8 El movimiento

En contexto (Pág. 211)

a.

— Se espera que los alumnos reflexionen sobre los conceptos velocidad (máxima/promedio/instantánea), aceleración, tiempo de reacción.

— Ver punto anterior.

— El tiempo de reacción es el tiempo que pasa desde que se recibe un estímulo sensorial (sonido, imagen, temperatura, etc.) hasta que se inicia un movimiento de respuesta (por ejemplo, el pequeño instante que se tarda en apartar la mano del fuego después de percibir la alta temperatura o la fracción de segundo que pasa entre que se observa una pelota dirigiéndose hacia nosotros y se inicia el movimiento para esquivarla).

b.

— Mach es una unidad de velocidad relativa que expresa la relación entre una cierta velocidad y la velocidad del sonido en el medio en que nos encontramos. Así pues, se define mediante la ecuación:

$$M = \frac{V}{V_S}$$

Donde V es la velocidad del cuerpo que debe analizarse y V_S, la velocidad del sonido en el medio en el que se mueve el cuerpo.

Una velocidad de mach 7 equivale a 7 veces la velocidad del sonido, que en el aire es de 1234,8 km · h^{-1}. Esto es:

$$v = 7 \cdot v_S = 7 \cdot 1234{,}8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} =$$
$$= 8\,643{,}6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

— Los límites de la velocidad han evolucionado desde los 9 km · h^{-1} que alcanzaban los animales en el siglo XIX, pasando por la locomotora del siglo XX, que se desplazaba a unos 90 km · k^{-1}, hasta llegar a los 900 km · h^{-1} que alcanza un avión intercontinental en el siglo XXI. Siguiendo esta tendencia, se espera llegar a los 9000 km · k^{-1} en el siglo XXII.

Internet (Pág. 216)

La trayectoria se va dibujando en color azul al paso del punto. La longitud de esta es la **distancia** recorrida.

El vector rojo con origen en el punto inicial y final en el punto que se desplaza es el **vector desplazamiento.**

Se puede observar que la distancia va aumentando a medida que el punto se desplaza, mientras que el vector desplazamiento puede incrementar o disminuir en función de si nos alejamos o acercamos al punto inicial.

Internet (Pág. 217)

Para hallar la velocidad media, basta con conocer los puntos inicial y final y el tiempo total. En cambio, para calcular la rapidez media, debemos conocer toda la trayectoria del cuerpo.

Si la trayectoria es rectilínea y no se efectúa ningún cambio de sentido, entonces la rapidez y la velocidad media coinciden.

INTERNET (Pág. 221)

Se observa que la dirección del vector verde (aceleración tangencial) va variando a causa del efecto de la aceleración normal (vector rojo). De esta forma, se dibuja una trayectoria circular.

Problemas resueltos (Págs. 222 y 223)

1. Datos: $x(t) = 2t^2$, $y(t) = 3t^2 - 1$

Despejamos la variable t de la primera ecuación:

$$t = \sqrt{\frac{x}{2}}$$

Sustituimos t en la segunda ecuación para obtener la ecuación de la trayectoria:

$$y = 3 \cdot \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 - 1 = \frac{3 \cdot x}{2} - 1$$

Observamos que no depende del tiempo, como esperábamos. El vector de posición, en cambio, sí que depende del tiempo, ya que determina el punto del espacio en que se encuentra el móvil para un instante de tiempo dado:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = 2t^2\vec{i} + (3t^2 - 1)\vec{j}$$

2. Datos: $\vec{r}(t) = (30t, 40t - 5t^2)$

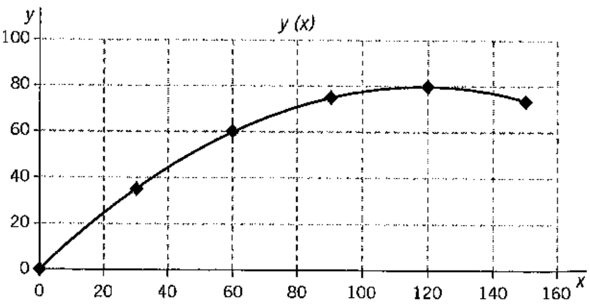
A partir de la ecuación del movimiento dada, podemos expresar las ecuaciones paramétricas del movimiento de la siguiente forma:

$x(t) = 30t$

$y(t) = 40t - 5t^2$

Aislamos la t en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$t = \frac{x}{30} \rightarrow y = 40 \cdot \frac{x}{30} - 5 \cdot \left(\frac{x}{30}\right)^2 = \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{180}$$



3. Datos:

Tiempo (s)	Posición (m)
20	50
30	70
40	60
50	10

La velocidad media se calcula mediante la expresión:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

En cada caso, calcularemos los incrementos de x y de t:

a) Entre $t = 20$ s y $t = 30$ s:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= x(30) - x(20) = 70\text{ m} - 50\text{ m} = 20\text{ m}\\ \Delta t &= 30\text{ s} - 20\text{ s} = 10\text{ s}\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_m = \frac{20\text{ m}}{10\text{ s}} = 2{,}0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) Entre $t = 20$ s y $t = 40$ s:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= x(40) - x(20) = 60\text{ m} - 50\text{ m} = 10\text{ m}\\ \Delta t &= 40\text{ s} - 20\text{ s} = 20\text{ s}\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_m = \frac{10\text{ m}}{20\text{ s}} = 0{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c) Entre $t = 20$ s y $t = 50$ s:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= x(50) - x(20) = 10\text{ m} - 50\text{ m} = -40\text{ m}\\ \Delta t &= 50\text{ s} - 20\text{ s} = 30\text{ s}\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_m = \frac{-40\text{ m}}{30\text{ s}} = -1{,}3\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

d) Entre $t = 30$ s y $t = 40$ s:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= x(40) - x(30) = 60\text{ m} - 70\text{ m} = -10\text{ m}\\ \Delta t &= 40\text{ s} - 30\text{ s} = 10\text{ s}\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_m = \frac{-10\text{ m}}{10\text{ s}} = -1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

e) Entre $t = 40$ s y $t = 50$ s:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= x(50) - x(40) = 10\text{ m} - 60\text{ m} = -50\text{ m}\\ \Delta t &= 50\text{ s} - 40\text{ s} = 10\text{ s}\end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_m = \frac{-50\text{ m}}{10\text{ s}} = -5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

4. Datos: $\vec{r}(t) = (3t^2 + 1)\vec{j}$

a) Consideramos la posición del objeto en el instante t y en un instante cercano $t + \Delta t$:

$$\vec{r}(t) = (3t^2 + 1)\vec{j}$$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = [3(t + \Delta t)^2 + 1]\vec{j}$$

Calculamos la variación de posición entre los dos instantes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = [3 \cdot (t + \Delta t)^2 + 1]\vec{j} - (3t^2 + 1)\vec{j} =$$

$$= (3 \cdot \Delta t^2 + 6 \cdot t \cdot \Delta t)\vec{j}$$

La velocidad instantánea será:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(3 \cdot \Delta t^2 + 6 \cdot t \cdot \Delta t)\vec{j}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(3 \cdot \Delta t^{\cancel{2}} + 6 \cdot t \cdot \cancel{\Delta t})\vec{j}}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}(3 \cdot \Delta t + 6 \cdot t)\vec{j} = 6 \cdot t\,\vec{j}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) Para calcular la velocidad instantánea, sustituimos el tiempo en la ecuación anterior:

$$\vec{v}(2\text{s}) = 6 \cdot 2\vec{j}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 12\vec{j}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Como solo tiene una componente, el módulo es:

$$v = 12\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

5. Datos: $\vec{r}(t) = 5t\vec{i} + (40 - 5t^2)\vec{j}$

Calculamos los vectores velocidad y aceleración mediante estas expresiones:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad ; \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Para calcular la velocidad, consideramos el vector de posición para un instante t y para otro muy próximo $t + \Delta t$:

$$\overline{\Delta r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) =$$

$$= 5(t + \Delta t)\vec{i} + [40 - 5(t + \Delta t)^2]\vec{j} - [5t\vec{i} + (40 - 5t^2)\vec{j}] =$$

$$= 5\Delta t\vec{i} - (5\Delta t^2 - 10t\Delta t)\vec{j}$$

Calculamos la velocidad:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{5\cancel{\Delta t}\vec{i} + (5\Delta t^{\cancel{2}} - 10t\cancel{\Delta t})\vec{j}}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} 5\vec{i} + (5\Delta t - 10t)\vec{j} = 5\vec{i} - 10t\vec{j}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Siguiendo un procedimiento análogo, para el cálculo de la aceleración consideramos la variación del vector velocidad de dos instantes muy próximos:

$$\overline{\Delta v}(t) = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) =$$

$$5\vec{i} - 10(t + \Delta t)\vec{j}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} - (5\vec{i} - 10t\vec{j}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}) =$$

$$= -10\Delta t\,\vec{j}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Finalmente, utilizando la expresión dada al inicio de la resolución, obtenemos:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-10\cancel{\Delta t}\,\vec{j}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{\cancel{\Delta t}} = -10\,\vec{j}\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

6. Datos: $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + (1 - t^2)\vec{j}$

a) El desplazamiento entre $t = 6$ s y $t = 3$ s será la variación del vector de posición entre estos instantes:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(6\text{s}) - \vec{r}(3\text{s}) =$$

$$= [(12\text{s})\vec{i} + [1 - (6\text{s})^2]\vec{j}] - [(6\text{s})\vec{i} + [1 - (3\text{s})^2]\vec{j}] =$$

$$= (12 - 6)\vec{i} + (-35 + 8)\vec{j} = 6\vec{i} - 27\vec{j}\ \text{m}$$

b) Para calcular el módulo de la velocidad, calculamos primero el vector velocidad. Para ello, necesitamos conocer la variación de la posición entre el instante 5 s y un instante inmediatamente posterior:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = [2(t + \Delta t), 1 - (t + \Delta t)^2] -$$

$$- (2t, 1 - t^2) = (2\Delta t, - \Delta t^2 - 2t\,\Delta t)\ \text{m}$$

Ahora podemos calcular la velocidad y su módulo:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(2\cancel{\Delta t}, - \Delta t^{\cancel{2}} - 2t\cancel{\Delta t})}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (2, - \Delta t - 2t) = (2, - 2t)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\vec{v}(5\text{s}) = (2, -10)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-10)^2} = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Seguimos un procedimiento análogo para calcular el módulo de la aceleración. Primero buscamos la variación de la velocidad en el instante 5 s y un instante inmediatamente posterior:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t) = [2, - 2(t + \Delta t)] - (2, - 2t) =$$

$$= (0, - 2\Delta t)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Calculamos la aceleración y su módulo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(0, - 2\cancel{\Delta t})}{\cancel{\Delta t}} = -2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2} = 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

7. Datos:

$$R = 20\ \text{cm};\ v = 20t^2\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-1};\ |\vec{a}_t| = 40t\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-2};\ t = \frac{2}{3}\text{s}$$

Para calcular el módulo de la aceleración total, necesitamos conocer las aceleraciones tangencial y normal.

Calculamos la aceleración tangencial en $t = \frac{2}{3}$ s sustituyendo en la ecuación el enunciado para la aceleración tangencial:

$$\left|\vec{a}_t\left(\frac{2}{3}\text{s}\right)\right| = 40 \cdot \frac{2}{3}\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-2} = 27\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$$

Para obtener la aceleración normal, utilizamos el radio de la trayectoria:

$$\left|\vec{a}_n\left(\frac{2}{3}\text{s}\right)\right| = \frac{\left(20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{cm}\cdot\text{s}^{-1}\right)^2}{20\ \text{cm}} = 20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \text{cm}\cdot\text{s}^{-2} =$$

$$= 4\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$$

Ahora podemos calcular la aceleración total:

$$|\vec{a}| = \sqrt{27^2 + 4^2}\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-2} = 27\ \text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$$

Para calcular el ángulo que forma con el vector velocidad, hay que tener en cuenta que este tiene una dirección tangencial a la trayectoria.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{27}\right) = 81°$$

8. Datos: $\vec{v} = 20\vec{i} + (40 - 10t)\vec{j};\ t = 1$ s

a) Para calcular el vector velocidad en $t = 1$ s, sustituimos en la expresión dada:

$$\vec{v}(1\ \text{s}) = 20\vec{i} + (40 - 10 \cdot 1)\vec{j} = (20, 30)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) Para calcular la aceleración, consideramos la variación de velocidad entre el instante $t = 1$ s y un instante inmediatamente posterior.

$$\Delta v = (20, 40 - 10 \cdot 1) - (20, 40 - 10 \cdot (1 + \Delta t)) =$$

$$= (0, - 10\Delta t)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

A continuación, podemos calcular la aceleración.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(0, -10\Delta t)}{\Delta t} = (0, -10)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

c) Sabemos que $|\vec{a}_n| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$, donde φ es el ángulo entre las aceleraciones total y normal.

$$\tan\varphi = \frac{v_y(1\ \text{s})}{v_x(1\ \text{s})} = \frac{30}{20} \rightarrow \varphi = 56°$$

Finalmente, podemos calcular las dos componentes de la aceleración total:

$$a_n = a \cdot \cos(\varphi) = 10 \cdot \cos(56°) = 5{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_t = a \cdot \sin(\varphi) = 10 \cdot \sin(56°) = 8{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

d) Podemos calcular el radio de curvatura a partir de la aceleración normal.

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v^2}{a_n}$$

$$R = \frac{\left(\sqrt{20^2 + 30^2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)^2}{5{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 6{,}5\ \text{m}$$

Ejercicios y problemas (Págs. 224 a 226)

1 MOVIMIENTO Y SISTEMAS DE REFERENCIA — Pág. 224

9. Un sistema de referencia es un punto o conjunto de puntos respecto a los cuales describimos el movimiento de los cuerpos. Se dice que el movimiento es relativo, ya que depende del sistema de referencia que estemos utilizando para medirlo. Así, si respecto al movimiento de un tren escogemos como sistema de referencia los bancos del andén, el tren se moverá. En cambio, si cogemos como sistema de referencia los asientos del tren, este no se moverá.

Según el principio de relatividad de Galileo, todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes entre sí, y es imposible distinguir mediante experimentos físicos si un sistema de referencia inercial se mueve o está en reposo. Por este motivo, no podemos afirmar que todos los objetos están en movimiento.

10. Respuesta sugerida: estando en el interior de un autobús, podríamos escoger cualquier objeto fijo del exterior (p. ej., una farola). Tomando como sistema de referencia este objeto, si vemos que este se mueve, querrá decir que el autobús está en movimiento.

11. Supongamos que el péndulo oscila en una dirección paralela a la trayectoria del coche, es decir, hacia delante y hacia atrás en lugar de lateralmente.

Desde el interior del coche, el péndulo se desplaza a la misma velocidad hacia delante y hacia atrás. En los dos casos, el péndulo parte del reposo, aumenta su velocidad hasta llegar a un máximo y, seguidamente, se desacelera para llegar al punto más alto y volver a empezar el ciclo en sentido contrario. El observador que se encuentra en el coche ve, pues, que el péndulo avanza y retrocede.

Desde el exterior del vehículo, en cambio, se observan unas velocidades mucho mayores cuando el péndulo se desplaza hacia delante. Esto se debe a que la base del péndulo se desplaza a la velocidad del coche y a que esta se suma a la velocidad que lleva el extremo oscilante.

Cuando el péndulo se desplaza hacia atrás del vehículo, se observa que avanza a velocidad inferior; pero no retrocede. Esto sucede siempre que la velocidad del coche sea superior a la del péndulo.

12. Sabemos que los sistemas de referencia inerciales están en reposo o se mueven en línea recta y a velocidad constante con respecto a cualquier otro sistema de referencia inercial. Conociendo esto:

a) Es un sistema de referencia no inercial, ya que la trayectoria es curvilínea.

b) Es un sistema de referencia inercial, ya que se mueve a velocidad constante.

c) Es un sistema de referencia inercial, ya que se encuentra en reposo.

d) Es un sistema de referencia inercial, suponiendo que se mueven a velocidad constante.

e) Es un sistema de referencia no inercial, ya que la atracción se moverá a diferentes velocidades en sus distintos tramos.

f) Es un sistema de referencia no inercial, ya que el transbordador se moverá a diferentes velocidades a lo largo del lanzamiento.

g) Es un sistema de referencia no inercial, puesto que la trayectoria es curvilínea.

13. El saco caerá junto a la base del mástil, pues su velocidad inicial es la misma que la del barco.

14. Para determinar si un objeto se mueve o no, necesitamos fijar un punto de referencia. Es decir, tenemos que preguntarnos respecto a qué se mueve o no el objeto. Siempre se podrá elegir un observador para el cual un objeto tenga un movimiento relativo. Evidentemente, el único objeto que no puede estar en movimiento respecto a un punto es aquel que se halla justo en ese punto en todo momento.

15. a) La pelota se irá alejando en la profundidad con un movimiento totalmente vertical.

b) La pelota se irá acercando con un movimiento totalmente vertical.

c) La pelota se irá acercando progresivamente tanto horizontal como verticalmente.

d) La pelota se irá alejando en el sentido horizontal, pero seguirá acercándose en el eje vertical.

2 TRAYECTORIA, POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

Pág. 224

16. Datos: $\vec{r} = (2t + 2)\vec{i} + (4t^4 - 3t^2)\vec{j}$

a) Para encontrar la posición en los instantes 0 s y 2 s, sustituimos el tiempo en la expresión del vector de posición:

$$\vec{r}(0\text{ s}) = (0 + 2)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} = 2\vec{i}\text{ m}$$

$$\vec{r}(2\text{ s}) = (4 + 2)\vec{i} + (64 - 12)\vec{j} = (6\vec{i} + 52\vec{j})\text{ m}$$

b) El vector desplazamiento es la diferencia entre los vectores de posición final e inicial:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(2\text{ s}) - \vec{r}(0\text{ s}) = (6\vec{i} + 52\vec{j}) - 2\vec{i} = (4\vec{i} + 52\vec{j})\text{ m}$$

17. Datos: $x_1 = (5,0)$; $x_2 = (2,2)$

La diferencia entre el vector de posición inicial y final será:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = (2,2) - (5,0) = (-3,2)$$

— Esta diferencia es el desplazamiento que ha efectuado la hormiga. El desplazamiento coincide con el espacio recorrido siempre que la trayectoria tenga la dirección de la recta que une los puntos inicial y final y no se produzcan cambios de sentido.

18. Datos: movimiento rectilíneo; $x = -6 + 2t$ en el Sistema Internacional de Unidades (SI).

a) Inicialmente, es decir, en $t = 0$ s, el niño se encuentra en la posición:

$$x(0\text{ s}) = -6 + 0 = -6\text{ m} \rightarrow (-6,0)\text{ m}$$

b) Se mueve en la dirección del eje X y con sentido positivo, ya que el factor que multiplica a t en la ecuación es positivo y, por lo tanto, a medida que pasa el tiempo, el valor de x crece.

c) Para conocer la posición a los 5 s, sustituimos el tiempo en la ecuación del movimiento.

$$x(5\text{ s}) = -6 + 2 \cdot 5 = 4\text{ m} \rightarrow (4,0)\text{ m}$$

d) La distancia recorrida será la diferencia entre la posición inicial y la final, ya que el movimiento es rectilíneo:

$$\Delta\vec{r} = (4,0) - (-6,0) = (4+6,0) = (10,0)\ \text{m} \rightarrow$$

$$\rightarrow |\Delta\vec{r}| = 10\ \text{m}$$

19. Datos: $x = 4t + 2$; $y = 3t$ en unidades del SI

a) Sustituimos los tiempos en las ecuaciones para conocer el vector de posición en cada instante. Para $t = 0$ s:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \cdot 0 + 2 = 0 \\ y = 3 \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{r}_1(0\ \text{s}) = (2,0)\ \text{m}$$

Y para $t = 5$ s:

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \cdot 5 + 2 = 22 \\ y = 3 \cdot 5 = 15 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{r}_2(5\ \text{s}) = (22,15)\ \text{m}$$

b) La distancia al origen es el módulo del vector de posición:

$$|\vec{r}(5\ \text{s})| = \sqrt{22^2 + 15^2} = 26{,}6\ \text{m}$$

c) Para conocer el vector desplazamiento, restamos las posiciones en el instante final e inicial:

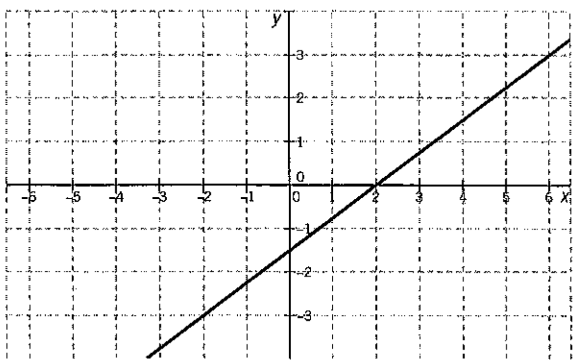
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(5\ \text{s}) - \vec{r}(0\ \text{s}) = (22,15) - (2,0) = (20,15)\ \text{m}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\ \text{m}$$

d) Para conocer la ecuación de la trayectoria, aislamos el tiempo de una de las dos ecuaciones paramétricas y sustituimos en la otra. Por ejemplo, aislamos t de la ecuación de x, y sustituimos el valor en la ecuación de y:

$$x = 4t + 2 \rightarrow t = \frac{x-2}{4}$$

$$y(x) = 3 \cdot \frac{x-2}{4}$$



20. Datos: $\vec{r} = 2t\vec{i} + (3t^2 + 2)\vec{j}$

a) En el instante inicial el tiempo es igual a 0. Por tanto, sustituimos este tiempo en la ecuación del movimiento:

$$\vec{r}(0\ \text{s}) = 2 \cdot 0\vec{i} + (3 \cdot 0^2 + 2)\vec{j} = 2\vec{j}\ \text{m}$$

b) Como en el apartado anterior, sustituimos el tiempo en la ecuación del movimiento de la pelota:

$$\vec{r}(3\ \text{s}) = 2 \cdot 3 + (3 \cdot 3^2 + 2)\vec{j} = (6\vec{i} + 29\vec{j})\ \text{m}$$

c) La ecuación de la trayectoria es la ecuación de y en función de x.

Primero separamos la ecuación del movimiento en las dos componentes, x e y.

$$x(t) = 2t;\ y(t) = 3t^2 + 2$$

La ecuación que queremos obtener no debe estar en función del tiempo. Por tanto, aislamos t de una de las dos expresiones y sustituimos en la otra.

$$x(t) = 2t \rightarrow t = \frac{x}{2}$$

$$y(t) = 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 = \frac{3x^2}{4} + 2$$

La trayectoria de la pelota es parabólica.

d) Calculamos el vector desplazamiento entre los instantes de tiempo 0 s y 3 s, y su módulo:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(3\text{s}) - \vec{r}(0\text{s}) = (2 \cdot 3\vec{i} + (3 \cdot 3^2 + 2)\vec{j}) -$$

$$-(2 \cdot 0\vec{i} + (3 \cdot 0^2 + 2)\vec{j}) = (6\vec{i} + 27\vec{j})\text{m}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{6^2 + 27^2} = 28\ \text{m}$$

La distancia recorrida por el objeto será mayor que estos 28 m. En la figura se puede observar su trayectoria curvilínea y el vector desplazamiento rectilíneo.

21. Datos: 300 m oeste, 400 m norte

Si el excursionista vuelve al punto de partida, el origen coincide con el punto final y, por lo tanto, el desplazamiento es nulo (0 m).

Fijamos el origen de coordenadas en el punto A. Escogemos los ejes de tal manera que el sentido positivo de X es hacia el este y el de Y hacia el norte.

Expresamos cada movimiento en forma de vector:

$$\Delta\vec{r_1} = (-300,0)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r_2} = (0,400)\ \text{m}$$

$$\Delta\vec{r_2} = ?$$

Conocemos los dos primeros movimientos y sabemos que el desplazamiento total tiene que ser cero. Por lo tanto:

$$\Delta\vec{r_1} + \Delta\vec{r_2} + \Delta\vec{r_3} = 0$$

$$\Delta\vec{r_3} = -(\Delta\vec{r_1} + \Delta\vec{r_2}) = -((-300,0) + (0,400)) = (300,-400)\ \text{m}$$

La distancia total será la suma de la distancia recorrida en cada tramo.

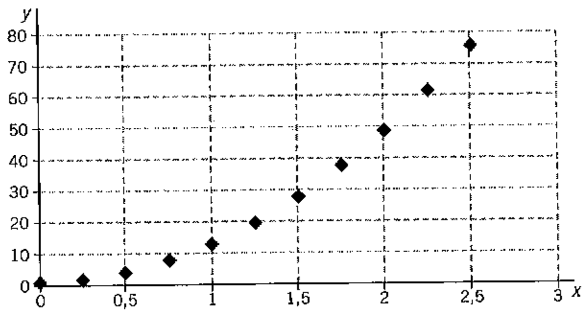
$$|\Delta\vec{r}| = |\Delta\vec{r_1}| + |\Delta\vec{r_2}| + |\Delta\vec{r_3}| = 300 + 400 + \sqrt{300^2 + (-400)^2} =$$

$$= 300 + 400 + 500 = 1200\ \text{m}$$

22. Datos: 3 m × 3 m; $\vec{r}(t) = 0{,}05t\vec{i} + (1 + 0{,}03t^2)\vec{j}$ en unidades del SI. Sistema de referencia en la esquina.

Para representar la trayectoria, vamos tomando distintos valores de t y calculamos la posición para cada instante. De esta forma, elaboraremos una tabla con los puntos que tenemos que representar en la gráfica.

t	x	y
0	0	1
5	0,25	1,75
10	0,5	4
15	0,75	7,75
20	1	13
25	1,25	19,75
30	1,5	28
35	1,75	37,75
40	2	49
45	2,25	61,75
50	2,5	76



En la figura se puede observar que se trata de un movimiento curvilíneo. Puede llegarse a la misma conclusión hallando la ecuación de su trayectoria.

3 VELOCIDAD

Págs. 224 y 225

23. Datos: 100 km; 60 min; v = cte.

Planteamos la velocidad ($km \cdot min^{-1}$) y aplicamos el cambio de unidades:

$$\vec{v} = \frac{100\ \cancel{km}}{60\ \cancel{min}} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} \cdot \frac{1\ \cancel{min}}{60\ s} = 27{,}8\ m \cdot s^{-1}$$

24. Datos: $v_m = 90\ km \cdot h^{-1}$

Como en el ejercicio anterior, aplicamos el cambio de variables.

$$v_m = 90\ \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3600\ s} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} = 25\ m \cdot s^{-1}$$

25. Datos:

Arriba-en medio→ 2 h a 50 $km \cdot h^{-1}$

En medio-abajo → 1 h a 80 $km \cdot h^{-1}$

Para conocer la velocidad media, calculamos el recorrido y la variación de tiempo total.

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_1 &= 50\ km \cdot \cancel{h^{-1}} \cdot 2\cancel{h} = 100\ km \\ \Delta r_2 &= 80\ km \cdot \cancel{h^{-1}} \cdot 1\cancel{h} = 80\ km \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta r_t = 180\ km$$

$\Delta t = 2\ h + 1\ h = 3\ h$

Con estos datos, podemos calcular la velocidad media como:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{180\ km}{3\ h} = 60\ km \cdot h^{-1}$$

26. La diferencia entre la velocidad media y la instantánea es el intervalo de tiempo que analizan. La primera es la velocidad que deberían llevar los atletas para realizar la carrera en un determinado tiempo si se movieran a velocidad constante. Sin embargo, normalmente la velocidad varía según el momento de la carrera. De esta forma, los dos atletas pueden coincidir en velocidad instantánea en un tiempo determinado y, sin embargo, haber corrido a una velocidad media distinta.

27. Datos:

t (s)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
s (m)	0,0	3,0	12,0	27,0	45,0	75,0

En cada caso, calcularemos el intervalo de tiempo y la distancia recorrida en este intervalo. A partir de estos resultados, calculamos la velocidad media.

a) $$\left.\begin{aligned} \Delta r &= 27{,}0\ m - 3{,}0\ m = 24\ m \\ \Delta t &= 3\ s - 1\ s = 2\ s \end{aligned}\right\} \rightarrow v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{24\ m}{2\ s} =$$

$$= 12\ m \cdot s^{-1}$$

b) $$\left.\begin{aligned} \Delta r &= 75{,}0\ m - 12{,}0\ m = 63\ m \\ \Delta t &= 5\ s - 2\ s = 3\ s \end{aligned}\right\} \rightarrow v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{63\ m}{3\ s} =$$

$$= 21\ m \cdot s^{-1}$$

28. Datos: gráfico

a) Entre $t = 2$ s y $t = 5$ s

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{(3 - 0{,}5)\,m}{3\ s} = 0{,}8\ m \cdot s^{-1}$$

En este caso, la velocidad media y la rapidez media tienen el mismo valor, ya que el recorrido sigue una trayectoria recta, sin cambios de sentido ni de dirección.

b) Entre el instante inicial y el final:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{(0 - 0)\,m}{6\ s} = 0\ m \cdot s^{-1}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta r_1 + \Delta r_2 + \Delta r_3}{\Delta t} = \frac{3\ m + 0\ m + 3\ m}{6\ s} = \frac{6\ m}{6\ s} =$$

$$= 1\ m \cdot s^{-1}$$

En este caso, los dos resultados son distintos, ya que se producen cambios de sentido en la trayectoria.

29. Datos:

$\Delta r_1 = \Delta r_3 = 200\ m$; $\Delta r_3 = 0\ m$; $v_1 = 1{,}4\ m \cdot s^{-1}$;

$v_2 = 0\ m \cdot s^{-1}$; $t_2 = 2$ min; $v_3 = 1{,}8\ m \cdot s^{-1}$

Para calcular la velocidad media, necesitamos conocer el tiempo que ha transcurrido en total y la distancia recorrida.

Calculamos el tiempo que tarda en efectuar el primer tramo hasta la panadería:

$$t_1 = \frac{\Delta r_1}{v_1} = \frac{200\ \cancel{m}}{1{,}4\ \cancel{m}\cdot s^{-1}} = 143\ s$$

Sabemos que después permanece 2 min más en la panadería y finalmente regresa. Calculamos el tiempo que tarda en hacer el camino de vuelta:

$$t_3 = \frac{\Delta r_3}{v_3} = \frac{200\ \cancel{m}}{1{,}8\ \cancel{m}\cdot s^{-1}} = 111\ s$$

El tiempo total es:

$$\Delta t = t_1 + t_2 + t_3 = 143\ s + 2\ \cancel{min}\cdot\frac{60\ s}{1\ \cancel{min}} + 111\ s = 374\ s$$

La velocidad media es:

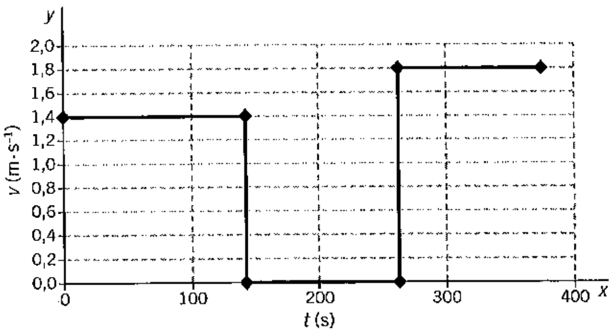
$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{(200+200)\,m}{374\ s} = 1{,}1\ m\cdot s^{1}$$

El desplazamiento es cero, ya que el punto inicial y el final son el mismo.

$$\Delta x = 200\ m + 0\ m - 200\ m = 0\ m$$

La longitud del recorrido es:

$$\Delta s = 200\ m + 0\ m + 200\ m = 400\ m$$



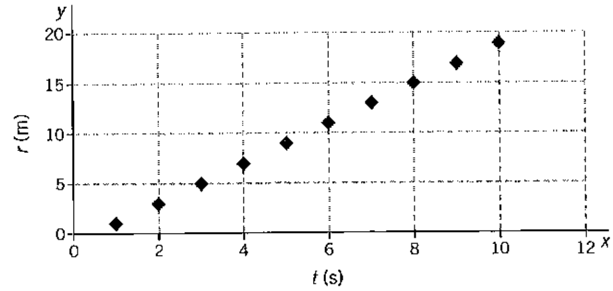
30. El cálculo de la velocidad media se efectuará utilizando la expresión $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. En el caso de las velocidades medias de cada tramo, la variación de la posición será 10 m y la variación de tiempo será el tiempo registrado en cada control. Para calcular la velocidad media total, dividiremos 50 m entre el tiempo total, es decir, el registrado en el paso por el último control.

En la representación gráfica se podrá observar que los tramos con más pendiente son aquellos para los que hemos calculado velocidades medias mayores.

31. Se deberán reconocer las variaciones de velocidad en la gráfica. El alumno debe identificar las zonas horizontales de la gráfica como momentos en que el coche lleva una velocidad constante.

La velocidad media de un intervalo en que esta no sea constante aparece representada en la gráfica en un punto que puede coincidir o no con una velocidad que haya llevado en algún momento. Si la velocidad es constante en el intervalo, la velocidad media coincidirá con la instantánea.

32. Datos: $\vec{r} = (2t-1)\vec{i}$ en unidades del SI



Para calcular la velocidad media, necesitamos conocer la variación de la posición del coche entre el instante t y un cierto instante posterior $t + \Delta t$.

$$\Delta\vec{r} = [2(t+\Delta t) - 1 - (2t-1)]\vec{i} = 2\Delta t\vec{i}$$

Ahora podemos calcular la velocidad media como cociente entre la variación de la posición hallada y el incremento de tiempo.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{2\cancel{\Delta t}\vec{i}}{\cancel{\Delta t}} = 2\vec{i}\ m\cdot s^{-1}$$

Para calcular la velocidad instantánea, hay que hallar el límite de la expresión anterior para un incremento de tiempo que tiende a cero.

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} 2\vec{i} = 2\vec{i}\ m\cdot s^{-1}$$

Hemos aprovechado el resultado de la velocidad media. Como este no depende de la variación de tiempo, el resultado es el mismo.

33. Datos: $\vec{r}(t) = 6t^2\vec{i}$

a) Podemos calcular el vector velocidad media como cociente entre la variación de posición y el incremento de tiempo:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(6\cdot 4^2\ s - 6\cdot 1^2\ s)\vec{i}}{4\ s - 1\ s} = \frac{90}{3}\vec{i}\ m\cdot s^{-1} =$$

$$= 30\vec{i}\ m\cdot s^{-1}$$

b) Utilizamos límites para calcular la velocidad instantánea, ya que tenemos que estudiar la variación de posición entre dos instantes infinitesimalmente cercanos:

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}(1\ s)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(6(1+\Delta t)^2 - 6\cdot 1^2)\vec{i}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(6\Delta t^{\cancel{2}} + 12\cancel{\Delta t})\vec{i}}{\cancel{\Delta t}} = \lim_{\Delta t\to 0}(6\Delta t + 12)\vec{i} = 12\vec{i}\ m\cdot s^{-1}$$

34. Datos: $x = 2t - 2$; $y = t$ unidades del SI

a) Las dos ecuaciones paramétricas son las componentes del vector de posición:

$$\vec{r}(t) = (2t-2)\vec{i} + t\vec{j}$$

b) Para encontrar la velocidad media entre los dos instantes, calculamos la variación de posición y tiempo:

$$\Delta\vec{r} = [(2 \cdot 3 - 2)\vec{i} + 3\vec{j}] - [(2 \cdot 1 - 2)\vec{i} + 1\vec{j}] = (4\vec{i} + 2\vec{j})\ \text{m}$$

$$\Delta t = 3\ \text{s} - 1\ \text{s} = 2\ \text{s}$$

Finalmente, calculamos la velocidad media:

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(4\vec{i} + 2\vec{j})\ \text{m}}{2\ \text{s}} = (2\vec{i} + \vec{j})\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Calculamos la variación en la posición desde el instante inicial (5 s) hasta un instante inmediatamente posterior:

$$\Delta\vec{r} = [(2 \cdot (2 + \Delta t) - 2)\vec{i} + (2 + \Delta t)\vec{j}] - [(2 \cdot 2 - 2)\vec{i} + 2\vec{j}] =$$

$$= (2\Delta t\vec{i} + \Delta t\vec{j})\ \text{m}$$

Para calcular la velocidad instantánea, hacemos el siguiente límite para un intervalo de tiempo tendiendo a cero:

$$\vec{v}_i(5\ \text{s}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(2\ \text{s})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(2\cancel{\Delta t}\vec{i} + \cancel{\Delta t}\vec{j})\text{m}}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= (2\vec{i} + \vec{j})\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

35. Datos: $t_1 = 0$ s; $t_2 = 4$ s; véase el gráfico

Para calcular la velocidad media, observamos cuál ha sido el desplazamiento del atleta. En el instante 4, su posición es de 10 m, y se encuentra en el origen inicial. Por lo tanto:

$$\Delta r = 10\ \text{m} - 0\ \text{m} = 10\ \text{m}$$

Teniendo en cuenta que han pasado 4 s, la velocidad media es:

$$v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{10\ \text{m}}{4\ \text{s}} = 2{,}5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

En este caso, la velocidad media no coincidiría con la rapidez media, ya que el espacio recorrido es mayor que el desplazamiento total. Si calculamos la velocidad media entre los instantes inicial y 5 s, el resultado sería nulo, ya que el desplazamiento total es cero (los puntos inicial y final coinciden).

36. Datos: $x(t) = 3t^2 - 1$; $y(t) = t^2$

a) Para conocer la ecuación de la trayectoria, aislamos el tiempo de la ecuación de x y lo sustituimos en la otra ecuación.

$$x(t) = 3t^2 - 1 \rightarrow t = \sqrt{\frac{x+1}{3}}$$

$$y(x) = \frac{x+1}{3}$$

b) Calculamos la velocidad media entre los instantes 3 s y 1 s. Para ello, necesitamos la variación de posición entre estos dos momentos. El vector de posición será:

$$\vec{r}(t) = (3t^2 - 1)\vec{i} + t^2\vec{j}$$

Y la variación de posición:

$$\Delta\vec{r} = [(3 \cdot 3^2 - 1)\vec{i} + 3^2\vec{j}] - [(3 \cdot 1^2 - 1)\vec{i} + 1^2\vec{j}] =$$

$$= (26 - 2)\vec{i} + 8\vec{j} = (24\vec{i} + 8\vec{j})\ \text{m}$$

La velocidad media será:

$$\vec{v_m} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(24\vec{i} + 8\vec{j})\ \text{m}}{3\ \text{s} - 1\ \text{s}} = \frac{(24\vec{i} + 8\vec{j})\ \text{m}}{2\ \text{s}} =$$

$$= (12\vec{i} + 4\vec{j})\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c) Para conocer la velocidad instantánea, es necesario hallar la variación de posición entre dos instantes t y $t + \Delta t$.

$$\Delta\vec{r} = [(3 \cdot (t + \Delta t)^2 - 1)\vec{i} + (t + \Delta t)^2\vec{j}] - [(3t^2 - 1)\vec{i} + t^2\vec{j}] =$$

$$= [(3\Delta t^2 + 6t\Delta t)\vec{i} + (\Delta t^2 + 2t\Delta t)\vec{j}]\ \text{m}$$

Hallamos el límite del cociente de las variaciones de posición y tiempo para una variación de tiempo tendiendo a cero. Después, calculamos el módulo:

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[(3\Delta t^{\cancel{2}} + 6t\cancel{\Delta t})\vec{i} + (\Delta t^{\cancel{2}} + 2t\cancel{\Delta t})\vec{j}]\ \text{m}}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} [(3\Delta t + 6t)\vec{i} + (\Delta t + 2t)\vec{j}]\ \text{m} \cdot \text{s}^1 = (6t\vec{i} + 2t\vec{j})\ \text{m} \cdot \text{s}^1$$

$$v_i = \sqrt{(6t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{t^2(36 + 4)} = t\sqrt{40}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4 ACELERACIÓN

Págs. 225 y 226

37. Datos: $v_1 = 16\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_1 = 28\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $t = 3$ s

La aceleración media es la variación de velocidad en un cierto intervalo de tiempo dividida entre este mismo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{28\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} - 16\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{3\ \text{s}} = \frac{12\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{3\ \text{s}} = 4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

38. Datos: $v_x = t^2$; $v_y = t^2 - 4t$; $t = 1{,}0$ s

El vector velocidad será:

$$\vec{v}(t) = (t^2, t^2 - 4t)\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La variación de velocidad entre dos instantes de tiempo:

$$\Delta\vec{v}(t) = [(t + \Delta t)^2, (t + \Delta t)^2 - 4(t + \Delta t)] - (t^2, t^2 - 4t) =$$

$$= (\Delta t^2 + 2t\Delta t, \Delta t^2 + 2t\Delta t - 4\Delta t)\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

A partir de la variación de velocidad, podemos calcular la aceleración de la siguiente manera:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left(\Delta t^{\cancel{2}} + 2t\cancel{\Delta t}, \Delta t^{\cancel{2}} + 2t\cancel{\Delta t} - 4\cancel{\Delta t}\right)\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta t + 2t, \Delta t + 2t - 4)\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = (2t, 2t - 4)\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Calculamos el módulo en $t = 1{,}0$ s:

$$a(1\ \text{s}) = \sqrt{(2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 1 - 4)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

39. La aceleración instantánea es la suma de una componente tangencial y una normal. En un movimiento rectilíneo la aceleración normal es nula (pues no varían ni la dirección ni el sentido de la velocidad) y, por lo tanto, la única componente de la aceleración instantánea será la tangencial.

40. Efectivamente, la dirección de la canica puede variar. La aceleración puede cambiar el módulo de la velocidad (hacer que vaya más rápido o más lento) y también su dirección y sentido. La componente normal (perpendicular a la trayectoria) es la responsable de las variaciones en la dirección de la trayectoria.

41. Datos: véase el gráfico

a) $t = 0$ s y $t = 2$ s.

La aceleración media es el cociente entre las variaciones de velocidad y de tiempo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(20-0)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{2\ \mathrm{s} - 0\ \mathrm{s}} = \frac{20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{2\ \mathrm{s}} = 10\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

b) $t = 4$ s y $t = 8$ s.

Procedemos de manera análoga al apartado anterior:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(40-30)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{8\ \mathrm{s} - 4\ \mathrm{s}} = \frac{10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{4\ \mathrm{s}} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

42. Es posible que un móvil tenga una cierta aceleración y que, sin embargo, su velocidad sea nula.

Por ejemplo, cuando lanzamos una pelota al aire, esta lleva una velocidad cuyo módulo va decreciendo por la acción de la gravedad. Llega un punto en que la pelota llega a lo más alto de su trayectoria. En este instante su velocidad es nula, pero un instante más tarde vuelve a tener velocidad en sentido contrario. Durante todo el proceso, el movimiento de la pelota está acelerado por la acción de la gravedad.

43. Datos: $\vec{r} = (4-t)\vec{i} + (t^2 + 2t)\vec{j}$; $t = 1$ s

Para conocer la aceleración, debemos saber antes la velocidad de la pelota de tenis. Para ello, calculamos primero la variación del vector de posición y después la velocidad:

$$\Delta\vec{r} = [(4-(t+\Delta t))\vec{i} + ((t+\Delta t)^2 + 2(t+\Delta t))\vec{j}] -$$

$$-[(4-t)\vec{i} + (t^2+2t)\vec{j}] = [\Delta t\vec{i} + (2t\Delta t + \Delta t^2 + 2\Delta t)\vec{j}]\mathrm{m}$$

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\cancel{\Delta t}\vec{i} + (2t\cancel{\Delta t} + \Delta t^{\cancel{2}} + 2\cancel{\Delta t})\vec{j}]\mathrm{m}}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} [\vec{i} + (2t + \Delta t + 2)\vec{j}]\mathrm{m \cdot s^{-1}} = [\vec{i} + (2t+2)\vec{j}]\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Seguidamente, calculamos la variación del vector velocidad entre dos instantes de tiempo:

$$\Delta\vec{v} = [\vec{i} + (2(t+\Delta t)+2)\vec{j}] - [\vec{i} + (2t+2)\vec{j}] = 2\Delta t\vec{j}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Finalmente, hallamos la aceleración:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\cancel{\Delta t}\vec{j}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}{\cancel{\Delta t}} = 2\vec{j}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Vemos que no depende del tiempo. Por tanto, para cualquier instante (también para 1,0 s), la aceleración es de 2 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ en la dirección del eje *Y*.

44. La aceleración no es constante. En el ejercicio anterior se ha visto que la velocidad depende del tiempo en un grado menos que el vector de posición. De la misma forma, la aceleración depende del tiempo en un grado menos que la velocidad. Así, en este caso, el vector de posición es de grado 3; por tanto, la velocidad será de grado 2 y, finalmente, la aceleración dependerá del tiempo de forma lineal (ecuación de primer grado).

45. Datos: $\vec{r} = 5t\vec{i} + 10t\vec{j}$

El vector de posición depende del tiempo de forma lineal (ecuaciones de grado 1). Sabemos que la velocidad dependerá del tiempo en un grado menos, en este caso, en grado cero. Es decir, la velocidad será independiente del tiempo; en otras palabras, será constante. La aceleración será nula. Por tanto, el movimiento será rectilíneo, ya que no se puede modificar su dirección si no es mediante una aceleración.

46. Datos: $R = 2$ m; $v = 12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Si la velocidad es constante, la aceleración tangencial será nula. Por tanto, solo tenemos que preocuparnos por la aceleración normal.

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{12^2}{2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 72\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

47. Datos: $R = 30$ m; $v = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Como en el ejercicio anterior, la velocidad del ciclista es constante. Por lo tanto, su aceleración tangencial es cero.

$$a = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{15^2}{30}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 7{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

48. Datos:

$R = 300$ m; $a \neq 0$ hasta $t = 23$ s; $v = 36\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

a) $t = 23$ s.

Para calcular la aceleración tangencial, utilizamos la variación de velocidad que ha sufrido el tren. Sabemos que en el instante inicial estaba en reposo y, por lo tanto, el incremento de velocidad será igual a la velocidad que lleva en el instante 23 s.

$$a_t = \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \frac{36\ \cancel{\mathrm{km}} \cdot \cancel{\mathrm{h^{-1}}}}{23\ \mathrm{s}} \cdot \frac{1\ \cancel{\mathrm{h}}}{3600\ \mathrm{s}} \cdot \frac{1000\ \mathrm{m}}{1\ \cancel{\mathrm{km}}} =$$

$$= 0{,}43\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Calculamos la aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{36\ \cancel{\mathrm{km}} \cdot \cancel{\mathrm{h^{-1}}}}{300\ \mathrm{m}} \cdot \frac{1\ \cancel{\mathrm{h}}}{3600\ \mathrm{s}} \cdot \frac{1000\ \mathrm{m}}{1\ \cancel{\mathrm{km}}} =$$

$$= 0{,}33\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

b) $t = 30$ s.

En este instante, la velocidad es constante. Por lo tanto, la aceleración tangencial es nula.

$$a_t = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

La aceleración normal tiene el mismo valor que en el apartado anterior. Esto se debe a que ninguna de las variables de las que depende (velocidad y radio) se ha modificado.

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{36\ \cancel{km} \cdot \cancel{h^{-1}}}{300\ m} \cdot \frac{1\ \cancel{h}}{3600\ s} \cdot \frac{1000\ m}{1\ \cancel{km}} =$$

$= 0{,}33\ m \cdot s^{-2}$

49. Datos: $R = 30$ m; $s = 10t^3 + 5$; $t = 2$ s

Primero hallamos la velocidad de la partícula:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[10 \cdot (2 + \Delta t)^3 + 5] - (10 \cdot 2^3 + 5)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} 10\Delta t^2 + 30 \cdot 2^2 + 30 \cdot 2\Delta t = 120\ m \cdot s^{-1}$$

Finalmente, calculamos la aceleración normal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(120\ m \cdot s^{-1})^2}{30\ m} = 480\ m \cdot s^{-2}$$

50. Datos: $\vec{r} = 5t\vec{i} + 50t^2\vec{j}$

La velocidad será:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[5(t + \Delta t)\vec{i} + 50(t + \Delta t)^2\vec{j}] - (5t\vec{i} + 50t^2\vec{j})}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \vec{i} + (50\Delta t + 100t)\vec{j} = (\vec{i} + 100t\vec{j})\ m \cdot s^{-1}$$

Y la aceleración:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[\vec{i} + 100(t + \Delta t)\vec{j}] - (\vec{i} + 100t\vec{j})}{\Delta t} =$$

$= 100\vec{j}\ m \cdot s^{-2}$

Por lo tanto, la velocidad varía según una aceleración de módulo constante; es decir, se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

SÍNTESIS

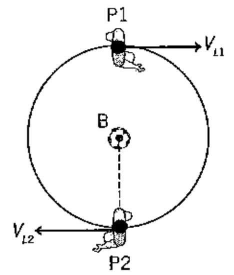
Pág. 226

51. a) En este caso, el movimiento observado será el mismo visto desde un sistema fijo en la plataforma que visto desde un observador ajeno a esta. Al no estar la plataforma en movimiento, en ambos casos se describirá un movimiento rectilíneo.

b) Al girar en sentido horario, la pelota describirá un movimiento rectilíneo al verla desde un observador externo. Sin embargo, al verla desde un sistema fijo en la plataforma, se describirá un movimiento parabólico hacia la derecha.

c) Al girar en sentido antihorario, la pelota describirá un movimiento rectilíneo al verla desde un observador externo. Sin embargo, al verla desde un sistema fijo en la plataforma, se describirá un movimiento parabólico hacia la izquierda.

Utilizaremos la siguiente figura para entender el efecto Coriolis a partir de los vectores de velocidad lineal. Como podemos ver, aunque la pelota sea lanzada en línea recta, el movimiento de la plataforma impedirá que esta llegue a su destino.



P1: persona 1
P2: persona 2
B: balón

52. Datos:

$x = a + bt + ct^2$;

$a = 2{,}25$ m; $b = 4{,}0\ m \cdot s^{-1}$; $c = -1{,}0\ m \cdot s^{-2}$

a) Debemos encontrar el instante en el que está parado, es decir, un tiempo que haga que el vector velocidad sea nulo. En primer lugar, hallamos el vector velocidad:

$$\Delta x = a + b(t + \Delta t) + c(t + \Delta t)^2 - (a + bt + ct^2) =$$

$$= b\Delta t + c\Delta t^2 + 2ct\Delta t$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{b\cancel{\Delta t} + c\Delta t^{\cancel{2}} + 2ct\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} b + c\Delta t + 2ct = (b + 2ct)\ m \cdot s^{-1}$$

Igualamos la velocidad a cero, despejamos el tiempo y sustituimos las constantes por su valor:

$$b + 2ct = 0 \rightarrow t = \frac{-b}{2c} = \frac{-4\ m \cdot s^{-1}}{2 \cdot (-1)\ m \cdot s^{-2}} = 2\ s$$

b) Cuando pasa por el origen x, es nula. Igualamos la ecuación y despejamos t.

$$x = a + bt + ct^2 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ca}}{2c} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2{,}25 \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} =$$

$= 4{,}5$ s

Hemos elegido la solución positiva, ya que la negativa no tiene sentido físico en el contexto.

c) El alejamiento máximo se dará cuando la velocidad sea nula, es decir, en el instante 2 s.

$$x(2\ s) = 2{,}25 + 4{,}0 \cdot 2 + (-1{,}0) \cdot 2^2 = 6{,}3\ m$$

53. En el contexto de los accidentes de tráfico, la distancia de reacción es el espacio que recorre el coche desde que el conductor percibe un estímulo (p. ej., que el coche de delante frena) hasta que iniciamos un movimiento de respuesta, es decir, pisamos el pedal de freno.

La distancia de frenado es la distancia que recorre el coche a partir del momento en que se pisa el pedal de freno hasta que se detiene.

Finalmente, la distancia de parada es la distancia que recorre el vehículo desde que el conductor percibe el estímulo que le hace frenar, hasta el momento en que el coche se detiene.

a) El alumno debe detectar las coincidencias y diferencias entre sus conocimientos previos y los hallados en Internet.

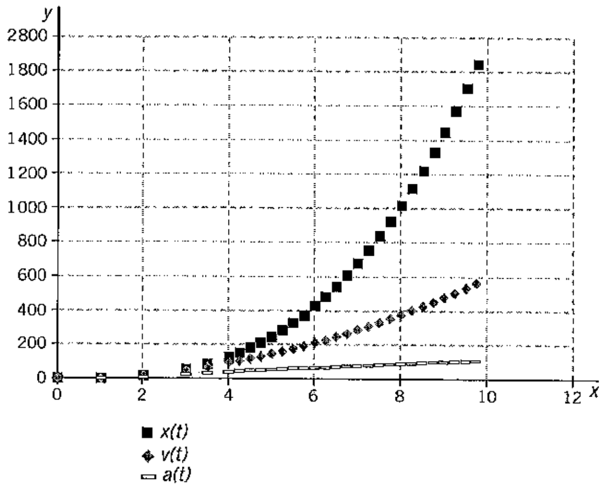
b) Estas distancias son importantes a la hora de tomar medidas para evitar accidentes de tráfico. La distancia entre coches a la que se debe conducir tiene que ser mayor que la de parada. De esta forma, en caso de frenado repentino, el coche se detendrá antes de chocar con el de delante.

La distancia de parada es la suma de la de reacción y la de frenado.

c) Se puede proponer una puesta en común en pequeños grupos de 4 o 5 alumnos en que cada uno exprese sus dudas y preguntas en relación con el asunto.

— Se trata de velocidades instantáneas. Se imponen para minimizar el riesgo de accidente de tráfico. Cuanto mayor es la velocidad, mayor es la distancia de parada, ya que, aunque el tiempo de reacción es el mismo, no lo es el de frenada.

54. Datos: $x(t) = 2t^3 - t + 4$



La trayectoria de la partícula sigue la forma de una ecuación hiperbólica. La velocidad es la de una parabólica, y la aceleración depende linealmente del tiempo.

55. Datos: $\vec{r} = 2t^2\vec{i} - (t-4)\vec{j}$

a) La velocidad media entre 2 s y 4 s será:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{[2\cdot 4^2, -(4-4)] - [2\cdot 2^2, -(4-2)]}{(4-2)}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} =$$

$$= \frac{(24,-2)}{2\text{ s}}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = (12,-1)\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) La velocidad instantánea se calcula mediante un límite para un intervalo de tiempo que tiende a cero. Primero calculamos la variación del vector de posición.

$$\Delta\vec{r} = [2(t+\Delta t)^2\vec{i} - ((t+\Delta t)-4)\vec{j}] - [2t^2\vec{i} - (t-4)\vec{j}] =$$

$$= (4t\Delta t + 2\Delta t^2)\vec{i} - \Delta t\vec{j}$$

Finalmente, calculamos la velocidad instantánea.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(4t\cancel{\Delta t} + 2\Delta t^{\cancel{2}})\vec{i} - \cancel{\Delta t}\vec{j}}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}(4t + 2\Delta t)\vec{i} - \vec{j} = (4t\vec{i} - \vec{j})\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c) Calculamos la aceleración de forma parecida al procedimiento que hemos seguido para averiguar la velocidad. Primero, hallamos la variación de velocidad:

$$\Delta\vec{v} = [4\cdot(t+\Delta t)\vec{i} - \vec{j}] - (4t\vec{i} - \vec{j}) = 4\Delta t\vec{i}$$

Finalmente, calculamos la aceleración, que es constante:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{4\Delta t\vec{i}}{\Delta t} = 4\vec{i}\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

d) Dado que se trata de un movimiento rectilíneo, no existe aceleración normal. Por lo tanto, la aceleración total será igual a la tangencial.

$$|\vec{a}_t| = |4\vec{i}|\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Evaluación (Pág. 228)

1. a) Falso. El movimiento de los objetos depende del punto de vista desde el que se observe y, por lo tanto, dependerá del sistema de referencia utilizado.

b) Cierto.

c) Cierto.

d) Falso. Según el principio de relatividad de Galileo, en todos los sistemas de referencia inerciales se cumplen las leyes de la mecánica y, por lo tanto, el movimiento de un móvil será distinto si lo describimos desde dos sistemas de referencia inerciales distintos.

2. a) El nadador verá la piedra a su lado en reposo, puesto que está descendiendo a la misma velocidad y con la misma aceleración que ella. Se trata de un sistema de referencia no inercial, puesto que tiene aceleración.

b) La verá describir un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en el eje vertical. Se trata de un sistema de referencia inercial, puesto que está en reposo.

c) La verá caer de manera parabólica, es decir, a medida que caiga estará más cerca de ella tanto horizontal como verticalmente. Se trata de un sistema de referencia inercial, puesto que se mueve en línea recta a velocidad constante.

3. La distancia que recorre un coche de Fórmula 1 es la trayectoria. Por tanto, la respuesta correcta es la a).

El vector desplazamiento es la distancia entre el punto inicial y el final. La posición final es el vector con origen en el punto (0, 0) y final en la posición final.

4. Datos: $\vec{r}_1 = (-300, 0)$ m; $\vec{r}_2 = (0, 400)$ m; $\vec{r}_3 = (600, 0)$ m

El desplazamiento será:

$$|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3| = |(-300,0)\text{ m} + (0,400)\text{ m} + (600,0)\text{ m}| =$$

$$= |(300,400)\text{ m}| = \sqrt{300^2 + 400^2}\text{ m} = 500\text{ m}$$

El espacio recorrido:

$$\Delta s = |\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| + |\vec{r}_3| = |(-300,0)\text{ m}| + |(0,400)\text{ m}| +$$

$$+ |(600,0)\text{ m}| = (300 + 400 + 600)\text{ m} = 1300\text{ m}$$

5. Datos: $\vec r = (t-1)\vec i - 2t\vec j$; $t = 0$ s; $t = 2$ s

Tenemos que calcular la variación del vector de posición:

$$|\Delta\vec r| = |\vec r(2\ \text{s}) - \vec r(0\ \text{s})| = \left|(2-1)\vec i - 2\cdot 2\vec j - \left[(0-1)\vec i - 2\cdot 0\vec j\right]\right| =$$

$$= |2\vec i - 4\vec j| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 4{,}5\ \text{m}$$

6. Datos:

$v_1 = 50\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; $v_2 = 100\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; $v_3 = 120\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$t_1 = 1$ h; $t_2 = 1$ h; $t_3 = 3$ h

La distancia total recorrida será la suma de las distancias recorridas en cada tramo:

$$\Delta x = v_1 t_1 + v_2 t_2 + v_3 t_3 = v_1 = 50\cdot 1 + 100\cdot 1 + 120\cdot 3 =$$

$$= 510\ \text{km}$$

La velocidad media será la distancia total recorrida dividida entre el tiempo total:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{510\ \text{km}}{(1+1+3)\ \text{h}} = 102\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

7. La aceleración es el cociente entre la variación de velocidad y la de tiempo.

A partir de la gráfica, tomamos dos puntos cualesquiera y calculamos las variaciones de velocidad y tiempo entre los dos puntos. Por ejemplo, tomamos los puntos (0, 7) y (5, 21).

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(21-7)\ \cancel{\text{km}}\cdot\cancel{\text{h}^{-1}}\cdot\dfrac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\cdot\dfrac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}}}{(5-0)\ \text{s}} =$$

$$= 0{,}78\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

8. Datos: $v = 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $t = 5$ s; $t = 25$ s

Para empezar, calculamos el espacio recorrido por el atleta más lento en el momento en que es alcanzado por el otro. El tiempo total transcurrido serán los 5 s que tarda en salir más los 25 s que tarda en alcanzarlo.

$$r(25\ \text{s}) = 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot(5+25)\ \text{s} = 180\ \text{m}$$

Así pues, sabemos que el segundo atleta tiene que recorrer esta distancia en un tiempo de 25 s. La velocidad que debe llevar será:

$$v_2 = \frac{180\ \text{m}}{25\ \text{s}} = 7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

9. Datos: $\vec r(t) = (t^2 - 5)\vec i + t\vec j$; $t = 3$ s

— Para empezar, hallamos la expresión de la variación del vector de posición para este instante de tiempo:

$$\Delta\vec r(3\ \text{s}) = ((3+\Delta t)^2 - 5)\vec i + (3+\Delta t)\vec j - \left[(3^2 - 5)\vec i + 3\vec j\right] =$$

$$= (6\Delta t + \Delta t^2)\vec i + \Delta t\vec j$$

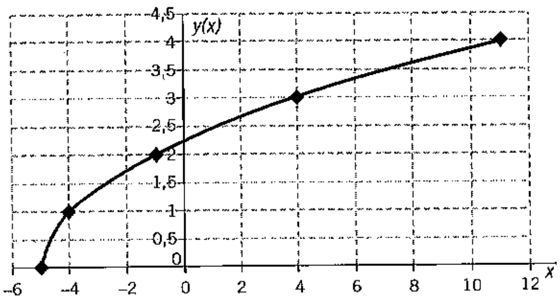
Calculamos la velocidad instantánea y su módulo:

$$\vec v(3\ \text{s}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(6\cancel{\Delta t} + \Delta t^{\cancel{2}})\vec i + \cancel{\Delta t}\vec j}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}(6 + \Delta t)\vec i + \vec j = (6\vec i + \vec j)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v(3\ \text{s}) = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37} = 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Trayectoria



10. Datos: $\Delta v = 334\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$; $\Delta t = 30{,}0$ s

Primero, expresamos los datos en unidades del SI:

$$334\ \cancel{\text{km}}\cdot\cancel{\text{h}^{-1}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\cdot\frac{1000\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{km}}} = 92{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

La aceleración media será la variación de velocidad dividida por la variación de tiempo:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{92{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{30{,}0\ \text{s}} = 3{,}09\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

11. Datos: $\vec v(t) = (3t^2 - 2)\vec i + 4t\vec j$; $t = 2$ s

Calculamos la expresión de la variación de velocidad para el instante $t = 2$ s:

$$\Delta\vec v(2\ \text{s}) = [3\cdot(2+\Delta t)^2 - 2]\vec i + 4\cdot(2+\Delta t)\vec j -$$

$$-\left[(3\cdot 2^2 - 2)\vec i + 4\cdot 2\vec j\right] = (12\Delta t + 3\Delta t^2)\vec i + 4\Delta t\vec j$$

Hallamos el vector aceleración y su módulo:

$$\vec a(2\ \text{s}) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec v(2\ \text{s})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(12\cancel{\Delta t} + 3\Delta t^{\cancel{2}})\vec i + 4\cancel{\Delta t}\vec j}{\cancel{\Delta t}} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}(12 + 3\Delta t)\vec i + 4\vec j = 12\vec i + 4\vec j\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$|\vec a(2\ \text{s})| = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

12. Datos: $R = 3{,}0$ m; $v = 0{,}42\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

La aceleración normal será:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0{,}42\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{3{,}0\ \text{m}} = 5{,}9\cdot 10^{-2}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

La aceleración tangencial, es decir, la que tiene una dirección tangente a la trayectoria, será:

$$a_t = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

La aceleración tangencial es nula, ya que la velocidad del niño es constante y, por lo tanto, su variación es cero. El niño ve que la pelota se desvía de su trayectoria porque se encuentra sometido a una aceleración, tratándose, por tanto, de un sistema de referencia no inercial.

Zona + (Pág. 229)

— *El universo se expande, ¿a qué velocidad?*

- La constante de Hubble (Ho), el factor de proporcionalidad entre velocidad de recesión y distancia de las galaxias, es uno de los parámetros fundamentales del universo y permite, en particular, determinar la edad del universo, como vamos a verlo.

  El valor propuesto en los últimos años para la constante de Hubble es de 71 $km \cdot s^{-1} \cdot Mpc$, al 5 % aproximadamente.

- El fundamento del modelo propuesto es la expansión de todos los espacios de la capa actual un 5 % respecto a la capa original. Este aspecto simula la expansión que ha tenido el universo desde su origen hasta la actualidad. Al unir un punto de la capa actual con la capa original, se aprecia como si el universo se estuviera expandiendo desde ese punto, debido a que todos los demás puntos estarán separados un 5 % respecto a sus originales. Esto sucede de igual forma independientemente del punto de referencia que se escoja.