T = W_C + W_{ext} = \Delta E_c = 0 \rightarrow W_{ext} = -W_C = -\left(-\Delta E_p\right) = \Delta E_p = E_{p_A} - E_{p_P}$$

Por tanto:

$$W_{ext} = 8 - 3 = 5 \text{ J}$$

b) Si se utilizan 10 J en para mover la carga, se invertirán 8 J en el cambio de posición, y sobrarán 2 J que quedarán en forma de energía cinética.

Esto lo podemos demostrar; hemos representado el trabajo mínimo por W_{ext}, y vamos a representar el trabajo que ahora nos piden (que no es mínimo) por W_{EXT}. Este trabajo es el de las fuerzas no conservativas y, como sabemos, es igual al incremento de energía mecánica:

$$W_{EXT} = \Delta E_m = E_{m_A} - E_{m_P} = E_{c_A} + E_{p_A} - E_{c_P} - E_{p_P} = E_{c_A} + E_{p_A} - 0 - E_{p_P} = E_{c_A} + \Delta E_p = E_{c_A} + W_{ext}$$

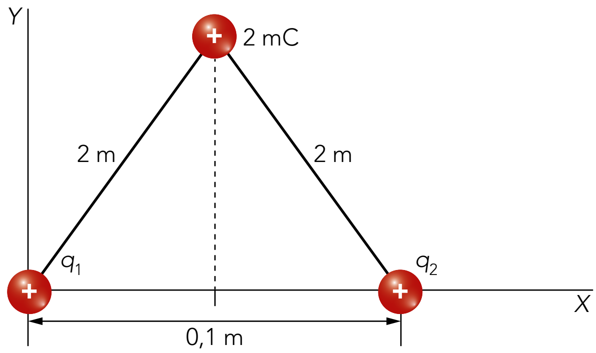
Es decir:

$$10 \text{ J} = E_{c_A} + 8 \text{ J} \rightarrow E_{c_A} = 2 \text{ J}$$

Simplemente tenemos que despejar la velocidad de la partícula de la expresión de la energía cinética:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{m}} = \sqrt{\frac{4}{20 \cdot 10^{-3}}} \approx 14{,}1 \text{ m/s}$$

36 **Dos cargas, q_1 = 60 nC y q_2 = 25 nC, están separadas 10 cm. Calcula el trabajo que realiza la fuerza eléctrica cuando lleva una carga de 2 mC desde el punto medio de las dos cargas hasta situarla a 2 m de cada una de las cargas fuente. ¿Con qué energía cinética llega la carga a ese punto?**



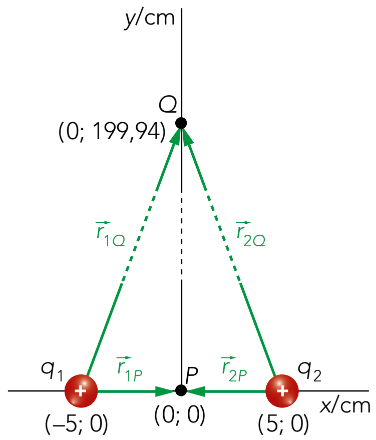
El trabajo que realiza la fuerza eléctrica lo calculamos mediante el teorema de la energía potencial:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_Q}$$

Vamos a realizar un dibujo de la situación. Para ello, colocamos un sistema de referencia como nos parezca mejor, y calculamos las coordenadas de cada punto de interés:

La coordenada Y del punto Q es:

$$200^2 = y_Q^2 + 5^2 \quad \rightarrow \quad y_Q = \sqrt{200^2 - 5^2} \approx 199{,}94 \text{ cm}$$



Por tanto, tenemos que calcular estas energías potenciales; para ello, empezamos con los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{1P} = (0, 0) - (-5, 0) = (5, 0) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{2P} = (0, 0) - (5, 0) = (-5, 0) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{1Q} = (0;\ 199{,}94) - (-5, 0) = (5;\ 199{,}94) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{2Q} = (0;\ 199{,}94) - (5, 0) = (-5;\ 199{,}94) \text{ cm}$$

Ahora las energías potenciales debidas a cada carga fuente:

$$E_{p_{1P}} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_{1P}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{60 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} = 21{,}60 \text{ J}$$

$$E_{p_{2P}} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_{2P}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{25 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} = 9{,}00 \text{ J}$$

$$E_{p_{1Q}} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_{1Q}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{60 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{5^2 + 199{,}94^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}54 \text{ J}$$

$$E_{p_{2Q}} = K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_{2Q}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{25 \cdot 10^{-9} \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-5)^2 + 199{,}94^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}22 \text{ J}$$

La energía potencial total de cada punto es:

$$E_{p_P} = 21{,}60 + 9{,}00 = 30{,}60 \text{ J}$$

$$E_{p_Q} = 0{,}54 + 0{,}22 = 0{,}76 \text{ J}$$

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica es:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_Q} = 30{,}60 - 0{,}76 = 29{,}84 \text{ J}$$

Es un trabajo positivo, luego el movimiento de la carga q' se produce a favor del campo.

La única fuerza que actúa sobre la carga es la eléctrica, que es conservativa. Por tanto, la energía mecánica se conserva:

$$E_{m_P} = E_{m_Q} \rightarrow E_{p_P} + E_{c_P} = E_{p_Q} + E_{c_Q} \rightarrow E_{p_P} + 0 = E_{p_Q} + E_{c_Q} \rightarrow E_{c_Q} = E_{p_P} - E_{p_Q} = 30{,}6 - 0{,}76 = 29{,}84 \text{ J}$$

Como vemos, el campo eléctrico realiza un trabajo utilizando la energía potencial de la carga q', así, lo que ocurre es que se transforma energía potencial en cinética.

37 Una carga en reposo de 2 g de masa tiene una energía potencial en el punto *P* de 0,5 J, y en el punto *B*, de –2,8 J. Si mediante una fuerza externa se realiza un trabajo de 5 J para llevar la carga desde *P* hasta *B*. ¿Qué velocidad tendrá la carga?

Existen dos fuerzas sobre la carga testigo (q'), la fuerza eléctrica, que es conservativa, y la externa, que no lo es. Según el teorema de las fuerzas vivas:

$$W_T = \Delta E_c = E_{c_Q} - E_{c_P} = E_{c_Q}$$

Además:

$$W_T = W_C + W_{EXT} = -\Delta E_p + W_{EXT} = E_{c_Q}$$

donde hemos utilizado el teorema de la energía potencial.

Ya podemos calcular la energía cinética en el punto final:

$$E_{c_Q} = -\Delta E_p + W_{EXT} = E_{p_P} - E_{p_Q} + W_{EXT} = 0{,}5 - \left(-2{,}8\right) + 5 = 8{,}3 \text{ J}$$

La velocidad es:

$$E_{c_Q} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_Q^2 \rightarrow v_Q = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{c_Q}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}3}{2 \cdot 10^{-3}}} \approx 91{,}1 \text{ m/s}$$

6 POTENCIAL ELÉCTRICO

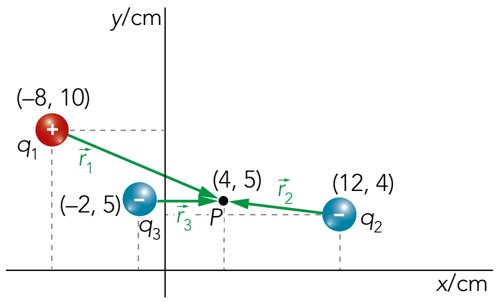
CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.8.4. (EA.8.4.1.)

Página 349

38 Disponemos de tres cargas: q_1 = 3,5 pC, en (–8, 10), q_2 = –5,1 pC en (12, 4) y q_3 = –14,4 pC en (–2, 5). Determina el potencial en el punto *P* = (4, 5) y la energía potencial de una carga de –2 C colocada en ese punto.

Nota: todas las coordenadas se expresan en cm.

Aplicamos el principio de superposición.



Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (4,\ 5) - (-8,\ 10) = (12,\ -5)\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_2 = (4,\ 5) - (12,\ 4) = (-8,\ 1)\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_3 = (4,\ 5) - (-2,\ 5) = (6,\ 0)\ \text{cm}$$

Ahora, los potenciales:

$$V_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}5 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{12^2 + (-5)^2} \cdot 10^{-2}} \approx 0{,}242\ \text{V}$$

$$V_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5{,}1 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{(-8)^2 + 1^2} \cdot 10^{-2}} \approx -0{,}569\ \text{V}$$

$$V_3 = K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-14{,}4 \cdot 10^{-12}}{6 \cdot 10^{-2}} = -2{,}160\ \text{V}$$

Sumamos los potenciales:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 0{,}242 - 0{,}569 - 2{,}160 = -2{,}487\ \text{V}$$

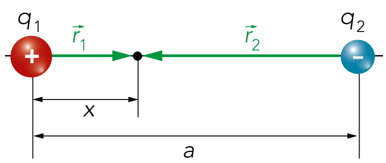
La energía potencial de una carga de –2 C colocada en este potencial es:

$$E_p = q' \cdot V = -2 \cdot (-2{,}487) \approx 4{,}97\ \text{J}$$

Una energía potencial positiva significa que la carga se escaparía «al infinito» si se le liberara. Si la energía potencial fuese negativa, significaría que la carga, de «manera natural» (debido al campo) se mueve desde «el infinito» hasta este punto.

39 Dos cargas q_1 = 4 nC y q_2 = –12 nC están separadas 60 cm. Encuentra un punto en el segmento que las une donde el potencial sea cero. ¿Hay más puntos donde se anule el potencial?

Aplicamos el principio de superposición, imponiendo que el potencial en el punto buscado es cero:



$$V = V_1 + V_2 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2} = K_0 \cdot \frac{q_1}{x} + K_0 \cdot \frac{q_2}{a - x} = 0 \ \rightarrow\ \frac{q_1}{x} = -\frac{q_2}{a - x} \ \rightarrow\ q_1 \cdot (a - x) = -q_2 \cdot x$$

$$q_1 \cdot a - q_1 \cdot x + q_2 \cdot x = 0 \ \rightarrow\ x = -\frac{q_1 \cdot a}{q_2 - q_1} = -\frac{4 \cdot 10^{-9} \cdot 60 \cdot 10^{-2}}{-12 \cdot 10^{-9} - 4 \cdot 10^{-9}} = 0{,}15\ \text{m} = 15\ \text{cm}$$

A diferencia de cuando calculábamos puntos donde el campo (o la fuerza) es cero, con el potencial (o la energía potencial) hay infinitos puntos que lo cumplen; son todos aquellos que pertenecen a la superficie equipotencial de valor cero voltios. En este ejercicio, solo hay que calcular el punto, en el segmento que une las cargas, donde el potencial es cero. Se trata del punto donde interseca la superficie equipotencial de valor cero, con el segmento que une las dos cargas.

Si quisiéramos calcular la posición de todos estos puntos, habría que desarrollar:

$$K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2} = 0 \ \rightarrow\ \frac{q_1}{r_1} = -\frac{q_2}{r_2} \ \rightarrow\ \frac{q_1}{r_1} = \frac{|q_2|}{r_2} \ \rightarrow\ \frac{r_2}{r_1} = \frac{|q_2|}{q_1} = \frac{12 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-9}} = 3$$

Luego, todos los puntos del espacio que cumplan $r_2 = 3 \cdot r_1$ pertenecen a la superficie de potencial cero.

40 **Calcula la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B* situados a 50 cm y 100 cm, respectivamente, de una carga *q* = 4 pC.**

Vamos a calcular $V_{BA} = V_B - V_A$.

$$V_{BA} = V_B - V_A = K_0 \cdot \frac{q}{r_B} - K_0 \cdot \frac{q}{r_A} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-12}}{100 \cdot 10^{-2}} - 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-12}}{50 \cdot 10^{-2}} = -0{,}036 \text{ V} = -36 \text{ mV}$$

Puesto que la diferencia de potencial, V_{BA}, es negativa, significa, lógicamente, que el potencial disminuye al ir de *A* a *B*.

41 **Dos puntos *A* y *B* están separados 1 m de distancia. Sobre la recta que los une, ¿a qué distancia de *A* tendremos que colocar una carga de –6 nC para que la diferencia de potencial ΔV_{AB} sea de 30 V?**

Recordemos que V_{BA} representa $V_B - V_A$.

$$V_{BA} = V_B - V_A = K_0 \cdot \frac{q}{r_B} - K_0 \cdot \frac{q}{r_A} = K_0 \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = K_0 \cdot q \cdot \frac{r_A - r_B}{r_B \cdot r_A} = K_0 \cdot |q| \cdot \frac{r_B - r_A}{r_B \cdot r_A}$$

Además, sabemos que: $r_B + r_A = 1 \rightarrow r_B = 1 - r_A$

Sustituimos esto en la ecuación principal:

$$V_{BA} = K_0 \cdot |q| \cdot \frac{1 - r_A - r_A}{(1 - r_A) \cdot r_A} = K_0 \cdot |q| \cdot \frac{1 - 2 \cdot r_A}{r_A - r_A^2} \rightarrow V_{BA} \cdot r_A - V_{BA} \cdot r_A^2 - K_0 \cdot |q| + 2 \cdot K_0 \cdot |q| \cdot r_A = 0$$

$$r_A^2 - \frac{(V_{BA} + 2 \cdot K_0 \cdot |q|)}{V_{BA}} \cdot r_A + \frac{K_0 \cdot |q|}{V_{BA}} = 0$$

$$r_A^2 - \frac{(30 + 2 \cdot 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-9})}{30} \cdot r_A + \frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{30} = 0$$

$$r_A^2 - 4{,}6 \cdot r_A + 1{,}8 = 0 \rightarrow r_A \approx 0{,}432 \text{ m} = 43{,}2 \text{ cm}$$

42 **Calcula el valor de una carga *q* < 0, situada a 3 m y 1 m de dos puntos cuya diferencia de potencial es de –200 V.**

Llamemos al punto más cercano *P*, y al más lejano, *Q*. Puesto que la carga es negativa, el potencial en cualquier punto es negativo. Dado que la diferencia de potencial que buscamos es negativa, significa que hay que restar el potencial menor (el de *P*, ya que es el más negativo) menos el potencial mayor (el de *Q*, ya que es el menos negativo).

Por tanto, calcularemos $V_{PQ} = V_P - V_Q$ sabiendo que su valor es –200 V.

$$V_{PQ} = V_P - V_Q = K_0 \cdot \frac{q}{r_P} - K_0 \cdot \frac{q}{r_Q} = K_0 \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q}\right) \rightarrow q = \frac{V_{PQ}}{K_0 \cdot \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_Q}\right)}$$

$$q = \frac{-200}{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right)} \approx -3{,}33 \cdot 10^{-8} \text{ C} = -33{,}3 \text{ nC}$$

43 **A partir del ejercicio resuelto 10, calcula el trabajo mínimo que habrá que realizar sobre una carga *q′* = 5 mC para llevarla desde *B* hasta *A*. ¿Qué significa el signo del trabajo que has obtenido?**

El trabajo mínimo es aquel que, finalmente, deja la carga sin energía cinética (parada). Por tanto, la carga se coge en reposo y se suelta en reposo. No hay incremento de energía cinética y, en virtud del teorema de las fuerzas vivas, el trabajo total (el de la fuerza eléctrica y la fuerza externa) es cero:

$$W_T = W_C + W_{ext} = \Delta E_c = 0 \rightarrow W_{ext} = -W_C$$

Teniendo en cuenta el teorema de la energía potencial y la definición de potencial y diferencia de potencial:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_A} - E_{p_B} = q' \cdot V_A - q' \cdot V_B = q' \cdot \left(V_A - V_B\right) = -q' \cdot \left(V_B - V_A\right) = -q' \cdot V_{BA}$$

Juntando estas dos ecuaciones:

$$W_{ext} = -W_C = q' \cdot V_{BA} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot (-0{,}370) = -1{,}85 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

El trabajo externo es negativo porque el campo tiende a mover de manera «natural» la carga de *A* a *B* y, mediante una fuerza externa, tenemos que ir frenándola para dejarla en reposo al final. Si no se aplicara la fuerza externa, la carga llegaría a *B* con una cierta velocidad.

44 Dos cargas de –4 nC y 8 nC están separadas 40 cm. ¿Qué trabajo mínimo tendríamos que hacer para llevar una carga de –1 mC desde el punto medio que las une hasta el infinito? Explica este resultado.

Calculamos el potencial en el punto medio de las dos cargas. Aplicamos el principio de superposición:

$$V_m = V_{1m} + V_{2m} = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_{1m}} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_{2m}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-4 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-9}}{20 \cdot 10^{-2}} = 180\ \text{V}$$

El potencial en «el infinito» es cero:

$$V_\infty = 0$$

Como ya hemos visto en ejercicios anteriores, cuando el trabajo externo es el mínimo, quiere decir que no se incrementa la energía cinética de la carga y, en este caso, el trabajo realizado por la fuerza externa es el opuesto al realizado por el campo:

$$W_{ext} = -W_C = -(-\Delta E_p) = \Delta E_p = E_{p_\infty} - E_{p_m} = q' \cdot (V_\infty - V_m) = -10^{-3} \cdot (0 - 180) = 0{,}180\ \text{J}$$

El trabajo es positivo porque hay que aplicar una fuerza a la carga y obligarla a moverse en contra del campo, aumentando su energía potencial desde –0,180 J hasta 0 J.

45 El trabajo mínimo que hay que realizar para llevar una carga de 7 mC desde el infinito hasta un punto *P* es de 21 J. Determina el potencial en el punto *P*. ¿Qué trabajo realizará el campo si dejáramos que llevara, nuevamente, la carga al infinito? ¿Con qué energía cinética llegaría?

Si se realiza un trabajo mínimo, la carga no se deja con energía cinética al final. En este caso, como en ejercicios anteriores, el trabajo de la fuerza externa es el opuesto al que realiza el campo:

$$W_{ext} = -W_C = -(-\Delta E_p) = \Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_\infty} = E_{p_P} - 0 = E_{p_P} = q' \cdot V_P$$

Sustituimos:

$$21 = 7 \cdot 10^{-3} \cdot V_P \rightarrow V_P = \frac{21}{7 \cdot 10^{-3}} = 3\,000\ \text{V}$$

Los 21 J de energía potencial que tiene la partícula cargada en el punto *P* los utiliza el campo para llevarla «al infinito», donde no tiene energía potencial. Por tanto, el trabajo que realiza el campo es de esos 21 J. Lo podemos comprobar aplicando el teorema de la energía potencial:

$$W_C = -\Delta E_p = E_{p_P} - E_{p_\infty} = q' \cdot V_P = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 3000 = 21\ \text{J}$$

Puesto que no hay fuerzas no conservativas, la energía mecánica se conserva. Es decir, que los 21 J de energía potencial que tiene la partícula en el punto inicial, se transforman en energía cinética en un punto que podamos considerar infinitamente lejos. Luego, la energía cinética final será 21 J. De todas formas, podemos calcularlo:

$$W_T = \Delta E_c = E_{c_\infty} - E_{c_P} = E_{c_\infty} - 0 = E_{c_\infty}$$

Y el trabajo total es el de la única fuerza que hay, el de la fuerza eléctrica:

$$W_T = W_C$$

Por tanto:

$$W_C = E_{c_\infty} \rightarrow E_{c_\infty} = 21 \text{ J}$$

Vemos que, si tomamos una carga del «infinito» y la acercamos a un punto con energía potencial positiva, cuando liberamos esta carga, el campo la lleva de nuevo «al infinito». Pero no queda igual que al principio, ya que ahora la partícula queda con energía cinética; la misma cantidad que el trabajo externo realizó.

46 El potencial en un punto *A* es de 2 V, y en un punto *B*, de 6 V. Hacia dónde desplazará el campo una carga de –1 nC, ¿de *A* a *B* o de *B* a *A*? Razona tu respuesta.

El campo desplazará la carga hacia donde realice un trabajo positivo. Veamos pues:

$$W_C = -\Delta E_p > 0 \rightarrow \Delta E_p < 0 \rightarrow E_{p_{final}} - E_{p_{inicial}} < 0 \rightarrow E_{p_{final}} < E_{p_{inicial}} \rightarrow q' \cdot V_{final} < q' \cdot V_{inicial}$$

$$-|q'| \cdot V_{final} < -|q'| \cdot V_{inicial} \rightarrow |q'| \cdot V_{final} > |q'| \cdot V_{inicial} \rightarrow V_{final} > V_{inicial} \rightarrow V_{final} = V_B \text{ y } V_{inicial} = V_A$$

Por tanto, la carga se moverá de *A* a *B*.

47 Uno de los principales objetivos de los gobiernos es la generación de energía eléctrica a partir de fuentes de energía renovables, pues su uso implica un menor impacto ambiental y un incremento de la esperanza de vida de nuestro planeta y los seres que lo habitamos. Las redes sociales son un buen lugar de intercambio de información, por lo que puedes encontrar miles de referencias sobre las medidas que se están llevando a cabo y las que quieren aplicarse en el futuro. En grupo, cread un usuario en una red social con el que podáis compartir los proyectos más destacados y todo aquello que podáis hacer a nivel individual y colectivo para ayudar en la mejora del medioambiente.

Respuesta abierta.

TIC. SIMULACIÓN DE FENÓMENOS ELÉCTRICOS

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) **CE.1.2.** (EA.1.2.1.) **CE.7.9.** (EA.7.9.2.)

1 En la primera propuesta para la aplicación Cargas y campos, busca la línea equipotencial de 20 V y dibújala. ¿Eres capaz de justificar su forma?

Más o menos, se trata de dos circunferencias unidas de distinto radio. La circunferencia de la izquierda tiene un radio mayor, puesto que la carga es mayor que la de la derecha. Por eso, hay que alejarse más de ella para disminuir el voltaje hasta los 20 V. Con la carga de la derecha, no hay que alejarse tanto de ella para llegar a esos 20 V.

2 En la segunda propuesta de la misma aplicación, ¿es el valor del módulo del campo constante a lo largo de una línea equipotencial? Compruébalo.

Evidentemente, no lo es. Mientras que el valor del potencial eléctrico es inversamente proporcional a r, el módulo del campo es inversamente proporcional a r^2. Por eso, el módulo del campo tomará distintos valores sobre los distintos puntos de una superficie equipotencial.

3 ¿Has observado qué ocurre cuando colocamos una carga negativa en la misma posición donde hay una positiva? Esta observación te puede servir para explicar por qué los cuerpos son neutros en su estado natural; ¿puedes hacerlo?

Una carga anula a la otra, de tal forma que el campo y el potencial es cero en todo el espacio. Un cuerpo real es normalmente neutro por el mismo motivo; aunque en su interior hay cargas eléctricas, las cargas de un signo son canceladas por las de signo contrario.

4 Cuando se carga un globo, ¿qué otro cuerpo también se carga? ¿Lo hará con una carga mayor, igual o menor que la del globo? Cuenta el exceso de carga en cada cuerpo.

Cuando el globo se carga negativamente es porque gana electrones, descompensándose el equilibrio eléctrico que había inicialmente entre el número de cargas positivas y negativas. Pero eso no quiere decir que en su interior no haya cargas positivas; en realidad, hay las mismas que al principio, son las negativas las que pueden desplazarse de un cuerpo a otro.

5 Cuando el globo se carga negativamente, ¿puede tener cargas positivas en su interior? Compruébalo.

Al frotar el globo con el jersey, se cargan los dos cuerpos con el mismo valor de carga, pero el globo negativo y el jersey positivo. Lo que realmente ocurre es un traspaso de cargas eléctricas negativas desde el jersey al globo. Se puede comprobar contando el exceso de carga en cada objeto.

6 Cuando el globo se pega a la pared, ¿deja la pared de ser neutra?

La pared sigue siendo neutra porque no pierde ni gana cargas negativas, que son las móviles. Por supuesto, tampoco gana ni pierde cargas positivas, que están inmóviles. Al acercar el globo a la pared, se repelen las cargas negativas (móviles) de la zona de la pared más cercana al globo, de tal manera que, aunque la pared sigue siendo neutra, queda una zona cercana al globo con una carga neta positiva que hace que el globo se quede pegado a la pared. Se dice que, sobre esa zona de la pared, se ha inducido una carga eléctrica positiva.

7 En la aplicación de Travoltaje, el muñeco se carga negativamente. ¿Crees que habrá otro cuerpo que se cargue positivamente? ¿Podría haberse cargado el muñeco positivamente?

Si la pierna se carga negativamente al frotarse con la alfombra, es porque ha habido una transferencia de cargas negativas desde la alfombra hasta la pierna. De este modo, la pierna queda cargada negativamente y la alfombra positivamente, con el mismo valor pero positiva.

Dependiendo de la naturaleza de los materiales, al rozarlos, unos átomos tendrán tendencia a capturar electrones y otros a perderlos. Podría ocurrir que el material del que esté hecho el zapato, tuviera tendencia a ceder cargas negativas y los de la alfombra a capturarlas. En este caso, los cuerpos se cargarían al frotarlos con cargas contrarias a las de la simulación.

8 **Coloca la mano del personaje de la aplicación Travoltaje cerca del pomo de la puerta, pero no lo más cerca. Mueve la pierna para que se cargue, pero no demasiado. Verás que, en este caso, no se descarga. Sin mover el brazo, mueve la pierna del personaje para que se cargue aún más. ¿Qué ocurre? ¿Por qué?**

Cuando el personaje se carga poco y la distancia de descarga es grande, no se produce la descarga, y la persona queda cargada hasta que acerque más la mano al pomo de la puerta. Pero si no acerca la mano, y la persona se sigue cargando con la alfombra, llegará un momento en que la carga negativa se repele tanto entre sí que saltará al pomo, aunque la distancia no sea pequeña.

TRABAJA CON LO APRENDIDO

CE.1.1. (EA.1.1.1.-1.1.2.) CE.1.2. (EA.1.2.1.-1.2.2.) CE.7.9. (EA.7.9.1.-7.9.2.) CE.7.10. (EA.7.10.1.) CE.8.4. (EA.8.4.1.)

Página 354

Carga eléctrica y ley de Coulomb

1 **Dentro de la gran cantidad de hadrones que existen (partículas formadas por quarks), hay uno, denominado delta doble positiva, formado por tres quarks *up*. ¿Qué carga eléctrica tiene esta partícula?**

En la tabla de partículas fundamentales de la unidad, vemos que la carga del quark up es 2/3. Esto significa que tiene una carga 2/3 de *e*, que recordemos que es el valor absoluto de la carga de un electrón y cuyo valor es, aproximadamente: $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Por tanto, la carga de la partícula delta doble positiva es:

$$\frac{2}{3}\,e + \frac{2}{3}\,e + \frac{2}{3}\,e = \frac{6}{3}\,e = 2 \cdot e = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\text{ C} = 3{,}2 \cdot 10^{-19}\text{ C}$$

2 **Calcula la fuerza eléctrica con la que interaccionan dos quarks *up* en un protón si se encuentran separados una distancia de $2 \cdot 10^{-16}$ m. ¿Qué masa, en la superficie de la Tierra, tendría un peso igual al valor de esta fuerza eléctrica?**

Cada quark up tiene una carga de 2/3, lo que quiere decir que es $2/3 \cdot e$.

Con ello, aplicamos la ley de Coulomb:

$$F = K_0 \cdot \frac{q^2}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(0{,}2 \cdot 10^{-15}\right)^2} = 2\,560\text{ N}$$

Luego, se repelen con una fuerza de 2560 N. Si este valor fuese debido al peso de un cuerpo en la Tierra, este cuerpo tendría una masa de:

$$P = m \cdot g \rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{2\,560}{9{,}8} \approx 261\text{ kg}$$

Así, sobre cada quark se está ejerciendo una fuerza igual al peso de una masa de 261 kg. Una fuerza terrible para unas partículas que tienen una masa del orden de 10^{-30} kg. Si fuese la única fuerza, produciría una aceleración del orden de 10^{32} m/s^2, pero la fuerza nuclear fuerte es lo suficientemente intensa como para no dejar que esto ocurra.

3 **Dos bolitas cargadas con 0,6 mC y –0,3 mC se atraen con una fuerza de 495 N cuando están sumergidas en agua y separadas 20 cm. Calcula la constante dieléctrica del agua. Compara este valor con la permitividad en el vacío.**

Despejamos la constante de Coulomb de su expresión:

$$F = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \rightarrow K = \frac{F \cdot r^2}{q \cdot q'} = \frac{-495 \cdot \left(20 \cdot 10^{-2}\right)^2}{0{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot (-0{,}3) \cdot 10^{-3}} = 1{,}1 \cdot 10^8\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

La constante dieléctrica o permitividad del agua es:

$$K = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot K} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 1{,}1 \cdot 10^8} \approx 7{,}23 \cdot 10^{-10}\ \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

La permitividad relativa es:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{7{,}23 \cdot 10^{-10}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}} \approx 81{,}7$$

4 **Si la constante dieléctrica del etanol a 25 °C es 24 veces mayor que la del vacío (permitividad relativa), calcula la proporción que existe entre las fuerzas eléctricas en el vacío y en el etanol entre cargas iguales.**

Cuando dos cargas de valor q están en el vacío separadas una distancia r, se repelen con una fuerza F_0, y todo ello, guarda la siguiente relación:

$$F_0 = K_0 \cdot \frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}$$

Cuando las dos cargas están sumergidas en etanol a la misma distancia r, se repelen con una fuerza F, tal que:

$$F = K \cdot \frac{q^2}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{q^2}{r^2}$$

Comparamos una con la otra dividiéndolas:

$$\frac{F_0}{F} = \frac{\dfrac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \dfrac{q^2}{r^2}}{\dfrac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \dfrac{q^2}{r^2}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 24 \rightarrow F = \frac{1}{24} \cdot F_0$$

El resultado es que se repelen con una fuerza 24 veces menor.

5 **Un hilo inextensible puede soportar una tensión máxima de 300 N hasta romperse. Si en cada extremo del hilo colocamos dos bolitas con la misma carga de 3 mC, ¿cuál será la longitud mínima del hilo para no partirse?**

Vamos a buscar a qué distancia, las dos cargas se repelen con una fuerza de 300 N.

$$F = K_0 \cdot \frac{q^2}{r^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{K_0 \cdot q^2}{F}} = \sqrt{\frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \left(3 \cdot 10^{-3}\right)^2}{300}} \approx 16{,}43 \text{ m}$$

6 **Dos cargas separadas una distancia r_0 interaccionan con una fuerza F_0. ¿A qué distancia interaccionarán con una fuerza el doble de F_0?**

Para la fuerza inicial, podemos escribir:

$$F_0 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_0^2}$$

Y para la nueva:

$$F' = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r'^2}$$

donde $F' = 2 \cdot F_0$. Sustituimos este valor en la ecuación anterior:

$$2 \cdot F_0 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r'^2}$$

Dividimos esta ecuación entre la primera, y nos queda después de simplificar:

$$2 = \frac{r_0^2}{r'^2} \rightarrow r' = \frac{r_0}{\sqrt{2}}$$

7 **Dos cargas positivas iguales están separadas una distancia r_0 y se repelen con una fuerza F_0. Si se aumenta la carga de cada partícula en 10 mC y se separan una distancia $3 \cdot r_0$, se ve que ahora se repelen con una fuerza $F_0/4$. ¿Qué valor tenían las cargas inicialmente?**

En la situación inicial se puede plantear:

$$F_0 = K_0 \cdot \frac{q \cdot q}{r_0^2}$$

Posteriormente, tenemos:

$$F' = K_0 \cdot \frac{q' \cdot q'}{r'^2}$$

donde $q' = q + 10^{-2}$, $F' = \frac{F_0}{4}$ y $r' = 3 \cdot r_0$. Sustituimos estos datos en la segunda ecuación:

$$\frac{F_0}{4} = K_0 \cdot \frac{\left(q + 10^{-2}\right) \cdot \left(q + 10^{-2}\right)}{\left(3 \cdot r_0\right)^2}$$

Reescribiendo:

$$\frac{F_0}{4} = K_0 \cdot \frac{q^2 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot q + 10^{-4}}{9 \cdot r_0^2}$$

Dividimos esta ecuación entre la primera y simplificamos:

$$\frac{1}{4} = \frac{\dfrac{q^2 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot q + 10^{-4}}{9}}{\dfrac{q^2}{1}} = \frac{q^2 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot q + 10^{-4}}{9 \cdot q^2} \rightarrow \frac{9}{4} \cdot q^2 = q^2 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot q + 10^{-4}$$

$$1{,}25 \cdot q^2 - 0{,}02 \cdot q - 0{,}0001 = 0 \rightarrow q = 0{,}02\ \text{C} = 20\ \text{mC}$$

Se ha descartado la solución negativa por no ser coherente con el ejercicio.

8 **Dos cargas de 0,25 mC y –0,06 mC, sumergidas en un gas, se atraen cuando están separadas 80 cm con una fuerza de 21 N. Determina la permitividad relativa del gas.**

Aplicamos la ley de Coulomb:

$$F = K \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \rightarrow K = \frac{F \cdot r^2}{q \cdot q'} = \frac{-21 \cdot 0{,}8^2}{0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-0{,}06 \cdot 10^{-3}\right)} \approx 9{,}0 \cdot 10^8\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

Por tanto:

$$K = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot K}$$

Para el vacío, la constante dieléctrica es:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot K_0}$$

Puesto que la constate dieléctrica relativa es:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

dividimos las expresiones anteriores:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\dfrac{1}{4 \cdot \pi \cdot K}}{\dfrac{1}{4 \cdot \pi \cdot K_0}} = \frac{K_0}{K} = \frac{9{,}0 \cdot 10^9}{9{,}0 \cdot 10^8} = 10$$

El resultado es adimensional.

9 **En una región del espacio hay un campo eléctrico vertical. Una pequeña gotita de aceite de 2 μg se ioniza mediante la captura de un millón de electrones, aproximadamente. ¿Qué valor debe tener el campo, y con qué sentido, para que la gotita de aceite levite? Este experimento fue muy relevante para calcular la carga del electrón. Busca información sobre su descubridor y cómo se llevó a cabo.**

En el equilibrio, la fuerza peso, hacia abajo, se tiene que compensar con la fuerza eléctrica hacia arriba. Puesto que la carga de la gotita de aceite es negativa, el campo eléctrico tiene que tener sentido hacia abajo. Así:

$$m \cdot g = |q'| \cdot E \rightarrow m \cdot g = 10^6 \cdot e \cdot E \rightarrow E = \frac{m \cdot g}{10^6 \cdot e} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 9{,}8}{10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 122{,}5 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

10 **Tenemos una bolita sujeta en un punto que está cargada con 0,5 mC. ¿Con qué aceleración saldrá repelida otra bolita cargada con 2 nC y 5 g de masa que coloquemos a 40 cm de la primera bola?**

Veamos la fuerza que se ejerce sobre la carga testigo:

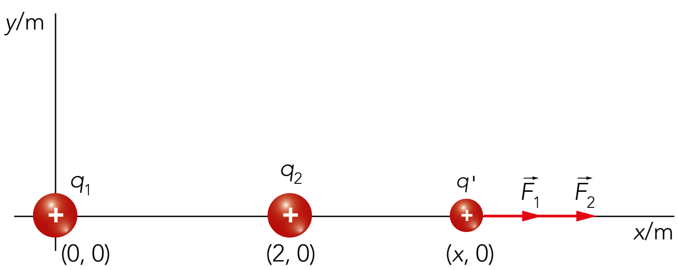
$$F = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'^2}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{\left(40 \cdot 10^{-2}\right)^2} \approx 0{,}056 \text{ N}$$

Mediante la segunda ley de Newton, calculamos la aceleración:

$$F = m \cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{0{,}056}{5 \cdot 10^{-3}} = 11{,}2 \text{ m/s}^2$$

11 **Una carga q_1 = 1 mC está situada en el origen de coordenadas. En la posición (2, 0) m, se encuentra q_2 = 2 mC. Calcula en qué punto sobre el eje *X*, y a la derecha de q_2, se debe colocar una carga q' = 0,5 μC para que sea repelida con una fuerza de 10 N. Puedes utilizar algún programa matemático para resolver el polinomio de cuarto grado que obtendrás.**

La disposición de las cargas es la siguiente:



Planteamos la fuerza total, que tiene que ser 10 N, y despejaremos la *x*:

$$F_T = F_1 + F_2 = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{x^2} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'^{\,2}}{\left(x-2\right)^2} =$$

$$= 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-3} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}}{x^2} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}}{\left(x-2\right)^2} = \frac{4{,}5}{x^2} + \frac{9{,}0}{\left(x-2\right)^2} = 10$$

$$\frac{4{,}5 \cdot \left(x-2\right)^2}{x^2 \cdot \left(x-2\right)^2} + \frac{9{,}0 \cdot x^2}{x^2 \cdot \left(x-2\right)^2} = 10 \rightarrow \frac{4{,}5 \cdot \left(x-2\right)^2 + 9{,}0 \cdot x^2}{x^2 \cdot \left(x-2\right)^2} = 10$$

$$4{,}5 \cdot \left(x-2\right)^2 + 9{,}0 \cdot x^2 = 10 \cdot x^2 \cdot \left(x-2\right)^2$$

$$4{,}5 \cdot \left(x^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot x\right) + 9{,}0 \cdot x^2 = 10 \cdot x^2 \cdot \left(x^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot x\right)$$

$$4{,}5 \cdot x^2 + 18 - 18 \cdot x + 9{,}0 \cdot x^2 = 10 \cdot x^4 + 40 \cdot x^2 - 40 \cdot x^3$$

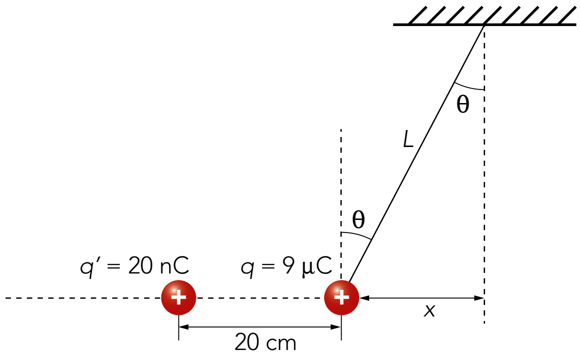
$$10 \cdot x^4 - 40 \cdot x^3 + 26{,}5 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 18 = 0$$

$$x^4 - 4 \cdot x^3 + 2{,}65 \cdot x^2 + 1{,}8 \cdot x - 1{,}8 = 0 \quad \rightarrow \quad x \approx 2{,}974 \text{ m}$$

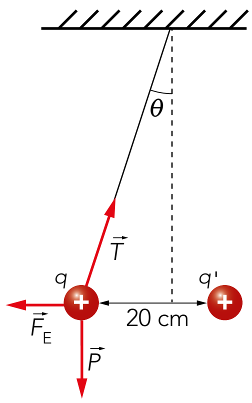
La solución de esta ecuación la hemos obtenido con Geogebra. Se trata de *software* gratuito muy potente, que todo alumno de ciencias debe aprender a manejar. La manera de proceder es fácil, en la línea de entrada se introduce el polinomio y luego se le dice al programa que busque los puntos de corte con el eje *x*. Se obtienen dos resultados, pero uno de ellos es negativo y, por tanto, hay que descartarlo.

Carácter vectorial de la fuerza y del campo

12 Una bolita con una carga de 9 µC y una masa de 40 g cuelga de un hilo de longitud *L*. ¿Qué ángulo se desviará de la vertical si colocamos una carga de 20 nC en el eje *X*, a 20 cm de distancia?



La situación de equilibrio es la que se muestra en la imagen:



El módulo de la fuerza peso es:

$$P = m \cdot g = 0{,}040 \cdot 9{,}8 = 0{,}392 \text{ N}$$

El de la fuerza eléctrica es:

$$F_E = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{x^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{9 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^{-9}}{0{,}20^2} = 0{,}040\,5 \text{ N}$$

La tensión es la fuerza que anula a las otras dos en el equilibrio. Por tanto:

$$\vec{T} = \left(0{,}040\,5;\ 0{,}392\right) \text{ N}$$

El ángulo es:

$$\theta = \arctan \frac{0{,}040\,5}{0{,}392} \approx 5{,}9°$$

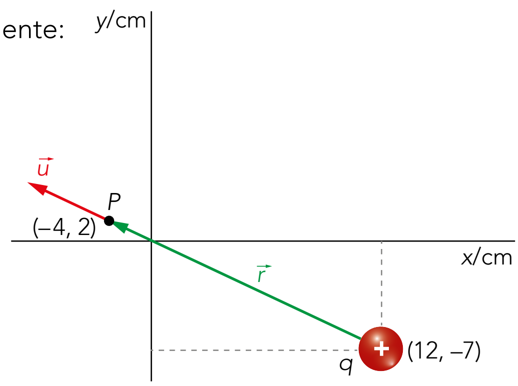
Como vemos, el resultado es independiente de la longitud del hilo.

13 Una carga eléctrica q = 68 nC está fija en el punto (12, –7) cm.

a) Calcula el campo eléctrico que crea en el punto P = (–4, 2) cm.

b) ¿Qué fuerza se ejercerá sobre una carga testigo de –7 mC colocada en P?

a) La situación es la siguiente:



Calculamos la coordenada del vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (-4\ ,2) - (12, -7) = (-16, 9) \text{ cm}$$

El vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(-16,\ 9)}{\sqrt{(-16)^2 + 9^2}} \approx (-0{,}872;\ 0{,}490)$$

Calculemos el valor del campo:

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{68 \cdot 10^{-9}}{\left[(-16)^2 + 9^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 18\,160 \text{ N/C}$$

La expresión vectorial del campo es:

$$\vec{E} = E \cdot \vec{u} = 18\,160 \cdot (-0{,}872;\ 0{,}490) \approx (-15\,836, 8\,898) \text{ N/C}$$

b) La fuerza sobre la carga testigo es:

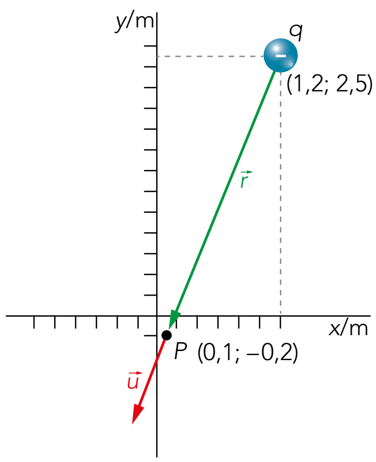
$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = -7 \cdot 10^{-3} \cdot (-15\,836,\ 8\,898) \approx (111,\ -62) \text{ N}$$

14 Una carga de −6 μC está en (1,2; 2,5) m.

a) Calcula el campo que crea en *P* = (0,1; −0,2) m.

b) Si colocamos una segunda carga en (–1,0, 1,0) m de 4 μC, ¿qué cambio experimentará el campo eléctrico en *P*?

a) La disposición es:



Vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (0{,}1;\ -0{,}2) - (1{,}2;\ 2{,}5) = (-1{,}1;\ -2{,}7) \text{ m}$$

El vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(-1{,}1;\ -2{,}7)}{\sqrt{(-1{,}1)^2 + (-2{,}7)^2}} \approx (-0{,}377;\ -0{,}926)$$

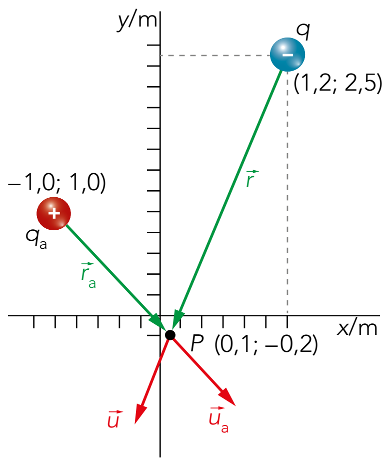
Calculemos el valor del campo en *P*:

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-6 \cdot 10^{-6}}{\left[(-1{,}1)^2 + (-2{,}7)^2\right]} \approx -6\,353 \text{ N/C}$$

La expresión vectorial del campo es:

$$\vec{E} = E \cdot \vec{u} = -6\,353 \cdot (-0{,}377;\ -0{,}926) \approx (2\,395,\ 5\,883) \text{ N/C}$$

b) Ahora, calculamos el nuevo campo, que será el que ya había más el que va a crear la carga q_a = 4 μC. Ahora tenemos:



Vector $\vec{r}_a$:

$$\vec{r}_a = (0{,}1;\ -0{,}2) - (-1{,}0;\ 1{,}0) = (1{,}1;\ -1{,}2)\ \text{m}$$

El vector unitario $\vec{u}$:

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{r}_a}{r_a} = \frac{(1{,}1;\ -1{,}2)}{\sqrt{1{,}1^2 + (-1{,}2)^2}} \approx (0{,}676;\ -0{,}737)$$

Calculamos el valor del campo:

$$E_a = K_0 \cdot \frac{q_a}{r_a^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-6}}{\left[1{,}1^2 + (-1{,}2)^2\right]} \approx 13\,585\ \text{N/C}$$

La expresión vectorial del campo es:

$$\vec{E}_a = E_a \cdot \vec{u}_a = 13\,585 \cdot (0{,}676;\ -0{,}737) \approx (9\,183,\ -10\,012)\ \text{N/C}$$

El campo total es:

$$\vec{E}_T = \vec{E} + \vec{E}_a = (2\,395,\ 5\,883) + (9\,183,\ -10\,012) = (11\,578,\ -4\,129)\ \text{N/C}$$

15 El campo eléctrico en P es $\vec{E}$ = (200, −600) N/C.

a) Calcula el módulo de la fuerza que se ejercerá sobre una carga testigo de −3 mC colocada en dicho punto.

b) Indica qué ángulo tiene el vector fuerza con respecto al eje *X*.

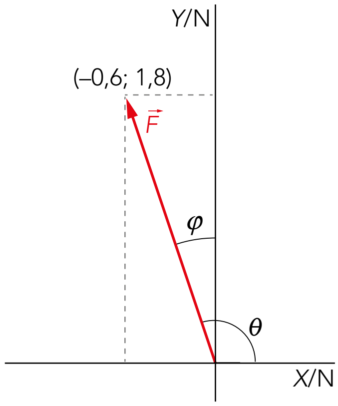
a) La fuerza está relacionada con el campo mediante: $\vec{F} = q' \cdot \vec{E}$

Y si escribimos esta ecuación atendiendo únicamente al módulo:

$$\|\vec{F}\| = |q'| \cdot \|\vec{E}\| = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{200^2 + (-600)^2} \approx 1{,}9\ \text{N}$$

b) Calculamos, en este caso, el vector fuerza:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = -3 \cdot 10^{-3} \cdot (200, -600) = (-0{,}6;\ 1{,}8)\ \text{N}$$



El ángulo con el eje *y* es:

$$\varphi = \arctan \frac{0{,}6}{1{,}8} \approx 18{,}4°$$

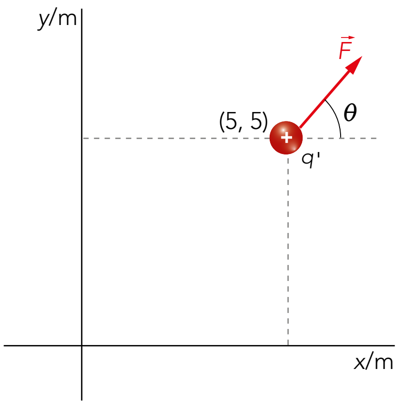
Y, con el eje *x*:

$$\theta = \varphi + 90° = 18{,}4° + 90° = 108{,}4°$$

Página 355

16 **Una carga $q' = 2{,}2\ \mu$C está en $P = (5, 5)$ cm, mientras es empujada por una fuerza eléctrica de módulo 86 N formando un ángulo de 30° sobre el eje *X*. Determina la expresión vectorial del campo eléctrico en *P*.**

La situación es como se muestra en la imagen:



El vector unitario con la dirección y sentido de la fuerza es:

$$\vec{u} = (\cos 30°,\ \sin 30°)$$

La expresión vectorial de la fuerza es:

$$\vec{F} = F \cdot \vec{u} = 86 \cdot (\cos 30°,\ \sin 30°) \approx (74{,}48;\ 43{,}00)\ \text{N}$$

El campo y la fuerza están relacionados mediante la expresión:

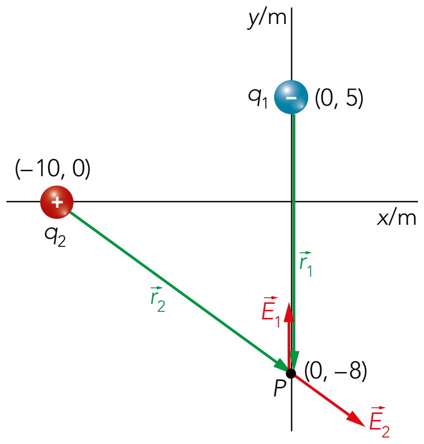
$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} = \frac{(74{,}48;\ 43{,}00)}{2{,}2 \cdot 10^{-6}} \approx (33{,}9;\ 19{,}5) \cdot 10^{6}\ \text{N/C}$$

17 **Se dispone de dos cargas: q_1 = −2 μC en (0, 5) cm y q_2 = 8 μC en (−10, 0) cm.**

a) Calcula el campo eléctrico en el punto P = (0, −8) cm.

b) Determina la fuerza que se ejercerá sobre una carga q' = 3 μC colocada en el punto P.

La situación es:



a) Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (0, -8) - (0, 5) = (0, -13) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (0, -8) - (-10, 0) = (10, -8) \text{ cm}$$

Los vectores unitarios $\vec{u}$:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(0, -13)}{13} = (0, -1)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(10, -8)}{\sqrt{10^2 + (-8)^2}} = (0{,}781; -0{,}625)$$

Los valores del campo de cada carga:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{13^2 10^{-4}} = -1\,065\,089 \text{ N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6}}{\left[10^2 + (-8)^2\right] \cdot 10^{-4}} = 4\,390\,244 \text{ N/C}$$

La expresión vectorial de los campos:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = -1\,065\,089 \cdot (0, -1) = (0, 1\,065\,089) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = 4\,390\,244 \cdot (0{,}781; -0{,}625) = (3\,428\,781, -2\,743\,903) \text{ N/C}$$

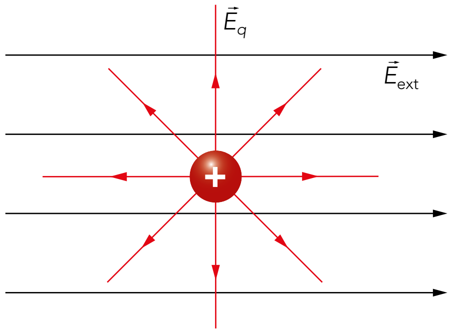
Y el campo total:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (0, 1\,065\,089) + (3\,428\,781, -2\,743\,903) = (3\,428\,781, -1\,678\,814) \text{ N/C}$$

b) La relación entre el campo y la fuerza es:

$$\vec{F} = q' \cdot \vec{E} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot (3\,428\,781, -1\,678\,814) \approx (10{,}3; -5{,}0) \text{ N}$$

18 **En una región del espacio donde hay un campo eléctrico uniforme de 500 N/C horizontal y hacia la derecha, se coloca, bien fijada para que no se desplace, una carga eléctrica de 1,5 μC. ¿En qué punto se formará un campo nulo?**



Veamos a qué distancia de la carga, el campo que esta crea es de 500 N/C.

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} \rightarrow 500 = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^{-6}}{r^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}}{500}} \approx 5{,}196 \text{ m}$$

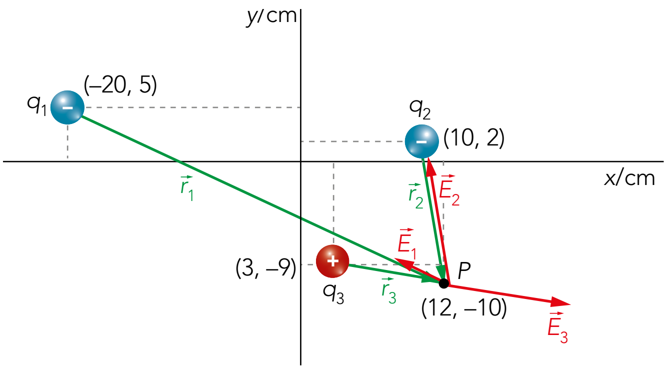
Luego, a la izquierda de la carga, a 5,196 m, la carga crea un campo hacia la izquierda de 500 N/C, que al superponerse con el externo, hacia la derecha de 500 N/C, da un campo total igual a cero.

19 **Tres cargas están fijas en las siguientes posiciones: q_1 = –5 mC en (–20, 5) cm, q_2 = –6 mC en (10, 2) cm y q_3 = 8 mC en (3, –9) cm.**

a) ¿Qué valor tiene el campo eléctrico en el punto P = (12, –10) cm?

b) Si en dicho punto hay una carga q' que tiende a alejarse en la dirección y sentido del campo con una fuerza de 100 N, ¿qué valor tiene esta carga?

La situación es la siguiente:



a) Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (12, -10) - (-20, 5) = (32, -15) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (12, -10) - (10, 2) = (2, -12) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_3 = (12, -10) - (3, -9) = (9, -1) \text{ cm}$$

Y los vectores unitarios $\vec{u}$:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(32, -15)}{\sqrt{32^2 + (-15)^2}} = (0{,}905; -0{,}424)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(2, -12)}{\sqrt{2^2 + (-12)^2}} = (0{,}164; -0{,}986)$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\vec{r}_3}{r_3} = \frac{(9, -1)}{\sqrt{9^2 + (-1)^2}} = (0{,}994; -0{,}110)$$

Los valores del campo de cada carga:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-5 \cdot 10^{-3}}{\left[32^2 + (-15)^2\right] \cdot 10^{-4}} = -360\,288\,231\ \text{N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-6 \cdot 10^{-3}}{\left[2^2 + (-12)^2\right] \cdot 10^{-4}} = -3\,648\,648\,649\ \text{N/C}$$

$$E_3 = K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3}}{\left[9^2 + (-1)^2\right] \cdot 10^{-4}} = 8\,780\,487\,805\ \text{N/C}$$

Y la expresión vectorial de los campos:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = -360\,288\,231 \cdot (0{,}905; -0{,}424) = (-326\,060\,849,\ 152\,762\,210)\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = -3\,648\,648\,649 \cdot (0{,}164; -0{,}986) = (-598\,378\,378,\ 3\,597\,567\,568)\ \text{N/C}$$

$$\vec{E}_3 = E_3 \cdot \vec{u}_3 = 8\,780\,487\,805 \cdot (0{,}994; -0{,}110) = (8\,727\,804\,878,\ -965\,853\,659)\ \text{N/C}$$

Finalmente, el campo total:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = (-326\,060\,849,\ 152\,762\,210) + (-598\,378\,378,\ 3\,597\,567\,568) +$$

$$+(8\,727\,804\,878,\ -965\,853\,659) = (7\,803\,365\,651,\ 2\,784\,476\,119)\ \text{N/C} \approx (7{,}8;\ 2{,}8) \cdot 10^9\ \text{N/C}$$

b) Hagamos que el módulo de la fuerza sea 100 N:

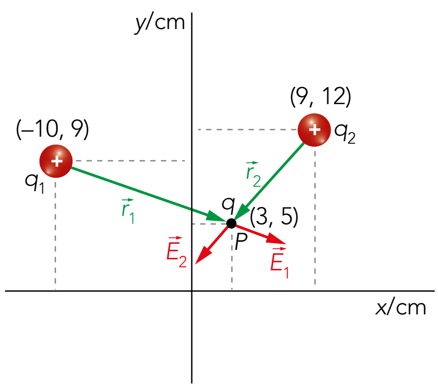
$$\left|\vec{F}\right| = |q'| \cdot \left|\vec{E}\right| \ \rightarrow\ |q'| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{\left|\vec{E}\right|} = \frac{100}{\sqrt{7{,}8^2 + 2{,}8^2} \cdot 10^9} \approx 1{,}21 \cdot 10^{-8}\ \text{C} = 12{,}1\ \text{nC}$$

Luego el valor absoluto de la carga tiene que ser de 12,1 nC, aproximadamente. Puesto que se aleja en la dirección y sentido del campo, significa que la carga es positiva:

$$q' = 12{,}1\ \text{nC}$$

20 **Tenemos dos cargas q_1 = 14,2 nC y q_2 = 6,9 nC situadas en (–10, 9) cm y (9, 12) cm, respectivamente. ¿Qué carga, q_3, deberemos colocar en el punto P = (3, 5) cm para que se ejerza sobre ella una fuerza de (–3,696; 15,152) · 10^{-6} N?**

La situación es:



Vamos a calcular el campo que crean q_1 y q_2 juntas en el punto P, ya que el campo que origina la fuerza que experimenta q es igual a $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

Vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (3, 5) - (-10, 9) = (13, -4) \text{ cm}$$
$$\vec{r}_2 = (3, 5) - (9, 12) = (-6, -7) \text{ cm}$$

Los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(13, -4)}{\sqrt{13^2 + (-4)^2}} \approx (0{,}956; -0{,}294)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-6, -7)}{\sqrt{(-6)^2 + (-7)^2}} \approx (-0{,}651; -0{,}759)$$

Los valores del campo:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{14{,}2 \cdot 10^{-9}}{\left[13^2 + (-4)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 6\,908 \text{ N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6{,}9 \cdot 10^{-9}}{\left[(-6)^2 + (-7)^2\right] \cdot 10^{-4}} \approx 7\,306 \text{ N/C}$$

La expresión vectorial de los campos:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = 6\,908 \cdot (0{,}956; -0{,}294) \approx (6\,604, -2\,031) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = 7\,306 \cdot (-0{,}651; -0{,}759) \approx (-4\,756, -5\,545) \text{ N/C}$$

El campo total formado por estas dos cargas en P es:

$$\vec{E}_{12} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (6\,604, -2\,031) + (-4\,756, -5\,545) = (1\,848, -7\,576) \text{ N/C}$$

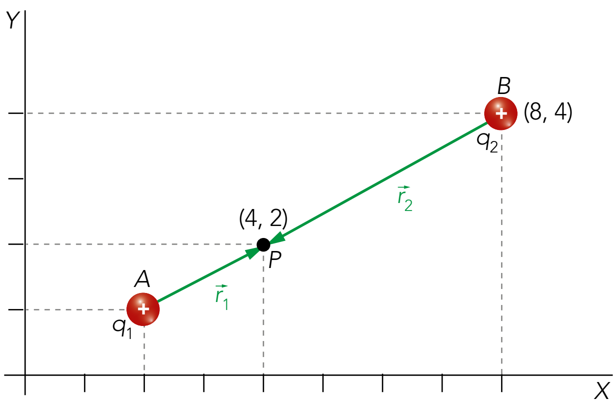
Puesto que la fuerza es $\vec{F} = (-3{,}696; 15{,}152) \cdot 10^{-6}$ N, concluimos que:

$$q = -2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Puesto que, con este valor, se cumple que: $(-3{,}696; 15{,}152) \cdot 10^{-6} = -2 \cdot 10^{-9} \cdot (1\,848, -7\,576)$

21 **En el punto A (2, 1) m hay una carga eléctrica de q_1 = 20 nC, ¿qué carga eléctrica, q_2, habrá que poner en el punto B (8, 4) m para que el campo eléctrico en el punto P (4, 2) m sea cero?**

La situación es:



Para que el campo total sea cero, el vector $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ deben ser opuestos, y esto solamente será posible si los puntos A, B y P están alineados. Cuando calculemos los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, veremos que son paralelos y, por tanto, los tres puntos están alineados.

Vamos a calcular el campo que crean q_1 y q_2 juntas en el punto P e igualar a cero su suma.

Vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (4, 2) - (2, 1) = (2, 1) \text{ m}$$

$$\vec{r}_2 = (4, 2) - (8,4) = (-4, -2) \text{ m}$$

Vemos que $\vec{r}_2 = -0{,}5 \cdot \vec{r}_1$, indicando que los dos vectores son paralelos.

Los vectores unitarios:

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{r}_1}{r_1} = \frac{(2, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \approx (0{,}894;\ 0{,}447)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(-4, -2)}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}} \approx (-0{,}894;\ -0{,}447)$$

Los valores del campo:

$$E_1 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{20 \cdot 10^{-9}}{2^2 + 1^2} = 36 \text{ N/C}$$

$$E_2 = K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_2}{(-4)^2 + (-2)^2} = 4{,}5 \cdot 10^8 \cdot q_2$$

La expresión vectorial de los campos:

$$\vec{E}_1 = E_1 \cdot \vec{u}_1 = 36 \cdot (0{,}894;\ 0{,}447) \approx (32{,}18;\ 16{,}09) \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_2 = E_2 \cdot \vec{u}_2 = 4{,}5 \cdot 10^8 \cdot q_2 \cdot (-0{,}894;\ -0{,}447) \approx (-4{,}02 \cdot 10^8;\ -2{,}01 \cdot 10^8) \cdot q_2 \text{ N/C}$$

El campo total formado por estas dos cargas en P debe ser cero:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (32{,}18;\ 16{,}09) + (-4{,}02 \cdot 10^8;\ -2{,}01 \cdot 10^8) \cdot q_2 = (0;\ 0)$$

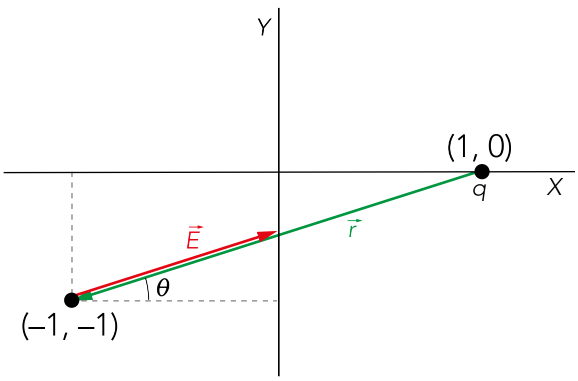
Para que exista una solución al problema, debe cumplirse que se obtenga el mismo valor de q_2 despejándolo de cualquiera de las dos coordenadas.

$$q_2 = \frac{32{,}18}{4{,}02} \cdot 10^{-8} \approx 8{,}0 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 80 \text{ nC}$$

$$q_2 = \frac{16{,}09}{2{,}01} \cdot 10^{-8} \approx 8{,}0 \cdot 10^{-8} \text{ C} = 80 \text{ nC}$$

22 Una carga eléctrica de −2 mC está en la posición (1, 0) m. Determina el valor del campo eléctrico en el punto (−1, −1) m. Expresa el resultado indicando el módulo y el ángulo con el eje *X*.

La situación es:



Determinamos el vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (-1, -1) - (1, 0) = (-2, -1) \text{ m}$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{r}$ es:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(-2, -1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2, -1)$$

El valor del campo es:

$$\vec{E} = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = \vec{u} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-3}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (-2, -1) \approx (3{,}2;\ 1{,}6) \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

Su módulo es:

$$E = \sqrt{3{,}2^2 + 1{,}6^2} \cdot 10^6 \approx 3{,}7 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

Y el ángulo que forma con el eje x es:

$$\theta = \text{actg}\ \frac{1.6 \cdot 10^6}{3{,}2 \cdot 10^6} \approx 26{,}6°$$

Energía potencial electrostática y trabajo

23 Una carga positiva q' inmersa en un campo eléctrico es desplazada bajo la acción de una fuerza externa desde A hasta B efectuando un trabajo de 30 J. Si la carga estaba en reposo en A, y se deja en reposo en B:

a) ¿Qué trabajo habrá realizado la fuerza eléctrica?

b) ¿Se ha movido la carga q' en contra de la fuerza eléctrica o a favor?

a) Puesto que no se incrementa la energía cinética, en virtud del teorema de la energía cinética, el trabajo total es cero. Luego el trabajo que realiza la fuerza externa es, justamente, igual al trabajo realizado por la fuerza eléctrica del campo cambiada de signo. En consecuencia:

$$W_C = -W_{ext} = -30 \text{ J}$$

b) Al ser el trabajo del campo negativo, significa que la fuerza eléctrica se opone al desplazamiento de la carga. Es decir, la fuerza eléctrica tira hacia atrás para que el coseno sea negativo y el trabajo salga negativo.

24 Una carga $q' = 2$ μC está en reposo a una distancia r_0 de una carga fuente $q = -6$ μC. La energía potencial de q' es de −2,4 J.

a) ¿Cuál es el valor de r_0?

b) Si mediante una fuerza externa se lleva q' desde el punto inicial hasta una distancia $r_0/2$, dejándola en reposo, ¿qué trabajo se ha hecho?

a) Aplicamos la expresión de la energía potencial para el estado inicial:

$$E_{p_0} = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0}$$

E_{p_0} es negativo, puesto que el producto de las cargas lo es. Sustituimos los valores, y despejamos la incógnita:

$$r_0 = \frac{K_0 \cdot q \cdot q'}{E_{p_0}} = \frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot (-6) \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{-2{,}4} = 0{,}045 \text{ m} = 4{,}5 \text{ cm}$$

b) Recordemos que, si la carga parte del reposo y se deja en la posición final en reposo, el trabajo total es cero y, por tanto, el trabajo externo es igual al que realizan las fuerzas eléctricas, pero cambiado de signo:

$$W_{ext} = -W_C = -\left(-\Delta E_p\right) = \Delta E_p = E_p \cdot \left(\frac{r_0}{2}\right) - E_p \cdot \left(r_0\right) = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{\frac{r_0}{2}} - K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0} = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_0} = -2{,}4 \text{ J}$$

Un trabajo externo negativo significa que se ha ido frenando la carga. Si por el campo fuera, la carga realizaría el mismo movimiento pero llegando al punto final con energía cinética. Mediante el trabajo externo negativo, lo que se ha hecho es eliminar la energía cinética.

25 Una carga q = 2 mC está situada en el punto (20, –10) cm.

a) ¿Qué energía potencial tendrá una carga q' = 80 μC colocada en (–5, 10) cm?

b) Si la carga q' se aleja hasta el infinito, ¿qué trabajo realizará el campo? ¿Con qué energía cinética llega?

a) Vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (-5, 10) - (20, -10) = (-25, 20) \text{ cm}$$

Expresión de la energía potencial:

$$E_p = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(-25)^2 + 20^2} \cdot 10^{-2}} \approx 4{,}5 \cdot 10^3 \text{ J} = 4{,}5 \text{ kJ}$$

b) El trabajo del campo, W_C, que como sabemos es conservativo, y según el teorema de la energía potencial:

$$W_C = -\Delta E_p = E_p\left(r\right) - E_p\left(\infty\right) = E_p\left(r\right) - 0 = E_p\left(r\right) = 4{,}5 \text{ kJ}$$

Vemos que el trabajo que hace el campo para repeler la carga q' hasta una distancia «infinita» es, precisamente, la energía potencial que tenía.

Puesto que la única fuerza que hay es la del campo, que es conservativa, la energía mecánica se conserva. En este caso, significa que la energía potencial que tiene q' al inicio, se transforma en energía cinética en «el infinito».

$$E_{m_0} = E_m \rightarrow E_{c_0} + E_{p_0} = E_c + E_p \rightarrow 0 + E_{p_0} = E_c + 0 \rightarrow E_{p_0} = E_c \rightarrow E_c = 4{,}5 \text{ kJ}$$

26 Imaginemos dos cargas de 1 C en reposo y separadas infinitamente.

a) ¿Cuánta energía necesitaríamos para dejarlas en reposo separadas un metro de distancia?

b) Si dejáramos que el campo vuelva a separar las cargas, ¿llegaríamos a la misma situación inicial?

a) Podemos imaginar que una de las cargas está fija, y que la otra es acercada mediante una fuerza externa hasta un metro de la primera, adquiriendo una energía potencial gravitatoria. Como se ha visto en el estudio de la energía potencial, la energía potencial es, precisamente, el trabajo externo que hay que realizar para llevar esta carga desde el infinito (en reposo) hasta el punto en cuestión (nuevamente en reposo).

Así:

$$W_{ext} = E_p\left(r\right) = K_0 \cdot \frac{q^2}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{1^2}{1} = 9{,}0 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) Puesto que las cargas se repelen, si dejamos que se separen mediante la acción de la fuerza eléctrica hasta el infinito, donde ya no tendrán energía potencial, quedarán con cierta energía cinética, que será igual a la energía potencial que tenían cuando estaban a un metro de distancia.

Por consiguiente, no estarán igual que al principio, puesto que inicialmente estaban infinitamente separadas, pero en reposo. Podemos comprender, que el trabajo externo que se hizo para acercar las cargas, ha quedado finalmente en forma de energía cinética en las cargas.

27 Calcula la energía electrostática de tres cargas: $q_1 = 5\ \mu C$, $q_2 = -1\ \mu C$ y $q_3 = 7\ \mu C$ en los puntos (0, 0), (15, 0) y (–5, 5) cm, respectivamente. Comprueba que la energía de las tres cargas es indiferente al orden en el que se coloquen las cargas.

Llevar la primera carga desde una distancia infinita hasta la posición que sea, si no hay otras cargas con las que interaccionen, no nos costará ninguna energía. En realidad, tendríamos que aplicar una fuerza externa para acelerar la carga, ya que estaba en reposo, y así conseguiríamos desplazarla hacia donde queramos. Pero, después, hay que frenarla para dejarla en reposo en el punto deseado. Primeramente, se hace un trabajo positivo y, finalmente, otro negativo, y puesto que la energía cinética no se incrementa, por el teorema de las fuerzas vivas, el trabajo total es cero; se cancela el trabajo positivo con el negativo.

Empecemos, por ejemplo, llevando la carga q_1 desde «el infinito» hasta (0, 0). Esto no nos costará ninguna energía.

Si ahora llevamos la carga q_2 hasta el punto (15, 0), sí realizaremos trabajo puesto que interacciona con la q_1. Recordemos que si la carga estaba en reposo y la dejamos en reposo, el trabajo externo es menos el trabajo conservativo; es decir, es igual al incremento de energía potencial:

$$W_{ext21} = \Delta E_p = E_p\left(15,\ 0\right) - E_p\left(\infty\right) = E_p\left(15,\ 0\right) - 0 = E_p\left(15,\ 0\right) = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}$$

Si ahora llevamos la carga q_3, estando ya colocadas la q_1 y la q_2, será:

$$W_{ext321} = -E_p = E_p\left(-5,\ 5\right) - E_p\left(\infty\right) = E_p\left(-5,\ 5\right) - 0 = E_p\left(-5,\ 5\right) = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}}$$

Por tanto, la energía total será:

$$E = W_{ext21} + W_{ext321} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}} + K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}}$$

Vemos que se obtiene una expresión totalmente simétrica y que es independiente del orden en el que se lleven las cargas. Si colocamos las cargas en otro orden, llegaremos a la misma expresión.

Vamos a cálcular los módulos de los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{12} = (15,\ 0) - (0,\ 0) = (15,\ 0)\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_{13} = (-5,\ 5) - (0,\ 0) = (-5,\ 5)\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_{23} = (-5,\ 5) - (15,\ 0) = (-20,\ 5)\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_{12} = 15\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_{13} = \sqrt{\left(-5\right)^2 + 5^2} \approx 7{,}071\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_{23} = \sqrt{\left(-20\right)^2 + 5^2} \approx 20{,}616\ \text{cm}$$

Por tanto:

$$E = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-10^{-6}\right)}{15 \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6} \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{7{,}071 \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(-10^{-6}\right) \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{20{,}616 \cdot 10^{-2}}$$

$$E \approx -0{,}30 + 4{,}45 - 0{,}31 = 3{,}84\ \text{J}$$

28 **Una carga q = 12 μC está colocada en A = (8, 8) cm.**

a) ¿Qué trabajo externo habrá que realizar sobre una carga q' = −4 μC para llevarla desde el infinito hasta el punto P = (0, −4) cm, dejándola en reposo?

b) Si q' se hubiera desplazado sin la acción de la fuerza externa, ¿llegaría al punto P en las mismas condiciones que con la fuerza externa anterior?

a) No hay incremento de energía cinética, luego el trabajo total es cero. En consecuencia:

$$W_{ext} = -W_C = -\left(-\Delta E_p\right) = \Delta E_p = E_p\left(r_P\right) - E_p\left(\infty\right) = E_p\left(r_P\right) - 0 = E_p\left(r_P\right) = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{AP}}$$

La distancia entre cargas es:

$$\vec{r}_{AP} = (0, -4) - (8, 8) = (-8, -12) \text{ cm}$$

Por tanto:

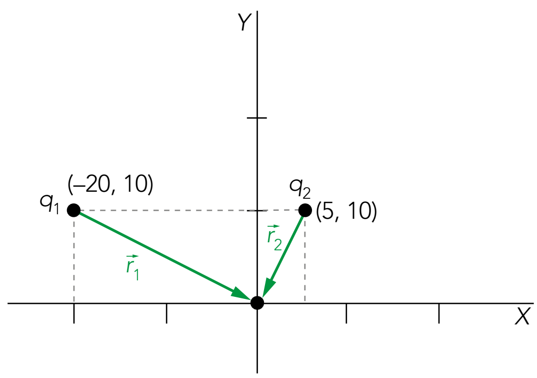
$$W_{ext} = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{AP}} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-4\right) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{\left(-8\right)^2 + \left(-12\right)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -3{,}0 \text{ J}$$

Es un trabajo negativo, luego la fuerza externa se opone al movimiento «natural» de la carga.

b) Si no hubiese una fuerza externa, la carga podría haber realizado el mismo desplazamiento gracias al campo, pero, al no haber una fuerza externa que frene la carga (mediante su trabajo negativo), la carga q' llegaría con 3,0 J de energía cinética.

29 **Una carga q_1 = 10 mC está en (−20, 10) cm y q_2 en (5, 10) cm. Determina qué energía sería necesaria para colocar una carga q' = −2 mC en (0, 0). Interpreta el resultado.**

La situación es:



Se ha estudiado en la unidad que la energía necesaria para tomar la carga q' y colocarla en reposo en (0, 0) es precisamente la energía potencial que va a tener dicha carga en este punto.

$$W_{ext} = E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2}$$

Los vectores $\vec{r}$ son:

$$\vec{r}_1 = (0, 0) - (-20, 10) = (20, -10) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (0, 0) - (5, 10) = (-5, -10) \text{ cm}$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$W_{ext} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot \left(-2\right) \cdot 10^{-3}}{\sqrt{20^2 + \left(-10\right)^2} \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(-5\right) \cdot 10^{-3} \cdot \left(-2\right) \cdot 10^{-3}}{\sqrt{\left(-5\right)^2 + \left(-10\right)^2} \cdot 10^{-2}} = 0$$

Esto significa que, en el proceso neto, el trabajo realizado es cero; posiblemente, habrá tramos en los que se ha hecho trabajo positivo, y otros, en los que el trabajo habrá sido negativo. Es decir, hay tramos en los que ha habido que empujar a la carga para llevarla, y otros que habrá sido necesario frenarla para que no se acerque descontroladamente, y en el proceso neto, el trabajo es cero.

Página 356

30 Se tiene una carga q = 6 μC en el punto P = (10, 10) cm. Mediante una fuerza externa, se realiza un trabajo a q' = 5 μC, que inicialmente está en reposo en «el infinito», de 3 J, hasta llevarla al punto Q = (1, 2) cm.

a) ¿Qué trabajo ha realizado el campo?

b) ¿Se queda la carga q' en reposo en el punto Q?

a) El trabajo que realiza el campo es:

$$W_C = -\Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(Q) = -E_p(Q) = -K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{PQ}}$$

donde:

$$r_{PQ} = (1,\ 2) - (10,\ 10) = (-9,\ -8)\ \text{cm}$$

Entonces:

$$W_C = -K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{PQ}} = -9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(-9)^2 + (-8)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -2{,}2\ \text{J}$$

b) El trabajo total es:

$$W_T = W_{ext} + W_C = 3 - 2{,}2 = 0{,}8\ \text{J}$$

Por el teorema de las fuerzas vivas, 0,8 J es la energía cinética que ha ganado la carga q'. Luego la carga no queda en reposo.

31 Se tienen dos cargas, q_1 = −139 μC en (−11, −21) cm y q_2 = 860 μC en (10, 1) cm.

a) ¿Qué energía potencial tendrá q' = −9 nC en el punto P = (−2, −1) cm?

b) ¿Qué trabajo realizará el campo si se lleva q' hasta una distancia infinita?

c) ¿Qué trabajo tendría que realizar una fuerza externa si quisiéramos dejar la carga en reposo?

a) Aplicamos el principio de superposición:

$$E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = K_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q'}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2 \cdot q'}{r_2}$$

donde:

$$\vec{r}_1 = (-2, -1) - (-11, -21) = (9, 20)\ \text{cm}$$
$$\vec{r}_2 = (-2, -1) - (10, 1) = (-12, -2)\ \text{cm}$$

Así que:

$$E_p = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-139 \cdot 10^{-6} \cdot (-9) \cdot 10^{-9}}{\sqrt{9^2 + 20^2} \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{860 \cdot 10^{-6} \cdot (-9) \cdot 10^{-9}}{\sqrt{(-12)^2 + (-2)^2} \cdot 10^{-2}} \approx -0{,}52\ \text{J}$$

b) Si la carga q' se lleva a una distancia «infinita», el trabajo que realiza el campo es:

$$W_C = -\Delta E_p = E_p(P) - E_p(\infty) = E_p(P) - 0 = E_p(P) = -0{,}52\ \text{J}$$

El trabajo del campo es negativo, luego el campo está en contra de este desplazamiento. Esto quiere decir que hay una fuerza externa que ha obligado a la carga a realizar este desplazamiento, o que hubo una fuerza externa que la lanzó, proporcionándole una velocidad inicial para que se alejara hasta «el infinito».

c) En este caso, ya sabemos que no hay incremento de energía cinética, por lo que:

$$W_{ext} = -W_C = 0{,}52 \text{ J}$$

32 Una carga q = –50 μC se encuentra en (30, 8) cm.

a) ¿Qué energía mínima será necesaria para mover una carga q' = –5 μC desde (0, 0) hasta (20, 8) cm?

b) ¿Qué trabajo total se realiza?

Resolvemos, en primer lugar, el apartado b), porque se puede hacer de forma directa y nos ayudará en la resolución del apartado a).

b) Un trabajo mínimo externo significa que la carga se deja en reposo. Aunque no lo diga el enunciado, se supone que la carga estaba en reposo; por tanto, mediante el trabajo externo no se incrementa la energía cinética. En este caso, el trabajo total es cero, y el trabajo externo es el opuesto del trabajo del campo.

a) Entonces:

$$W_{ext} = -W_C = -\left(-\Delta E_p\right) = \Delta E_p = E_{p_{final}} - E_{p_{inicial}}$$

En primer lugar, calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{inicial} = (0, 0) - (30, 8) = (-30, -8) \text{ cm}$$

$$\vec{r}_{final} = (20, 8) - (30, 8) = (-10, 0) \text{ cm}$$

Entonces:

$$W_{ext} = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r_{final}} - K_0 \frac{q \cdot q'}{r_{inicial}}$$

$$W_{ext} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-50 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-5\right) \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-2}} - 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-50 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-5\right) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{\left(-30\right)^2 + \left(-8\right)^2} \cdot 10^{-2}} \approx 19{,}3 \text{ J}$$

Potencial electrostático

33 Si una carga q crea un potencial V_0 a una distancia r_0, ¿qué potencial creará otra carga de valor la mitad en un punto a una distancia el doble del caso anterior?

La condición que se cumple en el primer caso es:

$$V_0 = K_0 \cdot \frac{q}{r_0}$$

En el segundo caso, el potencial V' debido a una carga $q' = \frac{q}{2}$ a una distancia $r' = 2 \cdot r_0$ es:

$$V' = K_0 \cdot \frac{q'}{r'}$$

Si relacionamos los datos:

$$V' = K_0 \cdot \frac{\frac{q}{2}}{2 \cdot r_0} = \frac{1}{4} \cdot K_0 \cdot \frac{q}{r_0} = \frac{1}{4} \cdot V_0$$

34 **¿A qué distancia de una carga q > 0 el valor del módulo del campo es numéricamente igual al del potencial?**

Tenemos que imponer la igualdad:

$$E = V \;\rightarrow\; K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = K_0 \cdot \frac{q}{r} \;\rightarrow\; r^2 = r \rightarrow r \cdot (r-1) = 0 \;\rightarrow\; r = 1\,\text{m}$$

Otra solución matemática es $r = 0$, que tenemos que descartar porque para este valor, E y V no están definidos.

35 **Una carga q = 52 mC está en (2, 5) m.**

a) Determina el potencial en el punto (–2, 1) m.

b) ¿Qué energía potencial tendrá una carga de 1 μC en este punto?

a) Calculemos el vector $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (-2, 1) - (2, 5) = (-4, -4)\text{ m}$$

El potencial eléctrico es:

$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{52 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{(-4)^2 + (-4)^2}} \approx 8{,}273 \cdot 10^7\text{ V}$$

b) La relación que tiene la energía potencial con el potencial es:

$$E_p = q' \cdot V = 10^{-6} \cdot 8{,}273 \cdot 10^7 \approx 82{,}7\text{ J}$$

36 **Se tienen dos cargas, q_1 = –140 pC en (–1, –2) cm y q_2 = 590 pC en (0, 1) cm.**

a) ¿Qué potencial producen en el punto P = (2, 0) cm?

b) ¿Qué energía potencial tendrá en este punto una carga de q' = 50 μC?

a) Calculamos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (2, 0) - (-1, -2) = (3, 2)\text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (2, 0) - (0, 1) = (2, -1)\text{ cm}$$

Aplicamos el principio de superposición al potencial eléctrico:

$$V = V_1 + V_2 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2}$$

$$V = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-140 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{590 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot 10^{-2}} \approx 202{,}5\text{ V}$$

b) Utilizamos la relación entre la energía potencial y el potencial:

$$E_p = q' \cdot V = 50 \cdot 10^{-6} \cdot 202{,}5 \approx 0{,}010\text{ J} = 10\text{ mJ}$$

37 **Se dispone de tres cargas eléctricas, q_1 = 5 μC en (–15, 5) cm, q_2 = –8 μC en (8, –12) cm y q_3 = –7 μC en (–1, 10) cm.**

a) Calcula el potencial que crean en el punto (–5, –5) cm.

b) Si una carga q' está en este punto con una energía potencial de –10 J, ¿de qué valor es la carga?

a) Calculemos los vectores $\vec{r}$:

$$\vec{r}_1 = (-5, -5) - (-15, 5) = (10, -10)\text{ cm}$$

$$\vec{r}_2 = (-5, -5) - (8, -12) = (-13, 7)\text{ cm}$$

$$\vec{r}_3 = (-5, -5) - (-1, 10) = (-4, -15)\text{ cm}$$

Aplicamos el principio de superposición al potencial:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = K_0 \cdot \frac{q_1}{r_1} + K_0 \cdot \frac{q_2}{r_2} + K_0 \cdot \frac{q_3}{r_3}$$

$$V = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{10^2 + (-10)^2} \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-8 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(-13)^2 + 7^2} \cdot 10^{-2}} + 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-7 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{(-4)^2 + (-15)^2} \cdot 10^{-2}}$$

$$V \approx -575 \cdot 10^3 \text{ V} = -575 \text{ kV}$$

b) A partir de la relación entre la energía potencial y el potencial:

$$E_p = q' \cdot V \;\rightarrow\; q' = \frac{E_p}{V} = \frac{-10}{-575 \cdot 10^3} = 1{,}74 \cdot 10^{-5} \text{ C} = 17{,}4 \text{ μC}$$

38 El potencial que una carga $q = -50$ pC crea en (1, 2) m es de -5 V. Si la carga está sobre el eje *Y*, ¿en qué punto se encuentra?

La coordenada del punto donde está la carga será (0, *y*). Así, el vector $\vec{r}$ es:

$$\vec{r} = (1, 2) - (0, y) = (1, 2 - y) \text{ cm}$$

Utilizando la expresión del potencial:

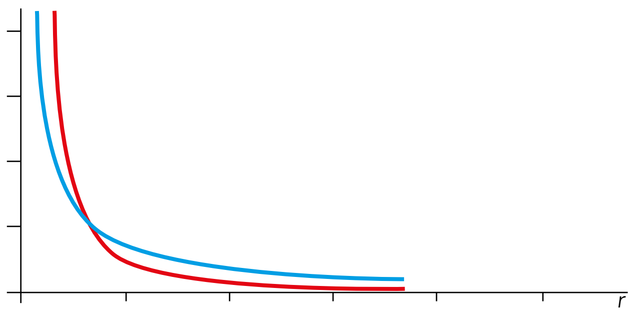
$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} \;\rightarrow\; r = \frac{K_0 \cdot q}{V} = \frac{9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \left(-50 \cdot 10^{-12}\right)}{-5} = 0{,}09 \text{ m} = 9 \text{ cm}$$

Así que:

$$r = \sqrt{1^2 + (2 - y)^2} = 9 \text{ cm} \;\rightarrow\; 1 + 4 + y^2 - 4 \cdot y = 81 \;\rightarrow\; y^2 - 4 \cdot y - 76 = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} y \approx 10{,}9 \text{ cm} \\ y \approx -6{,}9 \text{ cm} \end{cases}$$

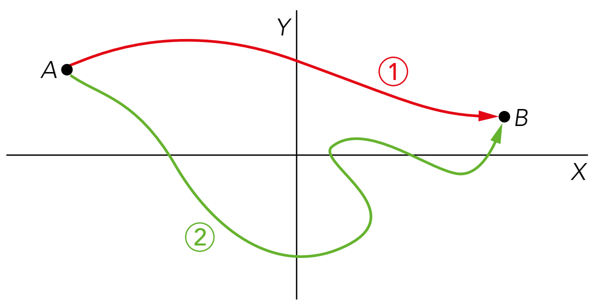
Por tanto, hay dos posibilidades: *q* puede estar en (0; 10,9) cm o en (0; −6,9) cm.

39 En la gráfica se muestran dos curvas, una representa la variación del módulo del campo que crea una carga, y la otra el potencial eléctrico. Justifica cuál es cada una.



La gráfica *roja* decae más rápidamente conforme la distancia se va haciendo mayor. Por tanto, es la función que depende de $1/r^2$. La *azul,* por tanto, es la del potencial, ya que va a cero más lentamente cuando *r* aumenta. Es decir, es la que depende de $1/r$.

40 Una carga *q'* está en reposo en el punto *A* cuyo potencial es de 1 000 V. El campo eléctrico la desplaza, «de manera natural», por la trayectoria 1 hasta *B*, con un potencial de 500 V, realizando un trabajo de 80 J.



a) ¿Qué valor tiene la carga *q'*?

b) ¿Tendrá *q'* energía cinética en el punto *B*?

c) Si mediante fuerzas externas se hubiera obligado a la carga *q'* a ir desde *A* hasta *B* por el camino 2, ¿qué trabajo habría realizado la fuerza eléctrica? ¿Tendría la misma energía cinética en el punto *B* que en el caso anterior?

a) Sabemos que:

$$W_C = -\Delta p = -q' \cdot \Delta V \;\rightarrow\; q' = -\frac{W_C}{\Delta V} = -\frac{80}{500 - 1\,000} = 0{,}16 \text{ C}$$

b) En primer lugar, tendremos en cuenta que no hay más fuerzas que la eléctrica del campo. Esta fuerza realiza trabajo positivo a consta de la energía potencial; por tanto, en el punto *B*, tiene menos energía potencial que en *A*. Puesto que la energía mecánica no cambia (la fuerza eléctrica es conservativa), tenemos que quedará con energía cinética. Aplicamos el teorema de la energía cinética:

$$W_T = \Delta E_c \;\rightarrow\; W_C = E_c \;\rightarrow\; E_c = 80 \text{ J}$$

c) Puesto que la fuerza eléctrica es conservativa, el trabajo no depende de la trayectoria; por tanto, será 80 J.

Sin embargo, no podemos saber la energía cinética que tendrá en el punto *B*, puesto que no sabemos cuánto es el trabajo que ha realizado la fuerza externa.

41 El trabajo mínimo realizado para llevar una carga de 3 mC desde una distancia de 5 cm de una carga fuente *q* hasta el infinito es de 21 J.

a) ¿Qué potencial eléctrico había en la posición inicial?

b) Si el valor del trabajo fuera de 21 J, ¿qué diferencia habría?

a) Como ya se ha explicado en otros ejercicios, en este caso se cumple que:

$$W_{ext} = -W_C = \Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(5 \text{ cm}) = 0 - E_p(5 \text{ cm}) = -q' \cdot V(5 \text{ cm}) = -3 \cdot 10^{-3} \cdot V(5 \text{ cm}) = 21 \text{ J}$$

$$V(5 \text{ cm}) = \frac{21}{-3 \cdot 10^{-3}} = -7\,000 \text{ V}$$

b) Si el trabajo hubiera sido de 23 J, se hubiera dejado en «el infinito» con una energía cinética de 2 J; son necesarios 21 J para llevarla infinitamente lejos, y la energía sobrante quedaría como energía cinética.

$$W_{ext} = \Delta E_m = E_m(\infty) - E_{m_0} = E_c(\infty) + E_p(\infty) - E_{c_0} - E_{p_0} = E_c(\infty) + 0 - 0 - q' \cdot V_0 = E_c(\infty) - q' \cdot V_0$$

$$23 = E_c(\infty) - 3 \cdot 10^{-3} \cdot (-7\,000) \;\rightarrow\; 23 = E_c(\infty) + 21 \;\rightarrow\; E_c(\infty) = 23 - 21 = 2 \text{ J}$$

42 Una carga *q'*, en reposo, a una distancia de 60 cm de una carga fuente de 22 mC experimenta una repulsión con una aceleración de 200 m/s².

a) Determina el valor de la carga de *q'* si sabemos que su masa es de 50 g.

b) ¿Con qué velocidad llegará al infinito?

a) Mediante la segunda ley de Newton determinamos la fuerza que experimenta la carga testigo:

$$F = m \cdot a = 50 \cdot 10^{-3} \cdot 200 = 10 \text{ N}$$

Ahora, utilizamos la ley de Coulomb:

$$F = K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r^2} \;\rightarrow\; q' = \frac{F \cdot r^2}{K_0 \cdot q} = \frac{10 \cdot (60 \cdot 10^{-2})^2}{9 \cdot 10^9 \cdot 22 \cdot 10^{-3}} \approx 1{,}82 \cdot 10^{-8} = 18{,}2 \text{ nC}$$

b) Puesto que la carga se irá «al infinito» debido a la fuerza eléctrica repulsiva, que es conservativa, la energía mecánica inicial será igual a la final.

$$E_{m_0} = E_{m_\infty} \to E_{p_0} = E_{c_\infty} \to K_0 \cdot \frac{q \cdot q'}{r} = \frac{1}{2}\,\mathrm{m} \cdot v_\infty^2 \to v_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot K_0 \cdot q \cdot q'}{r \cdot m}}$$

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 22 \cdot 10^{-3} \cdot 18{,}2 \cdot 10^{-9}}{60 \cdot 10^{-2} \cdot 50 \cdot 10^{-3}}} \approx 15{,}5 \text{ m/s}$$

Página 357

43 La función matemática que describe cómo cambia el potencial en el vacío de una carga *q* con la distancia es:

$$V(r) = -\frac{1{,}8 \cdot 10^5}{r}$$

a) ¿Cuál es el valor de la carga *q*?

b) Calcula el valor del campo eléctrico a 50 cm de la carga *q*.

c) Encuentra la relación que existe entre *V* y *E*.

a) Comparamos esta expresión con la del potencial que hemos estudiado en la unidad:

$$V(r) = K_0 \cdot \frac{q}{r} = -\frac{1{,}8 \cdot 10^5}{r} \to K_0 \cdot q = -1{,}8 \cdot 10^5 \to q = \frac{-1{,}8 \cdot 10^5}{9{,}0 \cdot 10^9} = -2 \cdot 10^{-5} \text{ C} = -20\ \mu\text{C}$$

b) El valor del campo es:

$$E(r) = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{-2 \cdot 10^{-5}}{0{,}50^2} = -7{,}2 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

c) La relación entre *V* y *E* es:

$$E(r) = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = \frac{K_0 \cdot \frac{q}{r}}{r} = \frac{V(r)}{r}$$

44 A una cierta distancia de una carga *q*, el valor del campo es 432 N/C, mientras que el potencial es 108 V. Encuentra el valor de la carga y la distancia a la que se están midiendo estos valores.

Utilizamos la relación que hemos encontrado en el ejercicio anterior entre el valor del campo y el potencial:

$$E = \frac{V}{r} \to r = \frac{V}{E} = \frac{108}{432} = 0{,}25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

Y ahora, con la expresión del potencial, determinamos el valor de la carga:

$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} \to q = \frac{r \cdot V}{K_0} = \frac{0{,}25 \cdot 108}{9{,}0 \cdot 10^9} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 3 \text{ nC}$$

45 Una bolita de 5 g de masa y con una carga de 2 mC, que inicialmente estaba en reposo en el infinito, donde el potencial es cero, se lleva, mediante la acción de una fuerza externa, hasta el punto *P*, cuyo potencial es de 2 500 V, quedando con una velocidad de 100 m/s. Determina el trabajo que ha realizado la fuerza externa.

La energía potencial que tendrá la bolita en el punto *P* será:

$$E_p = q \cdot V = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2\,500 = 5 \text{ J}$$

Luego, según se ha estudiado en la unidad, el trabajo realizado por una fuerza externa para llevar la carga en reposo en el infinito hasta un cierto punto, dejándola nuevamente en reposo es, precisamente, el valor de la energía potencial que adquiere la carga en dicho punto.

En consecuencia, si el trabajo externo fuese de 5 J, se dejaría la carga en el punto *P* en reposo. Si no queremos que se quede en reposo, sino que se mueva a una cierta velocidad, habrá que proporcionar a la carga la energía cinética necesaria:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 100^2 = 25 \text{ J}$$

En consecuencia, el trabajo externo necesario será:

$$W_{ext} = E_p + E_c = 5 + 25 = 30 \text{ J}$$

46 **Se puede demostrar que las expresiones matemáticas utilizadas para calcular el campo y el potencial de una esfera uniformemente cargada en su exterior son exactamente las mismas que las que se utilizan cuando la carga total está colocada en el centro de la esfera. Calcula el campo y el potencial de una esfera de 10 cm de radio a 5 cm de su superficie, sabiendo que la densidad de carga es de 0,6 nC/cm³.**

Nota: la densidad de carga expresa la cantidad de carga por unidad de longitud, superficie o volumen. En nuestro caso, por ser una esfera, será por unidad de volumen. Su expresión matemática es:

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

El volumen de la esfera es:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 \approx 4\,188{,}8 \text{ cm}^3$$

La carga almacenada en el volumen de la esfera es:

$$q = 0{,}6 \text{ nC/cm}^3 \cdot 4\,188{,}8 \text{ cm}^3 \approx 2\,513 \text{ nC} \approx 2{,}5\ \mu\text{C}$$

Tenemos que ver cuánto es el valor del campo y del potencial a 15 cm del centro de la esfera. Si esta carga la consideramos concentrada en el centro de la esfera, entonces, $r = 15$ cm.

$$E = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6}}{\left(15 \cdot 10^{-2}\right)^2} = 10^6 \text{ N/C}$$

$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-2}} = 10^6 = 1{,}50 \cdot 10^5 \text{ V} = 150 \text{ kV}$$

47 **El campo eléctrico más grande que puede aguantar el aire antes de producir una descarga es del orden de 3 · 10⁶ N/C.**

a) ¿Cuánto podría cargarse, como máximo, la esfera metálica del ejercicio anterior?

b) ¿A qué potencial eléctrico quedaría el aire que está tocando la esfera?

a) Vamos a suponer que la esfera adquiere una carga tal que, en la misma superficie de ella, el campo ya toma el valor máximo posible que admite el aire ($3 \cdot 10^6$ N/C).

Vamos a utilizar la constante del vacío que es prácticamente igual a la del aire.

Por tanto:

$$E_{máx} = K_0 \cdot \frac{q}{r^2} \rightarrow q = \frac{E_{máx} \cdot r^2}{K_0} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot \left(10 \cdot 10^{-2}\right)^2}{9{,}0 \cdot 10^9} \approx 3{,}3 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 3{,}3\ \mu\text{C}$$

b) El potencial eléctrico será:

$$V = K_0 \cdot \frac{q}{r} = 9{,}0 \cdot 10^9 \cdot \frac{3{,}3 \cdot 10^{-6}}{10 \cdot 10^{-2}} \approx 2{,}97 \cdot 10^5 \text{ V} = 297 \text{ kV}$$