11 Fuerzas y movimiento

En contexto (Pág. 275)

a. Respuesta sugerida:

— «Newton unifica el cielo y la Tierra» o bien, como plantea Ramón Núñez en su artículo de la revista *Muy Interesante* (4/01/2010), «Isaac Newton: así en la Tierra como en el cielo». El titular debe poner énfasis en la universalidad de las leyes de Newton que logran explicar dos mundos, el de la tierra y el del cielo, que hasta entonces habían sido concebidos uno aparte del otro y gobernados por leyes distintas.

— Para escoger el mejor titular, además de cumplir con el contenido esencial expuesto en el apartado anterior, deben tenerse en cuenta criterios periodísticos. Un titular, además de ser conciso, tiene que llamar la atención, y para cumplir estos requisitos puede permitirse ciertas licencias gramaticales. Por ejemplo, en el caso de «Isaac Newton: así en la Tierra como en el cielo», el titular carece de verbo.

— Es preciso comparar el titular inicialmente escrito con el definitivo para darse cuenta de si ha habido un cambio en la forma de ver la revolución newtoniana.

b. Respuesta sugerida:

No podríamos andar ni correr como demuestra nuestra experiencia más cercana a rozamiento cero. Si pensamos en superficies muy pulidas como, por ejemplo, el hielo, sabemos que cuando se intenta andar o correr sobre ellas, resbalamos, de modo que no conseguimos apenas desplazarnos (además del peligro de caernos). La única forma de desplazarnos efectivamente sobre esas superficies se basa en el rozamiento.

— Puedes consultar enlaces como estos:

http://www.taringa.net/posts/imagenes/6308786/Las-super-zapatillas-de-Usain-Bolt.html. http://elpais.com/diario/2009/08/24/deportes/1251064804_850215.html

Las preguntas pueden hacer referencia tanto a la forma, a los materiales, como, sobre todo, a la presencia de clavos en las zapatillas y el hecho de que en algunas sean removibles.

c. Respuesta sugerida:

— La Luna cae constantemente, pero con una velocidad tal que sigue la curvatura de la Tierra, de modo que nunca llega a chocar con ella. En la unidad anterior, vimos que la fuerza que actúa sobre la Luna es debida al campo gravitatorio de la Tierra y que este campo es central. Por lo tanto, la fuerza gravitatoria apunta directamente hacia el centro de la Tierra.

— Para comprender la explicación anterior, Newton expuso el símil del proyectil disparado desde lo alto de un monte. Cuanta más velocidad se le imprima al proyectil tanto más lejos llegará, hasta que habrá un momento en el que no encontrará «suelo» en el que caer debido a que describirá la circunferencia de la Tierra. En cuanto a la relación con el tema anterior, es preciso que las preguntas de los alumnos hallen su respuesta en el transcurso de la unidad.

Problemas resueltos (Págs. 289 a 292)

1. Datos: $m_1 = 2$ kg; $\vec{v}_1 = 5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $m_2 = 3$ kg; $\vec{v}_2 = 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Si tomamos el sistema de las dos cajas, en el choque no interviene ninguna fuerza externa, por lo que se cumple la conservación del momento lineal.

— Calculamos el momento lineal inicial:

$$\vec{p}_0 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = 2\ \text{kg} \cdot 5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 3\ \text{kg} \cdot 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\vec{p}_0 = 4\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Expresamos el momento lineal final teniendo en cuenta que las velocidades de los dos cuerpos van a ser una única $\vec{v}_f$, ya que se mantienen unidos tras el choque:

$$\vec{p}_f = m_1 \cdot \vec{v}_{1f} + m_2 \cdot \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_f = 5\ \text{kg} \cdot \vec{v}_f$$

— Aplicamos la conservación del momento lineal:

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \Rightarrow 4\ \cancel{\text{kg}}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 5\ \cancel{\text{kg}} \cdot \vec{v}_f \Rightarrow \vec{v}_f = 0{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Avanzan con 0,8 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ hacia la derecha. La velocidad es mucho menor que cualquiera de las iniciales, ya que estas eran opuestas y además ahora los cuerpos van juntos, por lo que a una mayor masa le corresponde menos velocidad para mantener el balance de momento lineal.

2. Datos: $m_b = 20$ kg; $\vec{v}_b = 110\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 110\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $m_c = 890$ kg

Si consideramos el sistema cañón-bala, no actúan fuerzas externas, por lo que el momento lineal debe conservarse. Por otro lado, debemos tener presente que la masa del cañón es 890 kg, ya que los otros 20 kg provienen de la bala u obús.

— Como los dos cuerpos al inicio están en reposo, el momento lineal inicial del sistema es cero.

— Por otro lado, en el momento del disparo ambos cuerpos adquieren una velocidad, pero, por la conservación del momento lineal, la suma vectorial de sus momentos deberá ser 0.

$$\vec{p}_f = \vec{p}_0 \Rightarrow \vec{p}_f = 0 \Rightarrow m_b\vec{v}_b + m_c\vec{v}_c = 0 \Rightarrow \vec{v}_c = \frac{-m_b\vec{v}_b}{m_c}$$

$$\vec{v}_c = \frac{-m_b\vec{v}_b}{m_c} = \frac{-20\ \cancel{\text{kg}} \cdot 110\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{890\ \cancel{\text{kg}}} = -2{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

El cañón adquirirá una velocidad de 2,5 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en sentido opuesto a la velocidad de la bala.

Esto ya podía avanzarse, dado que para lograr un momento lineal total cero, las velocidades de los cuerpos deben tener sentidos contrarios. Por otro lado, al tener el cañón una masa mucho mayor que la del obús, su velocidad debe disminuir en la misma proporción.

3. Datos: $\vec{v}_0 = 2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\Delta x = 1{,}4\,\mathrm{m}$

— Para encontrar el coeficiente de rozamiento cinético, tendremos que hallar la fuerza de fricción. La fuerza de fricción es la única que actúa sobre el cubo de fregar, por lo que aplicando la segunda ley de Newton podremos hallar su valor.

— Para aplicar la segunda ley de Newton, previamente tendremos que determinar la desaceleración que ha sufrido el cubo. Tomando la siguiente ecuación de cinemática para movimientos rectilíneos uniformemente acelerados, hallamos a.

$$\vec{v}_f^{\,2} = \vec{v}_0^{\,2} + 2 \cdot a \cdot \Delta x$$

$$a = \frac{\vec{v}_f^{\,2} - \vec{v}_0^{\,2}}{2 \cdot \Delta x} = \frac{0 - (2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2}{2 \cdot 1{,}4\ \mathrm{m}} = -2{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

— Aplicamos la segunda ley de Newton en la horizontal, pues el rozamiento es la única fuerza que actúa sobre el cuerpo en esa dirección.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m\vec{a} \ \text{ si } \ F_r = \mu N \Rightarrow -\mu N = ma \ (1)$$

— Para determinar la fuerza normal, tendremos que acudir a la segunda ley de Newton nuevamente, pero esta vez en el eje de ordenadas.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = m\vec{a} \ \rightarrow \vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = m\,g \ (2)$$

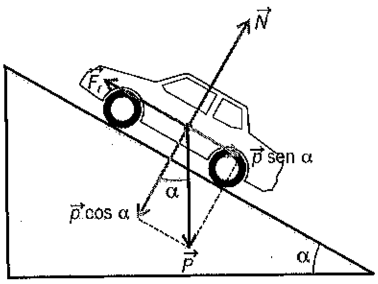
— Si juntamos las expresiones (1) y (2) tenemos que:

$$-\mu \cancel{m} g = \cancel{m} a \Rightarrow \mu = \frac{-a}{g} = \frac{-(-2{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})}{9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}} = 0{,}2$$

Como vemos, el resultado no depende de la masa del cubo.

4. Datos: $\mu = 0{,}08$

Para que el coche descienda con velocidad constante, la componente del peso paralela al plano y la fuerza de fricción deben cancelarse.



— Aplicamos la segunda ley de Newton en ambos ejes (eje x paralelo al plano, y eje y perpendicular a él).

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = m\vec{a} \ \rightarrow \vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0$$

$$N - P \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow N = m\,g\cos\alpha \ (1)$$

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m\vec{a} \ \rightarrow \vec{F}_{\text{neta}\,x} = 0$$

$$P \cdot \operatorname{sen}\alpha - F_r = 0 \Rightarrow \text{si } \ \mu \cdot N = m\,g\operatorname{sen}\alpha \ (2)$$

— Si juntamos las expresiones (1) y (2), tenemos que:

$$\mu \cancel{m g} \cos\alpha = \cancel{m g} \operatorname{sen}\alpha$$

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc\,tg} 0{,}08 = 4{,}6°$$

— Como vemos, no depende de la masa del coche. Observamos también como en este problema el valor de la fuerza normal no coincide con el peso, sino con su componente vertical.

5. Datos: $m_1 = 5\,m_2$

— Aplicamos la segunda ley de Newton al sistema de dos masas que constituye la máquina de Atwood, tomando como eje X el eje del movimiento (en este caso, será un eje «torcido» con sentido positivo en el sentido del movimiento).

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m_{\text{total}} \cdot \vec{a} \Rightarrow P_1 - \cancel{T} + \cancel{T} - P_2 = (m_1 + m_2) \cdot a$$

— Despejando la aceleración, tenemos:

$$a = \frac{P_1 - P_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g = \frac{5m_2 - m_2}{5m_2 + m_2}\,g = \frac{4\cancel{m_2}}{6\cancel{m_2}}\,g$$

$$a = 6{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

La aceleración debe ser más pequeña que la de la gravedad, dado que hay un pequeño contrapeso que es la masa 2. Si tratamos de resolver el problema como en el problema resuelto correspondiente, es decir, aplicando la segunda ley de Newton a cada masa, obtendremos exactamente el mismo resultado.

6. Datos: $m_1 = 7$ kg; $m_2 = 5$ kg

La masa de 7 kg empieza a moverse debido a que la tensión de la cuerda que tira de ella justamente supera la fuerza de rozamiento estática máxima.

— La tensión de la cuerda tiene su origen en el peso colgante. En el límite en el que el sistema se empieza a mover, la aceleración sigue siendo 0. Entonces, si planteamos la segunda ley de Newton para la m_2, podremos hallar la tensión.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m_2 \cdot \vec{a} \rightarrow P_2 - T = 0 \Rightarrow T = P_2 = m_2 \cdot g \ (1)$$

— La condición de que el sistema se empiece a mover se plasma en la ecuación de la masa m_1 cuando expresamos la fuerza de rozamiento estática con la fórmula de su valor máximo.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m_1 \cdot \vec{a} \rightarrow T - F_{re} = 0 \Rightarrow T - \mu_e N = 0 \ (2)$$

— Para determinar N, planteamos la segunda ley de Newton en la vertical de m_1.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = m_1 \cdot \vec{a} \rightarrow N - P_1 = 0 \Rightarrow N = m_1 \cdot g \ (3)$$

— Sustituyendo sucesivamente (3) en (2) y (2) en (1), tenemos la siguiente expresión:

$$\mu_e \cdot m_1 \cancel{g} = m_2 \cancel{g} \ \rightarrow \mu_e = \frac{m_2}{m_1} = \frac{5\,\cancel{\mathrm{kg}}}{7\,\cancel{\mathrm{kg}}} = 0{,}7$$

7. Datos: $m = 3$ kg; $a = 4$ m·s^{-2} (hacia la izquierda); $k = 400$ N·m^{-1}

— Si tiramos del muelle hacia la derecha, la aceleración será hacia la izquierda (negativa), ya que la fuerza de un muelle, según la ley de Hooke, siempre se opone al desplazamiento de este.

— Aplicamos la ley de Hooke, ya que nos da la expresión de la fuerza de un muelle en función del alargamiento, y luego podemos resolver aplicando la segunda ley de Newton.

$$\vec{F}_{\text{Hooke}} = -k \cdot \Delta x$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow -k \cdot \Delta x = m \cdot \vec{a}$$

$$\Delta x = \frac{m \cdot \vec{a}}{-k} = \frac{3\,\cancel{kg} \cdot (-4\,\cancel{m \cdot s^{-2}})}{-400\,\cancel{N} \cdot m^{-1}} = 0{,}03\,\text{m}$$

— El alargamiento será de 3 cm. Observamos que si el resultado nos hubiera dado negativo, se habría tratado de una compresión y no de un alargamiento.

8. Datos: $m = 2{,}0$ kg; a) $v =$ constante; b) $a = 1{,}0$ m·s^{-2}

La fuerza que señala el dinamómetro es la tensión que se opone al peso del cuerpo de 2,0 kg. Si aplicamos la segunda ley de Newton, podemos comprobar que la aceleración que lleve el sistema (que será la del ascensor) modificará ese valor.

a) Velocidad constante implica que la aceleración es cero.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot \vec{a} \rightarrow T - P = 0 \Rightarrow T = P$$

$$T = m \cdot g = 2{,}0\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m·s}^{-2} = 20\,\text{N}$$

b) Como la aceleración es hacia arriba, según nuestro sistema de referencia tendrá signo positivo. Planteamos nuevamente la segunda ley de Newton.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot \vec{a} \rightarrow T - P = m \cdot \vec{a} \Rightarrow T = m \cdot g + m \cdot \vec{a}$$

$$T = 2{,}0\,\text{kg} \cdot (9{,}8 + 1{,}0)\,\text{m·s}^{-2} = 22\,\text{N}$$

Observamos que si el ascensor acelera hacia arriba el dinamómetro marca un peso mayor, del mismo modo en que nosotros notamos «una fuerza» hacia abajo cuando el ascensor sube acelerando.

9. Datos: $m = 25$ kg; $T = 1{,}5$ s; $r = 0{,}75$ m

El problema plantea un movimiento circular con un periodo de 1,5 s. Por lo tanto, se trata de un movimiento circular uniforme (es el único en el que se puede definir un periodo). La dinámica determina que la causa de todo movimiento circular uniforme es una fuerza neta central (hacia el centro del círculo) y que la aceleración debida a esta fuerza es únicamente la aceleración normal.

— Partimos de la segunda ley de Newton y, como tanto la fuerza como la aceleración tienen la misma dirección y sentido, podemos obviar el carácter vectorial. Finalmente, usamos la fórmula de la aceleración normal.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow F = m \cdot a_n \Rightarrow F = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

— Para encontrar la velocidad angular, aplicamos la fórmula que la define: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y sustituimos en la expresión de la fuerza.

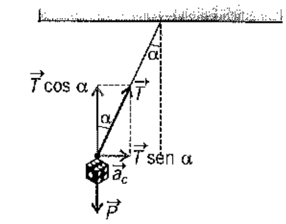
$$F = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = 25\,\text{kg} \cdot \left(\frac{2\pi}{1{,}5\,\text{s}}\right)^2 \cdot 0{,}75\,\text{m}$$

$$F = 329\,\text{N}$$

Entonces, debe hacer una fuerza de 329 N hacia él. Según la expresión hallada, la fuerza es directamente proporcional al radio e inversamente proporcional al cuadrado del periodo. Esto último implica que cuanto más lentas sean las vueltas menor es la fuerza necesaria, lo cual está de acuerdo con nuestra experiencia.

10. Datos: $\alpha = 5°$; $v = 72$ km·h^{-1} = 20 m·s^{-1}

Al tomar una curva, el coche está cambiando la dirección de su velocidad (aunque su módulo se mantenga a 72 kmh^{-1}), por lo que existe una aceleración normal que también afecta a todos los objetos que se mueven con el coche (incluido el objeto colgante).



— Planteamos en ambos ejes la segunda ley de Newton.

$$F_{\text{neta}\,x} = m \cdot a \rightarrow T \operatorname{sen}\alpha = m \cdot a_n$$

$$F_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow T \cos\alpha - m\,g = 0 \rightarrow T \cos\alpha = m\,g$$

— Si dividimos una ecuación por la otra y sustituimos a_n por su expresión en función de v:

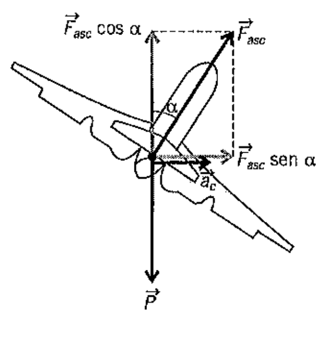
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{g} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{r \cdot g}$$

$$r = \frac{v^2}{g \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{(20\,\text{m·s}^{-1})^2}{9{,}8\,\text{m·s}^{-2} \cdot \operatorname{tg} 5°} = 4{,}7 \cdot 10^2\,\text{m}$$

Cuanto mayor sea el radio, tanto más pequeña será la aceleración necesaria para girar y, por lo tanto, el ángulo también será más pequeño.

11. Datos: $\alpha = 40°$; $v = 480$ km·h^{-1} = 133,3 m·s^{-1}

Tomaremos como eje x la dirección de la aceleración centrípeta y como eje y, la del peso. Para ello, tendremos que descomponer la fuerza ascensional, $\vec{F}_{asc}$, tal y como se ve en la figura. Entonces, la aceleración centrípeta vendrá suministrada por la componente $\vec{F}_{asc}$ cos(α).



— Aplicamos el equilibrio de fuerzas en el eje y para hallar la fuerza ascensional en función del peso y luego planteamos la segunda ley de Newton en el eje x.

$$\vec{F}_{\text{neta } y} = 0 \rightarrow F_{asc} \cos\alpha - P = 0 \rightarrow F_{asc} = \frac{P}{\cos\alpha} \quad (1)$$

$$\vec{F}_{\text{neta } y} = m \cdot \vec{a} \rightarrow F_{asc} \operatorname{sen}\alpha = m \cdot a_c \quad (2)$$

— Sustituimos (1) en (2) y expresamos la aceleración centrípeta en función de v.

$$\frac{\cancel{m}\, g}{\cos\alpha} \operatorname{sen}\alpha = \cancel{m} \cdot a_c \rightarrow g \operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{r}$$

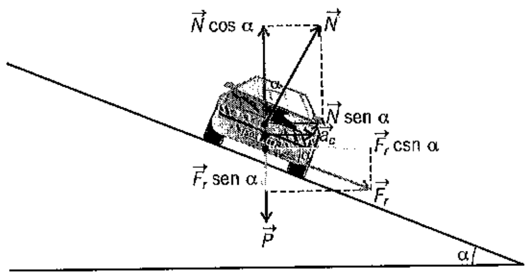
— Despejamos el radio y sustituimos los valores.

$$r = \frac{v^2}{g \operatorname{tg}\alpha} = \frac{(133,\hat{3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\ \operatorname{tg} 40°} = 2,2 \cdot 10^3\ \text{m}$$

El radio de su trayectoria será de $2,2 \cdot 10^3$ m. Para aumentar dicho radio, basta con incrementar la velocidad del avión y/o disminuir la inclinación de sus alas.

12. Datos: $r = 230$ m; $\mu = 0,28$; $v = 120\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 33,3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

— Como podemos ver en el diagrama de fuerzas, para que el vehículo no se salga de la curva, la componente del rozamiento $\vec{F}_r \cos(\alpha)$ y la componente de la fuerza normal $N \operatorname{sen}(\alpha)$ deben poder suministrar la aceleración centrípeta necesaria al vehículo.



— Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje x.

$$\vec{F}_{\text{neta } x} = m \cdot \vec{a} \rightarrow N \operatorname{sen}\alpha + F_r \cos\alpha = m \cdot a_c$$

$$N \operatorname{sen}\alpha + \mu N \cos\alpha = m \cdot a_c \quad (1)$$

— Dado que tenemos dos incógnitas, N y a_c, plantearemos el equilibrio de fuerzas en el eje y.

$$\vec{F}_{\text{neta } y} = 0 \rightarrow N \cos\alpha - F_r \operatorname{sen}\alpha - P = 0$$

$$N \cos\alpha - \mu N \operatorname{sen}\alpha = m\, g \quad (2)$$

— Podemos despejar en ambas ecuaciones la fuerza normal o, sencillamente, dividir (1) por (2) y llegaremos a la siguiente expresión:

$$\frac{\cancel{N}(\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cancel{N}(\cos\alpha - \mu \operatorname{sen}\alpha)} = \frac{\cancel{m}\, a_c}{\cancel{m}\, g}$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha = \frac{v^2}{rg}(\cos\alpha - \mu \operatorname{sen}\alpha)$$

— Una vez expresada la aceleración centrípeta en función de la velocidad del vehículo, para despejar el ángulo, previamente dividiremos ambos miembros de la ecuación por el $\cos\alpha$, para así despejar sencillamente la tangente.

$$\operatorname{tg}\alpha + \mu = \frac{v^2}{rg}(1 - \mu \operatorname{tg}\alpha) \rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \mu\frac{v^2}{rg}\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{rg} - \mu$$

— Despejando α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{v^2}{r} - \mu g}{g - \mu\dfrac{v^2}{r}} = \frac{\dfrac{(33,\hat{3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{230\ \text{m}} - 0,28 \cdot 9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} - 0,28 \cdot \dfrac{(33,\hat{3}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{230\ \text{m}}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 0,25 \rightarrow \alpha = 14°$$

Podemos ver que si el ángulo es inferior a 14°, la tangente y el seno disminuirán y el coseno aumentará, por lo que si tomamos la ecuación (1):

$$N \operatorname{sen}\alpha + \mu N \cos\alpha = m \cdot a_c$$

Vemos que la aportación de N disminuirá y aunque la de μN aumente, como $0 < \mu < 1$, el balance global será que no se podrá suministrar la aceleración centrípeta necesaria y el vehículo se saldrá de la pista.

13. Datos: $m = 3,0$ kg; $v = 4,0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $r = 5,0$ m; $\alpha = 90°$

El valor del momento angular de una partícula que gira con respecto a un punto O depende de la distancia entre dicho punto y la masa, de la propia masa, de su velocidad y del ángulo que forman el vector de posición y el vector velocidad, que en este caso es de 90° respecto a lo indicado en el enunciado.

$$L = r\, m\, v \operatorname{sen}\alpha = 5,0\ \text{m} \cdot 3,0\ \text{kg} \cdot 4,0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \operatorname{sen} 90°$$

$$L = 60\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

Hay que recordar que el momento angular es un vector cuya dirección es perpendicular al plano formado por el vector posición y por el vector velocidad.

14. Si una partícula recorre una trayectoria circular, la magnitud asociada a su giro es el momento angular; el valor de esta magnitud depende de la distancia entre el centro de giro (que en este caso será el centro de la circunferencia), del momento lineal de la partícula y del ángulo que forman el vector de posición y el vector de velocidad, que en este caso es de 90° por tratarse de un movimiento circular:

$$L = r\, m\, v \operatorname{sen}\alpha = R\, p \operatorname{sen} 90° = R\, p$$

a) Si se duplica el momento lineal, el valor del momento angular se hará el doble.

b) Si se duplica el radio de la circunferencia sin variar la velocidad lineal, el valor del momento angular se hará el doble.

15. Datos: $m = 3,0$ kg; $R = 0,1$ m; $F = 15$ N

— El momento de fuerza es la magnitud responsable del giro del cilindro; su valor depende de la fuerza ejercida, de la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza y el eje de giro (que en este caso coincide con el radio del cilindro) y del ángulo que forman la fuerza y la posición del punto de aplicación de la fuerza con respecto al eje de giro (que en este caso es de 90°, al ser la fuerza aplicada perpendicular al vector de posición del punto de aplicación con respecto al eje de giro).

$$M = r\, F \operatorname{sen}\alpha = R\, F \operatorname{sen} 90° = 0,1\ \text{m} \cdot 15\ \text{N} = 1,5\ \text{N}\cdot\text{m}$$

— Debido al momento de fuerza ejercido, el cilindro comenzará a girar con MCUA; su velocidad angular se calculará de la siguiente manera:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Siendo $\omega_0 = 0$ la velocidad angular inicial, calculamos la aceleración angular teniendo en cuenta la relación entre el momento de fuerza y la aceleración angular.

$$M = mR^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M}{mR^2} = \frac{1{,}5\ \text{N}\cdot\text{m}}{3\ \text{kg}\cdot(0{,}1\ \text{m})^2} = 50\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

Finalmente, la velocidad angular del cilindro será:

$$\omega = \alpha \cdot t = 50\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 4\ \text{s} = 2{,}0 \cdot 10^2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

16. Debemos calcular en primer lugar la aceleración angular con la que el aro gira mientras cae, y a continuación hallar, a partir de ella, la aceleración de caída.

— Hallamos la aceleración angular teniendo en cuenta la relación entre el momento de fuerza y la aceleración angular.

$$M = m\,R^2 \Rightarrow \alpha = \frac{M}{m\,R^2} = \frac{\cancel{m}\,g\,\cancel{R}}{\cancel{m}\,R^{\cancel{2}}} = \frac{g}{R}$$

De este resultado, deducimos que $a = \alpha \cdot R = g$.

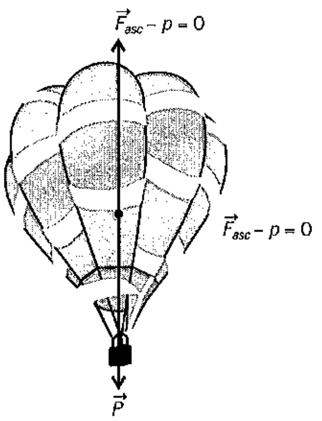
Ejercicios y problemas (Págs. 293 a 296)

1 LEYES DE LA DINÁMICA Págs. 293 y 294

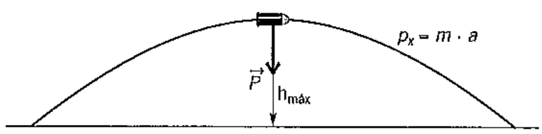
17. En el momento de soltar la piedra, siguen actuando fuerzas sobre ella. La más evidente es la fuerza de la gravedad, pero también actúa el rozamiento de la piedra con el aire.

18.

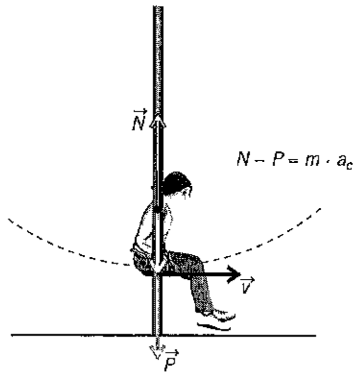
a)



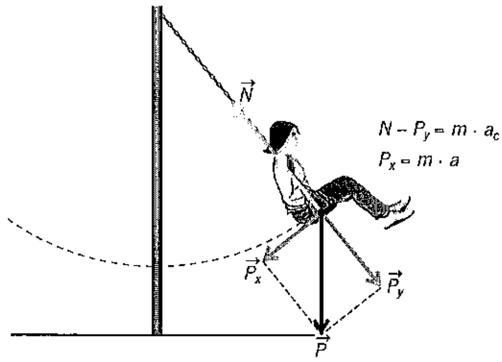
b)



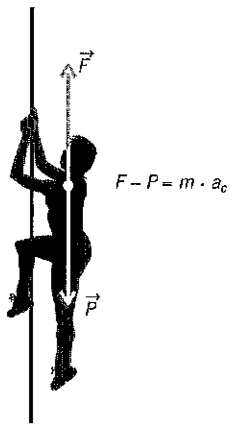
c)



d)



e)



19. Datos: $m = 85$ kg; $v_f = 36\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $t_f = 3$ s

— Determinamos la aceleración a partir de su definición y luego aplicamos la segunda ley de Newton.

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{t_f - t_0} = \frac{10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{3\ \text{s} - 0\ \text{s}} = 3{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow F = 85\ \text{kg} \cdot 3{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 283\ \text{N}$$

Es necesaria una fuerza de 283 N en la dirección y el sentido de la aceleración.

20. Para poder ascender por la cuerda, hay que aplicar una fuerza hacia abajo de forma que, por la ley de acción-reacción, la misma fuerza sea aplicada sobre nosotros hacia arriba permitiéndonos trepar por la cuerda.

21. Para poder detenernos bruscamente, es decir, pasar de cierta velocidad a velocidad 0 en un intervalo de tiempo nulo, la desaceleración tendría que ser infinita.

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{t_f - t_0} = \frac{0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - \vec{v}_0}{0\ \text{s}} = \frac{-\vec{v}_0}{0} = \pm\infty\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

($\pm$ dependiendo del sentido de $\vec{v}_0$)

Y, por lo tanto, la fuerza que habría que aplicar, según la segunda ley de Newton, también tendría que ser infinita.

22. Avanzan debido a la expulsión de combustible (gases producto de la combustión).

— Si lo analizamos desde el principio de conservación del momento lineal, vemos que para que el sistema cohete-combustible permanezca con momento lineal 0 (como al inicio) el cohete debe adquirir una velocidad opuesta a la de los gases expulsados.

— Según el principio de acción-reacción, la presión ejercida en la parte superior de la cámara (ya que la presión en los laterales se anula) expulsará los gases de la combustión y estos, al mismo tiempo, empujarán el cohete en sentido contrario.

Ambos razonamientos son, en realidad, equivalentes.

23. Los accidentes con autobuses suelen ser más aparatosos porque, a pesar de moverse a velocidades parecidas a los de un coche o una moto, tienen una masa mayor y, por lo tanto, su momento lineal también es mayor. Esto se traduce en que es más difícil frenarlos, por lo que antes de que esto suceda habrán ocasionado más destrozos.

24. En absoluto, dado que sobre la pelota actúa al menos una fuerza externa, que es la de la gravedad, la cual provoca su aumento de velocidad.

25. Datos: $m_1 = 50$ kg; $m_2 = 70$ kg; $\vec{v}_1 = 3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\vec{v}_2 = -2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

— Si consideramos el sistema formado por los dos patinadores, podemos aplicar el principio de conservación del momento lineal, dado que no hay ninguna fuerza externa que actúe sobre ellos.

$$\vec{p}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\vec{p}_0 = 50\ \text{kg}\cdot 3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 70\ \text{kg}\cdot(-2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}) = 10\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Igualamos el momento inicial del sistema con el momento lineal final, teniendo presente que las velocidades de ambos patinadores al final son iguales, dado que van juntos.

$$\vec{p}_f = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = m_1\vec{v}_f + m_2\vec{v}_f = (m_1 + m_2)\cdot\vec{v}_f$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f$$

$$\vec{p}_0 = (m_1 + m_2)\cdot\vec{v}_f \rightarrow \vec{v}_f = \frac{\vec{p}_0}{m_1 + m_2} = \frac{10\ \cancel{\text{kg}}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{50\ \cancel{\text{kg}} + 70\ \cancel{\text{kg}}}$$

$$\vec{p}_0 = 0{,}083\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Al final, los patinadores se mueven a $0{,}083\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en la misma dirección y sentido en que se movía la patinadora.

26. Como en el proceso no actúa ninguna fuerza externa, simplemente tenemos que aplicar la ley de la conservación del momento lineal.

$$\vec{p}_0 = 0\ \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1};\ \vec{p}_f = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \Rightarrow 0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \rightarrow \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_2$$

Como vemos, las dos velocidades deben tener misma dirección, pero sentidos opuestos (ya que el momento de uno de los fragmentos debe contrarrestar el del otro).

27. Datos: $a_1 = 20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a_2 = 30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

— Aplicando la segunda ley de Newton, podemos establecer un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\vec{F} = m_1\cdot\vec{a}_1 \rightarrow m_1 = \frac{F}{a_1}$$

$$\vec{F} = m_2\cdot\vec{a}_2 \rightarrow m_2 = \frac{F}{a_2}$$

$$\vec{F} = (m_1 + m_2)\cdot\vec{a} \rightarrow \vec{F} = \left(\frac{F}{a_1} + \frac{F}{a_2}\right)\cdot\vec{a}$$

$$a = \frac{1}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2}} = 12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Podemos prescindir del carácter vectorial, dado que lo único que indica es que la fuerza y la aceleración llevan la misma dirección y sentido. Así pues, la aceleración de $12\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ será en la misma dirección y sentido que la fuerza aplicada.

28. Datos: $m_b = 17\ \text{g} = 1{,}7\cdot 10^{-2}$ kg; $m_s = 1{,}5$ kg; $v_f = 0{,}64\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Se trata de un choque completamente inelástico. Por lo tanto, en ausencia de fuerzas externas al sistema bala-saco, debe cumplirse la conservación del momento lineal. Como segunda condición, tenemos que tras el impacto el conjunto saco-bala se mueve con una única velocidad.

$$\vec{p}_0 = m_b\vec{v}_b + m_s\vec{v}_s = m_b\vec{v}_b + 0$$

$$\vec{p}_f = m_b\vec{v}_{bf} + m_s\vec{v}_{sf} = m_b\vec{v}_{bf} + m_s\vec{v}_{sf} = (m_b + m_s)\cdot\vec{v}_f$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \Rightarrow m_b\vec{v}_b = (m_b + m_s)\,\vec{v}_f \rightarrow \vec{v}_b = \frac{(m_b + m_s)\vec{v}_f}{m_b}$$

$$v_b = \frac{(1{,}7\cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{kg}} + 1{,}500\ \cancel{\text{kg}})\cdot 0{,}64\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{1{,}7\cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{kg}}} = 57\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

La velocidad de la bala tiene que ser muy elevada, ya que tiene una masa unas noventa veces más pequeña que el saco y es su momento lineal el responsable de la velocidad adquirida por el conjunto saco-bala tras el choque. En una primera estimación, la velocidad de la bala debería ser poco menos que noventa veces la velocidad final del sistema (dado que la masa de la bala es insignificante comparada con la del saco). Comprobamos que este razonamiento: $0{,}64\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 90 = 58\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ nos lleva a una estimación muy cercana al resultado final.

29. Datos: $v_0 = 5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_{1f} = 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $m_1 = m_2 = 0{,}5\ m$ (kg)

Como no actúa ninguna fuerza externa sobre el cuerpo, podemos aplicar la conservación del momento lineal.

$$\vec{p}_0 = m\cdot\vec{v}_0$$

$$\vec{p}_f = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = \frac{m}{2}\vec{v}_{1f} + \frac{m}{2}\vec{v}_{2f}$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \Rightarrow \cancel{m} \cdot \vec{v}_0 = \frac{\cancel{m}}{2}\vec{v}_{1f} + \frac{\cancel{m}}{2}\vec{v}_{2f} \rightarrow$$

$$\vec{v}_{2f} = 2\vec{v}_0 - \vec{v}_{1f} = 2 \cdot 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} - 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

La velocidad del fragmento será de 8 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en la misma dirección y sentido que el otro.

30. Datos: $\vec{v}_{A0} = 0{,}7\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\vec{v}_{Af} = 0{,}3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\vec{v}_{B0} = 0{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

Dado que en la colisión no actúa ninguna fuerza externa, podemos aplicar la conservación del momento lineal para el sistema formado por los dos carros.

$$\vec{p}_0 = m_A \cdot \vec{v}_{A0} + 0;\ \vec{p}_f = m_A\vec{v}_{Af} + m_B\vec{v}_{Bf}$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \rightarrow m_A\vec{v}_{A0} = m_A\vec{v}_{Af} + m_B\vec{v}_{Bf}$$

$$\vec{v}_{A0} = \vec{v}_{Af} + \frac{m_B}{m_A}\vec{v}_{Bf} \rightarrow \frac{m_B}{m_A} = \frac{\vec{v}_{A0} - \vec{v}_{Af}}{\vec{v}_{Bf}}$$

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{\vec{v}_{A0} - \vec{v}_{Af}}{\vec{v}_{Bf}} = \frac{0{,}7\ \cancel{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}} - (-0{,}3\ \cancel{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}})}{0{,}5\ \cancel{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}} = 2$$

La masa del segundo carrito es el doble que la del primer carrito: $m_B = 2\ m_A$.

31. Datos: $m_V + m_B = 4000$ kg; $m_B = 20$ kg

$$\vec{v}_{V0} = 72 \text{ km}\cdot\text{h} = 20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1};\ \vec{v}_{Bf} = 320\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Si tomamos el sistema vagón-bala, como sobre ese sistema no actúan fuerzas externas, podemos considerar la conservación de la cantidad de movimiento.

$$\vec{p}_0 = (m_V + m_B)\cdot\vec{v}_{V0};\ \vec{p}_f = m_V\vec{v}_{Vf} + m_B\vec{v}_{Bf}$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \Rightarrow (m_V + m_B)\vec{v}_{V0} = m_V\vec{v}_{Vf} + m_B\vec{v}_{Bf}$$

$$\vec{v}_{Vf} = \frac{(m_V + m_B)\vec{v}_{V0} - m_B\vec{v}_{Bf}}{m_V}$$

$$\vec{v}_{Vf} = \frac{4\,000\ \cancel{\text{kg}} \cdot 20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} - 20\ \cancel{\text{kg}} \cdot 320\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{3\,980\ \cancel{\text{kg}}} =$$

$$= 18{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

El vagón sigue moviéndose en la misma dirección y sentido, pero su velocidad es menor, dado que la proyección de la bala en la misma dirección y sentido ha producido una pequeña y súbita desaceleración.

32. Datos: $F = 40$N; $\Delta t = 0{,}01$ s; $m_1 = m_2 = 0{,}200$ kg; $\vec{v}_{1f} = 0{,}2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

El impulso proporcionado por el taco sobre la primera bola le imprime un momento lineal que va a conservarse en el choque con la segunda si consideramos el sistema formado por las dos bolas.

— Calculamos el impulso.

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t \rightarrow \vec{I} = 40\text{ N} \cdot 0{,}01\text{ s}\ \hat{i} = 0{,}4\text{ N}\cdot\text{s}\ \hat{i}$$

— Aplicamos el teorema del impulso-momento lineal y tomamos ese momento lineal imprimido a la bola como el momento lineal inicial del sistema formado por las dos bolas.

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \rightarrow \Delta\vec{p} = 0{,}4\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\hat{i} \Rightarrow \vec{p}_0 = 0{,}4\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\hat{i}$$

— Aplicamos la conservación del momento lineal.

$$\vec{p}_f = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \Rightarrow \vec{p}_0 = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} \rightarrow \vec{v}_{2f} = \frac{\vec{p}_0 - m_1\vec{v}_{1f}}{m_2}$$

$$\vec{v}_{2f} = \frac{\vec{p}_0 - m_1\vec{v}_{1f}}{m_2} = \frac{0{,}4\ \cancel{\text{kg}}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 0{,}200\ \cancel{\text{kg}}(-0{,}2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})}{0{,}200\ \cancel{\text{kg}}}$$

$$\vec{v}_{2f} = 2{,}2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

La velocidad de la segunda bola es de 2,2 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

33. Datos: $F = 200$ N; $\Delta t = 60$ s; $m = 100$ g $= 0{,}100$ kg; $v_f = 400\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

De acuerdo con la relación entre el impulso y la variación de momento lineal, la cantidad de movimiento suministrada por la ametralladora en un minuto está limitada por la fuerza de sujeción del operario.

— Aplicamos el teorema que relaciona el impulso con el momento lineal y despejamos la variación de momento.

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t\quad \vec{I} = \Delta\vec{p} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$$

$$\Delta\vec{p} = 200\text{ N} \cdot 60\text{ s} = 12\,000\text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Como el momento lineal inicial de las balas es 0, podemos hallar el número de balas a partir de la definición de momento lineal.

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_0 \rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - 0 \rightarrow \vec{p}_f = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_f = n \cdot m \cdot \vec{v}_f$$

$$\vec{p}_f = n \cdot m \cdot \vec{v}_f \rightarrow n = \frac{\vec{p}_f}{m \cdot \vec{v}_f} = \frac{12\,000\ \cancel{\text{kg}}\ \cancel{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}}{0{,}100\ \cancel{\text{kg}} \cdot 400\ \cancel{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}};$$

$$n = 300$$

En un minuto puede disparar hasta 300 balas. Observemos cómo el cociente entre la variación del momento lineal imprimido y el tiempo en el que se produce esta variación nos da la mínima fuerza de sujeción necesaria para disparar. Cuantas más balas dispare por unidad de tiempo, mayor será este cociente y, por lo tanto, habrá que aumentar la fuerza de sujeción.

34. Datos: $m_B = 0{,}008$ kg; $m_{Bl} = 2$ kg; $v_{Bo} = 100\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\Delta t = 0{,}01$ s

— Si consideramos el sistema bala-bloque, entonces en el impacto no actúan fuerzas externas y podemos aplicar la ley de conservación del momento lineal. Para determinar la fuerza que ejerce el bloque sobre el proyectil, podemos usar la definición de impulso.

$$\vec{p}_0 = m_B\vec{v}_{Bo}$$

$$\vec{p}_f = m_B\vec{v}_{Bf} + m_{Bl}\vec{v}_{Blf} = (m_B + m_{Bl})\vec{v}_f$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \rightarrow m_B\vec{v}_{Bo} = (m_B + m_{Bl})\vec{v}_f \rightarrow \vec{v}_f = \frac{m_B\vec{v}_{Bo}}{m_B + m_{Bl}}$$

$$\vec{v}_f = \frac{m_B \vec{v}_{Bo}}{m_B + m_{Bl}} = \frac{0{,}008\,\cancel{kg} \cdot 100\ m \cdot s^{-1}}{2{,}008\,\cancel{kg}} = 0{,}4\ m \cdot s^{-1}$$

— El bloque se moverá en la dirección y el sentido en que se movía la bala, a una velocidad de $0{,}4\ m \cdot s^{-1}$. Para calcular la fuerza ejercida por el bloque sobre la bala, en base a la ley de acción-reacción, podemos tomar su módulo como el de la fuerza ejercida por la bala sobre el bloque. Entonces, si consideramos el bloque como el sistema sobre el cual actúa una fuerza externa (la de la bala), podemos usar el teorema del impulso.

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_0 \rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - 0$$

$$\Delta\vec{p} = m_{Bl} \cdot \vec{v}_{Bl} = 2\ kg \cdot 0{,}4\ m \cdot s^{-1} = 0{,}8\ kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

$$\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t \quad \vec{I} = \Delta\vec{p} \Rightarrow \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{0{,}8\ kg \cdot m \cdot s^{-1}}{0{,}01\ s} = 80\ N$$

La expresión de la fuerza como variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo es equivalente a la segunda ley de Newton cuando la masa del cuerpo sobre el que actúa la fuerza es constante.

35. Datos: $m = 9 \cdot 10^{-3}$ kg; $v_f = 1200\ m \cdot s^{-1}$; $\Delta x = 0{,}06$ m

La bala adquiere una velocidad de $1200\ m \cdot s^{-1}$ a lo largo de 6 cm. Podemos usar las fórmulas del MRUA para hallar la aceleración y aplicar la segunda ley de Newton para hallar la fuerza.

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \rightarrow a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2\Delta x}$$

$$a = \frac{(1200\ m \cdot s^{-1})^2}{2 \cdot 0{,}06\ m} = 1{,}2 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-2}$$

$$F = m \cdot a \rightarrow F = 9 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot 1{,}2 \cdot 10^7\ m \cdot s^{-2} = 1 \cdot 10^5\ N$$

En la misma dirección y sentido que el movimiento de la bala. La fuerza que se ejerce sobre el fusil tendrá el mismo valor, pero sentido contrario, a la anterior. Esta fuerza da lugar al retroceso del arma.

36. Respuesta sugerida:

Dicha presentación deberá incluir las tres leyes de Newton: la ley de la inercia, la ley de la dinámica y la de acción-reacción. Cada una se acompañará al menos de un ejemplo asociado. En lo que se refiere a la ley de la inercia, sobre todo, habrá que rebatir la asociación de ausencia de fuerzas con el estado de reposo. En la acción-reacción sería interesante señalar que, según esta ley, las fuerzas siempre existen a pares, aunque cada una aplicada en cuerpos distintos.

37. El funcionamiento de los cohetes se basa en el principio de acción-reacción. Los gases del combustible ejercen una gran presión en la cámara, pero como la presión en los laterales se cancela, al salir por la parte inferior ejercen una reacción neta en la parte superior propulsando el cohete hacia arriba. También podemos entender esta situación planteándolo desde la segunda ley de Newton generalizada, es decir, planteando el problema a partir de la variación del momento lineal. En esta situación, recordemos que sí que hay una fuerza externa actuando sobre el cohete: la gravedad.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext} \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\vec{g}$$

La variación de la cantidad de combustible expulsada por el cohete por unidad de tiempo es aproximadamente constante y negativa, ya que es una masa de la que se desprende. La representaremos por $-Q$.

$$\frac{dm_c}{dt} = -Q \Rightarrow m_c' = m_c - Q \cdot t$$

m_c' es la masa del cohete en cada instante de tiempo (que, como vemos, va disminuyendo porque se desprende $Q \cdot t$ combustible). Entonces m_c es la masa inicial del cohete, esto es, con todo el combustible en su interior. Representaremos por v_g la velocidad del gas. Entonces, la cantidad de movimiento del cohete será:

$$\vec{p} = (m_c - Q \cdot t)v_c + Q \cdot t(-v_g)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m_c\vec{g} \rightarrow \frac{d\left[(m_c - Q \cdot t)v_c + Q \cdot t(-v_g)\right]}{dt} =$$

$$= -(m_c - Q \cdot t) \cdot g$$

Podemos derivar y obtenemos la siguiente expresión:

$$Q \cdot v_c + (m_c - Q \cdot t)\frac{dv_c}{dt} - Q \cdot v_g = -(m_c - Q \cdot t) \cdot g$$

$$(m_c - Q \cdot t)\frac{dv_c}{dt} - Q \cdot (v_g - v_c) = -(m_c - Q \cdot t) \cdot g$$

Donde $v_g - v_c = u$ es la velocidad del gas relativa al cohete.

$$\frac{dv_c}{dt} - \frac{u}{m_c - Q \cdot t} \cdot Q = -g \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{u}{m_c - Q \cdot t} \cdot Q - g$$

Integrando respecto al tiempo a cada miembro de la igualdad, obtenemos la expresión de la velocidad del cohete en función del tiempo.

$$\int \frac{dv}{dt}\,dt = \int \frac{u \cdot Q}{m_c - Q \cdot t}\,dt + \int g\,dt \rightarrow$$

$$\rightarrow v = -u \ln\left(\frac{m_c - Q \cdot t}{m_c}\right) - g\,t$$

Debemos considerar, eso sí, la gravedad como si fuera constante.

38. Datos: $m = 90$ kg;

a) $\vec{v}$ = constante; b) $\vec{a} = +1\ m \cdot s^{-2}$; c) $\vec{a} = -1\ m \cdot s^{-2}$

La báscula mide la fuerza que el hombre ejerce sobre ella, esto es, la reacción de la fuerza normal. Entonces, para conocer el valor que marca la balanza, hay que calcular el valor de la normal. En todas las situaciones, el esquema de fuerzas sobre el hombre es la fuerza normal hacia arriba y el peso hacia abajo.

Aplicamos la segunda ley de Newton y, para cada caso, sustituimos la aceleración con su debido valor y signo.

a) $\vec{v}$ = constante $\rightarrow \vec{a} = 0\ m \cdot s^{-2}$

$$\vec{F}_{neta} = m \cdot \vec{a} \rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P$$

$$N = m\,g = 90\ kg \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} = 8{,}8 \cdot 10^2\ N$$

b) $\vec{a} = +1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$$\vec{F}_{neta} = m\cdot\vec{a} \rightarrow N - P = m\cdot\vec{a} \Rightarrow N = P + m\cdot\vec{a}$$

$$N = m\,g + m\cdot\vec{a} = 90\,\text{kg}\cdot 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} + 90\,\text{kg}\cdot 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$N = 9{,}7\cdot 10^2\ \text{N}$$

c) $\vec{a} = -1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

$$\vec{F}_{neta} = m\cdot\vec{a} \rightarrow N - P = m\cdot\vec{a} \Rightarrow N = P + m\cdot\vec{a}$$

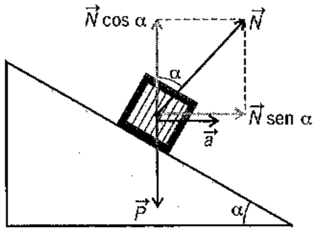
$$N = m\,g + m\cdot\vec{a} = 90\,\text{kg}\cdot 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} + 90\,\text{kg}\cdot(-1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$$

$$N = 7{,}9\cdot 10^2\ \text{N}$$

Observamos que en los tres casos el planteamiento es el mismo. Llegados a la expresión: $N - P = m\cdot\vec{a}$, lo único que hay que hacer es sustituir el valor de la aceleración por el valor y el signo (sentido) adecuado. Hay que prestar atención, porque subir acelerando supone el mismo signo para la aceleración que bajar desacelerando, y lo mismo sucede con bajar acelerando y subir desacelerando.

39. Datos: $\alpha = 60°$; $m = 2$ kg

a) Si planteamos el diagrama de cuerpo libre en el bloque, vemos claramente que las fuerzas que actúan sobre él son la fuerza normal y el peso. Los ejes que tendremos que tomar serán el x en la dirección de la aceleración, y el y en la dirección del peso. Para ello, tendremos que descomponer la normal, tal y como aparece en la figura. Entonces, será la componente de la fuerza normal $N\cdot\text{sen}\,\alpha$ la que suministrará aceleración al cuerpo.



— Plantearemos la segunda ley de Newton en el eje x y en el eje y. Entonces, tenemos:

$$F_{neta\,y} = 0 \rightarrow N\cos\alpha - m\,g = 0 \rightarrow N = \frac{m\,g}{\cos\alpha}\quad(1)$$

$$\vec{F}_{neta\,x} = m\,\vec{a} \rightarrow N\,\text{sen}\,\alpha = m\cdot a\quad(2)$$

— Introduciendo (1) en (2), obtendremos el valor de la aceleración.

$$\frac{\cancel{m}\,g}{\cos\alpha}\,\text{sen}\,\alpha = \cancel{m}\cdot a \rightarrow g\cdot\text{tg}\,\alpha = a$$

$$a = g\cdot\text{tg}\,\alpha = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{tg}\,60° = 17\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

b) Si el plano adquiriese una aceleración mayor, querría decir que este iría más rápido que el bloque, ya que la aceleración del bloque está limitada por la gravedad y la inclinación de la pendiente y, por lo tanto, no puede incrementarse ni disminuirse. Entonces, el bloque se deslizaría hacia arriba por el simple hecho de que se quedaría «atrás» y sería paulatinamente avanzado por la pendiente. Por otro lado, si la aceleración de la pendiente fuera menor, entonces el bloque bajaría por la pendiente, dado que la gravedad le imprime una aceleración mayor.

2 INTERACCIONES DE CONTACTO

Págs. 294 y 295

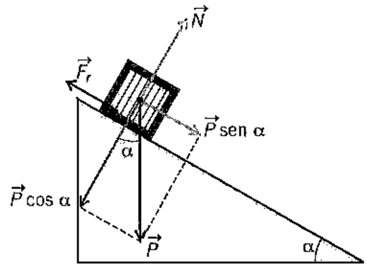
40. Porque, de este modo, una de las componentes de la tensión es vertical y ayuda a que el contacto del trineo con la nieve sea menor, con lo que el rozamiento disminuye aún más.

41. Porque al presionar una mano contra la otra las irregularidades microscópicas de ambas superficies entran más en contacto, por lo que el rozamiento aumenta considerablemente.

Otra explicación equivalente parte del hecho de que al presionar una mano contra la otra estamos aumentando la fuerza de reacción entre ambas superficies, o fuerza normal, por lo que el rozamiento también se incrementa.

42. Datos: $\alpha = 37°$; $\mu = 0{,}10$

Para determinar la aceleración que adquiere un cuerpo, tenemos que aplicar la segunda ley de Newton. En este caso, en la dirección del movimiento actúan el rozamiento y la componente del peso paralela al plano.



— Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje del movimiento.

$$\vec{F}_{neta\,x} = m\cdot\vec{a} \rightarrow P\,\text{sen}\,\alpha - F_r = m\cdot a \rightarrow P\,\text{sen}\,\alpha - \mu N = m\cdot a\ (1)$$

— Para determinar el rozamiento, necesitamos hallar el valor de la fuerza normal. Con este fin, aplicamos la segunda ley de Newton en el eje perpendicular a la superficie.

$$\vec{F}_{neta\,y} = 0 \rightarrow N - P\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = P\cos\alpha\ (2)$$

— Sustituyendo (2) en la ecuación (1) y sabiendo que $P = m\cdot g$, podemos hallar la aceleración.

$$P\,\text{sen}\,\alpha - \mu\cdot P\cos\alpha = m\cdot a \rightarrow a = \frac{\cancel{m}\,g\,\text{sen}\,\alpha - \mu\cdot\cancel{m}\,g\cos\alpha}{\cancel{m}}$$

$$a = g(\text{sen}\,\alpha - \mu\cdot\cos\alpha)$$

$$a = 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}(\text{sen}\,37° - 0{,}10\cdot\cos 37°) = 5{,}1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

La aceleración es menor que g, dado que solo una componente del peso está actuando sobre el cuerpo. Además, el rozamiento aún disminuye más el valor de la aceleración. Observemos que el resultado no depende de la masa del cuerpo que se desliza.

43. Datos: $v_0 = 36\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\mu = 0{,}2$

La pregunta se refiere al campo de la cinemática, pero para poder aplicar las ecuaciones del MRUA necesitamos hallar previamente la aceleración mediante la segunda ley de Newton.

— En el eje horizontal, tenemos:

$$\vec{F}_{neta\,x} = m\cdot\vec{a} \rightarrow -F_r = m\cdot\vec{a} \rightarrow -\mu N = m\cdot\vec{a}\ (1)$$

— Aplicando la segunda ley de Newton en el eje vertical, hallamos la fuerza normal.

$$\vec{F}_{\text{neta } y} = 0 \rightarrow N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g \ (2)$$

— Sustituyendo (2) en la ecuación (1), podemos hallar la aceleración.

$$-\mu \cancel{m} g = \cancel{m} \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{a} = -0{,}2 \cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = -19{,}6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

— La aceleración será de $-19{,}6$ m · s^{-2} en sentido contrario a la velocidad. Se trata, pues, de una desaceleración. Entonces, si aplicamos las ecuaciones de la cinemática:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}$$

$$\Delta x = \frac{(-10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 1{,}96 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} = 26 \text{ m}$$

44. No. Si no existiera tensión en la cuerda, las masas caerían con aceleración 9,8 m · s^{-2}. Otra cosa es que el efecto global de las tensiones sobre el movimiento de la cuerda sea nulo.

45. Datos: $m = 70$ kg; $l_0 = 10$ m; $l_f = 30$ m

En el caso de un cuerpo elástico, podemos usar la ley de Hooke $\vec{F} = -k \cdot \Delta\vec{l}$. En el punto más bajo, el peso y la fuerza elástica se cancelarán.

— Aplicamos la segunda ley de Newton.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot \vec{a} \rightarrow -k\Delta\vec{l} + m \cdot \vec{g} = 0 \rightarrow k = \frac{m \cdot \vec{g}}{\Delta\vec{l}}$$

$$k = \frac{m \cdot \vec{g}}{\Delta\vec{l}} \rightarrow k = \frac{70 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \cancel{\text{m}} \cdot \text{s}^{-2}}{(30 - 10)\cancel{\text{m}}} = 34 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

Observamos que en efecto:

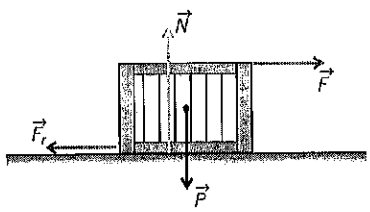
$$\text{N}\cdot\text{m}^{-1} = \text{kg}\cdot\cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^{-2}\cancel{\text{m}^{-1}} = \text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$$

46. Es falso. La aceleración de la gravedad no depende de la masa del cuerpo y, aunque en un plano inclinado solo participa una componente en el movimiento, esta componente solo depende de la inclinación del plano. De hecho, Galileo estudió la caída libre por medio del plano inclinado para disminuir el efecto de la gravedad, ya que estaba limitado por la imposibilidad de medir tiempos cortos.

47. Datos: $F = 100$ N; $\mu = 0{,}1$; $m = 20$ kg; $\alpha = 20°$; $\alpha = -20°$

Según la fuerza se aleje de la dirección del plano, menor será la componente que participe en el movimiento. Además, la componente vertical se incrementará modificando el valor de la fuerza normal y, por lo tanto, el del rozamiento.

a) Aplicamos la segunda ley de Newton. Cuando el baúl se mueve horizontalmente, tenemos en el eje x:



$$\vec{F}_{\text{neta } x} = m \cdot \vec{a} \rightarrow F - F_r = m \cdot a \Rightarrow F - \mu N = m \cdot a \ (1)$$

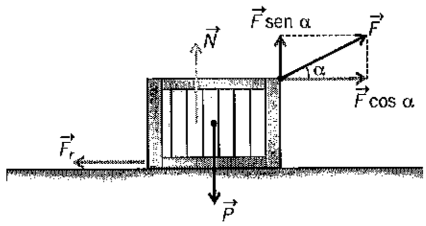
Mientras que en el eje y podemos plantear equilibrio de fuerzas.

$$\vec{F}_{\text{neta } y} = 0 \rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P \ (2)$$

Si sustituimos (2) en (1) y tomamos $P = m \cdot g$, podemos hallar la aceleración.

$$a = \frac{F - \mu\, m\, g}{m} = \frac{100 \text{N} - 0{,}1 \cdot 20 \text{kg} \cdot 9{,}8 \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{20 \text{kg}} = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

b) Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje x, pero esta vez solo la componente $\vec{F} \cos\alpha$ proporciona aceleración.



$$\vec{F}_{\text{neta } x} = m \cdot \vec{a} \rightarrow F \cos\alpha - F_r = m \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F \cos\alpha - \mu N = m \cdot a \ (1)$$

En el eje y planteamos equilibrio de fuerzas. Vemos que aparece la otra componente $\vec{F}$ sen α:

$$\vec{F}_{\text{neta } y} = 0 \rightarrow N + F \operatorname{sen}\alpha - p = 0 \Rightarrow N = p - F \operatorname{sen}\alpha \ (2)$$

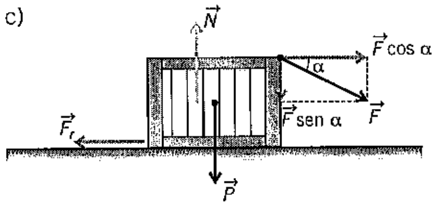
Si sustituimos (2) en (1) y tomamos $p = m\, g$ podemos hallar la aceleración.

$$a = \frac{F \cos\alpha - \mu(m\, g - F \operatorname{sen}\alpha)}{m}$$

$$a = \frac{100 \text{N} \cos 20° - 0{,}1 \cdot (20 \text{kg} \cdot 9{,}8 \text{m}\cdot\text{s}^{-2} - 100 \text{N} \operatorname{sen} 20°)}{20 \text{kg}}$$

$$a = 3{,}9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

c)



En este último caso, el cambio es $\alpha = -20°$, por lo que podemos usar la expresión encontrada en b.

$$a = \frac{100 \text{ N} \cos(-20°) - 0{,}1 \cdot [20 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} - 100 \text{ N} \operatorname{sen}(-20°)]}{20 \text{ kg}}$$

$$a = 3{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Al cambiar el ángulo de signo, el coseno no se ve afectado, pero sí cambia el signo de $\vec{F}$ sen α. Si en vez de aprovechar el resultado en b), hubiéramos planteado el problema de nuevo, hubiéramos visto que el único cambio habría sido el sentido de la componente $\vec{F}$ sen α, ahora en contra de la fuerza normal, y de ahí el cambio de signo.

48. Datos: $\mu_e = 0,5$; $m = 5,0$ kg

Para iniciar el movimiento, tendremos que superar la fuerza de rozamiento máxima. Una vez superada esta fuerza, el objeto comenzará a moverse y el valor de la fuerza de rozamiento decaerá a su valor dinámico (inferior al estático).

— Aplicaremos la segunda ley de Newton para el límite en el que el objeto aún no adquiere aceleración.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = 0 \rightarrow -F_r + F = 0 \rightarrow F = -F_r = \mu_e N \quad (1)$$

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow N - P = 0 \rightarrow N = P = m\,g \quad (2)$$

— Sustituyendo (2) en (1), hallaremos la fuerza necesaria para iniciar el movimiento.

$$F = \mu_e N = 0,5 \cdot 5,0\,\text{kg} \cdot 9,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = 24,5\,\text{N} \approx 25\,\text{N}$$

— Una vez iniciado el movimiento, la aceleración vendrá dada por la segunda ley de Newton, teniendo en cuenta el rozamiento dinámico.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m \cdot \vec{a} \rightarrow -F_r + F = m \cdot a \rightarrow -\mu_d N + F = m \cdot a$$

$$a = \frac{-\mu_d m\,g + F}{m} = \frac{-0,20 \cdot 5\,\text{kg} \cdot 9,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} + 24,5\,\text{N}}{5\,\text{kg}}$$

$$a = 2,96\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \approx 3\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

— Al cabo de dos segundos su velocidad, según la ecuación del MRUA será:

$$v_f = v_0 + a \cdot \Delta t = 0 + 2,96\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 2\,\text{s} = 6\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Observemos que la fórmula de la fuerza de rozamiento estático solo se aplica en su límite superior, ya que en realidad siempre es igual a la fuerza aplicada y en sentido opuesto. En cambio, la fórmula del rozamiento dinámico es válida en todo momento siempre que exista movimiento.

49. Datos: $\mu = 0,25$; $\mu' = 0,2$; $m_{\text{est}} = 70$ kg; $m_{\text{cajón}} = 120$ kg

Si la fuerza de rozamiento estático entre el estudiante y el suelo es menor que la del cajón y el suelo, el estudiante empezará a deslizarse antes de poder mover el cajón.

— Podemos calcular el valor de ambas fuerzas de rozamiento teniendo en cuenta que, al estar ambos cuerpos (cajón y estudiante) sobre una superficie no inclinada, el módulo de la fuerza normal coincidirá con sus respectivos pesos.

$$F_{r\,\text{est}} = \mu\,N = \mu \cdot m_{\text{est}} \cdot g = 0,25 \cdot 70\,\text{kg} \cdot 9,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$F_{r\,\text{est}} = 171,5\,\text{N}$$

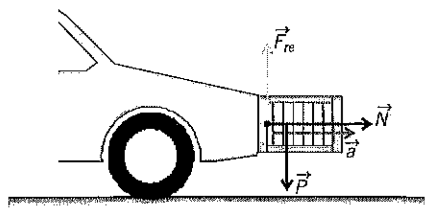
$$F_{r\,\text{cajón}} = \mu'\,N = \mu' \cdot m_{\text{cajón}} \cdot g = 0,2 \cdot 120\,\text{kg} \cdot 9,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$F_{r\,\text{cajón}} = 235,2\,\text{N}$$

Dado que $F_{r\,\text{est}} < F_{r\,\text{cajón}}$, el estudiante no podrá mover el cajón.

50. Datos: $\mu = 0,7$

Este problema plantea una situación muy poco convencional, tal y como vemos en la figura. La fuerza normal está en la horizontal, ya que es perpendicular a la superficie de contacto entre los dos cuerpos, en este caso una caja y el frontal del coche. Su valor vendrá «suministrado» por la aceleración del vehículo. Además, la fuerza de fricción se encuentra en la vertical, oponiéndose al movimiento natural de la caja, que consiste en caer hacia el suelo por efecto de la gravedad.



— Planteamos la segunda ley de Newton en el eje de las x y el equilibrio de fuerzas en la vertical.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m \cdot \vec{a} \rightarrow N = m \cdot a$$

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow F_r - m\,g = 0 \rightarrow \mu N = m\,g \rightarrow \mu \cancel{m} a = \cancel{m}\,g$$

$$a = \frac{g}{\mu} = \frac{9,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{0,7} = 14\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Para una aceleración inferior a esta, el rozamiento máximo no podrá igualar el peso y la caja se caerá. Para una aceleración mayor, el rozamiento siempre podrá igualar al peso. Nunca lo excederá, ya que estamos hablando de rozamiento estático y en este caso el valor μN solo determina el máximo al que puede llegar.

51. Datos: $T = 150$ N; $m = 10$ kg

Sobre la cuerda actúan dos fuerzas, la tensión de la cuerda y el peso de 10 kg. Si la cuerda se rompe y puede soportar hasta 150 N, esto quiere decir que la aceleración del ascensor ha aumentado la tensión hasta ese valor.

— Aplicamos la segunda ley de Newton.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot \vec{a} \rightarrow T - P = m \cdot a \rightarrow a = \frac{T - P}{m}$$

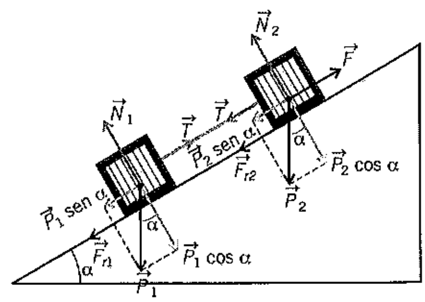
— Tomamos $T = 150$ N, que es la tensión límite a partir de la cual se rompe la cuerda.

$$a = \frac{T - P}{m} = \frac{150\,\text{N} - 10\,\text{kg} \cdot 9,8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{10\,\text{kg}} = 5,2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Si la aceleración tiene un valor superior a $5,2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, la cuerda se rompe.

52. Datos: $m_1 = 5,0$ kg; $m_2 = 10,0$ kg; $\mu = 0,25$; $\alpha = 20°$

Como el rozamiento se opone al movimiento, la fuerza F tendrá que oponerse a las componentes del peso paralelas al plano de cada bloque y a sus fuerzas de rozamiento.



a) Podemos simplificar el problema considerando el sistema en conjunto (ya que ambos bloques se moverán con la misma aceleración, en este caso 0, y velocidad). Para hacer esto, bastará con considerar que tenemos un único bloque de masa total igual a la suma de las masas. Luego planteamos la segunda ley de Newton en el eje paralelo al movimiento.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = 0 \rightarrow F - P_T \operatorname{sen}\alpha - F_r = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F = P_T \operatorname{sen}\alpha + \mu N \quad (1)$$

Para hallar el rozamiento, tendremos que plantear la segunda ley de Newton a fin de obtener el valor de la fuerza normal.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow N - P_T \cos\alpha = 0 \rightarrow N = P_T \cos\alpha \quad (2)$$

Sustituimos (2) en (1) y tomamos $p \cdot T = m \cdot T \cdot g$.

$$F = p_T \operatorname{sen}\alpha + \mu\, p_T \cos\alpha = m_T g(\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$F = 15\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}(\text{sen}\,20° + 0{,}25 \cdot \cos 20°) = 85\,\text{N}$$

b) Para encontrar la tensión de la cuerda que los une, tomaremos uno de los bloques y plantearemos la segunda ley de Newton solo para ese bloque. Da igual el que escojamos, así que tomaremos el segundo, ya que sobre él actúan menos fuerzas.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = 0 \rightarrow T - P_2 \operatorname{sen}\alpha - \mu P_2 \cos\alpha = 0$$

$$T = P_2(\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$T = 10\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}(\text{sen}\,20° + 0{,}25 \cdot \cos 20°) = 56\,\text{N}$$

Podemos comprobar que, si en vez de tomar las ecuaciones del bloque de 10,0 kg tomamos las del bloque de 5,0 kg, el resultado será el mismo.

53. Datos: $T = 750$ N; $m = 90$ kg

a) Las fuerzas que actúan sobre el hombre son la tensión de la cuerda y su peso. Planteando la segunda ley de Newton con la condición de que T sea igual a su valor límite, podremos hallar la aceleración mínima que debe llevar el actor para evitar que la cuerda se rompa.

— Planteamos la segunda ley de Newton sobre el hombre.

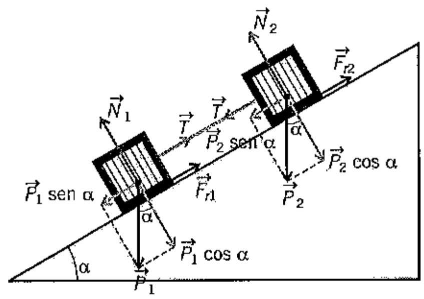
$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m \cdot \vec{a} \rightarrow T - P = m \cdot a \rightarrow a = \frac{T - P}{m}$$

$$a = \frac{T - P}{m} = \frac{750\,\text{N} - 90\,\text{kg} \cdot 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{90\,\text{kg}} = -1{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

b) El signo negativo nos indica que la aceleración debe ser de descenso (hacia abajo). Por otro lado, de llevar una aceleración de descenso menor, la cuerda se rompería. Por esta misma razón, tampoco podría quedarse temporalmente quieto, ya que su peso excede la tensión máxima que puede soportar la cuerda.

54. Datos: $m_1 = 3{,}0$ kg; $m_2 = 4{,}0$ kg; $m_1 = 0{,}20$; $m_2 = 0{,}40$

— Planteamos la segunda ley de Newton para todo el sistema. No podemos simplificar el problema considerando un único bloque de masa total igual a la suma de las masas individuales, debido a que sobre cada una actúa un coeficiente de rozamiento distinto.



$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m_T \cdot \vec{a}$$

$$P_1 \operatorname{sen}\alpha - T_1 - F_{r1} + T_2 + P_2 \operatorname{sen}\alpha - F_{r2} = (m_1 + m_2) \cdot a$$

— Las tensiones cumplen $T_1 = T_2$, y para determinar cada fuerza de rozamiento, tenemos que encontrar previamente la fuerza normal de cada cuerpo mediante la segunda ley de Newton en el eje perpendicular al plano inclinado.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow N_1 - P_1 \cos\alpha = 0 \rightarrow N_1 = P_1 \cos\alpha$$

— Aplicamos la misma expresión al segundo bloque. Entonces, sustituyendo en la ecuación del eje x y despejando la aceleración:

$$a = \frac{m_1 \operatorname{sen}\alpha - \mu_1 m_1 \cos\alpha + m_2 \operatorname{sen}\alpha - \mu_2 m_2 \operatorname{sen}\alpha}{m_1 + m_2}\, g$$

$$a = \frac{2{,}0(\text{sen}\,30° - 0{,}20\cos 30°) + 4{,}0(\text{sen}\,30° - 0{,}40\,\text{sen}\,30°)}{2{,}0 + 4{,}0}\, 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a = 2{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

— Para hallar la tensión, aplicamos la segunda ley de Newton para uno de los bloques. En este caso, tomaremos el segundo.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m_T \cdot \vec{a} \rightarrow T + m_2 g \operatorname{sen}\alpha - \mu m_2 g \cos\alpha = m_2 \cdot a$$

$$T = m_2 \cdot a - m_2 g \operatorname{sen}\alpha + \mu\, m_2 g \cos\alpha$$

$$T = 4{,}0\,\text{kg} \cdot (2{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} - 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\text{sen}\,30° + 9{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\,0{,}40 \cdot \cos 30°)$$

$$T = 3{,}0\,\text{N}$$

Podemos comprobar que, si tomamos las ecuaciones para el otro bloque, el resultado será el mismo.

55. Datos: $a = 0{,}10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $\mu = 0{,}10$; $m_1 = 4{,}0$ kg; $m_2 = 10{,}0$ kg

Podemos simplificar el problema considerando el sistema como una única masa de masa total igual a la suma de las masas, ya que el movimiento de ambas será el mismo debido a la cuerda que las une.

— Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje del movimiento.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m_T \cdot \vec{a} \rightarrow F - F_r = m_T \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow F = F_r + m_T \cdot a = \mu N + m_T \cdot a \quad (1)$$

— Para determinar la fuerza de rozamiento, necesitamos conocer el valor de la fuerza normal. Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje perpendicular.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow N - P_T = 0 \rightarrow N = P_T \quad (2)$$

— Sustituimos (2) en (1):

$$F = \mu P + m_T \cdot a = m_T(\mu g + a)$$

$$F = 14\ \text{kg}(0{,}10 \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} + 1{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = 28\ \text{N}$$

— Finalmente, para hallar la tensión de la cuerda que une los dos cuerpos, consideraremos uno cualquiera de ellos y aplicaremos la segunda ley de Newton. Por simplicidad tomaremos el segundo cuerpo, ya que sobre él actúan menos fuerzas.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m_2 \cdot \vec{a} \rightarrow T - F_r = m_2 \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow T = F_r + m_2 \cdot a = \mu N_2 + m_2 \cdot a$$

— Análogamente al caso anterior, como el cuerpo está en una superficie horizontal, su fuerza normal se equipara con su peso, por lo que $N_2 = m_2 \cdot g$.

$$T = \mu \cdot m_2 g + m_2 a$$

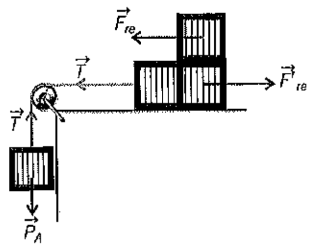
$$T = 10\ \text{kg} \cdot (0{,}1 \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} + 1{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = 20\ \text{N}$$

Si aplicamos la segunda ley de Newton para el primer cuerpo (el de 4 kg), llegaremos al mismo resultado.

56. Datos: $m_A = 30$ kg; $m_B = 12$ kg; $m_C = 8$ kg

Dado que en el bloque C la única fuerza que actúa es la fuerza de rozamiento, la condición será que este rozamiento estático pueda proporcionar al bloque la misma aceleración que tiene el resto del sistema.

— Calculamos la aceleración del sistema suponiendo que C no se desliza por encima de B, por lo que podemos tomar los bloques B y C como un único bloque de masa igual a la suma de ambos. Como vemos en la figura, el rozamiento estático y su reacción se cancelan.



$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = (m_A + m_B + m_C) \cdot \vec{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow P_A - \cancel{T} + \cancel{T} = (m_A + m_B + m_C) \cdot \vec{a}$$

$$a = \frac{P_A}{(m_A + m_B + m_C)} = \frac{m_A g}{m_T} \quad (1)$$

— Aplicamos la segunda ley de Newton en el bloque C para el caso límite en que el bloque se desplaza con la misma aceleración que el resto del sistema, pero con la fuerza de rozamiento estática máxima.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m_C \cdot \vec{a} \rightarrow F_{r\,\text{máx}} = m_C \cdot a \rightarrow \mu_e N_C = m_C \cdot a \ (2)$$

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow N_C - P_C = 0 \rightarrow N_C = m_C \cdot g \ \ (3)$$

— Introducimos (3) en (2) para obtener la condición que debe cumplir el coeficiente de rozamiento estático.

$$\mu_e \cancel{m_C} g = \cancel{m_C} a \rightarrow \mu_e = \frac{a}{g} \ \ (4)$$

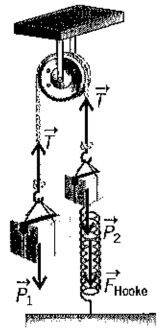
— Finalmente, sustituimos (1) en (4).

$$\mu_e = \frac{a}{g} = \frac{m_A \cdot \cancel{g}}{m_T \cdot \cancel{g}} = \frac{30\ \cancel{\text{kg}}}{50\ \cancel{\text{kg}}} = 0{,}6$$

Entonces, el valor del coeficiente de rozamiento estático necesario para que todos los bloques se muevan con la misma aceleración debe ser $\mu_e \geq 0{,}6$. Observemos que en este caso la fuerza de rozamiento en C tiene la misma dirección y sentido que la aceleración, pues en relación con la superficie de B el bloque C tiende a desplazarse hacia atrás. Entonces, lo que ocurre es que el rozamiento actúa en contra de ese desplazamiento relativo.

57. Datos: $m_A = 10$ kg; $m_B = 5$ kg; $k = 60\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$

El sistema se moverá siguiendo el peso de la masa de 10 kg, por lo que el muelle experimentará un alargamiento. Cuando planteemos la fuerza neta sobre el sistema, habrá que tener en cuenta la fuerza de Hooke, que se opondrá a ese alargamiento actuando a su vez en contra del movimiento del sistema.



— Planteamos la segunda ley de Newton tomando la fuerza del resorte según la expresión de Hooke $F_{\text{Hooke}} = k \cdot \Delta x$.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = 0 \rightarrow P_A - \cancel{T} + \cancel{T} - P_B - F_{\text{Hooke}} = 0$$

$$P_A - \cancel{T} + \cancel{T} - P_B - k\Delta x = 0 \rightarrow \Delta x = \frac{P_A - P_B}{k}$$

$$\Delta x = \frac{10\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} - 5\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{60\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}} = 0{,}8\ \text{m}$$

Con este resultado, podemos determinar que la fuerza que ejerce el muelle es de 48 N, que como puede comprobarse es igual a la diferencia de ambos pesos.

58. Datos: $m_o = 2$ kg; $m = 4$ kg; $\mu = 0{,}2$; $a = 0{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

A partir de la primera experiencia, podemos determinar la constante k del resorte, y luego, aplicando la segunda ley de Newton, podemos determinar su alargamiento en la segunda experiencia.

— Para determinar la constante del resorte, aplicamos la segunda ley de Newton en el sistema en equilibrio con la masa colgante de 2 kg.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = 0 \rightarrow P - F_{\text{Hooke}} = 0 \rightarrow F_{\text{Hooke}} = P \rightarrow k\Delta y = m_o g$$

$$k = \frac{m_o g}{\Delta y} = \frac{2\ \text{kg}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{5 \cdot 10^{-2}\text{m}} = 392\ \text{N}\cdot\text{m}^{-2}$$

— Para hallar el alargamiento del muelle, primero tendremos que determinar la fuerza aplicada sobre el sistema, que será la misma fuerza del resorte.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot a \rightarrow F - Fr = m \cdot a \rightarrow F - \mu N = m \cdot a$$

— Dado que el movimiento es paralelo a un plano horizontal, la fuerza normal del objeto de 4 kg tendrá el mismo valor que su peso $N = m \cdot g$.

$$F = \mu \cdot m \cdot g + m \cdot a = m(\mu\, g + a)$$

$$F = 4\ \text{kg}(0{,}2 \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} + 0{,}4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) = 9{,}44\ \text{N}$$

— Dado que $F = F_{\text{Hooke}}$, podemos usar la fórmula de Hooke y despejar el alargamiento.

$$F_{\text{Hooke}} = k \cdot \Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{F_{\text{Hooke}}}{k} = \frac{9{,}44\ \cancel{\text{N}}}{392\ \cancel{\text{N}} \cdot \text{m}^{-2}} = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

El alargamiento será de 2,4 cm, pues la fuerza aplicada sobre el muelle (9,4 N) es prácticamente la mitad de la aplicada en el ensayo (19,6 N).

59. Datos: $k = 50\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$; $m = 0{,}300$ kg

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa 0,300 kg son la fuerza del resorte y el peso. La suma de ambas es la causa de su aceleración, que a su vez es la del ascensor.

— Aplicamos la segunda ley de Newton a la masa de 0,300 kg.

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot a \rightarrow F_{\text{Hooke}} - P = m \cdot a \rightarrow F_{\text{Hooke}} = m \cdot g + m \cdot a$$

a) Para el caso en que $a = +\,2{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$:

$$F_{\text{Hooke}} = m \cdot (g + a) = 0{,}300\ \text{kg} \cdot (9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} + 2{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

$$F_{\text{Hooke}} = 3{,}54\ \text{N}$$

$$F_{\text{Hooke}} = k\Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{F_{\text{Hooke}}}{k} = \frac{3{,}54\ \cancel{\text{N}}}{50\ \cancel{\text{N}} \cdot \text{m}^{-1}} = 7 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

Por lo tanto, la longitud del resorte será de 20 cm + 7 cm. Esto es, 27 cm.

b) Para el caso en el que la velocidad sea constante y, por lo tanto, $a = 0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$:

$$F_{\text{Hooke}} = m \cdot (g + a) = 0{,}300\ \text{kg} \cdot (9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} + 0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2})$$

$$F_{\text{Hooke}} = 2{,}94\ \text{N}$$

$$F_{\text{Hooke}} = k\Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{F_{\text{Hooke}}}{k} = \frac{2{,}94\ \text{N}}{50\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}} = 6 \cdot 10^{-2}\text{m}$$

Por lo tanto, la longitud del resorte será de 20 cm + 6 cm. Esto es, 26 cm. Observemos que el planteamiento siempre es el mismo y solo hay que sustituir el valor correcto de la aceleración con su signo correcto (positivo, en el caso de acelerar subiendo o desacelerar bajando, y negativo, en el caso de desacelerar subiendo o bajar acelerando).

60. Como el ensayo se hará con el peso de la libreta, primero debo calcular el peso de esta.

$$P = m \cdot g = 0{,}300\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 2{,}9\ \text{N}$$

Como el peso de la libreta es superior a 2 N, tendremos que usar el dinamómetro de 3 N. Para calcular la constante, primero dejaremos el dinamómetro colgado en reposo y mediremos la longitud natural del muelle. Luego, colgaremos de él la libreta y mediremos su nueva longitud. El cociente entre el peso de la libreta y la variación de longitud nos dará la constante elástica del dinamómetro.

61. Datos: $m_p = 0{,}250$ kg; $m_m = 0{,}100$ kg; $\mu_e = 0{,}12$

Para que los platos no caigan al suelo, deben deslizarse por encima del mantel, es decir, la aceleración del mantel debe ser superior a la que pueda imprimirle a los platos la fuerza de rozamiento estática máxima.

— Planteamos la segunda ley de Newton para uno de los platos en el límite de rozamiento máximo, para calcular la aceleración que puede alcanzar sin deslizarse por encima del mantel.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m_p \cdot a \rightarrow F_{\text{re máx}} = m_p \cdot a \rightarrow \mu_e N = m_p \cdot a$$

— En el eje y tenemos:

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow N - P = 0 \rightarrow N = P \rightarrow N = m_p \cdot g$$

— Finalmente, sustituyendo N en la ecuación anterior, hallamos la aceleración máxima de los platos.

$$\mu_e \cancel{m_p} g = \cancel{m_p} \cdot a \rightarrow a = \mu_e \cdot g = 0{,}12 \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 1{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

— Por lo tanto, la fuerza que tendremos que aplicar tendrá que superar la necesaria para acelerar los platos y el mantel a $1{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

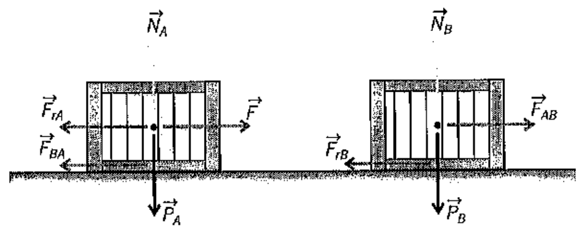
$$F > (4m_p + m_m) \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow F > (4 \cdot 0{,}250 + 0{,}100)\,\text{kg} \cdot 1{,}2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \rightarrow F > 1{,}3\ \text{N}$$

Observemos que en este caso la fuerza de rozamiento de los platos es en la misma dirección y sentido que la aceleración, pues en relación con el mantel los platos tienden a desplazarse hacia atrás.

62. Datos: $m_A = 4$ kg; $m_B = 2$ kg; $\mu_A = 0{,}1$; $\mu_B = 0{,}2$; $F = 12$ N

Como las fuerzas de rozamiento son distintas para cada bloque, no podemos simplificar el sistema considerando que desplazamos un único bloque de masa igual a la suma de las dos masas. Entonces, tendremos que aplicar la segunda ley de Newton considerando las fuerzas que actúan en cada bloque, como se aprecia en la figura. Hay que prestar atención, sobre todo, a la fuerza de contacto de A sobre B y a su reacción, que es la fuerza de B sobre A.



Fuerzas sobre el bloque A:

$$\vec{F}_{A\,x\,\text{neta}} = m_A \cdot a \rightarrow F - F_{rA} - F_{AB} = m_A \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow F - \mu_A N_A - F_{AB} = m_A \cdot a$$

Fuerzas sobre el bloque B:

$$\vec{F}_{B\,x\,\text{neta}} = m_B \cdot a \rightarrow F_{BA} - F_{rB} = m_B \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow F_{BA} - \mu_B N_B = m_B \cdot a$$

— Para determinar la fuerza normal en A y en B, aplicaremos el equilibrio de fuerzas en la vertical.

$$\vec{F}_{A\,y\ \text{neta}} = 0 \rightarrow N_A - m_A \cdot g = 0 \rightarrow N_A = m_A \cdot g$$

$$\vec{F}_{B\,y\ \text{neta}} = 0 \rightarrow N_B - m_B \cdot g = 0 \rightarrow N_B = m_B \cdot g$$

— Sustituyendo en las ecuaciones del eje x, podemos determinar la aceleración del sistema y la fuerza F_{AB}.

$$F - \mu_A m_A g - F_{AB} = m_A \cdot a \quad (1)$$

$$F_{BA} - \mu_B m_B g = m_B \cdot a \quad (2)$$

— Sumando ambas ecuaciones y sabiendo que $F_{AB} = F_{BA}$, obtenemos:

$$F - \mu_A m_A g - \mu_B m_B g = (m_B + m_A) \cdot a$$

$$a = \frac{F - \mu_A m_A g - \mu_B m_B g}{m_B + m_A}$$

$$a = \frac{12\ \text{N} - 0{,}1 \cdot 4\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} - 0{,}2 \cdot 2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{6\ \text{kg}}$$

$$a = 0{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

— Sustituyendo este valor en la ecuación (2), podemos calcular F_{AB}.

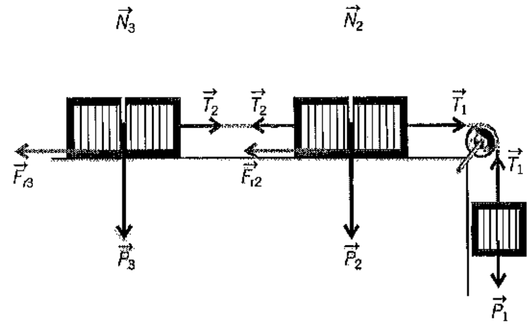
$$F_{BA} = \mu_B m_B g + m_B \cdot a = m_B\,(\mu_B g + a)$$

$$F_{BA} = 2\ \text{kg} \cdot \left(0{,}2 \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} + 0{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}\right) = 5{,}3\ \text{N}$$

Si en vez de escoger la ecuación (1) hubiéramos usado la ecuación (2), habríamos llegado al mismo resultado, ya que $F_{AB} = F_{BA}$ (aunque, en lo que refiere al sentido, son opuestas).

63. Datos: $m_1 = m_2 = m_3 = m$

— Dado que todos los bloques están unidos por cuerdas, el sistema se mueve conjuntamente con la misma aceleración. En estas condiciones, podemos aplicar la segunda ley de Newton para todo el sistema en el eje del movimiento (un eje torcido, en este caso).



$$\vec{F}_{x\ \text{neta}} = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a$$

$$m_1 g - \cancel{T_1} + \cancel{T_1} - \mu N_2 - \cancel{T_2} + \cancel{T_2} - \mu N_3 = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a$$

— Para determinar la fuerza normal en A y en B, aplicaremos el equilibrio de fuerzas en la vertical.

$$\vec{F}_{2\,y\ \text{neta}} = 0 \rightarrow N_2 - m_2 \cdot g = 0 \rightarrow N_2 = m_2 \cdot g$$

$$\vec{F}_{3\,y\ \text{neta}} = 0 \rightarrow N_3 - m_3 \cdot g = 0 \rightarrow N_3 = m_3 \cdot g$$

— Sustituyendo en la ecuación del eje de las abscisas:

$$m_1 g - \mu \cdot m_2 g - \mu \cdot m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{m_1 - \mu \cdot (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}\, g \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{\cancel{m} - 2\mu\cancel{m}}{3\cancel{m}}\, g = \frac{1}{3}\, g(1 - 2\mu)$$

— Para hallar la tensión de la cuerda que une las masas 2 y 3; basta con tomar la segunda ley de Newton en uno de los bloques. Tomaremos el bloque 3.

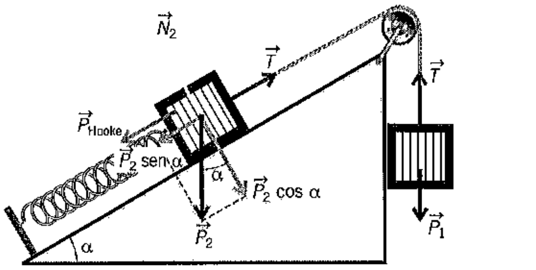
$$T_2 - \mu\, m_3 g = m_3 \cdot a \rightarrow T_2 = \mu\, m_3 g + m_3 \cdot a = m\, g\left(\mu + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mu\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{3}\, m\, g(1 + \mu)$$

Según los resultados, en ausencia de rozamiento la aceleración es un tercio de la de la gravedad, lo que se corresponde con el hecho de que la masa que da lugar al movimiento es un tercio de la masa total del sistema.

64. Datos: $m_1 = 12$ kg; $m_2 = 10$ kg; $\alpha = 30°$; $k = 700\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$

Aplicamos equilibrio de fuerzas sobre el sistema considerando que la fuerza de Hooke se opone al estiramiento del muelle ocasionado por la masa en suspensión.



— Aplicamos equilibrio de fuerzas en el sistema a lo largo del eje donde se establece el equilibrio.

$$\vec{F}_{A\,x\ \text{neta}} = 0 \rightarrow m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \operatorname{sen} \alpha - k\Delta x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta x = \frac{m_1 \cdot g - m_2 \cdot g \operatorname{sen} \alpha}{k}$$

$$\Delta x = \frac{m_1 - m_2 \operatorname{sen} \alpha}{k}\, g = \frac{12\ \text{kg} - 10\ \text{kg} \cdot \operatorname{sen} 30°}{700\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\Delta x = 0{,}1\ \text{m}$$

Observamos que, según la expresión de Δx hallada, cuanto menor sea la k del muelle, mayor será la deformación que experimentará y tanto más tardará el sistema en alcanzar el equilibrio.

3 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

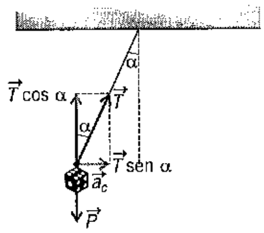
Págs. 295 y 296

65. a) Sí. Ya que la fuerza solo determina la aceleración y no la velocidad, que es la magnitud directamente relacionada con el sentido y la dirección del movimiento. Un ejemplo es el de un cuerpo que se mueve con m.c.u.

b) Porque la aceleración centrípeta es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad e inversamente proporcional al radio de la curva. Si la curva es muy cerrada, significa que el radio es muy pequeño. La aceleración centrípeta necesaria para girar será muy grande, y si el rozamiento con la pista no puede «suministrarla» el vehículo no podrá girar debidamente y se saldrá de la pista. Para evitar esto, se disminuye la velocidad, a fin de mantener así la aceleración centrípeta en un valor no muy grande.

66. Datos: $r = 250$ m; $v = 90$ km · h^{-1} = 25 m · s^{-1}

Al tomar la curva, el vehículo está sometido a una aceleración centrípeta que es la responsable, a su vez, de la inclinación de la masa que cuelga del techo del coche.



— Planteamos las ecuaciones para ambos ejes del cuerpo.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m \cdot a_c \rightarrow T\,\text{sen}\,\alpha = m \cdot a_c \rightarrow T\,\text{sen}\,\alpha = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow T\cos\alpha - m \cdot g = 0 \rightarrow T\cos\alpha = m \cdot g$$

— Si dividimos una ecuación por la otra, tenemos:

$$\frac{\cancel{T}\,\text{sen}\,\alpha}{\cancel{T}\cos\alpha} = \frac{\cancel{m}v^2}{\cancel{m}\,g \cdot r} \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{g \cdot r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = \text{arc tg}\frac{(25\,\cancel{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}})^2}{9{,}8\,\cancel{\text{m}\cdot\text{s}^{-2}} \cdot 250\,\cancel{\text{m}}} = 14°$$

El ángulo de inclinación será de 14°. Cuanto más cerrada sea la curva, tanto mayor será la aceleración centrípeta y, por lo tanto, mayor será el ángulo de inclinación.

67. Datos: $v = 108$ km · h^{-1} = 30 m · s^{-1}; $r = 50$ m

— Podemos aplicar directamente la fórmula de la aceleración centrípeta, ya que disponemos de todos los datos necesarios.

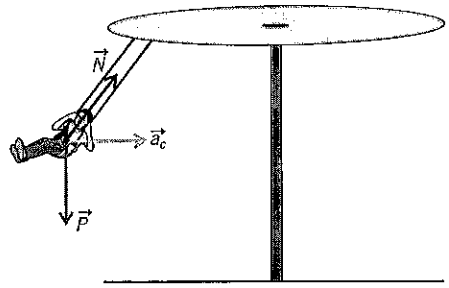
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(30\text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{50\text{ m}} = 18\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

— Si aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección radial:

$$\vec{F}_{\text{neta}\,r} = m \cdot a_c \rightarrow F_{re} = m \cdot a_c$$

Entonces, vemos que la única fuerza que puede suministrar la aceleración necesaria es la fuerza de rozamiento estática, cuyo valor máximo viene limitado por el coeficiente de rozamiento. Unos neumáticos con mayor agarre permiten un rozamiento mayor, y de ahí la importancia de los neumáticos en Fórmula 1, donde se toman curvas muy cerradas a velocidades elevadas.

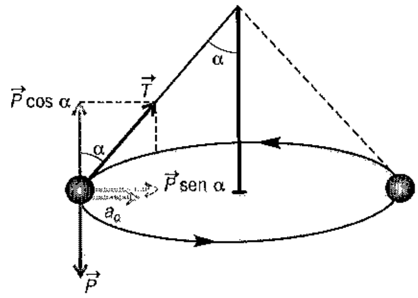
68. Las únicas fuerzas que actúan sobre el niño son el peso y la normal del sillín del columpio. Las fuerzas sobre el sillín son la reacción de la normal, la tensión de las cadenas o cuerdas y el peso del sillín. Si consideramos el sistema sillín y niño como único, la normal y su reacción se anulan y solo nos quedan la tensión y el peso del sistema niño-sillín, como se puede apreciar en la figura.



La masa no influye en el movimiento, pero sí la velocidad de giro. Lógicamente, cuanto mayor sea la velocidad de giro, menor será el tiempo en que se completará una vuelta.

69. Datos: $\omega = 50$ rpm = 5,2 rad · s^{-1}; $l = 1$ m

La única fuerza que actúa sobre el péndulo cónico es la tensión de la cuerda. Debido a la inclinación, una de las componentes de la tensión afecta a la dirección radial y es, por lo tanto, la responsable del giro.



— Planteamos la segunda ley de Newton en la dirección radial y tomamos $v = \omega \cdot r$.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,r} = m \cdot a_c \rightarrow T\,\text{sen}\,\alpha = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow T\,\text{sen}\,\alpha = m \cdot \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} = m \cdot \omega^2 r \text{ (1)}$$

— Dado que tenemos dos incógnitas, planteamos una segunda ecuación que será el equilibrio de fuerzas en la vertical.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,z} = 0 \rightarrow T\cos\alpha - P = 0 \rightarrow T\cos\alpha = m \cdot g \text{ (2)}$$

— Si dividimos (1) y (2), obtenemos una expresión con el ángulo como única incógnita. Además, podemos expresar el radio de giro en función de la longitud de la cuerda $l = r \cdot \text{sen}\,\alpha$.

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 r}{g} \rightarrow \frac{\cancel{\text{sen}\,\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\omega^2 l\,\cancel{\text{sen}\,\alpha}}{g} \rightarrow$$

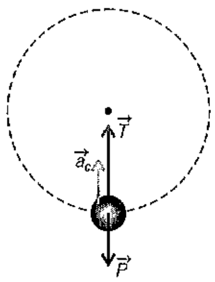
$$\rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 l} \rightarrow \alpha = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}$$

$$\alpha = \arccos\frac{g}{\omega^2 l} = \arccos\frac{9{,}8\,\cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^{-2}}{(5{,}2\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2\,1\,\cancel{\text{m}}} = 69°$$

Podemos ver cómo el resultado no depende de la masa del objeto.

70. Datos: $T_{máx} = 10\ P$; $l = 0{,}5$ m

Cuando hacemos girar una piedra en un plano vertical, hay un punto crítico que es en el punto más bajo, donde la tensión es más elevada debido a que, además de suministrar la aceleración centrípeta necesaria, debe vencer el peso que se le opone.



— Planteamos la segunda ley de Newton para el punto más bajo.

$$\vec{F}_{neta\ r} = m \cdot a_c \rightarrow T - P = m \cdot \omega^2 r \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{T-P}{m \cdot r}}$$

— Como la máxima T posible es $T = 10 \cdot P$, sustituimos en la expresión de la velocidad angular.

$$\omega = \sqrt{\frac{T-P}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{10P-P}{m \cdot r}} = \sqrt{\frac{9\cancel{m}\ g}{\cancel{m}\ r}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9 \cdot 9{,}8\cancel{m} \cdot s^{-2}}{0{,}5\cancel{m}}} = 13\ \text{rad} \cdot s^{-1}$$

Las unidades que aparecen tras los cálculos en realidad son s^{-1}, pero como la magnitud es la velocidad angular sabemos que tenemos que incluir radianes. Esto sucede a menudo con los radianes, ya que es un cociente entre la longitud del arco y su radio, por lo que es una magnitud adimensional.

71. Datos: $m = 3{,}0$ kg; $r = 0{,}50$ m; $l = 1$ m

Según la descripción, se trata de un péndulo cónico. La componente de la tensión en la dirección radial será la responsable del giro.

— Planteamos la segunda ley de Newton en el eje radial, así como en el vertical.

$$\vec{F}_{neta\ r} = m \cdot a_c \rightarrow T \operatorname{sen} \alpha = m \cdot \frac{v^2}{r} \ (1)$$

$$\vec{F}_{neta\ z} = 0 \rightarrow T \cos \alpha - P = 0 \rightarrow T \cos \alpha = m \cdot g \ (2)$$

— Para determinar el ángulo α, podemos usar el radio de la circunferencia.

$$r = l \operatorname{sen}\alpha \rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{l} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = \text{arc sen} \frac{r}{l} = \text{arc sen} \frac{0{,}50\cancel{m}}{1\cancel{m}} = 30°$$

— Tomando la ecuación (2), podemos despejar la tensión y, a continuación, despejar en la ecuación (1) la velocidad.

$$T \cos \alpha = m \cdot g \rightarrow T = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha}$$

$$T = \frac{3{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\cos 30°} = 34\ \text{N}$$

$$T \operatorname{sen} \alpha = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{T \operatorname{sen} \alpha \cdot r}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{34\ \text{N} \cdot \operatorname{sen} 30° \cdot 0{,}50\ \text{m}}{3{,}0\ \text{kg}}} = 1{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

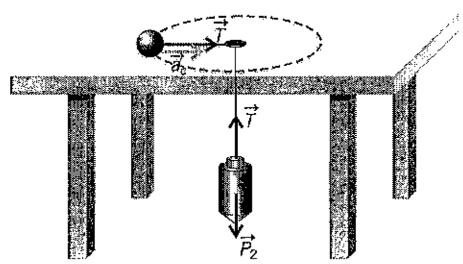
— Podemos comprobar que en este último paso las unidades son las correctas.

$$[v] = \sqrt{\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\cancel{\text{kg}} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}}{\cancel{\text{kg}}}} = \sqrt{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La tensión de la cuerda es de 34 N y el módulo de la velocidad del objeto es de 1,7 m·s^{-1}.

72. Datos: $r = 0{,}10$ m; $m_1 = 0{,}5$ kg; $m_2 = 3{,}5$ kg

Lo que mantiene la masa en suspensión en equilibrio es la tensión de la cuerda. Al mismo tiempo, esa tensión es la responsable del giro de la masa sobre la mesa.



— Planteamos la segunda ley de Newton en la masa en suspensión para calcular la tensión necesaria para mantenerla en equilibrio.

$$\vec{F}_{neta\ 2} = 0 \rightarrow T - P_2 = 0 \rightarrow T = m_2 \cdot g$$

— Luego, planteamos la segunda ley de Newton en la otra masa para determinar la aceleración centrípeta necesaria para suministrar esa tensión.

$$\vec{F}_{neta\ 1} = m_1 \cdot a_c \rightarrow T = m_1 \cdot a_c \rightarrow a_c = \frac{T}{m_1} = \frac{m_2 \cdot g}{m_1}$$

— La expresión de la aceleración centrípeta en función del módulo de la velocidad nos permitirá hallar dicho módulo.

$$a_c = \frac{v^2}{r} \rightarrow a_c = \frac{m_2 \cdot g}{m_1} \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{m_2 \cdot g}{m_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{m_2 \cdot g \cdot r}{m_1}}$$

$$v = \sqrt{\frac{m_2 \cdot g \cdot r}{m_1}} = \sqrt{\frac{3{,}5\cancel{\text{kg}} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0{,}10\ \text{m}}{0{,}5\cancel{\text{kg}}}} =$$

$$= 2{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Si la velocidad fuera menor, la tensión sería también menor y no podría equilibrar el peso de la masa suspendida, por lo que todo el sistema caería a través del agujero de la mesa hacia el suelo (la masa sobre la mesa describiría una espiral hasta llegar al hueco y caer a través de él).

73. Datos: $l = 1{,}0$ m

En el límite en el que la cuerda se mantiene tensa en el punto más alto, la tensión es prácticamente nula, pero sigue habiendo giro, es decir, aceleración centrípeta.

— En el punto más alto, tanto el peso como la tensión toman la dirección radial y hacia el centro, pero en la situación descrita la tensión es prácticamente 0.

$$\vec{F}_{\text{neta }A} = m \cdot a_c \rightarrow P + T = m \cdot \frac{v_A^2}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow P = m \cdot \frac{v_A^2}{r} \rightarrow v_A = \sqrt{\frac{\cancel{m}\, g \cdot r}{\cancel{m}}}$$

$$v_A = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 1{,}0\ \text{m}} = 3{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

En el punto más bajo la velocidad será la misma, ya que se trata de un movimiento con velocidad constante.

74. Datos: r; g; T

La fuerza que permite al paquete girar con el tiovivo es la fuerza de rozamiento. Así, esta fuerza de rozamiento debe poder suministrar al paquete la misma aceleración centrípeta que el tiovivo. De lo contrario, el paquete se deslizará. Para que esto suceda, la fuerza de rozamiento estática máxima ($F_{re\,\text{máx}} = \mu_e \cdot N$) debe ser igual o superior a la centrípeta.

— Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje radial y en el eje vertical. Imponemos que la fuerza estática máxima sea mayor o igual que la centrípeta.

$$\vec{F}_{\text{neta }r} = m \cdot a_c \rightarrow F_{re} = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu_e N \geq m \cdot \omega^2 \cdot r \ (1)$$

$$\vec{F}_{\text{neta }z} = 0 \rightarrow N - P = 0 \rightarrow N = m \cdot g \ (2)$$

— Si sustituimos (2) en (1) y expresamos la velocidad angular en función del periodo $\omega = 2\pi\, T^{-1}$, hallaremos una expresión que nos relacione el coeficiente de rozamiento con el resto de los parámetros.

$$\mu_e \cancel{m}\, g \geq \cancel{m}\omega^2 r \rightarrow \mu_e \geq \frac{\omega^2 r}{g} \rightarrow \mu_e \geq \frac{(2\pi)^2 r}{g \cdot rT^2}$$

Mientras el coeficiente de rozamiento estático sea igual o superior a este valor, la fuerza de rozamiento será igual a la fuerza centrípeta (recordemos que la cantidad $\mu_e\, N$ es solo para hallar su máximo; su valor real puede ser cualquiera desde 0 hasta este tope). Si el valor de μ_e es inferior a ese, entonces el paquete se deslizará y el rozamiento que existirá será el dinámico (siempre inferior al estático).

75. Datos: $l = 1{,}2$ m; $T_{\text{máx}} = 50$ N; $h = 6$ m

El punto crítico en el que la tensión es máxima es en el punto más bajo, dado que la tensión debe proporcionar la fuerza centrípeta necesaria oponiéndose al peso.

a) Aplicamos la segunda ley de Newton en el punto más bajo.

$$\vec{F}_{\text{neta }r} = m \cdot a_c \rightarrow T - P = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{(T-P)\cdot r}{m}}$$

En el momento de romperse la cuerda: $T = 50$ N. Sustituyendo, hallaremos la velocidad en dicho momento.

$$v = \sqrt{\frac{(T_{\text{máx}} - P)\cdot r}{m}} = \sqrt{\frac{(50\ \text{N} - 0{,}200\ \text{kg}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})\cdot 1{,}2\ \text{m}}{0{,}200\ \text{kg}}}$$

$$v = 17\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) Para calcular el alcance de la piedra, consideraremos las ecuaciones del movimiento parabólico con velocidad inicial $v_0 = v_x = 17\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a t^2 \rightarrow 0 = 6\,\text{m} + \frac{1}{2}(-9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})\cdot t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \sqrt{\frac{6\cancel{\text{m}}}{4{,}9\cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^{-2}}} = 1{,}1\ \text{s}$$

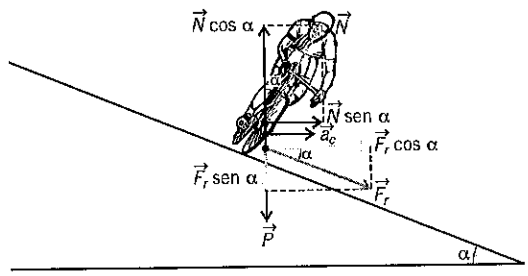
Sustituyendo en la ecuación de las x:

$$x = x_0 + v_x t = 0 + 17\ \text{m}\,\cancel{\text{s}^{-1}} \cdot 1{,}1\,\cancel{\text{s}} = 19\ \text{m}$$

El alcance es de 19 m.

76. Datos: $r = 20$ m; $\mu = 0{,}10$; $v = 40\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 11{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Como podemos ver en el diagrama de fuerzas, para que el vehículo no se salga de la curva, la componente del rozamiento $\vec{F}_r \cdot \cos\alpha$ y la componente de la fuerza normal $\vec{N}_r \cdot \text{sen}\,\alpha$ deben poder suministrar la aceleración centrípeta necesaria al vehículo.



— Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje x:

$$\vec{F}_{\text{neta }x} = m \cdot \vec{a} \rightarrow N\,\text{sen}\,\alpha + F_r\cos\alpha = m \cdot a_c \rightarrow$$

$$\rightarrow N\,\text{sen}\,\alpha + \mu N\cos\alpha = m \cdot a_c \ \ (1)$$

— Dado que tenemos dos incógnitas N y a_c, plantearemos el equilibrio de fuerzas en el eje y.

$$\vec{F}_{\text{neta }y} = 0 \rightarrow N\cos\alpha - F_r\text{sen}\,\alpha - P = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow N\cos\alpha - \mu N\,\text{sen}\,\alpha = mg \ \ (2)$$

— Podemos despejar en ambas ecuaciones la fuerza normal o, sencillamente, dividir (1) por (2) y llegaremos a la siguiente expresión:

$$\frac{\cancel{N}(\text{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cancel{N}(\cos\alpha - \mu\,\text{sen}\,\alpha)} = \frac{\cancel{m}\, a_c}{\cancel{m}\, g} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\,\alpha + \mu\cos\alpha = \frac{v^2}{rg}(\cos\alpha - \mu\,\text{sen}\,\alpha)$$

— Una vez expresada la aceleración centrípeta en función de la velocidad del vehículo, para despejar el ángulo previamente dividiremos ambos miembros de la ecuación por el cos α, para así despejar sencillamente la tangente.

$$\text{tg}\,\alpha + \mu = \frac{v^2}{rg}(1 - \mu\,\text{tg}\,\alpha) \rightarrow \text{tg}\,\alpha + \mu\frac{v^2}{rg}\text{tg}\,\alpha = \frac{v^2}{rg} - \mu$$

— Despejando α:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{v^2}{r} - \mu g}{g - \mu\frac{v^2}{r}} = \frac{\frac{(11,\hat{1}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{20\ \text{m}} - 0,10\cdot 9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{9,8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} - 0,10\cdot\frac{(11,\hat{1}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{20\ \text{m}}}$$

$$\text{tg}\,\alpha = 0,58 \rightarrow \alpha = 30°$$

— Podemos ver que si el ángulo es inferior a 30°, la tangente y el seno disminuirán y el coseno aumentará, por lo que si tomamos la ecuación (1):

$$N\,\text{sen}\,\alpha + \mu N\cos\alpha = m\cdot a_c$$

Vemos que la aportación de N disminuirá, y aunque la de μN aumente, como $0 < \mu < 1$, el balance global será que no se podrá suministrar la aceleración centrípeta necesaria y el vehículo se saldrá de la pista.

4 DINÁMICA DE ROTACIÓN Pág. 296

77. Datos: $r = 1,50\cdot 10^{11}$ m; $m = 5,98\cdot 10^{24}$ kg; $T = 1$ año $= 31\,536\,000$ s

— El momento angular de la Tierra respecto al Sol es un vector perpendicular al plano formado por el vector de posición de la Tierra con respecto al Sol y por el vector velocidad de la Tierra, y cuyo valor se calcula de la siguiente manera:

$$L = r\,m\,v\,\text{sen}\,\alpha$$

— El ángulo que forman el vector de posición de la Tierra y su velocidad es de 90°, pues nos indican que la órbita de la Tierra es circular. Por otra parte, hallamos la velocidad de la Tierra a partir de su velocidad angular.

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 1,50\cdot 10^{11}\ \text{m}}{31\,536\,000\ \text{s}} = 2,99\cdot 10^4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Sustituyendo, obtenemos el siguiente resultado:

$$L = 1,50\cdot 10^{11}\ \text{m}\cdot 5,98\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot 2,99\cdot 10^4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$L = 2,68\cdot 10^{40}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

78. Datos: $R = 279,5$ mm; $m = 3,2$ kg; $\omega_0 = 12$ rad·s^{-1}; $\omega = 0$; $t = 320$ s

— El momento de fuerza está relacionado con la aceleración angular de la siguiente manera:

$$M = m R^2\alpha$$

— Hallamos la aceleración angular (negativa) de la rueda porque sabemos que se mueve con MCUA.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow \alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$\alpha = \frac{-12\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{320\ \text{s}} = -3,75\cdot 10^{-2}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

— Sustituyendo, el módulo del momento de fuerza será:

$$M = 3,2\ \text{kg}\cdot(0,2795\ \text{m})^2\cdot 3,75\cdot 10^{-2}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$M = 9,4\cdot 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

79. Datos: $m = 2,94$ kg; $R = 0,17$ m; $F = 32$ N

— El momento de fuerza está relacionado con la aceleración angular de la siguiente manera:

$$M = m R^2\alpha \rightarrow \alpha = \frac{M}{m R^2}$$

— El momento de fuerza se calcula de la siguiente manera:

$$M = R\,F\,\text{sen}\,\alpha = R\,F\,\text{sen}\,90°$$

$$M = 0,17\ \text{m}\cdot 32\ \text{N} = 5,44\ \text{N}\cdot\text{m}$$

— Sustituyendo, obtenemos el valor de la aceleración angular.

$$\alpha = \frac{M}{mR^2} = \frac{5,44\ \text{N}\cdot\text{m}}{2,94\ \text{kg}\cdot(0,17\ \text{m})^2} = 64\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

80. El principio de conservación del momento angular establece que, en ausencia de un momento de fuerza externo, el momento angular de un sistema permanece constante. Cuando un gato gira la cola mientras cae, disminuye la distancia entre esta y el eje de giro, por lo que aumentará la velocidad a la que gira (pues el momento angular permanece constante), pudiendo de esta manera colocarse sobre sus patas. Es lo mismo que sucede cuando una patinadora gira más rápido sobre sí misma al plegar los brazos sobre su cuerpo.

SÍNTESIS Pág. 296

81. Respuesta sugerida:

En el *applet* podemos plantear situaciones distintas. Se puede trabajar con o sin rozamiento *(«ice»)*, incluso hay una pantalla que te permite regular el rozamiento estático y dinámico y la masa. También se puede cambiar la inclinación de la pendiente *(«ramp angle»)*, añadir muelles *(«bouncy»)*. En el informe podemos partir de la descripción de situaciones más sencillas hasta llegar a las más complejas. Estos serían los puntos que habría que tratar:

— Superficie sin rozamiento ni inclinación

— Superficie sin rozamiento inclinada

— Superficie con rozamiento sin inclinación

— Superficie con rozamiento inclinada

En todos los casos, es interesante aplicar una misma gradación de fuerzas (por ejemplo, de 10 N, 100 N, 500 N, 1 000 N) para poder hacer un estudio comparativo. También es interesante diferenciar y, por tanto, describir los efectos en el caso en que la fuerza es aplicada puntualmente de los efectos en el caso en que se aplica durante un intervalo de tiempo.

En los casos con rozamiento, además, habría que tomar al menos dos valores distintos de rozamiento y describir lo que sucede cuando se aplica una fuerza inferior al rozamiento estático y lo que sucede cuando se aplica una determinada fuerza superior a la del rozamiento y se suelta el objeto.

En los casos con inclinación, habría que usar dos posiciones: una, en la que el objeto es empujado subiendo por la pendiente, y otra, bajando por la pendiente.

82. Datos: $l = 1{,}0$ m

Para que el agua no se derrame, la velocidad angular del cubo debe ser suficiente como para mantener la aceleración centrípeta en el punto más alto.

— Planteamos la segunda ley de Newton en el punto más alto.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,r} = m \cdot a_c \rightarrow N + P = m \cdot \omega^2 r \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{(N+P)}{m \cdot r}}$$

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{(0 + \cancel{m}\, g)}{\cancel{m} \cdot r}} = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}8\,\cancel{m} \cdot s^{-2}}{1\,\cancel{m}}} =$$

$$= 3{,}1\ \text{rad} \cdot s^{-1}$$

En el caso límite en el que el agua está a punto de caer, es cuando casi pierde contacto con el cubo, por lo que la fuerza normal sobre el agua en ese momento es prácticamente 0.

Si la velocidad angular es inferior a ese valor, la aceleración sobre el agua seguirá siendo g, pero ya no será una aceleración centrípeta, es decir, el efecto de dicha aceleración no será el de hacer girar el agua, sino el de hacer que «caiga hacia abajo» como lo entendemos cotidianamente.

Evaluación (Pág. 298)

1. b) La moneda cae en la base del mástil, dado que lleva la misma velocidad horizontal que llevaba el barco. Así pues, como moneda y mástil llevan la misma velocidad horizontal, lo único que sucede es que la moneda cae a plomo sobre la base del mástil.

2. Soplando, pues al ejercer una fuerza el aire que expulsamos sobre la atmósfera, esta ejercerá sobre nosotros una fuerza de igual valor y de sentido contrario que, por pequeña que sea, permitirá que comencemos a movernos (gracias a que no existe rozamiento).

3. Si consideramos el sistema formado por los dos carros, no hay ninguna fuerza externa que actúe sobre ellos, por lo que se puede aplicar la conservación del momento lineal.

$$\vec{p}_0 = m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot v + 2\,m_1 \cdot (-0{,}5v) = 0\ \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

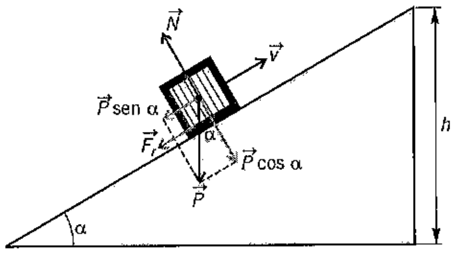
$$\vec{p}_f = m_1 \cdot \vec{v}_f + m_2 \cdot \vec{v}_{2f} = (m_1 + 2\,m_1) \cdot v_f$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_f \rightarrow v_f = 0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. Al alzar el pájaro el vuelo, la fuerza normal actuará solo contraponiéndose al peso de la caja y, por lo tanto, disminuirá. Dado que la balanza mide la reacción de la fuerza normal, esta marcará un valor más pequeño. En el caso del pez, la lectura no variará. Veamos esto con más detalle. Cuando el pez está en el fondo de la pecera la balanza mide su normal y la de la pecera, con el agua. Cuando el pez está nadando, sobre él actúan el peso y una fuerza de empuje debido al principio de Arquímedes. La reacción del empuje estará entonces en el agua, con lo que la normal de la pecera y el agua sobre la balanza aumentará en una cantidad igual a ese empuje. Como la densidad media del pez es prácticamente la del agua, el empuje y el peso del pez son casi iguales, por lo que la balanza no percibirá ninguna diferencia. En realidad, el mismo argumento valdría para el caso del pájaro, con la diferencia de que la tara de la balanza ya incluye la fuerza del aire sobre su superficie (10^5 Pa × superficie de la balanza) y que el empuje del pájaro, al ser la densidad del aire muy pequeña, es completamente insignificante.

5. Datos: $h = 3{,}0$ m; $v_0 = 43{,}2\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 12\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\alpha = 25°$

Mientras el objeto sube por la pendiente, las fuerzas paralelas al plano inclinado que actúan sobre él son el rozamiento y una componente del peso. Además, ambas se oponen al movimiento. Para poder aplicar la segunda ley de Newton, como desconocemos el rozamiento, tendremos que hallar por cinemática el valor de la aceleración.



— Para aplicar la ecuación que nos relaciona velocidad con aceleración y desplazamiento, antes tendremos que expresar este último en función de la altura.

$$\Delta x = \frac{h}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{3{,}0\ \text{m}}{\text{sen}\ 25°} = 7{,}1\ \text{m}$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \rightarrow a = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2\Delta x} = \frac{(-12\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 7{,}1\ \text{m}}$$

$$a = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

— Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección del movimiento.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,x} = m \cdot \vec{a} \rightarrow -P\ \text{sen}\,\alpha - F_r = m \cdot (-a) \rightarrow$$

$$\rightarrow -P\ \text{sen}\,\alpha - \mu N = -m \cdot a \quad (1)$$

— Para determinar la fuerza normal, aplicamos equilibrio de fuerzas en la dirección perpendicular al movimiento.

$$\vec{F}_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow N - P\cos\alpha = 0 \rightarrow N = P\cos\alpha \quad (2)$$

— Sustituimos (2) en (1) y despejamos μ.

$$-P\ \text{sen}\,\alpha - \mu P\cos\alpha = -m \cdot a \rightarrow$$

$$\rightarrow -\cancel{m}\, g\ \text{sen}\,\alpha - \mu \cancel{m}\, g\cos\alpha = -\cancel{m} \cdot a$$

$$-g\ \text{sen}\alpha - \mu g\cos\alpha = -a \rightarrow \mu = \frac{a - g\ \text{sen}\alpha}{g\cos\alpha}$$

$$\mu = \frac{a - g\ \text{sen}\,\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{10{,}1\ \cancel{\text{ms}^{-2}} - 9{,}8\ \text{sen}\,25\ \cancel{\text{ms}^{-2}}}{9{,}8\cos 25\ \cancel{\text{ms}^{-2}}} = 0{,}68$$

El coeficiente de rozamiento será de 0,68. En este caso, las dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo se oponen a su movimiento, lo desaceleran, y de ahí el signo negativo en la aceleración.

6. Datos: $m = 80$ kg; $\alpha = 30°$; $F = 200$ N

Si la fuerza mínima para mantener en equilibrio la caja es de 200 N, significa que tenemos que considerar que el rozamiento estático «nos está ayudando tanto como puede» y, por lo tanto, actúa en contra de la componente paralela al peso con su valor límite.

— Aplicamos equilibrio de fuerzas.

$$\vec F_{\text{neta}\,x} = 0 \rightarrow F_{\text{re máx}} + F - P \operatorname{sen}\alpha = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \mu_e N + F - m\,g \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\vec F_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow N - P\cos\alpha = 0 \rightarrow N = P\cos\alpha$$

$$\mu_e m\,g\cos\alpha + F - m\,g\operatorname{sen}\alpha = 0 \rightarrow \mu_e = \frac{m\,g\operatorname{sen}\alpha - F}{m\,g\cos\alpha}$$

$$\mu_e = \frac{80\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\operatorname{sen}30° - 200\text{ N}}{80\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cos 30°} = 0{,}28$$

— A medida que vayamos incrementando la fuerza, el rozamiento estático irá disminuyendo hasta que eventualmente tomará sentido contrario a la fuerza que apliquemos. Hasta que no excedamos la suma de su valor máximo y la componente del peso de la caja, no lograremos deslizarla hacia arriba.

$$\vec F_{\text{neta}\,x} = 0 \rightarrow -F_{\text{re máx}} + F - P\operatorname{sen}\alpha = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\mu_e m\,g\cos\alpha + F - m\,g\operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$F = \mu_e m\,g\cos\alpha + m\,g\operatorname{sen}\alpha = m\,g(\mu_e\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$$

$$F = 80\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\,(0{,}28\cos 30° - \operatorname{sen}30°) =$$

$$= 5{,}8\cdot 10^2\text{ N}$$

Notemos que, una vez que se alcance esa fuerza, la caja comenzará a deslizar, por lo que el rozamiento tomará un valor menor, el del rozamiento cinético.

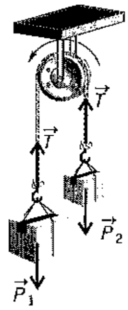
7. Respuesta sugerida:

Estas fuerzas son interacciones electromagnéticas repulsivas entre las partículas que forman parte de las superficies en contacto.

8. Datos: $a = \dfrac{g}{5}$

Una máquina de Atwood no es más que un sistema de dos cuerpos en una polea con una masa que consideraremos despreciable. Si aplicamos la segunda ley de Newton al sistema con las condiciones propuestas, hallaremos la relación de masas.

— Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje de movimiento.



$$\vec F_{\text{neta}\,x} = m\cdot\vec a \rightarrow m_1\cancel{g} - \cancel{T} + \cancel{T} - m_2\cancel{g} = (m_1+m_2)\frac{\cancel{g}}{5}$$

$$\vec F_{\text{neta}\,x} = m\cdot\vec a \rightarrow m_1 - m_2 = \frac{m_1+m_2}{5} \rightarrow 4m_1 = 6m_2 \rightarrow$$

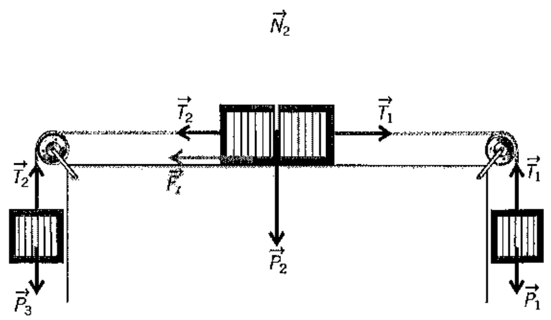
$$\rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 1{,}5 \rightarrow m_1 = 1{,}5\,m_2$$

Lógicamente, la mayor masa es la que marca el sentido del movimiento.

9. Datos: $m_1 = 10$ kg; $m_2 = 4$ kg; $m_3 = 3$ kg; $\mu = 0{,}40$

Como los tres bloques están unidos por una cuerda y experimentan el mismo movimiento, podemos aplicar la segunda ley de Newton a todo el sistema, considerando que se moverá en la dirección y el sentido del peso de la masa mayor. Entonces, la fricción del bloque sobre la mesa será en el sentido opuesto de este movimiento.

— Aplicamos la segunda ley de Newton en el eje de movimiento.



$$\vec F_{\text{neta}\,x} = m\cdot\vec a$$

$$m_1\,g - \cancel{T_1} + \cancel{T_1} - \mu N - \cancel{T_2} + \cancel{T_2} - m_3\,g = (m_1+m_2+m_3)a$$

— Para encontrar la normal del cuerpo sobre la mesa, tan solo tenemos que considerar el equilibrio de fuerzas en el eje perpendicular a la mesa.

$$\vec F_{\text{neta}\,y} = 0 \rightarrow N - m_2\,g = 0 \rightarrow N = m_2\,g$$

$$m_1\,g - \mu m_2\,g - m_3\,g = (m_1+m_2+m_3)a \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{m_1\,g - \mu m_2\,g - m_3\,g}{m_1+m_2+m_3}$$

$$a = \frac{m_1 - \mu m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g =$$

$$= \frac{10\cancel{kg} - 0{,}40 \cdot 4\cancel{kg} - 3\cancel{kg}}{17\cancel{kg}} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a = 3{,}1\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

— Para hallar las tensiones, aplicaremos la segunda ley de Newton en particular para cada uno de los bloques m_1 y m_3.

$$\vec{F}_{\text{neta }1} = m_1 \cdot \vec{a} \rightarrow m_1 g - T = m_1 \cdot a$$

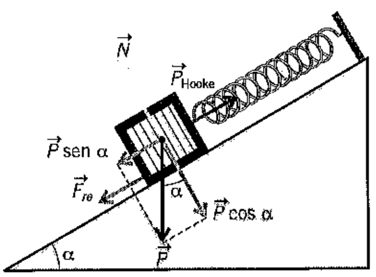
$$T = m_1(g - a) = 10\ \text{kg} \cdot (9{,}8 - 3{,}1)\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 67\ \text{N}$$

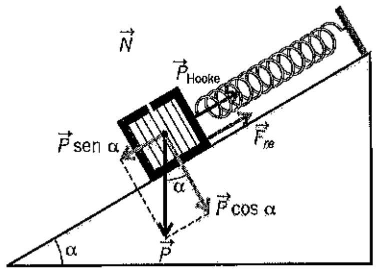
$$\vec{F}_{\text{neta }3} = m_3 \cdot \vec{a} \rightarrow T_2 - m_3\, g = m_3 \cdot a$$

$$T_2 = m_3(g + a) = 3\ \text{kg} \cdot (9{,}8 - 3{,}1)\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 39\ \text{N}$$

10. Datos: $m = 7{,}0$ kg; $\alpha = 60°$; $\Delta x = 16{,}4$ cm; $\mu = 0{,}10$

El bloque se mantiene sobre el plano inclinado debido a la fuerza de Hooke del muelle, mientras que la componente del peso paralela al plano inclinado se le opone. En cuanto a la fricción estática, puede tomar dos sentidos, lo que establece una región de soluciones para el problema, ya que además puede tomar cualquier valor comprendido entre $+\mu_e N$ y $-\mu_e N$.





Aplicamos equilibrio de fuerzas en ambos ejes y resolvemos.

$$\vec{F}_{\text{neta }x} = 0 \rightarrow P \operatorname{sen} \alpha \pm \mu_e N - k\Delta x = 0$$

$$\vec{F}_{\text{neta }y} = 0 \rightarrow N - m\, g \cos \alpha = 0 \rightarrow N = m\, g \cos \alpha$$

$$m\, g \operatorname{sen} \alpha \pm \mu_e m\, g \cos \alpha - k\Delta x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow k = \frac{m\, g \operatorname{sen} \alpha \pm \mu_e m\, g \cos \alpha}{\Delta x}$$

$$k = \frac{m\, g\,(\operatorname{sen} \alpha \pm \mu_e \cos \alpha)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{7\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}(\operatorname{sen} 60° \pm 0{,}10 \cdot \cos 60°)}{16{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}$$

Por lo tanto, los posibles valores de k serán:

$$3{,}4 \cdot 10^2\ \text{N} \cdot \text{m} \le k \le 3{,}8 \cdot 10^2\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$$

En la realidad, el valor de la constante del muelle es único (no pueden tener dos o más valores al mismo tiempo) y lo que se establece es una región de equilibrio, es decir, una franja de posiciones (y por ende valores de Δx) en el que el cuerpo se mantendría en equilibrio.

11. Respuesta sugerida:

La importancia de la masa reside en que la ley de Hooke no se cumple exactamente cuando las masas son relativamente elevadas en comparación con la k del muelle. Además, tampoco pueden cogerse masas demasiado parecidas porque luego la precisión de las medidas se ve afectada. En conclusión: hay que usar una variedad de masas, sabiendo que algunas medidas se alejarán de la ley de Hooke y otras van a ser imprecisas por limitaciones físicas y de instrumentos de medida.

12. Datos: $m = 0{,}085$ kg; $R = 0{,}15$ m; $\omega = 33$ rpm $= 3{,}46$ rad·s^{-1}

El momento angular del aro con respecto a su centro se calcula de la siguiente manera:

$$L = r\,m\,v\ \operatorname{sen} \alpha = r^2 m\, \omega \operatorname{sen} \alpha$$

Donde α es el ángulo formado por el vector de posición de cualquier punto del aro con respecto al centro y la velocidad de cualquier punto de este, que en este caso vale 90°. Sustituyendo los datos proporcionados en el enunciado, queda:

$$L = (0{,}15\ \text{m})^2 \cdot 0{,}085\ \text{kg} \cdot 3{,}46\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$L = 6{,}7 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

13. Respuesta sugerida:

Este texto puede reunir algún aspecto tratado en la unidad anterior, como es la necesidad de dar estabilidad al coche con un centro de gravedad bajo. Referente a la unidad actual, se debe comentar la necesidad del uso de materiales ligeros para facilitar una mayor velocidad y mejor control del vehículo. Cuanto menor sea la masa, tanto más fácil será imprimirle velocidad. Además, si mantenemos la masa en un valor bajo, la cantidad de movimiento se mantendrá en un valor también manejable. Recordemos que si la cantidad de movimiento es muy elevada, eso significa que va a ser difícil cambiar el movimiento del vehículo.

Por otro lado, hay que tener en cuenta el agarre de los neumáticos para poder tomar las curvas cerradas con seguridad. Cuando la curva es muy cerrada y la velocidad es elevada, necesitamos un mayor agarre, es decir, un coeficiente de rozamiento elevado. Además, si llueve el circuito va a ser más resbaladizo, ya que las finas películas de agua disminuyen mucho el rozamiento.

Zona + (Pág. 299)

— *El primer gravitómetro: la Torre de Pisa*

- Respuesta sugerida:

  Debemos leer detenidamente la noticia y visionar el vídeo propuesto en el enlace.

  Puede comenzarse, tras la lectura y el visionado del vídeo que se propone, comentando que el famoso experimento de Galileo de caída libre desde lo alto de la torre de Pisa es, casi con toda seguridad, una leyenda (al igual que sucede con la conocida manzana de Newton).

  A continuación, debería recordarse por qué todos los objetos se mueven, en las proximidades de la Tierra, con la misma aceleración (independientemente de su masa) y debería introducirse, de una manera muy sencilla, la idea de que en el ámbito microscópico el comportamiento de las partículas debe estudiarse con ayuda de una nueva rama de la física –la mecánica cuántica– cuyas principales ideas chocan con el determinismo imperante en el ámbito macroscópico.

  El funcionamiento del interferómetro debería ser explicado, aunque sea superficialmente, para entender que los átomos deben ser enfriados para disminuir su velocidad y, de esa manera, poder calcular de manera más sencilla el tiempo que tardan en caer. Si la velocidad de los átomos es demasiado grande, es muy difícil realizar mediciones de tiempos, incluso habría que tener en cuenta los posibles efectos relativistas.

— *Los cohetes y las leyes de Newton*

- Respuesta sugerida:

  Tras visionar el vídeo y leer el texto, respondemos a las cuestiones planteadas.

  Un cohete es un típico ejemplo de objeto cuya masa varía (disminuyendo muy rápidamente) conforme aumenta su velocidad al separarse de la Tierra. Por eso, la segunda ley de Newton aplicada a su movimiento difiere de la forma en que se aplica a un objeto cuya masa no varía.

- El enunciado de la segunda ley de Newton aplicada al movimiento del cohete quedaría tal y como aparece en el recuadro de «Amplía» de la página 277.

  Podemos observar en ella que la fuerza que impulsa al cohete contiene dos sumandos, y en uno de ellos aparece la variación de la masa del cohete con respecto al tiempo.

- La tercera ley de Newton aplicada al movimiento del cohete quedaría como sigue: la fuerza que ejercen los gases expulsados procedentes de la combustión del combustible (acción) ejerce una fuerza sobre el aire que lo rodea, de manera que este realizará sobre el cohete una fuerza de igual valor y de sentido contrario (reacción), que es la fuerza ascensional que permite su movimiento.

- Las fuerzas que intervienen en el movimiento del cohete son las siguientes: a favor del movimiento (hacia arriba) se encuentra la fuerza que lo impulsa, que se corresponde con el segundo sumando de la ecuación escrita en el primer punto. Y en sentido contrario al movimiento (hacia abajo) se encuentra su peso, el cual va reduciéndose conforme el cohete asciende debido a la disminución del valor del campo gravitatorio, haciéndose nulo en el espacio exterior (a una distancia muy grande de la Tierra).

- Existen múltiples ejemplos de objetos cuyo movimiento se explica con ayuda de la tercera ley de Newton: el avance de un avión debido al impulso de sus motores, la expulsión de tinta por un calamar que le permite avanzar por el agua, el simple hecho de caminar por el suelo debido a la reacción que este ejerce sobre nuestros pies, la velocidad de retroceso de las armas de fuego, etc.