9 Movimiento en una y dos dimensiones

En contexto (Pág. 231)

a. Respuesta sugerida:

— Movimiento rectilíneo constante y acelerado (caída libre), movimiento circular uniforme y uniformemente acelerado.

— En la mayoría de tramos hay movimiento uniformemente acelerado y en las curvas tiene lugar un movimiento circular.

— Desplazado hacia el sentido del movimiento de la parte de arriba de la noria (hacia delante).

b. Respuesta sugerida:

— Da Vinci se interesó por saber cuánto caía un objeto en cada intervalo de tiempo. De aquí, propuso que la distancia recorrida en caída libre seguía la ley de los números enteros (en cada intervalo de tiempo, el objeto recorre una distancia 1, 2, 3... y así sucesivamente).

— Mientras que Galileo propuso que la distancia recorrida era proporcional a los números impares.

— Midió el tiempo de caída de una bola en distintos planos inclinados, fabricados con madera muy pulida para minimizar el efecto del rozamiento.

— Galileo dedujo que la velocidad de caída de un cuerpo en el vacío no dependía de su masa. Es importante remarcar el vacío, ya que en caso contrario la resistencia del aire puede modificar dicha velocidad según la masa y la forma del objeto.

Fíjate (Pág. 65)

— En astronomía se usa para calcular trayectorias, distancias y tiempos de recorrido. En centrifugadora, para separar distintos fluidos.

— El principal factor es el humano (demasiada velocidad, cometer alguna acción imprudente como conductor o peatón, conducir bajo los efectos de las drogas, no usar cinturón o casco, etc.). Asimismo, casi el 80 % de los accidentes tiene lugar en vías secundarias (debido a firmes en mal estado, curvas muy cerradas o de escasa visibilidad, etc.).

Problemas resueltos (Págs. 245 y 246)

1. Datos: $\Delta x = 12$ km; $v_1 = 40$ km·h^{-1}; $t_0 = 2$ min $= 0{,}033$ h

Tomamos como origen de coordenadas el tramo de entrada y como origen de tiempo el instante en el que entra el primer ciclista. Planteamos la ecuación del movimiento de este y calculamos el tiempo:

$$\Delta x = v_1 t \quad \rightarrow \quad t = \frac{\Delta x}{v_1} = \frac{12\ \cancel{\text{km}}}{40\ \cancel{\text{km}} \cdot \text{h}^{-1}} = 0{,}3\ \text{h}$$

Y sustituimos este valor en la ecuación del segundo ciclista para hallar la velocidad:

$$\Delta x = v_2(t - t_0) \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{\Delta x}{(t - t_0)} = \frac{12\ \text{km}}{0{,}3\ \text{h} - 0{,}033\ \text{h}} =$$

$$= 45\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

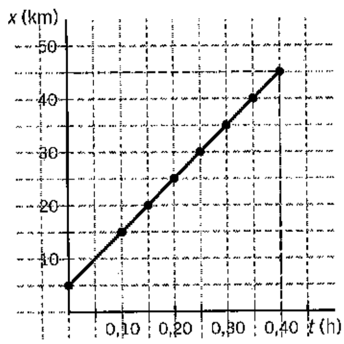
2. Datos:

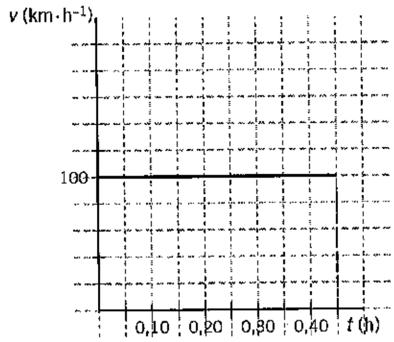
a) Comprobamos que la velocidad es la misma en cada intervalo de tiempo:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

x (km)	5	15	20	25	30	35	40	45
t (h)	0,00	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
v (km/h)	–	100	100	100	100	100	100	100

b)





c) $x = x_0 + vt = 5\ \text{km} + 100\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot t$

3. Datos: $a = -20$ m·s^{-2} ; $\Delta x = 100$ m

a) Calculamos la velocidad inicial de la ecuación que relaciona velocidades con la distancia recorrida:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2a\Delta x} =$$

$$= \sqrt{0\ \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2} - 2 \cdot (-20\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot 100\ \text{m}} =$$

$$= 63\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Y a partir de la ecuación de la velocidad calculamos el tiempo de frenada:

$$t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 63\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{-20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 3{,}2\ \text{s}$$

4. Datos: $\Delta x_1 = 15$ km; $v_1 = 80$ km·h^{-1}; $\Delta x_2 = 5$ km;

$v_2 = 50$ km·h^{-1}; $t_0 = 2{,}3$ s

Calculamos el tiempo de cada tramo:

$$\Delta x_1 = v_1 t_1 \rightarrow t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_1} = \frac{15\ \cancel{\text{km}}}{80\ \cancel{\text{km}}\cdot\text{h}^{-1}} = 0{,}19\ \text{h} = 11\ \text{min}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_2 = v_1 t_2 + \dfrac{1}{2}\cdot a \cdot t_2^2 \\ a = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2} \end{array}\right\}$$

$$t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_1 + \dfrac{1}{2}(v_2 - v_1)} =$$

$$= \frac{5\ \text{km}}{80\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} + \dfrac{1}{2}\cdot(50 - 80)\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}} = 0{,}08\ \text{h} = 5\ \text{min}$$

$$t_3 = 2{,}3\ \text{s} = 0{,}04\ \text{min}$$

El tiempo total es la suma de los tiempos empleados en recorrer cada tramo:

$$\Delta t = t_1 + t_2 + t_3 = 11\ \text{min} + 5\ \text{min} + 0{,}04\ \text{min} = 16\ \text{min}$$

Ahora calculamos la distancia recorrida en el último tramo:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_3 = v_2 \cdot t_3 + \dfrac{1}{2}\cdot a \cdot t_3^2 \\ a = -\dfrac{v_2}{t_3} \end{array}\right\}$$

$$\Delta x_3 = \frac{v_2 t_3}{2} = \frac{50\ \text{km}\cdot\cancel{\text{h}^{-1}}\cdot 6{,}4\cdot 10^{-4}\ \cancel{\text{h}}}{2} = 0{,}016\ \text{km}$$

Y finalmente sumamos las distancias recorridas en cada tramo:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 15\ \text{km} + 5\ \text{km} + 0{,}016\ \text{km} = 20\ \text{km}$$

5. Datos: $y_0 = 100$ m; $v_0 = 40$ m·s^{-1}; $\alpha = 30°$

a) Primero calculamos el tiempo de la trayectoria:

$$y = y_0 + v_0\ \text{sen}\ \alpha - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow t = 7\ \text{s}$$

Donde hemos desechado la solución negativa por no tener sentido físico. Y ahora ya podemos calcular la velocidad final:

$$\left\{\begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\alpha = 40\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\cos 30° = 35\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \\ v_y = v_0\ \text{sen}\ \alpha - gt = \\ = 40\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{sen}\ 30° - 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 7\ \text{s} = -49\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \end{array}\right.$$

$$v_f = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = (35, -49)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) Usamos la ecuación de la trayectoria horizontal para encontrar el alcance máximo:

$$\Delta x_{\text{máx}} = v_{0x}t = 35\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 7\ \text{s} = 245\ \text{m} = 2{,}5\cdot 10^2\ \text{m}$$

6. Datos: $L = 200$ m; $a = 1{,}5$ m·s^{-2}; $\alpha = 20°$; $y_0 = 20$ m

a) Calculamos el tiempo de bajada y luego la velocidad:

$$L = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot 200\ \text{m}}{1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 16\ \text{s}$$

$$v = v_0 + at = 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 16\ \text{s} = 24\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Y finalmente determinamos la velocidad horizontal teniendo en cuenta el ángulo de salto:

$$v_x = v\cos\alpha = 24\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\cos 20° = 23\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) Primero hallamos el tiempo de vuelo, interpretando que la velocidad vertical es hacia abajo (negativa):

$$y = 0 = y_0 - v_{0_y}t - \frac{1}{2}g\,t^2$$

$$t = \frac{-24\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{sen}\ 20° \pm \sqrt{(24\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{sen}\ 20°)^2 + 4\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 20\ \text{m}}}{2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

$$t_1 = 3{,}4\ \text{s};\quad t_2 = -4{,}9\ \text{s}$$

Y calculamos el alcance máximo usando el tiempo positivo:

$$\Delta x = v_x t = 23\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 3{,}4\ \text{s} = 78\ \text{m}$$

c) Calculado en el apartado anterior:

$$t = 3{,}4\ \text{s}$$

7. Datos: $\Delta t = 4{,}0$ min $= 240$ s; $\Delta t_1 = 30$ s;

$\omega_1 = 800$ rpm $= 83{,}8$ rad·s^{-1};

$\Delta t_2 = 30$ s; $\omega_2 = 0$ rad·s^{-1}

Calculamos las aceleraciones angulares inicial y final:

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1}{\Delta t_1} = \frac{83{,}3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{30\ \text{s}} = 2{,}8\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\alpha_2 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t_1} = \frac{0\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} - 83{,}3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{30\ \text{s}} =$$

$$= -2{,}8\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

Y determinamos las vueltas dadas en cada ciclo, sabiendo que en el primero y tercero dará el mismo número de vueltas:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{2}\alpha_1(\Delta t_1)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2{,}8\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(60\ \text{s})^2 = 1260\ \text{rad} =$$

$$= 200\ \text{vueltas}$$

$$\Delta\varphi_2 = \omega_1(\Delta t - t_1 - t_2) = 83{,}3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot(240 - 60)\ \text{s} =$$

$$= 15\,084\ \text{rad} = 2\,400\ \text{vueltas}$$

$$\Delta\varphi_3 = \omega_1 \Delta t_2 + \frac{1}{2}\alpha_2 (\Delta t_2)^2 = \Delta\varphi_1 = 200 \text{ vueltas}$$

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_1 =$$

$$= (200 + 2\,400 + 200) \text{ vueltas} = 2{,}8 \cdot 10^3 \text{ vueltas}$$

8. Datos: $D = 12 \text{ cm} = 0{,}12 \text{ m}$; $\omega = 500 \text{ rpm} = 52{,}4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$;

$t = 3{,}0 \text{ s}$

a) Calculamos la aceleración angular a partir de la ecuación de la velocidad angular del MCUA:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0{,}0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} - 52{,}4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}{3{,}0 \text{ s}} =$$

$$= -17{,}5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

b) Usamos la ecuación del movimiento del MCUA:

$$\Delta\varphi = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 52{,}4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 3{,}0 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot\, 17{,}5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (3{,}0 \text{ s})^2 = 78{,}5 \text{ rad} = 12{,}5 \text{ vueltas}$$

Por lo tanto, el DVD dará 12 vueltas completas antes de pararse.

c) $$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \frac{D}{2} = (52{,}4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2 \cdot \frac{0{,}12 \text{ m}}{2} =$$

$$= 165 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_t = \frac{D}{2}\alpha = \frac{0{,}12 \text{ m}}{2} \cdot (-17{,}5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}) = -1{,}1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Ejercicios y problemas (Págs. 247 a 250)

1 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU) Pág. 247

9. Datos: $v = 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $t = 8 \text{ min} = 480 \text{ s}$

$$\Delta x = vt = 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 480 \text{ s} = 1{,}4 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

La distancia que hay desde la Tierra al Sol es de $1{,}4 \cdot 10^{11}$ m.

10. Datos: $\Delta x = 5{,}25 \text{ km} = 5\,250 \text{ m}$; $v_1 = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;

$v_2 = 300\,000 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

a) El observador percibe primero la luz porque su velocidad es mucho mayor y, por lo tanto, recorrerá la misma distancia en menor tiempo.

b) $$\left.\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{\Delta x}{v_1} = \dfrac{5\,250 \text{ m}}{340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} = 15{,}4 \text{ s} \\[2ex] t_2 = \dfrac{\Delta x}{v_2} = \dfrac{5\,250 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} = \\[2ex] = 1{,}75 \cdot 10^{-5} \text{ s} \end{array}\right\} \Delta t = t_1 - t_2 = 15{,}4 \text{ s}$$

Por lo tanto, podemos decir que el observador verá la luz del relámpago instantáneamente, mientras que el sonido del trueno tardará más de 15 s.

11. El número 1 porque tiene más pendiente, que corresponde a la velocidad. Otra forma de verlo es que, en un mismo tiempo, el 1 ha recorrido mayor distancia que el 2.

12. Datos: $v_1 = 1100 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} = 11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $t_1 = 8{,}0 \text{ s}$;

$v_2 = 450 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1} = 4{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $t_2 = 7{,}0 \text{ s}$

a) El desplazamiento total será la suma de las distancias recorridas en los dos tramos con su respectiva velocidad:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = v_1 t_1 = 11{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 8{,}0 \text{ s} = 88 \text{ m} \\ x_2 = v_2 t_2 = 4{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 7{,}0 \text{ s} = 32 \text{ m} \end{array}\right\}$$

$$\Delta x = x_1 + x_2 = 88 \text{ m} + 32 \text{ m} = 120 \text{ m}$$

b) $$v_{med} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{11{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} + 4{,}5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{2} = 8{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

13. Datos: $v_1 = 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$; $t_1 = 7{,}0 \text{ min} = 0{,}12 \text{ h}$;

$v_2 = 80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$; $\Delta x = 15 \text{ km}$

Primero hallamos las distancias recorridas con cada velocidad:

$$x_1 = v_1 t = 90 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \cdot 0{,}12 \text{ h} = 11 \text{ km}$$

$$x_2 = \Delta x - x_1 = 15 \text{ km} - 11 \text{ km} = 4 \text{ km}$$

Y ahora ya podemos determinar el tiempo del segundo tramo y averiguar cuánto ha tardado en total:

$$t_2 = \frac{x_2}{v_2} = \frac{4 \text{ km}}{80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} = 0{,}05 \text{ h} = 3 \text{ min}$$

$$\Delta t = t_1 + t_2 = 7 \text{ min} + 3 \text{ min} = 10 \text{ min}$$

14. Datos: $x = 200 \text{ km}$; $x_0 = 15 \text{ km}$; $v_2 = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$;

$t_0 = 2{,}0 \text{ min} = 0{,}03 \text{ h}$; $v_1 = 55 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$

a) Calculamos el tiempo de cada ciclista a partir de su ecuación del movimiento:

$$x = x_0 + v_2 t_2 \rightarrow t_2 = \frac{x - x_0}{v_2} = \frac{200 \text{ km} - 50 \text{ km}}{50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} = 3 \text{ h}$$

$$x = x_0 + v_1(t_1 - t_0) \rightarrow t_1 = \frac{x - x_0}{v_1} + t_0 =$$

$$= \frac{200 \text{ km} - 50 \text{ km}}{55 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} + 0{,}03 \text{ h} = 2{,}7 \text{ h}$$

Y la diferencia de tiempo con que llegan a la meta es:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3 \text{ h} - 2{,}7 \text{ h} = 0{,}3 \text{ h}$$

b) Calculamos la distancia que recorre el segundo con el tiempo del primero y luego calculamos la diferencia:

$$x_2 = x_0 + v_2 t_1 = 50 \text{ km} + 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \cdot 2{,}7 \text{ h} = 185 \text{ km}$$

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 200 \text{ km} - 185 \text{ km} = 15 \text{ km}$$

15. Calcularemos la velocidad en cada tramo a partir de:

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

$$v_1 = \frac{20\text{ m} - 0\text{ m}}{2\text{ s}} = 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{20\text{ m} - 20\text{ m}}{4\text{ s} - 2\text{ s}} = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_3 = \frac{160\text{ m} - 20\text{ m}}{8\text{ s} - 4\text{ s}} = 35\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_4 = \frac{160\text{ m} - 160\text{ m}}{10\text{ s} - 8\text{ s}} = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_5 = \frac{0\text{ m} - 160\text{ m}}{12\text{ s} - 10\text{ s}} = -80\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

16. Calcularemos la velocidad en cada tramo a partir de:

$$v = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

$$v_1 = \frac{30\text{ m} - 0\text{ m}}{15\text{ s}} = 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{30\text{ m} - 30\text{ m}}{50\text{ s} - 15\text{ s}} = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_3 = \frac{25\text{ m} - 30\text{ m}}{60\text{ s} - 55\text{ s}} = -0{,}5\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_4 = \frac{0\text{ m} - 25\text{ m}}{85\text{ s} - 60\text{ s}} = -1\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

17. Datos: $x_1 = 100$ m; $t_1 = 4{,}0$ min $= 240$ s;

$x_2 = 200$ m; $t_2 = 8{,}0$ min $= 480$ s;

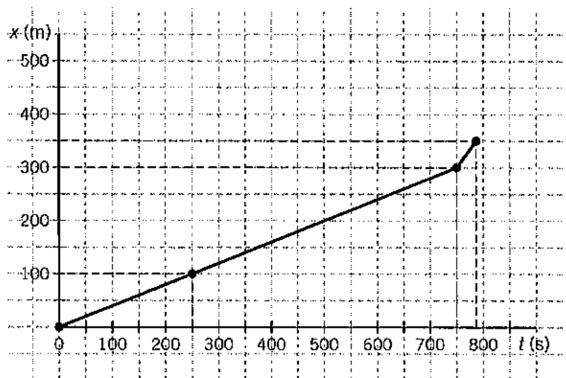
$x_3 = 50$ m; $t_3 = 1{,}0$ min $= 60$ s;

$$v_1 = \frac{x_1}{t_1} = \frac{100\text{ m}}{240\text{ s}} = 0{,}42\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{x_2}{t_2} = \frac{200\text{ m}}{480\text{ s}} = 0{,}42\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_3 = \frac{x_3}{t_3} = \frac{50\text{ m}}{60\text{ s}} = 0{,}83\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Representamos la gráfica *x-t:*



18. Datos: $x_0 = 6{,}0$ km; $v_1 = 60\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$; $v_2 = 100\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$

En primer lugar, escribimos la ecuación del movimiento para los dos automóviles:

$$x_1 = x_0 + v_1\, t$$

$$x_2 = v_2\, t$$

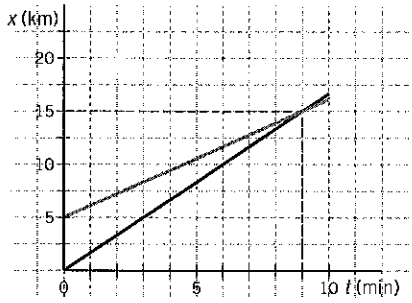
Igualamos las posiciones para saber al cabo de cuánto tiempo se encuentran:

$$x_0 + v_1\, t = v_2\, t$$

$$t = \frac{x_0}{v_2 - v_1} = \frac{6{,}0\text{ km}}{100\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} - 60\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}} = 0{,}15\text{ h} = 9{,}0\text{ min}$$

Sustituimos el tiempo en la segunda ecuación para obtener la posición (si lo hiciéramos en la primera nos daría el mismo valor): $x = v_2\, t = 100\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \cdot 0{,}15\text{ h} = 15$ km

Gráficamente obtenemos los mismos resultados:



19. Datos: $T_1 = 12{:}00$ h; $T_1' = 15{:}00$ h; $x_0 = 650$ km

$T_2 = 12{:}15$ h; $T_2' = 15{:}30$ h

Primero determinamos los tiempos de los respectivos trayectos y la diferencia entre los tiempos de salida (t_0):

$$\Delta t_1 = T_1' - T_1 = 15{:}00\text{ h} - 12{:}00\text{ h} = 3\text{ h}$$

$$\Delta t_2 = T_2' - T_2 = 15{:}30\text{ h} - 12{:}15\text{ h} = 3{,}25\text{ h}$$

$$t_0 = T_2 - T_1 = 12{:}15\text{ h} - 12{:}00\text{ h} = 15\text{ min} = 0{,}25\text{ h}$$

Ahora tenemos que hallar la velocidad de cada tren, que es constante y de sentidos opuestos:

$$v_1 = \frac{x_0}{\Delta t_1} = \frac{650\text{ km}}{3\text{ h}} = 216{,}7\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{-x_0}{\Delta t_2} = \frac{650\text{ km}}{3{,}25\text{ h}} = -200{,}0\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$$

Escribimos la ecuación del movimiento para los dos trenes:

$$x_1 = x_0 + v_1\, t$$

$$x_2 = v_2\,(t - t_0)$$

Igualamos las posiciones y aislamos el tiempo:

$$x_0 + v_1\, t = v_2\,(t - t_0)$$

$$t = \frac{x_0 - v_2\, t_0}{v_1 - v_2} = \frac{650\text{ km} - (-200\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}) \cdot 0{,}25\text{ h}}{216{,}7\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} - (-200\text{ km}\cdot\text{h}^{-1})} = 1{,}68\text{ h}$$

$$1{,}68\text{ h} = 1\text{ h} + 40\text{ min} + 48\text{ s}$$

Por lo tanto, la hora de encuentro será:

$$T = T_1 + t = 12{:}00\text{ h} + 01{:}41\text{ h} = 13{:}41\text{ h}$$

2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

Pág. 247

20. Datos: $v = 360\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 100\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_0 = 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;

$a = 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

a) $t = \dfrac{v - v_0}{a} = \dfrac{100\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 10\ \text{s}$

El tiempo que ha empleado el avión es de 10 s.

b) $x = x_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2 = 0\ \text{m} + 0\ \text{m} + \dfrac{1}{2}\cdot 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\ \cdot$

$\cdot\,(10\ \text{s})^2 = 5\cdot 10^2\ \text{m}$

La distancia recorrida antes de ascender es de $5\cdot 10^2$ m.

21. Datos: $v_0 = 180\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $a = -2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

a) $t = \dfrac{v - v_0}{a} = \dfrac{0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{-2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 25\ \text{s}$

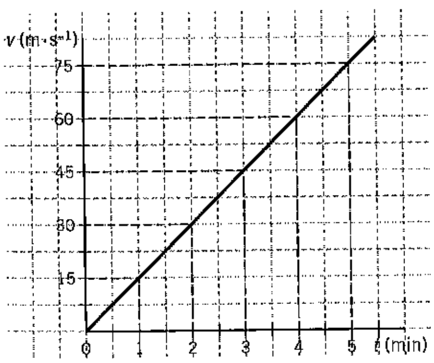
Tarda 25 s en detenerse.

b) $x = x_0 + v_0t + \dfrac{1}{2}at^2 = 0\ \text{m} + 50\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 25\ \text{s} +$

$+\dfrac{1}{2}\cdot(-2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})\cdot(25\ \text{s})^2 = 6{,}3\cdot 10^2\ \text{m}$

22. Datos: $a = 0{,}25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} = \dfrac{15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{1\ \text{min}}$; $t = 5{,}0\ \text{min}$

Gráfica *v-t*:



23. Datos: $y_0 = 3\ \text{m}$; $v_0 = 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $a = -g = -9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Elegimos el origen en la posición final y definimos el eje hacia arriba como positivo:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y$$

$$v = \sqrt{-2g\Delta y} = \sqrt{-2\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}(-3\ \text{m})} = 7{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Y, de la ecuación de la trayectoria vertical, determinamos el tiempo:

$$y = 0\ \text{m} = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 3\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 0{,}78\ \text{s}$$

24. Datos: $v_0 = 70\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $x_0 = 80\ \text{m}$;

$a = -3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Calculamos la distancia que necesita el coche para detenerse ($v = 0$) a partir de la ecuación que relaciona velocidades con desplazamiento:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{-v_0^2}{2a} = -\frac{(19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{2\cdot(-3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})} = 62{,}7\ \text{m} \simeq 63\ \text{m}$$

Como la distancia de frenada es menor que los 80 m, podemos decir que sí se para a tiempo.

Y, utilizando las ecuaciones del movimiento y de la velocidad, elaboramos una tabla de su posición y velocidad cada 0,2 s:

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 = 0\ \text{m} + 19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot t -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot t^2$$

$$v = v_0 + at = 19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot t$$

t (s)	x (m)	v (m/s)	t (s)	x (m)	v (m/s)
0,0	0,0	19,4	3,4	48,6	9,2
0,2	3,8	18,8	3,6	50,4	8,6
0,4	7,5	18,2	3,8	52,1	8,0
0,6	11,1	17,6	4,0	53,6	7,4
0,8	14,6	17,0	4,2	55,0	6,8
1,0	17,9	16,4	4,4	56,3	6,2
1,2	21,1	15,8	4,6	57,5	5,6
1,4	24,2	15,2	4,8	58,6	5,0
1,6	27,2	14,6	5,0	59,5	4,4
1,8	30,1	14,0	5,2	60,3	3,8
2,0	32,8	13,4	5,4	61,0	3,2
2,2	35,4	12,8	5,6	61,6	2,6
2,4	37,9	12,2	5,8	62,1	2,0
2,6	40,3	11,6	6,0	62,4	1,4
2,8	42,6	11,0	6,2	62,6	0,8
3,0	44,7	10,4	6,4	62,7	0,2
3,2	46,7	9,8			

25. Datos: $v_{0_1} = 50\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 13{,}89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $a_1 = 3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;

$x_{0_2} = 100\ \text{m}$; $a_2 = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Escribimos la ecuación del movimiento para el guepardo y el conejo:

$$x_1 = x_{0_1} + v_{0_1}t + \frac{1}{2}a_1 t^2$$

$$x_2 = x_{0_2} + v_{0_2}t + \frac{1}{2}a_2 t^2$$

Igualamos las posiciones para hallar el tiempo de encuentro, donde $x_{01} = 0$ y $v_{02} = 0$.

$$v_{0_1}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = x_{0_2} + \frac{1}{2}a_2 t^2$$

$$\frac{1}{2}(a_2 - a_1)t^2 - v_{0_1}t + x_{0_2} = 0$$

$$t = \frac{13{,}89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \pm \sqrt{(13{,}89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 - 4\cdot\frac{1}{2}(2{,}0-3{,}0)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 100\ \text{m}}}{2\cdot\frac{1}{2}(2{,}0-3{,}0)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

$$t_1 = 5{,}93\ \text{s}\ ;\quad t_2 = -33{,}71\ \text{s}$$

Desechamos la segunda solución por no tener sentido físico.

Sustituimos el tiempo obtenido en la primera ecuación para calcular la distancia recorrida por el guepardo:

$$x_1 = x_{0_1} + v_{0_1}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = 0\ \text{m} + 13{,}89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\ 5{,}93\ \text{s} + \frac{1}{2}\cdot 3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(5{,}93\ \text{s})^2 = 135\ \text{m}$$

Determinamos la velocidad de los dos animales:

$$v_1 = v_{0_1} + a_1 t = 13{,}89\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 5{,}93\ \text{s} =$$

$$= 31{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_2 = v_{0_2} + a_2 t = 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 5{,}93\ \text{s} =$$

$$= 11{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

26. Datos: $v_0 = 80\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $a = 4{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$;

$x = 150\ \text{m}$

a)
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a t^2$$

$$\frac{1}{2}a t^2 + v_0 t - x = 0 \rightarrow t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{(v_0)^2 + 4\cdot\frac{1}{2}ax}}{2\cdot\frac{1}{2}a}$$

$$t = \frac{-22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \pm \sqrt{(22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 4{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 150\ \text{m}}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

$$t_1 = 4{,}8\ \text{s};\quad t_2 = -15{,}8\ \text{s}$$

Nos quedamos con el valor positivo.

b) Sustituimos el valor del tiempo obtenido en la ecuación de la velocidad:

$$v = v_0 + at = 22\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 4{,}0\cdot 4{,}8\ \text{s} = 41\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

27. Datos: $v_{0_1} = 60\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 16{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $x_{0_2} = 2{,}0\ \text{km}$;

$v_2 = 80\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 22{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;

$a_1 = 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $x = 5{,}0\ \text{km}$

Primero calculamos el tiempo que tardaría la liebre en recorrer el tramo de 5 km, teniendo en cuenta que su origen está en los 2 km:

$$t = \frac{x - x_0}{v_2} = \frac{5\,000\ \text{m} - 2\,000\ \text{m}}{22{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}} = 135\ \text{s}$$

Este es el tiempo máximo que tiene el galgo para atrapar a la liebre en los 5 km. Por lo tanto, tenemos que calcular la distancia que recorrerá en este tiempo:

$$x_1 = v_{0_1}t + \frac{1}{2}at^2 = 16{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 135\ \text{s} + \frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot\ 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(135\ \text{s})^2 = 20\,480\ \text{m}$$

Como esta distancia es mucho mayor que los 5 km de máximo, podemos asegurar que sí lo atrapará. Por eso, ahora determinamos el tiempo de encuentro igualando las ecuaciones del movimiento del galgo y la liebre:

$$v_{0_1}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = x_{0_2} + v_2 t^2$$

$$\frac{1}{2}a_1 t^2 + (v_{0_1} - v_2)t - x_{0_2} = 0$$

$$t = \frac{-(16{,}7-22{,}2)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \pm \sqrt{(16{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 22{,}2)^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 200\ \text{m}}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

$$t_1 = 47{,}6\ \text{s};\quad t_2 = -42{,}0\ \text{s}$$

Nos quedamos con el valor positivo y lo sustituimos en la ecuación del movimiento del galgo para hallar la posición en la que atrapa a la liebre respecto al origen (la meta):

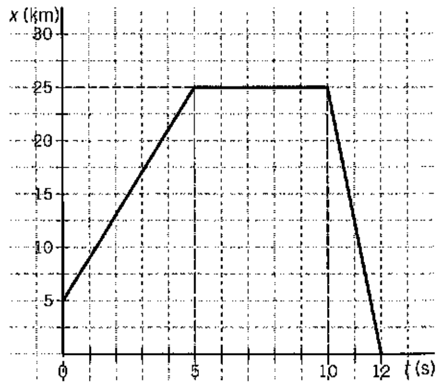
$$x_1 = x_{0_1} + v_{0_1}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = 0\ \text{m} + 16{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\ 47{,}6\ \text{s} + \frac{1}{2}\cdot 2{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(47{,}6\ \text{s})^2 = 3{,}1\cdot 10^3\ \text{m}$$

28. Datos: $v_0 = 20\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 5{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $t_1 = 5{,}0\ \text{s}$;

$t_2 = 10{,}0\ \text{s}$; $t_3 = 2{,}0\ \text{s}$

$a_1 = 4{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a_2 = 0{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a_3 = -\text{constante}$

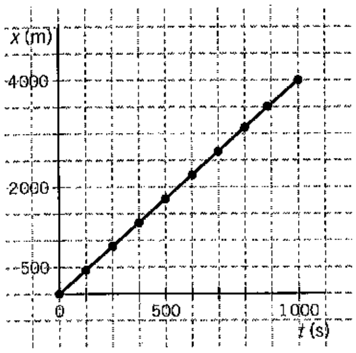


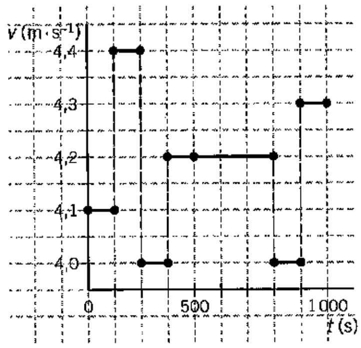
29. Respuesta sugerida: considerando que las aceleraciones de los dos móviles son iguales y del mismo signo, los dos vehículos chocarán en caso de que $x_0 > x_1$ y $v_1 > v_0$ o bien en el caso inverso: $x_1 > x_0$ y $v_0 > v_1$.

30. Calculamos la velocidad con la siguiente expresión:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

x (m)	0	500	1000	1500	2000	3000	3500	4000
t (s)	0	122	237	361	480	718	843	959
v (m · s^{-1})	–	4,1	4,4	4,0	4,2	4,2	4,0	4,3





31. Datos: $\Delta = 7\ \%$; $v_0 = 100\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 27{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;

$x_1 = 2{,}0$ km; $x_2 = 3{,}0$ km; $x_3 = 5{,}0$ km

$\Delta v_1 = -30\ \%$; $v_2 = 50\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 13{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;

$v_3 = 100\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 27{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Primero calculamos la velocidad a la que tiene que reducir en el primer tramo:

$$v_1 = v_0\left(1 - \frac{30}{100}\right) = 100\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}\cdot 0{,}7 =$$

$$= 70\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Hallamos las aceleraciones a partir de la siguiente relación:

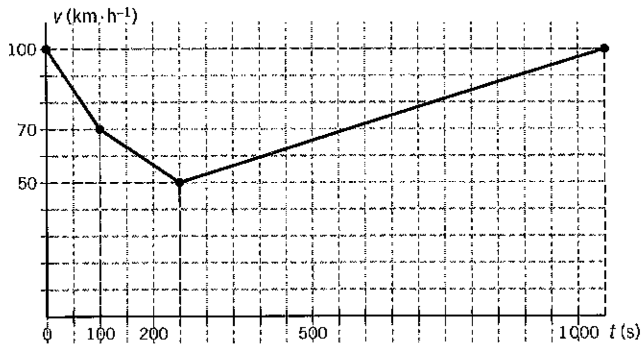
$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \;\rightarrow\; a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x}$$

$$a_1 = \frac{(19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 - (27{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{2\cdot 2000\ \text{m}} = -0{,}11\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_2 = \frac{(14\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 - (19\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{2\cdot 3000\ \text{m}} = -0{,}028\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_3 = \frac{(27{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 - (14{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{2\cdot 5000\ \text{m}} = 0{,}059\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Representamos v-t:



32. A partir de la ecuación del movimiento y de la definición de aceleración, determinamos la distancia recorrida en cada tramo en función de las velocidades inicial y final y el tiempo:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= v_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2 \\ a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta x = v_0\Delta t + \frac{1}{2}\Delta v\Delta t = \frac{v_0 + v}{2}\Delta t$$

$$\Delta x_1 = \frac{0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{2}\cdot(10-0)\ \text{s} = 100\ \text{m}$$

$$\Delta x_2 = \frac{20\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{2}\cdot(20-10)\ \text{s} = 150\ \text{m}$$

$$\Delta x_3 = \frac{10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{2}\cdot(25-20)\ \text{s} = 50\ \text{m}$$

$$\Delta x_4 = \frac{10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{2}\cdot(30-25)\ \text{s} = 25\ \text{m}$$

Y sumamos la distancia de cada tramo:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 =$$

$$= 100\ \text{m} + 150\ \text{m} + 50\ \text{m} + 25\ \text{m} = 325\ \text{m}$$

33. Datos: $t_1 = 3{,}0$ s; $\Delta y_2 = 150$ m; $v_3 = 25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;

$\Delta y_4 = 300$ m

Elegimos y_0 como origen y definimos el eje positivo hacia abajo. A parte, sabemos que $v_0 = 0$.

a) $$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt_1^2 =$$

$$= 0\ \text{m} + 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 3{,}0\ \text{s} + \frac{1}{2}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(3{,}0\ \text{s})^2 = 44\ \text{m}$$

b) $$v^2 = v_0^2 + 2g\Delta y_2$$

$$v = \sqrt{2g\Delta y_2} = \sqrt{2\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 150\ \text{m}} = 54\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c) $v = v_0 + gt \;\rightarrow\; t = \dfrac{v_3}{g} = \dfrac{25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 2{,}6\ \text{s}$

d) $\Delta y_4 = \dfrac{1}{2}gt^2 \;\rightarrow\; t = \sqrt{\dfrac{2\Delta y_4}{g}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 300\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 7{,}8\ \text{s}$

34. Datos: $v = 8{,}0\ m \cdot s^{-1}$; $t = 3{,}0\ s$

Elegimos el eje positivo hacia abajo:

a) $v = v_0 + gt = 8{,}0\ m \cdot s^{-1} + 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot 3{,}0\ s = 37\ m \cdot s^{-1}$

b) $\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2} g t_f^2 = 8{,}0\ m \cdot s^{-1} \cdot 3{,}0\ s + \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot$

$\cdot (3{,}0\ s)^2 = 68\ m$

35. Datos: $y_0 = 0{,}50\ m$; $t = 3{,}0\ s$

Definimos el eje positivo hacia arriba. Para calcular la velocidad al tocar el suelo utilizamos la ecuación que relaciona velocidades con la distancia vertical, que es negativa:

$$v^2 = v_0^2 - 2g\Delta y$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g\Delta y} =$$

$$= \sqrt{(2{,}0\ m \cdot s^{-1})^2 - 2 \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot (-0{,}50\ m)} =$$

$$= -3{,}7\ m \cdot s^{-1}$$

Nos quedamos con el valor negativo, que es el que coincide con nuestra definición de ejes.

Para determinar la altura máxima, primero calculamos el tiempo hasta este punto imponiendo que la velocidad tiene que ser cero y luego lo sustituimos en la ecuación del movimiento:

$$v = 0\ m \cdot s^{-1} = v_0 - gt \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g} = \frac{2{,}0\ m \cdot s^{-1}}{9{,}8\ m \cdot s^{-2}} = 0{,}2\ s$$

$$y_{máx} = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t_f^2 =$$

$$= 0{,}5\ m + 2{,}0\ m \cdot s^{-1} \cdot 0{,}2\ s - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot (0{,}2\ s)^2 = 0{,}7\ m$$

Que es la altura respecto el origen $y = 0$ (el suelo).

36. Datos: $y_{0_1} = 4{,}0\ m$; $y_{0_2} = 0{,}0\ m$; $v_{0_1} = 0{,}0\ m \cdot s^{-1}$;

$v_{0_2} = 6{,}0\ m \cdot s^{-1}$

Escribimos las ecuaciones del movimiento de cada piedra:

$$y_1 = y_{0_1} + v_{0_1} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_2 = y_{0_2} + v_{0_2} t - \frac{1}{2} g t^2$$

Las igualamos y aislamos el tiempo, teniendo en cuenta las condiciones iniciales de cada piedra (datos):

$$y_{0_1} + v_{0_1} t - \frac{1}{2} g t^2 = y_{0_2} + v_{0_2} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_{0_1} = v_{0_2} t$$

$$t = \frac{y_{0_1}}{v_{0_2}} = \frac{4{,}0\ m}{6{,}0\ m \cdot s^{-1}} = 0{,}7\ s$$

Sustituimos el tiempo calculado en la ecuación de la segunda piedra:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= 0\ m + 6{,}0\ m \cdot s^{-1} \cdot 0{,}7\ s - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot (0{,}7\ s)^2 = 1{,}8\ m$$

37. Datos: $y_{0_1} = 15\ m$; $y_{0_2} = 0\ m$; $v_{0_1} = 0\ m \cdot s^{-1}$; $v_{0_2} = 12\ m \cdot s^{-1}$

Escribimos las ecuaciones del movimiento para cada objeto, las igualamos y aislamos el tiempo de encuentro:

$$\begin{cases} y_1 = y_{0_1} + v_{0_1} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ y_2 = y_{0_2} + v_{0_2} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y_{0_1} + v_{0_1} t - \frac{1}{2} g t^2 = y_{0_2} + v_{0_2} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_{0_1} = v_{0_2} t$$

$$t = \frac{y_{0_1}}{v_{0_2}} = \frac{15\ \cancel{m}}{12\ \cancel{m} \cdot s^{-1}} = 1{,}3\ s$$

38. Datos: $y_0 = 15\ m$; $y_1 = 9{,}0\ m$

a) $y = 0\ m = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 y_0}{g}} =$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 15\ \cancel{m}}{9{,}8\ \cancel{m} \cdot s^{-2}}} = 1{,}8\ s$$

b)
$$v^2 = v_0^2 - 2g\Delta y$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g(y_1 - y_0)} =$$

$$= \sqrt{0\ m \cdot s^{-2} - 2 \cdot 9{,}8\ m \cdot s^{-2} \cdot (9{,}0 - 15)\ m} = 11\ m \cdot s^{-1}$$

39. Datos: $\Delta x = 9{,}0\ km$; $v_1 = 4{,}0\ km \cdot h^{-1}$; $v_2 = 8{,}0\ km \cdot h^{-1}$

Primero calculamos el tiempo que tarda el perro en llegar al refugio y la distancia que recorre el cazador en este tiempo:

$$t_2 = \frac{\Delta x}{v_2} = \frac{9{,}0\ \cancel{km}}{8{,}0\ \cancel{km} \cdot h^{-1}} = 1{,}1\ h$$

$$x_1 = v_1 t_2 = 4{,}0\ km \cdot h^{-1} \cdot 1{,}1\ h = 4{,}4\ km$$

Igualamos las dos ecuaciones del movimiento considerando las nuevas posiciones iniciales y obtenemos el tiempo de encuentro:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{0_1} + v_1 t \\ x_2 &= x_{0_2} - v_2 t \end{aligned}\right\} \; x_{0_1} + v_1 t = x_{0_2} - v_2 t$$

$$t = \frac{x_{0_2} - x_{0_1}}{v_1 + v_2} = \frac{9{,}0\ km - 4{,}4\ km}{4{,}0\ km \cdot h^{-1} + 8{,}0\ km \cdot h^{-1}} = 0{,}38\ h$$

Lo sustituimos en la primera ecuación para calcular el punto de encuentro:

$$x_1 = x_{0_1} + v_1 t = 4{,}4\ km + 4{,}0\ km \cdot h^{-1} \cdot 0{,}38\ h = 6\ km$$

Para saber la distancia total recorrida por el perro tenemos que repetir el cálculo anterior tantas veces como sea necesario. Y llegamos a que se encuentran 6 veces antes de llegar los dos al refugio, con lo que nos queda la siguiente suma:

$$\Delta x_{2\ total} = 9{,}0\ km + 2 \cdot (9{,}0 - 5{,}9)\ km + 2 \cdot (9{,}0 - 7{,}5)\ km +$$

$$+ 2 \cdot (9{,}0 - 8{,}0)\ km + 2 \cdot (9{,}0 - 8{,}7)\ km +$$

$$+ 2 \cdot (9{,}0 - 8{,}9)\ km = 20{,}8\ km$$

Donde entre paréntesis se muestran los distintos tramos que recorre el perro desde el refugio al cazador y viceversa (por eso se multiplica por 2).

40. Datos: $y_0 = 80$ m; $\quad v_{0_2} = 50$ m·s^{-1}

a) Planteamos la ecuación del movimiento para los dos cuerpos e igualamos las posiciones para aislar el tiempo. Teniendo en cuenta que elegimos el eje positivo hacia arriba:

$$\begin{cases} y_1 = y_{0_1} + v_{0_1} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ y_2 = y_{0_2} + v_{0_2} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$y_{0_1} + v_{0_1} t - \frac{1}{2} g t^2 = y_{0_2} + v_{0_2} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_{0_1} = v_{0_2} t$$

$$t = \frac{y_{0_1}}{v_{0_2}} = \frac{80 \text{ m}}{50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} = 1{,}6 \text{ s}$$

b) Sustituimos el tiempo de encuentro en una de las dos ecuaciones:

$$y_2 = y_{0_2} + v_{0_2} t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= 0 \text{ m} + 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 1{,}6 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (1{,}6 \text{ s})^2 = 68 \text{ m}$$

c) Aplicamos la ecuación de la velocidad para cada cuerpo:

$$v_1 = v_{0_1} - gt = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} - 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 1{,}6 \text{ s} = -16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_2 = v_{0_2} - gt = 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} - 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 1{,}6 \text{ s} = 34 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

d) Primero calculamos el tiempo de caída del primer cuerpo:

$$\Delta y_1 = -\frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = \sqrt{-\frac{2\Delta y_1}{g}} = \sqrt{-\frac{2 \cdot (-50 \text{ m})}{9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 4 \text{ s}$$

Y sustituimos el valor obtenido en la ecuación del movimiento del segundo cuerpo:

$$y_2 = v_{0_2} t - \frac{1}{2} g t^2 = 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot$$

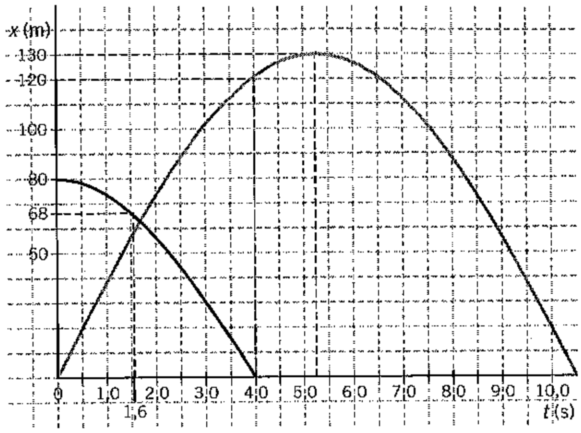
$$\cdot 4 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (4 \text{ s}) = 1{,}2 \cdot 10^2 \text{ m}$$

e) Para saber la altura máxima tenemos que imponer que la velocidad sea nula, determinar el tiempo del recorrido y sustituirlo en la ecuación del movimiento para calcular $y_{máx}$.

$$v = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = v_{0_2} - gt \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_{0_2}}{g} = \frac{50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} = 5 \text{ s}$$

$$y_{máx} = v_{0_2} t - \frac{1}{2} g t^2 = 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 5 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (5 \text{ s})^2 = 1{,}2 \cdot 10^2 \text{ m}$$



41. a) Para resolver este problema debemos tener en cuenta que el sonido también tarda un cierto tiempo en llegar al oído de Carmen.

Teniendo en cuenta esto, aplicaremos la fórmula del MRU para hallar el tiempo que tarda el sonido y la fórmula del MRUA para hallar la profundidad total del pozo:

$$\text{MRU: } y = 340 \cdot t_2 \rightarrow t_2 = \frac{y}{340}$$

$$\text{MRUA: } y = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2 = 4{,}9 \cdot t_1^2$$

$$340\, t_2 = 4{,}9\, t_1^2 \rightarrow 340(2{,}5 - t_1) = 4{,}9\, t_1^2$$

$$4{,}9\, t_1^2 + 340\, t_1 - 850 = 0 \rightarrow t_1 = 2{,}416 \text{ s}$$

Sustituyendo:

$$y = 4{,}9 \cdot 2{,}416^2 = 29 \text{ m}$$

b) Aplicando la formula correcta y considerando una velocidad inicial nula:

$$v^2 = v_0^2 - 2g\,\Delta y \rightarrow v = \sqrt{2g\,\Delta y} \rightarrow v =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 28{,}6} = 24 \text{ m·s}^{-1}$$

42. Datos: $v = 10$ m·s^{-1}; $\quad y_0 = 5{,}0$ m

a) $v = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = v_{0_2} - gt \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g} = \frac{10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} = 1 \text{ s}$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= 5{,}0 \text{ m} + 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 1 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (1 \text{ s})^2 = 10 \text{ m}$$

b) $y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \text{ m} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} g t^2 - v_0 t - y_0 = 0$

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} g y_0}}{2 \cdot \frac{1}{2} g} =$$

$$= \frac{10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \pm \sqrt{(10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 5{,}0 \text{ m}}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

$$t_1 = 2{,}4 \text{ s}; \quad t_2 = -0{,}4 \text{ s}$$

Nos quedamos con la solución positiva.

3 COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS Pág. 249

43. Datos: $v_1 = 60\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; $v_2 = 45\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$

$$v' = v_1 - v_2 = 60\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} - 45\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 15\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

44. Datos: $v_1 = 19\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; $v_2 = 60\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$; $t = 1\,150\ \text{s} = 0{,}32\ \text{h}$

$$v' = v_2 - v_1 = 60\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} - 19\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} = 41\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$x = v' t = 41\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1} \cdot 0{,}32\ \text{h} = 13\ \text{km}$$

45. Datos: $\alpha = 30°$; $v_0 = 6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $y_0 = 50\ \text{cm} = 0{,}5\ \text{m}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t = (6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \cos 30°)t \\ y = y_0 + (v_0 \text{sen}\ \alpha)t - \dfrac{1}{2} g t^2 = \\ = 0{,}5\ \text{m} + (6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{sen}\ 30°)t - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}\ t^2 \end{cases}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha = 6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cos 30° = 5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_y = v_0 \text{sen}\ \alpha - gt = 6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}\ \text{sen}\ 30° - 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}\ t \end{cases}$$

46. Datos: $t_1 = 90\ \text{s}$; $t_2 = 60\ \text{s}$

Buscamos la relación entre velocidades imponiendo que la distancia recorrida en los dos casos es la misma:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= v_1 t_1 \\ \Delta x &= v_2 t_2 \end{aligned}\right\} v_1 t_1 = v_2 t_2 \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{90\ \text{s}}{60\ \text{s}} = 1{,}5$$

Determinamos la velocidad total de la composición de los dos movimientos y, usando la relación anterior, obtenemos t.

$$v' = v_1 + v_2 = v_1 + 1{,}5 v_1 = 2{,}5 v_1$$

$$\frac{v'}{v_1} = \frac{t_1}{t'} \rightarrow t' = t_1 \frac{v_1}{v'} = 90\ \text{s} \cdot \frac{\cancel{v_1}}{2{,}5 \cdot \cancel{v_1}} = 36\ \text{s}$$

47. Datos: $v_1 = 4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_2 = 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_3 = -3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

Primero calculamos la velocidad del pasajero respecto a un observador en reposo que está fuera de la escalera:

$$v' = v_1 + v_2 = 4\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} + 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Y ahora determinamos la velocidad respecto a un observador que va en otra cinta que se mueve en sentido opuesto:

$$v'' = v' - v_3 = 7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} - (-3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}) = 10\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

48. Datos: $\Delta x = 300\ \text{m}$; $v_1 = 3{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_2 = 2{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

a) $v' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(3{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2 + (2{,}0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1})^2} =$

$= 3{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

b) $\Delta x = v_1 t \rightarrow t = \dfrac{\Delta x}{v_1} = \dfrac{300\ \cancel{\text{m}}}{3{,}0\ \cancel{\text{m}} \cdot \text{s}^{-1}} = 1{,}0 \cdot 10^2 \text{s}$

c) $y = v_2 t = 2{,}0\ \text{m} \cdot \cancel{\text{s}^{-1}} \cdot 100\ \cancel{\text{s}} = 200\ \text{m}$

$$d = \sqrt{(x)^2 + (y)^2} = \sqrt{(300\ \text{m})^2 + (200\ \text{m})^2} = 3{,}6 \cdot 10^2\ \text{m}$$

49. Vemos como para cualquier valor de las dos velocidades y del ángulo siempre acabamos teniendo un movimiento rectilíneo y constante. Ahora bien, el tiempo y las distancias recorridas sí que dependen tanto de la velocidad y del ángulo. También se observa como, por ejemplo, para un ángulo y una velocidad de la moto determinados, si vamos modificando la velocidad de la corriente siempre tarda el mismo tiempo (ya que la distancia de banda a banda siempre es la misma y la velocidad de la corriente, aunque sí que modifica la velocidad resultante, solo afecta en la dirección x).

50. Datos: $\Delta x = 72{,}28\ \text{m}$; $\alpha = 45°$

a) Aislamos el tiempo de la ecuación del movimiento vertical, suponiendo que las posiciones inicial y final de la jabalina son las mismas, y lo sustituimos en la ecuación del movimiento horizontal:

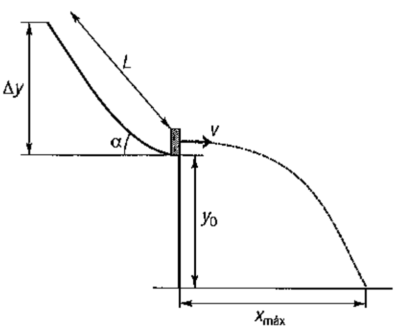
$$\Delta y = 0\ \text{m} = v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t = \frac{2 v_{0_y}}{g}$$

$$\Delta x = v_{0_x} t = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha\ \text{sen}\ \alpha}{g} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{g \Delta x}{2 \cos\alpha\ \text{sen}\ \alpha}} = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 72{,}28\ \text{m}}{2 \cdot \cos 45°\ \text{sen}\ 45°}} = 27\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) $t = \dfrac{2 v_0 \text{sen}\ \alpha}{g} = \dfrac{2 \cdot 26{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{sen}\ 45°}{9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = 3{,}8\ \text{s}$

51. Datos: $l = 91\ \text{m}$; $\alpha = 35°$; $v_{0_x} = 33\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; $x_{\text{máx}} = 50\ \text{m}$



Primero determinamos el tiempo de vuelo:

$$t = \frac{x_{\text{máx}}}{v_{0_x}} = \frac{50\ \text{m}}{33\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 1{,}5\ \text{s}$$

Calculamos la altura del salto a partir de la ecuación del movimiento vertical y la altura vertical del trampolín:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (1{,}5\ \text{s})^2 = 11\ \text{m} \\ \Delta y &= l\ \text{sen}\ \alpha = 91\ \text{m} \cdot \text{sen}\ 35° = 52\ \text{m} \end{aligned}\right\}$$

$$y = \Delta y + y_0 = 52\ \text{m} + 11\ \text{m} = 63\ \text{m}$$

Por lo tanto, la cima del trampolín se encuentra a 63 m. Y la velocidad de aterrizaje será:

$$v_x = v_{0_x} = 33\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$v_y = v_{0_y} - gt = 0\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} - 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 1{,}5\ \text{s} = -15\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

52. Datos: $v = 15{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 30°$; $\Delta x = 11{,}0$ m; $h = 2{,}44$ m

Primero calculamos el tiempo que tarda en llegar a la portería:

$$\Delta x = v_0 \cos\alpha t \rightarrow t = \frac{\Delta x}{v_0 \cos\alpha} =$$

$$= \frac{11{,}0\ \text{m}}{15{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \cos 30°} = 0{,}9\ \text{s}$$

Y lo sustituimos en la ecuación del movimiento vertical:

$$\Delta y = v_0 \text{sen}\,\alpha t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= (15{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \text{sen}\,30°) \cdot 0{,}9\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (0{,}9\ \text{s})^2 =$$

$$= 2{,}87\ \text{m}$$

La pelota va demasiado alta, ya que $\Delta y > h$. En la siguiente tabla vemos el efecto de la altura a la que llega la pelota en función del ángulo inicial:

α (°)	Δy (m)
0	–3,97
5	–2,79
10	–1,62
15	–0,47
20	0,65
25	1,74
30	2,78

53. Datos: $\alpha = 13°$; $l = 50$ m; $t = 6{,}7$ s; $\Delta y = 14$ m

a) Al estar en un plano inclinado, la aceleración será $g \cdot \text{sen}\,\alpha$:

$$v = v_0 + at = 0{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot \text{sen}\,13° \cdot 6{,}7\ \text{s} =$$

$$= 15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) Hallamos el tiempo para, posteriormente, poder calcular el desplazamiento horizontal:

$$y = y_0 + v_0 \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 0 = 14 - 14{,}9 \cdot \text{sen}\,13° \cdot t - 4{,}9 t^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow t = 1{,}38\ \text{s}$$

$$\Delta x = v_0 \cos\alpha \cdot t = 14{,}9\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \cos 13° \cdot 1{,}38\ \text{s} = 20\ \text{m}$$

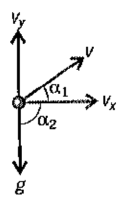
54. Datos: $v_0 = 300\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $\alpha = 60°$

a) En el punto más alto la velocidad vertical será nula y la horizontal será siempre la misma:

$$v_y = 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_x = v_{0_x} \cos\alpha = 300\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \cos 60° = 1{,}5 \cdot 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

b)



Calculamos la velocidad al cabo de 6 s:

$$v_y = v_{0_y} - gt = 300\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \text{sen}\,60° - 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot$$

$$\cdot\, 6{,}0\ \text{s} = 201\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(150\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 + (201\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2} =$$

$$= 251\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Y determinamos el ángulo de v respecto a la horizontal, sabiendo que el proyectil aún está subiendo:

Por lo tanto, el ángulo entre a y v es:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 53° + 90° = 143°$$

c) Calculamos el tiempo que necesita para llegar a los 400 m de altura.

$$\Delta y = v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 = 0\ \text{m} \rightarrow \frac{1}{2} g t^2 - (v_0 \text{sen}\,\alpha) t + \Delta y = 0$$

$$t = \frac{300\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \text{sen}\,60° \pm \sqrt{(300\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \text{sen}\,60°)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 400\ \text{m}}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

$$t_1 = 2\ \text{s}; \quad t_2 = 51\ \text{s}$$

El primer tiempo es de subida y el segundo de bajada y, por lo tanto, con los dos hemos de obtener el mismo valor del módulo de la velocidad.

$$\begin{cases} v_x = 150\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \\ v_y = v_0 \text{sen}\,\alpha - gt = 300\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \text{sen}\,60° - 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 2\ \text{s} = 240\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(150\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 + (240\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2} = 2{,}8 \cdot 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

55. Datos: $\Delta x = 38{,}7$ m; $t = 2{,}0$ s

a) $$\Delta x = v_{0_x} t \rightarrow v_{0_x} = \frac{\Delta x}{t} = \frac{38{,}7\ \text{m}}{2{,}0\ \text{s}} = 19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\Delta y = 0 = v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow v_{0_y} = \frac{1}{2} g t =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 2{,}0\ \text{s} = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_0 = \sqrt{v_{0_x}^2 + v_{0_y}^2} = \sqrt{(19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2 + (9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2} = 21{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\cos\alpha = \frac{v_{0_x}}{v_0} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{19{,}4\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{21{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}\right) = 26{,}7°$$

b) Usamos la ecuación que relaciona velocidades con desplazamiento para determinar la altura máxima, imponiendo que la velocidad vertical se tiene que anular en este punto:

$$v_y^2 = 0 = v_{0_y}^2 - 2g\Delta y \rightarrow \Delta y = \frac{v_{0_y}^2}{2g} = \frac{(9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 4{,}9\ \text{m}$$

56. Datos: $\alpha = 37°$; $y_0 = 30{,}5$ m; $\Delta x = 61$ m

a) Planteamos la ecuación del movimiento para las dos componentes.

$$\begin{cases} \Delta x = v_{0_x} t & \rightarrow \quad t = \dfrac{\Delta x}{v_0} \\ y = y_0 + v_{0_y} t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$v_x = v \cos \alpha \rightarrow \alpha = \text{arc cos}\left(\frac{v_x}{v}\right) =$$

$$= \text{arc cos}\left(\frac{150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{251 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}\right) = 53°$$

Primero hallamos la velocidad inicial y luego calculamos el tiempo:

$$y = 0 = y_0 + \frac{v_0 \text{sen } \alpha}{v_0 \cos \alpha} \Delta x - \frac{1}{2} g \left(\frac{\Delta x}{v_0 \cos \alpha}\right)^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g (\Delta x)^2}{2 (\Delta x \text{ tg } \alpha + y_0) \cos^2 \alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (61 \text{ m})^2}{2 \cdot (61 \text{ m} \cdot \text{tg } 37° + 30{,}5 \text{ m}) \cdot \cos 37°}} = 19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$t = \frac{\Delta x}{v_{0_x}} = \frac{61 \text{ m}}{19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \cos 37°} = 4 \text{ s}$$

b) $$v_y^2 = 0 = v_{0_y}^2 - 2g\Delta y \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta y = \frac{v_{0_y}^2}{2g} = \frac{(19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ sen } 37°)^2}{2 \cdot 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 6{,}66 \text{ m}$$

$$y_{\text{máx}} = y_0 + \Delta y = 30{,}5 \text{ m} + 6{,}66 \text{ m} = 37{,}1 \text{ m}$$

57. Datos: $v_{\text{coche}} = 15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$; $\alpha = 70°$

a) Buscamos la relación trigonométrica para calcular v_{gota} desde el sistema de referencia del coche, tal y como se indica en el dibujo:

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_{\text{coche}}}{v_{\text{gota}}} \rightarrow v_{\text{gota}} = \frac{v_{\text{coche}}}{\text{tg } \alpha} = \frac{15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}{\text{tg } 70°} = 5{,}5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

b) Obtenemos la velocidad con la que golpea al parabrisas por composición de velocidades:

$$v = \sqrt{v_{\text{gota}}^2 + v_{\text{coche}}^2} = \sqrt{(5{,}5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1})^2 + (15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1})^2} =$$

$$= 16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

58. Datos: $y_0 = 11$ m; $v_1 = 4{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $v_2 = 3{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $t = 12$ s

a) $$x_1 = v_1 t = 4{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 12 \text{ s} = 48 \text{ m}$$

$$x_2 = v_2 t = 3{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 12 \text{ s} = 36 \text{ m}$$

$$d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_0^2} = \sqrt{(48 \text{ m})^2 + (36 \text{ m})^2 + (11 \text{ m})^2} = 61 \text{ m}$$

b) $\vec{v} = v_1 \vec{i} - v_2 \vec{j} = (4{,}0 \vec{i} - 3{,}0 \vec{j}) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

c) $a = 0$, ya que los dos vehículos se mueven a velocidad constante.

4 MOVIMIENTO CIRCULAR

Pág. 250

59. Datos: $t = 3$ s; $\omega = 3 \text{ vueltas} \cdot \text{s}^{-1}$;

a) $$\omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{vuelta}}} \cdot 3 \cancel{\text{vueltas}} \cdot \text{s}^{-1} = 6\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) Nº vueltas = 3 vueltas $\cdot$ s^{-1} $\cdot$ 3 s = 9 vueltas

60. Datos: $\omega = 300$ rpm; $t = 10$ s

$$\omega_0 = 300 \text{ rpm} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{0 - 10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{10 \text{ s}} = -\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

61. Datos: $h = 135$ m; $T = 30 \text{ min} = 1{,}8 \cdot 10^3$ s; $t = 11 \text{ h} = 3{,}96 \cdot 10^4$ s

a) $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{1800 \text{ s}} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\Delta\varphi = \omega t = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 3{,}96 \cdot 10^4 \text{s} =$$

$$= 138{,}6 \text{ rad} = 22 \text{ vueltas}$$

b) $$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = (3{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{135 \text{ m}}{2} = 8{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

62. Datos: $R = 250$ m; $v = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 16{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

a) $$\omega = \frac{v}{R} = \frac{16{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{250 \text{ m}} = 6{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

b) $$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(16{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{250 \text{ m}} = 1{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

63. Datos: $R_1 = 400 \text{ km} = 4{,}0 \cdot 10^5$ m; $T = 91 \text{ min} = 5\,460$ s

$R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m

a) $$1 \text{ día} = 86\,400 \text{ s}$$

$$\text{Nº vueltas} = \frac{1 \text{ vuelta}}{5\,460 \text{ s}} \cdot 86\,400 \text{ s} = 16 \text{ vueltas}$$

b) $$v = \omega R = \frac{2\pi}{T}(R_1 + R_T) = \frac{2\pi \text{ rad}}{5460 \text{ s}} \cdot$$

$$\cdot (4{,}0 \cdot 10^3 + 6{,}37 \cdot 10^6) \text{ m} = 7{,}8 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

64. Datos: $\omega = 300 \text{ rpm} = 10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $\alpha = -2{,}0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$;

$R = 20 \text{ cm} = 0{,}2$ m

a) $$\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} - 10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{-2{,}0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}} = 5\pi \text{ s}$$

b) $$\Delta\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 =$$

$$= 10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 5\pi \text{ s} + \frac{1}{2}(-2{,}0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (5\pi \text{ s})^2 = 25\pi^2 \text{ rad}$$

c) $\Delta s = R\Delta\varphi = 0{,}2 \text{ m} \cdot 25\pi^2 \text{ rad} = 5\pi^2$ m

65. Datos: $R = 15$ cm $= 0{,}15$ m; $\omega = 5$ rad·s^{-1}; $\Delta t = 1$ min $= 60$ s

a) $\alpha = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{5\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}{60\ \text{s}} = 0{,}08\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$

b) Primero calculamos la velocidad angular al cabo de $t_2 = 25$ s.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t_2 = 0\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} + 0{,}08\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 25\ \text{s} = 2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v = \omega R = 2\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 0{,}15\ \text{m} = 0{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c) $a_t = R\alpha = 0{,}15\ \text{m}\cdot 0{,}08\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2} = 0{,}01\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

d) $\Delta\varphi = \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \dfrac{1}{2}\cdot 0{,}08\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(60\ \text{s})^2 =$

$$= 144\ \text{rad} = 23\ \text{vueltas}$$

66. Datos: $R_T = 6{,}37\cdot 10^3$ km; $T = 24$ h

La velocidad lineal de una persona en el ecuador será:

$$v = \frac{2\pi}{T}R = \frac{2\pi}{24\ \text{h}}\cdot 6{,}37\cdot 10^3\ \text{km} = 1{,}67\cdot 10^3\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

Calculamos su velocidad angular y su aceleración centrípeta:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1{,}67\cdot 10^3\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}}{6{,}37\cdot 10^3\ \text{km}} = 0{,}26\ \text{rad}\cdot\text{h}^{-1} =$$

$$= 6{,}94\cdot 10^{-4}\ \text{rpm}$$

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(1{,}67\cdot 10^3\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1})^2}{6{,}37\cdot 10^3\ \text{km}} = 437{,}8\ \text{km}\cdot\text{h}^{-2} =$$

$$= 0{,}0337\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

67. Datos: $R = 6{,}0$ cm $= 0{,}06$ m; $\Delta t = 5{,}0$ s; $v_R = 1{,}3$ m·s^{-1}

Primero calculamos la velocidad y la aceleración angular:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{0{,}06\ \text{m}} = 21{,}7\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{21{,}7\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{5{,}0\ \text{s}} = 4{,}3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

Ahora ya podemos determinar la aceleración tangencial y normal.

$$\left.\begin{aligned} a_t &= R\alpha = 0{,}06\ \text{m}\cdot 4{,}3\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-2} = \\ &= 0{,}26\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \\ a_n &= \frac{v^2}{R} = \frac{(1{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2}{0{,}06\ \text{m}} = \\ &= 28{,}2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \end{aligned}\right\} \vec{a} = (0{,}26\,\vec{u}_t + 28{,}2\,\vec{u}_n)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

5 SÍNTESIS

Pág. 251

68. Datos: $v_1 = 3{,}0$ km·h^{-1}; $\Delta x_1 = 200$ m; $\Delta y = 600$ m

$h = -2{,}0$ m; $\Delta x_2 = 0{,}20$ m; $\Delta t_2 = 0{,}50$ s

a) $$\left.\begin{aligned} \Delta y &= v_2 t \\ t &= \frac{\Delta x_1}{v_1} \end{aligned}\right\} \Delta y = v_2\frac{\Delta x_1}{v_1}$$

$$v_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x_1}v_1 = \frac{600\ \text{m}}{200\ \text{m}}\cdot 3{,}0\ \text{km} = 9\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

b) $v_m = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \dfrac{0{,}20\ \text{m}}{0{,}50\ \text{s}} = 0{,}40\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

c) $$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{-\frac{2h}{g}} =$$

$$= \sqrt{-\frac{2\cdot(-2{,}0\ \text{m})}{9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 0{,}64\ \text{s}$$

$$\Delta x = v_m t = 0{,}40\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 0{,}64\ \text{s} = 0{,}26\ \text{m}$$

d) $y = h + v_0 t_2 - \dfrac{1}{2}gt_2^2 = 2{,}0\ \text{m} + 0 - \dfrac{1}{2}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot$

$\cdot(0{,}50\ \text{s})^2 = 0{,}78\ \text{m}$

69. Los alumnos deberán realizar una experiencia similar a la vista en el vídeo teniendo en cuenta que, para lograr el correcto funcionamiento de la prueba, los dos objetos deben partir del reposo y empezar a caer desde la misma altura.

70. Respuesta sugerida.

a) Nos pueden simplificar las relaciones y los cálculos. Y además tienen una periodicidad (2π) que puede ser útil.

b) No. Solamente serán más útiles en los casos en que el radio sea constante (p. ej., circunferencia) o cuando la variación del radio siga una función simple (p. ej., un espiral). Es decir, sobre todo nos serán útiles en situaciones de simetría.

c) Entonces no tiene sentido usar las coordenadas polares, ya que en este caso solo tendremos una variable.

71. $$\Delta y = -\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(\Delta t)^2$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(1\ \text{s})^2 = -\frac{9{,}8}{2}\text{m}$$

$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(2\ \text{s})^2 + \frac{9{,}8}{2}\text{m} =$$

$$= -3\cdot\frac{9{,}8}{2}\text{m}$$

$$y_3 - y_2 = -\frac{1}{2}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(3\ \text{s})^2 + \frac{1}{2}\cdot 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(2\ \text{s})^2 =$$

$$= -5\cdot\frac{9{,}8}{2}\text{m}$$

$$y_n - y_{n-1} = -n\cdot\frac{9{,}8}{2}\text{m}$$

Evaluación (Pág. 252)

1. Datos: $t_1 = 0{,}5$ s; $t_2 = 1{,}5$ s; $x_1 = 3{,}5$ m; $x_2 = 43$ m; $t_3 = 3{,}0$ s

a) $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{43{,}0\ \text{m} - 5{,}5\ \text{m}}{1{,}5\ \text{s} - 0{,}5\ \text{s}} = 40\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

b) $x = x_0 + vt_3 = 0\ \text{m} + 39{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 3{,}0\ \text{s} = 1{,}2 \cdot 10^2\ \text{m}$

2. Datos: $v_1 = 90\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$; $v_2 = \frac{1}{5}v_1$; $t = 4{,}0\ \text{s}$

Primero calculamos la aceleración:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t} = \frac{\frac{1}{5} \cdot 25{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 25{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{4{,}0\ \text{s}} = -5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Y aplicamos la ecuación del movimiento:

$$x = x_0 + v_1 t + \frac{1}{2}at^2 =$$

$$0\ \text{m} + 25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 4{,}0\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}) \cdot (4{,}0\ \text{s})^2 = 60\ \text{m}$$

3. Datos: $a = 0{,}03\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $v_2 = 70\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1} = 19\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

a) Planteamos la ecuación del movimiento para los dos vehículos, sabiendo que uno sigue el MRUA y el otro el MRU:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{0_1} + v_1 t + \frac{1}{2}at^2 \\ x_2 &= x_{0_2} + v_2 t \end{aligned}\right\}$$

Igualamos las posiciones y aislamos el tiempo:

$$x_{0_1} + v_1 t + \frac{1}{2}at^2 = x_{0_2} + v_2 t$$

$$\frac{1}{2}at^2 = v_2 t$$

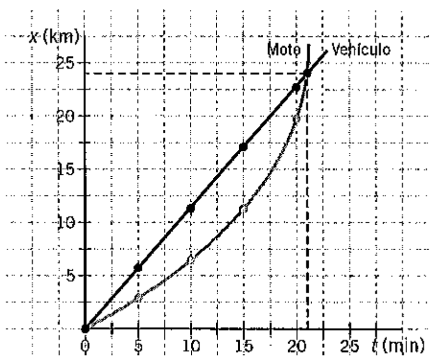
$$t = \frac{2v_2}{a} = \frac{2 \cdot 19\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{0{,}03\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 1267\ \text{s} = 21\ \text{min}$$

b) Sustituimos el tiempo calculado en una de las dos ecuaciones:

$$x_1 = x_{0_1} + v_1 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot$$

$$\cdot\ 0{,}03\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (1267\ \text{s})^2 = 2{,}4 \cdot 10^4\ \text{m} = 24\ \text{km}$$

Y comprobamos que gráficamente obtenemos los mismos resultados:



4. Datos: $x_0 = 36\ \text{m}$; $a_1 = 3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$; $a_2 = 1{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$

Planteamos la ecuación del movimiento para cada animal e igualamos la posición para hallar el tiempo:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}a_1 t^2 \\ x_2 &= x_0 + \frac{1}{2}a_1 t^2 \end{aligned}\right\} \quad \frac{1}{2}a_1 t^2 = x_0 + \frac{1}{2}a_1 t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2x_0}{a_1 - a_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 36\ \text{m}}{3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} - 1{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}}} = 6\ \text{s}$$

Y calculamos la velocidad de cada animal en el instante t:

$$v_1 = a_1 t = 3{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 6\ \text{s} = 18\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v_2 = a_2 t = 1{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 6\ \text{s} = 6\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

5. a) Podemos identificar el tipo de movimiento con la pendiente. Si esta es constante y distinta de cero, el movimiento será uniformemente acelerado. Mientras que si es nulo, será uniforme. Por lo tanto, tenemos: MRUA, MRU, MRUA y MRUA.

b) Calculamos la aceleración de cada tramo a partir de:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

$$a_1 = \frac{15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{10\ \text{s} - 0\ \text{s}} = 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_2 = \frac{15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{25\ \text{s} - 10\ \text{s}} = 0{,}0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_3 = \frac{25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{30\ \text{s} - 25\ \text{s}} = 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_4 = \frac{0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - 25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{40\ \text{s} - 30\ \text{s}} = -2{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

c) Usamos la ecuación del movimiento para determinar la distancia recorrida:

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\Delta x_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (10\ \text{s})^2 = 75\ \text{m}$$

$$\Delta x_2 = 15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 15\ \text{s} + 0 = 225\ \text{m}$$

$$\Delta x_3 = 15\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 5\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot 2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (5\ \text{s})^2 = 100\ \text{m}$$

$$\Delta x_4 = 25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 10\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot (-2{,}5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}) \cdot (10\ \text{s})^2 =$$

$$= 125\ \text{m}$$

6. Datos: $v = 30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

Primero calculamos el tiempo de caída a partir de la ecuación de la velocidad y luego determinamos la altura. Suponemos que la velocidad inicial es cero.

7. Datos: $y_0 = 80$ m; $v_0 = 4{,}0$ m·s^{-1}; $t_2 = 2{,}0$ s

$$v = v_0 + gt \rightarrow t = \frac{v}{g} = \frac{30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}{9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}} = 3 \text{ s}$$

$$\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = 0 + \frac{1}{2}\cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(3\text{ s})^2 = 46 \text{ m}$$

Elegimos hacia abajo como eje negativo.

a) $$y = y_0 - v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \rightarrow \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t - y_0 = 0$$

$$t = \frac{-4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \pm \sqrt{(4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 80 \text{ m}}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

$$t_1 = 3{,}7 \text{ s}; \quad t_2 = -4{,}5 \text{ s}$$

Nos quedamos con la solución positiva.

b) La velocidad en módulo es:

$$v = v_0 + gt = 4{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} + 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(3{,}7 \text{ s})^2 = 40 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c) $$y = y_0 - v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 =$$

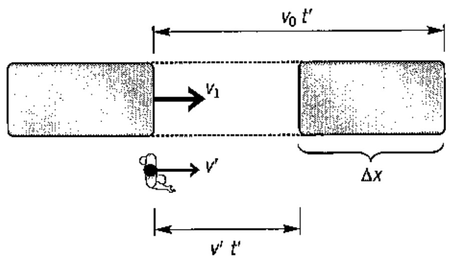
$$= 80 \text{ m} - 4{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 2{,}0 \text{ s} - \frac{1}{2}\cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot$$

$$\cdot(2{,}0 \text{ s})^2 = 52 \text{ m}$$

8. Datos: $\Delta x = 12$ m; $v_1 = 3{,}0$ m·s^{-1}; $t' = 6{,}0$ s; $v_2 = 5{,}0$ m·s^{-1}

a) $$t = \frac{\Delta x}{v_1} = \frac{12 \text{ m}}{3{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} = 4{,}0 \text{ s}$$

b) La distancia que recorre el niño en el tiempo t' es igual a la distancia que recorre el tren en este mismo tiempo menos la longitud del tren:



$$v't' = v_1 t' - \Delta x$$

$$v' = \frac{v_1 t' - \Delta x}{t'} = \frac{3{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 6{,}0 \text{ s} - 12 \text{ m}}{6{,}0 \text{ s}} = 1{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c) $$v'' = v_1 + v_2 = 3{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} + 5{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 8{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$t = \frac{\Delta x}{v''} = \frac{12 \text{ m}}{8{,}0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} = 1{,}5 \text{ s}$$

9. Datos: $v_0 = 13$ m·s^{-1}; $\alpha = 45°$; $h = 2{,}44$ m; $\Delta x = 13$ m

a) $$\Delta x = v_{0_x} t \rightarrow t = \frac{\Delta x}{v_0 \cos\alpha} = \frac{13 \text{ m}}{13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\cos 45°} = 1{,}4 \text{ s}$$

b) $$\Delta y = v_{0_y} t - \frac{1}{2}gt^2 = 13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \text{ sen } 45° - \frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot(1{,}4 \text{ s})^2 = 3{,}26 \text{ m}$$

No mete gol porque $\Delta y > h = 2{,}44$ m.

c) Para calcular la distancia mínima tenemos que imponer que la altura sea h y hallar el tiempo de esta trayectoria:

$$h = v_{0_y} t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \frac{13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{sen } 45° \pm \sqrt{(13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{sen } 45°)^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 2{,}44 \text{ m}}}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 9{,}8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}}$$

$$t_1 = 0{,}3 \text{ s}; \quad t_2 = 1{,}6 \text{ s}$$

Nos quedamos con t_2, ya que al ser un movimiento parabólico, t_1 corresponde al instante en que la pelota pasa por h de subida. Mientras que a nosotros nos interesa cuando está cayendo.

$$\Delta x = v_{0_x} t_2 = 13 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\cos 45°\cdot 1{,}6 \text{ s} = 15 \text{ m}$$

10. Datos: $R = 4{,}0$ cm $= 0{,}04$ m; 800 vueltas; $t = 2{,}0$ min $= 120$ s

a) $$\omega = \frac{800 \text{ vueltas}}{120 \text{ s}}\cdot\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ vuelta}} = 42 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

b) $$v = \omega R = 42 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 0{,}04 \text{ m} = 1{,}7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

c) $$a_c = \omega^2 R = (42 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})^2\cdot 0{,}04 \text{ m} = 71 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

11. Datos: $\Delta t = 2{,}0$ s; $\Delta\varphi = 3{,}0$ vueltas $= 6\pi$ rad

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \rightarrow \alpha = \frac{2\Delta\varphi}{(\Delta t)^2} = \frac{2\cdot 6\pi \text{ rad}}{(2{,}0 \text{ s})^2} = 3\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

Y calculamos la velocidad angular final:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} + 3\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 2{,}0 \text{ s} = 6\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

12. Datos: $R = 40$ cm $= 0{,}40$ m; $\omega_0 = 30$ rpm; $t = 20$ s

a) $$\omega = \frac{30 \text{ rpm}}{60 \text{ s}}\cdot\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} = \pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - \pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}{20 \text{ s}} = -0{,}05\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

b) $$\Delta\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 20 \text{ s} + \frac{1}{2}\cdot$$

$$\cdot(-0{,}05\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1})\cdot(20 \text{ s})^2 = 31{,}42 \text{ rad} = 5 \text{ vueltas}$$

c) $$\omega = \omega_0 + \alpha t = \pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} - 0{,}05\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}\cdot 5{,}0 \text{ s} =$$

$$= 2{,}36 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$v = \omega R = 2{,}36 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot 0{,}40 \text{ m} = 0{,}94 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Zona + (Pág. 253)

— *El movimiento de la Tierra: una composición de movimientos*

La **traslación,** fundamentalmente, es debida a la atracción gravitatoria del Sol con la Tierra; con lo que esta debe seguir una trayectoria con una velocidad (que en nuestro caso no es constante, ya que sigue una elipse) para mantenerse en órbita alrededor del Sol sin caer hacia él.

La **rotación** terrestre se mantiene debido a la conservación del momento angular, ya que la fricción es prácticamente nula en los movimientos de la Tierra.

La **precesión** es debida a la inclinación del eje de rotación sobre el plano de la órbita y también a los efectos gravitatorios de la Luna y el Sol.

La **nutación** es un movimiento que tienen los objetos simétricos que giran sobre su eje. En el caso de la Tierra se debe a las fuerzas externas, como la atracción con el Sol y sobre todo con la Luna.

El origen del **bamboleo de Chandler** no se conoce del todo bien, pero se dice que su causa principal es la variación de la presión y de las corrientes del océano.