10 Funciones elementales

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Ejercicio resuelto.

2. Encuentra los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones y estudia su signo.

a) $f(x)=6x-5$ **b)** $f(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{x+1}$ **c)** $f(x)=x^2+3x-4$ **d)** $f(x)=\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2}$

a) Cortes con el eje X: $f(x)=0\Rightarrow 6x-5=0\Rightarrow x=\frac{5}{6}\Rightarrow P_1\left(\frac{5}{6},\,0\right)$; Corte con el eje Y: $f(0)=-5\Rightarrow P_2(0,\,-5)$

Signo de $f(x)$:

	$-\infty$ — $\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$ — $+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$

f es positiva en $\left(\frac{5}{6},\,+\infty\right)$ y negativa en $\left(-\infty,\,\frac{5}{6}\right)$.

b) Cortes con el eje X: $f(x)=0\Rightarrow(x-3)(x+2)=0\Rightarrow x=-2,\ x=3\Rightarrow P_1(-2,\,0),\ P_2(3,\,0)$

Corte con el eje Y: $f(0)=-6\Rightarrow P_3(0,\,-6)$

Signo de $f(x)$:

	$-\infty$ — -2	-2 — -1	-1 — 3	3 — $+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

f es positiva en $(-2,\,-1)\cup(3,\,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,\,-2)\cup(-1,\,3)$.

c) Cortes con el eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow x=-4,\ x=1\Rightarrow P_1(-4,\,0),\ P_2(1,\,0)$

Corte con el eje Y: $f(0)=-4\Rightarrow P_3(0,\,-4)$

Signo de $f(x)$: $f(x)=(x+4)(x-1)$

	$-\infty$ — -4	-4 — 1	1 — $+\infty$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

f es positiva en $(-\infty,\,-4)\cup(1,\,+\infty)$ y negativa en $(-4,\,1)$.

d) Cortes con el eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^3-2x^2-5x+6=0\Rightarrow x=-2,\ x=1,\ x=3\Rightarrow P_1(-2,\,0),\ P_2(1,\,0),\ P_3(3,\,0)$

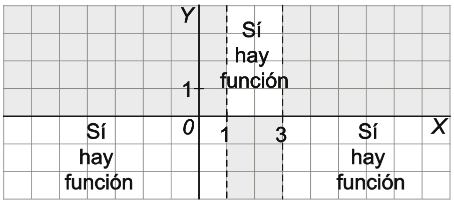
Corte con el eje Y: $f(0)=-3\Rightarrow P_4(0,\,-3)$

Signo de $f(x)$: $f(x)=\frac{(x+2)(x-1)(x-3)}{x-2}$

	$-\infty$ — -2	-2 — 1	1 — 2	2 — 3	3 — $+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

f es positiva en $(-\infty,\,-2)\cup(1,\,2)\cup(3,\,+\infty)$ y negativa en $(-2,\,1)\cup(2,\,3)$.

3. Escribe la expresión analítica de una función que cumpla lo señalado en la siguiente gráfica.



Una posible solución es $f(x) = -(x-1)(x-3) = -x^2 + 4x - 3$.

4. Estudia si las siguientes funciones son pares o impares, o si no presentan ninguna de estas simetrías.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

b) $f(x) = |x|$

c) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

a) $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = f(x) \Rightarrow$ Función par

b) $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow$ Función par

c) $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x = -f(x) \Rightarrow$ Función impar

d) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^3 + 1} = \dfrac{1}{-x^3 + 1}$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

5. a) Escribe una función polinómica en la que todos los exponentes que aparezcan sean pares y estudia su simetría.

b) Haz lo mismo para una función polinómica con todos sus exponentes impares.

c) ¿Por qué crees que se usan los términos *funciones par* e *impar*?

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$, la función es par.

b) $f(x) = x^5 + x^3 + 2x$, la función es impar.

c) Cualquier función polinómica con todos los exponentes pares será par, y si los exponentes son todos impares será impar.

6. Ejercicio interactivo.

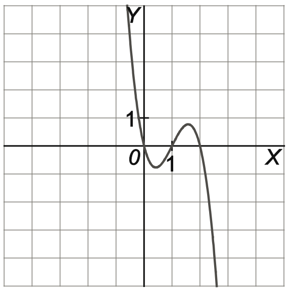
7. Ejercicio resuelto.

8. Esboza las gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -2x(x^2 - 3x + 2)$ **c)** $f(x) = x^3 - 25x$ **e)** $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = x^3 - 7x + 6$ **d)** $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$ **f)** $f(x) = x^4 - 16$

a) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0) = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow -2x(x^2 - 3x + 2) = -2x(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = 2 \Rightarrow (0,\ 0),\ (1,\ 0)$ y $(2,\ 0)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ 0	0 1	1 2	2 $+\infty$
$-2x$	+	−	−	−
$x-1$	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
$f(x)$	+	−	+	−

Simetría

$f(-x) = 2x(x^2 + 3x + 2)$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = -6x^2 + 12x - 4 = -6\left(x - 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si

$x = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = x_1$ o $x = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} = x_2$.

	$-\infty$ x_1	x_1 x_2	x_2 $+\infty$
$x - x_1$	−	+	+
$x - x_2$	−	−	+
$f'(x)$	−	+	−
$f(x)$	↘	↗	↘

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, en $(x_1, f(x_1)) \simeq (0{,}42;\ -0{,}77)$ hay un mínimo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (1{,}58;\ 0{,}77)$ hay un máximo relativo.

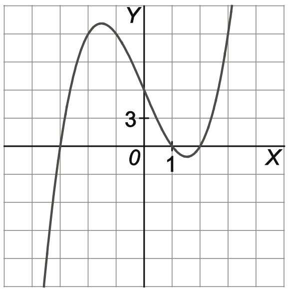
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = -12x + 12 = -12(x-1)$ se anula si $x = 1$.

	$-\infty$ 1	1 $+\infty$
$f''(x)$	+	−
$f(x)$	∪	∩

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en (1, 0) hay un punto de inflexión.

b) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0) = 6 \Rightarrow (0,\ 6)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1,\ x = 2,\ x = -3 \Rightarrow\ (-3,\ 0),\ (1,\ 0)$ y $(2,\ 0)$.

Signo: La tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ −3	−3 1	1 2	2 $+\infty$
$x+3$	−	+	+	+
$x-1$	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
$f(x)$	−	+	−	+

Simetría

$f(-x) = -x^3 + 7x + 6$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 3x^2 - 7 = 3\left(x + \frac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{21}}{3} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{21}}{3} = x_2$

	$-\infty$ … x_1	x_1 … x_2	x_2 … $+\infty$
$x - x_1$	−	+	+
$x - x_2$	−	−	+
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, además, obtenemos que en $(x_1, f(x_1)) \simeq (-1{,}53; 13{,}13)$ hay un máximo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (1{,}53; -1{,}13)$ hay un mínimo relativo.

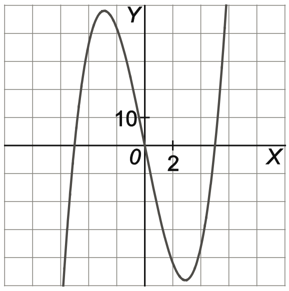
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 6x$ se anula si $x = 0$.

	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en (0, 6) hay un punto de inflexión.

c) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ es el punto de corte con el eje Y.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 25x = x(x+5)(x-5) = 0 \Rightarrow$

$x = 0$, $x = -5$, $x = 5 \Rightarrow$ (−5, 0), (0, 0) y (5, 0) son los puntos de corte con el eje X.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	$-\infty$ … −5	−5 … 0	0 … 5	5 … $+\infty$
$x + 5$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$x - 5$	−	−	−	+
$f(x)$	−	+	−	+

Simetría

$f(-x) = -x^3 + 25x = -f(x)$, la función es impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 3x^2 - 25 = 3\left(x + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si $x = -\frac{5\sqrt{3}}{3} = x_1$ o $x = \frac{5\sqrt{3}}{3} = x_2$.

	$-\infty$ … x_1	x_1 … x_2	x_2 … $+\infty$
$x - x_1$	−	+	+
$x - x_2$	−	−	+
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, además, en $(x_1, f(x_1)) \simeq (-2{,}87; 48{,}11)$ hay un máximo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (2{,}87; -48{,}11)$ hay un mínimo relativo.

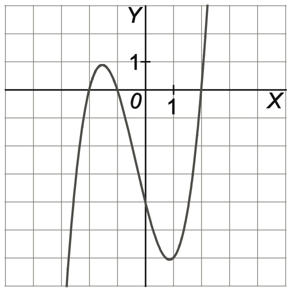
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 6x$ se anula si $x = 0$.

	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, obtenemos que en (0, 0) hay un punto de inflexión.

d) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0)=-4 \Rightarrow (0,\,-4)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow (x^2-4)(x+1)=(x+2)(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow$

$x=-2,\ x=2,\ x=-1 \Rightarrow$ (–2, 0), (–1, 0) y (2, 0) son los puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad 2 \quad +\infty$

$x+2$	–	+	+	+
$x+1$	–	–	+	+
$x-2$	–	–	–	+
$f(x)$	–	+	–	+

Simetría

$f(-x)=-x^3+x^2+4x-4$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=3x^2+2x-4=3\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{13}}{3}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{13}}{3}\right)$ se anula si $x=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{3}=x_1$ o $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{3}=x_2$.

$-\infty \quad x_1 \quad x_2 \quad +\infty$

$x-x_1$	–	+	+
$x-x_2$	–	–	+
$f'(x)$	+	–	+
$f(x)$	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, en $(x_1,\,f(x_1))\simeq(-1{,}54;\,0{,}88)$ hay un máximo relativo y en $(x_2,\,f(x_2))\simeq(0{,}87;\,-6{,}06)$ hay un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

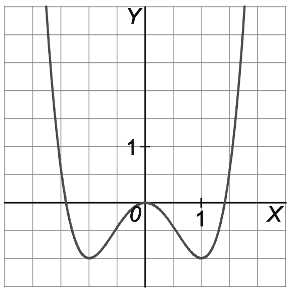
$f''(x)=6x+2$ se anula si $x=-\dfrac{1}{3}$.

$-\infty \quad 0 \quad +\infty$

$f''(x)$	–	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en $\left(-\dfrac{1}{3},\,-\dfrac{70}{27}\right)$ hay un punto de inflexión.

e) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0)=0 \Rightarrow (0,\,0)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow x^4-2x^2=x^2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0 \Rightarrow$

$x=0,\ x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2} \Rightarrow \left(-\sqrt{2},\,0\right)$, (0, 0) y $\left(\sqrt{2},\,0\right)$

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

$-\infty \quad -\sqrt{2} \quad 0 \quad \sqrt{2} \quad +\infty$

$x+\sqrt{2}$	–	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$x-\sqrt{2}$	–	–	–	+
$f(x)$	+	–	–	+

Simetría

$f(-x)=x^4-2x^2=f(x)$, la función es par.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$ se anula si $x = -1$, $x = 0$ o $x = 1$.

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, en $(-1, -1)$ hay un mínimo relativo, en (0, 0) un máximo relativo y en $(1, -1)$ un mínimo relativo.

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Curvatura y puntos de inflexión

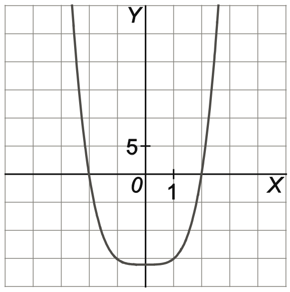
$f''(x) = 12x^2 - 4 = 12\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{3}}{3} = x_2$.

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}58; -0{,}56)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}58; -0{,}56)$ hay puntos de inflexión.

$-\infty \quad x_1 \quad x_2 \quad +\infty$

$x - x_1$	$-$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

f) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0) = -16 \Rightarrow (0, -16)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 16 = (x^2+4)(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow$

$x = -2,\ x = 2 \Rightarrow$ (–2, 0) y (2, 0) son los puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

$-\infty \quad -2 \quad 2 \quad +\infty$

x^2+4	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Simetría

$f(-x) = x^4 - 16 = f(x)$, la función es par.

Límites en el infinito

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3$ se anula si $x = 0$.

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, en $(0, -16)$ hay un mínimo relativo.

$-\infty \quad 0 \quad +\infty$

$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2$ se anula si $x = 0$.

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, no hay puntos de inflexión.

$-\infty \quad 0 \quad +\infty$

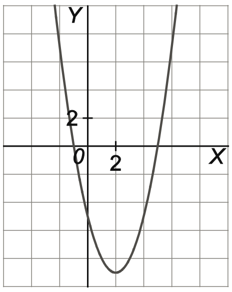
$f''(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cup$

9. Haz el estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y dibuja sus gráficas.

a) $f(x)=x^2-4x-5$ **c)** $f(x)=3x^5-5x^3-1$ **e)** $f(x)=x^4-x^2+2$

b) $f(x)=-x^2+9$ **d)** $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$ **f)** $f(x)=x^4-8x^3+10x^2+1$

a) La gráfica es una parábola cóncava hacia arriba $(\cup)$ con un mínimo absoluto en su vértice $x_v=\frac{4}{2}=2$ ($y_v=-9$) y eje de simetría la recta $x=2$.

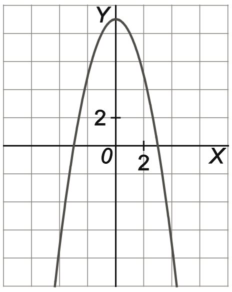


Punto de corte con el eje *Y*: (0, –5) ; y con el eje *X*: (–1, 0) y (5, 0).

Haciendo una tabla de valores se puede hacer un esbozo de la gráfica.

x	–1	0	1	2	3	4	5
y	0	–5	–8	–9	–8	–5	0

b) La gráfica es una parábola cóncava hacia abajo $(\cap)$ con un máximo absoluto en su vértice $x_v=\frac{0}{-2}=0$ ($y_v=9$) y eje de simetría la recta $x=0$.

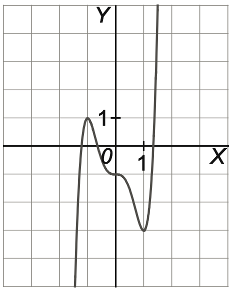


Punto de corte con el eje *Y*: (0, 9) y con el eje *X*:(–3, 0) y (3, 0).

Haciendo una tabla de valores se puede hacer un esbozo de la gráfica.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	5	8	9	8	5	0

c) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



<u>Puntos de corte con los ejes y signo</u>

Corte con el eje *Y*: $f(0)=-1\Rightarrow(0,-1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow 3x^5-5x^3-1=0$, la ecuación no tiene raíces enteras, por lo que no se pueden determinar con exactitud los puntos de corte y al no poder calcular con precisión los puntos de corte con el eje *X*, tampoco se puede hacer un estudio riguroso del signo.

<u>Simetría</u>

$f(-x)=-3x^5+5x^3-1$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

<u>Límites en el infinito</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

<u>Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos</u>

$f'(x)=15x^4-15x^2=15x^2(x+1)(x-1)$ se anula si $x=0$, $x=-1$ o $x=1$.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$x+1$	–	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$x-1$	–	–	–	+
$f'(x)$	+	–	–	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, además, obtenemos que en $(-1,1)$ hay un máximo relativo y en $(1,-3)$ un mínimo relativo.

<u>Curvatura y puntos de inflexión</u>

$f''(x)=60x^3-30x=60x\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ se anula si $x=0$, $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}=x_1$ o $x=\frac{\sqrt{2}}{2}=x_2$.

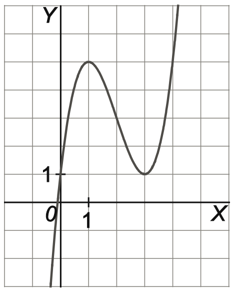
	$(-\infty,x_1)$	$(x_1,0)$	$(0,x_2)$	$(x_2,+\infty)$
$x-x_1$	–	+	+	+
x	–	–	+	+
$x-x_2$	–	–	–	+
$f''(x)$	–	+	–	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, en $(x_1, f(x_1))\simeq(-0{,}71;\ 0{,}24)$, (0, –1) y $(x_2, f(x_2))\approx(0{,}71;\ -2{,}24)$ hay puntos de inflexión.

Este ejemplo sirve para ilustrar que, en ocasiones, no se puede hacer un estudio preciso de alguna de las propiedades de una función, pero eso no impide esbozar su gráfica a partir de la información que sí se puede obtener.

En este caso, los datos obtenidos permiten concluir que la gráfica de *f* corta al eje *X* en dos puntos, y, aunque no se pueda calcular con exactitud estos dos puntos, se puede hacerlaproximadamente. Del mismo modo, los datos obtenidos permiten hacer un estudio del signo de *f*, quizás no preciso, pero símuy aproximado.

d) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0)=1 \Rightarrow (0,\ 1)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow x^3-6x^2+9x+1=0$, la ecuación no tiene raíces enteras, por lo que no se pueden determinar con exactitud los puntos de corte ni tampoco hacer un estudio riguroso del signo.

Simetría

$f(-x)=-x^3-6x^2-9x+1$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$ se anula si $x=1$ o $x=3$.

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.En (1, 5) hay un máximo relativo y en (3, 1) un máximo relativo.

	$-\infty$ a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
$x-1$	−	+	+
$x-3$	−	−	+
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=6x-12=6(x-2)$ se anula si $x=2$.

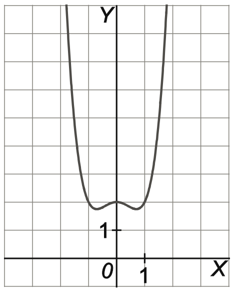
En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$. En(2, 3)hay un punto de inflexión.

	$-\infty$ a 2	2 a $+\infty$
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

Como en el apartado anterior, no podremos hacer un estudio preciso de alguna de las propiedades de una función, pero eso no nos impide esbozar su gráfica a partir de la información que sí podemos obtener.

Alternativamente, se podría hacer un esbozo de la gráfica de $f(x)$ dibujando previamente la gráfica de $g(x)=x^3-6x^2+9x$ y trasladándola una unidad hacia arriba.

e) Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0)=2 \Rightarrow (0,\ 2)$ es el punto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow x^4-x^2+2=0$, es una ecuación bicuadrada sin soluciones reales, por lo que no hay puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La función es positiva en $\mathbb{R}$.

Simetría

$f(-x)=x^4-x^2+2=f(x)$, la función es ni par.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3 - 2x = 4x\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ se anula si $x = 0$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = x_2$.

	$-\infty$ a x_1	x_1 a 0	0 a x_2	x_2 a $+\infty$
$x-x_1$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$x-x_2$	−	−	−	+
$f'(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}71; 1{,}75)$ hay un mínimo relativo, en (0, 2) un máximo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}71; 1{,}75)$ un mínimo relativo.

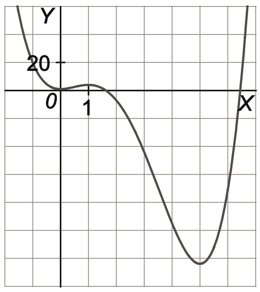
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2 - 2 = 12\left(x+\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{6}}{6} = x_3$ o $x = \frac{\sqrt{6}}{6} = x_4$.

	$-\infty$ a x_3	x_3 a x_4	x_4 a $+\infty$
$x-x_3$	−	+	+
$x-x_4$	−	−	−
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$. En $(x_3, f(x_3)) \simeq (-0{,}41; 1{,}86)$ y $(x_4, f(x_4)) \simeq (0{,}41; 1{,}86)$ hay puntos de inflexión.

f) Es una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje Y: $f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje Y.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1 = 0$, la ecuación no tiene raíces enteras, por lo que no se puede determinar con exactitud los puntos de corte ni hacer un estudio riguroso del signo.

Simetría

$f(-x) = x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 1$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 20x = 4x(x-1)(x-5)$ se anula si $x = 0$, $x = 1$ o $x = 5$.

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a 5	5 a $+\infty$
x	−	+	+	+
$x-1$	−	−	+	+
$x-5$	−	−	−	+
$f'(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.En (0, 1) hay un mínimo relativo, en (1, 4) un máximo relativo y en (5, –124) un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 20 = 12\left(x-\frac{6-\sqrt{21}}{3}\right)\left(x-\frac{6+\sqrt{21}}{3}\right)$ se anula si $x = \frac{6-\sqrt{21}}{3} = x_1$ o $x = \frac{6+\sqrt{21}}{3} = x_2$.

	$-\infty$ a x_1	x_1 a x_2	x_2 a $+\infty$
$x-x_1$	−	+	+
$x-x_2$	−	−	−
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, además, obtenemos que en $(x_1, f(x_1)) \simeq (0{,}47; 2{,}44)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (3{,}53; -70{,}88)$ hay puntos de inflexión.

Alternativamente, podríamos hacer un esbozo de la gráfica de $f(x)$ dibujando previamente la gráfica de $g(x) = x^4 - 8x^3 + 10x^2$ y trasladándola una unidad hacia arriba.

10. Escribe una función polinómica de tercer grado que presente a la vez las tres propiedades siguientes:

I. Es simétrica respecto del origen.

II. Tiene un máximo relativo en el punto (1, 2).

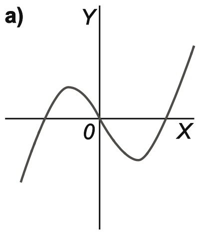
III. Tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

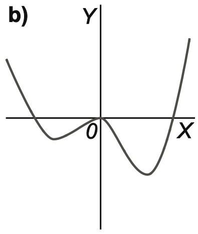
De la condición I se deduce que la función es de la forma $f(x) = ax^3 + bx$.

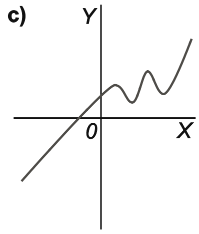
De la condición II : $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1,\ b = 3$.

Por tanto, la función es $f(x) = -x^3 + 3x$, siendo la condición III redundante, ya que es consecuencia de la condición I, cualquier función polinómica de tercer grado que sea simétrica respecto del origen debe tener un punto de inflexión en $x = 0$.

11. Las gráficas siguientes son de funciones polinómicas. Deduce en cada caso cuál es su mínimo grado posible y el signo del coeficiente de mayor grado.







a) Grado 3 y coeficiente principal positivo

b) Grado 4 y coeficiente principal positivo

c) Grado 5 y coeficiente principal positivo

12. Escribe una función polinómica de tercer grado, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $b \neq 0$ sin extremos relativos.

Sirve cualquier función de tercer grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $b \neq 0$ y tal que su derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ no tenga raíces reales o tenga una raíz real doble, es decir, tal que $4b^2 - 12ac \leq 0$. Por ejemplo, $f(x) = x^3 + x^2 + x$.

13. Escribe una función polinómica de tercer grado que tenga un máximo y un mínimo relativos.

Sirve cualquier función de tercer grado $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que su derivada $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ tenga dos raíces reales, es decir, tal que $4b^2 - 12ac > 0$. Por ejemplo, $f(x) = x^3 + x^2$.

14. ¿Es posible encontrar una función polinómica de tercer grado que no tenga ningún punto de inflexión?

No, la segunda derivada de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es $f''(x) = 6ax + 2b$, que cambia se signo en $x = -\dfrac{b}{3a}$, por lo que la función tiene un punto de inflexión.

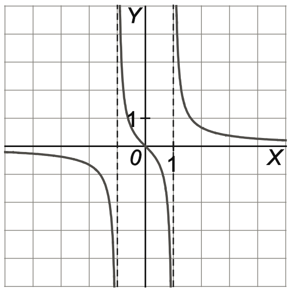
15. Ejercicio resuelto.

16. Realiza un estudio de estas funciones racionales.

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ **e)** $f(x)=\dfrac{x^4-2x^2}{x^2-1}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-9}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ **f)** $f(x)=\dfrac{9x^2}{x^2+x-2}$

a) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-1$ o $x=1$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=0\Rightarrow(0,0)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$

$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Simetría

$f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=-1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=-\dfrac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$ es negativa para $x\in D(f)$, por lo que f es decreciente y no tiene extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

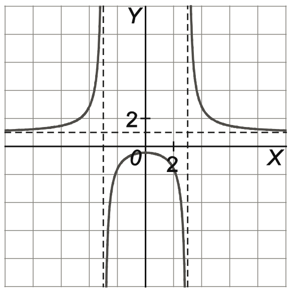
$f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x+1)^3(x-1)^3}$ se anula si $x=0$.

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba o hacia abajo. En $(0, 0)$ hay un punto de inflexión.

$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$

$(x+1)^3$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x-1)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

b) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-3$ o $x=3$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-3,3\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=-\dfrac{4}{9}\Rightarrow\left(0,-\dfrac{4}{9}\right)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^2+4=0$ no tiene solución, la gráfica no corta al eje X.

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

$-\infty$ -3 3 $+\infty$

$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: $\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = -3$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{-26x}{(x^2-9)^2}$ se anula si $x = 0$, es positiva (*f* es creciente) en $(-\infty, -3)\cup(-3, 0)$ y es negativa (*f* es decreciente) en $(0, 3)\cup(3, +\infty)$.

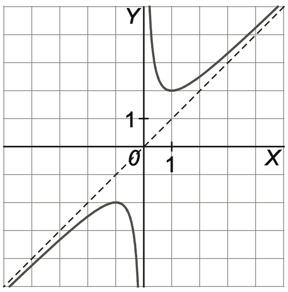
Por tanto, (0, 0) es un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{78x^2+234}{(x^2-9)^3}$ no se anula para ningún valor, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(-\infty, -3)\cup(3, +\infty)$ y es negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $(-3, 3)$.

No hay puntos de inflexión.

c) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x = 0$, así, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definido, la gráfica no corta al eje *Y*.

Eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$ no tiene solución, e la gráfica no corta al eje *X*.

Signo: La función es negativa en $(-\infty, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$.

Simetría

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ la función es impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim_{x\to -0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = x + \dfrac{1}{x}$, por tanto, la recta $y = x$ es asíntota oblicua.

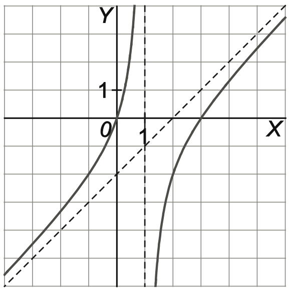
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ se anula si $x = -1$ o $x = 1$, es positiva (*f* es creciente) en $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$ y es negativa (*f* es decreciente) en $(-1, 0)\cup(0, 1)$. Por tanto, (–1, –2) es un máximo relativo y (1, 2) un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ no se anula para ningún valor, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(0, +\infty)$ y es negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $(-\infty, 0)$. No hay puntos de inflexión.

d) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x = 1$, así, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 3 \Rightarrow (0, 0)$ y $(3, 0)$

Signo: La tabla determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	$-\infty$ a 0	0 a 1	1 a 3	3 a $+\infty$
x	−	+	+	+
$x-1$	−	−	+	+
$x-3$	−	−	−	+
$f(x)$	−	+	−	+

Simetría

$f(-x)$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es ni par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x-1} = x - 2 - \dfrac{2}{x-1}$, por tanto, la recta $y = x - 2$ es asíntota oblicua.

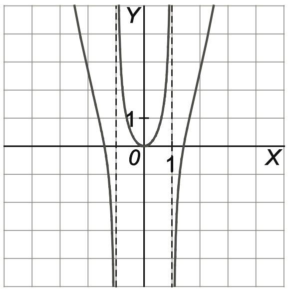
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}$ es positiva para $x \in D(f)$, por lo que f es creciente y no tiene extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{-4}{(x-1)^3}$ no se anula para ningún valor, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-\infty, 1)$ y es negativa (f cóncava hacia abajo) en $(1, +\infty)$. No hay puntos de inflexión.

e) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x = -1$ o $x = 1$, así, $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2\left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2} \Rightarrow \left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$

Signo: La tabla etermina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	$-\infty$ a $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ a $+\infty$
$x+\sqrt{2}$	−	+	+	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	−	+	+
$x+\sqrt{2}$	−	−	−	−	−	+
$f(x)$	+	−	+	+	−	+

Simetría

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical.

Horizontales: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: No tiene porque no cumple la condición de los grados.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

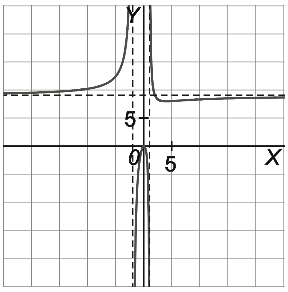
$f'(x)=\dfrac{2x\left(x^4-2x^2+2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0\Rightarrow x=0$. Es positiva ($f$ es creciente) en $(0,1)\cup(1,+\infty)$ y es negativa (f es decreciente) en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$. Por tanto, (0, 0) es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2x^6-6x^4-4}{(x^2-1)^3}$, no podemos determinar con exactitud cuando se anula f'', por lo que no se puede determinar de manera rigurosa la curvatura ni los puntos de inflexión.

f) Dominio y continuidad

El denominador se anula si $x=-2$ o $x=1$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2,1\}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=0\Rightarrow(0,0)$ Eje X: $f(x)=0\Rightarrow 9x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$

Signo: La tabla determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
$x+2$	−	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	+
$f(x)$	+	−	−	+

Simetría

$f(-x)\neq f(x)$ y $f(-x)\neq -f(x)$ la función no es ni par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=1$

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=9$, la recta $y=9$

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{9x(x-4)}{\left(x^2+x-1\right)^2}$ se anula si $x=0$ o $x=4$.

	$-\infty$ a -2	-2 a 0	0 a 1	1 a 4	4 a $+\infty$
x	−	−	+	+	+
$x-4$	−	−	−	−	+
$f'(x)$	+	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↗	↘	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento. (0, 0) es un máximo relativo y (4, 8) un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-18x^3+108x^2+72}{(x^2+x-2)^3}$, no se puede determinar con exactitud cuando se anula, por lo que no se puede determinar de manera rigurosa la curvatura ni los puntos de inflexión.

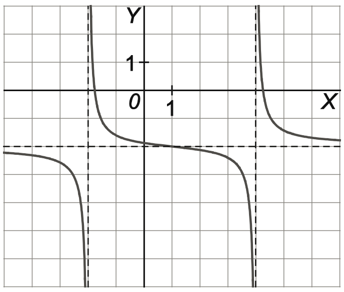
17. Representa una función racional que cumpla que:

- **Sus asíntotas sean las rectas $x=-2$, $x=4$ e $y=-2$.**
- **Su derivada no se anule nunca y sea negativa en todos los puntos en que está definida.**

¿Cuántas veces se anula una función con estas propiedades?

Comenzamos dibujando las asíntotas y después trazamos una función decreciente que se pegue a ellas.

La función debe cortar exactamente dos veces al eje de abscisas luego la función se anula dos veces.



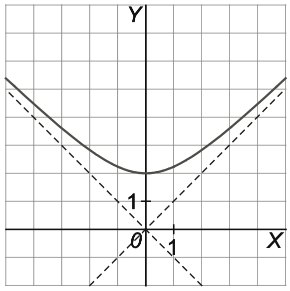
18 y 19. Ejercicios resueltos.

20. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones radicales realizando antes el estudio completo de las mismas.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$

a) Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: x^2+4\ge 0\right\}=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=2\Rightarrow(0,\,2)$; Eje$X$: $f(x)=0\Rightarrow x^2+4=0$, no tiene solución real, no corta al eje X.

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\ge 0$ en su dominio.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: en $+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}{\sqrt{x^2+4}+x}=0$

Por tanto, $y=x$ es asíntota oblicua y como la función es par, también $y=-x$ es asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ se anula si $x=0$, es positiva (f creciente) si $x>0$ y negativa (f decreciente) si $x<0$.

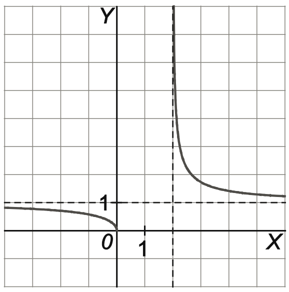
(0, 2) es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$ es siempre positiva en el dominio de f, así que la función es cóncava hacia arriba.

b) Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x}{x-2}\ge 0\right\}=(-\infty,\,0]\cup(2,\,+\infty)$. Es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje$Y$: $f(0)=0\Rightarrow(0,\,0)$ Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\dfrac{x}{x-2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,\,0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\ge 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty\Rightarrow x=2$.Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow y=1$.Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}}<0$, por lo que f es decreciente en su dominio y no tiene extremos relativos.

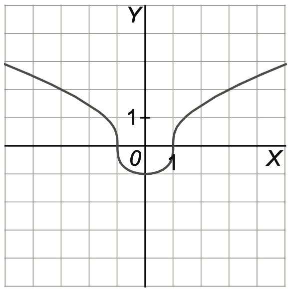
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{(2x-1)}{x(x-2)^3\sqrt{\dfrac{x-2}{x}}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(2,\,+\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,\,0)$. No hay puntos de inflexión.

21. Estudia las funciones radicales siguientes y dibuja sus gráficas.

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x-2}}$

a) Dominio y continuidad



$D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=-1\Rightarrow(0,-1)$. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow(-1, 0)$ y $(1, 0)$

Signo: f es positiva en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $(-1,1)$.

Simetría: $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^3}}=0$ y, de igual manera, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

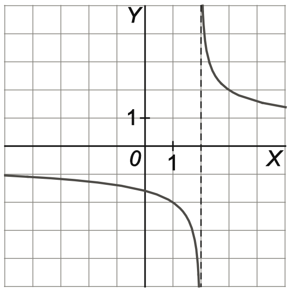
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x\sqrt[3]{x^2-1}}{3(x^2-1)}$, como $\sqrt[3]{x^2-1}$ y x^2-1 tienen el mismo signo para cualquier valor de x, f' se anula si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(0,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,0)$. $(0, 0)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{(-2x^2-6)\sqrt[3]{x^2-1}}{9(x^2-1)^2}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-1,1)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Aunque f'' no está definida en $x=-1$ y $x=1$, $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, hay puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad



$D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{-2}}=-\sqrt[3]{4}\Rightarrow\left(0,-\sqrt[3]{4}\right)\simeq(0;-1{,}59)$

Eje X: $f(x)=0$ no tiene solución, por tanto, la función no corta el eje X.

Signo: f es positiva en $(2,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,2)$.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty\Rightarrow x=2$. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

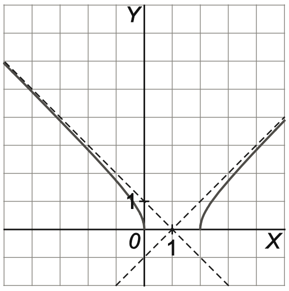
$f'(x)=\dfrac{-2}{3(x-2)\sqrt[3]{x-2}}<0$ si $x\neq2$, por lo que f es decreciente en su dominio y no tiene extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{8}{9(x-2)^2\sqrt[3]{x-2}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(2,+\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,2)$. No hay puntos de inflexión.

22. Realiza el estudio completo y representa:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3+1}{x}}$



a) Dominio y continuidad

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \geq 0\} = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2 \Rightarrow (0, 0)$ y $(2, 0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f \geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas:

En $+\infty$: $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x^2}} = 1$ y

$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2-2x} + x\right)}{\sqrt{x^2-2x} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x} + x} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Por tanto, $y = x - 1$ es asíntota oblicua.

En $-\infty$: $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = -\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2+2x}{x^2}} = -1$ y

$$n = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-2x} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+2x} + x\right)}{\sqrt{x^2+2x} + x} = 1$$

Por tanto, $y = -x + 1$ es asíntota oblicua.

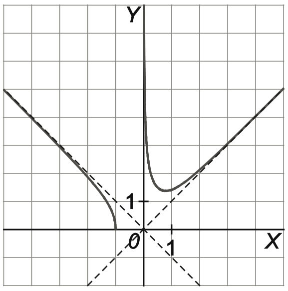
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ es positiva (f creciente) en $(2, +\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty, 0)$.

No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{-1}{x(x-2)\sqrt{x^2-2x}}$ es negativa en $D(f)$,la función es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de inflexión.



b) Dominio y continuidad

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x^3+1}{x} \geq 0\right\} = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, la función no corta al eje Y.

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3+1}{x} = 0 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f \geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$. Horizontales: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas:

En $+\infty$: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3+1}{x^3}} = 1$ y

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} - x \right)\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x \right)}{\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x \right)} = 0$$

Por tanto, $y = x$ es asíntota oblicua.

En $-\infty$: $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{-x^3+1}{-x}}}{-x} = -\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x^3}} = -1$ y

$$n = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x}} + x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{-x^3+1}{-x}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} - x \right)\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x \right)}{\sqrt{\frac{x^3-1}{x}} + x} = 0$$

Por tanto, $y = -x$ es asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \frac{2x^3 - 1}{2x^2\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}} = 0$ si $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} = x_1$ es positiva (f creciente) en $(x_1, +\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty, -1) \cup (0, x_1)$. Por tanto, el punto $(x_1, f(x_1)) \simeq (0{,}79;\ 1{,}37)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

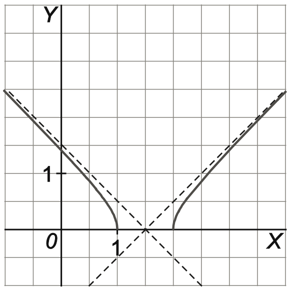
$f''(x) = \frac{3(4x^3+1)}{4x^3(x^3+1)\sqrt{\frac{x^3+1}{x}}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(0, +\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty, -1)$. No hay puntos de inflexión.

23. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones radicales y dibuja sus gráficas.

a) $f(x)=\sqrt{(x-2)(x-1)}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

a) Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:(x-2)(x-1)\geq 0\}=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\sqrt{2}\Rightarrow\left(0,\sqrt{2}\right)$. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow(x-2)(x-1)=0\Rightarrow(1,0)$ y $(2,0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene.Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas:

En $+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)=-\dfrac{3}{2}$, $y=x-\dfrac{3}{2}$ es asíntota oblicua.

En $-\infty$: $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x}=-1$ y $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x\right)=\dfrac{3}{2}$, $y=-x+\dfrac{3}{2}$ es asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

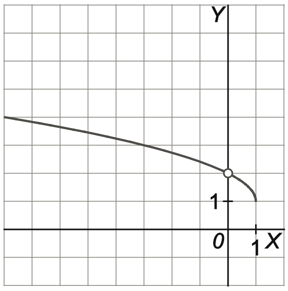
$f'(x)=\dfrac{2x-3}{2\sqrt{(x-2)(x-1)}}$ es positiva (f creciente) en $(2,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,1)$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-1}{4\left(\sqrt{(x-2)(x-1)}\right)^3}$ es negativa en $D(f)$, la función es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:1-x\geq 0,\ 1-x\neq 1\}=(-\infty,1]-\{0\}$. La función es continua en su dominio, en $x=0$ tiene una discontinuidad evitable.



Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje Y: $f(0)$ no está definido, la función no corta al eje Y.

Cortes con el eje X: $f(x)=0$ no tiene solución, la función no corta al eje X.

Signo: f nunca es negativa en su dominio.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: El único punto donde podría tener una asíntota vertical es $x=0$, pero tenemos

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}=2$ por lo que en este punto hay una discontinuidad evitable.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}=+\infty$

Oblicuas: No tiene, ya que $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}}=0$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-2\sqrt{1-x}-x+2}{2(x-2)\sqrt{1-x}-4x+4}$, el numerador se anula si $x=0$, pero f' no está definida en este valor, ya que el denominador también se anula. La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es creciente o decreciente.

	$-\infty$ 0	0 1
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$

Observemos que *f* es decreciente su dominio y no tiene extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

Debido a la complejidad de su estudio no calcularemos f'' (resulta ser negativa en el dominio de *f*).

Aún sin el estudio de la curvatura, disponemos que información suficiente para esbozar la gráfica de *f*.

24. Ejercicio resuelto.

25. Determina el dominio de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas.

a) $f(x)=a^{\sqrt{x^2-1}}$

b) $f(x)=a^{\frac{x}{x+2}}$

c) $f(x)=a^{\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+1}}}$

d) $f(x)=\log_a\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

e) $f(x)=\log_a\sqrt[3]{1-x^2}$

f) $f(x)=\log_a\left(\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}\right)$

a) La función está definida si $x^2-1\geq 0$. Así pues, $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

b) La función está definida si $x+2\neq 0$. Así pues, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$.

c) La función está definida para cualquier valor de *x*. Así pues, $D(f)=\mathbb{R}$.

d) La función está definida si $\dfrac{x-1}{x+1}>0$. Así pues, $D(f)=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

e) La función está definida si $1-x^2>0$. Así pues, $D(f)=(-1,1)$.

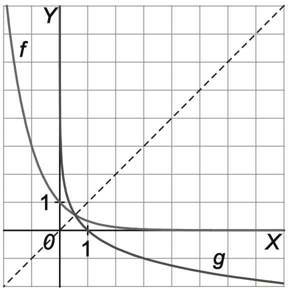
f) La función está definida si $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x}>0$. Como se toma la raíz positiva, la función está definida si $x>0$ y $1-x>0$. Así pues, $D(f)=(0,1)$.

26. En cada caso, representa cada par de funciones.

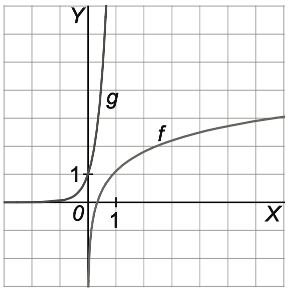
a) $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ y $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}x$

b) $f(x)=\ln 3x$ y $g(x)=e^{3x}$

a)



b)



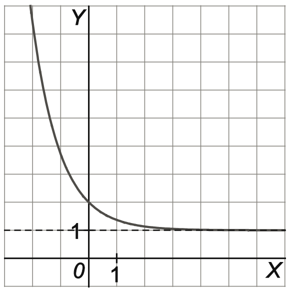
27. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones y dibuja sus gráficas:

a) $f(x) = e^{-x} + 1$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ **e)** $f(x) = \ln(x+1)$ **g)** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

b) $f(x) = x^2 e^x$ **d)** $f(x) = e^{-x^2}$ **f)** $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ **h)** $f(x) = x \ln x$

a) Dominio y continuidad

$D(f) = \mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 2 \Rightarrow (0,\ 2)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow e^{-x} + 1 = 0 \Rightarrow e^{-x} = -1$, no tiene solución, no corta el eje X.

Signo: La función es siempre positiva.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene.Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal en $+\infty$.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

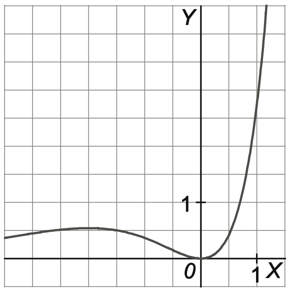
$f'(x) = -e^{-x}$ es negativa (f decreciente) en $\mathbb{R}$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = e^{-x}$ es positiva ($f$cóncava hacia arriba) en $\mathbb{R}$. No hay puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad

$D(f) = \mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

EjY: $f(0) = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$. Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2e^x = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$

Signo: $f \geq 0$ en $\mathbb{R}$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene.Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal en $-\infty$.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

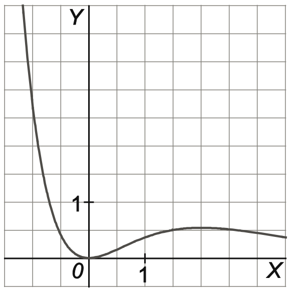
$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$ se anula si $x = -2$ o $x = 0$, es positiva (f creciente) en $(-\infty,\ -2) \cup (0,\ +\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-2,\ 0)$. El punto $(-2,\ 4e^{-2}) \simeq (-2;\ 0{,}54)$ es un máximo relativo y (0, 0) es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$ se anula si $x = -2 - \sqrt{2}$ o $x = -2 + \sqrt{2}$, es positiva ($f$cóncava hacia arriba) en $(-\infty,\ -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2},\ +\infty)$ y negativa ($f$cóncava hacia abajo)en $(-2-\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2})$.

Por tanto, los puntos $\left(-2-\sqrt{2},\ f\left(-2-\sqrt{2}\right)\right) \simeq (-3{,}41;\ 0{,}38)$ y $\left(-2+\sqrt{2},\ f\left(-2+\sqrt{2}\right)\right) \simeq (-0{,}59;\ 0{,}19)$ son puntos de inflexión.

c) No es necesario hacer el estudio de la función si observamos que $f(-x)=\dfrac{(-x)^2}{e^{-x}}=x^2e^x$ es la función del apartado anterior, por lo que la gráfica de f es la simétrica respecto del eje Y de la gráfica del apartado anterior. Si se quisiera resolver, se haría de manera análoga alapartado anterior.



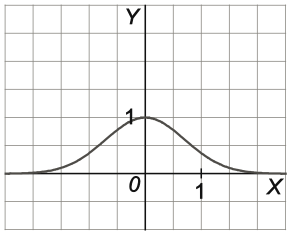
d) Dominio y continuidad

$D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

EjeY: $f(0)=1\Rightarrow(0,\,1)$. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow e^{-x^2}=0$,no tiene solución, no corta el eje X.

Signo: La función es siempre positiva.



Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene.Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=-2xe^{-x^2}=0$ si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(-\infty,\,0)$ y negativa (f decreciente) en $(0,\,+\infty)$.

Por tanto, el punto (0, 1) es un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

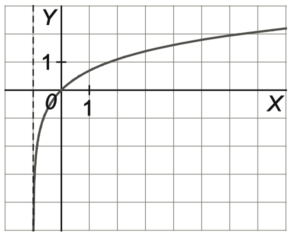
$f''(x)=\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}=0$ si $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, es positiva ($f$cóncava hacia arriba) en $\left(-\infty,\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,+\infty\right)$

y negativa ($f$cóncava hacia abajo)en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Por tanto, los puntos $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\simeq(-0{,}71;\,0{,}61)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\,f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\simeq(0{,}71;\,0{,}61)$ son puntos de inflexión.

e) Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:x+1>0\}=(-1,\,+\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=0\Rightarrow(0,\,0)$. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x+1=1\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,\,0)$

Signo: f es negativa en $x\in(-1,0)$ y positiva en $x\in(0,+\infty)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: La recta $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty\Rightarrow x=-1$ .Horizontales: No tiene. Oblicuas: No tiene.

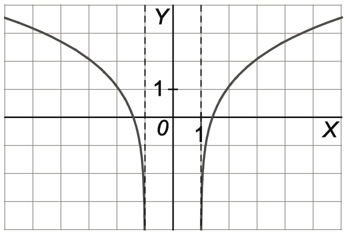
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$ es positiva (f creciente) en el dominio de f. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$ es negativa ($f$cóncava hacia abajo) en el dominio de f. No hay puntos de inflexión.

f) Dominio y continuidad



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1>0\}=(-\infty,\,-1)\cup(1,\,+\infty)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definida, la función no corta el eje *Y*.

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2-1=1\Rightarrow x=-\sqrt{2},\ x=\sqrt{2}\Rightarrow\left(-\sqrt{2},\,0\right)$ y $\left(\sqrt{2},\,0\right)$

Signo: La tabla determina los intervalos en que *f* es positiva o negativa.

	$-\infty$ a $-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$ a -1	-1 a 1	1 a $\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$ a $+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$\nexists$	$-$	$+$

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: Las rectas $x=-1$ e $x=1$ son asíntotas verticales, ya que $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Oblicuas: No tiene, ya que $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

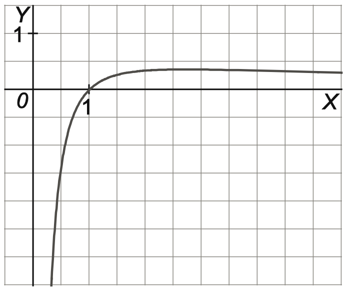
$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$ es positiva (*f* creciente) en $(1,\,+\infty)$ y negativa (*f* decreciente) en $(-\infty,\,-1)$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{-2x^2-2}{\left(x^2-1\right)^2}$ es negativa (*f* cóncava hacia abajo) en el dominio de *f*. No hay puntos de inflexión.

g) Dominio y continuidad

$D(f)=(0,\,+\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definida, la función no corta el eje *Y*.

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow \ln x=0\Rightarrow x=1\Rightarrow(1,\,0)$

Signo: *f* es negativa en $x\in(0\,,1)$ y positiva en $x\in(1\,,+\infty)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty\Rightarrow x=0$. Horizontales: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$. Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e$. La tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es creciente o decreciente. $\left(e,\,e^{-1}\right)$ es un máximo relativo.

	0 a e	e a $+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

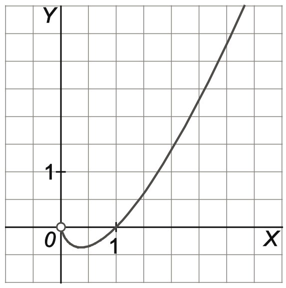
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}=0\Rightarrow 2\ln x-3=0\Rightarrow \ln x=\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$. La tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo o decreciente. El punto $\left(e^{\frac{3}{2}},\,\frac{3e^{-\frac{3}{2}}}{2}\right)$ es un punto de inflexión.

	0 a $e^{\frac{3}{2}}$	$e^{\frac{3}{2}}$ a $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

h) Dominio y continuidad

$D(f) = (0, +\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definida, la función no corta el eje Y.

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$

Signo: f es negativa en $x \in (0, 1)$ y positiva en $x \in (1, +\infty)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, no hay asíntotas verticales.

Horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, no hay asíntotas horizontales.

Oblicuas: No hay asíntotas oblicuas, ya que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 1 + \ln x$ se anula si $x = e^{-1}$. La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

	0 — e^{-1}	e^{-1} — $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

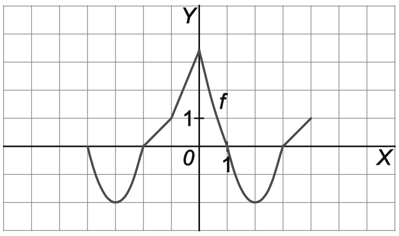
Además, el punto $(e^{-1}, -e^{-1})$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{1}{x}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en el dominio de f. No hay puntos de inflexión.

28. Ejercicio interactivo.

29. La siguiente gráfica corresponde a una función periódica de período 5 en el intervalo [–4, 4].



a) ¿En qué puntos del intervalo [–10, 15] cortará f al eje X?

b) Estudia el signo de la función en el intervalo [–6, 8].

c) Indica los máximos y mínimos relativos de la función en el intervalo [10, 20].

a) La función corta al eje X en los puntos de abscisa $x = 1 + 5k$ y $x = 3 + 5k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, en el intervalo [–10, 15], la función corta al eje X en los puntos de abscisa $x = -9$, $x = -7$, $x = -4$, $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 6$, $x = 8$, $x = 11$ y $x = 13$.

b) En ese intervalo la función es positiva en $[-6, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, 6)$ y negativa en $(-4, -2) \cup (1, 3) \cup (6, 8)$.

c) Tiene máximos relativos en $A(10, 3)$, $B(15, 3)$ y $C(20, 3)$ y mínimos relativos en $D(12, -2)$ y $E(17, -2)$.

30. Estudia la periodicidad de estas funciones y dibuja sus gráficas (recuerda que [*x*] significa "parte entera de *x*").

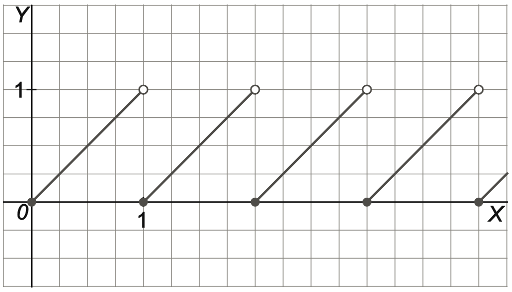
a) $f(x) = x - [x]$ para $x \geq 0$

b) $f(x) =$ "parte decimal de *x*" para $x \geq 0$

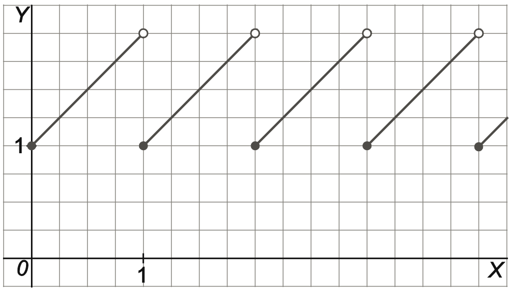
c) $f(x) = x + 1 - [x]$ para $x \geq 0$

d) $f(x) = x -$ "parte decimal de *x*" para $x \geq 0$

a) La función tiene período 1.

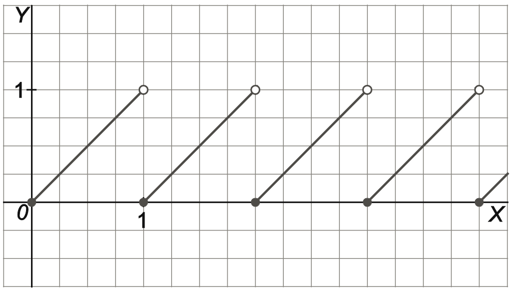


c) La función tiene período 1.

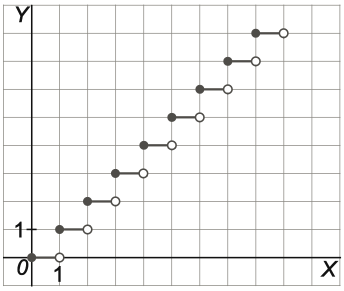


b) Es la misma función del apartado anterior.

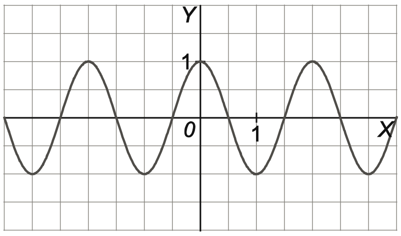
La función tiene período 1.



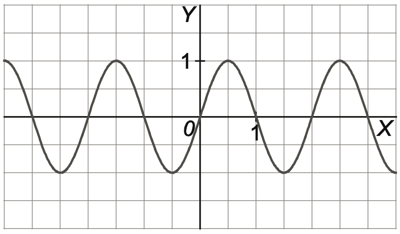
d) La función no es periódica.



31. Representa la gráfica de una función periódica y par.



32. Representa la gráfica de una función impar y periódica.



33. Demuestra que si una función es periódica, de período *T*, se verifica que $f(x+3T) = f(x)$.

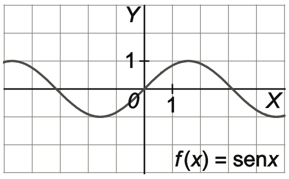
$$f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)$$

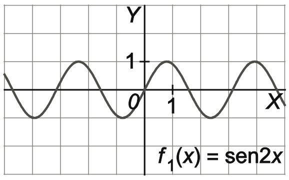
34. Ejercicio resuelto.

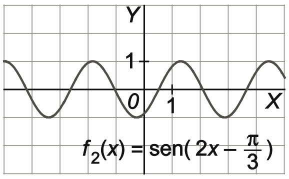
35. Dibuja la gráfica de $f(x) = \text{sen}\, x$ y a partir de ella, dibuja la gráfica de: $g(x) = 3\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

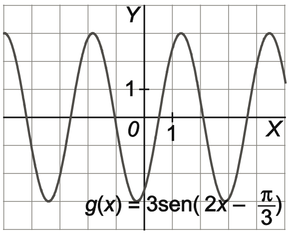
$$f(x) = \text{sen}\, x \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se comprime}\\ \text{horizontalmente}\end{pmatrix} \rightarrow f_1(x) = \text{sen}\, 2x \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se traslada}\\ \text{a la derecha}\end{pmatrix} \rightarrow f_2(x) = \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se dilata}\\ \text{verticalmente}\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow g(x) = 3\,\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$







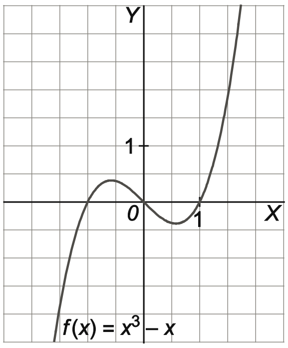


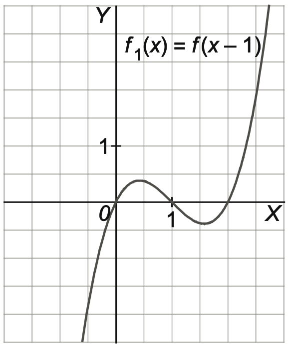
36. A partir de la gráfica de $f(x) = x^3 - x$, dibuja la gráfica de $g(x) = 3 - |f(x-1)|$.

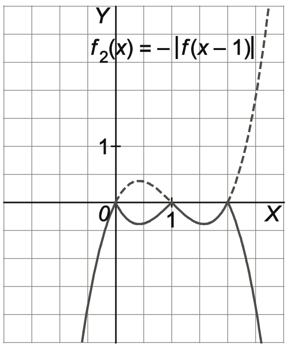
En primer lugar trasladamos la gráfica de $f(x)$ una unidad a la derecha para obtener la gráfica de $f_1(x) = f(x-1)$.

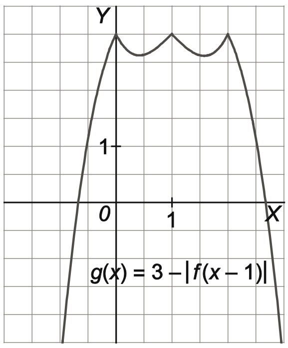
Después reflejamos respecto del eje Xlas zonas en que la gráfica de $f_1(x)$ está por encima del eje X para obtener la gráfica de $f_2(x) = -|f_1(x)| = -|f(x-1)|$.

Finalmente, trasladamos la gráfica de $f_2(x)$ tres unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $g(x) = 3 + f_2(x) = 3 - |f(x-1)|$.









37. Ejercicio interactivo.

38 a 48. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Puntos de corte con los ejes y signo de *f*

49. Para las siguientes funciones, determina el dominio, calcula los puntos de corte con los ejes y estudia el signo según los valores que tome la variable independiente a los largo del dominio. Esboza la gráfica de la función.

a) $f(x)=-x^2+5x+14$

b) $f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)$

c) $f(x)=(x^2+2x)(x-1)^2(x-3)$

d) $f(x)=x(x^2+2)(x^2-1)$

e) $f(x)=\dfrac{x(x^2-9)}{(x+1)(x-1)}$

f) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+9)}{3(x^2+1)}$

g) $f(x)=\dfrac{x(x-5)^2}{(x+1)^2(x-1)}$

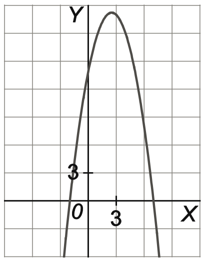
h) $f(x)=\dfrac{(x^2-9)x}{x+3}$

a) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Cortes: Eje Y: $f(0)=14 \Rightarrow A(0,\ 14)$

Eje$X$: $f(x)=0 \Rightarrow -x^2+5x+14=0 \Rightarrow x=-2,\ x=7 \Rightarrow B(-2,\ 0)$ y $C(7,\ 0)$

Signo: $f(x)=-(x+2)(x-7) \Rightarrow f$ es positiva en $(-2,\ 7)$ y negativa en $(-\infty,\ -2)\cup(7,\ +\infty)$.

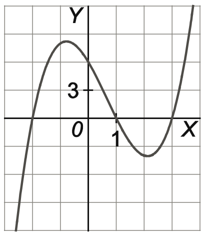


b) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Cortes:Eje Y: $f(0)=6 \Rightarrow A(0,\ 6)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x=-2,\ x=1,\ x=3 \Rightarrow B(-2,\ 0),\ C(1,\ 0)$ y $D(3,\ 0)$

Signo: $f(x)=(x+2)(x-1)(x-3) \Rightarrow$ positiva en $(-2,\ 1)\cup(3,\ +\infty)$ y negativa en $(-\infty,\ -2)\cup(1,\ 3)$

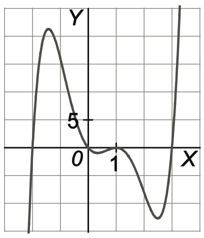


c) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

Cortes:Eje Y: $f(0)=0 \Rightarrow A(0,\ 0)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow (x^2+2x)(x-1)^2(x-3)=0 \Rightarrow x=-2,\ x=0,\ x=1,\ x=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(-2,\ 0),\ A(0,\ 0),\ C(1,\ 0)$ y $D(3,\ 0)$



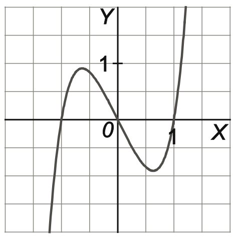
Signo: $f(x)=x(x+2)(x-1)^2(x-3) \Rightarrow f$ es positiva en $(-2,\ 0)\cup(3,\ +\infty)$ y negativa en $(-\infty,\ -2)\cup(0,\ 1)\cup(1,\ 3)$.

d) Dominio: $D(f)=\mathbb{R}$

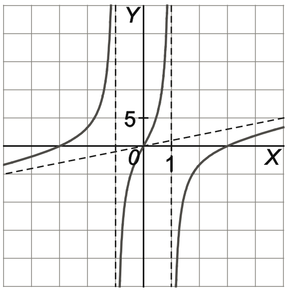
Cortes:Eje Y: $f(0)=0 \Rightarrow A(0,\ 0)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow x(x^2+2)(x^2-1)=0 \Rightarrow x=-1,\ x=0,\ x=1 \Rightarrow$ $B(-1,\ 0),\ A(0,\ 0)$ y $C(1,\ 0)$

Signo: $f(x)=x(x^2+2)(x+1)(x-1) \Rightarrow f$ es positiva en $(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)$ y negativa en $(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)$.



e) <u>Dominio</u>: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$



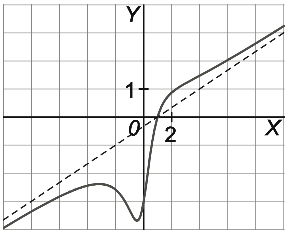
<u>Cortes:</u>Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = -3,\ x = 0,\ x = 3 \Rightarrow B(-3, 0),\ A(0, 0)$ y $C(3, 0)$

<u>Signo</u>: $f(x) = \dfrac{x(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow f$ es positiva en $(-3, -1) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 3)$.

Para esbozar la gráfica basta observar que la función es impar, las rectas $x = -1$, $x = 1$ son asíntotas verticales y la recta $y = x$ es asíntota oblicua.

f) <u>Dominio</u>: $D(f) = \mathbb{R}$



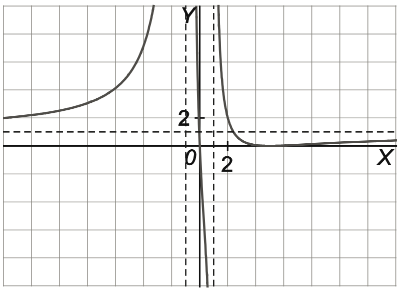
<u>Cortes:</u>Eje Y: $f(0) = -3 \Rightarrow A(0, -3)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+9) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 0)$

<u>Signo</u>: $f(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+9)}{3(x^2+1)} \Rightarrow f$ es positiva en $(1, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, 1)$.

Para esbozar la gráfica basta observar que la recta $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3}$ es asíntota oblicua.

g) <u>Dominio</u>: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$



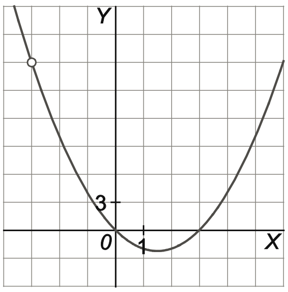
<u>Cortes:</u>Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x(x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 5 \Rightarrow A(0, 0)$ y $B(5, 0)$

<u>Signo</u>: $f(x) = \dfrac{x(x-5)^2}{(x+1)^2(x-1)} \Rightarrow f$ es negativa en $(0, 1)$ y positiva en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, 5) \cup (5, +\infty)$.

Para esbozar la gráfica basta observar que las rectas $x = -1$, $x = 1$ son asíntotas verticales y la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

h) Observemos que si $x \neq -3$ tenemos $f(x) = (x-3)x$, por lo que la gráfica de f es una parábola a la que se le quita el punto $(-3, 18)$.



<u>Dominio</u>: $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

<u>Cortes:</u>Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)x = 0 \Rightarrow x = -3$ (no válido), $x = 0,\ x = 3 \Rightarrow$ $A(0, 0)$ y $B(3, 0)$

<u>Signo</u>: $f(x) = \dfrac{(x+3)(x-3)x}{x+3} = x(x-3)$ si $x \neq -3$, f es positiva en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $(0, 3)$.

50. Calcula los puntos de corte con los ejes de la función $f(x)=x^2+2x+2+\dfrac{10}{x-3}$. Halla su dominio y estudia su signo, según los valores que tome la variable independiente a los largo del dominio.

[Nota: escribe la función dada como cociente de dos polinomios]

$$f(x)=x^2+2x+2+\frac{10}{x-3}=\frac{(x-3)(x^2+2x+2)+10}{x-3}=\frac{x^3-x^2-4x+4}{x-3}=\frac{(x-1)(x+2)(x-2)}{x-3}$$

Dominio: $D(f)=\mathbb{R}-\{3\}$

Cortes: Eje Y: $f(0)=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow A\left(0,-\dfrac{4}{3}\right)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow(x-1)(x+2)(x-2)=0\Rightarrow x=-2,\ x=1,\ x=2\Rightarrow B(-2,0)$, $C(1,0)$ y $D(2,0)$

Signo: f es positiva en $(-\infty,-2)\cup(1,2)\cup(3,+\infty)$ y negativa en $(-2,1)\cup(2,3)$.

Simetría

51. Estudia si las siguientes funciones tienen simetría respecto del eje *Y* o respecto del origen de coordenadas.

a) $f(x)=\dfrac{1}{|x^2+1|}$

b) $f(x)=x(x-1)(x+1)$

c) $f(x)=x^2-3x$

d) $f(x)=x^2(x^2-1)(x^2+1)$

e) $f(x)=\dfrac{x^4+x}{2x+1}$

f) $f(x)=\dfrac{x^4(x^2-9)}{(x+1)(x-1)}$

g) $f(x)=x^2|x|$

h) $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|-x^2}$

i) $f(x)=\text{sen}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

j) $f(x)=\cos\left(\dfrac{x^4+1}{x}\right)$

a) $f(-x)=\dfrac{1}{|(-x)^2+1|}=\dfrac{1}{|x^2+1|}=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

b) $f(-x)=-x(-x-1)(-x+1)=-x(x+1)(x-1)=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) $f(-x)=x^2+3x$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es par ni impar.

d) $f(-x)=x^2(x^2-1)(x^2+1)=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

e) $f(-x)=\dfrac{x^4-x}{-2x+1}$ no coincide con $f(x)$ ni con $-f(x)$, la función no es par ni impar.

f) $f(-x)=\dfrac{x^4(x^2-9)}{(-x+1)(-x-1)}=\dfrac{x^4(x^2-9)}{(x-1)(x+1)}=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

g) $f(-x)=x^2|x|=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

h) $f(-x)=\dfrac{-x^3}{|x|-x^2}=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.

i) $f(-x)=\text{sen}\left(\dfrac{-x}{x^2+1}\right)=\text{sen}\left(-\dfrac{x}{x^2+1}\right)=-\text{sen}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar, es decir, simétrica respecto del origen de coordenadas.

j) $f(-x)=\cos\left(\dfrac{x^4+1}{-x}\right)=\cos\left(-\dfrac{x^4+1}{x}\right)=\cos\left(\dfrac{x^4+1}{x}\right)=f(x)\Rightarrow$ la función es par, es decir, simétrica respecto del eje *Y*.

Funciones polinómicas

52. Una parábola corta los ejes en los puntos (–1, 0), (5, 0) y (0, –10). ¿Cuál es su vértice?

Como una parábola es simétrica con respecto a la recta vertical que pasa por el vértice (el eje), la abscisa del vértice será el punto medio entre las abscisas de los puntos de corte con el eje *X*, así, $x_V = \frac{5-1}{2} = 2$.

Por otro lado, la parábola es de la forma $f(x) = a(x+1)(x-5)$, con lo que $f(0) = -10 \Rightarrow -5a = -10 \Rightarrow a = 2$, es decir, la parábola es $f(x) = 2(x+1)(x-5) = 2x^2 - 8x - 10$ y la ordenada del vértice es $y_V = f(2) = -18$.

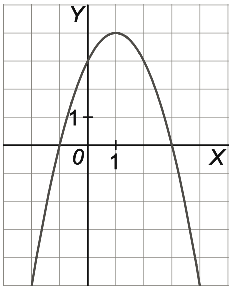
Por tanto, las coordenadas del vértice son $V = (2, -18)$.

53. Haz un estudio completo de las parábolas dadas por:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

b) $f(x) = x^2 + 7x + 10$

a) Es una parábola cóncava hacia abajo $(\cap)$ con un máximo absoluto en su vértice $x_v = \frac{-2}{-2} = 1$ ($y_v = 4$) y eje de simetría la recta $x = 1$.

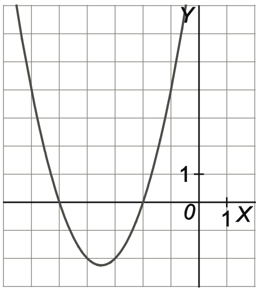


El punto de corte con el eje *Y* es (0, 3) y los puntos de corte con el eje *X* son (–1, 0) y (3, 0).

Haciendo una tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–5	0	3	4	3	0	–5

b) La gráfica es una parábola cóncava hacia arriba $(\cup)$ con un mínimo absoluto en su vértice $x_v = -\frac{7}{2}$ ($y_v = -\frac{9}{4}$) y eje de simetría la recta $x = -\frac{7}{2}$.



El punto de corte con el eje *Y* es (0, 10) y con el eje *X* son (–5, 0) y (–2, 0).

Haciendo una tabla de valores:

x	–6	–5	–4	$-\frac{7}{2}$	–3	–2	–1
y	4	0	–2	$-\frac{9}{4}$	–2	0	4

54. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones polinómicas y esboza sus gráficas.

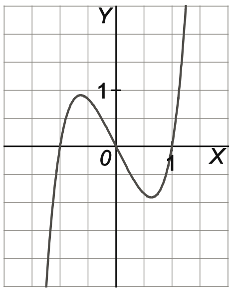
a) $f(x) = x(x^2+2)(x^2-1)$

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$

c) $f(x) = x^6 - 9x^4 - 16x^2 + 144$

d) $f(x) = (x+3)^2(x-2)^2$

a) Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2+2)(x^2-1) = x(x^2+2)(x+1)(x-1) = 0 \Rightarrow$ (–1, 0), (0, 0) y (1, 0)

Signo: La tabla de signos determina los intervalos en los que *f* es positiva o negativa.

Simetría

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ la función es impar.

Límites en el infinito

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+1$	–	+	+	+
x	–	–	+	+
$x-1$	–	–	–	+
x^2+2	+	+	+	+
$f(x)$	–	+	–	+

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{10}}{5} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{10}}{5} = x_2$.

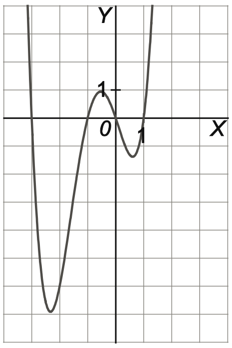
En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}63; 0{,}91)$ hay un máximo relativo y en $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}63; -0{,}91)$ hay un mínimo relativo.

	$-\infty$ x_1	x_1 x_2	x_2 $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 20x^3 + 6x$ se anula si $x = 0$, es positiva (f es cóncava hacia arriba) en $(0, +\infty)$ y negativa (f es cóncava hacia abajo) en $(-\infty, 0)$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

b) Función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x = 0 \Rightarrow (x+3)(x+1)x(x-1) = 0 \Rightarrow (-3, 0), (-1, 0),$ $(0, 0)$ y $(1, 0)$

Signo: f es positiva en $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $x \in (-3, -1) \cup (0, 1)$.

Simetría

La función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

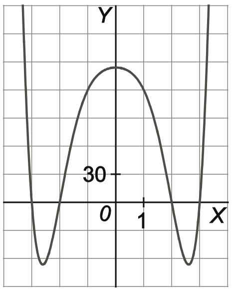
$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 2x - 3 = 0$ no tiene raíces enteras, no se puede determina con exactitud los extremos relativos ni los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ahora bien, hay como mucho tres extremos relativos. Además, como $f'(-3) = -24 < 0$, $f'(-1) = 4 > 0$, $f'(0) = -3 < 0$ y $f'(1) = 8 > 0$, habrá un mínimo relativo con abscisa $x = x_1 \in (-3, -1)$, un máximo relativo con abscisa $x = x_2 \in (-1, 0)$ y otro mínimo relativo con abscisa $x = x_3 \in (0, 1)$, siendo f creciente en $(x_1, x_2) \cup (x_3, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, x_1) \cup (x_2, x_3)$.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2 + 18x - 2 = 0$ si $x = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{105}}{12} = x_4$ o $x = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{105}}{12} = x_5$, es positiva ($f$ es cóncava hacia arriba) en $(-\infty, x_4) \cup (x_5, +\infty)$ y negativa (f es cóncava hacia abajo) en (x_4, x_5). Por tanto, los puntos $(x_4, f(x_4)) \simeq (-1{,}6; -3{,}52)$ y $(x_5, f(x_5)) \simeq (0{,}1; -0{,}32)$ son puntos de inflexión.

c) Función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 144 \Rightarrow (0, 144)$

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x^2+4) = 0 \Rightarrow (-3, 0), (-2, 0), (2, 0)$ y $(3, 0)$

Signo: f es positiva en $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 2) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $x \in (-3, -2) \cup (2, 3)$.

Simetría

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 6x^5 - 36x^3 - 32x = x(6x^4 - 36x^2 - 32) = 0 \Rightarrow x = 0$,

$x = -\sqrt{\dfrac{9+\sqrt{129}}{3}} = x_1$ y $x = \sqrt{\dfrac{9+\sqrt{129}}{3}} = x_2$.

	$-\infty$ … x_1	x_1 … 0	0 … x_2	x_2 … $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}61; -66{,}53)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}61; -66{,}53)$ hay sendos mínimos relativos y en (0, 0) hay un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

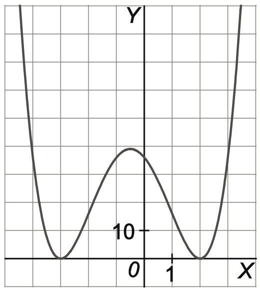
$f''(x) = 30x^4 - 108x^2 - 32 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\dfrac{27+\sqrt{969}}{15}} = x_3$ y $x = \sqrt{\dfrac{27+\sqrt{969}}{15}} = x_4$.

En la tabla se determinan los intervalos donde *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo.En $(x_3, f(x_3)) \simeq (-1{,}97; 5{,}03)$ y $(x_4, f(x_4)) \simeq (1{,}97; 5{,}03)$ hay sendos puntos de inflexión.

	$-\infty$ … x_3	x_3 … x_4	x_4 … $+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

d) Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

Puntos de corte con los ejes y signo



Eje *Y*: $f(0) = 36 \Rightarrow (0, 36)$

Eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+3)^2(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = -3,\ x = 2 \Rightarrow (-3, 0)$ y$(2, 0)$

Signo: *f* es positiva en $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$, nunca es negativa.

Simetría

La función no es par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 22x - 12$ se anula si $x = -3$, $x = -\dfrac{1}{2}$ o $x = 2$.

	$-\infty$ … -3	-3 … $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ … 2	2 … $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. En (–3, 0) y (2, 0) hay sendos mínimos relativos y en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{625}{16}\right) \simeq (-0{,}5; 39{,}06)$ hay un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 12x^2 + 12x - 22 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3-5\sqrt{3}}{6} = x_1$ o $x = \dfrac{-3+5\sqrt{3}}{6} = x_2$

	$-\infty$ … x_1	x_1 … x_2	x_2 … $+\infty$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

En la tabla se determinan los intervalos donde *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (-1{,}94; 17{,}36)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}94; 17{,}36)$ hay sendos puntos de inflexión.

55. Esboza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 36x + 5$

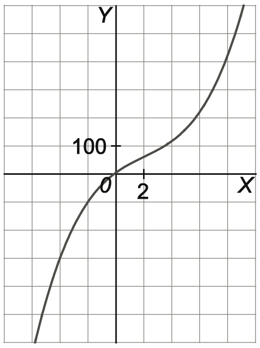
b) $f(x) = 9x^4 - 17x^3 - 46x^2 + 35x + 4$

c) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 + 12x + 5$

d) $f(x) = -4(x-1)^2(x-3)^2$

e) $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)$

a) La ecuación $x^3 - 6x^2 + 36x + 5 = 0$ no es sencilla de resolver, ya que no tiene raíces enteras. Se estudia y esboza la gráfica de $g(x) = x^3 - 6x^2 + 36x$, obteniendo la gráfica de $f(x)$ trasladandor la de $g(x)$ 5 unidades hacia arriba.



Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $g(0) = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$

Eje X: $g(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 36x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 6x + 36\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,\ 0)$

Signo: La función g es negativa en $(-\infty,\ 0)$ y positiva en $(0,\ +\infty)$.

Simetría

La función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

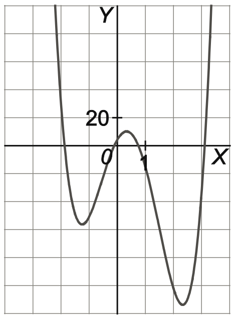
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$g'(x) = 3x^2 - 12x + 36$ es siempre positiva, por tanto g es creciente en $\mathbb{R}$ y no tiene extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$g''(x) = 6x - 12$ se anula si $x = 2$, es positiva (g cóncava hacia arriba) en $(2,\ +\infty)$ y negativa (g cóncava hacia abajo) en $(-\infty,\ 2)$. (2, 56) es un punto de inflexión.

b) En este caso, no es sencillo resolver ni $9x^4 - 17x^3 - 46x^2 + 35x + 4 = 0$ ni $9x^4 - 17x^3 - 46x^2 + 35x = 0$, por lo que no sedispone de información precisa sobre los puntos de corte con el eje X ni sobre el signo de f.



Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 4 \Rightarrow (0,\ 4)$

Eje X: Como $f(-1) = -51$, $f(0) = 4$ y $f(1) = -15$, habrá un punto de corte en el intervalo $(-1,\ 0)$ y otro en $(0,\ 1)$. Además, como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, hay otros dos puntos de corte, uno a la izquierda de –1 y otro a la derecha de 1. Como la función tiene grado 4, estos son todos los puntos de corte.

[NOTA: Se puede ser más preciso calculando más valores de f, uno de los puntos de corte está en $(-2,\ -1)$ y el otro en $(3,\ 4)$]

Signo: No se puede determinar con precisión, pero lamando $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ a las abscisas de los puntos de corte con el eje Xse tiene que f es positiva en $(-\infty,\ x_1) \cup (x_2,\ x_3) \cup (x_4,\ +\infty)$ y negativa en $(x_1,\ x_2) \cup (x_3,\ x_4)$.

Simetría

La función no es ni par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=36x^3-51x^2-92x+35=0$ si $x=-\frac{5}{4}$, $x=\frac{1}{3}$ o $x=\frac{7}{3}$

	$-\infty$ … $-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$ … $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ … $\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$ … $+\infty$
$f'(x)$	−	+	−	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

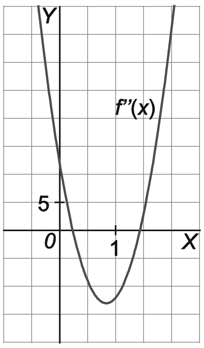
En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. En $\left(-\frac{5}{4},-\frac{14\,451}{256}\right)\simeq(-1{,}25;\ -56{,}5)$ y $\left(\frac{7}{3},-\frac{3077}{27}\right)\simeq(2{,}33;\ -113{,}96)$ hay sendos mínimos relativos y en $\left(\frac{1}{3},\frac{271}{27}\right)\simeq(0{,}33;\ 10{,}04)$ hay un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=108x^2-102x-92=0$ si $x=\frac{17-\sqrt{1393}}{36}=x_5$ o $x=\frac{17+\sqrt{1393}}{36}=x_6$, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(-\infty,\ x_5)\cup(x_6,\ +\infty)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $(x_5,\ x_6)$.

Así, $(x_5,\ f(x_5))\simeq(-0{,}56;\ -26{,}45)$ y $(x_6,\ f(x_6))\simeq(1{,}51;\ -59{,}68)$ son puntos de inflexión.

c) Es este caso no es fácil obtener los ceros de la función (cortes con el eje *X*), ni siquiera los ceros de la derivada, $f'(x)=12x^3-30x^2+12x+12$. Así que se trabajará a partir de $f''(x)=36x^2-60x+12$.

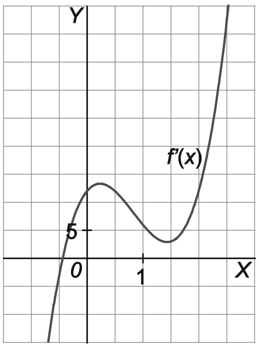


La gráfica de f'' es una parábola cóncava hacia arriba $(\cup)$ con un mínimo absoluto en su vértice $x_v=\frac{60}{72}=\frac{5}{6}\simeq0{,}83$ ($y_v=-13$) y eje de simetría la recta $x=\frac{5}{6}$.

El punto de corte con el eje *Y* es (0, 12) y los puntos de corte con el eje *X* son $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6},\ 0\right)\simeq(0{,}23;\ 0)$ y $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6},\ 0\right)\simeq(1{,}43;\ 0)$.

Haciendo una tabla de valores se esboza la gráfica de f'' y conocida esta, la de f':

Como es una función polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas, además, $f'(0)=12$, por lo que corta al eje *Y* en el punto (0, 12). Por otra parte, f' no es par ni impar, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

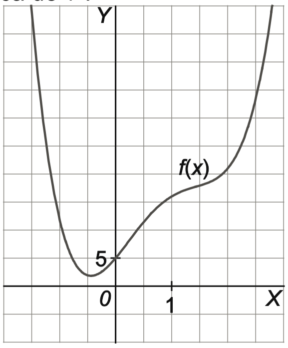


Llamando $x_1=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ y $x_2=\frac{5+\sqrt{13}}{6}$, f' será creciente en $(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$ y decreciente en $(x_1,\ x_2)$, por lo que tendrá un máximo relativo en $(x_1,\ f'(x_1))\simeq(0{,}23;\ 13{,}32)$ y un mínimo relativo en $(x_2,\ f'(x_2))\simeq(1{,}43;\ 2{,}9)$.

De estos datos se deduce que f' tiene un único punto de corte con el eje *X*, además, como $f'(-1)=-42<0$ y $f'(0)=12>0$, la abscisa de dicho punto de corte, x_3, verifica $-1<x_3<0$, siendo f' positiva en $(x_3,\ +\infty)$ y negativa en $(-\infty,\ x_3)$.

La segunda derivada de f', $f'''(x)=72x-60$, se anula si $x=\frac{5}{6}$, es positiva (f' cóncava hacia arriba) en $\left(\frac{5}{6},\ +\infty\right)$ y negativa (f' cóncava hacia abajo) en $\left(-\infty,\ \frac{5}{6}\right)$. $\left(\frac{5}{6},\ f'\left(\frac{5}{6}\right)\right)\simeq(0{,}83;\ 8{,}11)$ es un punto de inflexión.

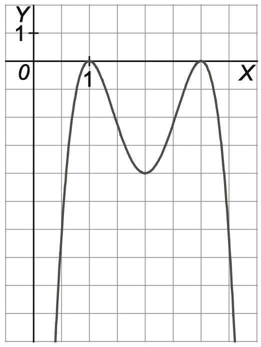
Con esta información se esboza la gráfica de f' y, a partir de ella, finalmente la gráfica de f:



Al ser una función polinómica su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas. Como $f(0)=5$, corta al eje *Y* en el punto (0, 5). f no es par ni impar y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

La función *f* será creciente en $(x_3,\ +\infty)$ y decreciente en $(-\infty,\ x_3)$, presentando un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=x_3$. La función *f* será cóncava hacia arriba en $(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$ y hacia abajo en $(x_1,\ x_2)$, por lo que tendrá puntos de inflexión en $(x_1,\ f(x_1))\simeq(0{,}23;\ 13{,}32)$ y $(x_2,\ f(x_2))\simeq(1{,}43;\ 2{,}9)$.

d) Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0) = -36 \Rightarrow (0, -36)$

Eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow -4(x-1)^2(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3 \Rightarrow$ (1, 0) y (3, 0)

Signo: La función es negativa en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$, nunca es positiva.

Simetría

La función no es par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = -4\left[2(x-1)(x-3)^2 + 2(x-1)^2(x-3)\right] = -8(x-1)(x-3)(2x-4) =$

$= -16(x-1)(x-3)(x-2)$ se anula si $x = 1$, $x = 2$ o $x = 3$.

	$-\infty$ 1	1 2	2 3	3 $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+	−
$f(x)$	↗	↘	↗	↘

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*. En (1, 0) y (3, 0) hay sendos máximos relativos y en (2, –4) hay un mínimo relativo.

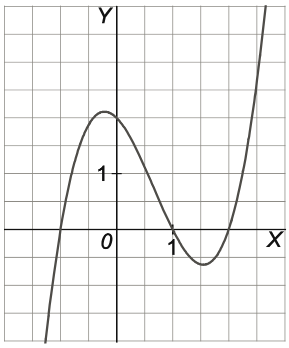
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = -48x^2 + 192x - 196 = 0 \Rightarrow x = \frac{6-\sqrt{3}}{3} = x_1$ o $x = \frac{6+\sqrt{3}}{3} = x_2$

	$-\infty$ x_1	x_1 x_2	x_2 $+\infty$
$f''(x)$	−	+	−
$f(x)$	∩	∪	∩

En la tabla se determinan los intervalos donde *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo. En $(x_1, f(x_1)) \simeq (1{,}42; -1{,}78)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (2{,}58; -1{,}78)$ hay sendos puntos de inflexión.

e) Función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$

Eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow$ (–1, 0), (1, 0) y (2, 0)

Signo: *f* es negativa en $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$ y positiva en $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$

Simetría

La función no es par ni impar.

Límites en el infinito

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$ se anula si $x = \frac{2-\sqrt{7}}{3} = x_1$ o $x = \frac{2+\sqrt{7}}{3} = x_2$.

	$-\infty$ x_1	x_1 x_2	x_2 $+\infty$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

En la tabla se determinan los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.Además, $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}22; 2{,}11)$ es un máximo relativo y $(x_2, f(x_2)) \simeq (1{,}55; -0{,}63)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = 6x - 4$ se anula si $x = \frac{2}{3}$, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$. $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{20}{27}\right) \simeq (0{,}67; 0{,}74)$ es un punto de inflexión.

Funciones racionales

56. Encuentra las asíntotas de estas funciones.

a) $f(x) = \frac{-6x^2}{x^2+1}$

b) $g(x) = \frac{x^5}{x^4+1}$

c) $h(x) = \frac{x}{x^3+8}$

d) $k(x) = \frac{x^2+x}{x^3+x^2-2x-2}$

a) Asíntotas verticales: Observemos que $D(f) = \mathbb{R}$, por tanto, no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-6x^2}{x^2+1} = -6$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-6x^2}{x^2+1} = -6$, la recta $y = -6$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No tiene.

b) Asíntotas verticales: Observemos que $D(g) = \mathbb{R}$, por tanto, no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^5}{x^4+1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^5}{x^4+1} = +\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: Sí tiene, ya que cumple la condición de los grados. Dividiendo tenemos $x^5 = x(x^4+1) - x \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = \frac{x^5}{x^4+1} = x - \frac{x}{x^4+1}$, por lo que la recta $y = x$ es asíntota oblicua.

c) Asíntotas verticales: Observemos que $D(h) = \mathbb{R} - \{-2\}$, por lo que puede tener una asíntota vertical en $x = -2$.

$\lim\limits_{x\to-2^-} \frac{x}{x^3+8} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+} \frac{x}{x^3+8} = -\infty$, la recta $x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+8} = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3+8} = 0$, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: No tiene.

d) Asíntotas verticales: Observemos que $D(k) = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}\right\}$, por lo que puede tener asíntotas verticales en $x = -\sqrt{2}$, $x = -1$ y $x = \sqrt{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-} k(x) = \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-} \frac{x(x+1)}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)(x+1)} = \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-} \frac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^+} k(x) = \lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^+} \frac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -\sqrt{2} \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} k(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} k(x) = \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{2} \text{ es asíntota vertical.}$$

En cambio, $x = -1$ no es asíntota vertical, de hecho, en $x = -1$ la función presenta una discontinuidad evitable, ya que $\lim\limits_{x\to-1} k(x) = \lim\limits_{x\to-1} \frac{x}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)} = 1$.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+x}{x^3+x^2-2x-2} = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+x}{x^3+x^2-2x-2} = 0$, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

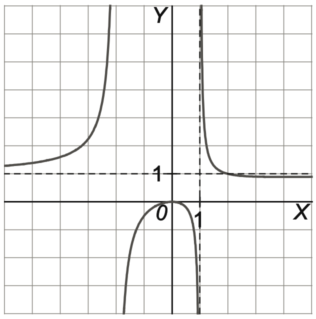
Asíntotas oblicuas: No tiene.

57. Realiza un estudio completo de las siguientes funciones racionales y esboza, en cada caso, su gráfica.

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$ **e)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4x+4}$ **g)** $f(x)=\dfrac{5}{x^4-x^2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ **d)** $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **f)** $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}$ **h)** $f(x)=\dfrac{-2x^3}{x+2}$

a) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-2$ o $x=1$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2, 1\}$.

La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0\Rightarrow(0,\ 0)$ Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,\ 0)$

Signo: *f* es positiva en $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $x\in(-2, 0)\cup(0, 1)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=-\infty$, la recta $x=-2$

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$, la recta $x=1$

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, la recta $y=1$, que corta a la curva en $\dfrac{x^2}{x^2+x-2}=1\Rightarrow x=2\Rightarrow P(2,1)$

Oblicuas: No tiene.

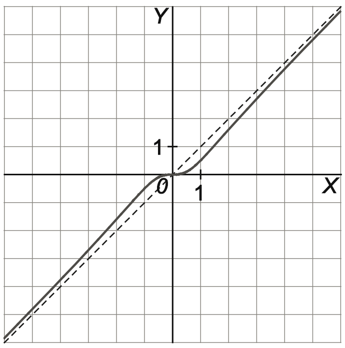
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x}{\left(x^2+x-2\right)^2}$ se anula si $x=0$ o $x=4$, es positiva (*f* creciente) en $(-\infty,-2)\cup(-2, 0)\cup(4,+\infty)$ y es negativa (*f* decreciente) en $(0, 1)\cup(1, 4)$. (0, 0) es un máximo relativo y $\left(4, \dfrac{8}{9}\right)\simeq(4;\ 0{,}89)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-2x^3+12x^2+8}{\left(x^2+x-2\right)^3}$, al no determinar con exactitud cuando se anula f'', no se puede determinar de manera rigurosa la curvatura ni los puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad



El denominador no se anula, $D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0\Rightarrow(0,\ 0)$. Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x^3=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,\ 0)$

Signo: La función es positiva en $(0,+\infty)$ y negativa en $(-\infty, 0)$.

Simetría

$f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Oblicuas: Cumple la condición de los grados. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}=x-\dfrac{x}{x^2+1}$, $y=x$ es la asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

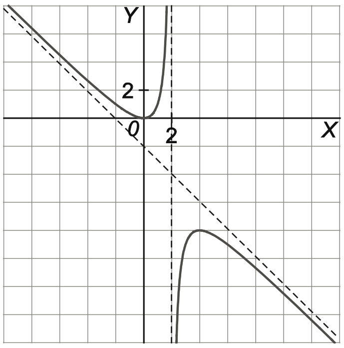
$f'(x)=\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ se anula si $x=0$ y es positiva (*f* es creciente) si $x\neq 0$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-2x^3+6x}{\left(x^2+1\right)^3}$ se anula si $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ o $x=\sqrt{3}$, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\sqrt{3}\right)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $\left(-\sqrt{3},0\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

Así, los puntos $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)\simeq\left(-1{,}73;-1{,}3\right)$ y $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)\simeq\left(1{,}73;1{,}3\right)$ son puntos de inflexión.

c) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=2$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{2\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0\Rightarrow(0,0)$

Eje*X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$

Signo: La función es positiva en $(-\infty,2)$ y negativa en $(2,+\infty)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-\infty$, la recta $x=2$ es una asíntota vertical.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$.

Oblicuas: Sí tiene porque cumple la condición de los grados. Dividiendo tenemos $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}=-x-2+\dfrac{4}{2-x}$, por lo que $y=-x-2$ es la asíntota oblicua.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

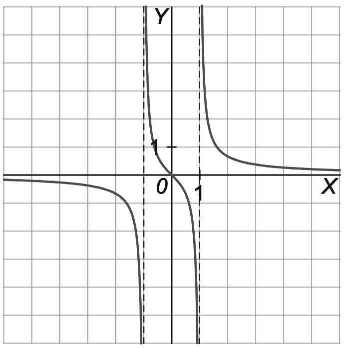
$f'(x)=\dfrac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$ se anula si $x=0$ o $x=4$, es positiva (*f* creciente) en $(0,2)\cup(2,4)$ y negativa (*f* decreciente) en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$. Por tanto, (0, 0) es un mínimo relativo y (4, –8) un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{8}{(2-x)^3}$ es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(-\infty,2)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $(2,+\infty)$.

No hay puntos de inflexión.

d) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-1$ o $x=1$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0\Rightarrow(0,0)$ Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$

Signo: *f* es positiva en $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$ y negativa en $x\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

Simetría

$f(-x)=-f(x)\Rightarrow$ la función es impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=+\infty\Rightarrow x=-1$. $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty\Rightarrow x=1$

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, la recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

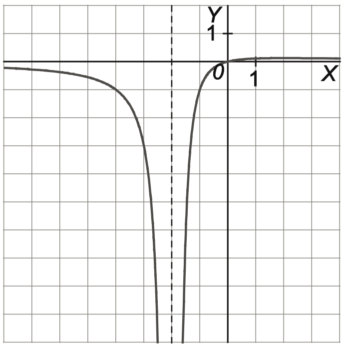
$f'(x)=\dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ es negativa (*f* decreciente) en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}$ se anula si $x=0$. En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba o hacia abajo. En (0, 0) hay un punto de inflexión.

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a 1	1 a $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

e) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-2$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$.

La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=0\Rightarrow(0,0)$. Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,0)$

Signo: *f* es positiva en $(0,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=-\infty\Rightarrow x=-2$ Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$

Oblicuas: No tiene.

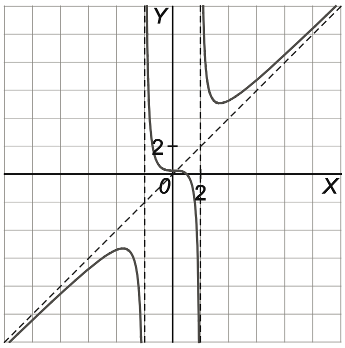
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-x+2}{(x+2)^3}$ se anula si $x=2$, es positiva (*f* creciente) en $(-2,2)$ y negativa (*f* decreciente) en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. El punto $\left(2,\dfrac{1}{8}\right)=(2;\,0{,}125)$ es un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2x-8}{(x+2)^4}=0\Rightarrow x=4$, es positiva (*f* es cóncava hacia arriba) en $(4,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,-2)\cup(-2,4)$. El punto $\left(4,\dfrac{1}{9}\right)\simeq(4;\,0{,}11)$ es un punto de inflexión.

f) Dominio y continuidad



$D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right) = (0;\ 0{,}25)$ Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow$ $(1, 0)$

Signo: f es positiva en $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -2) \cup (1, 2)$.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -2$. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 2$

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Oblicuas: Dividiendo tenemos $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4} = x + \frac{4x - 1}{x^2 - 4}$, por lo que $y = x$ es la asíntota oblicua.

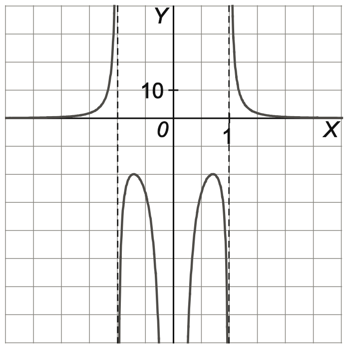
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2 + 2x}{\left(x^2 - 4\right)^2}$, no se puede determinar con exactitud cuando se anula f' (salvo $x = 0$), por lo que no se puede determinar de manera rigurosa los intervalos de crecimiento y decrecimiento ni los extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{8x^3 - 6x^2 + 96x - 8}{\left(x^2 - 4\right)^3}$, no se puede determinar con exactitud cuando se anula f'' por lo que no se puede determinar de manera rigurosa la curvatura ni los puntos de inflexión.

g) Dominio y continuidad



$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, la gráficano corta al eje Y.

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow 5 = 0$ no tiene solución, la gráfica no corta al eje X.

Signo: f es positiva en $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Simetría: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -1$. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$

Horizontales: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \frac{-20x^2 + 10}{x^3\left(x^2 - 1\right)^2}$, se anula si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = x_2$.

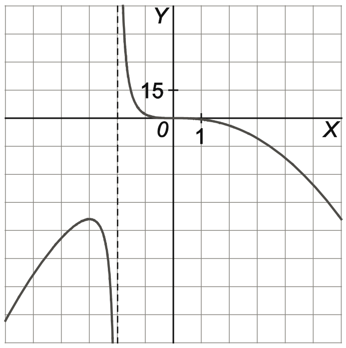
	$(-\infty, -1)$	$(-1, x_1)$	$(x_1, 0)$	$(0, x_2)$	$(x_2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	−	+	−	−
$f(x)$	↗	↗	↘	↗	↘	↘

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es creciente o decreciente. $(x_1, f(x_1)) \simeq (-0{,}71;\ -20)$ y $(x_2, f(x_2)) \simeq (0{,}71;\ -20)$ son máximos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{100x^4 - 90x^2 + 30}{x^4\left(x^2 - 1\right)^3}$ no se anula, por lo que no hay puntos de inflexión. La segunda derivada es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

h) Dominio y continuidad



El denominador se anula si $x=-2$, así, $D(f)=\mathbb{R}-\{-2\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=0 \Rightarrow (0, 0)$

Eje X: $f(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ (0, 0)

Signo: La función es positiva en $(-2, 0)$ y negativa en $(-\infty, -2)\cup(0, +\infty)$.

Simetría

La funciónno es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$, la recta $x=-2$ es una asíntota vertical.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Oblicuas: No tiene, ya que no cumple la condición de los grados.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-4x^2(x+3)}{(x+2)^2}$, se anula si $x=-3$ o $x=0$.

	$-\infty$ a -3	-3 a -2	-2 a 0	0 a $+\infty$
$f'(x)$	+	–	–	–
$f(x)$	↗	↘	↘	↘

En la tabla se determinanlos intervalos de crecimiento y decrecimiento. (–3, –54) es un máximo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

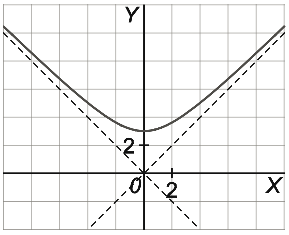
$f''(x)=\dfrac{-4x(x^2+6x+12)}{(x+2)^3}$ se anula si $x=0$, es positiva es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-2, 0)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty, -2)\cup(0, +\infty)$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

Funciones radicales

58. Haz el estudio completo y dibuja la gráfica de las siguientes funciones radicales.

a) $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ **b)** $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

a) Dominio y continuidad



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2+9\geq 0\}=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje*Y*: $f(0)=3\Rightarrow(0,\,3)$.

Eje*X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2+9=0$, no tiene solución real, no corta al eje *X*.

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)}{\sqrt{x^2+9}+x}=0$

$y=x$ es la asíntota oblicua por la derecha, y al ser *f* par, $y=-x$ lo es por la izquierda.

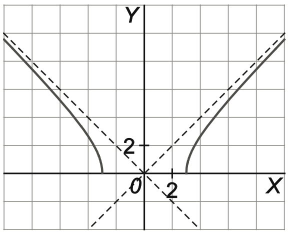
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=0\Rightarrow x=0$, es positiva (*f* creciente) si $x>0$ y negativa (*f* decreciente) si $x<0$. (0, 3) es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$ es siempre positiva en el dominio de *f*, así que la función es cóncava hacia arriba.

b) Dominio y continuidad



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-9\geq 0\}=(-\infty,\,-3]\cup[3,\,+\infty)$. Es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definido, no corta al eje *Y*.

Eje*X*: $f(x)=0\Rightarrow x^2-9=0\Rightarrow(-3,\,0)$ y $(3,\,0)$.

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: No tiene. Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)}{\sqrt{x^2-9}+x}=0$

$y=x$ es la asíntota oblicua por la derecha, y al ser *f* par, $y=-x$ lo es por la izquierda.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}=0$ si $x=0\notin D(f)$, es positiva (*f* creciente) si $x>3$ y negativa (*f* decreciente) si $x<3$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{-9}{(x^2-9)\sqrt{x^2-9}}$ es siempre negativa en el dominio de *f*, así que la función es cóncava hacia abajo.

59. Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x}}{x-2}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+3}$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$

a) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x+2\geq 0,\ x\neq 0\}=[-2,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

b) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x+6\geq 0,\ x\neq 2\}=[-6,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$

c) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-1\geq 0,\ x\neq -3\}=(-\infty,\ -3)\cup(-3,\ -1]\cup[1,\ +\infty)$

d) $D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2+1\geq 0,\ x^2\neq 1\}=\mathbb{R}-\{-1,\ 1\}$

60. Estudia y representa las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

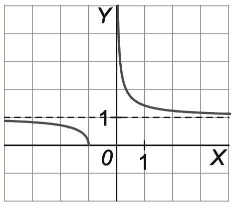
b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-1}}$

c) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}$

d) $f(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

a) Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}: \dfrac{x+1}{x}\geq 0\right\}=(-\infty,\ -1]\cup(0,\ +\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, no corta al eje Y.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow(-1,\ 0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales:La recta $x=0$ es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, la recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

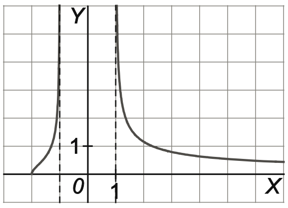
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{-1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}$ es negativa (f decreciente) en el dominio de f. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{4x+3}{4x^3(x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}}$ se anula en $x=-\dfrac{3}{4}$ (que no pertenece al dominio de f), es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(0,\ +\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,\ -1)$. No hay puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x+2}{x^2-1}\geq 0\right\}=[-2,-1)\cup(1,+\infty)$. Es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, no corta al eje Y. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x+2=0\Rightarrow(-2,0)$
Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: Las rectas $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales, ya que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

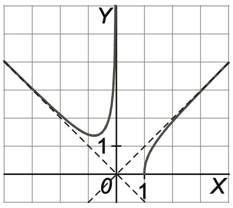
$f'(x)=-\dfrac{x^2+4x+1}{2\left(x^2-1\right)^2\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-1}}}$ se anula si $x=-2-\sqrt{3}$ o $x=-2+\sqrt{3}$ (que no pertenecen al dominio de f),es positiva (f creciente) en $(-2,-1)$ y negativa (f decreciente) en $(1,+\infty)$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

Debido a su complejidad, no calculamos f'', con la información disponible se hace un esbozo de la gráfica de f.

c) Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x^3-1}{x}\geq 0\right\}=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, no corta al eje Y. Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^3-1=0\Rightarrow(1,0)$
Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty\Rightarrow x=0$. Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

Oblicuas: En $+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}}{x}=1$ y $n=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}-x\right)=0$

$y=x$ es asíntota oblicua por la derecha.

En $-\infty$: $m=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}}{x}=-1$ y $n=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}+x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\dfrac{-x^3-1}{-x}}-x\right)=0$

$y=-x$ es asíntota oblicua por la izquierda.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x^3+1}{2x^2\sqrt{\dfrac{x^3-1}{x}}}$ se anula si $x=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=x_1$,es positiva ($f$ creciente) en $(x_1,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,-1)\cup(0,x_1)$. $(x_1,f(x_1))\simeq(-0{,}79;\ 1{,}37)$ es un mínimo relativo.

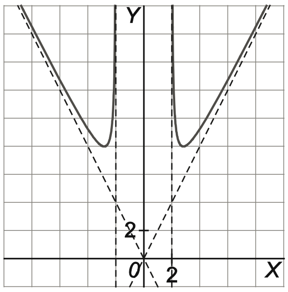
Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)\neq 0$ en el dominio, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-\infty,-1)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(0,+\infty)$. No hay puntos de inflexión.

d) Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-4>0\}=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo



Eje Y: $f(0)$ no está definido, no corta al eje Y.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow 2x^2=0\Rightarrow x=0$, pero este valor no pertenece al dominio de f, por lo que no corta al eje X.

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: Las rectas $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales, ya que $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Oblicuas:

En $+\infty$: $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}=2$ y

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}-2x\right)\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}+2x\right)}{\left(\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-4}}+2x\right)}=0$$

Por tanto, $y=2x$ es asíntota oblicua por la derecha.

En $-\infty$: Como la función es par $y=-2x$ es asíntota oblicua por la izquierda.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x^3-16x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ se anula si $x=0$ (que no pertenece al dominio de f), $x=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ o $x=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$.

En la tabla se determinan los intervalos en los que f es creciente o decreciente.

	$-\infty$ — $-2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$ — -2	-2 — 2	2 — $2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$ — $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	…	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	∄	↘	↗

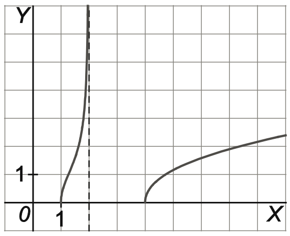
Los puntos $(-2\sqrt{2}, 8)\neq(-2{,}83;\ 8)$ y $(2\sqrt{2}, 8)\neq(2{,}83;\ 8)$ son mínimos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{8x^4+64}{(x^2-4)^2\sqrt{x^2-4}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en el dominio de f. No hay puntos de inflexión.

61. Dibuja la gráfica de la siguiente función radical.

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x-1)(x-4)}{x-2}}$$



Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-2}\geq 0\right\}=[1,\,2)\cup[4,\,+\infty)$. La función es continua en sudominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, no corta al eje Y.

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow(x-1)(x-4)=0\Rightarrow x=1,\ x=4\Rightarrow$ (1, 0) y (4, 0)

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\geq 0$ en su dominio.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: La recta $x=2$ es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=+\infty$.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Oblicuas: No tiene, ya que $m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-2}}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{x^3-2x^2}}=0$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{x^2-4x+6}{2(x-2)^2\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-2}}}$ no se anula, ya que x^2-4x+6 no tiene raíces reales, de hecho f' es positiva (f creciente) en el dominio de f, por lo que no hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-x^4+8x^3-36x^2+88x-68}{4(x-1)(x-2)^3(x-4)\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-2}}}$, el numerador no tiene raíces enteras, por lo que no es posible determinar con exactitud la curvatura de f ni sus puntos de inflexión, aunque con la información obtenida anteriormentese puede deducir que debe haber un punto de inflexión con abscisa $x_1\in(1,\,2)$.

Funciones exponenciales y logarítmicas

62. Dadas las funciones $f(x)=\log_2\left(x^2-16\right)$ y $g(x)=\log_2(6x)$, estudia su dominio y encuentra las coordenadas del punto de corte entre ellas.

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:x^2-16>0\}=(-\infty,\,-4)\cup(4,\,+\infty)$ y $D(g)=\{x\in\mathbb{R}:6x>0\}=(0,\,+\infty)$.

Puntos de corte: $f(x)=g(x)\Rightarrow\log_2\left(x^2-16\right)=\log_2(6x)\Rightarrow x^2-16=6x\Rightarrow x^2-6x-16=0\Rightarrow x=-2,\ x=8$.

La primera solución no es válida, ya que no pertenece ni al dominio de f ni al de g, la segunda solución sí pertenece a ambos dominios, y proporciona las coordenadas del punto de corte $P(8,\,\log_2 48)$.

63. Realiza el estudio completo de las siguientes funciones y esboza su gráfica.

a) $f(x) = (1+x)e^x$

b) $f(x) = \log_2 e^{5x}$

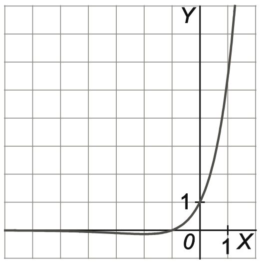
c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$

d) $f(x) = x^2 \ln x$

e) $f(x) = \ln x^2$

f) $f(x) = \log_3\left(\dfrac{x^2-4}{x}\right)$

a) Dominio y continuidad



$D(f) = \mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$ es el punto de corte con el eje Y.

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow (1+x)e^x = 0 \Rightarrow 1+x = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$

Signo: La función es positiva en $(-1, +\infty)$ y negativa en $(-\infty, -1)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No tiene.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal por la izquierda.

Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = (x+2)e^x = 0$ si $x = -2$, es positiva (f creciente) en $(-2, +\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty, -2)$.

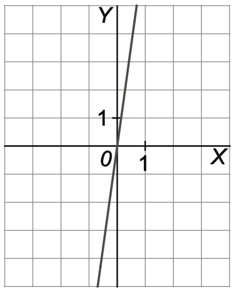
Por tanto, el punto $(-2, -e^{-2})$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = (x+3)e^x$ se anula si $x = -3$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-3, +\infty)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty, -3)$.

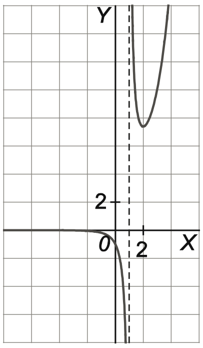
Por tanto, el punto $(-3, 2e^{-3})$ es un punto de inflexión.

b) Observemos que no es necesario hacer el estudio de las propiedades dela función, ya que la gráfica de $f(x) = \log_2 e^{5x} = 5x\log_2 e = \dfrac{5}{\ln 2}x$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas y con pendiente $m = \dfrac{5}{\ln 2} \simeq 7{,}21$, por tanto su gráfica es la adjunta.



c) Dominio y continuidad

$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)=-1 \Rightarrow (0,\,-1)$ Eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow e^x=0$

Signo: La función es positiva en $(1,+\infty)$ y negativa en $(-\infty,1)$.

Simetría: La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: La recta $x=1$ es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal por la izquierda.

Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)}=0$ si $x=2$, es positiva (*f* creciente) en $(2,+\infty)$ y negativa (*f* decreciente) en $(-\infty,1)\cup(1,2)$.

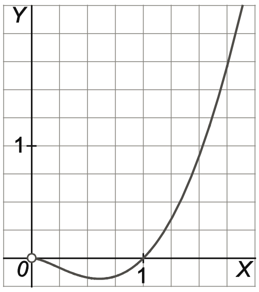
Por tanto, el punto $(2,e^2)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$ no se anula, ya que el numerador no tiene raíces reales, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $(1,+\infty)$ y negativa (*f*cóncava hacia abajo) en $(-\infty,1)$. No hay puntos de inflexión.

d) Dominio y continuidad

$D(f)=(0,+\infty)$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje *Y*: $f(0)$ no está definida, no corta el eje *Y*. Eje *X*: $f(x)=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow (1,0)$

Signo: La función es positiva en $(1,+\infty)$ y negativa en $(0,1)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: No hay, ya que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$ .Horizontales: No hay, ya que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.

Oblicuas: No hay asíntotas oblicuas, ya que $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x=+\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

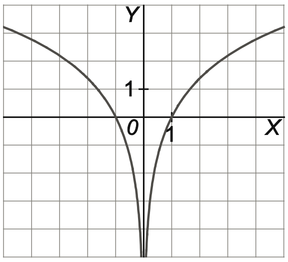
$f'(x)=x(1+2\ln x)$ se anula si $x=0$ (que no pertenece al dominio de *f*) o $x=e^{-\frac{1}{2}}$. *f* es decreciente en $x\in\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$ y creciente en $x\in\left(e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$. El punto $\left(e^{-\frac{1}{2}},-\dfrac{e^{-1}}{2}\right)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=3+2\ln x$ se anula si $x=e^{-\frac{3}{2}}$. *f* es cóncava hacia arriba en $x\in\left(e^{-\frac{3}{2}},+\infty\right)$ o hacia abajo si $x\in\left(0,e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

El punto $\left(e^{-\frac{3}{2}},-\dfrac{3e^{-3}}{2}\right)$ es un punto de inflexión.

e) Dominio y continuidad



$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definida, la función no corta el eje Y.

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \ln x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1 \Rightarrow$ $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

Signo: f es positiva en $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y negativa en $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Simetría: $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

Verticales: La recta $x = 0$ es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

Horizontales: No hay, ya que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Oblicuas: No hay, ya que $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

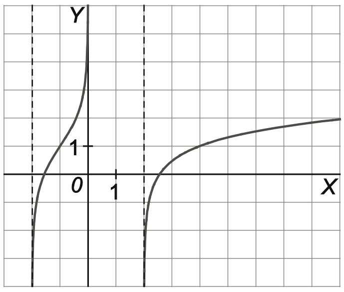
$f'(x) = \frac{2}{x}$ es positiva (f creciente) en $(0, +\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty, 0)$. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{2}{x^2}$ es negativa en el dominio de f, la función es cóncava hacia abajo y no presenta puntos de inflexión.

f) Dominio y continuidad

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4}{x} > 0\right\} = (-2, 0) \cup (2, +\infty)$. Continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definida, la gráfica no corta el eje Y.

Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} = x_1,\ x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} = x_2 \Rightarrow$

$(x_1, 0) \simeq (-1{,}56; 0)$ y $(x_2, 0) \simeq (2{,}56; 0)$

Signo: La siguiente tabla de signos determina los intervalos en los que f es positiva o negativa.

	-2 … x_1	x_1 … 0	0 … 2	2 … x_2	x_2 … $+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$\nexists$	$-$	$+$

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: Las rectas $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$, ya que $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$.

Horizontales: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \frac{x^2 + 4}{x(x^2 - 4)}$ es positiva (f creciente) en el dominio de f. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{-x^4 - 16x^2 + 16}{x^2(x^2 - 4)^2}$ no se anula en el dominio de f

	-2 … x_3	x_3 … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	…	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\nexists$	$\cap$

La tabla determina los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba o hacia abajo. $(x_3, f(x_3)) \simeq (-0{,}97; 1{,}15)$ es un punto de inflexión.

64. Dada la función $f(x)=\log_2(8x-4)-\log_2(x+3)$, estudia sus características.[Nota: expresa $f(x)$ en función de un solo logaritmo.]

$f(x)=\log_2(8x-4)-\log_2(x+3)=\log_2\left(\frac{8x-4}{x+3}\right)$ en el dominio de la función.

Dominio y continuidad

$D(f)=\{x\in\mathbb{R}:8x-4>0 \text{ y } x+3>0\}=\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no está definido, la gráfica no corta el eje Y.Eje$X$: $f(x)=0\Rightarrow\frac{8x-4}{x+3}=1\Rightarrow 8x-4=x+3\Rightarrow(1,0)$

Signo: f es positiva si $x\in(1,+\infty)$ y negativa si $x\in\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Simetría

La función no es par ni impar.

Asíntotas

Verticales: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=-\infty\Rightarrow x=\frac{1}{2}$. Oblicuas: No tiene, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ln_2 8=3$, $y=3$ es una asíntota horizontal por la derecha.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\frac{7}{(x+3)(2x-1)\ln 2}$ es positiva ($f$creciente) en el dominio de f. No hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\frac{-28x-35}{(x+3)^2(2x-1)^2\ln 2}$ se anula si $x=-\frac{5}{4}$, que no pertenece al dominio de f,es negativa (f cóncava hacia abajo) en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. No hay puntos de inflexión.

65. Encuentra las asíntotas horizontales y verticales de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\ln\frac{2x}{2-x}$ **b)** $f(x)=x^2e^{-x}$

a) Asíntotas verticales

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{2x}{2-x}>0\right\}=(0,2)$, por lo que puede presentar asíntotas verticales en $x=0$ o $x=2$.

En $x=0$ tenemos $\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\frac{2x}{2-x}\right)=-\infty$, por tanto, la recta $x=0$ es asíntota vertical.

En $x=2$ tenemos $\lim\limits_{x\to2^-}\ln\left(\frac{2x}{2-x}\right)=+\infty$, por tanto, la recta $x=2$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales

No tiene, ya que no se puede calcular los límites en $-\infty$ y $+\infty$.

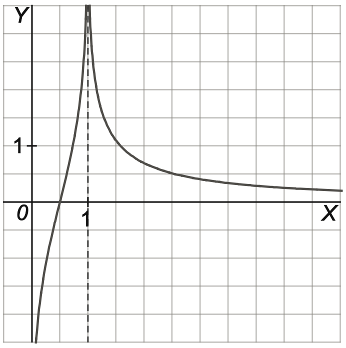
b) Asíntotas verticales

$D(f)=\mathbb{R}$, por lo que no tiene asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$, por tanto, la recta $y=0$ es asíntota horizontal por la derecha.

66. Dada la función $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{|x-1|}\right)$, estudia su dominio, sus puntos de corte con los ejes, su signo y sus asíntotas, y dibuja su gráfica.



Dominio: $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x}{|x-1|}>0\right\}=(0,\,1)\cup(1,\,+\infty)$

Puntos de corte:

Eje *Y*: $f(0)$ no está definido, la gráfica no corta el eje *Y*.

Eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow\dfrac{x}{|x-1|}=1\Rightarrow x=|x-1|\Rightarrow\begin{cases}x=x-1\Rightarrow\text{Sin solución}\\ x=-x+1\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{2},\,0\right)$

Signo: La función es positiva en $\left(\dfrac{1}{2},\,1\right)\cup(1,\,+\infty)$ y negativa en $\left(0,\,\dfrac{1}{2}\right)$.

Asíntotas:

Verticales: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln\left(\dfrac{x}{|1-x|}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\ln\left(\dfrac{x}{|1-x|}\right)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\dfrac{x}{|1-x|}\right)=+\infty$, las rectas $x=0$ y $x=1$ son asíntotas verticales.

Horizontales: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{|x-1|}\right)=\ln1=0$, la recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Oblicuas: No tiene.

Funciones trigonométricas y sus inversas

67. Halla los puntos de corte con los ejes y el período de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$

b) $g(x)=\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x$

c) $h(x)=\operatorname{sen}(x+\pi)-\cos(x-\pi)$

d) $i(x)=\operatorname{sen}^2x$

a) Corte con el eje *Y*: $f(0)=1$, luego corta al eje *Y* en el punto (0, 1)

Corte con el eje *X*: $f(x)=0\Rightarrow\operatorname{sen}x+\cos x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x=-\cos x\Rightarrow\operatorname{tg}x=-1\Rightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, luego corta al eje *X* en los puntos de la forma $\left(\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,\,0\right)$ para $k\in\mathbb{Z}$.

Período: El período es $T=2\pi$

b) Corte con el eje *Y*: $g(0)=0$, luego corta al eje *Y* en el punto (0, 0)

Corte con el eje *X*: $g(x)=0\Rightarrow\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}2x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x-2\operatorname{sen}x\cos x=0\Rightarrow\operatorname{sen}x(1-2\cos x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=0\Rightarrow x=k\pi\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$, luego corta al eje *X* en los puntos de la forma $(k\pi,\,0)$, $\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\,0\right)$ y $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\,0\right)$ para $k\in\mathbb{Z}$.

Período: El período es $T=2\pi$

c) Corte con el eje *Y*: $i(0)=0$, luego corta al eje *Y* en el punto (0, 1)

Corte con el eje *X*: $h(x)=0 \Rightarrow \text{sen}(x+\pi)-\cos(x-\pi)=0 \Rightarrow -\text{sen}\,x+\cos x=0 \Rightarrow \text{sen}\,x=\cos x \Rightarrow \text{tg}\,x=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, luego corta al eje *X* en los puntos de la forma $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\ 0\right)$ para $k\in\mathbb{Z}$.

Período: El período es $T=2\pi$

d) Corte con el eje *Y*: $f(0)=1$, luego corta al eje *Y* en el punto (0, 0)

Corte con el eje *X*: $i(x)=0 \Rightarrow \text{sen}^2\,x=0 \Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, luego corta al eje *X* en los puntos de la forma $(k\pi,\ 0)$ para $k\in\mathbb{Z}$.

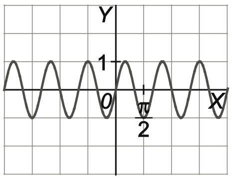
Período: El período es $T=\pi$, ya que $i(x+\pi)=\text{sen}^2(x+\pi)=(-\text{sen}\,x)^2=\text{sen}^2\,x=i(x)$.

68. Representa las gráficas de las siguientes funciones trigonométricas. Para ello, determina primero su período *T* y estudia las funciones en un intervalo de anchura *T*.

a) $f(x)=\text{sen}\,3x$ **c)** $f(x)=\text{cotg}\,2x$ **e)** $f(x)=\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $f(x)=5\cos x$ **d)** $f(x)=2+3\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ **f)** $f(x)=2\sec x$

a) Dominioy continuidad: $D(f)=\mathbb{R}$ y *f* es continua en él.



Simetría: La función es impar.

Período: Como la función seno es periódica de período 2π, la función *f* es periódica de período $T=\frac{2\pi}{3}$, por lo que, en lo que sigue, nos centraremos en el estudio de la función en el intervalo $\left[0,\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

Puntos de corte con los ejes y signo

Corte con el eje *Y*: $f(0)=0 \Rightarrow$ (0, 0) es elpunto de corte con el eje *Y*.

Cortes con el eje *X* dentro del período: $f(x)=0 \Rightarrow \text{sen}\,3x=0 \Rightarrow x=0,\ x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow (0,0)$ y $\left(\frac{\pi}{3},\ 0\right)$ son los puntos de corte con el eje *X*.

Signo: La función es positiva en $\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$ y negativa en $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$.

Asíntotas: No tiene

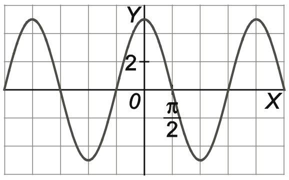
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=3\cos 3x$ se anula si $x=\frac{\pi}{6}$ o $x=\frac{\pi}{2}$, es positiva (*f* creciente) en $\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\right)$ y negativa (*f* decreciente) en $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, el punto $\left(\frac{\pi}{6},\ 1\right)$ es un máximo relativo y $\left(\frac{\pi}{2},\ -1\right)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=-9\,\text{sen}\,3x=-9f(x)$ se anula si $x=0$ o $x=\frac{\pi}{3}$, es positiva (*f* cóncava hacia arriba) en $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right)$ y negativa (*f* cóncava hacia abajo) en $\left(0,\ \frac{\pi}{3}\right)$. Por tanto, los puntos de corte con el eje *X* son puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad: $D(f) = \mathbb{R}$ y es f continua en él.



Simetría: La función espar.

Periodo: La función es periódica de período $T = 2\pi$, por lo que basta estudiar la función en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 5 \Rightarrow (0, 5)$

Eje X dentro del período: $f(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

Signo: La función es positiva en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y negativa en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Asíntotas: No tiene.

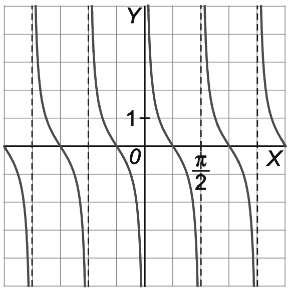
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = -5\operatorname{sen} x$ se anula si $x = 0$ o $x = \pi$, es positiva (f creciente) en $(\pi, 2\pi)$ y negativa (f decreciente) en $(0, \pi)$. El punto $(0, 5)$ es un máximo relativo y $(\pi, -5)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = -5\cos x = -f(x)$ se anula si $x = \frac{\pi}{2}$ o $x = \frac{3\pi}{2}$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Los puntos de corte con el eje X son puntos de inflexión.

c) $f(x) = \operatorname{cotg} 2x = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}$



Dominio y continuidad: La función no está definida si $2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, por tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ y f es continua en él.

Simetría: La función es impar.

Período: Como la función cotangente es periódica de período π, la función f es periódica de periodo $T = \frac{\pi}{2}$, por lo que basta estudiar la función en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, el 0 se excluye del intervalo ya que no pertenece al dominio de la función, perose estudiará el $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ para comprobar la existencia o no de una asíntota vertical.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)$ no esta definido, no corta el eje Y. Eje X dentro del período: $f(x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

Signo: La función es positiva en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y negativa en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Asíntotas: Las recta $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$ son asíntotas verticales, ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$

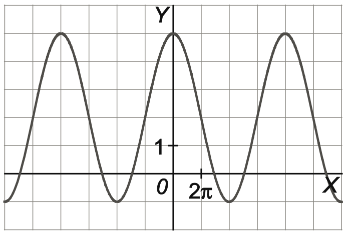
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \frac{-2}{\operatorname{sen}^2 2x}$ es negativa (f decreciente) en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, no hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \frac{8\operatorname{cotg} 2x}{\operatorname{sen}^2 2x}$ se anula si $x = \frac{\pi}{4}$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. Los puntos de corte con el eje X son puntos de inflexión.

d) Dominioy continuidad: $D(f) = \mathbb{R}$ y f es continua en él.



Simetría: La función es par.

Periodo: Como la función coseno es periódica de período 2π, la función f es periódica de periodo $T = 8\pi$, por lo que basta estudiar la función en el intervalo $[0, 8\pi)$.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 5 \Rightarrow (0, 5)$

Eje X dentro del período: $f(x) = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{4}\right) = -\frac{2}{3} \Rightarrow x \simeq 9{,}2;\ x = 15{,}9 \Rightarrow (9{,}2;\ 0)$ y $(15{,}9;\ 0)$

Signo: La función es positiva en $(0;\ 9{,}2) \cup (15{,}9;\ 8\pi)$ y negativa en $(9{,}2;\ 15{,}9)$.

Asíntotas: No tiene.

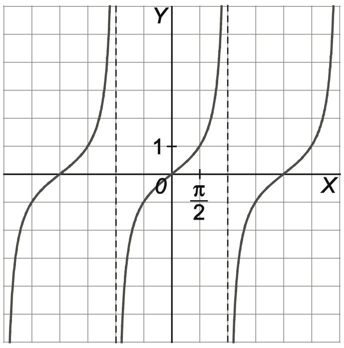
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$ se anula si $x = 0$ o $x = 4\pi$, es positiva (f creciente) en $(4\pi, 8\pi)$ y negativa (f decreciente) en $(0, 4\pi)$. El punto $(0, 5)$ es un máximo relativo y $(4\pi, -1)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = -\frac{3}{16}\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ se anula si $x = 2\pi$ o $x = 6\pi$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(2\pi, 6\pi)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(0, 2\pi) \cup (6\pi, 8\pi)$. Los puntos $(2\pi, 2)$ y $(4\pi, 2)$ son puntos de inflexión.

e) Dominio y continuidad: La función no está definida si $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, por tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y f es continua en él.



Simetría: La función es impar.

Período: La función tangente es periódica de período π;f es periódica de período $T = 2\pi$, por lo que basta estudiar la función en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Se elige este intervalo teniendo en cuenta el dominio de f,y seexcluye $-\pi$ del mismo ya que no pertenece al dominio de la función, pero se estudiará el $\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x)$ para comprobar la existencia o no de una asíntota vertical.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$ .Eje X dentro del período: $f(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Signo: La función es positiva en $(0, \pi)$ y negativa en $(-\pi, 0)$.

Asíntotas: Las rectas $x = -\pi$ y $x = \pi$ son asíntotas verticales, pues $\lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\pi^-} f(x) = +\infty$.

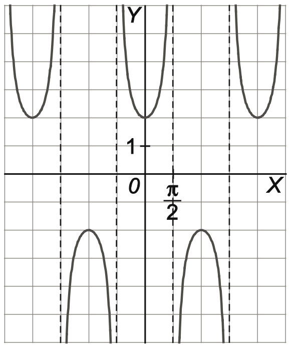
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ es positiva (f decreciente) en $(-\pi, \pi)$, no hay extremos relativos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ se anula si $x = 0$, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(0, \pi)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\pi, 0)$. Por tanto, (0, 0) es un punto de inflexión.

f) $f(x) = 2\sec x = \dfrac{2}{\cos x}$



Dominio y continuidad:

La función no está definida si $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, por tanto, $D(f) = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ y f es continua en él.

Simetría: La función es par.

Período: La función es periódica de período $T = 2\pi$, por lo que, en lo que sigue, nos centraremos en el estudio de la función en el intervalo $[0, 2\pi)$, observemos que en dicho intervalo la función no está definida en $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$, puntos donde habrá que verificar la existencia de posibles asíntotas verticales.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0) = 2 \Rightarrow (0, 2)$

Eje X dentro del período: $f(x) = 0$ no tiene solución, no corta el eje X.

Signo: La función es positiva en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y negativa en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Asíntotas:

La rectas $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$ son asíntotas verticales, ya que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x) = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$ se anula si $x = 0$ o $x = \pi$, es positiva (f creciente) en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ y negativa (f decreciente) en $\left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Por tanto, (0, 2) es un máximo relativo y $(\pi, -2)$ un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

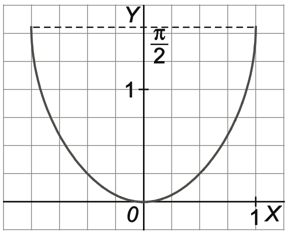
$f''(x) = \dfrac{2\left(1 + \operatorname{sen}^2 x\right)}{\cos^3 x}$ no se anula, es positiva (f cóncava hacia arriba) en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y negativa (f cóncava hacia abajo) en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. No hay puntos de inflexión.

69. Estudia y representa las siguientes funciones trigonométricas inversas.

a) $f(x)=\text{arcsen}(x^2)$ **b)** $f(x)=\text{arctg}(1+x^2)$ **c)** $f(x)=\arccos\left(\dfrac{x}{x^2-2}\right)$ **d)** $f(x)=\text{arcsen}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$

a) Dominio y continuidad

$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:-1\le x^2\le 1\right\}=[-1,1]$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\text{arcsen}\,0=0\Rightarrow$ (0, 0). Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\text{arcsen}(x^2)=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow(0,0)$

Signo: Como $x^2>0$ si $x\ne 0$, el recorrido de la función es $R(f)=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, así, la función es positiva salvo en $x=0$.

Simetría: $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

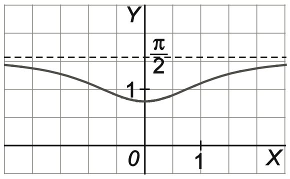
$f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}=0$ si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(0,1)$ y negativa (f decreciente) en $(-1,0)$. Por tanto, $(0,0)$ es un mínimo relativo, además $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ y $\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ son máximos absolutos (observa que $f\,'$ no está definida en estos valores).

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{2\left(1+x^4\right)}{\left(1-x^4\right)\sqrt{1-x^4}}$ es positiva (f cóncava hacia arriba) en $(-1,1)$. No hay puntos de inflexión.

b) Dominio y continuidad

$D(f)=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.



Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\text{arctg}\,1=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\text{arctg}\left(1+x^2\right)=0\Rightarrow 1+x^2=0$ no tiene solución, no corta el eje X.

Signo: Puesto que $1+x^2$ es siempre positivo, el recorrido de la función es $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$, así, la función es positiva.

Simetría: $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas: La recta $y=\dfrac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

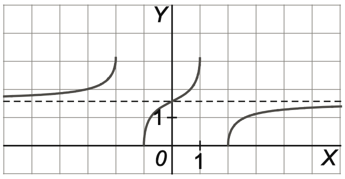
$f'(x)=\dfrac{2x}{1+\left(1+x^2\right)^2}=0$ si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(0,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,0)$.

$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{-6x^4-4x^2+4}{\left(x^4+2x^2+1\right)^2}=0$ si $x=-\dfrac{\sqrt{-3+3\sqrt{7}}}{3}=x_1$ y $x=\dfrac{\sqrt{-3+3\sqrt{7}}}{3}=x_2$, f'' es positiva (f cóncava hacia arriba) en (x_1,x_2) y negativa (f cóncava hacia abajo) en $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$. Los puntos $(x_1,f(x_1))\simeq(-0{,}75;1)$ y $(x_2,f(x_2))\simeq(0{,}75;1)$ son puntos de inflexión.

c) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:-1\le\frac{x}{x^2-2}\le 1\right\}=(-\infty,\,-2]\cup[-1,\,1]\cup[1,\,+\infty)$.

La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\arccos 0=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\arccos\left(\frac{x}{x^2-2}\right)=0\Rightarrow\frac{x}{x^2-2}=1\Rightarrow(-1,\,0)$ y $(2,\,0)$

Signo: Como el recorrido de la función arcocoseno es $[0,\,\pi]$, la función f es positiva en todo su dominio salvo en $x=-1$ y $x=2$.

Simetría

La función no es par ni impar, pero sí verifica que $f(-x)=\arccos\left(-\frac{x}{x^2-2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{x}{x^2-2}\right)=\pi-f(x)$.

Asíntotas

La recta $y=\frac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\arccos 0=\frac{\pi}{2}$.

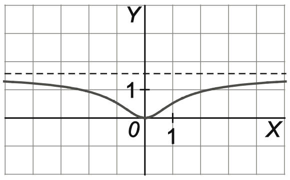
Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{x^2+2}{\left(x^2-2\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{x^2-2}\right)^2}}$ es positiva (f creciente) en el dominio de f. No hay extremos relativos, aunque los puntos $(-2,\,\pi)$ y $(1,\,\pi)$ son máximos absolutos y los puntos $(-1,\,0)$ y $(2,\,0)$ son mínimos absolutos.

Curvatura y puntos de inflexión

Por la complejidad de su estudio, no se calcula f'', pues hay información suficiente para esbozar la gráfica de f.

d) Dominio y continuidad



$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}:-1\le\frac{x^2}{x^2+1}\le 1\right\}=\mathbb{R}$. La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=\operatorname{arcsen}0=0\Rightarrow(0,\,0)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow\operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)=0\Rightarrow\frac{x^2}{x^2+1}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0,\,0)$

Signo: Como $0<\frac{x^2}{x^2+1}<1$ si $x\ne 0$, $R(f)=\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right)$, así, la función es positiva salvo en $x=0$.

Simetría

$f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas

La recta $y=\frac{\pi}{2}$ es asíntota horizontal, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\operatorname{arcsen}1=\frac{\pi}{2}$.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

$f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{2x^2+1}}$ se anula si $x=0$, es positiva (f creciente) en $(0,\,+\infty)$ y negativa (f decreciente) en $(-\infty,\,0)$. Por tanto, $(0,\,0)$ es un mínimo relativo.

Curvatura y puntos de inflexión

Por la complejidad de su estudio, no se calcula f'', pues hay información suficiente para esbozar la gráfica de f.

Funciones construidas a partir de otras

70. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y, a partir de ella, las gráficas de las siguientes funciones.

a) $g(x) = |x^2 - 6x + 8|$

b) $h(x) = |x|^2 - 6|x| + 8$

La gráfica de *f* es una parábola cóncava hacia arriba $(\cup)$ con un mínimo absoluto en su vértice $x_v = \frac{6}{2} = 3$ ($y_v = -1$) y eje de simetría la recta $x = 3$.

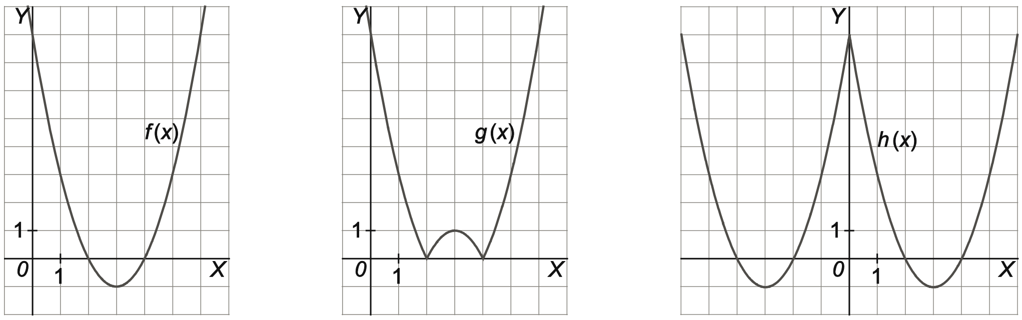
El punto de corte con el eje *Y* es (0, 8) y los puntos de corte con el eje *X* son (2, 0) y (4, 0).

Finalmente, haciendo una tabla de valores tomando abscisas a ambos lados del eje de simetría, podemos hacer un esbozo de la gráfica.

a) La gráfica de *g* se obtiene reflejando respecto del eje *X* las zonas donde *f* es negativa, es decir, las zonas donde la gráfica de *f* esta por debajo del eje X.

b) Observemos que *h* es par, así, basta dibujar su gráfica cuando $x \geq 0$ y reflejarla respecto del eje *Y*, pero si $x \geq 0$ la gráfica de *h* y *f* coinciden, así, la gráfica de *h* se obtiene reflejando respecto del eje *Y* la zona de la gráfica de *f* que está a la derecha del eje *Y*.

De este modo obtenemos las siguientes gráficas:



71. Investiga qué trasformación hay que aplicar a la función $f(x) = x^2 + 6x + 5$ para que se convierta en una función par.

La gráfica de *f* es una parábola, por tanto, es simétrica respecto de su eje, $x = -3$. Para trasformarla en una función par basta trasformar su eje en el eje *Y*, es decir, basta trasladarla 3 unidades hacia la derecha, por tanto, hay que tomar la función $g(x) = f(x-3)$.

En efecto, la función $g(x) = f(x-3) = (x-3)^2 + 6(x-3) + 5 = x^2 - 4$ es par.

72. Representa en tu calculadora gráfica u ordenador la función $f(x) = 2^x$ y, sobre los mismos ejes, representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2^{x-3}$

b) $f(x) = 2^x + 2$

c) $f(x) = 2^x - 1$

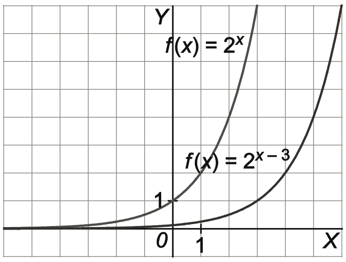
d) $f(x) = 2^{x+1}$

e) $f(x) = 2^{x-2} + 3$

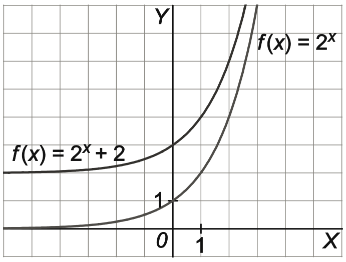
f) $f(x) = 2^{x-1} - 2$

Indica cuál es la traslación que trasforma la gráfica de $f(x) = 2^x$ en cada una de las anteriores.

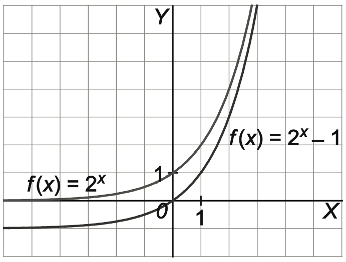
a) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ tres unidades a la derecha.



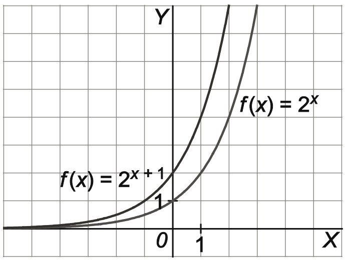
b) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ dos unidades hacia arriba.



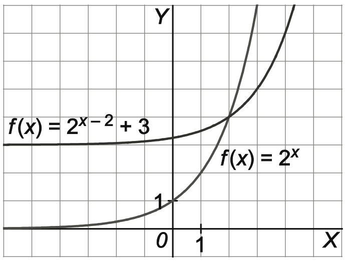
c) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ una unidad hacia abajo.



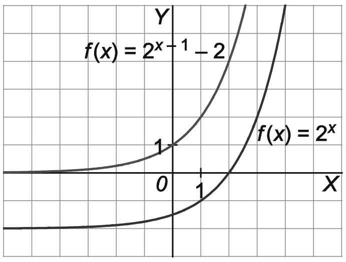
d) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ una unidad a la izquierda.



e) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ dos unidades a la derecha y tres hacia arriba.



f) Traslación de la gráfica de $f(x) = 2^x$ una unidad a la derecha y dos hacia abajo.



73. Calcula el período de las siguientes funciones trigonométricas.

a) $f(x) = \operatorname{sen} 4x$ **c)** $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{8}\right)$ **e)** $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{tg} 2x$

b) $f(x) = \cos(5x + \pi)$ **d)** $f(x) = \operatorname{cotg} 2x$ **f)** $f(x) = \cos x \cos 2x$

a) $f(x) = \operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen}(4x + 2\pi) = \operatorname{sen}\left(4\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, el período es $T = \frac{\pi}{2}$.

b) $f(x) = \cos(5x + \pi) = \cos(5x + \pi + 2\pi) = \cos\left(5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) + \pi\right) = f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$, el período es $T = \frac{2\pi}{5}$.

c) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{8} + \pi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x + 8\pi}{8}\right) = f(x + 8\pi)$, el período es $T = 8\pi$.

d) $f(x) = \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{cotg}(2x + \pi) = \operatorname{cotg}\left(2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, el período es $T = \frac{\pi}{2}$.

e) $f(x) = \operatorname{sen} x \operatorname{tg} 2x = \operatorname{sen}(x + 2\pi)\operatorname{tg}(2x + 4\pi) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)\operatorname{tg}(2(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi)$, el período es $T = 2\pi$.

f) $f(x) = \cos x \cos 2x = \cos(x + 2\pi)\cos(2x + 4\pi) = \cos(x + 2\pi)\cos(2(x + 2\pi)) = f(x + 2\pi)$, el período es $T = 2\pi$.

74. A partir de la gráfica del seno de *x*, dibuja la gráfica de estas funciones.

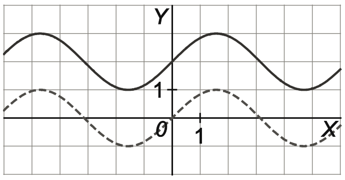
a) $f(x) = \operatorname{sen} x + 2$ **d)** $f(x) = \operatorname{sen}(x - 2)$ **g)** $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ **j)** $f(x) = \operatorname{sen} 2x$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x - 2$ **e)** $f(x) = -\operatorname{sen} x$ **h)** $f(x) = \operatorname{sen}|x|$

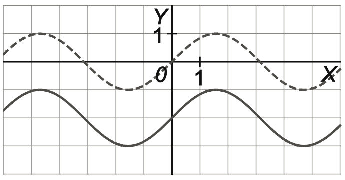
c) $f(x) = \operatorname{sen}(x + 2)$ **f)** $f(x) = \operatorname{sen}(-x)$ **i)** $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$

En cada apartado representamos la función pedida junto con la función seno de *x*.

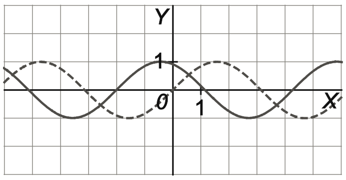
a)



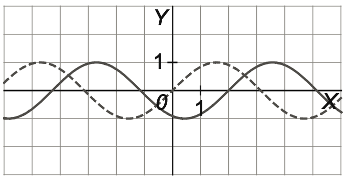
b)



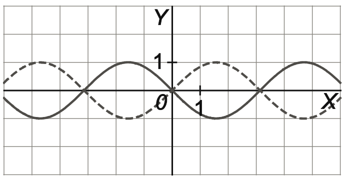
c)



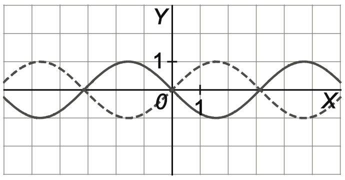
d)



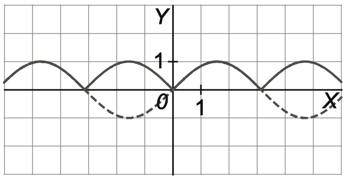
e)



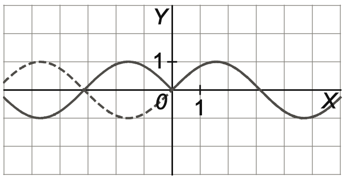
f)



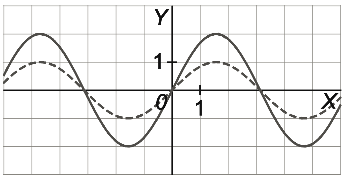
g)



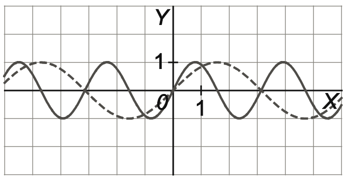
h)



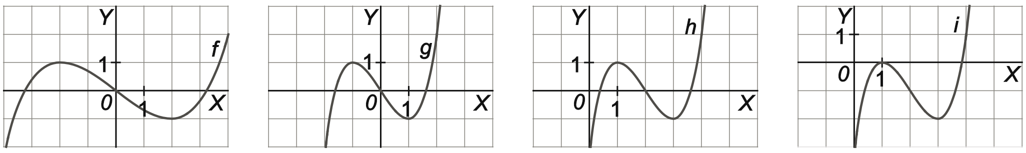
i)



j)



75. Determina la relación que existe entre las funciones representadas en la siguiente sucesión de gráficas, partiendo de la gráfica de *f*.



La gráfica de g se obtiene a partir de la de f comprimiéndola horizontalmente un factor 2, por tanto, $g(x) = f(2x)$.

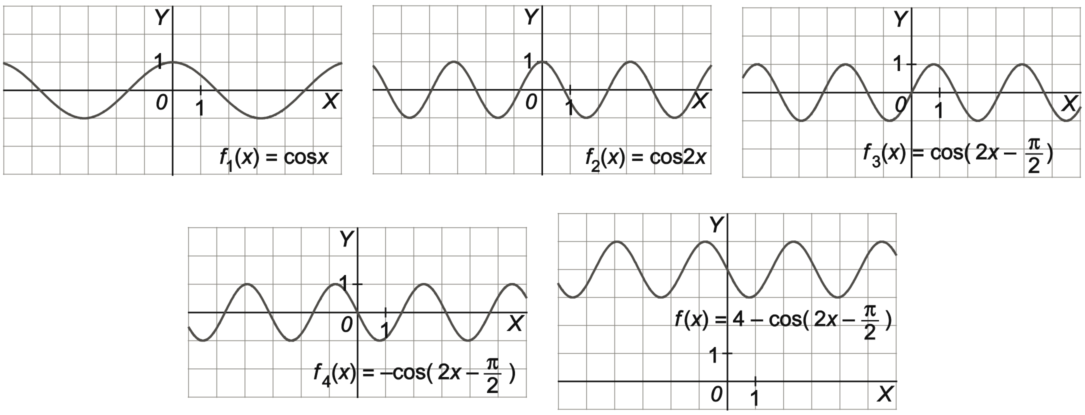
La gráfica de h se obtiene a partir de la de g trasladándola hacia la derecha 2 unidades, por tanto, $h(x) = g(x-2) = f(2x-4)$.

La gráfica de i se obtiene a partir de la de h trasladándola hacia abajo 1 unidad, por tanto, $i(x) = h(x) - 1 = g(x-2) - 1 = f(2x-4) - 1$.

76. Determina qué trasformaciones hay que aplicar a la función coseno para convertirla en la función $f(x) = 4 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$. Esboza la gráfica de la función utilizando el resultado.

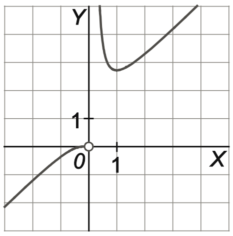
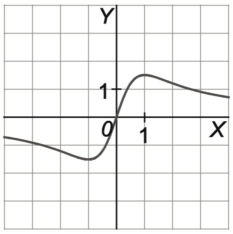
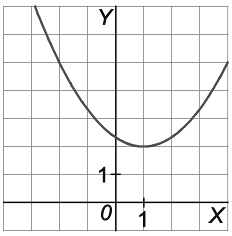
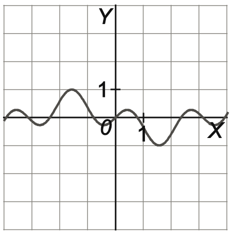
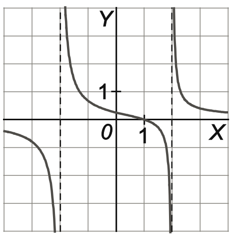
$$f_1(x) = \cos x \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se comprime} \\ \text{horizontalmente} \\ \text{un factor 2}\end{pmatrix} \rightarrow f_2(x) = \cos 2x \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se traslada} \\ \text{a la derecha} \\ \frac{\pi}{4}\ \text{unidades}\end{pmatrix} \rightarrow f_3(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se refleja} \\ \text{respecto} \\ \text{del eje } X\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow f_4(x) = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{pmatrix}\text{se traslada} \\ \text{hacia arriba} \\ \text{4 unidades}\end{pmatrix} \rightarrow f(x) = 4 - \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$



CUESTIONES

77. En la siguiente lista, asocia las funciones de la columna izquierda a las gráficas de la columna derecha y justifica tu elección:

$f(x)=\dfrac{3x}{1+x^2}$	
$g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$	
$h(x)=\text{sen}\,x\cos 2x$	
$j(x)=xe^{\frac{1}{x}}$	
$k(x)=\dfrac{(x-1)^2}{3}+2$	

$f(x)$ se asocia con la segunda gráfica, pues $y=0$ es asíntota horizontal y no tiene asíntotas verticales.

$g(x)$ se asocia con la última gráfica, pues $y=0$ es asíntota horizontal y $x=-2$, $x=2$ son asíntotas verticales.

$h(x)$ se asocia con la cuarta gráfica, pues es periódica.

$j(x)$ se asocia con la primera gráfica, ya que no está definida en $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} j(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} j(x)=+\infty$.

$k(x)$ se asocia con la tercera gráfica, ya que es una parábola.

78. Justifica que si $P(x)$ es un polinomio de grado impar con coeficientes reales, entonces la ecuación $P(x)=0$ siempre tiene al menos una solución real.

La función $y=P(x)$ es una función polinómica, por tanto, tiene dominio $\mathbb{R}$ y es continua. Además, como el polinomio tiene grado impar, $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=-\infty$. En cualquier caso, la grafica debe cortar al menos una vez al eje *X*, lo que equivale a que la ecuación $P(x)=0$ tiene al menos una solución real.

79. Justifica que si $P(x)$ es un polinomio de grado par con coeficientes reales, entonces la ecuación $P(x)=0$ puede no tener soluciones reales.

Basta considerar como ejemplo el polinomio $P(x)=x^{2n}+1$ para cualquier entero positivo *n*.

80. Demuestra que si una función polinómica corta tres veces al eje horizontal, debe tener al menos un máximo y un mínimo relativos.

Al ser una función polinómica, tanto la función como su derivada son continuas en todo $\mathbb{R}$.

Cada vez que la función corta al eje *X* cambia de signo. Supongamos que la función corta al eje *X* en los puntos de abscisa $x_1<x_2<x_3$, entonces la función será positiva en $(-\infty,\, x_1)\cup(x_2,\, x_3)$ y negativa en $(x_1,\, x_2)\cup(x_3,\, +\infty)$ (o viceversa).

Por tanto, en x_1 y x_3 será decreciente ($f'(x_1)<0$ y $f'(x_3)<0$) y en x_2 será creciente ($f'(x_2)>0$).Luego la función derivada, que es continua, cambia de signo entre x_1 y x_2 y otra vez entre x_2 y x_3, por tanto, habrá un mínimo entre x_1 y x_2 y un máximo entre x_2 y x_3.

81. Sean las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\operatorname{sen} x$. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y explica por qué.

a) $g\circ f$ es una función periódica de período 2π.

b) $f\circ g$ es una función periódica de período 2π.

a) $(g\circ f)(x)=\operatorname{sen}\left(e^x\right)$ no es periódica de período 2π, ya que, por ejemplo, $(g\circ f)(0)=\operatorname{sen}1\simeq 0{,}84$ no coincide con $(g\circ f)(2\pi)=\operatorname{sen}\left(e^{2\pi}\right)\simeq 0{,}99$ ..

b) $(f\circ g)(x)=e^{\operatorname{sen} x}$ sí es periódica de período 2π, ya que $(f\circ g)(x+2\pi)=e^{\operatorname{sen}(x+2\pi)}=e^{\operatorname{sen} x}=(f\circ g)(x)$.

PROBLEMAS

82. Un editor sabe que, para la primera edición de un determinado libro, la función oferta es $f_o(p)=282p-422$, mientras que la función demanda viene dada por la expresión $f_d(p)=14\,362-422p$

a) ¿Cuántos ejemplares debe poner a la venta de la primera edición para alcanzar el equilibrio de mercado? Determina cual es el precio al que debe vender el libro.

b) ¿Qué ocurrirá si decide poner el libro a la venta por 15 €? ¿Y si lo pone a 25 €?

a) El equilibrio de mercado se alcanza cuando $f_o(p)=f_d(p)$, es decir, cuando $282p-422=14\,362-422p\Rightarrow$

$\Rightarrow p=21$.Por tanto, debe poner a la venta $f_o(21)=5500$ ejemplares a un precio de 21 € cada ejemplar.

b) Si pone el libro a la venta por 15 € tenemos $f_o(15)=3808$ ejemplares y $f_d(15)=8032$ ejemplares, es decir, se demandan más ejemplares de los que se fabrican, hay un exceso de demanda.

Si pone el libro a la venta por 25 € tenemos $f_o(25)=6628$ ejemplares y $f_d(25)=3812$ ejemplares, es decir, se ofertan más ejemplares de los que se demandan, hay un exceso de oferta.

83. La tabla adjunta muestra el número de conejos, *C*, que hay en un criadero al cabo de *t* meses.

t	0	1	2	3	4	5
C	25	43	75	130	226	391

a) ¿Responde la población de conejos a una función exponencial? ¿Por qué?

b) Encuentra dicha función.

c) ¿Cuánto tiempo, aproximadamente, se necesita para doblar en cualquier momento la población de conejos?

d) ¿Al cabo de cuánto tiempo, aproximadamente, se llegará a una población de 1000 conejos?

e) Si la capacidad del criadero es de 2000 animales y las ventas son, como máximo, de 500 conejos al día, determina en cuánto tiempo se habrá llegado a la saturación de las instalaciones.

a) Sí sigue una ley exponencial, ya que los cocientes de C para valores de t igualmente espaciados son prácticamente constantes: $\frac{43}{25}=1{,}72$ $\frac{75}{43}=1{,}74$ $\frac{130}{75}=1{,}73$ $\frac{226}{130}=1{,}74$ $\frac{391}{226}=1{,}73$

b) $C(t)=C(0)\cdot 1{,}73^t=25\cdot 1{,}73^t$

c) Sea $C(t)$ la población de conejos en el tiempo t, queremos calcular el tiempo T que tiene que pasar para que $c(T+t)=2c(t)$:

$$c(t+T)=2c(t)\Rightarrow 25\cdot 1{,}73^{t+T}=2\cdot 25\cdot 1{,}73^t\Rightarrow 1{,}73^T=2\Rightarrow T\log 1{,}73=\log 2\Rightarrow T=\frac{\log 2}{\log 1{,}73}\simeq 1{,}26 \text{ meses}$$

d) $C(t)=1000\Rightarrow 25\cdot 1{,}73^t=1000\Rightarrow 1{,}73^t=40\Rightarrow t\log 1{,}73=\log 40\Rightarrow t=\frac{\log 40}{\log 1{,}73}\simeq 6{,}73$ meses.

e) Cada mes se vende, como máximo, $30\cdot 500=15000$ conejos. La saturación se producirá el mes en el que el número total de conejos supere los $2000+15000=17000$ conejos. Por tanto:

$$C(t)=17000\Rightarrow 25\cdot 1{,}73^t=17000\Rightarrow 1{,}73^t=680\Rightarrow t\log 1{,}73=\log 680\Rightarrow t=\frac{\log 680}{\log 1{,}73}\simeq 11{,}9$$

Es decir, las instalaciones se saturan a los 12 meses.

84. En los países anglosajones se utilizaba una escala de temperaturas diferentes de la de Celsius: la Fahrenheit. Las temperaturas expresadas en ambas escalas, Celsius (*C*) y Fahrenheit (*F*), se relacionan según la función: $C(F)=\frac{5}{9}(F-32)$

a) ¿Cuántos grados Celsius son 41 ºF?

b) ¿Cuántos grados Fahrenheit son –3 ºC?

c) Halla la función inversa de $C(F)$ que permite pasar de Celsius a Fahrenheit.

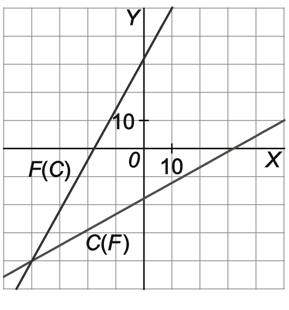
d) Representa, sobre los mismos ejes, la gráfica de la función $C(F)$ y su inversa calculando previamente sus puntos de corte con los ejes.

a) $C(41)=\frac{5}{9}(41-32)=5$ ºC

b) $C(F)=-3\Rightarrow \frac{5}{9}(F-32)=-3\Rightarrow F=26{,}6$ ºF

c) $C=\frac{5}{9}(F-32)\Rightarrow F=\frac{9}{5}C+32\Rightarrow F(C)=\frac{9}{5}C+32$

d) La función $C(F)$ corta a los ejes en los puntos $\left(0,-\frac{160}{9}\right)$ y $(32,0)$. La función $F(C)$ corta a los ejes en los puntos $(0,32)$ y $\left(-\frac{160}{9},0\right)$. Las gráficas son las rectas adjuntas.



85. La ley de enfriamiento de Newton establece que un objeto caliente se enfría siguiendo una ley exponencial según la expresión: $T(t) = T_{amb} + (T_0 - T_{amb})e^{-kt}$, donde $T(t)$ es la temperatura del objeto después de haber trascurrido t minutos; T_{amb}, la temperatura ambiente; T_0, la temperatura inicial del cuerpo; y k, una constante que depende de la naturaleza del objeto.

Una taza de café en una habitación a 20 ºC se enfría de 80 ºC a 60 ºC en 3 minutos. ¿Cuánto tardará en enfriarse a 30 ºC? ¿Y en alcanzar la temperatura ambiente?

Valor de k: $60 = 20 + (80 - 20)e^{-3k} \Rightarrow \frac{2}{3} = e^{-3k} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{2}{3}}{-3} \simeq 0{,}14$

Tiempo que tarda en enfriarse a 30 ºC: $30 = 20 + (80 - 20)e^{-0{,}14t} \Rightarrow \frac{1}{6} = e^{-0{,}14t} \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{1}{6}}{-0{,}14} \simeq 12{,}8$ minutos

Tiempo que tarda en enfriarse a 20 ºC: $20 = 20 + (80 - 20)e^{-0{,}14t} \Rightarrow 0 = e^{-0{,}14t}$ no tiene solución, por tanto, el café nunca llegará a alcanzar la temperatura ambiente.

86. La población de bacterias que crece en un cultivo depende del tiempo, t, en minutos, y viene dada por la función $N(t) = \frac{10^9}{1 + 10^4 e^{-t}}$.

a) ¿Cuál es la población inicial ($t = 0$)?

b) Comprueba que la población es siempre positiva, crece a medida que pasa el tiempo y tiende a estabilizarse en un valor.

a) $N(0) = \frac{10^9}{1 + 10^4} \simeq 99\,990$ bacterias.

b) El numerador y el denominador de la función son positivos, luego la población de bacterias siempre es positiva.

Como e^{-t} disminuye cuando t aumenta, el denominador disminuye con el tiempo y, por tanto, la población aumenta. La población tiende a estabilizarse en $\lim_{t \to +\infty} N(t) = 10^9$ bacterias.

87. Las perdidas o ganancias (y) en millones de euros de una empresa fundada hace medio año vienen dadas por la expresión $y = \frac{t}{t+3}$ donde t es el tiempo expresado en años y el valor $t = 0$ corresponde al momento actual.

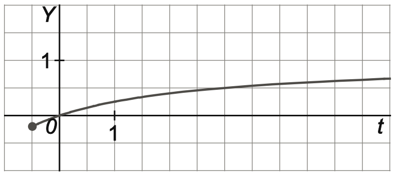
a) Representa gráficamente la función.

b) Calcula la ganancia máxima previsible en el futuro, si existe, y el momento en que se producirá.

c) Halla para qué tiempo las ganancias igualan a las pérdidas que se produjeron en la fundación de la empresa.

d) Razona si tendría sentido aplicar esta misma función al caso de una empresa fundada hace tres años.

a) Según las condiciones dadas, la gráfica sólo tiene sentido si $t \geq -\frac{1}{2}$.



b) $y' = \frac{3}{(t+3)^2}$ es positiva si $t \neq 3$, por tanto, la función es creciente, por lo que no existe ganancia máxima, aunque, como $\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{t+3} = 1$, las ganancias aumentaran cada vez más acercándose, pero no alcanzando nunca, el millón de euros.

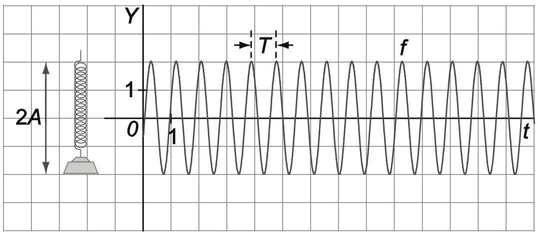
c) Las pérdidas iniciales fueron $\frac{1}{7}$ millones de euros, por tanto, las ganancias igualarán a las pérdidas iniciales cuando $\frac{t}{t+3} = \frac{1}{7} \Rightarrow 7t = t + 3 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$, es decir, medio año después de la fundación de la empresa.

d) No tendría sentido, ya que la función no está definida si $t = -3$.

88. La posición del móvil en un movimiento vibratorio armónico simple es: $y(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$ donde A, ω y ϕ_0 son constantes con $\omega > 0$.

La amplitud (A) es la máxima separación entre la partícula y la posición de equilibrio.

El período (T) es el tiempo que emplea la partícula en recorrer una oscilación completa y la frecuencia (f) es el número de oscilaciones que realiza por unidad de tiempo.



La función $y(t) = 4\cos(7t - 2)$, donde t se mide en segundos e $y(t)$ en centímetros, describe el movimiento de un muelle al separarlo de su posición de equilibrio. Halla la amplitud, el período y la frecuencia, así como la posición inicial del muelle y para $t = 1$ s.

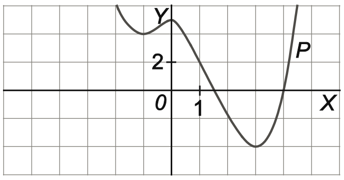
Amplitud: $A = 4$ cm. Período: $y(t) = 4\cos(7t-2) = 4\cos(7t-2+2\pi) = 4\cos\left(7\left(t+\frac{2\pi}{7}\right)-2\right) = y\left(t+\frac{2\pi}{7}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{7} \simeq 0{,}9$ s.Frecuencia: $f = \frac{1}{T} = \frac{7}{2\pi} \simeq 1{,}11$ oscilaciones por segundo.

Posición inicial: $y(0) = 4\cos(-2) \simeq -1{,}66$ cm. Posición para $t = 1$ s: $y(1) = 4\cos(5) \simeq 1{,}13$ cm.

PARA PROFUNDIZAR

89. Sea la gráfica de $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$.



Entre los siguientes números, ¿cuál es el menor?

a) $P(-1)$

b) El producto de las raíces de $P(x)$.

c) El producto de las raíces no reales de $P(x)$.

d) La suma de los coeficientes de $P(x)$.

e) La suma de las raíces reales de $P(x)$.

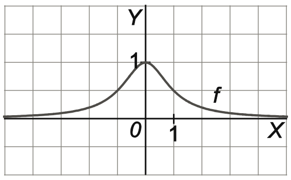
f) $P(0)P(1)$

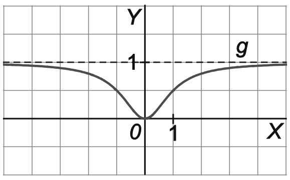
g) $P(0)+P(1)$

$P(-1) = 4$;el producto de todas las raíces de un polinomio es su término independiente, en este caso es $P(0) = 5$; el producto de las raíces reales es $1{,}5 \cdot 4 = 6$, por tanto, el de las raíces no reales es $\frac{5}{6}$; la suma de los coeficientes es $P(1) = 2$; la suma de las raíces reales es $1{,}5 + 4 = 5{,}5$; $P(0)P(1) = 5 \cdot 2 = 10$; $P(0) + P(1) = 5 + 2 = 7$.

Por tanto, el número más pequeño es el producto de las raíces no reales de $P(x)$, $\frac{5}{6}$.

90. Si la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es la que se muestra en el primer recuadro, encuentra una fórmula para la función cuya gráfica es la del segundo recuadro.



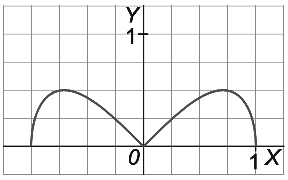


La segunda gráfica se obtiene a partir de la primera en dos pasos. Primero hacemos el simétrico de la gráfica de f respecto del eje X, es decir, es la gráfica de $-f(x)$. Después desplazamos la gráfica resultante una unidad hacia arriba, es decir, la función buscada es $1 - f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$.

91. Dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-x^4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{1+|x-1|}+\dfrac{1}{1+|x-4|}$

a) Dominio y continuidad



$D(f)=\{x\in\mathbb{R}: x^2-x^4\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}: x^2(1-x^2)\ge 0\}==\{x\in\mathbb{R}: 1-x^2\ge 0\}=[-1, 1]$.

La función es continua en su dominio.

Puntos de corte con los ejes y signo

Eje Y: $f(0)=0\Rightarrow(0, 0)$

Eje X: $f(x)=0\Rightarrow x^2-x^4=0\Rightarrow x^2(x+1)(x-1)=0\Rightarrow x=0,\ x=-1,\ x=1\Rightarrow(-1, 0), (0, 0)$ y $(1, 0)$

Signo: Como se toma la raíz positiva, $f\ge 0$ en su dominio.

Simetría: $f(-x)=f(x)\Rightarrow$ la función es par.

Asíntotas: No tiene.

Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos

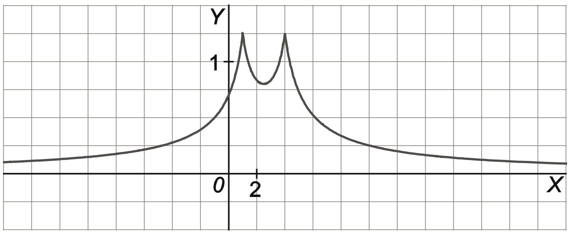
$f'(x)=\dfrac{x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}$, se anula si $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, observemos que el numerador también se anula si $x=0$, pero en este valor también se anula el denominador, por lo que $f'(0)$ no está definido, aún así hay que incluir este valor en el estudio del signo de f', ya que puede haber un cambio de signo al pasar por él. Realizando la correspondiente tabla de signos se obtieneque f'es positiva (f creciente) en $\left(-1, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y negativa (f decreciente) en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$. Por tanto, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ son máximos relativos (de hecho absolutos) y (–1, 0), (0, 0) y (1, 0) son mínimos absolutos.

Curvatura y puntos de inflexión

$f''(x)=\dfrac{x^2(2x^2-3)}{(1-x^2)\sqrt{x^4-x^2}}$ es negativa en el dominio de f(salvo en $x=0$, donde no está definida), ya que $2x^2-3<0$ si $-1\le x\le 1$, luego la función es cóncava hacia abajo y no tiene puntos de inflexión.

b) $$f(x)=\frac{1}{1+|x-1|}+\frac{1}{1+|x-4|}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+1-x}+\dfrac{1}{1+4-x} & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{1}{1+x-1}+\dfrac{1}{1+4-x} & \text{si } 1<x<4\\ \dfrac{1}{1+x-1}+\dfrac{1}{1+x-4} & \text{si } x\ge 4\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{7-2x}{(2-x)(5-x)} & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{5}{x(5-x)} & \text{si } 1<x<4\\ \dfrac{2x-3}{x(x-3)} & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$

Realizando un estudio, que incluya al menos el estudio del dominio, puntos de corte, signo y asíntotas, de las funciones racionales $f_1(x)=\dfrac{7-2x}{(2-x)(5-x)}$, $f_2(x)=\dfrac{5}{x(5-x)}$ y $f_3(x)=\dfrac{2x-3}{x(x-3)}$ y restringiendo el dibujo de sus gráficas al correspondiente intervalo de definición se puede hacer un esbozo de la gráfica de f.



92. Se definen las funciones coseno hiperbólico, cosh *x*, y seno hiperbólico, senh *x*, en la forma:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Por ejemplo, una cadena que cuelga sujeta por sus extremos adopta la forma de un coseno hiperbólico conocido como catenaria.

a) Determina el dominio, el signo, los cortes con los ejes y los límites en el infinito de estas dos funciones.

b) Prueba que $\cosh x$ es una función par y que $\operatorname{senh} x$ es una función impar.

c) Demuestra la relación: $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

d) Representa gráficamente las funciones $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$.

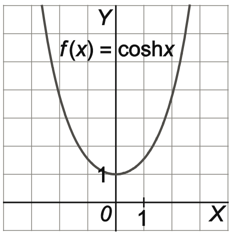
a) Estudiemos primero la función $f(x) = \cosh x$, su dominio es $\mathbb{R}$, corta la eje *Y* en el punto (0, 1), no corta al eje *X* (ya que $f(x) = 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = -e^{-x}$ no tiene solución), es siempre positiva, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$.

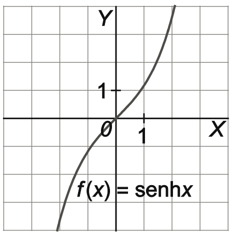
Estudiemos ahora la función $f(x) = \operatorname{senh} x$, su dominio es $\mathbb{R}$, corta la eje *Y* en el punto (0, 0), corta al eje *X* en el punto (0, 0) (ya que $f(x) = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0$), es positiva si $x > 0$ y negativa si $x < 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$.

b) $\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x$ y $\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\operatorname{senh} x$.

c) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{2+2}{4} = 1$

d)





ENTORNO MATEMÁTICO

Un refresco no muy frío

Después de un intenso partido de fútbol, un grupo de amigos compran refrescos en la máquina que hay a la entrada del vestuario. Aunque sus colegas hacen bromas de ello, a Manuel le gusta tomar agua. Para su sorpresa, cuando cae la botella está parcialmente congelada. Los demás se parten de risa y le dicen que pida un cuchillo y un tenedor para tomarla, pero él aguanta las bromas y decide dejarla en unbanco del vestuario pensando: "seguro que mientras de ducho y me visto el hielo se habrá derretido del todo y el agua tendrá una temperatura adecuada para beberla". Entonces, Quique, el listillo de la clase, le comenta: "hombre, el termómetro del vestuario marca 30 ºC y la ley de enfriamiento de los cuerpos de Newton dice que la temperatura, en grados centígrados, después de *t* minutos viene dada por la función $f(t) = 30 - Ae^{-kt}$ donde *A* y *k* son constantes. Si calculáramos los valores de *A* y *k*, podríamos estimar en cuánto tiempo podrás beber el agua".

a) Manuel entra en la ducha, cuando el hielo ya se ha deshecho y el agua está a 0 ºC. Si tarda 20 minutos en estar aseado y vestido y entonces el agua está a unos 5 ºC, ¿podrá, con la ayuda de Quique, calcular los valores de *A* y *k* y saber cuánto tiempo debe esperar para que el agua alcance los 10 ºC y así poder bebérsela?

b) Suponiendo que dejara en la botella una parte del agua a 10 ºC, ¿qué habría pasado con la temperatura si alguien la encontraraal cabo de 1000 años?

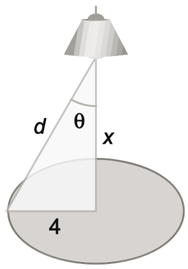
a) Como $f(0) = 0$ y $f(20) = 5$, secalculan*A* y *k* resolviendo el sistema $\begin{cases} 30 - A = 0 \\ 30 - Ae^{-20k} = 5 \end{cases}$, de donde se obtiene $A = 30$ y

$e^{-20k} = \frac{5}{6} \Rightarrow -20k = \ln\left(\frac{5}{6}\right) \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{-20} \simeq 0{,}009$, luego $f(t) = 30 - 30e^{-0{,}009t}$.Ahora, para saber cuando el agua estará a 10 ºC, se resuelve la ecuación $f(t) = 10 \Rightarrow 30 - 30e^{-0{,}009t} = 10 \Rightarrow e^{-0{,}009t} = \frac{2}{3} \Rightarrow -0{,}009t = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{-0{,}009} \approx 45{,}05$ minutos, es decir, Manuel deberá esperar unos 25 minutos para beberse el agua.

b) Como 10 000 años son muchos minutos se puede saber quéocurrirá calculando $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(30 - 30e^{-0{,}009t}\right) = 30$, es decir, el agua alcanzará la temperatura del vestuario.

La lámpara colgante



A Eva no le gusta la oscuridad y siempre intenta tener mucha luz en su habitación. Después de protestar mucho a sus padres porque la lámpara de su mesa de estudio da poca luz, consigue que su padre compre una nueva lámpara más potente para el techo del cuarto: "me sale más barato cambiar la lámpara que los analgésicos contra el dolor de cabeza que me producen tus quejas".

Dicho y hecho, así es que Eva y su jaquecoso padre deciden que la nueva lámpara esté sobre la perpendicular de la pequeña mesa circular de Eva, que tiene 8 dm de diámetro.

La lámpara que han elegido tiene un largo cable para poder ser regulada en altura.

El padre de Eva, lector asiduo de "Bricomatemática", ha deducido que la iluminación producida por la lámpara en cada punto del borde de la mesa es directamente proporcional al coseno del ángulo θ e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la bombilla.

¿A qué altura de la mesa hay que colocar la lámpara para maximizar la iluminación de la mesa?

AYUDA: La función que da la iluminación es $f = \frac{\cos\theta}{d^2}$ y a partir del teorema de Pitágoras y la trigonometría se pueden hallar los valores del coseno y la distancia en función de *x*.

$d^2 = 16 + x^2$ y $\cos\theta = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}$, así, podemos escribir la iluminación como $f(x) = \frac{x}{\left(\sqrt{16+x^2}\right)^3}$.

Para encontrar el máximo de esta función cuando $x \geq 0$ se deriva e iguala a 0:

$$f'(x) = \frac{16-2x^2}{\left(\sqrt{16+x^2}\right)^5} = 0 \Rightarrow x = -2\sqrt{2} \text{ (No válida)}, \ x = 2\sqrt{2}$$

Además f' cambia de signo, pasando de ser positiva a ser negativa cuando pasa por el valor $x = 2\sqrt{2}$, por lo que es un máximo relativo, es decir, hay que colgar la lámpara a $2\sqrt{2} \simeq 2{,}83$ dm de la mesa.

NOTA: Solo se ha probado que $x = 2\sqrt{2}$ es un máximo relativo, si se desea confirmar que, de hecho, es absoluto, basta observar que $f(0) = 0$, $f\left(2\sqrt{2}\right) > 0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, lo que tiene perfecto sentido físico, ya que si colocamos la lámpara pegada a la mesa o infinitamente alejada de ella, la iluminación se reduce a 0.

AUTOEVALUACION

Comprueba qué has aprendido

1. Determina el signo y la simetría de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x-1}$ **b)** $g(x) = x^2 - 4$

$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, $D(g) = \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)(x-2)}{x-1} = (x+2)(x-2) = g(x)$ si $x \neq 1$

La función g es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-2, 2)$, por tanto, la función f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(-2, 1) \cup (1, 2)$.

La función g es par, ya que $g(-x) = g(x)$. La función f también cumple $f(-x) = f(x)$ si $x \neq 1$, pero como $f(-1) = -3$ y $f(1)$ no está definido, la función no es par.

2. ¿Cuántas asíntotas tiene la gráfica de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{5}{4} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 8} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$**?**

Asíntotas verticales: $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, por tanto, hay que comprobar la posible existencia de asíntotas verticales en $x = 2$ y $x = 0$ (donde la función cambia de expresión).

La recta $x = 2$ no es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 8} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{2(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-1}{2(x+2)} = \frac{1}{8}$.

La recta $x = 0$ no es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(e^x - \frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 8} = -\frac{1}{4}$.

Asíntotas horizontales:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x - \frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{4}$, por tanto, la recta $y = -\frac{5}{4}$ es la asíntota horizontal en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 8} = \frac{1}{2}$, por tanto, la recta $y = \frac{1}{2}$ es la asíntota horizontal en $+\infty$.

Asíntotas oblicuas: No puede tener, ya que tiene horizontales.

Por tanto, la gráfica tiene únicamente dos asíntotas, ambas horizontales.

3. **Determina los máximos y mínimos de $f(x) = x^4 - x^2 + 5$.**

$f'(x) = 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Se puede estudiar el signo de la derivada para determinar si estos puntos son máximos o mínimos, pero es mucho más sencillo usar la segunda derivada.

$f''(x) = 12x^2 - 2$, como $f''(0) = -2 < 0$ y $f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 > 0$, se obtiene que el punto (0, 5) es un máximo y los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{19}{4}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{19}{4}\right)$ son mínimos.

4. **Determina todas las asíntotas de la función racional: $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9}$**

Asíntotas verticales:

Como $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$, las posibles asíntotas verticales son $x = -3$ y $x = 3$. Resulta más sencillo el estudio si se obeserva que $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} = \frac{x(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{x(x-2)}{x+3}$ si $x \neq 3$, así:

La recta $x = -3$ sí es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3^-} \frac{x(x-2)}{x+3} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} =$

$= \lim\limits_{x \to -3^+} \frac{x(x-2)}{x+3} = +\infty$ .La recta $x = 3$ no es asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \frac{x(x-2)}{x+3} = \frac{1}{2}$.

Asíntotas horizontales:

No tiene, ya que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} = +\infty$

Asíntotas oblicuas:

Sí tiene, ya que cumple la condición de los grados, dividiendo tenemos $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9} = x - 5 + \frac{15x - 45}{x^2 - 9}$,por tanto, la recta $y = x - 5$ es la asíntota oblicua.

5. **Calcula las asíntotas horizontales, si existen, de la función $f(x) = \frac{x^2 + e^x}{e^{2x}}$.**

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + e^x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + e^{-x}}{e^{-2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x}\left(x^2 + e^{-x}\right) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + e^x}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{e^{2x}} + \frac{1}{e^x}\right) = 0$, por tanto, la recta $y = 0$ es asíntota horizontal por la derecha y no hay asíntota horizontal por la izquierda.

6. **Demuestra que si $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ es la función $f(x) = x\,\mathrm{tg}\,x$, entonces $f(x)$ es no negativa en su dominio y su derivada es $f'(x) = \frac{2x + \mathrm{sen}\,2x}{2\cos^2 x}$.**

En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ tanto x como tg x son negativas, mientras que en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ambas son positivas, por lo que, en cualquier caso, su producto es positivo. Además $f(0) = 0$, lo que prueba que $f(x)$ es no negativa en su dominio.

$f'(x) = \mathrm{tg}x + x\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x} + \frac{x}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{sen}x \cos x + x}{\cos^2 x} = \frac{2\mathrm{sen}x \cos x + 2x}{2\cos^2 x} = \frac{\mathrm{sen}2x + 2x}{2\cos^2 x}$.

7. **Si f y g son funciones polinómicas tales que $f(x)=g(x)$ para todos los números x de un cierto intervalo [a, b], ¿puede existir algún número real c para el que $f(c)\neq g(c)$?**

No puede existir tal número real. El polinomio $P(x)=f(x)-g(x)$ tiene infinitas raíces (todos los números del intervalo [a, b]), por tanto debe ser el polinomio nulo, $P(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, por tanto $f(x)=g(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

8. **¿Tiene asíntotas verticales u horizontales la función $f(x)=\ln\left(e^x+1\right)$?**

Como $e^x+1>1$ para todo $x\in\mathbb{R}$, el dominio de f es $\mathbb{R}$ y, por tanto, no hay asíntotas verticales.

La recta $y=0$ es asíntota horizontal por la izquierda, ya que $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)=\ln 1=0$.

No hay asíntota horizontal por la derecha, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^x+1\right)=+\infty$.

9. **Sea f la función definida en $(0,+\infty)$ por la fórmula $f(x)=2x+3-\ln x$. Señala las afirmaciones correctas:**

a) f es creciente.

b) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=3$

c) f tiene una asíntota oblicua.

d) La gráfica de f siempre está por debajo de la recta $y=2x+3$.

a) Falsa. $f'(x)=2-\dfrac{1}{x}$ es negativa en el intervalo $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, por lo que en este intervalo la función es decreciente.

b) Falsa, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x+3-\ln x)=+\infty$

c) Falsa, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)=2$ pero $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(3-\ln x)=-\infty$.

d) Falsa. $f(x)-(2x+3)=-\ln x$ es negativa en el intervalo (0, 1), por lo que en este intervalo la función está por debajo de la recta.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. **Considera la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$. Entonces:**

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

B. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

C. f no es derivable en $x=0$.

D. f tiene un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.

A y B son falsas, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}-xe^x=-\infty$.

$f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$, con lo que C es falsa, ya que f' está definida si $x=0$, de hecho, $f'(0)=1$.

D es verdadera, ya que f' es positiva si $x<1$ y negativa si $x>1$, por lo que la función f es creciente en $(-\infty,1)$ y decreciente en $(1,+\infty)$, lo que implica que en el punto de abscisa $x=1$ hay un máximo absoluto que es $f(1)=\dfrac{1}{e}$.

2. **Si $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$, entonces:**

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

B. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

C. *f* tiene un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

D. *f* es derivable en $\mathbb{R}$.

A y B son falsas, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}=+\infty$.

$f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ no está definida si $x=1$, por tanto D es falsa.

C es verdadera, ya que *f ′* es negativa si $x<1$ y positiva si $x>1$, por lo que la función *f* es decreciente en $(-\infty,1)$ y creciente en $(1,+\infty)$, lo que implica que en el punto de abscisa $x=1$ hay un mínimo absoluto, aunque $f'(1)$ no esté definido. El mínimo es $f(1)=0$

3. **Si $f(x)=x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x$, entonces:**

A. Existe un número real *M* tal que $f(x)\le M$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

B. Existe un número real *T* tal que $T\le f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

C. La gráfica de *f* corta al eje *X* en un punto de abscisa positiva.

D. La gráfica de *f* corta solo una vez al eje horizontal.

Como $-1\le\operatorname{sen}x\le1\Rightarrow-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{2}\le-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x\le\dfrac{1}{2}\Rightarrow x-\dfrac{1}{2}\le x-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}x\le x+\dfrac{1}{2}\Rightarrow x-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le x+\dfrac{1}{2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$, A y B son falsas, ya que, por ejemplo, si A fuera verdadera, tendríamos que $x-\dfrac{1}{2}\le M\Rightarrow x\le M+\dfrac{1}{2}$ para todo $x\in\mathbb{R}$, lo que es obviamente falso.

Observemos que $f'(x)=1-\dfrac{1}{2}\cos x$ es positiva para todo $x\in\mathbb{R}$, por lo que *f* es creciente, con lo que cortará al eje *X* como máximo en un punto. Como $f(0)=0$ tenemos que C es falsa y D verdadera.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^{x-1}}$. Entonces:**

A. *f* es continua en $\mathbb{R}$.

B. *f* es creciente en $\mathbb{R}$.

C. $y=e$ es asíntota horizontal de *f*.

D. Si $x>0$, $f'(x)<e$.

El denominador de *f* no se anula nunca, por lo que $D(f)=\mathbb{R}$ y *f* es continua en su dominio, con lo que A es verdadera.

$f'(x)=\dfrac{e^xe^{x-1}-\left(e^x-1\right)e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\dfrac{e^{2x-1}-e^{2x-1}+e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\dfrac{e^{x-1}}{e^{2(x-1)}}=\dfrac{1}{e^{x-1}}$ es positiva para todo $x\in\mathbb{R}$, por lo que B es cierta. Además, $f'(x)=\dfrac{1}{e^{x-1}}<\dfrac{1}{e^{-1}}=e$ si $x>0$, por lo que D también es verdadera.

Finalmente, C también es verdadera, ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^{x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e-\dfrac{1}{e^{x-1}}\right)=e$.

5. **Sea** $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ **. Entonces:**

A. f es continua en $\mathbb{R}$.

B. La gráfica de f no tiene asíntotas.

C. La recta $y=x-2$ es asíntota de la gráfica de f.

D. La recta $y=x+2$ es asíntota de la gráfica de f.

$x^2+4x+5>0$ para todo x, por lo que $D(f)=\mathbb{R}$ y f es continua en su dominio, es decir, A es verdadera.

La recta $y=x-2$ es la asíntota oblicua por la derecha de la gráfica de f, con lo que C será verdadera y, por tanto, B falsa: $m_\infty=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x\sqrt{x^2+4x+5}}=1$

$$n_\infty=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x\sqrt{x^2+4x+5}}{\sqrt{x^2+4x+5}}\right)=-2,$$

Finalmente, D es falsa, ya que, de ser cierta, la recta $y=x+2$ (de pendiente 1) debería ser la asíntota oblicua por la izquierda, pero, de existir dicha asíntota, su pendiente sería

$$m_{-\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(-x)}{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x\sqrt{x^2-4x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-4x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}=-1.$$

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

6. **Considera la parábola** $f(x)=px-x^2$ **. Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones siguientes:**

1. La recta $y=2x$ es la tangente en el origen.

2. Si $x>2$, entonces $f(x)<0$.

A. $1\Rightarrow 2$ pero $2\not\Rightarrow 1$ **B.** $2\Rightarrow 1$ pero $1\not\Rightarrow 2$ **C.** $1\Leftrightarrow 2$ **D.** Nada de lo anterior.

La recta tangente a la parábola en el origen es $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=px$, por tanto, si 1 es cierta deduciríamos que $p=2$, con lo que $f(x)=2x-x^2=x(2-x)$ y 2 sería cierta, es decir, $1\Rightarrow 2$.

En cambio $2\not\Rightarrow 1$, ya que, por ejemplo, si $p=1$ se verifica 2 pero no 1.

Señala el dato innecesario para contestar

7. **Para calcular los máximos y mínimos relativos de la función** $f(x)=e^{x^3+ax^2+bx+c}$ **, nos dan los siguientes datos:**

1. El valor de *a* **2. El valor de *b*** **3. El valor de *c***

En estas circunstancias puede eliminarse:

A. El dato 1

B. El dato 2

C. Puede eliminarse el dato 3

D. No puede eliminarse ningún dato

La función es derivable en todo $\mathbb{R}$, por tanto, para calcular las abscisas de los máximos y mínimos relativos bastaría estudiar el signo de $f(x)=e^{x^3+ax^2+bx+c}\left(3x^2+2ax+b\right)$, pero como $e^{x^3+ax^2+bx+c}$ es positivo, bastaría estudiar el signo de $3x^2+2ax+b$, por lo que podría eliminarse el dato 3.

Ahora bien, si no basta con conocer la abscisa de los extremos relativos y tambiénse quiere conocer su ordenada en el origen, no se puede eliminar ningún dato. Respuesta D.