# 1 Números reales

## EJERCICIOS PROPUESTOS

**1 y 2. Ejercicios resueltos.**

**3. Calcula la expresión decimal o fraccionaria según corresponda.**

**a)** $\frac{23}{25}$ **b)** $\frac{22}{12}$ **c)** $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ **d)** $45,\widehat{55}$ **e)** $45,1\widehat{5}$

**a)** 0,92

**b)** $1,8\widehat{3}$

**c)** $1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{\frac{3}{2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}=1,\widehat{6}$

**d)** $N=45,\widehat{55}=45,\widehat{5}=45,555...\Rightarrow\begin{cases}10N=455,555...\\N=45,555...\end{cases}\Rightarrow 9N=410\Rightarrow N=\frac{410}{9}$

**e)** $N=45,1\widehat{5}=45,1555...\Rightarrow\begin{cases}100N=4\,515,555...\\10N=451,555...\end{cases}\Rightarrow 90N=4064\Rightarrow N=\frac{4\,064}{90}=\frac{2\,032}{45}$

**4. Indica, para cada número, si es racional o irracional.**

**a)** 1,234 44… **c)** –3, 010 010 001… **e)** $2-\sqrt{49}$

**b)** 1,232 323… **d)** $1+\sqrt{2}$ **f)** $-\sqrt{2+\sqrt{4}}$

**a)** Racional, es un número decimal periódico.

**b)** Racional, es un número decimal periódico.

**c)** Irracional, es un número decimal no periódico.

**d)** Irracional

**e)** Racional, $2-\sqrt{49}=2-7=-5$.

**f)** Racional, $-\sqrt{2+\sqrt{4}}=-\sqrt{2+2}=-\sqrt{4}=-2$.

**5. Calcula los dos valores de *x* que cumplen la siguiente condición: $3x-\frac{1}{2}-4|x-3|=5$.**

$$3x-\frac{1}{2}-4|x-3|=\begin{cases}3x-\frac{1}{2}-4\left(-(x-3)\right) & \text{si } x-3<0\\3x-\frac{1}{2}-4(x-3) & \text{si } x-3\geq 0\end{cases}=\begin{cases}7x-\frac{25}{2} & \text{si } x<3\\-x+\frac{23}{2} & \text{si } x-3\geq 0\end{cases}$$

Si $x<3$, tenemos $7x-\frac{25}{2}=5\Rightarrow x=\frac{35}{14}=\frac{5}{2}$, que es una solución válida.

Si $x\geq 3$, tenemos $-x+\frac{23}{2}=5\Rightarrow x=\frac{13}{2}$, que es una solución válida.

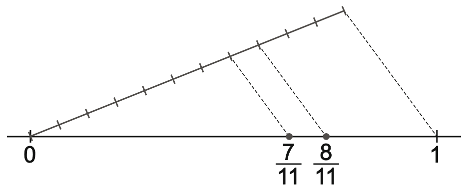
**6. Un informe sobre el uso de bicicletas en la población juvenil de una localidaddice que exactamente el $45,\widehat{45}$ % de los jóvenes utilizan la bicicleta por lo menos un día a la semana. Sabiendo que la población juvenil de esa localidad es menor que 10 000 y mayor que 9990, ¿cuántos exactamente utilizan la bicicleta?**

$$45,\widehat{45} = \frac{4545-45}{99} = \frac{4500}{99} = \frac{500}{11} \Rightarrow \frac{45,\widehat{45}}{100} = \frac{5}{11}$$

Los $\frac{5}{11}$ de los jóvenes de la localidad usan la bicicleta por lo menos un día a la semana, por tanto, el número de jóvenes de la localidad debe ser múltiplo de 11. El único número entre 9 990 y 10 000 que es múltiplo de 11 es 9999, con lo que hay 9999 jóvenes en la localidad y 4545 contestaron que usan la bicicleta.

**7. Ejercicio resuelto.**

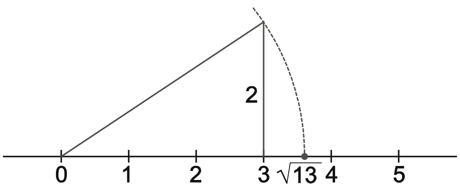
**8. Representa $\frac{7}{11}$ y $\frac{8}{11}$. Halla tres números fraccionarios comprendidos entre ellos.**



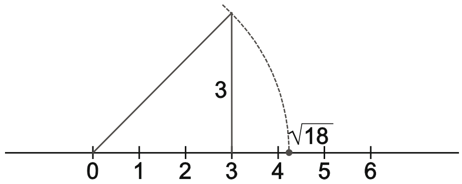

$\frac{7}{11} = \frac{28}{44}$ y $\frac{8}{11} = \frac{32}{44}$, por tanto, entre ellos están $\frac{29}{44}$, $\frac{30}{44} = \frac{15}{22}$ y $\frac{31}{44}$.

**9. Escribe los números 13 y 18 como suma de dos cuadrados y representa $\sqrt{13}$ y $\sqrt{18}$ en la recta real.**

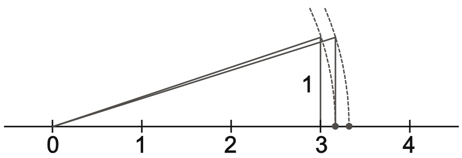
$13 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow \sqrt{13} = \sqrt{2^2 + 3^2}$




$18 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow \sqrt{18} = \sqrt{3^2 + 3^2}$




**10. ¿Qué números reales son los representados en la figura?**




$x = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ e $y = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

**11. Ejercicio resuelto.**

**12. Da las aproximaciones por defecto y por exceso y redondea los siguientes números con dos, tres y cuatro cifras decimales.**

a) $\frac{12}{7}$ b) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ c) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

a)

| Aprox. defecto | Aprox. exceso | Redondeo |
|---|---|---|
| 1,71 | 1,72 | 1,71 |
| 1,714 | 1,715 | 1,714 |
| 1,7142 | 1,7143 | 1,7143 |

b)

| Aprox. defecto | Aprox. exceso | Redondeo |
|---|---|---|
| 1,55 | 1,56 | 1,55 |
| 1,553 | 1,554 | 1,554 |
| 1,5537 | 1,5538 | 1,5538 |

c)

| Aprox. defecto | Aprox. exceso | Redondeo |
|---|---|---|
| 1,61 | 1,62 | 1,62 |
| 1,618 | 1,619 | 1,618 |
| 1,6180 | 1,6181 | 1,6180 |

**13. Acota el error relativo cometido al aproximar $\sqrt{3}$ por 1,73.**

$E_r = \frac{\left|\sqrt{3}-1{,}73\right|}{\sqrt{3}} < \frac{1{,}74-1{,}73}{1{,}73} \simeq 0{,}006$. La cota del error relativo es del orden del 0,6 %.

**14. Calcula el error absoluto y la cota del error relativo al redondear $e^{\pi}$ a las milésimas.**

El valor redondeado es $e^{\pi} \simeq 23{,}141$, que coincide con la aproximación por exceso.

El error absoluto es $E_a = \left|e^{\pi} - 23{,}141\right| = \left|23{,}140\,069... - 23{,}141\right| = 0{,}000\,307...$

La cota del error relativo es $E_r = \frac{E_a}{e^{\pi}} < \frac{0{,}000\,307...}{23{,}140} = 0{,}000\,013...$, es decir, del orden del 0,001 %.

**15 y 16. Ejercicios resueltos.**

**17. Calcula aproximaciones de tres cifras por exceso y por defecto de $2a + 3b - 5$ sabiendo que:**

$$2{,}023 < a < 2{,}024 \quad \text{y} \quad -0{,}251 < b < -0{,}250$$

Aproximación por defecto: $2 \cdot 2{,}023 + 3(-0{,}251) - 5 = -1{,}707$

Aproximación por exceso: $2 \cdot 2{,}024 + 3(-0{,}250) - 5 = -1{,}702$

**18. Con la calculadora halla aproximaciones, por defecto y por exceso, con tres y cuatro cifras decimales, para los números $\sqrt{3\sqrt{2}}$ y $1+2\sqrt{3}$, así como para su suma, diferencia, producto y cociente.**

| | Calculadora | Aprox. defecto 3 decimales | Aprox. exceso 3 decimales | Aprox. defecto 4 decimales | Aprox. exceso 4 decimales |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sqrt{3\sqrt{2}}$ | 2,059 767… | 2,059 | 2,060 | 2,059 7 | 2,059 8 |
| $1+2\sqrt{3}$ | 4,644 101… | 4,464 | 4,465 | 4,464 1 | 4,464 2 |
| $\sqrt{3\sqrt{2}}+\left(1+2\sqrt{3}\right)$ | 6,523 868… | 6,523 | 6,524 | 6,523 8 | 6,523 9 |
| $\sqrt{3\sqrt{2}}-\left(1+2\sqrt{3}\right)$ | –2,404 334… | –2,405 | –2,404 | –2,404 4 | –2,404 3 |
| $\sqrt{3\sqrt{2}}\left(1+2\sqrt{3}\right)$ | 9,195 009… | 9,195 | 9,196 | 9,195 0 | 9,195 1 |
| $\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{1+2\sqrt{3}}$ | 0,461 406… | 0,461 | 0,462 | 0,461 4 | 0,461 5 |

**19. Se quiere vallar un campo rectangular siendo $\sqrt{2}$ el cociente de sus dimensiones.**

**a)** ¿Cuánto vale el cociente entre la diagonal y el lado menor?

**b)** La diagonal mide 48 m. Calcula el precio que se deberá pagar si cada metro de valla cuesta 25 €.

**a)** Si $a$ es el lado mayor y $b$ el menor, se sabe que $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}$.

La diagonal es $D=\sqrt{a^2+b^2}$, por tanto, el cociente entre la diagonal y el lado menor es

$$\frac{D}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$$

**b)** Tenemos $\dfrac{D}{b}=\sqrt{3}\Rightarrow b=\dfrac{D}{\sqrt{3}}=\dfrac{48}{\sqrt{3}}$ y $\dfrac{a}{b}=\sqrt{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}b=\dfrac{48\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, por tanto, el perímetro del campo es $P=2a+2b=\dfrac{96+96\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ y el coste del vallado será $C=25P=25\cdot\dfrac{96+96\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\simeq 3345$ €.

**20. Simplifica el valor de las siguientes expresiones.**

**a)** $\dfrac{(-2)^{40}(-6)^{-15}}{(-18)^{35}}$

**b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\dfrac{1}{8}$

**a)** $\dfrac{(-2)^{40}(-6)^{-15}}{(-18)^{35}}=\dfrac{2^{40}\left(-6^{-15}\right)}{-18^{35}}=\dfrac{2^{40}}{6^{15}\cdot 18^{35}}=\dfrac{2^{40}}{(2\cdot 3)^{15}\left(2\cdot 3^2\right)^{35}}=\dfrac{2^{40}}{2^{15}\cdot 3^{15}\cdot 2^{35}\cdot 3^{70}}=\dfrac{2^{40}}{2^{50}\cdot 3^{85}}=\dfrac{1}{2^{10}\cdot 3^{85}}$

**b)** $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{2}{9}\right)^{-1}\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2^4}\cdot\dfrac{3^2}{2}\cdot\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{3^2}{2^8}$

**21. Determina si las igualdades son verdaderas o falsas.**

**a)** $\dfrac{3^{-3}-5^{-1}}{7^{-2}-5^{-3}}=-\dfrac{13475}{1026}$

**b)** $\dfrac{x^2y^{-1}}{x^3y^2}=\dfrac{1}{xy^3}$

**a)** $\dfrac{3^{-3}-5^{-1}}{7^{-2}-5^{-3}}=\dfrac{\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{49}-\dfrac{1}{125}}=\dfrac{-\dfrac{22}{135}}{\dfrac{76}{6125}}=-\dfrac{22}{135}\cdot\dfrac{6125}{76}=-\dfrac{134750}{10260}=-\dfrac{13475}{1026}$, la igualdad es verdadera.

**b)** $\dfrac{x^2y^{-1}}{x^3y^2}=\dfrac{x^2}{x^3y^2y}=\dfrac{1}{xy^3}$, la igualdad es verdadera.

**22. Realiza las siguientes operaciones.**

**a)** $2^2+(-2)^3-2^{-2}+(-2)^{-3}-2^0$

**b)** $\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^2 5^{-1}$

**c)** $16^{\frac{1}{4}}+27^{\frac{1}{3}}-25^{\frac{1}{2}}$

**d)** $\frac{\sqrt[5]{a^{-3}}\cdot a^{-2}}{a\sqrt[3]{a}}$

**a)** $2^2+(-2)^3-2^{-2}+(-2)^{-3}-2^0=4-8-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-1=-\frac{43}{8}s$

**b)** $\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^2 5^{-1}=\frac{8}{125}-\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{5}=\frac{8}{125}-\frac{1}{125}=\frac{7}{125}$

**c)** $16^{\frac{1}{4}}+27^{\frac{1}{3}}-25^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{27}-\sqrt{25}=2+3-5=0$

**d)** $\frac{\sqrt[5]{a^{-3}}\cdot a^{-2}}{a\sqrt[3]{a}}=\frac{a^{-\frac{3}{5}}\cdot a^{-2}}{a\cdot a^{\frac{1}{3}}}=\frac{a^{-\frac{13}{5}}}{a^{\frac{4}{3}}}=a^{-\frac{59}{15}}=\frac{1}{\sqrt[15]{a^{59}}}$

**23 y 24. Ejercicios resueltos.**

**25. Efectúa las siguientes operaciones.**

**a)** $\sqrt{8}\sqrt{27}$

**b)** $\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{200}}$

**c)** $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{392}$

**d)** $\frac{\sqrt[4]{2187}}{\sqrt{108}}$

**e)** $\left(\frac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{32}}\right)\sqrt[6]{2}$

**f)** $\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{8}\right)}{\sqrt[3]{4}}$

**a)** $\sqrt{8}\sqrt{27}=\sqrt{2^3\cdot 3^3}=2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3}=6\sqrt{6}$

**b)** $\frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{200}}=\sqrt[3]{\frac{2^9}{2^3\cdot 5^2}}=\sqrt[3]{\frac{2^6}{5^2}}=\frac{2^2}{\sqrt[3]{5^2}}=\frac{4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}\sqrt[3]{5}}=\frac{4\sqrt[3]{5}}{5}$

**c)** $\sqrt[3]{4}\sqrt[5]{392}=\sqrt[3]{2^2}\sqrt[5]{2^3\cdot 7^2}=\sqrt[15]{2^{10}}\sqrt[15]{2^9\cdot 7^6}=\sqrt[15]{2^{19}\cdot 7^6}=2\sqrt[15]{2^4\cdot 7^6}$

**d)** $\frac{\sqrt[4]{2187}}{\sqrt{108}}=\frac{\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt{2^2\cdot 3^3}}=\frac{\sqrt[4]{3^7}}{\sqrt[4]{2^4\cdot 3^6}}=\sqrt[4]{\frac{3}{2^4}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

**e)** $\left(\frac{\sqrt{12}}{\sqrt[3]{32}}\right)\sqrt[6]{2}=\left(\frac{\sqrt{2^2\cdot 3}}{\sqrt[3]{2^5}}\right)\sqrt[6]{2}=\left(\frac{\sqrt[6]{2^6\cdot 3^3}}{\sqrt[6]{2^{10}}}\right)\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{2^3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

**f)** $\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{8}\right)}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt{2^{-1}}\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[12]{2^{-6}}\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}=\sqrt[12]{2^{-5}}=\frac{1}{\sqrt[12]{2^5}}=\frac{\sqrt[12]{2^7}}{\sqrt[12]{2^5}\sqrt[12]{2^7}}=\frac{\sqrt[12]{2^7}}{2}$

**26. Opera y simplifica las siguientes expresiones.**

**a)** $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{8}}$ **b)** $\left[\left(\sqrt{2^4\sqrt[3]{2^8}}\right)^2\right]^3$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$

**a)** $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{8}}=\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[6]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2^3}}=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt[16]{2^8\cdot 2^4\cdot 2^2\cdot 2}}{\sqrt[4]{2^2\cdot 2}}=\dfrac{\sqrt[16]{2^{15}}}{\sqrt[4]{2^3}}=\sqrt[16]{\dfrac{2^{15}}{2^{12}}}=\sqrt[16]{2^3}$

**b)** $\left[\left(\sqrt{2^4\sqrt[3]{2^8}}\right)^2\right]^3=\left[\left(\sqrt[6]{2^{12}\cdot 2^8}\right)^2\right]^3=\left(\sqrt[6]{2^{20}}\right)^6=2^{20}$

**27. Extrae de la raíz todos los factores que sea posible.**

**a)** $\sqrt{2^8\cdot 3^5\cdot 5^7}$ **b)** $\sqrt[3]{a^5b^{12}c^7}$ **c)** $\sqrt[5]{\dfrac{2^6\cdot 3^{12}}{5^{20}}}$

**a)** $\sqrt{2^8\cdot 3^5\cdot 5^7}=2^4\cdot 3^2\cdot 5^3\sqrt{3\cdot 5}$ **b)** $\sqrt[3]{a^5b^{12}c^7}=ab^4c^2\sqrt[3]{a^2c}$ **c)** $\sqrt[5]{\dfrac{2^6\cdot 3^{12}}{5^{20}}}=\dfrac{2\cdot 3^2}{5^4}\sqrt[5]{2\cdot 3^2}$

**28. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.**

**a)** $\sqrt[3]{24}-\sqrt{2}-6\sqrt[3]{3}+\sqrt{32}$ **c)** $6\sqrt{200}+2\sqrt{50}-3\sqrt{18}$

**b)** $\sqrt{50}-\sqrt{\dfrac{18}{4}}+\sqrt{\dfrac{72}{25}}$ **d)** $\sqrt{5a^2}-\sqrt{80a^2}+\sqrt{20a^4}$

**a)** $\sqrt[3]{24}-\sqrt{2}-6\sqrt[3]{3}+\sqrt{32}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\sqrt{2}-6\sqrt[3]{3}+\sqrt{2^5}=2\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}-6\sqrt[3]{3}+4\sqrt{2}=-4\sqrt[3]{3}+3\sqrt{2}$

**b)** $\sqrt{50}-\sqrt{\dfrac{18}{4}}+\sqrt{\dfrac{72}{25}}=\sqrt{2\cdot 5^2}-\sqrt{\dfrac{2\cdot 3^2}{2^2}}+\sqrt{\dfrac{2^3\cdot 3^2}{5^2}}=5\sqrt{2}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+\dfrac{6}{5}\sqrt{2}=\dfrac{47}{10}\sqrt{2}$

**c)** $6\sqrt{200}+2\sqrt{50}-3\sqrt{18}=6\sqrt{2^3\cdot 5^2}+2\sqrt{2\cdot 5^2}-3\sqrt{2\cdot 3^2}=60\sqrt{2}+10\sqrt{2}-9\sqrt{2}=61\sqrt{2}$

**d)** $\sqrt{5a^2}-\sqrt{80a^2}+\sqrt{20a^4}=\sqrt{5a^2}-\sqrt{2^4\cdot 5a^2}+\sqrt{2^2\cdot 5a^4}=a\sqrt{5}-4a\sqrt{5}+2a^2\sqrt{5}=\left(2a^2-3a\right)\sqrt{5}=a(2a-3)\sqrt{5}$

**29. Realiza las siguientes operaciones.**

**a)** $2\sqrt{180}+\dfrac{3}{5}\sqrt{125}+\sqrt{5}$ **b)** $\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{6}{5}}}$ **c)** $2187^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{2}}$

**a)** $2\sqrt{180}+\dfrac{3}{5}\sqrt{125}+\sqrt{5}=2\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}+\dfrac{3}{5}\sqrt{5^3}+\sqrt{5}=12\sqrt{5}+3\sqrt{5}+\sqrt{5}=16\sqrt{5}$

**b)** $\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{6}{5}}}=\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{18}{5}}}=2^{-\frac{53}{30}}=\dfrac{1}{\sqrt[30]{2^{53}}}=\dfrac{1}{2\sqrt[30]{2^{23}}}=\dfrac{\sqrt[30]{2^7}}{2\sqrt[30]{2^{23}}\sqrt[30]{2^7}}=\dfrac{\sqrt[30]{2^7}}{4}$

**c)** $2187^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3^7}+\sqrt{3^3}=27\sqrt{3}+3\sqrt{3}=30\sqrt{3}$

**30. Racionaliza las siguientes expresiones.**

**a)** $\frac{6}{2\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{3}{5\sqrt[5]{81}}$ **c)** $\frac{2}{1+2\sqrt{3}}$ **d)** $\frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{8}}$

**a)** $\frac{6}{2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$

**b)** $\frac{3}{5\sqrt[5]{81}}=\frac{3}{5\sqrt[5]{3^4}}=\frac{3\sqrt[5]{3}}{5\sqrt[5]{3^4}\sqrt[5]{3}}=\frac{3\sqrt[5]{3}}{15}=\frac{\sqrt[5]{3}}{5}$

**c)** $\frac{2}{1+2\sqrt{3}}=\frac{2\left(1-2\sqrt{3}\right)}{\left(1+2\sqrt{3}\right)\left(1-2\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(1-2\sqrt{3}\right)}{1-12}=-\frac{2-4\sqrt{3}}{11}=\frac{4\sqrt{3}-2}{11}$

**d)** $\frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{8}}=\frac{10\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}=\frac{10\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}{12-8}=\frac{5\left(2\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)}{2}=\frac{10\sqrt{3}+\sqrt{8}}{2}=\frac{10\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{3}+\sqrt{2}$

**31. Ejercicio interactivo.**

**32. Ejercicio resuelto.**

**33. Calcula $A\cup B$ y $A\cap B$ siendo:**

**a)** $A=(-1,4)$ y $B=[0,5]$ **b)** $A=(2,+\infty)$ y $B=(-\infty,3]$

**a)** $A\cup B=(-1,5]$ y $\mathrm{A}\cap \mathrm{B}=[0,4)$ **b)** $A\cup B=(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$ y $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=(2,3]$

**34. Expresa, si es posible, mediante un único entorno abierto cada uno de los siguientes conjuntos.**

**a)** $(-2,10)$ **b)** $-3\le x\le 7$ **c)** $\left[\frac{1}{2},3\right]$ **d)** $(-a,a)$

**a)** Se puede expresar como el entorno abierto de centro $\frac{-2+10}{2}=4$ y radio $10-4=6$, es decir, $E(4,6)$.

**b)** Se trata del intervalo cerrado [–3, 7], por lo que no se puede expresar mediante un entorno abierto. Sí se puede expresar mediante el entorno cerrado $E[2,5]$.

**c)** Se trata de un intervalo cerrado, por lo que no se puede expresar mediante un entorno abierto. Sí se puede expresar mediante el entorno cerrado $E\left[\frac{7}{4},\frac{5}{4}\right]$.

**d)** Se puede expresar como el entorno abierto $E(0,a)$.

**35. Expresa mediante entornos los siguientes conjuntos.**

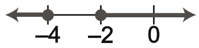
**a)** $\{x\in\mathbb{R}$ tales que $|x|<5\}$ **b)** $\{x\in\mathbb{R}$ tales que $|x+2|<4\}$

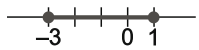
**a)** $\{x\in\mathbb{R}$ tales que $|x|<5\}=E(0,5)$ **b)** $\{x\in\mathbb{R}$ tales que $|x+2|<4\}=E(-2,4)$

**36. Representa y expresa como intervalos los siguientes conjuntos de números reales.**

**a)** $|x-2|<2$ **b)** $|x+3|\geq 1$ **c)** $|x+1|\leq 2$

**a)** $(0, 4)$ **b)** $(-\infty,-4]\cup[-2,+\infty)$ **c)** $[-3,1]$


**37. Ejercicio resuelto.**

**38. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado en notación científica.**

**a)** $0{,}000\,025\cdot 0{,}003\,2$ **b)** $0{,}002\,5 : 12\,500\,000$ **c)** $0{,}000\,000\,000\,012^{20}$ **d)** $2{,}4\cdot 10^{21}+33{,}2\cdot 10^{22}$

**a)** $0{,}000\,025\cdot 0{,}003\,2=2{,}5\cdot 10^{-5}\cdot 3{,}2\cdot 10^{-3}=8\cdot 10^{-8}$

**b)** $0{,}002\,5 : 12\,500\,000=2{,}5\cdot 10^{-3} : 1{,}25\cdot 10^{7}=2\cdot 10^{-10}$

**c)** $0{,}000\,000\,000\,012^{20}=\left(1{,}2\cdot 10^{-11}\right)^{20}\simeq 38{,}337\,6\cdot 10^{-220}=3{,}833\,76\cdot 10^{-219}$

**d)** $2{,}4\cdot 10^{21}+33{,}2\cdot 10^{22}=2{,}4\cdot 10^{21}+332\cdot 10^{21}=334{,}4\cdot 10^{21}=3{,}344\cdot 10^{23}$

**39. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado con la precisión adecuada.**

**a)** $25{,}35+7723{,}1+2{,}035-222{,}256$ **b)** $2{,}25\cdot 1{,}237-230{,}40\cdot 0{,}024+15{,}01\cdot 23{,}11$

**a)** $25{,}35+7723{,}1+2{,}035-222{,}256=7528{,}229\simeq 7528{,}2$

**b)** $2{,}25\cdot 1{,}237-230{,}40\cdot 0{,}024+15{,}01\cdot 23{,}11=2{,}78-5{,}53+346{,}88=344{,}13$

**40. Indica en cada caso el número de cifras significativas.**

**a)** 2,035 **b)** 0,000 607 **c)** 505,000 75

**a)** 4 cifras significativas **b)** 3 cifras significativas **c)** 8 cifras significativas

**41. Se quiere medir el total del área de dos parcelas, una rectangular de dimensiones 123,2 m y 98 m, y otra circular de radio 44,6 m. Estima el área con la precisión que consideres adecuada.**

$123{,}2\cdot 98+44{,}6^2\pi\simeq 12\,074+6249=18\,323\ \text{m}^2$.

**42. Ejercicio interactivo.**

**43 a 54. Ejercicios resueltos.**

# EJERCICIOS

## Números racionales e irracionales

**55. Di si los siguientes números son naturales, enteros, racionales o reales.**

**a)** $\frac{28}{7}$ **c)** $-\frac{1}{25}$ **e)** 19

**b)** –12 **d)** $\frac{1+\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$ **f)** $-\frac{1}{\sqrt{24}}$

**a)** $\frac{28}{7}=4$ Natural y, por tanto, entero, racional y real.

**b)** –12 Entero y, por tanto, racional y real. No es natural.

**c)** $-\frac{1}{25}$ Racional y, por tanto, real. No es natural ni entero.

**d)** $\frac{1+\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}$ Racional y, por tanto, real. No es natural ni entero.

**e)** 19 Natural y, por tanto, entero, racional y real.

**f)** $-\frac{1}{\sqrt{24}}$ Real. No es natural, ni entero ni racional.

**56. Calcula las expresiones decimales de los siguientes números racionales.**

$\mathbf{\frac{13}{25}}$ $\mathbf{\frac{125}{9}}$ $\mathbf{\frac{5}{18}}$ $\mathbf{\frac{4}{7}}$

$\frac{13}{25}=0{,}52$ $\frac{125}{9}=13{,}\widehat{8}$ $\frac{5}{18}=0{,}2\widehat{7}$ $\frac{4}{7}=0{,}\widehat{571428}$

**57. Ordena de menor a mayor los siguientes números racionales.**

$\mathbf{\frac{4}{5}}$ $\mathbf{\frac{19}{24}}$ $\mathbf{\frac{10}{11}}$ $\mathbf{\frac{7}{8}}$

**Realiza el ejercicio de dos formas diferentes:**

**a)** Calculando las expresiones decimales de los números racionales y comparándolas.

**b)** Calculando expresiones fraccionarias equivalentes a las dadas con igual denominador y comparándolas.

**a)** $\frac{4}{5}=0{,}8$ ; $\frac{19}{24}=0{,}791\widehat{6}$ ; $\frac{10}{11}=0{,}\widehat{90}$ y $\frac{7}{8}=0{,}875 \Rightarrow \frac{19}{24}<\frac{4}{5}<\frac{7}{8}<\frac{10}{11}$

**b)** $\frac{4}{5}=\frac{1056}{1320}$ ; $\frac{19}{24}=\frac{1045}{1320}$ ; $\frac{10}{11}=\frac{1200}{1320}$ y $\frac{7}{8}=\frac{1155}{1320} \Rightarrow \frac{19}{24}<\frac{4}{5}<\frac{7}{8}<\frac{10}{11}$

**58. Halla dos números racionales comprendidos entre $\mathbf{\frac{21}{31}}$ y $\mathbf{\frac{22}{31}}$.**

Respuesta abierta. Por ejemplo: $\frac{21}{31}=\frac{63}{93}$ y $\frac{22}{31}=\frac{66}{93}$, por lo que, entre ellos están $\frac{64}{93}$ y $\frac{65}{93}$.

**59. Calcula las expresiones fraccionarias de los siguientes números racionales.**

**a)** 21,333…

**b)** 10,101 010…

**c)** 21,125

**d)** 5,812 512 512 5…

**a)** $21,\widehat{3} = \frac{213-21}{9} = \frac{192}{9} = \frac{64}{3}$

**b)** $10,\widehat{10} = \frac{1010-10}{99} = \frac{1000}{99}$

**c)** $21{,}125 = \frac{21125}{1000} = \frac{169}{8}$

**d)** $5,8\widehat{125} = \frac{58125-58}{9990} = \frac{58067}{9990}$

**60. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales. Para los racionales, indica su expresión mediante una fracción irreducible.**

**a)** 12,121 314 15…

**b)** 12,121 212…

**c)** 12,012 121 2…

**d)** 1,010 010 001…

**e)** 1,123 123 123…

**f)** 0,001 002 003…

**a)** Irracional

**b)** Racional, $12,\widehat{12} = \frac{1200}{99} = \frac{400}{33}$

**c)** Racional, $12,0\widehat{12} = \frac{11892}{990} = \frac{1982}{165}$

**d)** Irracional

**e)** Racional, $1,\widehat{123} = \frac{1122}{999} = \frac{374}{333}$

**f)** Irracional

**61. Calcula de forma exacta el resultado de:**

$$\mathbf{0,\widehat{12} - 2\left(0,\widehat{1} - 0,0\widehat{20}\right) + 0,0\widehat{3}}$$

$0,\widehat{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$; $0,\widehat{1} = \frac{1}{9}$; $0,0\widehat{20} = \frac{20}{990} = \frac{2}{99}$ y $0,0\widehat{3} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$, por tanto, tenemos:

$$0,\widehat{12} - 2\left(0,\widehat{1} - 0,0\widehat{20}\right) + 0,0\widehat{3} = \frac{4}{33} - 2\left(\frac{1}{9} - \frac{2}{99}\right) + \frac{1}{30} = \frac{4}{33} - \frac{2}{11} + \frac{1}{30} = -\frac{3}{110}$$

## Valor absoluto

**62. Calcula el valor de las siguientes expresiones en los puntos que se indican.**

**a)** $2 + |2x-3| - |x-1|$ en $x = 2$

**b)** $2x - 2 - |2x-5|$ en $x = -3$

**c)** $\dfrac{2x - 3|3x-1| + |2x-3|}{2|x| - 3|x-4|}$ en $x = -1$

**a)** $2 + |2\cdot 2 - 3| - |2-1| = 2 + 1 - 1 = 2$

**b)** $2(-3) - 2 - |2(-3) - 5| = -6 - 2 - 11 = -19$

**c)** $\dfrac{2(-1) - 3|3(-1)-1| + |2(-1)-3|}{2|-1| - 3|-1-4|} = \dfrac{-2-3\cdot 4+5}{2-3\cdot 5} = \dfrac{-9}{-13} = \dfrac{9}{13}$

**63. Desarrolla el valor de las siguientes expresiones omitiendo los valores absolutos.**

**a)** $|2x-4|+x$ **b)** $x+|2x|$ **c)** $|x-1|+x$ **d)** $(x-2)^2-|x-2|$

**a)** $|2x-4|+x=\begin{cases}-2x+4+x & \text{si } 2x-4<0\\ 2x-4+x & \text{si } 2x-4\geq 0\end{cases}=\begin{cases}4-x & \text{si } x<2\\ 3x-4 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

**b)** $x+|2x|=\begin{cases}x-2x & \text{si } 2x<0\\ x+2x & \text{si } 2x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}-x & \text{si } x<0\\ 3x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

**c)** $|x-1|+x=\begin{cases}-x+1+x & \text{si } x-1<0\\ x-1+x & \text{si } x-1\geq 0\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{si } x<1\\ 2x-1 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

**d)** $(x-2)^2-|x-2|=\begin{cases}x^2-4x+4+x-2 & \text{si } x-2<0\\ x^2-4x+4-x+2 & \text{si } x-2\geq 0\end{cases}=\begin{cases}x^2-3x+2 & \text{si } x<2\\ x^2-5x+6 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

**64. Calcula los valores de *x* que satisfacen las siguientes igualdades.**

**a)** $|2x-1|-x=2$ **b)** $|3x-1|-2x=11$ **c)** $\left|x-\frac{1}{2}\right|+2x=\frac{1}{2}$ **d)** $|x-2|+|x-3|=9$

**a)** $|2x-1|-x=2\Rightarrow\begin{cases}-2x+1-x=2 & \text{si } 2x-1<0\\ 2x-1-x=2 & \text{si } 2x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{3} & \text{si } x<\frac{1}{2}\\ x=3 & \text{si } x\geq\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=-\frac{1}{3},\ x=3$

**b)** $|3x-1|-2x=11\Rightarrow\begin{cases}-3x+1-2x=11 & \text{si } 3x-1<0\\ 3x-1-2x=11 & \text{si } 3x-1\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2 & \text{si } x<\frac{1}{3}\\ x=12 & \text{si } x\geq\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow x=-2,\ x=12$

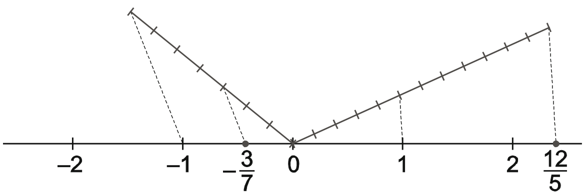
**c)** $\left|x-\frac{1}{2}\right|+2x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}-x+\frac{1}{2}+2x=\frac{1}{2} & \text{si } x-\frac{1}{2}<0\\ x-\frac{1}{2}+2x=\frac{1}{2} & \text{si } x-\frac{1}{2}\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{si } x<\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{3} & \text{si } x\geq\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=0$

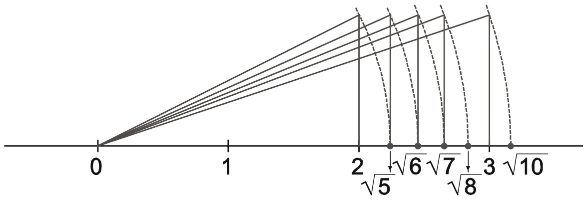
**d)** $|x-2|+|x-3|=9\Rightarrow\begin{cases}-x+2-x+3=9 & \text{si } x<2\\ x-2-x+3=9 & \text{si } 2\leq x<3\\ x-2+x-3=9 & \text{si } x\geq 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2 & \text{si } x<2\\ 0=8 & \text{si } 2\leq x<3\\ x=7 & \text{si } x\geq 3\end{cases}\Rightarrow x=-2,\ x=7$

## Representación de números reales

**65. Representa los siguientes números reales.**

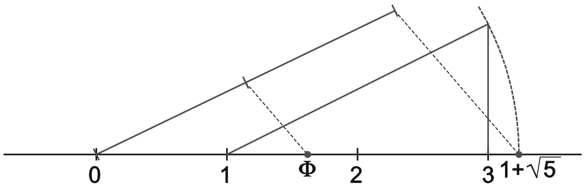
**a)** $\frac{12}{5}$ **b)** $\sqrt{6}$ **c)** $-\frac{3}{7}$ **d)** $\sqrt{7}$ **e)** $\sqrt{10}$ **f)** $\sqrt{8}$




**66. Representa el número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.**

Representamos primero $1+\sqrt{5}$ y a continuación dividimos el segmento de longitud $1+\sqrt{5}$ en dos partes iguales.




## Aproximaciones y errores

**67. Da la expresión aproximada que se indica en cada uno de los siguientes casos.**

**a)** $\frac{13}{11}$ aproximando por exceso con dos cifras decimales.

**b)** $\sqrt{123}$ aproximando por defecto con tres cifras decimales.

**c)** $\pi + \pi^2$ redondeando con tres cifras decimales.

**a)** $\frac{13}{11} \simeq 1{,}19$ **b)** $\sqrt{123} \simeq 11{,}090$ **c)** $\pi + \pi^2 \simeq 13{,}011$

**68. Escribe aproximaciones por exceso y por defecto con tres cifras decimales de los números.**

**a)** $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{2\sqrt{2}}$ **c)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ **d)** $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

| | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{2\sqrt{2}}$ | $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ | $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Exceso | 1,415 | 1,682 | 1,835 | 1,916 |
| Defecto | 1,414 | 1,681 | 1,834 | 1,915 |

**69. Indica el número de cifras significativas en cada caso.**

**a)** 22,3 **b)** 0,045 **c)** 1,002 **d)** 230,025

**a)** Tres **b)** Dos **c)** Cuatro **d)** Seis

**70. Halla los siguientes redondeos.**

**a)** $\frac{3}{46}$ con tres cifras significativas

**b)** $\sqrt{17}$ con cuatro cifras significativas

**c)** $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ con cuatro cifras significativas

**a)** $\frac{3}{46} \simeq 0{,}0652$ **b)** $\sqrt{17} \simeq 4{,}123$ **c)** $\sqrt{2}+2\sqrt{3} \simeq 4{,}878$

**71. Calcula y da el resultado de acuerdo con las cifras significativas de las cantidades que intervienen.**

**a)** 12,3 + 0,34 – 14,25

**b)** 0,453 · 32,42

**c)** 0,003 4 · 0,000 045

**d)** 10,5 · 23,33– 5,003 · 10,15

**e)** 2,34 – 5,007 · 2,75

**f)** 15,03 : 2,6

**a)** 12,3 + 0,34 – 14,25= –1,6

**b)** 0,453 · 32,42 = 14,7

**c)** 0,003 4 · 0,000 045 = 0,000 000 15

**d)** 10,5 · 23,33– 5,003 · 10,15= 194

**e)** 2,34 – 5,007 · 2,75 = –11,4

**f)** 15,03 : 2,6 = 5,8

**72. Calcula los errores absoluto y relativo que se cometen al tomar 3,29 como valor de $\frac{23}{7}$.**

$$E_a = \left|\frac{23}{7} - 3{,}29\right| = \left|\frac{23}{7} - \frac{329}{100}\right| = \frac{3}{700} \text{ y } E_r = \frac{E_a}{\frac{23}{7}} = \frac{3}{2300} \simeq 0{,}0013$$

**73. Calcula los errores absoluto y relativo cometidos al tomar como valor de $\frac{120}{11}$ la aproximación 10,91.**

$$E_a = \left|\frac{120}{11} - 10{,}91\right| = \left|\frac{120}{11} - \frac{1091}{100}\right| = \frac{1}{1100}$$

$$E_r = \frac{E_a}{\frac{120}{11}} = \frac{1}{12000}$$

**74. Acota el error relativo que se comete al tomar como valor de $\sqrt{5}$ la aproximación 2,236.**

$E_r = \frac{\left|\sqrt{5} - 2{,}236\right|}{\sqrt{5}} < \frac{2{,}237 - 2{,}236}{2{,}236} \simeq 0{,}0004$. La cota es del orden del 0,04 %.

**75. Acota el error relativo que se comete al tomar $\sqrt{15}$ con tres cifras significativas.**

$\sqrt{15} \simeq 3{,}87 \Rightarrow E_r = \frac{\left|\sqrt{15} - 3{,}87\right|}{\sqrt{15}} < \frac{3{,}88 - 3{,}87}{3{,}87} \simeq 0{,}0026$. La cota es del orden del 2,6 %.

**76. Calcula el valor de las siguientes expresiones.**

a) $4\left(2\cdot 3^{-2}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

c) $\frac{2\cdot 3^2+3\cdot 2^2}{3^{-2}+6^{-1}}$

d) $\left(2^6\right)^{\frac{1}{2}}$

e) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4}\cdot 3^{-3}}$

f) $(-2)^0+(-2)^1+...+(-2)^8$

a) $4\left(2\cdot 3^{-2}\right)^{-2}=4\cdot 2^{-2}\cdot 3^4=\frac{4\cdot 81}{4}=81$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}-2\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=2^2-2\cdot\frac{3^2}{2^2}=4-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}$

c) $\frac{2\cdot 3^2+3\cdot 2^2}{3^{-2}+6^{-1}}=\frac{18+12}{\frac{1}{9}+\frac{1}{6}}=\frac{30}{\frac{5}{18}}=108$

d) $\left(2^6\right)^{\frac{1}{2}}=2^3=8$

e) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4}\cdot 3^{-3}}=\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{3^3}{2^6}\cdot 2^4\cdot 3^3=3^4=81$

f) $(-2)^0+(-2)^1+...+(-2)^8=1-2+4-16+32-64+128-256+512=171$

**77. Halla las siguientes multiplicaciones y divisiones con radicales.**

a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{8}$

b) $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x^3}$

c) $\frac{\sqrt{3}\sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{81}}$

d) $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}$

a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}\sqrt[6]{2^4}\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{2^{10}}=\sqrt[3]{2^5}=2\sqrt[3]{2^2}=2\sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x^3}=\sqrt[12]{x^6}\sqrt[12]{x^4}\sqrt[12]{x^9}=\sqrt[12]{x^{19}}=x\sqrt[12]{x^7}$

c) $\frac{\sqrt{3}\ \sqrt[4]{27}}{\sqrt[3]{81}}=\frac{\sqrt[12]{3^6}\sqrt[12]{3^9}}{\sqrt[12]{3^{16}}}=\sqrt[12]{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[12]{3}}=\frac{\sqrt[12]{3^{11}}}{\sqrt[12]{3}\sqrt[12]{3^{11}}}=\frac{\sqrt[3]{3^{11}}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{\sqrt[12]{x^9}}{\sqrt[12]{x^4}}=\sqrt[12]{x^5}$

**78. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.**

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}$

b) $\sqrt[3]{81a^3}+2a\sqrt[3]{24}$

c) $\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{12}$

d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{24}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}$

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{32}=\sqrt{2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2^5}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{81a^3}+2a\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3^4a^3}+2a\sqrt[3]{2^3\cdot 3}=3a\sqrt[3]{3}+4a\sqrt[3]{3}=7a\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{12}=\sqrt{3}+2\sqrt{3^3}-\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{3}+6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

d) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{24}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{375}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{2^3\cdot 3}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[3]{3\cdot 5^3}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{3}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{3}=\frac{29}{6}\sqrt[3]{3}$

**79. Simplifica el valor de las siguientes expresiones.**

**a)** $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ **c)** $\left(a(a)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ **e)** $\sqrt[4]{390\,625a^5b^{16}}$ **g)** $2\left(3-2\sqrt{2}\right)^2$

**b)** $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[3]{4}}$ **d)** $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$ **f)** $16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{3}{2}}$ **h)** $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2-\frac{1}{2}}\right)^2$

**a)** $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=\sqrt[8]{3^4\cdot 3^2\cdot 3}=\sqrt[8]{3^7}$

**b)** $\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^3\cdot 2^4}}=\sqrt[18]{2^7}$

**c)** $\left(a(a)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$

**d)** $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{2+3}{\sqrt{6}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

**e)** $\sqrt[4]{390\,625a^5b^{16}}=\sqrt[4]{5^8a^5b^{16}}=5^2ab^4\sqrt[4]{a}=25ab^4\sqrt[4]{a}$

**f)** $16^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{3}{2}}=\sqrt{16}+\sqrt{729}=4+27=31$

**g)** $2\left(3-2\sqrt{2}\right)^2=2\left(9-12\sqrt{2}+8\right)=34-24\sqrt{2}$

**h)** $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{6}+6}{4}=\frac{7-2\sqrt{6}}{4}=\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}$

**80. Opera y simplifica las siguientes expresiones.**

**a)** $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)$

**b)** $\left(1+\sqrt{2}\right)^3-\left(1-\sqrt{2}\right)^3$

**c)** $\frac{3}{4}\sqrt{18}-\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$

**d)** $2\left(2-3\sqrt{2}\right)^2+\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)$

**e)** $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{5}$

**a)** $\left(\sqrt{3}-2\right)\left(2-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}-3-4+2\sqrt{3}=-7+4\sqrt{3}$

**b)** $\left(1+\sqrt{2}\right)^3-\left(1-\sqrt{2}\right)^3=\left(1+3\cdot 1\cdot\sqrt{2}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3\right)-\left(1-3\cdot 1\cdot\sqrt{2}+3\cdot 1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^3\right)=$

$=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}-1+3\sqrt{2}-6+2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

**c)** $\frac{3}{4}\sqrt{18}-\left(2\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2=\frac{3}{4}\sqrt{2\cdot 3^2}-12-4\sqrt{2\cdot 3^2}-6=-18+\left(\frac{9}{4}-12\right)\sqrt{2}=-18-\frac{39}{4}\sqrt{2}=10\sqrt{2}$

**d)** $2\left(2-3\sqrt{2}\right)^2+\left(2-3\sqrt{2}\right)\left(2+3\sqrt{2}\right)=2\left(4-12\sqrt{2}+18\right)+(4-18)=30-24\sqrt{2}$

**e)** $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{5}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{2^4\cdot 5}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{3^4\cdot 5}-\sqrt[4]{5}=\frac{2}{3}\sqrt[4]{5}-\frac{3}{2}\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}=-\frac{11}{6}\sqrt[4]{5}$

**81. Racionaliza los denominadores de las siguientes expresiones.**

**a)** $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ **c)** $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

**b)** $\dfrac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}$ **d)** $\dfrac{x+1}{2\sqrt{x+1}}$ **f)** $\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

**a)** $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{5\sqrt{5}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

**b)** $\dfrac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}=\dfrac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2y}=\dfrac{3\sqrt[5]{y^3}}{2}$

**c)** $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{2\sqrt{18}+2\sqrt{12}}{3-2}=2\sqrt{2\cdot 3^2}+2\sqrt{2^2\cdot 3}=6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

**d)** $\dfrac{x+1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{(x+1)\sqrt{x+1}}{2(x+1)}=\dfrac{\sqrt{x+1}}{2}$

**e)** $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-2}=2-\sqrt{2}$

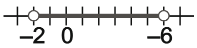
**f)** $\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\dfrac{6\sqrt{6}\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}=\dfrac{12\sqrt{18}-18\sqrt{12}}{12-18}=\dfrac{12\sqrt{2\cdot 3^2}-18\sqrt{2^2\cdot 3}}{-6}=\dfrac{36\sqrt{2}-36\sqrt{3}}{-6}=6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

## Intervalos y entornos

**82. Dados los intervalos *A*= (–2, 4) y *B*=[–1, 6) calcula y representa:**

**a)** $A\cup B$ **b)** $A\cap B$

**a)** $A\cup B=(-2,\ 6)$




**b)** $A\cap B=[-1,\ 4)$


**83. Dados los conjuntos $A=[-1,+\infty)$, $B=(-\infty,0)$ y $C=[-1,1]$, calcula:**

**a)** $A\cup B$ **c)** $A\cap B\cap C$ **e)** $(A\cup B)\cap\overline{C}$

**b)** $A\cup B\cup C$ **d)** $A\cup(B\cap C)$ **f)** $\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap C$

**a)** $A\cup B=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ **c)** $A\cap B\cap C=[-1,0)$ **e)** $(A\cup B)\cap\overline{C}=\overline{C}=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

**b)** $A\cup B\cup C=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ **d)** $A\cup(B\cap C)=A=[-1,+\infty)$ **f)** $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\varnothing\Rightarrow\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cap C=\varnothing$

**84. Expresa en forma de intervalo y de entorno los siguientes conjuntos de números reales.**

**a)** $|x-3|<5$ **c)** $\left|x+\frac{1}{2}\right|\le\frac{3}{4}$ **e)** $|x-3|\ge 7$

**b)** $|x+3|\le 0,25$ **d)** $|x+2|<\frac{2}{3}$ **f)** $\left|x+\frac{2}{5}\right|>10$

**a)** $E(3,\ 5)=(3-5,\ 3+5)=(-2,\ 8)$

**b)** $E[-3;\ 0,25]=[-3-0,25;-3+0,25]=[-3,25;\ -2,75]$

**c)** $E\left[-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]=\left[-\frac{1}{2}-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]=\left[-\frac{5}{4},\ \frac{1}{4}\right]$

**d)** $E\left(-2,\ \frac{2}{3}\right)=\left(-2-\frac{2}{3},\ -2+\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{8}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$

**e)** No se puede expresar ni en forma de intervalo ni de entorno, pero sí se puede expresar como unión de intervalos: $(-\infty,\ -4)\cup(10,\ +\infty)$.

**f)** No se puede expresar ni en forma de intervalo ni de entorno, pero sí se puede expresar como unión de intervalos: $\left(-\infty,\ -\frac{52}{5}\right]\cup\left[\frac{48}{5},\ +\infty\right)$.

## Notación científica

**85. Escribe en notación científica los siguientes números.**

**a)** 12 345 678 **c)** 0,000 000 000 331 **e)** $0,0097\cdot 10^{23}$

**b)** Sesenta billones **d)** $967\cdot 10^{-25}$ **f)** –0,000 000 001 23

**a)** $12\ 345\ 678 = 1,234\ 567\ 8\cdot 10^{7}$

**b)** Sesenta billones: $6\cdot 10^{13}$

**c)** $0,000\ 000\ 000\ 331 = 3,31\cdot 10^{-10}$

**d)** $967\cdot 10^{-25} = 9,67\cdot 10^{-23}$

**e)** $0,0097\cdot 10^{23} = 9,7\cdot 10^{20}$

**f)** $-0,000\ 000\ 001\ 23 = -1,23\cdot 10^{-9}$

**86. Realiza las siguientes operaciones dando el resultado en notación científica.**

**a)** $250\ 000\cdot 5,5\cdot 10^{5}$ **b)** $\frac{0,00016(25\cdot 10^{3}+2000)}{0,0025}$ **c)** 0,000 001 5 : 0,000 03 **d)** $\frac{10^{23}\cdot 5,6\cdot 10^{-12}}{3,5\cdot 10^{22}+4,3\cdot 10^{21}}$

**a)** $250000\cdot 5,5\cdot 10^{5}=2,5\cdot 10^{5}\cdot 5,5\cdot 10^{5}=13,75\cdot 10^{10}=1,375\cdot 10^{11}$

**b)** $\frac{0,00016(25\cdot 10^{3}+2000)}{0,0025}=\frac{1,6\cdot 10^{-4}(2,7\cdot 10^{4})}{2,5\cdot 10^{-3}}=1,728\cdot 10^{3}$

**c)** $0,0000015:0,00003=1,5\cdot 10^{-6}:3\cdot 10^{-5}=0,5\cdot 10^{-1}=5\cdot 10^{-2}$

**d)** $\frac{10^{23}\cdot 5,6\cdot 10^{-12}}{3,5\cdot 10^{22}+4,3\cdot 10^{21}}=\frac{5,6\cdot 10^{11}}{3,93\cdot 10^{22}}\simeq 1,425\cdot 10^{-11}$

**87. Halla las siguientes sumas y restas dando el resultado en notación científica.**

**a)** $0,32\cdot 10^{14}+7,128\cdot 10^{12}$ **b)** $4,88\cdot 10^{-14}+7,921\cdot 10^{-12}$

**a)** $0,32\cdot 10^{14}+7,128\cdot 10^{12}=32\cdot 10^{12}+7,128\cdot 10^{12}=39,128\cdot 10^{12}=3,9128\cdot 10^{13}$

**b)** $4,88\cdot 10^{-14}+7,921\cdot 10^{-12}=4,88\cdot 10^{-14}+792,1\cdot 10^{-14}=796,98\cdot 10^{-14}=7,9698\cdot 10^{-12}$

## CUESTIONES

**88. Da un ejemplo de número irracional que esté comprendido entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ .**

Por ejemplo $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$. Este número es irracional, ya que si fuera racional, también lo sería $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y, por tanto, también sería racional $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 2+2\sqrt{6}+3 = 5+2\sqrt{6}$ , de donde se deduciría que también sería racional $\sqrt{6}$ , lo que sabemos no es cierto.

**89. Explica un método para representar el número real $\sqrt{n+1}$ en la recta real si se conoce la representación de $\sqrt{n}$ .**

Solo hay que observar que $\sqrt{n+1}$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{n}$ y 1.

**90. Indica, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.**

**a)** La suma de dos números irracionales es siempre un número irracional.

**b)** La suma de dos números racionales puede ser irracional.

**c)** El conjunto numérico más amplio al que pertenece el número –2 es el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ .

**d)** Existe un índice *n* tal que la raíz enésima del número –122 es un número real positivo.

**e)** Todos los números enteros son reales pero no todos los números reales son enteros.

**f)** Algunos números decimales son irracionales.

**a)** Falso, por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son irracionales pero su suma $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$ es racional.

**b)** Falso, ya que la suma de dos fracciones siempre es una fracción.

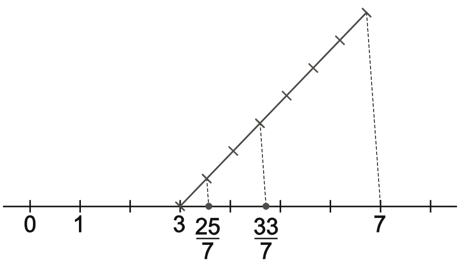
**c)** Falso, el conjunto numérico más amplio al que pertenece el número –2 es el conjunto de los números reales.

**d)** Falso, si el índice *n* es par la raíz no existe, y si es impar la raíz es negativa.

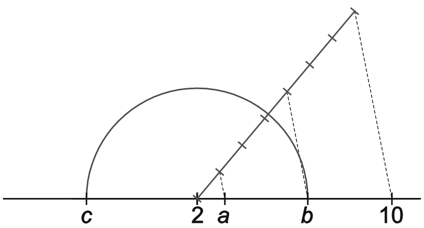
**e)** Verdadero, el conjunto de los números enteros está contenido en el de los números reales, pero, por ejemplo, 0,5 es un número real que no es entero.

**f)** Verdadero, por ejemplo $\pi$ o cualquier número decimal no periódico.

**91. Divide gráficamente el intervalo [3, 7] en tres partes de forma que la segunda sea el doble de la primera y la tercera el doble de la segunda. Indica los números fraccionarios que determinan de forma exacta las divisiones realizadas.**




**92. Calcula los valores de *a*, *b* y *c* en la siguiente figura.**




$a = 2+\frac{8}{7} = \frac{22}{7}$ $b = 2+4\cdot\frac{8}{7} = \frac{46}{7}$ $c = 2-4\cdot\frac{8}{7} = -\frac{18}{7}$

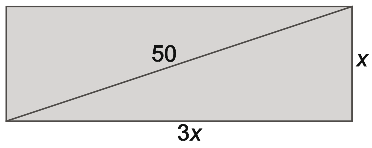
## PROBLEMAS

**93. Se quiere vallar el perímetro de un campo rectangular del que sabemos que uno de sus lados mide el triple que el otro y que su diagonal es de 50 m.**

**a)** Determina la superficie que ocupa dicha parcela.

**b)** Calcula el precio que hay que pagar si cada metro de valla cuesta 15 €. Expresa el resultado en forma de radical y después aproxima a los céntimos de euro.

**a)** Sean $x$ y $3x$ las dimensiones, en metros, del campo. Tenemos $x^2+(3x)^2=50^2 \Rightarrow 10x^2=2500 \Rightarrow x^2=250 \Rightarrow x=\sqrt{250}=5\sqrt{10}$ m, por tanto, la superficie de la parcela es $S=x\cdot 3x=3x^2=750$ m$^2$.



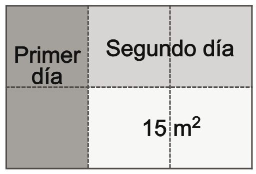

**b)** El perímetro del campo es $P=2(x+3x)=8x=40\sqrt{10}$ m, por tanto, hay que pagar $15\cdot 40\sqrt{10}=600\sqrt{10}$ € $\simeq 1897{,}37$ €.

**94. Una habitación con forma de ortoedro de base cuadrada y altura de la mitad del lado de la base, se pintó en tres días. Se pintaron las cuatro paredes y el techo. En el primer día se pintó la tercera parte de la superficie; en el segundo, la mitad de lo que quedaba, y en el tercero se pintaron los 15 m$^2$ que faltaban para acabar el trabajo.**

**a)** Calcula la superficie total de la habitación y la superficie que se hizo cada día.

**b)** Calcula las medidas de cada una de las paredes y el volumen con la precisión que consideres adecuada.

**a)** Observemos que si el primer día se pintó la tercera parte de la superficie, aún quedaban por pintar dos terceras partes. El segundo día se pinta la mitad de estas dos terceras partes, es decir, otra tercera parte, y el último día la tercera parte restante. Por tanto, los tres días se pintó la misma superficie, 15 m$^2$, siendo la superficie total 45 m$^2$.




**b)** Si $2a$ es el lado de la base y $a$ la altura, tenemos: $4\cdot 2a\cdot a+2a\cdot 2a=8a^2+4a^2=12a^2=45 \Rightarrow a=1{,}94$ m.

Por tanto, cada pared mide 3,88 m de largo y 1,94 m de alto, siendo el volumen de la habitación $V=2a\cdot 2a\cdot a=4a^3=29{,}21$ m$^3$.

**95. Con el propósito de mejorar las ayudas sociales y el gasto en cultura de los presupuestos de un ayuntamiento, se llevó a cabo una encuesta sobre las actividades culturales que interesan a los adolescentes entre 16 y 20 años. Sabiendo que el 81,8181...% contestó que le interesaba el cine y que el 14,58333...% contestó que no le interesaban las conferencias de divulgación científica, ¿qué puedes decir acerca del número de personas que contestaron la encuesta?**

$$\frac{81{,}8181...}{100}=0{,}818181...=0{,}\widehat{81}=\frac{81}{99}=\frac{9}{11}$$

$$\frac{14{,}58333...}{100}=0{,}1458333...=0{,}1458\widehat{3}=\frac{14\,583-1458}{90\,000}=\frac{13125}{90\,000}=\frac{7}{48}$$

A $\frac{9}{11}$ de los encuestados les interesa el cine y a $\frac{7}{48}$ no les interesa las conferencias de divulgación científica, por tanto, el número de encuestados debe ser múltiplo de 11 y de 48, es decir, múltiplo de 528.

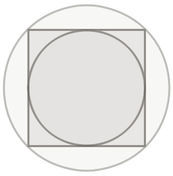
Así, no se puede conocer con certeza el número de encuestados, solo podemos deducir que es múltiplo de 528, pueden ser 528, 1056,…

**96. El área de un cuadrado mide 10,25 m$^2$. Calcula, aproximando a los decímetros:**

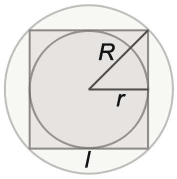
**a)** La diagonal del cuadrado.

**b)** El área del círculo inscrito.

**c)** El área del círculo circunscrito.



Sean *R*, *r* y *l*, respectivamente, el radio del círculo circunscrito, el radio del círculo inscrito y el lado del cuadrado.




**a)** $l^2 = 10,25 \Rightarrow l = \sqrt{10,25} \simeq 3,2$ m.

Por tanto, la diagonal del cuadrado es $D = \sqrt{2l^2} = \sqrt{2 \cdot 10,25} \simeq 4,5 \text{ m} = 45 \text{ dm}$.

**b)** $r = \frac{l}{2} = 1,6$ m

Por tanto, el área del círculo inscrito es $S_1 = \pi \cdot r^2 \simeq 8,04 \text{ m}^2 = 804 \text{ dm}^2$

**c)** $R = \frac{D}{2} = 2,25$ m

Por tanto, el área del círculo circunscrito es $S_2 = \pi \cdot R^2 \simeq 15,90 \text{ m}^2 = 1590 \text{ dm}^2$

**97. Una entidad bancaria cambia euros por dólares cobrando, además del valor correspondiente a dichos dólares, una comisión que depende de la cantidad que se quiere cambiar según la tabla siguiente.**

| Cantidad de dólares que se compran | Comisión en euros |
|---|---|
| Menos o igual que 200 | 10 |
| Entre 200 y 500 | 12 |
| Entre 500 y 1000 | 14 |
| Más o igual que 1000 | 15 |

**Se sabe que por comprar 300 $ se han debido pagar 251,16€.**

**a)** Calcula, con cuatro cifras decimales significativas, el precio del dólar en euros y el precio del euro en dólares sin tener en cuenta la comisión.

**b)** Calcula los dólares que se han conseguido si se han pagado 750 €.

**c)** Calcula los euros que se deberían pagar para recibir al cambio 150 $.

**d)** Calcula los euros que se deberían pagar por 1400 $. ¿Y si se compraran en siete paquetes de 200 $?

**a)** Sin tener en cuenta la comisión, 300 $ equivalen a $251,16 - 12 = 239,16$ €. Por tanto, también sin comisión, un dólar equivale a $\frac{239,16}{300} = 0,7972$ €, y un euro equivale a $1,2544$ $.

**b)** $(750 - 14) \cdot 1,2544 = 923,24$ $

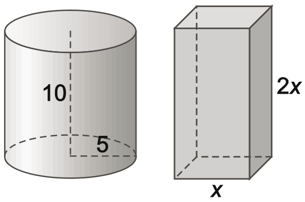
**c)** $150 \cdot 0,7972 + 10 = 129,58$ €

**d)** $1400 \cdot 0,7972 + 15 = 1131,08$ €

Si se compran en siete grupos de 200 $: $7 \cdot (200 \cdot 0,7972 + 10) = 1186,08$ €.

98. **Una empresa elabora latas de conserva con forma cilíndrica y cuyas dimensiones son: 5 cm de radio de la base y 10 cm de altura. Tras un estudio de mercado, decide cambiar la forma de las latas: serán ortoedros de base cuadrada y de altura el doble que el lado de la base.**

**¿Cuáles serán las dimensiones de la nueva forma si la capacidad debe ser la misma? Establece la solución con la aproximación que consideres más adecuada.**




El volumen de las latas es $V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 785,4 \text{ cm}^3$, por tanto tenemos:

$$2x^3 = 785,4 \Rightarrow x = 7,32 \text{ cm}$$

Es decir, las nuevas latas deben medir 7,32 cm de lado de la base y 14,64 cm de altura.

99. **En una población de 145 340 habitantes hay 42 310 menores de 18 años. ¿Qué errores absoluto y relativo se cometen si se toma como porcentaje de menores de edad el 29 %?**

Estamos aproximando $\frac{42310}{145340} = \frac{4231}{14534} \simeq 0,2911105$ por $\frac{29}{100} = 0,29$, por tanto, los errores cometidos son:

$$E_a = \left|\frac{4231}{14534} - \frac{29}{100}\right| = \frac{807}{726700} \simeq 0,0011105 \qquad E_r = \frac{E_a}{\frac{42310}{14534}} = \frac{807}{211550} \simeq 0,0038156$$

100. **El radio de una circunferencia se ha medido con un error menor de 0,1 cm, obteniéndose 10,2 cm.**

**Utiliza la aproximación de $\pi$ que consideres adecuada de acuerdo con los datos del problema.**

**a)** Calcula los valores máximo y mínimo de la longitud de dicha circunferencia así como del área del círculo limitado por la misma.

**b)** Calcula los valores máximo y mínimo de la longitud que se recorrerá al dar exactamente 5000 vueltas.

**a)** Si $r$ es el radio de la circunferencia, tenemos $10,1 < r < 10,3$, por tanto, aproximando $\pi$ por 3,14 obtenemos:

$$2\pi \cdot 10,1 < 2\pi r < 2\pi \cdot 10,3 \Rightarrow 63,43 \text{ cm} < \text{longitud} < 64,68 \text{ cm}$$

$$\pi \cdot 10,1^2 < \pi r^2 < \pi \cdot 10,3^2 \Rightarrow 320,31 \text{ cm}^2 < \text{área} < 333,12 \text{ cm}^2$$

**b)** 5000 · 63,43 < longitud de 5000 vueltas <5000· 64,68 $\Rightarrow$ 317 150 cm <recorrido< 323 400 cm

101. **La escala cromática está formada por las doce notas (doce semitonos) que aparecen en la figura.**

**El número de vibraciones por segundo de cada nota es igual al producto del número de vibraciones de la nota anterior por el número irracional $\sqrt[12]{2}$.**

**Suponiendo que el número de vibraciones por segundo correspondientes a la nota La es 440, calcula, con la aproximación de números enteros:**

**a)** Las vibraciones por segundo que corresponden a la nota La sostenido.

**b)** Las vibraciones por segundo que corresponden a la nota La bemol.

**c)** Escribe las vibraciones por segundo correspondientes a cada uno de los doce semitonos.

**a)** Vibraciones por segundo de La sostenido: $440 \cdot \sqrt[12]{2} = 466,16 \simeq 466$

**b)** Vibraciones por segundo de La bemol: $\frac{440}{\sqrt[12]{2}} = 415,3 \simeq 415$

**c)**

| Do | Do sostenido | Re | Mi bemol | Mi | Fa | Fa sostenido | Sol | La bemol | La | Si bemol | Si |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 262 | 277 | 294 | 311 | 330 | 349 | 370 | 392 | 415 | 440 | 466 | 494 |

**102. Una empresa cobra por el alquiler de una furgoneta 80 € diarios. Otra empresa cobra por el mismo alquiler 60 € al día, pero a esta cantidad se le deben añadir 200 € independientemente del tiempo que se contrate.**

**¿A partir de cuántos días es más económica la segunda empresa? Escribe la solución en forma de desigualdad y de intervalo.**

Si se alquila la furgoneta *n* días, la primera empresa cobra 80*n* y la segunda 60*n*+ 200. La segunda empresa será más económica cuando $60n + 200 < 80n \Rightarrow n > 10$ días $\Rightarrow (10, +\infty)$

**103. Al medir la altura de una persona de 180 cm se ha obtenido 178. Al medir la altura de un edificio de 39 m se han obtenido 40 m. Calcula los errores absoluto y relativo de cada medida e indica razonadamente cuál de las dos es más precisa.**

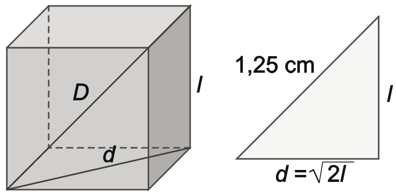
Errores en la medición de la persona: $E_a = |180 - 178| = 2$ cm y $E_r = \dfrac{2}{180} = 0{,}011$

Errores en la medición del edificio: $E_a = |39 - 40| = 1$ m y $E_r = \dfrac{1}{39} = 0{,}026$

Al ser el error relativo menor en la medición de la persona, es más precisa dicha medición.

**104. La diagonal de un cubo mide exactamente 1,252 cm. Halla la superficie del cubo aproximando su diagonal por 1,25 cm. Calcula la cota del el error relativo.**

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2}l \Rightarrow D = \sqrt{d^2 + l^2} = \sqrt{2l^2 + l^2} = \sqrt{3}l \Rightarrow l = \frac{D}{\sqrt{3}}$$




Superficie del cubo: $6l^2 = 6\dfrac{D^2}{3} = 2D^2$

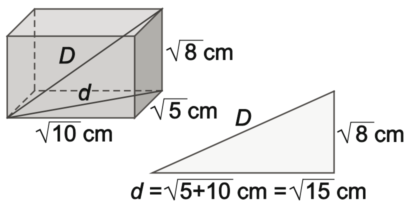
La superficie real del cubo es $2 \cdot 1{,}252^2 = 3{,}135\,008$, la aproximamos por $2 \cdot 1{,}25^2 = 3{,}125$, por tanto, el error relativo es:

$$E_r = \frac{|3{,}135\,008 - 3{,}125|}{3{,}135\,008} \simeq 0{,}0032$$

**105. Calcula la medida de la diagonal de un paralelepípedo cuyos lados miden $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{5}$ cm, respectivamente. ¿Qué tipo de número es el resultado?**

**Aproxima el resultado redondeando a dos decimales y calcula los errores absoluto y relativo cometidos. Acota el error relativo.**

$d = \sqrt{5 + 10} = \sqrt{15}$ cm $\Rightarrow D = \sqrt{15 + 8} = \sqrt{23}$ cm .




La diagonal es un número irracional, que aproximamos por 4,80 cm, por tanto:

$$E_a = \left|\sqrt{23} - 4{,}80\right| = |4{,}795\,58 - 4{,}80| = 0{,}004\,17$$

$$E_r = \frac{E_a}{\sqrt{23}} < \frac{0{,}004\,17}{4{,}79} = 0{,}000\,87$$

**106. Un jardín cuadrado tiene 50 m de lado. Dos personas pasean a la misma velocidad, una por el perímetro del cuadrado y la otra recorriendo una diagonal. Si parten simultáneamente de la misma esquina del parque, ¿volverán a encontrarse?**

Si se encuentran lo harán en la esquina opuesta, en este caso, como van a la misma velocidad, deben haber recorrido el mismo espacio.

Ahora bien, el espacio recorrido por la persona que avanza por el perímetro es 100 m y el recorrido por la persona que va por la diagonal es $50\sqrt{2} \simeq 70{,}71\,\text{m}$, con lo que no se encontrarán.

Nos podemos preguntar si terminarán encontrándose si siguen paseando ininterrumpidamente, uno siguiendo el perímetro y otro recorriendo una y otra vez la diagonal.

Para resolver este problema observemos que si se encuentran lo harán en una de las esquinas de la diagonal que recorre la segunda persona y, como caminan a la misma velocidad, habrán recorrido la misma distancia.

Ahora bien, la persona que va por el perímetro habrá recorrido 100$a$ metros para algún entero positivo$a$, mientras que la persona que avanza por la diagonal habrá recorrido $50\sqrt{2}b$ metros para algún entro positivo $b$.

Por tanto, obtendríamos $100a = 50\sqrt{2}b \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{2a}{b}$, es decir, $\sqrt{2}$ sería racional, lo que sabemos no es cierto.

Deducimos entonces que los caminantes no se encontrarán nunca, aunque paseen indefinidamente.

**107. Un determinado tipo de protozoo tiene un diámetro de 2 · $10^{-5}$ m. Calcula cuántos protozoos habría que situar, uno a continuación de otro, para alcanzar una longitud de 1 cm.**

$0{,}01 : (2 \cdot 10^{-5}) = 500$ protozoos

**108. Sabiendo que la velocidad de la luz es de 300 000 km/s, calcula el tiempo que tardaría en llegar a la Tierra la luz emitida por una hipotética estrella que se encontrara a 12 000 000 000 km de distancia.**

**Expresa el resultado con la precisión que consideres adecuada.**

$$t = \frac{1{,}2 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{5}} = 0{,}4 \cdot 10^{5} = 4 \cdot 10^{4} = 40\,000 \text{ segundos} = 11 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s}$$

**109. El diámetro de una molécula de agua mide aproximadamente 3 · $10^{-10}$ m.**

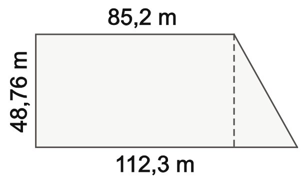
**a)** Calcula el volumen de una molécula de agua suponiendo que su forma es aproximadamente esférica. Expresa el resultado en notación científica.

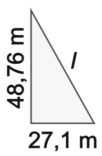
**b)** Calcula el número de moléculas de agua que hay en una gota de 3 mm de diámetro, expresando el resultado en notación científica.

**a)** $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{3}{2} \cdot 10^{-10}\right)^3 = \dfrac{9}{2}\pi \cdot 10^{-30} = 14{,}14 \cdot 10^{-30} = 1{,}414 \cdot 10^{-29}\text{ m}^3 = 1{,}414 \cdot 10^{-20}\text{ mm}^3$

**b)** El volumen de la gota es $\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{9}{2}\pi = 14{,}14\text{ mm}^3$, por tanto, contiene $\dfrac{14{,}14}{1{,}414 \cdot 10^{-20}} = 10^{21}$ moléculas de agua.

**110. Las bases de un trapecio rectángulo miden 85,2 y 112,3 m, respectivamente. La longitud del lado perpendicular a las bases se conoce previamente y con una precisión mayor: es de 48,76 m. Calcula, con la precisión adecuada, el área y el perímetro.**




$l = \sqrt{48,76^2 + 27,1^2} = 55,8$ m

Perímetro: $85,2 + 48,76 + 112,3 + 55,8 = 302,1$ m

Área: $\dfrac{(112,3 + 85,2) \cdot 48,76}{2} = 4815,1 \text{ m}^2$

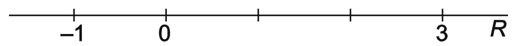
**111. Desarrolla el valor de la expresión $|x+1| + |x-3|$ eliminando los valores absolutos. Para ello, realiza los siguientes pasos:**

**1.º** Calcula los valores reales $x$ que anulan lo valores absolutos que intervienen en la expresión; es decir, $|x+1|$ y $|x-3|$.

**2.º** Representa en la recta real las soluciones obtenidas en el apartado anterior. La recta queda dividida en tres intervalos o zonas.

**3.º** Para cada uno de los intervalos anteriores y con la ayuda de valores representantes, estudia el signo del interior de los dos valores absolutos y obtén la expresión solicitada en cada caso.

**1.º** Los valores absolutos se anulan si $x = -1$ o $x = 3$

**2.º** 


**3.º**

| | $x < -1$ | $-1 < x < 3$ | $x > 3$ |
|---|---|---|---|
| $x + 1$ | Negativo | Positivo | Positivo |
| $x - 3$ | Negativo | Negativo | Positivo |

Por tanto, $|x+1| + |x-3| = \begin{cases} -(x+1)-(x-3) & \text{si} \quad x \le -1 \\ x+1-(x-3) & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ x+1+x-3 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x+2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 4 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$

**112. Siguiendo el procedimiento explicado en el ejercicio anterior, desarrolla el valor de las siguientes expresiones omitiendo los valores absolutos.**

**a)** $|x-1| + |x+1|$

**b)** $x + |x| + |x-2|$

**a)** Los valores absolutos se anulan si $x = -1$ o $x = 1$, obteniéndose:

| | $X < -1$ | $-1 < x < 1$ | $x > 1$ |
|---|---|---|---|
| $x + 1$ | Negativo | Positivo | Positivo |
| $x - 1$ | Negativo | Negativo | Positivo |

Por tanto, $|x-1| + |x+1| = \begin{cases} -(x-1)-(x+1) & \text{si} \quad x \le -1 \\ -(x-1)+x+1 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ x-1+x+1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x \le -1 \\ 2 & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$

**b)** Los valores absolutos se anulan si $x = 0$ o $x = 2$, obteniéndose:

| | $x < 0$ | $0 < x < 2$ | $x > 2$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | Negativo | Positivo | Positivo |
| $x - 2$ | Negativo | Negativo | Positivo |

Por tanto, $x + |x| + |x-2| = \begin{cases} x-x-(x-2) & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+x-(x-2) & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ x+x+x-2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases} = \begin{cases} -x+2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+2 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 3x-2 & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$

**113. ¿Es $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ un número entero? Calcula su cuadrado y observa el resultado.**

$$\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\sqrt{6+4\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{6-4\sqrt{2}}\right)=6+4\sqrt{2}+6-4\sqrt{2}+2\sqrt{36-32}=$$

$=12+4=16\Rightarrow\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{16}=4$, es decir, $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$ sí es un número entero.

**114. Simplifica la expresión $\sqrt{59+30\sqrt{2}}$ escribiéndola como la suma de un número entero y la raíz cuadrada de un número natural. Para ello, intenta expresar el radicando como el cuadrado perfecto de un binomio.**

$$\sqrt{59+30\sqrt{2}}=\sqrt{9+50+2\cdot3\cdot5\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3+5\sqrt{2}\right)^2}=3+5\sqrt{2}$$

**115. a)** Demuestra que $0,\widehat{9}=1$.

**b)** Calcula el valor de $0,\widehat{9}+0,0\widehat{9}+0,00\widehat{9}$

**a)** $A=0,\widehat{9}=0,999...\Rightarrow\begin{cases}10A=9,999\\ A=0,999...\end{cases}\Rightarrow 9A=9\Rightarrow A=1$

**b)** $0,\widehat{9}=1;\ 0,0\widehat{9}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}=0,1$ y $0,00\widehat{9}=\dfrac{9}{900}=\dfrac{1}{100}=0,01\Rightarrow 0,\widehat{9}+0,0\widehat{9}+0,00\widehat{9}=1+0,1+0,01=1,11$

## ENTORNO MATEMÁTICO

### Compras a plazos

**Ignacio trabaja en una multinacional y le han trasladado a una sede situada en un parque industrial a 50 km de su domicilio habitual, en una localidad de su misma comunidad. Además, para hacer su vida aún más cómoda, al menos dos tardes por semana tiene que ir a reuniones a la oficina anterior.**

**En la red de trasportes de su comunidad, Ignacio ha investigado como poder ir en trasporte público a su trabajo, y ahorrarse los temidos atascos, pero le ha surgido un problema. Si quiere llegar a tiempo a las reuniones, ¡Ignacio se tiene que comprar un coche!, pero no puede permitirse comprarlo al contado.**

**Afortunadamente para Ignacio, en la mayoría de los concesionarios que ha consultado, le han ofrecido un plan de plazos para adquirir el coche.**

**El precio total se realizará en varios pagos.**

- **El primer pago será igual a las dos quintas partes del precio total.**
- **Un pago mensual, durante 40 meses, que cubra cinco sextas partes de lo que queda.**
- **Un último pago de 1200 € al cabo de los 40 meses.**

**A la administración del concesionario se le ha olvidado, inexplicablemente, indicar el precio total del vehículo.**

**a)** ¿Tiene Ignacio suficientes datos para calcular el precio total del vehículo? Si es así, ¿cómo debe hallarlo?

**b)** Calcula el dinero que ha de pagar Ignacio como entrada, en el primer pago.

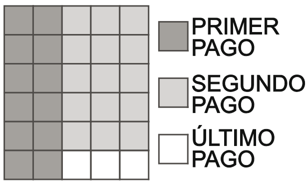
**c)** ¿Cuánto ha de pagar en total durante los 40 meses? ¿Y cada mes?

**d)** Ignacio tiene ahorrados 5000 €. ¿Tendrá suficiente para pagar el primer plazo?

**a)** Se puede calcular el precio total del vehículo del siguiente modo:

El primer pago supone $\frac{2}{5}$ del precio total, por lo que aún quedarían por pagar $\frac{3}{5}$ del precio total.

Durante 40 meses se pagan $\frac{5}{6}$ de lo que queda, es decir, el segundo pago supone $\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$ del precio total, por lo que ya se habrían pagado $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$, quedando por pagar $\frac{1}{10}$ del precio del vehículo, lo que equivale a 1200€.




En la figura tenemos un razonamiento alternativo que prueba que el segundo plazo equivale a $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$ del precio total y el tercer pago, 1200 €, equivale a $\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$ del precio total.

Por tanto el precio del vehículo es $10\cdot 1200=12\,000$ €.

**b)** Ignacio debe pagar como entrada $\frac{2}{5}\cdot 12\,000=4\,800$ €.

**c)** En los siguientes 40 meses pagará $\frac{1}{2}\cdot 12\,000=6\,000$ €, es decir, $6\,000:40=150$ € cada mes.

**d)** Sí tendrá suficiente para afrontar el primer pago.

## Formatos de papel DIN

**Casi todos los estándares de fabricación se rigen por normas y convenios internacionales. Uno de ellos es el formato DIN, para la elaboración de papel y que es seguido por una gran parte de los fabricantes mundiales. Como curiosidad, este formato sigue la norma ISO 216 que se basa en la DIN 476 que data nada más y nada menos que de … ¡1922! Y que sigue las siguientes reglas:**

- **El formato A0 es un rectángulo con 1 m$^2$ de área.**
- **El formato A0 es tal que si se dobla por la mitad se obtiene el siguiente formato, el A1. De la misma forma, al doblar el formato A1 por la mitad, se obtiene el siguiente formato, el A2. Esta regla se sigue de forma sucesiva para obtener todos los formatos: A3, A4, A5, etc.**
- **Todos los formatos son rectángulos cuyas dimensiones guardan la misma proporción. Es decir, en cualquier formato el cociente de sus dimensiones es siempre el mismo.**

**a)** Comprueba que la razón entre la dimensión mayor y la menor en cualquier formato es $\sqrt{2}$.

**b)** Comprueba que las dimensiones del formato A0 son $a = \sqrt[4]{2}$ y $b = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ m.

**c)** Elabora una tabla con una hoja de cálculo en la que aparezcan las dimensiones, redondeadas a los milímetros, de los diferentes formatos A0, A1, A2, A3, A4, etc.

**a)** Sean $a_n$ y $b_n$ la dimensión mayor y menor, respectivamente, del rectángulo de formato $A_n$. Tenemos:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_n}{\frac{a_n}{2}} \Rightarrow \frac{a_n^{\,2}}{2} = b_n^{\,2} \Rightarrow \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2}$$

**b)** $\begin{cases} a_0 \cdot b_0 = 1 \\ \dfrac{a_0}{b_0} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}b_0 \cdot b_0 = 1 \Rightarrow b_0^{\,2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow b_0 = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ y $a_0 = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{2}$ m.

**c)**

| | Dimensión mayor (m) | Dimensión menor (m) | Área (m$^2$) |
|---|---|---|---|
| A0 | "=2^(1/4)" | "=B2/(2^(1/2))" | "=B2*C2" |
| A1 | "=C2" | Copiar C2 | Copiar D2 |
| A2 | | | |
| A3 | | | |
| A4 | | | |
| | … | | |

| | Dimensión mayor (m) | Dimensión menor (m) | Área (m$^2$) |
|---|---|---|---|
| A0 | 1,189 | 0,841 | 1 |
| A1 | 0,841 | 0,595 | 0,5 |
| A2 | 0,595 | 0,420 | 0,25 |
| A3 | 0,420 | 0,297 | 0,125 |
| A4 | 0,297 | 0,210 | 0,0625 |
| | … | | |

## AUTOEVALUACION

### Comprueba qué has aprendido

**1. Indica el conjunto numérico más pequeño al que pertenecen:**

**a)** $-\frac{15}{7}$

**b)** $1+\sqrt{2}$

**c)** 1,151515…

**d)** $\sqrt{2}+\frac{2}{\sqrt{2}}$

**e)** 10,15161718…

**f)** $\sqrt[3]{8}-\sqrt[4]{81}$

**a)** Racionales

**b)** Reales

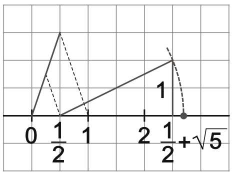
**c)** Racionales

**d)** Reales

**e)** Reales

**f)** Enteros

**2. Representa en la recta real el número irracional $\frac{1}{2}+\sqrt{5}$.**

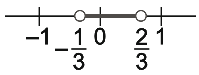



**3. Aproxima hasta las centésimas por exceso y por defecto los números $\sqrt{2}$ y $2\pi$. ¿Cuáles son las aproximaciones por defecto y por exceso del producto $2\pi\sqrt{2}$?**

| | $\sqrt{2}$ | | $2\pi$ | | $2\pi\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Exceso | 1,5 | 1,42 | 6,3 | 6,29 | 9,45 | 8,9318 |
| Defecto | 1,4 | 1,41 | 6,2 | 6,28 | 8,68 | 8,8548 |

**4. Dibuja en la recta real la zona de valores reales $x$ tales que $\left|2x-\frac{1}{3}\right|<1$ y determínala mediante un intervalo.**

$$\left|2x-\frac{1}{3}\right|<1 \Rightarrow \left|x-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow E\left(\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2},\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$




**5. Calcula los errores absoluto y relativo que se cometen al tomar 1,86 como valor de $\frac{13}{7}$.**

Error absoluto: $E_a=\left|\frac{13}{7}-1{,}86\right|=\left|\frac{13}{7}-\frac{186}{100}\right|=\frac{1}{350}$

Error relativo: $E_r=\dfrac{\frac{1}{350}}{\frac{13}{7}}=\frac{1}{650}$

**6. Calcula el valor de:**

**a)** $2\sqrt{x^3y}-\frac{1}{5}\sqrt{25xy}$ **b)** $b\sqrt[3]{a^4}+2a\sqrt[3]{ab^3}-b\sqrt[3]{192}$

**a)** $2\sqrt{x^3y}-\frac{1}{5}\sqrt{25xy}=2x\sqrt{xy}-\frac{1}{5}\sqrt{5^2xy}=2x\sqrt{xy}-\sqrt{xy}=(2x-1)\sqrt{xy}$

**b)** $b\sqrt[3]{a^4}+2a\sqrt[3]{ab^3}-b\sqrt[3]{192}=ab\sqrt[3]{a}+2ab\sqrt[3]{a}-b\sqrt[3]{2^6\cdot 3}=3ab\sqrt[3]{a}-4b\sqrt[3]{3}$

**7. Simplifica todo lo que puedas las siguientes expresiones.**

**a)** $\frac{2^{-3}\cdot 6^{-2}}{18^{-3}}$ **b)** $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}$ **c)** $(3-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2$ **d)** $\sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}}}$

**a)** $\frac{2^{-3}\cdot 6^{-2}}{18^{-3}}=\frac{18^3}{2^3\cdot 6^2}=\frac{(2\cdot 3^2)^3}{2^3\cdot(2\cdot 3)^2}=\frac{2^3\cdot 3^6}{2^3\cdot 2^2\cdot 3^2}=\frac{3^4}{2^2}=\frac{81}{4}$

**b)** $\sqrt{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[6]{2^3\cdot 3^2}}=\sqrt[12]{2^3\cdot 3^2}=\sqrt[12]{72}$

**c)** $(3-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2=(3-\sqrt{2}+3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}-3-\sqrt{2})=6(-2\sqrt{2})=-12\sqrt{2}$

También podríamos haber calculado: $(3-\sqrt{2})^2-(3+\sqrt{2})^2=(9-6\sqrt{2}+2)-(9+6\sqrt{2}+2)=-12\sqrt{2}$ .

**8. La máxima distancia de la Tierra a la Luna es de $4{,}07\cdot 10^8$ m y el radio de la Luna mide 1737 km. Calcula la distancia de la Tierra a la Luna tomando como unidad el diámetro de la Luna.**

Diámetro de la Luna: 3474 km

Distancia máxima de la Tierra a la Luna: $4{,}07\cdot 10^8\text{ m}=4{,}07\cdot 10^5\text{ km}=\frac{4{,}07\cdot 10^5}{3474}\simeq 117{,}156$ diámetros lunares

**9. Racionaliza los denominadores y simplifica todo lo que puedas las expresiones resultantes:**

**a)** $\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{54}}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt[4]{54}}$ **c)** $\frac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3}-1}$

**a)** $\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{54}}=\frac{(2\sqrt{3}-1)\sqrt{54}}{54}=\frac{2\sqrt{3\cdot 54}-\sqrt{54}}{54}=\frac{2\sqrt{2\cdot 3^4}-\sqrt{2\cdot 3^3}}{54}=\frac{2\cdot 3^2\sqrt{2}-3\sqrt{2\cdot 3}}{54}=\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{6}}{18}$

**b)** $\frac{1}{\sqrt[4]{54}}=\frac{\sqrt[4]{54^3}}{54}=\frac{\sqrt[4]{2^3\cdot 3^9}}{54}=\frac{3^2\sqrt[4]{2^3\cdot 3}}{54}=\frac{\sqrt[4]{24}}{6}$

**c)** $\frac{\sqrt{54}}{2\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{54}(2\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}=\frac{2\sqrt{54\cdot 3}+\sqrt{54}}{12-1}=\frac{2\sqrt{2\cdot 3^4}+\sqrt{2\cdot 3^3}}{11}=\frac{2\cdot 3^2\sqrt{2}+3\sqrt{2\cdot 3}}{11}=\frac{18\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{11}$

**10. Dados $A = 2{,}3 \cdot 10^{-12}$ y $B = 1{,}15 \cdot 10^{-11}$. Calcula:**

**a)** $A + B$ **b)** $A - B$ **c)** $AB$ **d)** $\dfrac{A}{B}$

**a)** $A + B = 2{,}3 \cdot 10^{-12} + 1{,}15 \cdot 10^{-11} = 0{,}23 \cdot 10^{-11} + 1{,}15 \cdot 10^{-11} = 1{,}38 \cdot 10^{-11}$

**b)** $A - B = 2{,}3 \cdot 10^{-12} - 1{,}15 \cdot 10^{-11} = 0{,}23 \cdot 10^{-11} - 1{,}15 \cdot 10^{-11} = -0{,}92 \cdot 10^{-11} = -9{,}2 \cdot 10^{-12}$

**c)** $AB = 2{,}3 \cdot 10^{-12} \cdot 1{,}15 \cdot 10^{-11} = 2{,}645 \cdot 10^{-23}$

**d)** $\dfrac{A}{B} = \dfrac{2{,}3 \cdot 10^{-12}}{1{,}15 \cdot 10^{-11}} = 2 \cdot 10^{-1}$

**11. Averigua las vueltas que debe dar la rueda de una bicicleta para recorrer 1 500 m sabiendo que el radio de la rueda es de 0,25 m. Expresa el resultado con la mejor aproximación al número de vueltas exactas.**

$\dfrac{1500}{2 \cdot \pi \cdot 0{,}25} \simeq 955$ vueltas

## Relaciona y contesta

**Elige la única respuesta correcta en cada caso**

**1. El inverso del número irracional $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ es:**

**A.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

**B.** $\sqrt{2}-1$

**C.** $\sqrt{2}+1$

**D.** Los números irracionales no tienen inverso.

Obviamente, el inverso de $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ es $1+\sqrt{2}$, es decir, la respuesta C.

**2. La diferencia entre los números racionales $A = 1{,}1\widehat{21}$ y $B = 1{,}\widehat{12}$ es:**

**A.** 0

**B.** 0,1

**C.** 0,9

**D.** 0,09

$A - B = 1{,}1\widehat{21} - 1{,}\widehat{12} = \dfrac{1121-11}{990} - \dfrac{112-1}{99} = \dfrac{1110}{990} - \dfrac{111}{99} = \dfrac{37}{33} - \dfrac{37}{33} = 0$, la respuesta A.

3. **Dados los valores 12,25 y 0,025 considerando que la última cifra escrita puede no ser cierta. El valor que se ha de tomar como suma de los dos números es:**

**A.** 12,275

**B.** 12,27

**C.** 12,28

**D.** 12,3

Los valores dados son aproximaciones de las medidas reales, por tanto, la primera de las medidas está entre 12,24 y 12,26 y la segunda entre 0,024 y 0,026.

Así, la suma está entre 12,264 y 12,286, por lo que hay que tomar como suma el valor 12,3, la respuesta D.

### Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Indica cuales de los siguientes números son racionales.**

**A.** 0,12122122212222…

**B.** 0,123412341234…

**C.** 0,112233445566…

**D.** $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}$

A y C son irracionales, ya que no son periódicos. En cambio B es racional, ya que es periódico. Finalmente, $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2-2}{\sqrt{2}}=0$ es racional. Por tanto, las respuestas correctas son B y D.

5. **Las siguientes igualdades son ciertas para cualesquiera valores reales estrictamente positivos:**

**A.** $a^{\left(b^c\right)}=\left(a^b\right)^c$

**B.** $a^{bc}=\left(a^b\right)^c$

**C.** $\left(a^b\right)^c=\left(a^c\right)^b$

**D.** $a^{\left(b^c\right)}=a^b$

$\left(a^b\right)^c=a^{bc}=\left(a^c\right)^b$, por lo que B y C son ciertas.En cambio A y D son falsas, por ejemplo, $2^{\left(2^3\right)}=2^8=256$ no coincide con $\left(2^2\right)^3=4^3=64$ ni con $2^2=4$. Por tanto, las respuestas correctas son B y C.

## Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

**6. Dados *P* y *Q* números reales. Se consideran las afirmaciones:**

1. Al menos uno de los dos números reales *P* y *Q* es irracional.
2. $P+Q$ es irracional.

**A.** $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

**B.** $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

**C.** 1 y 2 son excluyentes entre sí.

**D.** Nada de lo anterior.

1 no implica 2, por ejemplo, si *P* es irracional y $Q = -P$, tendríamos $P + Q = 0$ racional.

En cambio 2 sí implica 1, si $P + Q$ es irracional al menos uno de los dos números reales *P* y *Q* es irracional, ya que si ambos fueran racionales también lo sería $P + Q$.

Por tanto, la relación correcta es la dada en B.

## Señala el dato innecesario para contestar

**7. Con los siguientes datos:**

**1.** $B = [0, 6)$ **2.** $A \cup B = (-2, 6)$ **3.** $A \cap B = [0, 5)$

**¿Cuál es exactamente el subconjunto de números reales *A*?**

**A.** Puede eliminarse el dato 1.

**B.** Puede eliminarse el dato 3.

**C.** Se puede eliminar cualquiera de los tres datos.

**D.** No puede eliminarse ningún dato.

No puede eliminarse ningún dato, respuesta D, son necesarios los tres para deducir que $A = (-2, 5)$.