14 Movimiento armónico simple

En contexto (pág. 351)

a. Respuesta sugerida:

— Hechos conocidos sobre los péndulos: los péndulos constan de una masa unida al extremo de un hilo; pueden oscilar y se emplean, por ejemplo, para medir el tiempo. Nos podemos plantear cómo se relaciona el tiempo de oscilación con las características del péndulo y cómo afecta el rozamiento con el aire a la oscilación del péndulo. El movimiento del péndulo sugiere una analogía con el vaivén de las olas del mar.

— Después de practicar con la simulación, se aprende que el tiempo de oscilación depende de la longitud del hilo; de forma que, a mayor longitud, mayor período de oscilación. También se aprende que, en ausencia de fricción o rozamiento, el período es independiente del valor de la masa.

Nos podemos plantear para qué valor del ángulo inicial y para qué grado de rozamiento, dos péndulos de igual longitud, pero de distinta masa, dejan de tener el mismo período; y cómo el emplazamiento del péndulo (Luna, Tierra, Júpiter, planeta X) afecta a su movimiento.

El movimiento del péndulo sugiere también una analogía con las oscilaciones de los resortes elásticos.

b. Respuesta sugerida:

— El péndulo oscilará con mayor rapidez cuanto mayor sea la altura a la que se deja caer. Asimismo, oscilará más rápido cuanto mayor sea la fuerza que lo tire hacia abajo; es decir, cuanto mayor sea la aceleración de la gravedad del lugar.

— Depende de la longitud del péndulo, de la aceleración de la gravedad del lugar donde está el péndulo, y del grado de fricción con el aire.

— En la simulación se aprecia que la velocidad del péndulo depende del desplazamiento angular, de forma que, para pequeñas oscilaciones, el péndulo se mueve más despacio que para oscilaciones grandes. En cualquier caso, el período de oscilación para el mismo péndulo es constante y solo depende de su longitud y de la gravedad. En ausencia de rozamiento, el movimiento del péndulo es independiente de la masa del péndulo. Ahora bien, cuando hay fricción, el movimiento del péndulo sí depende del desplazamiento angular, de forma que, a mayor fricción y a mayor desplazamiento angular, hay mayor dependencia del movimiento del péndulo con el valor de la masa. En estas circunstancias, el movimiento del péndulo de menor masa se amortigua antes que el de mayor masa.

c. Respuesta sugerida:

— Las principales aplicaciones del movimiento armónico simple (MAS) son en el campo de la medida del tiempo (en relojes de péndulo, o en relojes basados en vibraciones de cristales de cuarzo). Esto se debe a la principal característica del MAS: que el período de oscilación del cuerpo es independiente de la amplitud de la oscilación. Por ello, aun cuando un péndulo oscile con una amplitud cada vez menor, seguirá manteniendo constante su período.

— Otras aplicaciones del MAS son:

- En el metrónomo. Se utiliza el MAS para marcar el ritmo, puesto que el período en el MAS es constante.
- En los amortiguadores de los vehículos. Se utilizan muelles que se mueven de forma que disipan rápidamente la energía potencial adquirida por un bache del camino. Se trata de MAS amortiguados.
- En actividades lúdicas. En columpios y juguetes de muelles, o tipo tentetieso, el MAS tiene lugar al desplazar el cuerpo de su posición de equilibrio estable.

Problemas resueltos (págs. 363 a 365)

1. Datos: $A = 1$ mm; $v(x = 0) = 2\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v(t = 0) = 0$

— En el MAS, la velocidad se relaciona con la posición por:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

De esta expresión, determinamos el inverso de la pulsación:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{|v|}$$

— Sustituimos los datos del enunciado para hallar el período a partir de la pulsación:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{A^2 - x^2}}{|v|} = \frac{2\pi\sqrt{(10^{-3}\ \cancel{\text{m}})^2 - (0\ \cancel{\text{m}})^2}}{2\ \cancel{\text{m}} \cdot \text{s}^{-1}} =$$

$$= \pi 10^{-3}\ \text{s} = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

Se ha expresado el resultado con una cifra significativa, de acuerdo con el número de cifras significativas de los datos. Por tanto, el período es de 3 ms.

— La ecuación de la velocidad en el MAS es:

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

— La pulsación es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{\pi 10^{-3}\ \text{s}} = 2 \cdot 10^3\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

— La ecuación de la velocidad, según el Sistema Internacional de Unidades (SI), es:

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi) = 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3 \cos(2 \cdot 10^3 t + \varphi)$$

$$v = 2\cos(2 \cdot 10^3 t + \varphi)$$

— Hallamos la fase inicial a partir del valor inicial de la velocidad:

$$0 = A\omega\cos(0+\varphi) \rightarrow \varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

— Por tanto, hay dos posibles soluciones para la ecuación de la velocidad:

$$v = 2\cos\left(2\cdot 10^3 t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v = 2\cos\left(2\cdot 10^3 t + \frac{3\pi}{2}\right)\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

2. Datos: Amplitud A; $v = \dfrac{v_{máx}}{2}$

— En el MAS, las ecuaciones de la elongación y de la velocidad son, respectivamente:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi);\; v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

— El valor máximo de la velocidad es: $v_{máx} = A\omega$

— Hay que hallar la elongación en el instante de tiempo t' en que la velocidad es la mitad de su valor máximo:

$$v = \frac{v_{máx}}{2} = \frac{A\omega}{2} = A\omega\cos(\omega t' + \varphi)$$

— De la expresión anterior resulta:

$$\cos(\omega t' + \varphi) = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}(\omega t' + \varphi) = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

— Por tanto, la elongación es:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t' + \varphi) = \pm A\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm A\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Datos: $a_{máx} = 158$ cm·s^{-2}; $f = 4$ Hz; $t_1 = 0{,}125$ s; $x_1 = 0{,}125$ cm

— En el MAS, las ecuaciones de la elongación y de la aceleración son, respectivamente:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)\;;\; a = -A\omega^2\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

— El valor máximo de la aceleración es:

$$a_{máx} = A\,\omega^2$$

— Calculamos la pulsación a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 4\,\text{Hz} = 8\pi\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Hallamos la amplitud a partir de $a_{máx}$:

$$a_{máx} = A\omega^2 \rightarrow 1{,}58\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = A\cdot(8\pi\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow A = \frac{1{,}58\,\text{m}\cdot\cancel{\text{s}^{-2}}}{64\pi^2\,\cancel{\text{s}^{-2}}} = 2{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

— A continuación, buscamos la fase inicial y sustituimos los datos de posición y tiempo en la ecuación de la elongación:

$$x_1 = A\,\text{sen}(\omega t_1 + \varphi)$$

$$1{,}25\cdot 10^{-3}\,\text{m} = 2{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{m}\cdot\text{sen}(8\pi\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 0{,}125\,\text{s} + \varphi)$$

— De esta expresión se deduce:

$$\frac{1{,}25}{2{,}50} = \frac{1}{2} = \text{sen}(\pi\,\text{rad} + \varphi) \rightarrow \pi + \varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} \\ \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi = \begin{cases} -\dfrac{5\pi}{6} \\ -\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

— Hay dos posibles valores de la fase inicial, con lo que también hay dos posibles ecuaciones del movimiento:

$$x = 2{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{sen}\left(8\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)\text{m}$$

$$x = 2{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{sen}\left(8\pi t - \frac{\pi}{6}\right)\text{m}$$

4. Datos: $T = 8{,}0$ s; $A = 2{,}0$ m

— En el MAS, los valores máximos de la velocidad y la aceleración vienen dados por:

$$v_{máx} = A\,\omega\;;\; a_{máx} = A\,\omega^2$$

— Calculamos la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8{,}0} = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Hallamos $v_{máx}$ y $a_{máx}$:

a) $v_{máx} = A\,\omega = 2{,}0\,\text{m}\cdot\dfrac{\pi}{4}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = \dfrac{\pi}{2}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

b) $a_{máx} = A\,\omega^2 = 2{,}0\,\text{m}\cdot\left(\dfrac{\pi}{4}\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\right)^2 = \dfrac{\pi^2}{8}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

5. Datos: $m\cdot g = 780$ N; $\Delta x = 2{,}50$ cm $= x_{máx}$

— La frecuencia de oscilación de una masa m sujeta a un muelle de constante elástica k viene dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

— En la posición de equilibrio, el módulo de la fuerza recuperadora del muelle es igual al de la fuerza peso:

$$m\,g = |-k\,\Delta x| \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta x}$$

— Sustituimos las expresiones y los datos del enunciado:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8\,\cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^{-2}}{2{,}5\cdot 10^{-2}\,\cancel{\text{m}}}} = 3{,}2\,\text{Hz}$$

6. Datos: $m = 1{,}5$ kg; $F = 15$ N; $x = 10$ cm

— Hallamos la constante elástica del muelle a partir del valor de la fuerza necesaria para producir la deformación:

$$F = |-k\,x| \rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{15\ \text{N}}{0{,}10\ \text{m}} = 150\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

— El valor de la frecuencia angular o pulsación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{150\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}{1{,}5\ \text{kg}}} = 10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Empezamos a contar el tiempo cuando el cuerpo se suelta; es decir, cuando la elongación es máxima y la velocidad es nula. Esto equivale a que la fase inicial es $\frac{\pi}{2}$ (así la velocidad es nula y la elongación es positiva y de valor máximo).

Por tanto, la ecuación del movimiento es:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \rightarrow x = 0{,}10\,\text{sen}\left(10\,t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m}$$

7. Datos: $m = 3{,}0$ kg; $A = 8{,}0$ cm; $a_{\text{máx}} = 3{,}50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

— La energía mecánica total de un sistema objeto-muelle con MAS es:

$$E_m = \frac{1}{2}k\,A^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2$$

— Hallamos el valor de ω^2 a partir de los valores de amplitud y aceleración máxima del objeto unido al muelle:

$$a_{\text{máx}} = A\,\omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{a_{\text{máx}}}{A} = \frac{3{,}50\ \cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^{-2}}{0{,}080\ \cancel{\text{m}}}$$

— Por último, calculamos la energía mecánica total:

$$E_m = \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\cdot 3{,}0\ \text{kg}\cdot\frac{3{,}50}{0{,}080}\text{s}^{-2}\cdot(0{,}080)^2\ \text{m}^2$$

$$E_m = 0{,}42\ \text{J}$$

8. Datos: $m = 1$ kg; $A = 0{,}1$ m; $E_c(t = 0) = E_{c\,\text{máx}} = 0{,}5$ J

— La ecuación del movimiento en un MAS es:

$$x = A\,\text{sen}(\omega\,t + \varphi)$$

— En un MAS, la energía cinética es máxima al pasar por la posición de equilibrio. Por tanto, en el instante inicial, $x = 0$, lo cual permite deducir el valor de la fase inicial: $\varphi = 0$. Por tanto:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t)$$

— Hallamos la frecuencia angular a partir de la expresión de la energía cinética máxima:

$$E_{c\,\text{máx}} = \frac{1}{2}m\,v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2}m\,A^2\,\omega^2 \rightarrow \omega = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2E_{c\,\text{máx}}}{m}}$$

$$\omega = \frac{1}{0{,}1\ \text{m}}\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}5\ \text{J}}{1\ \text{kg}}} = 10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Y la ecuación del movimiento en unidades del SI es:

$$x = 0{,}1\,\text{sen}(10t)$$

9. Datos: $A = 10$ cm; $f = 0{,}5$ Hz; $x\,(t = 0) = 5$ cm

— La ecuación del movimiento en un MAS es:

$$x = A\,\text{sen}(\omega\,t + \varphi)$$

— Hallamos la pulsación a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi\cdot 0{,}5\ \text{Hz} = \pi\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Sustituimos los datos del enunciado, en unidades del SI, en la ecuación del movimiento:

$$0{,}05 = 0{,}1\,\text{sen}(\pi\cdot 0 + \varphi) \rightarrow 0{,}05 = 0{,}1\,\text{sen}\,\varphi \rightarrow \frac{1}{2} = \text{sen}\,\varphi$$

Hay dos posibles valores para la fase inicial: $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Si consideramos que en el instante inicial la partícula se mueve en el sentido positivo, entonces, para que la velocidad inicial sea positiva, la fase inicial tiene que ser $\frac{\pi}{6}$.

— La ecuación del movimiento es:

$$x = 0{,}1\ \text{sen}\left(\pi\cdot t + \frac{\pi}{6}\right),\ \text{en unidades del SI}$$

10. Datos: $m = 1{,}5$ kg; $x_0 = 2{,}8$ cm; $A = 2{,}2$ cm

— Hallamos la constante elástica teniendo en cuenta la relación entre fuerza y deformación, y que la fuerza es el peso:

$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{m\,g}{x_0} = \frac{1{,}5\ \text{kg}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{0{,}028\ \text{m}} = 5{,}3\cdot 10^2\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

— Calculamos la energía mecánica total del sistema cuerpo-muelle:

$$E_m = \frac{1}{2}k\,A^2 = \frac{1}{2}5{,}3\cdot 10^2\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot(0{,}022\ \text{m})^2 = 0{,}13\ \text{J}$$

— El valor máximo de la energía cinética coincide con el de la energía mecánica total del sistema:

$$E_{c\,\text{máx}} = E_m = 0{,}13\ \text{J}$$

11. Datos: $\frac{T_{\text{ecuad}}}{2} = 100$ s; $g_{\text{ecuad}} = 9{,}78\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $g_{\text{polo}} = 9{,}83\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

— El péndulo oscila más rápido en el lugar con mayor gravedad, con lo que su período es menor en el polo que en el ecuador. Por tanto, el reloj adelanta en el polo con respecto al ecuador.

Del enunciado se conoce el período en el ecuador:

$T_{\text{ecuad}} = 2{,}00$ s (consideramos que hay el mismo número de cifras significativas que en los valores de la gravedad)

— Buscamos la relación entre los períodos de oscilación del péndulo en el polo y el ecuador, a partir de la expresión del período T de un péndulo de longitud l:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow \frac{T_{\text{polo}}}{T_{\text{ecuad}}} = \frac{\dfrac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g_{\text{polo}}}}}{\dfrac{2\pi\sqrt{L}}{\sqrt{g_{\text{ecuad}}}}} = \sqrt{\frac{g_{\text{ecuad}}}{g_{\text{polo}}}}$$

— Calculamos el período del péndulo en el polo:

$$T_{polo} = T_{ecuad}\sqrt{\frac{g_{ecuad}}{g_{polo}}} = 2{,}00\ s\sqrt{\frac{9{,}78\ \cancel{m}\cdot s^{-2}}{9{,}83\ \cancel{m}\cdot s^{-2}}} = 1{,}995\ s$$

Donde el resultado se ha expresado con más cifras que las significativas, para que sea distinto de 2,00 s.

— Hallamos la cantidad de segundos en un día:

$$1\ \text{día} = 24\ \cancel{h}\cdot\frac{3600\ s}{1\ \cancel{h}} = 86\,400\ s$$

— Buscamos cuántos segundos en el ecuador corresponden a los 86 400 s marcados por el péndulo en el polo:

$$86\,400\ \cancel{s\ (polo)}\cdot\frac{2{,}00\ s\ (ecuador)}{1{,}995\ \cancel{s\ (polo)}} = 86\,617\ s\ (ecuador)$$

— La diferencia entre estos valores es:

$$86\,617\ s - 86\,400\ s = 217\ s = 3{,}6\ min$$

En el polo, el reloj adelanta 3,6 min.

12. Datos: $50T_1 = 5$ min 45,4 s; $d_1 = 14,2$ cm; $50T_2 = 5$ min 14 s; $d_2 = 2,20$ m

— Sea h la distancia entre el techo y el suelo. Designamos la longitud del hilo del péndulo en las dos situaciones por L_1 y L_2, respectivamente. Se cumple:

$$h = L_1 + d_1 = L_2 + d_2$$

— Primero calculamos el valor del período en las dos situaciones:

$$50\,T_1 = 5\ min + 45{,}4\ s = (5\cdot 60 + 45{,}4)\,s = 345{,}4\ s$$

$$\rightarrow T_1 = \left(\frac{345{,}4}{50}\right)s = 6{,}91\ s$$

$$50\,T_2 = 5\ min + 14\ s = (5\cdot 60 + 14)\,s = 314\ s \rightarrow$$

$$\rightarrow T_2 = \left(\frac{314}{50}\right)s = 6{,}28\ s$$

— A partir de la expresión del período de un péndulo de longitud l, y de la relación entre longitud, distancia del centro de masas al suelo, d, y distancia del techo al suelo, h, hallamos la relación entre períodos en las dos situaciones:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};\quad L_1 = h - d_1;\quad L_2 = h - d_2$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}}{2\pi\sqrt{\frac{L_2}{g}}} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}} = \frac{\sqrt{h-d_1}}{\sqrt{h-d_2}}$$

— Elevamos al cuadrado los dos miembros:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{h-d_1}{h-d_2}$$

— Sustituimos los datos en la expresión anterior y hallamos h:

$$\frac{6{,}91^2}{6{,}28^2} = \frac{h - 0{,}142\ m}{h - 2{,}20\ m}$$

$$1{,}21(h - 2{,}20\ m) = h - 0{,}142\ m \rightarrow h = 12\ m$$

— A continuación, hallamos el valor de la aceleración de la gravedad a partir del valor de uno cualquiera de los dos períodos:

$$\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = \frac{L_1}{g} \rightarrow g = \frac{L_1\,4\pi^2}{T_1^2}$$

— Sustituimos los datos para hallar g:

$$g = \frac{(12 - 0{,}142)\ m\cdot 4\pi^2}{6{,}91^2\ s^2} = 9{,}8\ m\cdot s^{-2}$$

La altura del techo es de 12 m y la aceleración de la gravedad en el lugar es de 9,8 m·s^{-2}.

Ejercicios y problemas (págs. 366 a 368)

1 MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO SIMPLE — Pág. 366

13. Respuesta sugerida:

Ejemplos de movimiento armónico simple son el de un practicante de una canica en un bol, el de un trampolín tipo ménsula, o el de una boya que flota en el mar.

En una canica dentro de un bol, si desplazamos ligeramente la canica de su posición de equilibrio (en el centro de la base), pero manteniéndola sobre la superficie del bol, al soltarla, la canica oscilará siguiendo un MAS.

En un trampolín como uno de los utilizados en las pruebas de salto, una vez que el saltador ha abandonado el trampolín, este oscila con un MAS en la dirección vertical. La fuerza del saltador sobre el trampolín inicia la oscilación de este.

En el caso de una boya o de cualquier otro cuerpo, si la empujamos hacia dentro del agua, el empuje sobre la boya la obliga a moverse hacia arriba. El movimiento resultante será un MAS siempre que la sección transversal de la parte sumergida se mantenga constante. La resultante de la fuerza peso y el empuje, en cada punto de su trayectoria, es la fuerza resultante asociada al MAS que realiza.

El estudio del MAS permite la comprensión de múltiples fenómenos cotidianos, sobre todo, las oscilaciones de péndulos, de cuerpos sujetos a muelles, o de cuerdas de instrumentos musicales. Además, es básico para el estudio de los fenómenos ondulatorios, así como de los terremotos.

14. a) Movimiento periódico.

b) Movimiento periódico.

c) Movimiento vibratorio, pues el pistón se mueve a un lado y otro de su posición de equilibrio.

d) Movimiento vibratorio.

e) Movimiento vibratorio, ya que la cuerda, al vibrar, se desplaza a un lado y a otro de su posición de equilibrio.

2 CINÉTICA DEL MAS — Pág. 366

15. La ecuación del movimiento de la partícula es:

$$x = 5\cos(10\,t + 2)\ \text{(en unidades del SI)}$$

Hallamos la amplitud y la pulsación de la otra partícula:

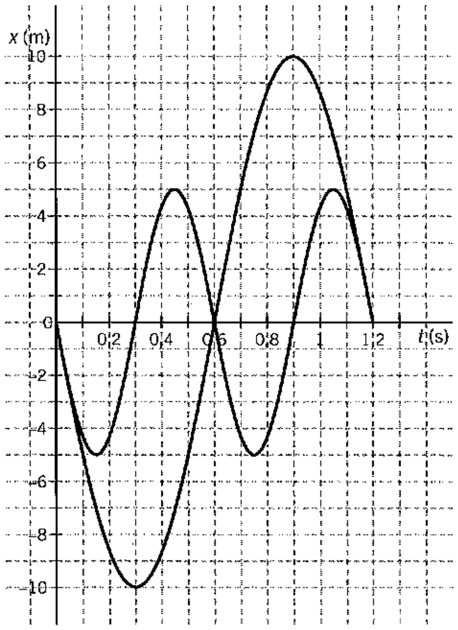
$$A' = 2A = 2 \cdot 5\ \text{m} = 10\ \text{m}$$

$$f' = f/2 \rightarrow \omega' = \frac{\omega}{2} = \left(\frac{10}{2}\right) = 5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

La ecuación del movimiento de la segunda partícula es:

$$x = 10 \cos(5\,t + 2)\ \text{(en unidades del SI)}$$

En la siguiente figura, se representan ambas elongaciones para una oscilación completa de la primera partícula y dos oscilaciones completas de la segunda partícula:



16. a) Es verdadera: en el MAS, la elongación y la aceleración son proporcionales, pero de sentidos opuestos.

b) Es falsa: en el MAS, la elongación y la aceleración están desfasadas π rad; es decir, están en oposición de fase.

17. Datos: $x = 10^{-2}\,\text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

La posición de equilibrio es la de elongación nula: $x = 0$.

— Hay que buscar los sucesivos valores de t para los cuales la posición es nula; es decir, se cumple que:

$$0 = 10^{-2}\text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow 0 = \text{sen}\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

— La condición anterior equivale a:

$$8\pi t + \frac{\pi}{6} = n\,\pi;\ \text{con } n = 0, 1, 2, 3...$$

Para $n = 0$, es: $8\pi t = -\frac{\pi}{6}$; es decir, se obtiene un valor de tiempo negativo, que no tiene sentido en este caso.

Para $n = 1$, es: $8\pi t = -\frac{\pi}{6}$; se obtiene el instante de tiempo en el que la partícula pasa por primera vez por la posición de equilibrio desde que se empieza a contar el tiempo ($t = 0$).

Para $n = 2$, resulta el instante de tiempo en el que la partícula pasa por segunda vez por la posición de equilibrio.

Para $n = 3$, es: $8\pi t = 3\pi - \frac{\pi}{6}$; se obtiene el instante de tiempo en el que la partícula pasa por tercera vez por la posición de equilibrio desde que se empieza a contar el tiempo. Por tanto:

$$8\,\pi t = 3\,\pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow t = \frac{3 - \frac{1}{6}}{8} = 0{,}4\ \text{s}$$

La partícula tarda 0,4 s en pasar por tercera vez por la posición de equilibrio desde que se empieza a contar el tiempo.

El valor de tiempo obtenido es en segundos, puesto que en los datos del enunciado las magnitudes están expresadas en unidades del SI.

18. Datos: $v = 1{,}2\ \text{sen}\left(3{,}0\ t + \frac{\pi}{4}\right)$ (SI)

En este caso, en la expresión de la velocidad del MAS hay la función seno en vez de la función coseno. Es decir, la expresión es de la forma:

$$v = -\,\omega\,A\,\text{sen}\,(\omega\,\text{t} + \varphi')$$

Por tanto, la pulsación vale: $\omega = 3{,}0\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$

— Calculamos la frecuencia y el período:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3{,}0\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{2\pi\ \text{rad}} = 0{,}48\ \text{Hz}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{3{,}0\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}} = 2{,}1\ \text{Hz}$$

— La velocidad en $t = 0$ (instante inicial) es:

$$v = -\,1{,}2\ \text{sen}\left(3{,}0 \cdot 0 + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\,1{,}2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}85\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

— La velocidad en $t = 0{,}5$ s (al cabo de medio segundo) es:

$$v = -\,1{,}2\ \text{sen}(3{,}0 \cdot 0{,}5 + \frac{\pi}{4}) = -0{,}91\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

19. Datos: $T = 8$ s; $x\,(t = 0) = A = 10$ cm

— Las ecuaciones de la posición y la aceleración en el MAS son:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)\ ;\ a = -A\omega^2\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

— En el instante inicial, $t = 0$, se cumple que $x = A$. Esta condición permite hallar el valor de φ:

$$A = A\,\text{sen}\,(0 + \varphi) \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}$$

— De estos dos valores posibles, tomamos el menor: $\frac{\pi}{2}$.

— Ahora hallamos el valor de la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{8\ \text{s}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— La amplitud, en unidades del SI, es: $A = 0{,}10$ m

— La ecuación de la aceleración de la partícula es:

$$a = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = 0{,}10 \cdot (\pi/4)^2 \operatorname{sen}\left(\pi\frac{t}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = -\frac{\pi^2}{160}\operatorname{sen}\left(\pi\frac{t}{4} + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(SI)}$$

— El valor de la aceleración en $t = 2$ s es:

$$a = -\frac{\pi^2}{160}\operatorname{sen}\pi \cdot \frac{2}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{160}\operatorname{sen}(\pi) = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

20. Datos: A partir de la figura, se obtiene: $A = 2 \cdot 10^{-2}$ m;

$T = \frac{17}{6} - \frac{5}{6}$ s; $x(t = 0) = A = 10$ cm $x(t = 0) = -10^{-2}$ m

— Hallamos la frecuencia angular a partir del período:

$$T = \left(\frac{12}{6}\right)\text{s} = 2 \text{ s}; \; \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{2 \text{ s}} \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Hallamos la fase inicial, φ, del valor de la posición inicial, la cual es la mitad de la amplitud, cambiada de signo:

$$x(t = 0) = \frac{-A}{2}$$

Por tanto:

$$-\frac{A}{2} = A\operatorname{sen}(0 + \varphi) \rightarrow \operatorname{sen}\varphi = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{6}; \; \frac{11\pi}{6}$$

De los valores posibles de la fase inicial, tomamos el menor.

— Las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración de la partícula son, en unidades del SI:

$$x = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \rightarrow x = 2 \cdot 10^{-2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow v = 2\pi \cdot 10^{-2}\cos\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

$$a = -A\omega^2\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \rightarrow a = -2\pi^2 \cdot 10^{-2}\operatorname{sen}\left(\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

21. Datos: $2A = 8$ mm; 20 puntadas en 10 s

a) Hallamos la amplitud y el período en unidades del SI:

$$A = \frac{8}{2}\text{mm} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$T = \frac{10 \text{ s}}{20} = 0{,}5 \text{ s}$$

La frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{0{,}5 \text{ s}} = 4\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

En el instante inicial, la aguja está en uno de los extremos de su trayectoria; supongamos que está en el extremo superior, $x(t = 0) = A$; entonces la fase inicial es:

$$A = A\operatorname{sen}(0 + \varphi) \rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Y la ecuación de la posición de la aguja es:

$$x = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \rightarrow x = 4 \cdot 10^{-3}\operatorname{sen}4\pi t + \frac{\pi}{2} \text{ (SI)}$$

b) En el MAS, los valores máximos de la velocidad y la aceleración vienen dados respectivamente por:

$$v_{máx} = A\omega; \; a_{máx} = A\omega^2$$

Sustituyendo valores, se obtiene:

$$v_{máx} = A\omega = (4 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}05 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a_{máx} = A\omega^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot (4\pi \text{ s}^{-1})^2 = 0{,}6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

22. Datos: $x(t = 0) = x_0$; $v(t = 0) = v_0$; $x = A\operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

— A partir de la ecuación de la posición, se deduce que:

$$x_0 = A\operatorname{sen}(0 + \varphi) \rightarrow x_0 = A\operatorname{sen}\varphi$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow v_0 = A\omega\cos\varphi$$

— Al dividir las dos expresiones anteriores, podemos hallar la fase inicial en función de la pulsación y de los valores iniciales de posición y velocidad:

$$\frac{x_0}{v_0} = \frac{A\operatorname{sen}\varphi}{A\omega\cos\varphi} \rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \omega\frac{x_0}{v_0} \rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

— Para hallar la amplitud, utilizamos la identidad trigonométrica, y aislamos (sen φ) y (cos φ) de las expresiones de x_0 y de v_0:

$$\cos^2\varphi = 1 - \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{v_0}{A\omega}; \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{x_0}{A}$$

$$\frac{v_0^2}{A^2\omega^2} = 1 - \frac{x_0^2}{A^2} \rightarrow \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 - x_0^2 \rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

3 DINÁMICA DEL MAS

Págs. 366 y 367

23. Datos: $m' = 2\,m$

Los parámetros del MAS que variarán son la pulsación, el período y la frecuencia. La fase inicial y la amplitud no dependen del valor de la masa.

— La relación entre pulsación, constante elástica y masa es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

— Por tanto, al duplicarse la masa, la nueva pulsación, ω, es menor y viene dada por:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m'}} = \sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

— La nueva frecuencia, f', también es menor y viene dada por:

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{\frac{\omega}{\sqrt{2}}}{2\pi} = \frac{f}{\sqrt{2}}$$

— En cambio, el nuevo período, T', es mayor y viene dado por:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\frac{\omega}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\,T$$

24. En el MAS, la fuerza recuperadora en todo punto de la trayectoria es proporcional al valor de la elongación y en sentido contrario a esta. Por tanto:

a) Esta afirmación es incorrecta; la fuerza no es constante, depende del valor de x.

b) Esta afirmación es correcta; al ser la fuerza proporcional a la posición, si esta varía con el tiempo de forma sinusoidal, la fuerza recuperadora también varía de forma sinusoidal, aunque en oposición de fase con la posición.

c) Es correcta: fuerza y posición son proporcionales, aunque la constante de proporcionalidad es negativa.

25. Datos: $m = 2{,}0$ kg; $k = 5{,}0$ kN · m^{-1}; $x_{máx} = 10$ cm

a) Hallamos la frecuencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5 \cdot 10^3 \text{N} \cdot \text{m}^{-1}}{2{,}0 \text{ kg}}} = \frac{1}{2\pi} 50 \text{ s}^{-1}$$

$$f = \left(\frac{25}{\pi}\right)\text{Hz}$$

Y el período:

$$T = \frac{1}{f} = \left(\frac{\pi}{25}\right)\text{s}$$

Por otra parte, la amplitud coincide con el valor máximo que se alarga el muelle:

$$A = x_{máx} = 10 \text{ cm} = 0{,}10 \text{ m}$$

b) Buscamos primero la frecuencia angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{2{,}0 \text{ kg}}} = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Hallamos los valores máximos de la velocidad y la aceleración:

$$v_{máx} = A\omega = (0{,}10 \cdot 50) \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 5{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_{máx} = A\omega^2 = 0{,}10 \text{ m} \cdot (50 \text{ s}^{-1})^2 = 2{,}5 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

c) Se supone que el tiempo empieza a contarse cuando se deja libre el cuerpo; esto es cuando $x = A$. Esta condición implica que la fase inicial es: $\varphi = \frac{\pi}{2}$; de modo que la ecuación de la posición es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \rightarrow x = 0{,}10 \operatorname{sen}\left(50\,t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

El instante en el que el cuerpo pasa por primera vez por la posición de equilibrio, es el menor valor de t para el cual $x = 0$:

$$0 = 0{,}10 \operatorname{sen}\left(50\,t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 0 = \operatorname{sen}\left(50\,t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi = 50\,t + \frac{\pi}{2} \rightarrow t = \left(\frac{\pi}{100}\right)\text{s} = 0{,}03 \text{ s}$$

26. La posición inicial, x_0, y la velocidad inicial, v_0, determinan la amplitud A y la fase inicial, φ, según estas relaciones:

$$x_0 = A \operatorname{sen}\varphi \;;\; v_0 = A\omega \cos\varphi$$

27. Datos: $A = 6{,}0$ cm; $k = 2{,}0$ kN · m^{-1}; $v_{máx} = 2{,}20$ m · s^{-1}

— Primero buscamos el valor de la pulsación a partir de los valores de la velocidad máxima y de la amplitud:

$$v_{máx} = A\omega \rightarrow \omega = \frac{v_{máx}}{A} = \frac{2{,}20 \cancel{\text{m}} \cdot \text{s}^{-1}}{6{,}0 \cdot 10^{-2} \cancel{\text{m}}}$$

$$\omega = 36{,}7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

— Determinamos la masa del objeto:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \rightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = \frac{2{,}0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{36{,}7^2 \text{ s}^{-2}} = 1{,}5 \text{ kg}$$

— Hallamos la frecuencia y el período del movimiento:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{36{,}7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2\pi \text{ rad}} = 5{,}8 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{36{,}7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} = 0{,}17 \text{ s}$$

28. Datos: $m = 0{,}36$ g; $\Delta x = 3{,}0$ mm

— La frecuencia de la vibración vertical viene dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

— El módulo del peso de la araña coincide con la fuerza recuperadora (fuerza elástica) en la posición a la que se ha hundido la tela (posición de equilibrio):

$$m\,g = k\,\Delta x \rightarrow \frac{k}{m} = \frac{g}{\Delta x}$$

— Por tanto, el valor de la frecuencia es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta x}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{3{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ m}}} = 9{,}1 \text{ Hz}$$

29. Datos: $m = 0{,}5$ kg; $k = 200$ N · m^{-1}; $x_{máx} = 10$ cm

El bloque efectuará un MAS, cuya ecuación del movimiento es: $x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$.

— Hallamos el valor de la pulsación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}}{0{,}5 \text{ kg}}} = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

— La amplitud es el valor máximo que se alarga el muelle:

$$A = x_{máx} = 10 \text{ cm} = 0{,}10 \text{ m}$$

— Consideramos que la posición en la que se empieza a contar el tiempo es: $x = x_{máx}$; es decir, cuando se suelta el cuerpo. Entonces, el valor de la fase inicial, φ, es:

$$A = A \operatorname{sen}(0 + \varphi) \rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

— Por tanto, la ecuación del movimiento del bloque es:

$$x = 0{,}10 \operatorname{sen}\left(20\,t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{(SI)}$$

30. Datos: $T = 0{,}4$ s (muelle en posición horizontal)

— Hallamos la relación entre la masa del cuerpo, m, y la constante elástica del muelle, k:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow \frac{m}{k} = \frac{T^2}{4\pi^2}$$

— Si el cuerpo se suspende verticalmente, en la posición de equilibrio, el módulo de la fuerza peso es igual al módulo de la fuerza elástica:

$$m\,g = k\,\Delta x \rightarrow \Delta x = g \cdot \left(\frac{m}{k}\right)$$

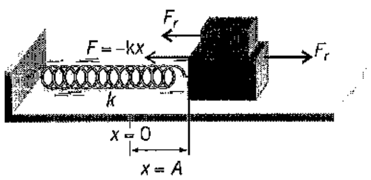
— Hallamos el valor del alargamiento del muelle vertical en la posición de equilibrio:

$$\Delta x = g \cdot \left(\frac{m}{k}\right) = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot \frac{0{,}4^2\ \mathrm{s^2}}{4\pi^2} = 0{,}04\ \mathrm{m}$$

El alargamiento es de 4 cm.

31. Datos: $T = 0{,}8$ s; $\mu = 0{,}25$; $A = 1$ cm

En la figura se muestran las fuerzas que actúan sobre cada bloque en la dirección horizontal, que es la dirección del MAS. Suponemos que solo hay rozamiento entre los bloques y no hay rozamiento entre el bloque inferior y el suelo:



Sobre el bloque superior, la única fuerza en la dirección del movimiento es la fuerza de rozamiento, F_r.

Sobre el bloque inferior, las fuerzas en la dirección del movimiento son la fuerza de rozamiento, F_r, y la fuerza elástica del muelle.

El valor de la oscilación máxima en un MAS es:

$$a_{\text{máx}} = A\,\omega^2$$

La pulsación de este MAS es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ \mathrm{rad}}{0{,}8\ \mathrm{s}} = 2{,}5\,\pi\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$$

Y la aceleración máxima de este MAS es:

$$a_{\text{máx}} = A\,\omega^2 = 0{,}01\ \mathrm{m} \cdot (2{,}5\,\pi\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})^2 = 0{,}62\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

a) Para que el bloque superior no deslice, la fuerza de rozamiento tiene que poder proporcionar este valor de la aceleración máxima. La fuerza de rozamiento se opone al movimiento relativo de las superficies en contacto y su valor puede variar desde 0 hasta el valor máximo que es:

$$F_{r\,\text{máx}} = \mu\,N = \mu\,m\,g$$

Por tanto, el máximo valor de la aceleración que puede proporcionar la fuerza de rozamiento es:

$$a_{\text{máx}\,Fr} = \mu\frac{N}{m} = \mu\ g = 0{,}25 \cdot 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 2{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

Al comparar este valor máximo con el de la aceleración máxima del MAS, resulta:

$$a_{\text{máx}\,Fr} > a_{\text{máx}}$$

En consecuencia, el bloque superior no deslizará sobre el otro bloque, y los dos bloques oscilarán como un sistema.

b) La mayor amplitud posible, $A_{\text{máx}}$, para la cual el bloque superior no desliza es aquella en la que la aceleración máxima del MAS coincide con la aceleración máxima que puede proporcionar la fuerza de rozamiento:

$$a_{\text{máx}\,Fr} = a_{\text{máx}} \rightarrow \mu\ g = A_{\text{máx}}\omega^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow A_{\text{máx}} = \frac{\mu\ g}{\omega^2} = \frac{0{,}25 \cdot 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}{(2{,}5\,\pi\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}})^2} = 0{,}04\ \mathrm{m}$$

En la expresión anterior, se ha supuesto que la pulsación y, por tanto, el período del MAS son constantes.

La mayor amplitud de oscilación es de 4 cm.

32. Datos: $m = 250$ g; $k_1 = 30\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$; $k_2 = 20\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$

Para un desplazamiento x de la masa m, en cualquier sentido, actúan las fuerzas recuperadoras de los dos muelles, de modo que la fuerza total sobre m es:

$$F = -\,k_1\,x - k_2\,x$$

Por tanto, el sistema oscilará con un MAS igual al de una masa unida a un muelle de constante elástica, k, de valor igual a:

$$k = k_1 + k_2$$

En consecuencia, el período del movimiento es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}250\ \mathrm{kg}}{(30 + 20)\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}}} = 0{,}45\ \mathrm{s}$$

4 ENERGÍA DEL MAS

Pág. 367

33. Datos: $m_2 > m_1$; $k_1 = k_2 = k$; $A_1 = A_2 = A$

En un MAS, la energía cinética es máxima al pasar por la posición de equilibrio. Para una masa, m, unida a un resorte de constante elástica, k, el valor máximo de la energía cinética es:

$$E_{c\,\text{máx}} = \frac{1}{2}m\,A^2\,\omega^2 = \frac{1}{2}k\,A^2$$

Puesto que las dos partículas oscilan con la misma amplitud y las constantes elásticas de sus respectivos muelles son iguales, las dos partículas tienen el mismo valor de energía cinética al pasar por su posición de equilibrio.

En el MAS, la velocidad al pasar por la posición de equilibrio alcanza su valor máximo, que viene dado por:

$$v_{\text{máx}} = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

En este caso, al ser $m_2 > m_1$; la velocidad de la partícula 1 es mayor que la velocidad de la partícula 2:

$$m_2 > m_1 \rightarrow \sqrt{\frac{k}{m_2}} < \sqrt{\frac{k}{m_1}} \rightarrow v_{\text{máx}\,2} < v_{\text{máx}\,1}$$

34. a) Esta afirmación es falsa, puesto que la amplitud y la frecuencia no tienen por qué aumentar simultáneamente.

Teniendo en cuenta que $E_m = k\dfrac{A^2}{2}$, un aumento de la energía mecánica puede estar asociado a un incremento de la amplitud, o a un incremento de la frecuencia de oscilación, o a ambos aumentos. Es decir, puede haber solo un aumento de la amplitud y que la frecuencia de oscilación se mantenga constante. O bien puede haber un incremento de la constante elástica del sistema, con lo cual la frecuencia aumenta y la amplitud se mantiene constante.

b) Esta afirmación es falsa. La energía mecánica en el MAS es proporcional al cuadrado de la frecuencia:

$$E_m = \frac{1}{2} m\,\omega^2 A^2 = 2\pi^2 m f^2 A^2$$

Por tanto, al duplicarse la frecuencia, la energía mecánica no se duplica, sino que se cuadriplica.

c) Esta afirmación es errónea. Aunque la amplitud en el MAS es generalmente independiente de la masa, la frecuencia de oscilación sí puede depender de la masa. En el caso, por ejemplo, de una masa m unida a un muelle de constante elástica k, la frecuencia viene dada por:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Con lo que la frecuencia aumenta al disminuir la masa oscilante.

d) Esta afirmación es verdadera. La energía mecánica en el MAS es proporcional al cuadrado de la amplitud y el resto de los factores son independientes de la amplitud, con lo que, al duplicarse la amplitud, la energía mecánica se cuadriplica.

e) Esta afirmación es verdadera. En la posición $x = \dfrac{A}{2}$, la energía potencial es: $E_p = \dfrac{1}{2}(k\,x^2) = k\dfrac{A^2}{8}$

Y la energía cinética es:

$$E_c = E_m - E_p = \frac{1}{2}(k\,A^2) - k\frac{A^2}{8} = 3\,k\frac{A^2}{8}$$

Por tanto, la relación entre la energía cinética y la potencial es: $E_c = 3\,E_p$

35. Datos: $m = 3$ kg; $k = 2$ kN·m^{-1}; $E_m = 0{,}9$ J

a) Hallamos la amplitud a partir de la expresión de la energía mecánica en el MAS:

$$E_m = \frac{1}{2} k\,A^2 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2\,E_m}{k}}$$

Al sustituir los datos del enunciado, se obtiene:

$$A = \sqrt{\frac{2\,E_m}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}9\ \text{J}}{2 \cdot 10^3\ \text{N·m}^{-1}}} = 3 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

La amplitud es de 3 cm.

b) La velocidad máxima se alcanza cuando toda la energía mecánica es energía cinética. Por tanto, resulta:

$$E_{c\,\text{máx}} = E_m \rightarrow \frac{1}{2} m\,v^2_{\text{máx}} = E_m \rightarrow v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2\,E_m}{m}}$$

Sustituimos los datos para hallar la velocidad máxima:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2\,E_m}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}9\ \text{J}}{3\ \text{kg}}} = 0{,}8\ \text{m·s}^{-1}$$

36. Datos: $m = 5{,}0$ g; $F = -k\,x$; $x\,(t = 0) = 0$; $v\,(t = 0) = 1{,}0$ m·s^{-1}; $f = \left(\dfrac{2}{\pi}\right)$ Hz

Según el enunciado, la fuerza sobre la partícula es una fuerza recuperadora, por lo que la partícula sigue un MAS.

— En el MAS, la aceleración a y la posición x se relacionan según: $a = -\omega^2 x$.

En el punto de máxima elongación es: $x = \pm A$, con lo que la aceleración máxima es:

$$a_{x\,\text{máx}} = -\omega^2 (\pm A)$$

— La frecuencia angular o pulsación es:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)\text{Hz} = 4{,}0\ \text{rad·s}^{-1}$$

— Las ecuaciones de la posición y la velocidad en el MAS son:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)\,;\ v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

— En este caso, el valor de la fase inicial es nulo, puesto que en el instante inicial, $x = 0$:

$$0 = A\,\text{sen}\,(0 + \varphi) \rightarrow \text{sen}\,\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$$

— Por tanto, la ecuación de la velocidad es:

$$v = A\omega\cos(\omega t)$$

— A continuación, hallamos la amplitud a partir del valor de la velocidad en el instante inicial: $v\,(t = 0) = 1{,}0$ m·s^{-1}

$$1{,}0\ \text{m·s}^{-1} = A \cdot 4{,}0\ \text{rad·s}^{-1}\cos(0) \rightarrow A = 0{,}25\ \text{m}$$

— El valor absoluto de la aceleración en los dos puntos de máxima elongación es:

$$|a_{x\,\text{máx}}| = \omega^2 A = 4{,}0^2\ \text{s}^{-2} \cdot 0{,}25\ \text{m} = 4{,}0\ \text{m·s}^{-2}$$

— La energía cinética en cualquier instante es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot A^2\omega^2\cos^2(\omega t)$$

— Y sustituyendo los valores de m, A y ω:

$$E_c = \frac{1}{2} 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 0{,}25^2\ \text{m}^2 \cdot 4{,}0^2\ \text{s}^{-2}\cos^2(4{,}0\,t)$$

— En unidades del SI, la energía cinética es:

$$E_c = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\cos^2(4{,}0\,t)$$

37. Datos: $m = 2{,}0$ kg; $k = 15$ N·m^{-1}; $x_{\text{máx}} = 2{,}0$ cm

a) En el instante en que se libera el cuerpo, su energía potencial elástica es máxima y su energía cinética es nula; pero inmediatamente después, el cuerpo se mueve de forma que su energía potencial elástica va disminuyendo en la misma cantidad en la que su energía cinética va aumentando. Al pasar por la posición de equilibrio, su energía potencial elástica es nula y su energía cinética es máxima.

En cualquier punto de su trayectoria, si se considera que no hay disipación de energía debida al rozamiento, la suma de las energías potencial y cinética es constante.

Una vez superada la posición de equilibrio, la energía cinética va disminuyendo a la vez que la energía potencial va aumentando, hasta que el cuerpo alcanza el punto de máxima elongación, en sentido opuesto al punto inicial. En este instante, la energía cinética es nula y la energía potencial elástica es máxima.

Teniendo en cuenta que la amplitud es el valor máximo que se alarga el muelle ($A = x_{máx} = 2{,}0$ cm $= 0{,}20$ m), los dos puntos de la trayectoria en los que la energía cinética es igual a la energía potencial son:

$$E_p = E_c \rightarrow E_p = (E_m - E_p) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} k\,x^2 = \frac{1}{2} k\,A^2 - \frac{1}{2} k\,x^2 \rightarrow 2x^2 = A^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} = \pm \frac{0{,}20 \text{ m}}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}014 \text{ m}$$

Es decir, los situados a 1,4 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio.

b) La máxima velocidad se alcanza cuando toda la energía mecánica es energía cinética:

$$E_m = E_{c\,máx} \rightarrow \frac{1}{2} k\,A^2 = \frac{1}{2} m v_{máx}^2 \rightarrow$$

$$v_{máx} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}20 \text{ m} \sqrt{\frac{15 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}{2{,}0 \text{ kg}}} = 0{,}055 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

38. Datos: $m = 3$ kg; MAS entre $x = -2$ m y $x = 2$ m; $\Delta t = 0{,}5$ s; $x\,(t = 0) = 0$

a) La ecuación del movimiento en el MAS es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

El cuerpo tarda 0,5 s en ir de un extremo a otro de su recorrido; esto es, en completar media oscilación. Por tanto:

$$\frac{T}{2} = 0{,}5 \text{ s} \rightarrow T = 1{,}0 \text{ s} \rightarrow$$

$$\rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1{,}0 \text{ s}} = 2\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Por otra parte, los dos extremos de la trayectoria distan entre sí (2 m − (−2 m)) = 4 m. Esto significa que la amplitud de este MAS es:

$$2A = 4 \text{ m} \rightarrow A = 2 \text{ m}$$

Calculemos ahora la fase inicial:

$$0 = A \operatorname{sen}(0 + \varphi) \rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$$

En consecuencia, la ecuación del movimiento en unidades del SI es:

$$x = 2 \operatorname{sen}(2\pi t)$$

b) Determinamos primero la expresión de la velocidad en este movimiento en unidades del SI:

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = 2 \cdot 2\pi \cos(2\pi t) = 4\pi \cos(2\pi t)$$

La expresión en unidades del SI de la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 3{,}0 \cdot (4\pi)^2 \cos^2(2\pi t)$$

$$E_c = 24\pi^2 \cos^2(2\pi t)$$

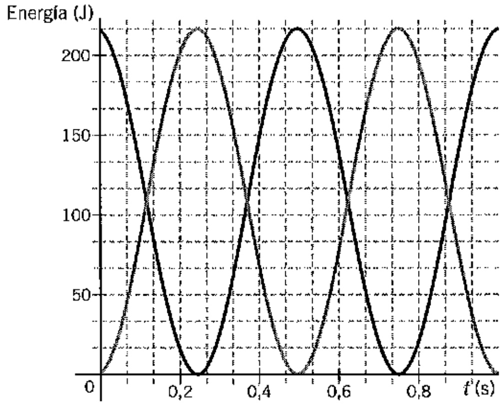
Hallamos ahora el valor de la constante elástica:

$$k = \omega^2 m = (2\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 \cdot 3{,}0 \text{ kg} = 12\pi^2 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

Y la expresión en unidades del SI de la energía potencial es:

$$E_p = \frac{1}{2} k\,x^2 = \frac{1}{2} \cdot 12\pi^2 \cdot 2^2 \operatorname{sen}^2(2\pi t)$$

$$E_p = 24\,\pi^2 \operatorname{sen}^2(2\pi t)$$



39. Datos: MAS con $v_{máx} = 0{,}60$ m·s^{-1}; $a_{máx} = 7{,}2$ m·s^{-2}

a) Podemos hallar el período y la amplitud a partir de las expresiones de la velocidad y la aceleración máximas del MAS:

$$v_{máx} = A\omega\ ;\ a_{máx} = A\omega^2$$

$$\omega = \frac{a_{máx}}{v_{máx}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi v_{máx}}{a_{máx}} = \frac{2\pi \cdot 0{,}6 \cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^{-1}}{7{,}2 \cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^{-2}} = \frac{\pi}{6} \text{ s}$$

El período es de $\frac{\pi}{6}$ s.

A su vez, el valor de la amplitud es:

$$A = \frac{v_{máx}}{\omega} = \frac{v_{máx}^2}{a_{máx}} = \frac{\left(0{,}6 \text{ m}\cdot\cancel{\text{s}}^{-1}\right)^2}{7{,}2 \text{ m}\cdot\cancel{\text{s}}^{-2}} = 5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

La amplitud es de 5,0 cm.

b) La energía mecánica del cuerpo en un MAS es:

$$E_m = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m(2\pi f)^2 A^2 = 2\pi^2 m f^2 A^2$$

Por tanto, al **duplicarse la frecuencia,** la energía mecánica se cuadriplica, considerando que la amplitud se mantiene constante.

La aceleración máxima de un cuerpo unido a un resorte es:

$$a_{máx} = \frac{|F_{máx}|}{m} = \frac{|-k \cdot A|}{m}$$

Para que la **aceleración máxima se duplique,** es necesario duplicar el valor de k; duplicar el valor de A, o bien reducir a la mitad el valor de m. Otra posibilidad, que no consideraremos, es que se duplique el cociente entre k, A y m. Veamos cómo afecta cada cambio:

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

En esta expresión de la energía mecánica solo aparecen k y A, por lo que no es necesario considerar el efecto de la reducción de m a la mitad.

Si se duplica k, entonces E_m también se duplica. Físicamente, equivale a sustituir el resorte por otro con constante elástica de valor doble, con lo que el trabajo realizado sobre el resorte para alargarlo hasta una distancia A es el doble que antes.

En cambio, si se duplica A, entonces E_m se cuadriplica. Físicamente, equivale a alargar el resorte hasta una distancia doble que antes, con lo que el trabajo hecho sobre él es cuatro veces mayor que antes.

40. Datos: MAS con A; $E_c = 100\ E_p$

— Las energías cinética y potencial son:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \ ; \ E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

— De la expresión de la posición en el MAS, se deduce:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \rightarrow \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \frac{x}{A}$$

— Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica, la velocidad del MAS puede escribirse como:

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

— Buscamos la posición, x, en la que la energía cinética es 100 veces mayor que la energía potencial:

$$E_c = 100\, E_p \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = 100 \cdot \frac{1}{2} k x^2$$

— Sustituimos la expresión de la velocidad en términos de x y A:

$$m A^2 \omega^2 \left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right) = 100\ k x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow m A^2 \omega^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right) = 100\ \omega^2 m x^2 \rightarrow A^2 - x^2 = 100 x^2$$

— Por tanto, resulta:

$$101 x^2 = A^2 \rightarrow x = \pm \frac{A}{\sqrt{101}}$$

5 EJEMPLOS DE OSCILADORES ARMÓNICOS

Pág. 368

41. Datos: $k = 600\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $A = 3{,}0$ cm

— En una masa unida a un resorte vertical, la amplitud de la oscilación del MAS se mide con respecto a la posición de equilibrio de la masa colgando del resorte. Por tanto, la energía mecánica total es:

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 600\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1} \cdot (3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2 = 0{,}27\ \text{J}$$

— Cuando el cuerpo posee su máximo desplazamiento hacia abajo, la energía potencial total (gravitatoria y elástica) es:

$$E_p = \frac{1}{2} k A^2$$

— Por tanto, la energía potencial total en este punto es también de 0,27 J.

— La energía cinética máxima del cuerpo coincide con el valor de la energía mecánica. Por tanto, su valor es 0,27 J.

42. Datos: $L = 70{,}0$ cm; $T = 1{,}68$ s

— Hallamos la expresión de la gravedad a partir de la del período de un péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

— Hallamos el valor de la gravedad del lugar donde está el péndulo:

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} = 4\pi^2 \frac{0{,}700\ \text{m}}{(1{,}68\ \text{s})^2} = 9{,}79\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

43. Datos: $m = 10$ g; 20 oscilaciones en 5,0 s; $A = 2{,}0$ cm; $x = 0{,}5$ cm

a) La fuerza con que ha de tirarse es igual a la fuerza recuperadora del muelle, tomando como nuevo origen la posición de equilibrio una vez colgada la masa. Si se tira hasta una distancia igual a A, entonces el módulo de la fuerza es:

$$F = k A$$

Determinamos k a partir del valor del período y de la masa:

$$T = \frac{5{,}0\ \text{s}}{20\ \text{oscilaciones}} = 0{,}25\ \text{s}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{-2}\ \text{kg}}{0{,}25^2\ \text{s}^2} = 6{,}3\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

El valor de la fuerza es:

$$F = k A = 6{,}3\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 0{,}13\ \text{N}$$

b) Si consideramos que no hay rozamiento ni otra forma de disipación de energía, la energía mecánica en cualquier punto es constante y de valor igual a:

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2$$

Por tanto, en la posición situada 0,5 cm por encima de la posición de equilibrio, la energía mecánica total es:

$$E_m = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 6{,}3\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1} \cdot \left(2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)^2 =$$

$$= 1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

44. Datos: $l_1 = 22{,}86$ cm; $m_1 = 70$ g; $l_2 = 19{,}92$ cm; $m_2 = 40$ g; $m = 80$ g; $t = 2$ s

Designamos por l_0 la longitud natural del muelle, medida en centímetros.

— Las elongaciones del muelle al colgar cada masa son:

$$\Delta l_1 = l_1 - l_0 \,;\; \Delta l_2 = l_2 - l_0$$

— Para cada masa, en la posición de equilibrio los módulos del peso y de la fuerza elástica coinciden:

$$\left.\begin{array}{l} m_1\, g = k\,(l_1 - l_0) \\ m_2\, g = k\,(l_2 - l_0) \end{array}\right\}$$

— Dividimos las dos expresiones:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_1 - l_0}{l_2 - l_0}$$

— Sustituimos los datos:

$$\frac{70}{40} = \frac{22{,}86 - l_0}{19{,}92 - l_0} \rightarrow 7\,(19{,}92 - l_0) = 4\,(19{,}92 - l_0)$$

— Agrupamos términos y resolvemos la ecuación:

$$139{,}44 - 91{,}44 = 3\,l_0 \rightarrow l_0 = 16 \text{ cm}$$

— Con este valor, hallamos la constante elástica del muelle:

$$k = \frac{m_1\, g}{l_1 - l_0} = \frac{70 \cdot 10^{-3}\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}{(22{,}86 - 16) \cdot 10^{-2}\text{ m}} = 10\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

— Y la frecuencia al colgarle una masa de 80 g es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}{80 \cdot 10^{-3}\text{ kg}}} = 1{,}8\text{ Hz}$$

45. Datos: $m_1 = 10$ kg; $\Delta l_1 = 2{,}0$ cm; $\Delta m = 10$ kg; $A = 3{,}0$ cm

Hallamos la constante elástica del muelle, sabiendo que con una masa colgada de 10 kg se alarga 2,0 cm:

$$k = \frac{m_1\, g}{\Delta l_1} = \frac{10\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}{2{,}0 \cdot 10^{-2}\text{ m}} = 4{,}9 \cdot 10^3\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

a) Determinamos la frecuencia de oscilación de la masa total:

$$m = m_1 + \Delta m = 10\text{ kg} + 10\text{ kg} = 20\text{ kg}$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4{,}9 \cdot 10^3\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}{20\text{ kg}}} = 2{,}5\text{ Hz}$$

b) Primero calculamos la pulsación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4{,}9 \cdot 10^3\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}{20\text{ kg}}} = 16\text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Determinamos la fase inicial a partir de la posición en el instante inicial; empezamos a contar el tiempo cuando $x = -A$ (antes de soltar el muelle alargado):

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega\, t + \varphi)$$

$$-A = A\,\text{sen}\,(0 + \varphi) \rightarrow \text{sen}\,\varphi = 0 \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

La ecuación de la velocidad del MAS es:

$$v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Sustituimos los datos conocidos, en unidades del SI:

$$v = 3{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 16\cos\left(16t - \frac{\pi}{2}\right)$$

En $t = 2$ s, el valor de la velocidad es:

$$v = 3{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 16\cos\left(16 \cdot 2 - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

La ecuación de la aceleración del MAS es:

$$a = -A\,\omega^2\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

Sustituimos los datos conocidos, en unidades del SI:

$$a = -3{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 16^2\text{sen}\left(16 \cdot 2 - \frac{\pi}{2}\right) = -6{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Con este valor hallamos el valor de la fuerza recuperadora, que es la suma de la fuerza elástica y el peso:

$$F = m \cdot a = 20\text{ kg} \cdot (-6{,}5)\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 1{,}3 \cdot 10^2\text{ N}$$

46. Datos: $\frac{T_1}{2} = 1{,}0$ s; $L_1 = 1{,}0$ m; $T_2 = 10$ s

— Con los valores del período y de la longitud del primer péndulo, hallamos el valor de la gravedad del lugar:

$$\frac{T_1}{2} = 1{,}0\text{ s} \rightarrow T_1 = 2{,}0\text{ s}$$

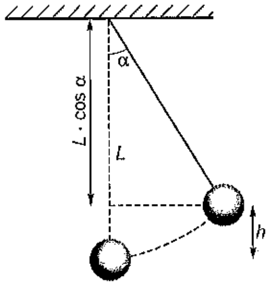
$$g = 4\pi^2\frac{L_1}{T_1^2} = 4\pi^2\frac{1{,}0\text{ m}}{(2{,}0\text{ s})^2} = 9{,}9\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

— Hallamos el valor de la longitud del segundo péndulo:

$$L_2 = \frac{g\,T_2^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}9\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 10^2\text{ s}^2}{4\pi^2} = 25\text{ m}$$

47. Datos: $m = 100$ g; $L = 1{,}0$ m; $\alpha = 10°$

a) En el caso del péndulo, la energía potencial, E_p, es energía potencial gravitatoria. Calculamos E_p en el punto de máxima elongación (donde el ángulo que forma el hilo del péndulo con la vertical es igual al ángulo inicial), tomando como origen de E_p la posición de equilibrio de la masa del péndulo ($\alpha = 0°$):



Hallamos la altura h con respecto al origen de E_p:

$$h = L - L\cos\alpha = L\,(1 - \cos\alpha)$$

La energía potencial es:

$$E_p = m\,g\,h = m\,g\,L\,(1 - \cos\alpha)$$

Calculamos E_p, teniendo en cuenta que el ángulo está expresado en grados sexagesimales:

$$E_p = 0{,}100\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 1{,}0\text{ m}\,(1 - \cos 10°) = 0{,}015\text{ J}$$

b) Aplicamos la conservación de la energía mecánica, E_m, para hallar la máxima velocidad que alcanzará la esfera. En el punto de máxima elongación, la energía cinética es nula y E_m coincide con el valor de E_p calculado en el apartado anterior. Por tanto, al pasar por la posición de equilibrio, la energía potencial es nula y la energía cinética alcanza el valor máximo, igual a E_m:

$$E_m = \text{cte} \rightarrow E_{c\,\text{máx}} = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 = E_m$$

Aislamos la velocidad máxima:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2E_m}{m}} = \sqrt{\frac{2mgh}{m}} = \sqrt{2gh}$$

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 1{,}0\ \text{m}\,(1 - \cos 10°)}$$

$$v_{\text{máx}} = 0{,}54\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c) El tiempo necesario para completar 10 oscilaciones es igual a 10 veces el período T. Vamos a calcularlo:

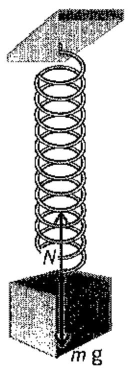
$$10\,T = 10 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 20\pi\sqrt{\frac{1{,}0\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 20\ \text{s}$$

El péndulo tardará 20 s en completar 10 oscilaciones.

48. Datos: $f = 4{,}0$ Hz

Según el enunciado, la piedra no afecta al movimiento, con lo que la frecuencia de oscilación se mantendrá.

En la figura se muestran las fuerzas sobre la piedra en la dirección vertical, que es la dirección del MAS:



El sentido de la fuerza peso sobre la piedra siempre es hacia abajo. Su módulo es constante, igual a: $m_p \cdot g$, donde m_p es la masa de la piedra.

En cambio, la fuerza normal, N, que ejerce el cuerpo sobre la piedra siempre va dirigida hacia arriba y el valor de su módulo puede variar:

$$0 \leq N \leq m_p\, g$$

Por otra parte, en el MAS, la aceleración en un punto a una distancia x de la posición de equilibrio viene dada por:

$$a = \omega^2 x$$

Cuando el oscilador vertical está sobre la posición de equilibrio, la fuerza recuperadora, y por su aceleración tienen sentido hacia abajo. El módulo de la aceleración aumenta al incrementar la distancia a la posición de equilibrio. Por encima de la posición de equilibrio, la piedra se mantendrá sobre el cuerpo siempre que la fuerza que actúe sobre ella hacia abajo sea capaz de proporcionarle la misma aceleración del cuerpo, es decir, la aceleración del MAS. El máximo valor de aceleración hacia abajo que puede tener la piedra se da cuando la fuerza normal sobre ella es nula:

$$a_{\text{abajo}} = \frac{m_p\, g - N}{m_p} \rightarrow a_{\text{abajo}} \text{ es máxima si } N = 0$$

Entonces, resulta: $a_{\text{abajo}} = g$

Igualamos las dos expresiones de la aceleración:

$$\omega^2 x = g \rightarrow x = \frac{g}{\omega^2} = \frac{g}{4\pi^2 f^2}$$

Y sustituimos los datos para hallar la distancia x por encima de la posición de equilibrio a la que la piedra perderá el contacto con el cuerpo:

$$x = \frac{g}{4\pi^2 f^2} = \frac{9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{4\pi^2\, 4{,}0^2\ \text{s}^{-2}} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}6\ \text{cm}$$

49. Datos: $x_{\text{total}} = 3{,}42$ cm

— La longitud total a la que llega el extremo del muelle es la suma de la elongación en su posición de equilibrio con la masa colgando y de la amplitud de oscilación con respecto a dicha posición de equilibrio:

$$x_{\text{total}} = x_0 + A$$

— Tomamos como origen de energía potencial gravitatoria, la posición inicial del sistema antes de liberarlo. Es decir, cuando la masa está en el extremo del muelle en su longitud natural. En esta posición la energía cinética es cero, al igual que la energía potencial elástica y la energía potencial gravitatoria:

$$E_{p\,\text{grav}} = E_{p\,\text{elast}} = E_c = 0$$

— Si consideramos que no hay disipación de energía durante la caída del cuerpo, podemos aplicar la **conservación de la energía mecánica, E_m**.

En la posición inicial, se tiene:

$$E_m = E_c + E_{p\,\text{grav}} + E_{p\,\text{elast}} = 0$$

En la posición final, esto es, cuando se queda en reposo por primera vez, las energías cinética y potencial valen:

$$E_c = 0; \quad E_{p\,\text{grav}} = -m\,g\,x_{\text{total}}; \quad E_{p\,\text{elast}} = \frac{1}{2} k\, x_{\text{total}}^2$$

La energía mecánica final es igual a la energía mecánica inicial:

$$E_m = 0 \rightarrow 0 = 0 - m\,g\,x_{\text{total}} + \frac{1}{2} k\, x_{\text{total}}^2$$

— De la expresión anterior, hallamos la relación entre m y k y, por tanto, el valor del período:

$$m\,g = \frac{1}{2} k\, x_{\text{total}} \rightarrow \frac{m}{k} = \frac{x_{\text{total}}}{2\,g}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{x_{\text{total}}}{2\,g}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{3{,}42 \cdot 10^{-2}\ \cancel{\text{m}}}{2 \cdot 9{,}8\ \cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^{-2}}} = 0{,}26\ \text{s}$$

50. Datos: $m = 1{,}0$ g; $L = 1{,}5$ m; $q = 1{,}3 \cdot 10^{-8}$ C; $100T_1 = 314$ s; $100T_2 = 207$ s

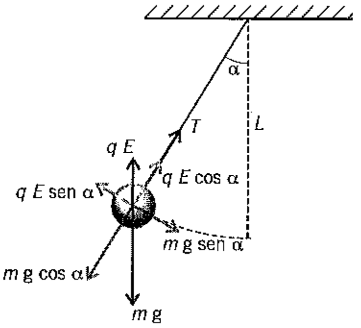
— Designamos por E el módulo del campo eléctrico aplicado.

— De los datos del enunciado, hallamos el valor del período en cada caso:

$$T_1 = \frac{314\text{ s}}{100} = 3{,}14\text{ s (campo eléctrico hacia arriba)}$$

$$T_2 = \frac{207\text{ s}}{100} = 2{,}07\text{ s (campo eléctrico hacia abajo)}$$

— En la figura se muestran las fuerzas que actúan sobre la esfera cargada en el primer caso; es decir, cuando el campo eléctrico está dirigido hacia arriba:



— Si designamos por x la longitud de la trayectoria con respecto a la posición de equilibrio, si α está en radianes, se cumple:

$$\alpha L = x$$

— Considerando como positivo el sentido en el que la longitud del arco aumenta, y que α es siempre positivo, la fuerza recuperadora es:

$$F_{\text{recup}} = -(m\,g\,\text{sen}\alpha - q\,E\,\text{sen}\alpha)$$

— Para valores pequeños del ángulo de desplazamiento, α, es válida la aproximación: $\text{sen}\,\alpha \approx \alpha$

— Y la fuerza recuperadora es:

$$F_{\text{recup}} = -(m\,g - q\,E)\,\alpha = -\frac{(m\,g - q\,E)x}{L}$$

Es decir, es una fuerza del tipo: $F = -k_1\,x$.

En este caso:

$$k_1 = \left(m\,g - q\frac{E}{L}\right)$$

— Y teniendo en cuenta la relación del período de un MAS con la constante elástica y la masa del cuerpo en movimiento, es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left(m\,g - q\dfrac{E}{L}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\dfrac{g - q\,E}{m}}}$$

— En el segundo caso, cuando el campo eléctrico está dirigido hacia abajo, la componente de E en la dirección perpendicular al hilo tiene el mismo sentido que la componente del peso, con lo que la fuerza recuperadora es:

$$F_{\text{recup}} = -(m\,g + q\,E)\,\alpha = -\frac{(m\,g + q\,E)x}{L}$$

— La constante elástica del sistema es:

$$k_2 = \frac{(m\,g + q\,E)}{L}$$

— Y el período del MAS viene dado por:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + q\dfrac{E}{m}}}$$

— Al elevar al cuadrado la ecuación del período en los dos casos y agrupar términos, obtenemos este sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} g - \frac{q\,E}{m} &= L\frac{4\pi^2}{T_1^2} \\ g + \frac{q\,E}{m} &= L\frac{4\pi^2}{T_2^2} \end{aligned}\right\}$$

— Sumamos las dos ecuaciones y sustituimos los datos para hallar el valor de g:

$$g = L \cdot 2\pi^2\left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2}\right)$$

$$g = 1{,}5\text{ m} \cdot 2\pi^2\left(\frac{1}{3{,}14^2} + \frac{1}{2{,}07^2}\right)\text{s}^{-2} = 9{,}9\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

— Introducimos este valor de g, junto con los demás datos, en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema para hallar el módulo del campo eléctrico:

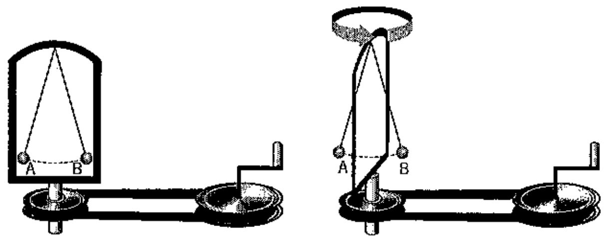
$$E = \frac{m}{q}\left(g - l\frac{4\pi^2}{T_1^2}\right)$$

$$E = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}\text{ kg}}{1{,}3 \cdot 10^{-8}\text{ C}}\left(9{,}9 - 1{,}5\frac{4\pi^2}{3{,}14^2}\right)\text{m}\cdot\text{s}^{-2} =$$

$$= 3{,}0 \cdot 10^5\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$$

51. El péndulo de Foucault es un péndulo simple de gran masa (del orden de 10 o 10^2 kg), suspendido de un hilo de gran longitud (varios metros). La masa suele tener un estilete en su extremo inferior para «evidenciar» el movimiento aparente del péndulo, al hacer caer testigos emplazados en distintas posiciones del suelo, o bien al dejar marcas en la arena del suelo.

El funcionamiento del péndulo de Foucault se basa en la propiedad fundamental de que el plano de oscilación de un péndulo es invariable. Es decir, aunque se mueva el punto donde el péndulo se sujeta, el péndulo oscila siempre en el mismo plano, como se indica en la figura:



Para un observador solidario con el punto de sujeción del péndulo, el plano de oscilación del péndulo mostrará un movimiento aparente cuando el observador esté en movimiento. Por tanto, el péndulo de Foucault sirve para demostrar el movimiento de rotación de la Tierra, ya que el movimiento de esta es la causa del movimiento aparente del plano de oscilación del péndulo. En realidad, el plano de oscilación no se mueve y es la Tierra la que gira, pero los observadores terrestres percibimos el efecto contrario.

El movimiento del plano de oscilación del péndulo de Foucault depende de su emplazamiento sobre la Tierra, es decir, de la latitud (a mayor latitud, más rápido gira el plano de oscilación). En los polos, el plano de oscilación realiza un giro completo (360°) en 24 h; mientras que en París tarda unas 32 h en completarlo; y en el ecuador, el plano de oscilación se mantiene fijo. Además, el sentido de giro del plano de oscilación del péndulo de Foucault es en sentido horario en el hemisferio norte y en sentido antihorario en el hemisferio sur.

El péndulo de Foucault se diferencia de los péndulos ordinarios (p. ej., los de relojes de pared) en que estos últimos son obligados mecánicamente a ir variando su plano de oscilación, para que siempre esté fijo con relación al aparato que contiene el péndulo. En el péndulo de Foucault, en cambio, no hay esta restricción y su plano de oscilación puede variar en relación con el entorno; es decir, mantenerse fijo aun cuando el entorno (la Tierra) gire.

Al igual que en todos los péndulos, en el de Foucault hay disipación de energía debido al rozamiento. Por tanto, para mantener su movimiento, se coloca un dispositivo especial cerca de su punto de sujeción que compense la disipación de energía por el rozamiento.

SÍNTESIS pág. 368

52. Datos: $m = 0{,}1$ kg; $k = 10\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$; $E_m = 1{,}2$ J; $a\,(t = 0)$ es máxima

a) La energía mecánica coincide con el máximo valor de la energía potencial del sistema:

$$E_m = \left(\frac{(k\,A^2)}{2}\right) \rightarrow A = \sqrt{\left(\frac{2E_m}{k}\right)}$$

Sustituimos los datos para calcular la amplitud:

$$A = \sqrt{\left(\frac{2\cdot 1{,}2\ \text{J}}{10\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}\right)} = 0{,}49\ \text{m}$$

Hallamos el período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1\ \text{kg}}{10\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}} = 0{,}63\ \text{s}$$

b) En el MAS, el módulo de la aceleración es máximo en los extremos de la trayectoria. Por tanto, en $t = 0$, el cuerpo está en un extremo de su trayectoria. En principio, puede ser $x = A$ o bien $x = -A$.

Si suponemos que la aceleración en $t = 0$ es positiva, entonces la posición inicial es $x = -A$, puesto que en el MAS la posición y la aceleración están en oposición de fase. En consecuencia, la fase inicial es $-\frac{\pi}{2}$.

La pulsación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}}{0{,}1\ \text{kg}}} = 10\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Y la ecuación de la posición, en unidades del SI, es:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi) \rightarrow x = 0{,}49\,\text{sen}\left(10\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

c) La ecuación de la velocidad, en unidades del SI, es:

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow v = 4{,}9\cdot 10\cos\left(10\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

En el instante $t = 5$ s, la velocidad es:

$$v = 4{,}9\cdot 10\cos\left(10\cdot 5 - \frac{\pi}{2}\right) = 4\cdot 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

53. Datos: $m = 0{,}1$ kg; $x = 0{,}12\,\text{sen}\left(2\pi\,t + \frac{\pi}{3}\right)$ en unidades del SI

a) La ecuación de la posición corresponde a la de un movimiento armónico simple, ya que en el MAS es:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega\,t + \varphi)$$

Identificando términos con la ecuación del enunciado del problema, obtenemos:

$$A = 0{,}12\ \text{m};\ \omega = 2\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1};\ \varphi = \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

Hallamos el período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\,\text{s}^{-1}} = 1\ \text{s}$$

Hallamos la energía mecánica:

$$E_m = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,A^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}\,0{,}1\ \text{kg}\cdot(2\pi)^2\ \text{s}^{-2}\cdot 0{,}12^2\ \text{m}^2 = 0{,}03\ \text{J}$$

b) Las ecuaciones de la aceleración y la velocidad en el MAS son, respectivamente:

$$v = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi)\ ;\ a = -A\,\omega^2\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

Hallamos primero la aceleración en el instante $t = 3$ s, a partir de la ecuación de la aceleración en unidades del SI:

$$a = -0{,}12\,(2\pi)^2\text{sen}\left(2\pi\cdot 3 + \frac{\pi}{3}\right) = -4{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

La energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

Sustituimos el valor de la masa y la expresión de la velocidad y calculamos la energía cinética en $t = 3$ s:

$$E_c = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1\ \text{kg}\cdot\left(0{,}12\cdot 2\pi\cos\left(2\pi\cdot 3 + \frac{\pi}{3}\right)\right)^2\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$$

$$E_c = 7\cdot 10^{-3}\ \text{J} = 7\ \text{mJ}$$

54. Datos: $m = 50$ g; $x_{máx} = 10$ cm; $a = -16\pi^2 x$; $x\,(t = 0) = 10$ cm

a) En el MAS, la aceleración y la posición se relacionan según: $a = -\omega^2\,x$.

Por comparación con la ecuación del enunciado, es:

$$\omega^2 = 16\pi^2 \rightarrow \omega = 4\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Además: $A = x_{máx} = 0{,}10$ m

Las ecuaciones de la posición y la velocidad en el MAS son:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)\;;\; v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

Hallamos la fase inicial a partir de la posición inicial:

$$A = A\,\text{sen}(0 + \varphi) \rightarrow \text{sen}\,\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, la ecuación de la posición en unidades del SI es:

$$x = 0{,}10\,\text{sen}\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Y la ecuación de la velocidad en unidades del SI es:

$$v = 0{,}4\,\pi\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

b) En la posición $x = 5$ cm, la energía potencial es:

$$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 50 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\left(4\pi\,\text{s}^{-1}\right)^2 \cdot \left(5 \cdot 10^{-2}\,\text{m}\right)^2 = 0{,}01\ \text{J}$$

La energía cinética en la posición $x = 5$ cm es igual a la diferencia entre la energía mecánica y la energía potencial en dicha posición:

$$E_c = (E_m - E_p) = \frac{1}{2} m\omega^2(A^2 - x^2)$$

Sustituimos los datos para hallar E_c:

$$E_c = \frac{1}{2} 50 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}(4\pi\,\text{s}^{-1})^2 \cdot (10^2 - 5^2) \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2 =$$

$$= 0{,}03\ \text{J}$$

55. Respuesta sugerida:

En ausencia de gravedad, los astronautas no pueden medir su masa o su peso con una balanza usual, porque en una balanza lo que se mide es la fuerza en la dirección vertical ejercida sobre ella, es decir, la fuerza peso del objeto o persona emplazado sobre la balanza.

Para medir la masa en ausencia de gravedad, los astronautas utilizan un dispositivo formado por un muelle unido en un extremo a una silla en la que se sienta un astronauta. El otro extremo del muelle está anclado a un punto fijo. Todo el sistema se hace oscilar de forma que siga un MAS. Por medios electrónicos, el dispositivo mide el período, T, del MAS del conjunto muelle-silla-astronauta. Y —a partir de los valores conocidos de la constante elástica del muelle, la masa de la silla y el período medido— se obtiene la masa del astronauta, m_{astron}, que él o ella pueden leer directamente de la pantalla digital del dispositivo. El dispositivo calcula m_{astron} a partir de la relación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_{silla} + m_{astron}}{k}} \rightarrow m_{astron} = \frac{kT^2}{4\pi^2} - m_{silla}$$

Se sugiere que los alumnos hagan una presentación en PowerPoint, con fotografías de astronautas midiendo su masa, así como del dispositivo empleado, indicando sus componentes.

Evaluación (pág. 370)

1. Datos: $x_1 = 3{,}0$ cm; $v_1 = 6{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $x_2 = 5{,}0$ cm; $v_2 = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

— Las ecuaciones de la posición y velocidad del MAS son:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)\;;\; v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

— A partir de la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1$$

Se obtiene una expresión que relaciona x y v:

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

Fijémonos en que, en esta expresión, cuando $x = \pm A$, la velocidad es nula; mientras que cuando $x = 0$, el valor absoluto de v es máximo, tal como corresponde al MAS.

— Al sustituir los datos del enunciado, en unidades del SI, resulta un sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 36 &= \omega^2(A^2 - 9 \cdot 10^{-4}) \\ 4 &= \omega^2(A^2 - 25 \cdot 10^{-4}) \end{aligned}\right\}$$

— Dividimos las dos ecuaciones:

$$9 = \frac{A^2 - 9 \cdot 10^{-4}}{A^2 - 25 \cdot 10^{-4}} \rightarrow 8A^2 = 9(25 - 1) \cdot 10^{-4}$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado son:

$$A = \pm\sqrt{27} \cdot 10^{-2}\,\text{m} = \pm 5{,}2 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$$

La amplitud del movimiento es la solución positiva de la ecuación. Por tanto: $A = 5{,}2 \cdot 10^{-2}$ m $= 0{,}052$ m.

— Introducimos este valor de A en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema para hallar la frecuencia angular:

$$4 = \omega^2(5{,}2^2 \cdot 10^{-4} - 25 \cdot 10^{-4}) \rightarrow \omega = 1{,}4 \cdot 10^2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Y la frecuencia de este movimiento es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1{,}4 \cdot 10^2\ \cancel{\text{rad}}\cdot\text{s}^{-1}}{2\pi\ \cancel{\text{rad}}} = 22\ \text{Hz}$$

2. Datos: $E_m = 3{,}0 \cdot 10^{-5}$ J; $F_{máx} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ J

a) En un MAS, el valor máximo de la fuerza recuperadora que lo origina se calcula de la siguiente manera:

$$F = k \cdot x \rightarrow F_{máx} = k \cdot A$$

Por otra parte, la energía mecánica de la partícula que oscila es:

$$E_m = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

Sustituyendo los datos proporcionados en el enunciado y resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido, hallamos el valor de k y de la amplitud del movimiento:

$$1{,}5 \cdot 10^{-3} = k \cdot A$$

$$3{,}0 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$3{,}0 \cdot 10^{-5}\ \text{J} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{N} \cdot A \rightarrow A = 0{,}04\ \text{m}$$

b) Datos: $T = 2$ s; $x(t = 0) = 0{,}02$ m

La ecuación del MAS es:

$$x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

Hallamos la pulsación a partir del período:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\text{ s}} = \pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

La fase inicial viene determinada por las condiciones iniciales:

$$0{,}02 = 0{,}04\ \text{sen}\ \varphi \rightarrow \text{sen}\ \varphi = 0{,}5 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}\text{rad}$$

Así pues, la ecuación del movimiento será, en unidades del SI:

$$x = 0{,}04\ \text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

3. Datos: $m = 5$ kg; $A = 4$ cm; $a_{máx} = 24\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

En el MAS, la aceleración a y la posición x se relacionan según: $a = -\omega^2 x$.

— Hallamos la pulsación a partir de la expresión de la aceleración máxima:

$$a_{máx} = A\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_{máx}}{A}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{24\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{4\cdot 10^{-2}\ \text{m}}} = \sqrt{6\cdot 10^2}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Determinamos el valor de la constante elástica:

$$k = \omega^2 m = 6\cdot 10^2\ \text{s}^{-2}\cdot 5\ \text{kg} = 3\cdot 10^3\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$$

— Calculamos la frecuencia y el período:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{6\cdot 10^2}\ \cancel{\text{rad}}\cdot\text{s}^{-1}}{2\pi\ \cancel{\text{rad}}} = 4\ \text{Hz}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\ \cancel{\text{rad}}}{\sqrt{6\cdot 10^2}\ \cancel{\text{rad}}\cdot\text{s}^{-1}} = 0{,}3\ \text{s}$$

4. Datos: $m = 1{,}0$ g; $x_{máx} = 1{,}0$ m; $\Delta t = 0{,}25$ s

Según el enunciado, la partícula inicia el movimiento en la posición $x_{máx}$, es decir, cuando $x = A$, y tarda 0,25 s en alcanzar la posición de equilibrio. Por tanto: $\frac{T}{4} = 0{,}25$ s, lo que significa que el período es: $T = 4\cdot 0{,}25\ \text{s} = 1{,}0$ s.

— La pulsación de este movimiento es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{1{,}0\ \text{s}} = 2\pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

— Vamos a determinar la fuerza a partir del valor de la aceleración, teniendo en cuenta que en el MAS: $a = -\omega^2 x$.

La ecuación de la posición es: $x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$.

Hallamos la fase inicial:

$$A = A\,\text{sen}(0 + \varphi) \rightarrow \text{sen}\,\varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, en unidades del SI:

$$x = 1\cdot\text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La aceleración en $t = 0{,}1$ s es:

$$a = -(2\pi)^2\cdot\text{sen}\left(2\pi\cdot 0{,}1 + \frac{\pi}{2}\right) = -3{,}2\cdot 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Y, puesto que la masa es constante, la fuerza sobre la partícula al cabo de 0,1 s de iniciarse el movimiento es:

$$F = m\,a = 1{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot(-3{,}2\cdot 10)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} =$$
$$= -3{,}2\cdot 10^{-2}\ \text{N}$$

5. En el MAS, las principales magnitudes que determinan la energía mecánica son la constante elástica del sistema y la amplitud de oscilación. Es decir, las magnitudes que intervienen en el cálculo del trabajo externo sobre el sistema para que este inicie la oscilación. La energía mecánica y el período vienen dados por:

$$E_m = \frac{1}{2}k A^2;\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Si se duplican simultáneamente la energía mecánica y el período, se tiene:

$$E_m \rightarrow E'_m = 2E_m;\quad T \rightarrow T' = 2T$$

Las magnitudes que aparecen en las ecuaciones del MAS son: la amplitud, la pulsación, el tiempo y la fase inicial. De ellas, el tiempo es independiente del valor de la energía mecánica y del período del movimiento. Por otra parte, la fase inicial depende de la amplitud y de la posición en el instante inicial, de modo que su variación dependerá también de cómo varíen dichas magnitudes.

En cuanto a la pulsación, esta solo depende del período:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, de modo que, si el período se duplica, la pulsación se reduce a la mitad.

Nos queda por determinar cómo varía la amplitud.

Sabemos que el período se ha duplicado. Esto puede deberse a que la masa se haya cuadriplicado y k se haya mantenido constante; también puede deberse a que k se haya reducido a una cuarta parte y que la masa se haya mantenido constante; o bien a que el cociente $\frac{m}{k}$ se haya cuadriplicado.

La nueva energía mecánica es:

$$E'_m = 2E_m \rightarrow \frac{1}{2}k' A'^2 = 2\cdot\frac{1}{2}k A^2$$

En el caso de que k se haya mantenido constante, entonces la nueva amplitud es:

$$A'^2 = 2A^2 \rightarrow A' = \sqrt{2}\ A$$

En el caso de que k se haya reducido a una cuarta parte, la nueva amplitud es:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{4}A'^2 = 2\cdot\frac{1}{2}k A^2 \rightarrow A' = \sqrt{8}\ A$$

Y, dado que k puede reducirse en otra cantidad, siempre que la masa aumente de modo tal que el nuevo período sea el doble, la amplitud también podrá incrementar en otra cantidad.

En general, la nueva constante elástica es:

$$k' = \frac{m' k}{4m}$$

Con lo que la nueva amplitud es:

$$k' A'^2 = 2\,k\,A^2 \rightarrow \frac{m' k}{4m} A'^2 = 2\,k\,A^2 \rightarrow A' = \sqrt{\frac{8m}{m'}}\,A$$

6. Datos: $m = 0{,}12$ kg; $A = 0{,}20$ m; $E_m = 6{,}0$ J

a) La energía mecánica del MAS es:

$$E_m = \frac{1}{2} k\, A^2$$

De la expresión anterior, hallamos la constante elástica:

$$k = \frac{2\,E_m}{A^2} = \frac{2 \cdot 6 \text{ J}}{0{,}20^2 \text{ m}^2} = 3{,}0 \cdot 10^2 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

Calculamos la frecuencia a partir de los valores de k y m:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3{,}0 \cdot 10^2 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}{0{,}12 \text{ kg}}} = 8{,}0 \text{ Hz}$$

b) En la posición $x = 0{,}10$ m, la energía potencial es:

$$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} 3{,}0 \cdot 10^2 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \cdot (0{,}10 \text{ m})^2 = 1{,}5 \text{ J}$$

La energía cinética en la posición $x = 0{,}10$ m es igual a la diferencia entre la energía mecánica y la energía potencial en dicha posición:

$$E_c = (E_m - E_p) = (6{,}0 - 1{,}5) \text{ J} = 4{,}5 \text{ J}$$

7. Datos: $m = 80$ g; $A = 5$ cm; $E_{c\,\text{máx}} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ J; $x\,(t = 0) = 0$

a) La ecuación del movimiento del MAS es:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

La energía cinética máxima coincide con la energía mecánica del MAS, por lo que podemos hallar la pulsación:

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{2\,E_{c\,\text{máx}}}{A^2} \\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \end{array}\right\} \rightarrow \omega = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2\,E_{c\,\text{máx}}}{m}}$$

Sustituyendo los datos del enunciado:

$$\omega = \frac{1}{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}\sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ J}}{80 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} = 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Por su parte, la fase inicial es:

$$0 = A \operatorname{sen}(0 + \varphi) \rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0\,;\ \varphi = \pi$$

Hay, pues, dos posibles ecuaciones del movimiento, en unidades del SI:

$$x = 0{,}05 \operatorname{sen}(5\,t)\,;\ x = 0{,}05 \operatorname{sen}(5\,t + \pi)$$

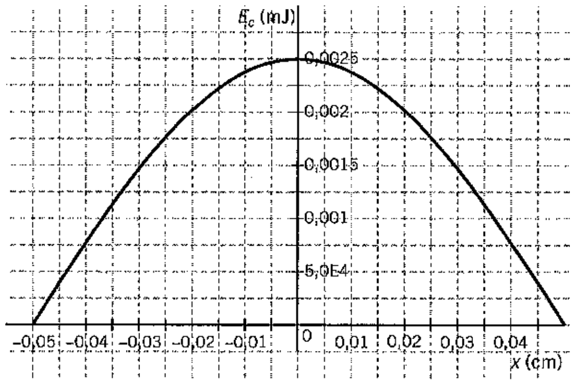
b) La energía cinética es igual a la diferencia entre la energía mecánica y la energía potencial:

$$E_c = (E_m - E_p) = E_m - \frac{1}{2} k\, x^2 = E_m - \frac{1}{2} m\,\omega^2\, x^2$$

$$E_c = 2{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ J} - \frac{1}{2} 80 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\,(5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2\, x^2$$

Por tanto, la representación gráfica de la energía cinética en función de la posición, en unidades del SI, es:

$$E_c = 2{,}5 \cdot 10^{-3} - x^2$$



La energía mecánica se mantiene constante durante el movimiento y su valor es de $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ J.

En los extremos de la trayectoria, la energía cinética es nula y la energía potencial alcanza su valor máximo. A medida que el cuerpo se aproxima a la posición de equilibrio, parte de su energía potencial se transforma en energía cinética; hasta que, al pasar por la posición de equilibrio, toda la energía potencial se ha transformado en energía cinética. La energía cinética y potencial se van transformando de una en otra, pero su suma (energía mecánica) siempre se mantiene constante.

8. Datos: $k = 800$ N $\cdot$ m^{-1}; $f = 0{,}50$ Hz

En el *puenting*, una persona se tira desde una altura h atada a una cuerda elástica, de modo que la cuerda se alarga y adquiere una longitud mayor que su longitud natural. Obviamente, h tiene que ser mayor que la longitud total que llega a tener la cuerda. El movimiento primero es el de una caída libre pero, a continuación, la energía cinética adquirida en la caída (no consideramos la energía de rotación) pasa a la cuerda en forma de energía potencial, cuando esta se alarga. Posteriormente, la cuerda recupera su longitud natural, de forma que la persona se mueve según un MAS, análogo al de un resorte vertical, con la diferencia de que la cuerda elástica no se comprime, y el cuerpo atado a ella oscila verticalmente en torno a la posición de equilibrio (cuerda alargada), hasta que su movimiento se detiene por el rozamiento y la resistencia del aire. No consideramos otras oscilaciones que pueda haber, similares a las del péndulo.

— Hallamos la masa a partir de su relación con k y f en un MAS en un resorte vertical:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{4\pi^2 f^2} = \frac{800 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}}{4\pi^2 \cdot 0{,}50^2 \text{ s}^{-2}} = 81 \text{ kg}$$

— En la posición de equilibrio, el peso de la masa se equilibra con la fuerza elástica:

$$mg = |-k\,\Delta x| \rightarrow \Delta x = \frac{mg}{k} = \frac{81\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{800\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}} = 0{,}99\ \text{m}$$

9. Un sistema de dos muelles en paralelo equivale a un solo muelle de constante elástica igual a la suma de las constantes elásticas de los dos muelles, puesto que las dos fuerzas elásticas se suman. Es decir, la constante elástica equivalente es:

$$k_{\text{equiv}} = k + k = 2k$$

En consecuencia, el período de oscilación es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_{\text{equiv}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2k}}$$

10. Para pequeñas oscilaciones, el movimiento del péndulo simple es un MAS con $k = m\frac{g}{L}$. Por lo tanto, la dependencia de E_p y E_c con la posición son las del MAS. De las gráficas del enunciado, la primera gráfica correspondería a la energía cinética en función de x, en lugar de E_p; mientras que la segunda gráfica correspondería a la energía potencial en función de x, en lugar de E_c. Por tanto, la única gráfica que se ajusta a la relación energía-elongación es la última, es decir, la de la energía mecánica igual a un valor constante.

11. Datos: $a = 3$ g; en la Tierra, media oscilación cada segundo.

— El período del péndulo en la Tierra es:

$$T_{\text{Tierra}} = \frac{1\ \text{s}}{0{,}5\ \text{oscilaciones}} = 2\ \text{s}$$

— Y se cumple que:

$$T_{\text{Tierra}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

— Consideramos que la longitud del péndulo, L, no varía. Entonces, el período de oscilación en la nave es:

$$T_{\text{nave}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{\text{nave}}}}$$

— La nave es un sistema no inercial. Y, como se aleja de la Tierra, la aceleración de la nave es percibida por sus ocupantes como una aceleración dirigida hacia la Tierra. Equivale a decir que en la nave la aceleración de la gravedad es igual a la aceleración de la nave, pero de sentido contrario. Es decir:

$$g_{\text{nave}} = a = 3\,g$$

— En consecuencia:

$$T_{\text{nave}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}} = \frac{T_{\text{Tierra}}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \text{s}$$

12. a) Es verdadera.

b) Es verdadera, ya que $E_m = \frac{k\,A^2}{2}$.

c) Es falsa. El movimiento de un péndulo es un MAS solo para pequeños valores del desplazamiento, en los que es válido aproximar el valor del seno de un ángulo al valor del ángulo en radianes.

d) Es falsa, la posición no es en $x = \frac{A}{2}$. Veamos:

En la posición en que $E_c = \frac{E_p}{2}$, se cumple:

$$\left.\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ E_c &= \frac{E_p}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{2}k\,A^2 = \left(\frac{1}{2}+1\right)k\,x^2$$

Y resulta:

$$x = \pm\frac{A}{\sqrt{3}}$$

Zona + (pág. 371)

— *¿En qué unidad se mide el tiempo? Los relojes atómicos*

Un reloj de cesio se basa en las propiedades de la estructura electrónica del átomo de cesio (Cs). El cesio tiene 55 electrones. De ellos, los 54 más «interiores» adoptan la configuración electrónica del gas noble xenón, que es muy estable. Por esta razón, entre el electrón restante (que está en el orbital 6s) y el núcleo hay una distribución de electrones muy simétrica. Este hecho permite la interacción directa entre el espín del electrón y el del núcleo, proceso conocido como transición hiperfina. Según la física cuántica, esta interacción tiene asociada un valor de energía muy concreto: $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ eV, que es 10^{-5} veces el valor de la energía de la primera ionización del Cs y 10^{-3} veces el valor de la energía cinética media a 100 °C (o energía térmica) del átomo de cesio. La importancia de poder «seleccionar» este valor bajo de energía está en el extremadamente alto grado de precisión con el que se puede medir la frecuencia en el espectro de energía irradiada cuando el electrón 55 vuelve a su estado fundamental. Esto permite definir el segundo a partir de un número exacto de veces el período de la vibración asociada a la transición hiperfina del cesio.

En un reloj de cesio se han seleccionado previamente átomos en el estado fundamental (evaporando cesio líquido y seleccionando los átomos de cesio en estado gaseoso por medio de imanes). Estos átomos seleccionados se mantienen en un compartimento con un alto grado de vacío y libres de interacciones externas. El interior del compartimento se irradia con ondas de radio procedentes de un oscilador electrónico (radioemisor) de frecuencia ajustable, próxima a 9 192 631 770 Hz (que designamos como f_{Cs}). Evidentemente, no se dispone de radioemisores tan precisos, por lo que hay que seguir un procedimiento de ajuste. Es el siguiente: cuando la frecuencia de las ondas de radio es exactamente igual a f_{Cs}, los átomos de cesio se acoplan a estas ondas y absorben su energía que posteriormente vuelven a emitir. La energía emitida por los átomos de cesio es captada por una célula fotoeléctrica, con lo cual se puede variar la frecuencia del radioemisor, hasta conseguir la reemisión de energía por el cesio y, por tanto, tener exactamente la frecuencia f_{Cs} en el radioemisor. Y, a partir de ahí, mediante circuitos electrónicos, se obtienen pulsos electrónicos con una duración exacta de 1 s.

— *Un paso hacia los motores moleculares artificiales*

Proponemos la lectura y comprensión de la noticia.

— *Experimento de la gravedad en la expedición Malaspina*

Proponemos la lectura y comprensión de la noticia.

Formulación química inorgánica

En contexto (Pág. 375)

a. — Respuesta sugerida:

Cuando un bidón mal etiquetado se ha distribuido a varias farmacias tiene, básicamente, un **foco de origen:** el mal **control de calidad** del producto. Dentro de este foco, encontramos: empleados con una **mala** base de **formulación,** en este caso, en química inorgánica, ya que el magnesio tiene un solo estado de oxidación y el manganeso, más de uno; o que en la empresa de fabricación se hayan **equivocado** a la hora de **transcribir** el nombre del compuesto químico en la etiqueta.

El conocimiento de la formulación y la nomenclatura de sustancias químicas es imprescindible en cualquier trabajo que manipule de alguna manera productos químicos, sobre todo, cuando el producto elaborado está destinado al consumo humano, como es el caso de los productos farmacéuticos.

— Respuesta sugerida:

Las consecuencias de este mal etiquetaje han sido la muerte de una persona y la intoxicación de doce más.

La interpretación de este hecho se puede traducir en que a veces se cometen errores graves en el control de calidad de productos químicos que conllevan a consecuencias nefastas.

La sustitución de un elemento químico por otro puede convertir una **sustancia beneficiosa** para nuestra salud en una **sustancia nociva.** El magnesio está presente en reacciones bioquímicas, pero al sustituirlo por manganeso con la dosis propia del magnesio puede alterar al sistema nervioso.

b. — Respuesta sugerida:

Cinco posibles detalles: el humo de las chimeneas, el humo de los tubos de escape, el lugar donde se construye una fábrica, el tamaño de la fábrica y el color del humo emitido.

— Respuesta sugerida:

Los gases que se emiten en las tres imágenes llevan a pensar cuánta contaminación se emite a la atmósfera.

— Respuesta sugerida:

¿Cuánto se puede contaminar en un día?

¿Es necesario emitir estos gases?

¿Se pueden reducir las emisiones de estos gases a la atmósfera?

¿Se pueden utilizar otros medios de fabricación o transporte para disminuir estas emisiones?

c. — Respuesta sugerida:

En la industria química, se emite SO_2 (dióxido de azufre), CO_2 (dióxido de carbono), etc. En la segunda imagen, se emite óxidos de nitrógeno, monóxido de carbono, dióxido de carbono, hidrocarburos, etc. Y en la última imagen, si se trata de una central geotérmica, solo se emite vapor de agua.

— Respuesta sugerida:

La menos contaminante es la central geotérmica, ya que aprovecha el calor que emite el planeta para generar energía.

— Respuesta sugerida:

Las alternativas para reducir todas estas emisiones son aquellas que emitan **sustancias biodegradables** o usen **métodos de síntesis verdes,** es decir, que no contaminen. Por ejemplo, vehículos eléctricos, paneles solares, captación de sustancias como el CO_2, catalizadores en los tubos de escape de los vehículos...

Proponemos consultar el siguiente enlace:

http://www.agenciasinc.es/Noticias/Un-dispositivo-desarrollado-en-Espana-elimina-las-emisiones-de-CO2-de-la-industria

Amplía (Pág. 376)

— Respuesta sugerida:

Este apartado consiste en una búsqueda de información sobre el tritio. Esta búsqueda debe dividirse en tres apartados:

a) Qué es el tritio y cómo se simboliza. El tritio es un átomo que en su núcleo contiene **un protón y dos neutrones.**

b) Se debería explicar cómo se forma el tritio. El tritio se genera por la acción de los rayos cósmicos en los gases de la atmósfera y, a la vez, se puede formar mediante reacciones nucleares.

c) Se debería explicar que es **radiactivo,** que tiene una vida media de unos doce años y que una de sus posibles aplicaciones en el futuro sea la obtención de helio y energía mediante la **fusión nuclear.** Se utiliza, además, como rastreador en medicina, estudios biológicos, etc.

Amplía (Pág. 380)

— Respuesta sugerida:

Este apartado trata de una búsqueda de información sobre la tecnología de iones utilizada en industria cosmética.

Este trabajo se debe dividir en los siguientes apartados:

a) La formación de los iones, tanto negativos como positivos, en la naturaleza. Los iones positivos se forman por la pérdida de electrones; aumentan por la contaminación atmosférica, rayos cósmicos, etc. Los iones negativos se forman por captación de electrones; aumentan por fenómenos meteorológicos como la influencia de los rayos o, simplemente, un salto de agua.